GEORGE BOOLE

ANÁLISIS MATEMÁTICO DE LA LÓGICA

ENSAYO DE UN CÁLCULO DEL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

Ἐπικοινωνοῦσι δὲ πᾶσαι αἱ ἐπιστῆμαι ἀλλήλαις κατὰ τὰ κοινά. Κοινά δὲ λέγω, οἷς χρῶνται ὡς ἐκ τούτων ἀποδεικνύντες ἀλλ' οὐ περὶ ὧν δεικνύουσιν, οὐδε ὃ δεικνύουσι.

ARISTOTLE, *Anal. Post.*, lib. I, cap. XI.

TRADUCCIÓN Y NOTAS DE
ARMANDO ASTI VERA

INSTITUTO DE FILOSOFÍA
DE LA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
1960

HOMENAJE DE LA FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN AL SESQUICENTENARIO DE LA REVOLUCIÓN DE MAYO.

Queda hecho el depósito
que previene la ley 11.723

Impreso en la Argentina — Printed in Argentina

ADVERTENCIA

Las notas que complementan esta versión no agotan los comentarios posibles de esta obra, breve pero densa, que refleja cabalmente el pensamiento lógico de su autor. En nuestro libro *La lógica matemática, su método y sus aplicaciones* intentamos completar la labor iniciada aquí, estudiando preferentemente las proyecciones de la obra de Boole en la matemática, la física y la biología contemporáneas.

Las notas del autor se consignan al pie de página, señaladas con asteriscos; las nuestras llevan números correlativos. La traducción ha sido realizada directamente de la edición de B. Blackwell de 1948, que reproduce el texto original de 1847.

EL TRADUCTOR.

PREFACIO

Al dar esta obra a la publicidad, considero necesario señalar que especulaciones similares a las expuestas aquí han ocupado mis pensamientos en distintas épocas. En la primavera de este año, impulsado por el interés que produjo la controversia entre Sir W. Hamilton y el profesor De Morgan (1), me decidí a reasumir el hilo —casi olvidado— de antiguas investigaciones. Me pareció que aunque la Lógica puede ser considerada con referencia a la idea de cantidad (*) implica, además, un sistema de relaciones más profundas. Si bien es lícito examinarla *desde afuera* como vinculada, a través del número, con las intuiciones de espacio y tiempo, también lo es el considerarla *desde adentro* como basada en hechos de otra naturaleza que tienen su fundamento en la constitución de la mente (2). Los resultados de este punto de vista y de las investigaciones que ha sugerido han sido incluidos en este Ensayo.

En general, a los autores les está vedado prescribir la manera en que sus obras debieran ser juzgadas; por mi parte, me aventuro a exigir dos condiciones a aquellos que emprendan la tarea de estimar los méritos de esta obra. La primera es el abandono de toda noción preconcebida acerca de la imposibilidad de esta investigación que pudiera interferir el espíritu sincero e imparcial que requiere la búsqueda de la verdad. La segunda es que su juicio sobre la totalidad del sistema no se funde en el examen de una sola parte de la obra, ni esté condicionado a su conformidad con algún sistema ya aceptado, considerado como modelo de referencia, y a partir del cual se le niegue interés.

(*) V. pág. 89

Las pretensiones del método a constituirse en un cálculo del razonamiento deductivo se fundamentan en los teoremas generales formulados y desarrollados en los últimos capítulos de este libro, cuyos resultados consideramos originales.

En lo que a mí respecta, no deseo ni me cabe el derecho de anticipar un juicio acerca del valor del sistema. La significación de una teoría no está determinada solamente por su verdad sino, además, por la importancia de su tema y por la extensión de sus aplicaciones. Y, por encima de todo esto, algo depende también de la arbitrariedad de la opinión pública.

Si la utilidad de la aplicación de formas matemáticas a la ciencia Lógica fuera una mera cuestión de notación, me consideraría satisfecho basando la defensa de este Ensayo en un principio establecido por un competente autor contemporáneo: "Siempre que la naturaleza del asunto permita, sin riesgo, conducir el razonamiento mecánicamente, el lenguaje debe ser tan mecánico como sea posible; en caso contrario, debe hacerse de manera que no pueda prestarse sino muy difícilmente a un empleo puramente mecánico" (*). La ciencia de la Lógica difiere de todas las otras en un aspecto: la perfección de su método es particularmente estimable como una evidencia de la verdad especulativa de sus principios.

El reemplazo del razonamiento vulgar, o la sumisión de éste al rigor de las formas técnicas, sería la última aspiración de quien conoce el valor de esa labor intelectual y esa lucha que imprimen a la mente un vigor atlético, y la enseñan a bregar con las dificultades y a confiar en sí misma en cualquier contingencia.

Lincoln, octubre 29 de 1847.

(*) St. Mill: *System of Logic, Ratiocinative and Inductive,* Vol. II, p. 292.

INTRODUCCION

Quienes están informados del estado actual de la teoría del Algebra Simbólica saben que la validez de los procedimientos de análisis no depende de la interpretación de los símbolos utilizados, sino exclusivamente de las leyes de su combinación [3]. Todos los sistemas de interpretación que no afectan la verdad de las relaciones supuestas son igualmente admisibles y tanto es así que el mismo método, según un esquema interpretativo, representa la solución de un problema sobre propiedades de números, en una segunda interpretación, resuelve un problema geométrico y, en una tercera, soluciona una cuestión de dinámica o de óptica [4]. Este principio es, en realidad, de fundamental importancia y se puede afirmar con certeza que los recientes progresos del Análisis puro han sido favorecidos en buena parte por su influencia en la dirección de las investigaciones [5].

No obstante, el reconocimiento cabal de las consecuencias de esta importante doctrina ha sido retardado, en cierta medida, por circunstancias accidentales. En todas las formas conocidas del Análisis ha ocurrido que los elementos a determinar han sido considerados como mensurables por comparación con algún modelo prefijado. La idea predominante ha sido la de magnitud o, dicho más estrictamente, la de razón numérica. La expresión de la magnitud, o de las operaciones sobre magnitudes, ha sido la finalidad expresa para la cual fueron creados los símbolos del Análisis y la razón de que se investigaran sus leyes. De este modo, tanto las abstracciones del Análisis moderno como los diagramas intuitivos de la Geometría clásica han favorecido el criterio de que la Matemática es esencialmente, y también realmente, la ciencia de la magnitud.

La consideración de la perspectiva, ya establecida, que involucra el verdadero principio del Algebra de los símbolos nos lleva a inferir, sin embargo, que esta conclusión de ningún modo es necesaria. Si toda interpretación existente muestra que lleva implícita la idea de magnitud, sólo por inducción podemos asegurar que otra no sea posible. Y cabe dudar de que baste nuestra experiencia para legitimar esa inducción. Se puede afirmar que la historia del Análisis puro es demasiado reciente para permitirnos fijar límites a la extensión de sus aplicaciones. A lo sumo, podríamos conceder a la inferencia un alto grado de probabilidad y afirmar, con razón, la suficiencia de la definición a la cual nos ha conducido el principio establecido. Y considerarla con justicia como el carácter distintivo del verdadero cálculo, porque es un método que se apoya en el empleo de símbolos regidos por leyes combinatorias generales y conocidas, cuyos resultados admiten una interpretación no contradictoria. El asignar una interpretación cuantitativa consistente a las formas existentes del Análisis es el resultado de circunstancias que determinaron a aquellas formas, pero esa interpretación no debe ser considerada una condición universal del Análisis (6).

Tomando como fundamento este principio general, me propongo establecer el Cálculo de la Lógica para el que reclamo un lugar entre las formas conocidas del Análisis Matemático, prescindiendo del hecho de que, en la actualidad, sea único tanto por su objeto como por sus instrumentos (7). Lo que hace posible la Lógica es la existencia de nociones generales en nuestras mentes: nuestra capacidad para concebir una clase y designar sus miembros individuales por medio de un nombre común. La teoría de la Lógica y la teoría del lenguaje resultan, así, íntimamente relacionadas. Un intento afortunado de expresar las proposiciones lógicas por medio de símbolos —cuyas leyes combinatorias podrían basarse en las leyes de los procesos mentales que representan— sería un paso en el camino hacia un lenguaje filosófico (8). Pero éste es un criterio que no es necesario desarrollar aquí con detalle (*).

Supuesta la noción de clase, mediante un acto mental podemos separar de cualquier colección concebible

(*) Este punto de vista ha sido muy bien formulado por Blanco White en una de sus *Letters*: "La Lógica es, en su mayor parte, una colección de reglas técnicas basadas en la clasificación. El silogismo no es más que el resultado de una clasificación de las cosas, que la mente construye natural y necesariamente al configurar un lenguaje. Todos los términos abstractos son clasificaciones; o, mejor aún, son los rótulos de las clases establecidas por la mente". (*Mémoirs of the Rev. Joseph Blanco White.* Vol. II, p. 163. V. también una lúcida introducción en la obra del Dr. Latham *First Outlines of Logic applied to Language* y en la *German Grammar* de Becker, etc. El punto de vista opuesto puede verse en *Eternal and Inmutable Morality,* Book IV, Chap. III, de Cudworth).

de objetos los que pertenecen a la clase dada y considerarlos independientemente de los otros. Se puede concebir repetidamente éste u otro acto similar de elección. El grupo de los individuos puede ser limitado más aún escogiendo mentalmente entre ellos los que pertenecen a otra clase reconocida, en manera análoga a la considerada primeramente. Y este procedimiento puede ser repetido con otros elementos de diferenciación hasta llegar a un individuo que posea todos los caracteres distintivos que se han tenido en cuenta y sea, al mismo tiempo, miembro de todas las clases enumeradas. En su esencia, este método es similar al que utilizamos en el lenguaje corriente, toda vez que acumulamos epítetos descriptivos con el objeto de llegar a una definición más precisa.

Ahora bien, las diversas operaciones mentales —que hemos supuesto realizadas en el caso anterior— están sujetas a leyes particulares. Es posible considerar entre aquéllas ciertas relaciones nunca desmentidas, tanto en lo que se refiere a la repetición de una operación dada o a la sucesión de diferentes operaciones, como a alguna en particular.

Por ejemplo, es cierto que el resultado de dos actos sucesivos no es afectado por el orden en que han sido ejecutados. Y existe, por lo menos, otro par de leyes que serán señaladas cuando corresponda. Para algunos, tal vez estas leyes resultarán demasiado obvias para ser incluidas entre las verdades necesarias, y poco importantes para ser destacadas. Y acaso sea en este Ensayo donde por primera vez han sido mencionadas.

Sin embargo, puede afirmarse con seguridad que si fueran distintas de lo que son, no sólo habría que cambiar esencialmente todo el mecanismo del razonamiento sino las leyes y la estructura misma del intelecto humano. Existiría una Lógica pero sería distinta de la que ahora poseemos.

Éstas son las leyes elementales sobre cuya existencia y capacidad de expresión simbólica está fundado el método de este Ensayo; y cabe presumir que el objetivo perseguido haya sido logrado plenamente. Toda proposición lógica, categórica o hipotética, deberá poder ser formulada por medio de una expresión exacta y rigurosa, y no solamente podrán deducirse las leyes de la conversión y del silogismo sino que, además, se alcanzará la solución de los más complejos sistemas de proposiciones, la separación de todo elemento propuesto y la expresión de su valor en términos de los restantes con todas las relaciones subsidiarias involucradas. Cada procedimiento representará la deducción y toda consecuencia matemática expresará una inferencia lógica. La generalidad del método nos permitirá, asimismo, expresar las operaciones arbitrarias del intelecto y llegar así a la demostración de los teoremas generales de la Lógica, análogos y de no menor importancia que los teoremas de la Matemática ordinaria.

Una parte no desestimable del placer que se deriva de aplicar el Análisis a la interpretación de la naturaleza exterior, surge de las concepciones que nos permite formarnos acerca de la universalidad del alcance de la ley. Las fórmulas generales a las que somos conducidos parecen conferirle una presencia visible, y la multiplicidad de casos particulares a los cuales se aplica demuestra la extensión de su validez. La simetría, incluso, de su expresión analítica refleja —y nada hay en ello de fantástico— su armonía y su consistencia (9). Claro está que no pretendemos afirmar hasta qué punto este Ensayo podrá ofrecer análogas perspectivas placenteras. La estimación de la extensión de tales posibilidades las dejamos a aquellos que consideren que este tema es digno de sus investigaciones. No obstante, me aventuro a asegurar que en este trabajo no les faltarán motivos para experimentar ese placer intelectual.

Las leyes que vamos a examinar son las de una de las más importantes facultades de nuestra mente; las matemáticas que construiremos son las del intelecto humano. La forma y el carácter del método, aparte de las consideraciones sobre su interpretación, también serán objeto de estudio. Hay, además, en sus teoremas generales, ejemplos edificantes especialmente valiosos por carecer de excepciones. Y esto se comprueba en los ejemplos correspondientes de la Matemática conocida, en los cuales ese carácter no resulta tan manifiesto. Los pocos que creen que hay algo en el Análisis que lo hace digno de estudio en sí mismo, comprobarán que vale la pena hacerlo bajo una forma según la cual todas las ecuaciones pueden ser resueltas y sus soluciones interpretadas. Y aumentará el interés de este estudio el hecho de que las particularidades que se adviertan en la forma del Cálculo representan características correspondientes de la naturaleza de nuestro propio pensamiento.

Sería prematuro predecir el valor de este método como instrumento de investigación científica. Me refiero aquí a la teoría del razonamiento y al principio de una verdadera clasificación de las formas y de los casos de la Lógica considerada como ciencia (*). En una primera instancia, la finalidad de estas investigaciones estuvo limitada a la expresión de la Lógica corriente y de las formas de la sistematización aristotélica, pero bien pronto resultó obvio que, de este modo, se introducían restricciones puramente arbitrarias que no estaban fundadas en la naturaleza de las cosas. Esta observación fue hecha cuando se nos presentó la cuestión y será discutida en el lugar que corresponda.

Cuando haya que considerar el problema de las proposiciones hipotéticas (tema relativamente poco estudiado y, más aún, cuando se requiera una interpretación de los teoremas generales del Cálculo habrá que desestimar, por fuerza, los conceptos antiguos y el criterio de autoridad, para considerar el método en sí mismo y en los justos límites de su aplicación. Hasta ahora, sin embargo, no se ha ensayado nada en particular para alcanzar resultados nuevos. No obstante, con respecto a esos resultados que en la época de su descubrimiento se presentaron como novedades, conviene observar lo siguiente.

De acuerdo al método que propugnamos en este

(*) "Estrictamente una ciencia", también "un arte" (*Elements of Logic*, de Whately). En realidad, no deberíamos considerar todo arte como ciencia aplicada, a menos que aceptemos, como "la mayoría", que el arte es "conjetura y designio" —como afirmaba Platón en el *Philebus*—.

Ensayo, toda proposición lógica puede ser expresada por una ecuación cuya forma determina las reglas de conversión y transformación que rigen la proposición dada. Así, la ley que los lógicos llaman de conversión simple está determinada por el hecho que las ecuaciones correspondientes son simétricas, es decir que no son afectadas por un cambio mutuo de lugar de aquellos símbolos que corresponden a las clases convertibles ([10]). Así fueron determinadas las leyes de conversión aceptadas y, luego, las de otro sistema concebido en forma más elemental y más general. (V. el capítulo *De la conversión de las proposiciones*).

Expresando las premisas de un silogismo por medio de ecuaciones, la eliminación de un símbolo común de éstas conduce a una tercera ecuación que expresa la conclusión, que es siempre la más general posible (sea o no aristotélica). Entre los casos en los cuales no era posible inferencia alguna, resultaron dos formas distintas de la ecuación final. Transcurrió bastante tiempo hasta que se descubrió la explicación de este hecho y se vio que dependía de la presencia o ausencia de un verdadero medio de comparación entre las premisas. Esta distinción, que es considerada un hallazgo, es ilustrada en el capítulo *Sobre los silogismos*.

El carácter no exclusivo de la conclusión disyuntiva de un silogismo hipotético se destaca netamente en los ejemplos de esta clase de argumentos.

Consideramos que el planteo de los problemas lógicos ilustrados en el capítulo *Sobre la solución de las ecuaciones electivas* es original y nos parece que el método allí expuesto proporciona los medios para un análisis completo de cualquier sistema de proposiciones concebible. Un primer paso hacia esa finalidad ha sido dado al enunciar las reglas para la conversión de una proposición categórica simple.

Sin embargo, en lo que respecta a la originalidad de cualquiera de estos puntos de vista, tengo la convicción de que mis conocimientos de la literatura de la ciencia lógica son escasos, especialmente en lo que se refiere a la Lógica clásica, para sentirme completamente seguro.

Antes de poner punto final a estas consideraciones, me parece conveniente hacer alguna referencia a la cuestión general del empleo del lenguaje simbólico en la Matemática. Desde antiguo, se han formulado fuertes objeciones a esta práctica, basadas en que tiende a debilitar las facultades racionales porque elimina la necesidad de pensar y sustituye el esfuerzo personal por una referencia a fórmulas generales ([11]).

En la actualidad, el problema del uso de los símbolos puede ser examinado desde dos puntos de vista distintos. En primer lugar, hay que considerarlo en relación con el progreso de los descubrimientos científicos y, en segundo término, como el instrumento de una disciplina del intelecto. Con respecto al primer punto de vista, puede observarse que como es el fruto de una labor cumplida —desde que podemos emplearlo en las más arduas tareas— resulta también un corolario necesario del estado avanzado de la ciencia, que nos permite, más aun nos incita, a buscar la solución a problemas más elevados que los examinados al principio. La inferencia práctica es inmediata; si a través del poder evolutivo de los métodos científicos, descubrimos que la labor emprendida no nos ofrece ya un campo lo suficientemente amplio para la actividad intelectual, la conducta más adecuada será proceder a profundizar las investigaciones, buscando en nuevas rutas las soluciones a las dificultades no superadas. Y ésta es, en realidad, la verdadera ley del progreso científico. Estamos obligados a emplear los instrumentos del lenguaje simbólico característico del grado de progreso que hemos alcanzado, o de lo contrario habrá que abandonar la esperanza de alcanzar futuras conquistas. Y no hay que arredrarse ante la perspectiva de tener que iniciar uno mismo nuevos caminos. Aun no estamos tan cerca de los límites del conocimiento posible como para temer que pudieran faltarnos objetivos para ejercitar nuestras facultades inventivas.

Al discutir el segundo y no menos trascendental problema de la influencia del uso de los símbolos sobre la disciplina del intelecto, hay que hacer una distinción fundamental. Puede entrañar consecuencias materiales importantes el que esos símbolos sean usados con una comprensión completa de su significado, un perfecto conocimiento de lo que legitima su empleo y con habilidad para extender las formas abreviadas de razonamiento a las que aquéllos inducen en su desarrollo silogístico total; o que, por el contrario, sean considerados simples caracteres que nada sugieren y cuyo uso se basa en un criterio de autoridad.

La respuesta a esta cuestión será diferente según se acepte uno u otro de los supuestos mencionados. En el primer caso, se posee una disciplina intelectual de elevado rango que ejercita no sólo la razón sino, además, la facultad de generalización. En el segundo, no existe disciplina mental alguna. Quizás existiera, por una parte, la máxima seguridad contra el riesgo de una irrazonada confianza en los símbolos y, por la otra, cierta negligencia ante su legítimò derecho a que cada tema de Matemática aplicada sea tratado dentro del espíritu de los métodos conocidos en la época en que se llevó a cabo su aplicación, bajo la forma más perfecta que dichos métodos hayan asumido. El nivel alcanzado por la mente individual implicaría, de este modo, alguna relación con el orden real del descubrimiento científico y los métodos más abstractos del Análisis superior serían ofrecidos solamente a las mentalidades más aptas para recibirlos.

La relación establecida en este Ensayo entre la Lógica y la Matemática puede justificar, además, algunas consideraciones sobre el problema, recientemente exhumado, del valor respectivo del estudio de estas dos disciplinas en una educación liberal. Una de las principales objeciones que se han formulado contra el estudio de la Matemática en general, no es sino una nueva forma de lo que ya se había observado con respecto al uso de los símbolos en particular. Y no es necesario que me extienda más, en este lugar, sobre esta cuestión pues basta observar que, aunque este punto de vista fuera de algún provecho, también se opone con igual fuerza al estudio de la Lógica ([12]). Las formas canónicas del silogismo aristotélico son realmente simbólicas; sólo que sus símbolos son de una clase menos perfecta que los de la Matemática. Si son empleados para probar la validez de un argumento, reemplazan el ejercicio de la razón con tanta exactitud como lo hace una referencia a una fórmula del Análisis. Se puede poner en duda que los hombres hagan uso de los cánones aristotélicos excepto para ilustrar especialmente las reglas de la Lógica; sin embargo, es incuestionable que cuando la autoridad de Aristóteles imperaba en las escuelas europeas, estas aplicaciones se realizaban corrientemente. Y, para que nuestro argumento sea aceptado, sólo se requiere que se admita que el caso es posible.

Pero este problema ha sido discutido en planos más elevados por William Hamilton, quien considera que la Lógica es una rama de la Filosofía; ésta es, a su vez, "la ciencia de la existencia real" que "investiga las causas" teniendo como finalidad *básica* la investigación del "*porqué* (τὸ δίοτι)" en tanto que la Matemática despliega el "*qué* (τὸ ὅτί)". En consecuencia, llega a afirmar no sólo la superioridad del estudio de la Lógica sino, más aún, sostiene que estudiar Matemáticas es, a la vez, peligroso e inútil (*). Las investigaciones del matemático "no desarrollan en él ese agudo olfato, ese delicado —casi instintivo— tino que exige el estudio y la discriminación de los finísimos actos que se cumplen en la penumbra de la probabilidad. Por el contrario, los matemáticos acaban por endurecer su tacto, cegar

(*) V. *Edinburgh Review*, Vol. LXII, p. 409, y *Letter to A. De Morgan*, Esq.

su visión a toda luz, excepción hecha de las más brillantes, para captar sólo la férrea cadena de la demostración. Pero, fuera de los estrechos límites de su ciencia, se ven sometidos a una pasiva *credibilidad* en cualquier premisa o a una absoluta *incredulidad* por todo" ([13]).

En apoyo de éste y de otros ataques se han aducido numerosos argumentos y autoridades (*).

No intentaré una discusión detallada de los tópicos sugeridos por estas observaciones; mi propósito no es la controversia. Es por eso que no he formulado las consideraciones siguientes con un espíritu de antagonismo, sino con la esperanza de contribuir a la formación de un criterio justo acerca de tan importante cuestión. No se puede hablar de Sir W. Hamilton sino con el respeto debido a su talento y erudición ([14]).

Según se ha visto, la Filosofía es definida como la *ciencia de la existencia real* y de *la investigación de las causas*. Y, como no cabe duda acerca del significado de la palabra *causa*, se dice más adelante que la Filosofía "investiga fundamentalmente el *porqué*". Estas definiciones son corrientes entre los autores antiguos. Así Séneca, una de las autoridades que cita Hamilton, dice en la *Epístola LXXXVIII*: "El filósofo busca y conoce las *causas* de las cosas naturales, cuyos números y medidas son descubiertos y computados por los matemá-

(*) En general, los argumentos son mejores que las autoridades. Muchos autores citados por su condenación de la Matemática (Aristón, Séneca, Jerome, Agustín, Cornelius Agrippa, etc). han aportado testimonios no menos explícitos contra otras ciencias, entre ellas la Lógica. El tratado del escritor últimamente nombrado *De Vanitate Scientiarum* seguramente ha sido citado por error (V. cap. CII).

ticos." Cabe destacar, de paso, que cualquiera sea el grado en que haya prevalecido la creencia en que la tarea inmediata de la Filosofía es investigar *causas*, en la misma medida, toda ciencia cuya finalidad es la investigación de *leyes* ha sido valorada ligeramente. Es así cómo la *Epístola* a la que acabamos de referirnos trae, por contraste con la Filosofía, una condenación de la Música, la Gramática, la Matemática y la Astronomía, aunque Sir William Hamilton cita solamente la que se refiere a la Matemática ([15]).

Ahora ya podemos basarnos en la convicción, de muchas mentes esclarecidas y reflexivas, de que la Filosofía no es posible si se la define con la extensión enunciada arriba. La tarea de la verdadera ciencia —concluyen— consiste en investigar leyes y fenómenos. La naturaleza del Ser, el modo de actuar de la Causa, el *porqué* —afirman— están más allá del alcance de nuestra inteligencia. Pero no hemos de aprovecharnos de la ventaja de esta posición; por otra parte, no puede ponerse en duda que, sea o no alcanzable el fin de la Filosofía, el ansia que nos impele a buscarlo es una característica innata de nuestra naturaleza superior. Permítasenos suponer que el problema que ha frustrado los esfuerzos de todas las épocas no está fuera de nuestras posibilidades y que la "ciencia de la existencia real" y de "la investigación de las causas", "este núcleo" gracias al cual la "filosofía es aún militante", no trasciende los límites del intelecto humano. A pesar de ello, me siento obligado a afirmar que, de acuerdo a esa manera de entender la Filosofía, *la Lógica no forma* *parte de ella.* Y, siguiendo un principio de clasificación estricta, no hay que asociar más la Lógica y la Metafísica sino la Lógica y la Matemática ([16]).

Si después de lo dicho alguien abrigase alguna duda al respecto, me permito remitirlo a la evidencia que será ofrecida en este Ensayo, donde se verá que la Lógica, como la Geometría, se basa en verdades axiomáticas ([17]) y que sus teoremas se construyen teniendo en cuenta esa doctrina general de los símbolos que constituyen la base del Análisis hoy aceptado. En la Lógica aristotélica, será llevado a considerar una colección de fórmulas de la ciencia expresada por medio de otra, pero creemos que se trata de un esquema simbólico menos perfecto. Me siento inclinado a impugnar la exactitud absoluta de este paralelismo. No escapa a la conclusión que aquí se apunta como válida, el que la Lógica no solamente construye una ciencia sino también investiga el origen y la naturaleza de sus principios. Es ésta una característica que no posee la Matemática porque, según se afirma, "la investigación del origen y la naturaleza de sus principios está enteramente fuera de su dominio" (*Review*, p. 415). Pero, ¿sobre qué base se podrá mantener esta distinción? ¿Qué definición del término "ciencia" será lo bastante arbitraria como para admitir estas diferencias?

La aplicación de estas conclusiones a la cuestión que nos atañe es clara y decisiva. La disciplina mental proporcionada por el estudio de la Lógica *como una ciencia exacta* es, en esencia, la misma que se deriva del estudio del Análisis.

¿Se afirma, pues, que la Lógica o la Matemática pueden reemplazar a una perfecta disciplina intelectual? El más cuidadoso y desprejuiciado examen de este problema me lleva a dudar de que tal criterio pueda sostenerse. Creo que debe ser desechada la pretensión de exclusividad de cualquiera de ellas, pero también debe rechazarse la idea de que pueda llenar esa función otra ciencia que quiera arrogarse un carácter exclusivo semejante. Una importante observación, que ha sido apuntada más de una vez, es que una cosa es llegar a premisas correctas y otra la deducción de sus consecuencias lógicas, y que los problemas de la vida dependen más de las primeras que de las segundas. El estudio de las ciencias exactas puede enseñarnos éstas y proporcionarnos una preparación general en cuanto a conocimientos y práctica para alcanzar aquéllas, pero para su completo y perfecto cumplimiento se requiere la unión del pensamiento y la acción en el terreno de la Lógica práctica, es decir en la arena de la vida humana.

Estoy convencido de que con el progreso de nuestro conocimiento de la verdadera ciencia se pondrá de manifiesto una creciente armonía entre sus diversas ramas. Por eso, el criterio que lleva a desechar una de ellas, si es consistente, debe conducir al rechazo de las otras. Y, en realidad, muchas de las autoridades citadas que se pronunciaron contra la Matemática han sido más explícitas aún en su condenación de la Lógica. Según Chian Aristo, "la ciencia natural está por encima de nosotros y la ciencia Lógica no nos concierne". Cuando estas conclusiones se basan, como ocurre a menudo, en una profunda convicción acerca de la importancia y la preeminencia del estudio de la Moral, admitimos las premisas pero nos vemos obligados a objetar la inferencia. Porque —como acertadamente lo dijera un autor clásico— "es característico de las ciencias liberales que nos preparen para la virtud pero no que nos conduzcan hacia ella"; y la expresión de Melancthon "abeunt studia in mores" ya ha pasado a ser un proverbio. Además, existe un campo común donde se encuentran todos los sinceros buscadores de la verdad y allí intercambian las palabras con las que Flamsteed celebraba a Newton: "Las obras de la Eterna Providencia serán mejor comprendidas a través de nuestra labor conjunta".

([1]) Boole se refiere a la polémica que sostuvieron el filósofo Sir William Hamilton (1788-1856) y el matemático y lógico Augustus De Morgan (1806-1871), que se originó cuando aquél acusó a éste de haberle plagiado su idea de la cuantificación del predicado. A juicio de Hamilton, no bastaba la implícita aceptación de que el predicado de las proposiciones afirmativas es particular y el de las negativas universal: los predicados deben cuantificarse *explícitamente.* Ello equivale, en suma, a determinar si es la *totalidad* o una *parte* del predicado la que concuerda o difiere del sujeto. La cuantificación trajo necesariamente la duplicación del cuadro clásico de las proposiciones, desde que el predicado de cada una de éstas puede ser universal o particular:

1. Todas las X son todas las Y
2. Ninguna X es ninguna Y
3. Todas las X son algunas Y
4. Ninguna X es alguna Y
5. Algunas X son todas las Y

6. Algunas X no son ninguna Y
7. Algunas X son algunas Y
8. Algunas X no son algunas Y.

Las proposiciones 1-2 son toto-totales; las 3-4 toto-parciales; las 5-6 parti-totales y las 7-8 parti-parciales. En la tabla se suceden las proposiciones en un orden alternadamente positivo-negativo. El arzobispo Thomson redujo estas formas a 6 (V. W. S. Jevons: *Lógica*, Madrid, Pegaso, 1941, p. 174) y G. Bentham a 5 (V. F. Barone: *Alle origini della logica formale moderna*, Filosofia, Torino, Anno X, Fascicolo III, Luglio 1959, p. 433).

La polémica empezó a raíz de la publicación del artículo de De Morgan *On the Structure of the Syllogism...*, en 1857. En un apéndice a dicho artículo, su autor se refería muy correctamente a los estudios de Hamilton sobre la cuantificación del predicado y a sus propias contribuciones al tema. La ponderación de juicio de De Morgan no impidió la exasperada violencia de Hamilton, que lo acusó repetidamente de plagiario y de ignorar los rudimentos más elementales de la Lógica. A propósito de esta cuestión de la prioridad, varios tratadistas (E. W. Beth, C. I. Lewis, L. Liard, S. Jevons) han observado que la doctrina de la cuantificación fue expuesta pòr muchos autores, entre ellos: Ammonio Saccas, G. de Shyreswood, J. Bentham, Leibniz, Lambert, Holland, Castillon, De.Morgan, G. Ploucquet y W. Thompson (V. J. Ferrater Mora: *Diccionario de Filosofía*, Bs. As., Editorial Sudamericana, 4a. Edición, 1958, p. 1093; C. I. Lewis: *A Survey of Symbolic Logic*, Berkeley, University of California Press, 1918, p. 36, y F. Barone, op. cit., pp. 433-434.) La disputa sobre la prioridad, que tiene un interés meramente histórico, se prolongó durante varios años. Como ocurrió en casos análogos (por ejemplo en la discusión sobre la paternidad del cálculo infinitesimal), la controversia entre Hamilton y De Morgan continuó después de haber desaparecido sus protagonistas.

Liard sostuvo, con un entusiasmo excesivo, que la reforma de la Lógica formal llevada a cabo por los lógicos ingleses del siglo

XIX tuvo su punto de partida en la teoría de la cuantificación del predicado (V. L. Liard: *Les logiciens anglais contemporains,* París, F. Alcan Editeur, 4ième Edition, 1901, p. 38.) La opinión de Liard habría sido heredada por Bochenski y por Lewis-Langford, a juicio de Barone (op. cit., p. 448). No obstante, Lewis (op. cit., p. 37) concluye que el único mérito de Hamilton fue haber puesto el acento en el punto de vista de la extensión, lo que favoreció el desarrollo ulterior de la Lógica simbólica. En una obra posterior, escrita en colaboración con Langford (*Symbolic Logic,* New York & London, The Century Co., 1932, p. 7), se lee que la idea "es simple y de escasa importancia para la lógica exacta", como lo prueba el que "ningún uso de ella se haya hecho en los estudios actuales". L. Couturat declaró, en 1914, que la "demasiado famosa cuantificación del predicado no tiene nada de común con la Logística" (Ap. Barone, op. cit., p. 437). El mismo Barone sostiene la "irrelevanza dei contributi hamiltoniani per la constituzione della nuova logica formale aperta ai problemi matematici" (op. cit., p. 437). Considerada desde el punto de vista de la Lógica Cuantificacional Superior, la teoría de la Cuantificación del predicado resulta ingenua y superficial.

(2) La fundamentación de la Lógica en las "leyes del pensamiento" fue ampliamente expuesta por Boole en un libro posterior titulado *An Investigation of the Laws of Thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities,* publicado en 1854 (V. la edición de Dover Publications Inc., U.S.A.), en el que se propuso "investigar las leyes fundamentales de las operaciones mentales por medio de las cuales se cumple el razonamiento; expresarlas en el lenguaje simbólico de un cálculo y, sobre esa base, establecer la ciencia de la Lógica. Crear el método de esta disciplica y fundamentar en él un método general para la aplicación de la teoría matemática de las probabilidades; finalmente, recoger en el desarrollo de estas investigaciones algunos indicios probables acerca de la naturaleza y constitución del pensamiento humano". (Op. cit., p. 2.)

(3) Se puede definir la Aritmética como la teoría de los números naturales y de las operaciones de adición y sustracción que los relacionan. El Algebra clásica es la teoría de las operaciones necesarias para resolver una ecuación, o también, la teoría general de las ecuaciones. Así como el Algebra es una generalización de la Aritmética, el Algebra Abstracta lo es con respecto a aquélla, por ser el resultado de un doble proceso de abstracción: a) generalización de la noción de número (independientemente, por supuesto, de las conocidas "extensiones" del campo natural) y b) generalización del concepto de operación. En las álgebras abstractas, en lugar de números se consideran *entes abstractos* y en vez de operaciones *leyes de composición.* Los entes abstractos son objetos cualesquiera y las leyes de composición son procedimientos regulares que a dos elementos de un dominio permiten asociar un nuevo elemento. Las propiedades fundamentales (conmutativa, asociativa, etc.) que deben cumplir estas leyes se llaman *axiomas*, y, mediante ellos, se define una *estructura algebraica.*

Es posible, en consecuencia, definir un álgebra abstracta como el estudio de ciertas leyes de composición, de sus propiedades fundamentales (axiomas) y de sus consecuencias, con independencia de la *naturaleza* de los entes a los cuales estas leyes se refieren. Es obvia, pues, la importancia de la noción de ley de composición (*interna* y *externa*) y su carácter eminentemente primitivo, en el sentido formalista del término. El álgebra moderna se puede caracterizar como una teoría de estructuras, lo que posibilita las extensiones sucesivas del respectivo dominio. En dichas extensiones la *forma* de los cálculos permanece constante variando, en cambio, la *naturaleza* de los entes, que constituyen las *aplicaciones* posibles de la estructura abstracta. Hay una despreocupación por los *entes* y una focalización del interés en las *relaciones.* Una de las ventajas lógicas de la teoría de las estructuras algebraicas reside en la identidad estructural: dos conjuntos pueden diferir en sus elementos, en las propiedades de las operaciones definidas entre ellos, pero si tienen en común los axiomas (es decir, las propiedades fundamentales) pertenecerán al mismo tipo de estructura.

En nuestro libro *La lógica matemática, su método y sus aplicaciones* nos hemos referido a la influencia de los matemáticos y lógicos ingleses del siglo XIX en la creación del álgebra moderna. Cabe ahora destacar, dentro de ese movimiento, la importancia de la obra de Boole: su teoría del Algebra Simbólica encierra ya la idea que daría origen después a la doctrina de las álgebras abstractas. Nos referimos a su concepto del valor de las leyes de la combinación de los símbolos con independencia del significado y de las interpretaciones de éstos. Es fácil ver, incluso, la analogía entre la expresión booleana "leyes de combinación" y el concepto actual de leyes de composición.

(4) Aquí se plantea —y por cierto que con mucha precisión— el carácter *neutral* de las estructuras frente a las posibles *interpretaciones* de los símbolos. El Álgebra Simbólica, como el Algebra Moderna, se ocupa de *relaciones* definidas entre símbolos (*lattices* o *treillis*, según la nomenclatura contemporánea), que, ulteriormente, pueden ser *aplicadas* a distintos conjuntos de entes (*materia*) que verifican las *leyes* establecidas en la estructura (*forma*).

Análogamente, la Lógica Simbólica actual se considera un *lenguaje* antes que una teoría, es decir, un *conjunto* de *signos* y de *reglas* para su manejo y no un *sistema* de *proposiciones* sobre *objetos*. Más aún que un lenguaje —dice Carnap— es un "esqueleto de lenguaje". (V. su libro *Introduction to Symbolic Logic and Its Applications*, New York, Dover Publications Inc., 1958, p. 1).

(5) La determinación de ciertas leyes de composición referidas a entes cualesquiera, con independencia de sus aplicaciones posibles y sin tener en cuenta números, magnitudes ni medidas, caracteriza al Algebra Abstracta frente al Algebra Ordinaria. Por eso, la contribución de la escuela inglesa, en la cual ocupa un lugar de privilegio Boole, ha sido sintetizada por E. T. Bell como "la comprensión del álgebra como álgebra, es decir como el desarrollo abstracto de las consecuencias de una serie de postulados sin una interpretación o aplicación obligada a números o a cualquier otra cosa". (V. *Los grandes matemáticos*, Buenos Aires, Losada, 1948,

p. 510). Cierto es que la formalización creciente de la Matemática ha favorecido la proliferación de las álgebras abstractas, sobre todo cuando se toma al pie de la letra la expresión cantoriana de que la esencia de la Matemática reside en su libertad. Sin embargo, no hay que olvidar que el carácter convencional de los postulados que definen una estructura, no significa que la elección de aquéllos sea completamente arbitraria: la generalización matemática debe orientarse en el sentido de que las teorías clásicas constituyan casos particulares dentro de los nuevos dominios abstractos definidos. Esta actitud concuerda, en su esencia, con el principio de E. H. Moore, citado por M. Fréchet en su conocido libro *Les espaces abstraits* (Gauthier-Villars, París, 1928, p. 16) y con el principio de Hankel, que es el fundamento lógico y epistemológico de toda generalización matemática. (V. nuestro trabajo *El método axiomático*, en "Revista de la Facultad de Ciencias Económicas" de la Universidad de Buenos Aires, Año III, N° 27, pp. 813-859, especialmente las pp. 823-833).

([6]) La clásica concepción de la Matemática como ciencia de la magnitud o de la cantidad ha sido sustituida por las modernas definiciones "ciencia de los conjuntos" o "ciencia de las estructuras abstractas". Por otra parte, hay disciplinas matemáticas como la Topología (General o Conjuntista y Combinatoria o Algebraica) en las cuales la cantidad no interviene. Las figuras geométricas poseen ciertas propiedades *cualitativas*, independientes de la medida y la magnitud, que son estudiadas en esta moderna rama de la Geometría, definida por M. Fréchet y Ky Fan como "el estudio de las propiedades topológicas, principalmente, de los invariantes topológicos". (V. *Introduction a la Topologie Combinatoire*. Tome I., Paris, Vuibert, 1946, p. 13). Una propiedad es llamada *topológica* cuando se la puede expresar por medio de la noción de continuidad e *invariante topológico* si se conserva en todo *homeomorfismo*. Se denomina *homeomorfismo* a una transformación biunívoca y bicontinua. En consecuencia, dos figuras se dirán homeomorfas si se puede pasar de una a otra por medio de un homeomorfismo. La

Topología —llamada por Poincaré *Analysis Situs* y estudiada ya por Euler bajo la denominación de *geometría de situación*— es una geometría cualitativa.

([7]) El cálculo de la Lógica es el Algebra de la Lógica o Algebra de Boole, que luego se transformó en lo que se denomina actualmente Algebra de Boole-Schroeder. Se ve que Boole, buen matemático, considera que la Lógica es un capítulo de la Matemática; su discípulo Jevons defendió —como lo hacen los logicistas contemporáneos— la tesis opuesta. La posición de Boole, a este respecto, lo enfrentaba a Hamilton quien, como se verá más adelante, hacía depender la Lógica de la Filosofía.

([8]) Resurge el viejo proyecto leibniziano de un lenguaje filosófico exacto construído mediante signos y algoritmos matemáticos, cuyo antecedente más lejano sería Ramón Llull (1235-1315), autor de una ciencia más general que la Lógica y la Metafísica, el *Ars Magna* que se basaba en los siguientes principios:

a) Un conjunto de conceptos básicos agrupados en seis clases de a nueve, que constituían el *alfabeto* del arte; b) ciertas técnicas y procedimientos para relacionar y combinar los conceptos: *arte combinatoria*; c) un sistema simbólico constituido por signos literales y figuras geométricas (unas fijas y otras móviles). La finalidad del *Ars Magna* era teológica y metafísica antes que lógica, aunque no se le puede negar su importancia también desde este último punto de vista. La obra de Llull adquirió gran difusión en el Renacimiento, pero como un instrumento racional al que se le había amputado toda finalidad teológica. (V. una síntesis introductoria en J. Carreras y Artau: *De Ramón Llull a los modernos ensayos de formación de una lengua universal*, Barcelona, Consejo de Investigaciones Científicas, 1946).

Descartes —que condenó la excesiva boga del lulismo— retomó, sin embargo, la idea de un arte inventiva o "máquina para pensar" de estructura matemática y llegó a creer que su Geometría Analítica era esa *mathesis universalis*.

Leibniz, en su precoz ensayo *Dissertatio de Arte Combinatoria*, escrito a los veinte años como un resultado de sus lecturas del *Ars Magna*, retoma y replantea el problema luliano: reduce los conceptos complejos a conceptos simples irreductibles que serían "el alfabeto de los pensamientos humanos". Luego, por sucesivas combinatorias, se obtienen los términos complejos (binarios, ternarios, etc.). El proyecto de Leibniz se puede sintetizar en dos caracteres básicos: a) la *característica universal*, un lenguaje ideográfico universal para la expresión científica y b) un *cálculo del razonamiento*, o cálculo universal, aplicable a todas las ciencias.

La afinidad entre Leibniz y Boole ha sido señalada también por F. Barone en su libro *Logica formale e logica trascendentale*. I. Da Leibniz a Kant (Torino, Edizioni di "Filosofia", 1957, p. 4) donde confronta expresiones de ambos autores acerca de la significación del cálculo para la Lógica y la Matemática.

Sin embargo, en su libro, ya citado, *An Investigation of the Laws of Thought*, es donde desarrolla en forma completa su teoría del simbolismo: El lenguaje no es sólo un medio para expresar el pensamiento, sino el verdadero instrumento de la razón humana. El lenguaje está constituido por signos o símbolos, que son sus elementos más analíticos. Las palabras son signos que representan: a) los objetos, b) las operaciones mentales creadoras de conceptos, c) las relaciones de acción, pasión o cualidad y d) las emociones de la mente perceptora. Un signo es una marca arbitraria que posee una interpretación determinada y que es susceptible de combinarse con otros signos de acuerdo a ciertas leyes. Todas las operaciones que el lenguaje cumple como instrumento del razonamiento se pueden llevar a cabo por medio de un sistema de signos compuesto de los siguientes elementos:

1°) Símbolos literales —x, y, etc.— que representan las cosas que sometemos a nuestras concepciones.

2°) Signos de operaciones —$+$, $-$, $\times$— que representan aquellas operaciones de la mente por medio de las cuales son combinados los conceptos de las cosas.

3°) El signo de identidad: $=$.

Estos símbolos de la Lógica están sometidos a ciertas reglas que concuerdan, en parte, con las leyes que rigen los símbolos correspondientes del Algebra. (V. G. Boole, op. cit., especialmente, los capítulos II y III).

(9) Estas consideraciones pertenecen a la Estética matemática: la belleza lógica del Análisis reside en sus estructuras abstractas y se revela a través de la simetría, el orden y la armonía. El gran matemático G. Birkhoff (V. su libro *Medida estética*, Rosario, Edición de la Facultad de Ciencias Matemáticas, del Litoral, 1945) propuso una matematización de la Estética que sintetizó en una fórmula —denominada, precisamente, "medida estética"—:

$$M = \frac{O}{C},$$

donde M, O y C son variables medibles y significan: M, la medida estética que es la razón de O, el orden, sobre C, la complejidad del objeto. La experiencia estética se debe a "un grado excepcional de interrelaciones armoniosas dentro del objeto" (op. cit., p. 2).

Boole se refiere a la belleza "interna" implícita en la armonía lógico-matemática de las relaciones abstractas expresadas en las fórmulas del Análisis. Algunas de sus expresiones revelan, además, un platonismo implícito, por ejemplo, cuando alude a la "presencia visible" de la ley. El punto de vista es similar al del matemático Hermite cuando, al referirse a un triángulo, escribía: "...esta figura tiene cierta naturaleza, o forma, o determinada esencia que es inmutable o eterna, que yo no he inventado y que no depende de mi mente". (V. E. T. Bell, op. cit., p. 532). Este "misticismo" —como lo denomina ligeramente Bell— no es otra cosa que realismo platónico. (V., además, las obras de A. Lautmann, Hardy, Keyser y, especialmente, las de A. Coomaraswammy).

(10) Las proposiciones cuantificadas (V. Nota 1) pueden ser convertidas directamente, sin que sea necesario distinguir entre la conversión simple y la conversión por accidente. Recuérdese que, en la Lógica clásica, se admitían 3 modos de conversión: los dos

mencionados y la conversión por contraposición. La teoría de la conversión no se acepta íntegramente en la Lógica actual. (V. el art. de Church en D. Runes: *Dictionary of Philosophy*, New York, Philosophical Library, 1942, p. 176).

([11]) He aquí una directa alusión a la crítica que el filósofo William Hamilton formuló contra la Matemática, cuya violencia motivó que Bell la calificara como "el más famoso de los ataques salvajes que ha sufrido la Matemática". Hamilton, cuya preparación matemática era menos que mediocre, tenía una concepción unilateralmente cuantitativa de la Aritmética y la Geometría. En su artículo titulado *On the Study of Mathematics*, publicado en el N° 126, de enero de 1826, de la *Edinburgh Review*, replica a un ensayo de W. Whewell sobre la importancia de la Matemática en la educación liberal. (V., en el ensayo ya citado de F. Barone sobre Los orígenes de la Lógica formal, el parágrafo *Filosofia e Logica nello Hamilton*). Contrapone el "método matemático" al "método filosófico" y llega a la conclusión de que "la Matemática es una ciencia árida, mecanicista y abstracta". Para sostener su aserto trae numerosas citas de autores clásicos y modernos. Como bien lo señala Boole en esta *Introducción*, esos mismos autores sirven para demostrar la tesis contraria a la que sostiene Hamilton, desde que, con parecidos argumentos, condenan también la enseñanza de la Lógica (y de otras ciencias), cuya primacía sobre la Matemática defendía el irascible filósofo. (En las pp. 512-514 del libro mencionado de E. T. Bell, pueden leerse los gruesos epítetos que dedica Hamilton a la Matemática. Una visión general del problema de las relaciones entre la Filosofía y la Matemática en el Siglo XIX, V. en *Storia della logica delle scienze esatte*, de F. Albergamo, Gius. Laterza & Figli, 1947, Cap. VI).

No hay que confundir al filósofo escocés William Hamilton (1788-1856) —a quien nos hemos referido en esta Nota— con el matemático William Rowan Hamilton, creador de la teoría de los cuaternios o cuaterniones, números cuadridimensionales que no cumplen la propiedad conmutativa de la multiplicación, ley matemática que establece que el producto de varios factores es independiente del orden de éstos, es decir que $a \times b = b \times a$. En el Algebra de los cuaterniones, $a \times b \neq b \times a$.

([12]) V. la Nota 11.

([13]) Tres escuelas de la antigua Grecia se plantearon el problema de las relaciones entre la Lógica y la Filosofía: a) los estoicos, que negaban que la Lógica formara parte de la Filosofía; b) los peripatéticos, que afirmaban que la Lógica era sólo un instrumento de la Filosofía, y c) los platónicos, para quienes la Lógica era, a la vez, un instrumento y una parte de la Filosofía. Lukasiewicz reproduce un argumento de los peripatéticos, conservado por Ammonius en sus Comentarios a los Ἀναλυτικὰ πρότερα: "Si se consideran silogismos cuyos términos son concretos —como hace Platon cuando prueba silogísticamente la inmortalidad del alma— la Lógica será, entonces, una parte de la Filosofía; pero si se formulan los silogismos como meras reglas referidas a letras, por ejemplo: "A es predicado de toda B, B de toda C, luego A es predicado de toda C" —como lo hacen los peripatéticos, siguiendo a Aristóteles— en ese caso la Lógica debe ser considerada un instrumento de la Filosofía. La parte final del texto griego citado por Lukasiewicz es la demostración (silogística) de la inmortalidad del alma. El lógico polaco se apoya en ese texto para destacar el carácter formal de la silogística aristotélica y su estructura matemática; sólo pertenecen a la Lógica las leyes silogísticas formuladas mediante variables (forma) y no la materia (ὕλη) expresada en términos concretos. Basta considerar la demostración de la tesis platónica para comprobar su intención metafísica y el carácter meramente instrumental de la demostración. El problema que preocupaba a los griegos, también suscitaba el interés de Boole y sus contemporáneos (y nos inquieta a nosotros mismos): ¿cuáles son las relaciones entre la Lógica y la Filosofía? Para resolverlo, habrá que determinar previamente el campo y el objeto de ambas disciplinas y, con ello, se facilitará la solución de los problemas conexos de la autonomía de lógica y de su vinculación con la

Matemática (V., más adelante, las Notas 15 y 16). Otro medio de acceso al problema es el examen de la significación de los denominados "principios lógicos "en sus tres posibles planteos: a) metafísico, b) ontológico y c) lógico. (Hay, además, el punto de vista sicológico que desestimamos por su trivialidad y porque su refutación es bien conocida). A este respecto, las cuestiones fundamentales que deben ser consideradas son: 1) ¿Existe un orden jerárquico entre los distintos puntos de vista?; 2) ¿La adopción de uno de ellos significa la exclusión de los otros?, y 3) ¿El orden jerárquico es compatible con la validez simultánea de los tres criterios enunciados, en sus niveles respectivos? En la Lógica Matemática contemporánea sólo se acepta el punto de vista lógico, que se bifurca en dos planos: a) el específicamente lógico, o logístico y b) el metalógico. Para los lógicos actuales, los "principios lógicos" son *axiomas*, *teoremas* o *expresiones metalógicas*, y en cualquiera de estos casos, meras fórmulas de significación análoga al de otras expresiones (*sentencias*, *frases* o *expresiones bien formadas*) de un sistema axiomático. El *principio* de identidad se convierte en la *ley lógica* de identidad, es decir, en una tautología; el mismo camino seguirán el principio de no contradicción y el de tercero excluido. Algunos de los principios —como el de identidad— se introducen más frecuentemente como teoremas, debido a su esterilidad desde el punto de vista deductivo. (Entre las pocas excepciones a esta práctica, M. L. Roure cita a Lukasiewicz que anota la ley de identidad como un axioma de su sistema formalizado de la silogística aristotélica (V. Lukasiewicz, op. cit., p. 88). Tampoco la validez universal de los principios se ha conservado dentro de la Logística: el *tertium non datur* ha sido restringido por los intuicionistas. Convertidos en axiomas, teoremas o sentencias metalógicas, los principios han perdido su significación metafísica: son meras fórmulas con las cuales se opera mecánicamente. Por ejemplo: la identidad se puede formular $x \equiv x$ o $p \supset p$ o también "$(f) fx \supset fy$". Es decir que la equivalencia (bicondicional) se puede expresar mediante una condicional. La justificación lógica de esta derivación es inmediata si se aplican ordenadamente las leyes de sustitución, contraposición y doble negación. Sin embargo, la expresión de la identidad por la fórmula "$(f)\, fx \supset fy$" tropieza con algunos inconvenientes en las aplicaciones de la Lógica porque está basada en el *principio de los indiscernibles* de Leibniz (llamado *ley de extensionalidad*) (V. I. M. Bochenski, op. *Précis de Logique Mathématique*, Pays-Bas, F. G. Kroonder, p. 49). Tampoco es aceptada por los intuicionistas porque su derivación incluye la ley de doble negación, rechazada por esta escuela a raíz de sus restricciones al *tertium non datur*. En la obra de Aristóteles se encuentran formulaciones lógicas y metalógicas de los principios (V. Bochenski, op. cit., pp. 38-41), pero también encontramos formulaciones metafísicas (V. *Aristotle's Metaphysics, A. Revised Text with and Introduction and Commentary* by D. Ross, Oxford, At the Clarendon Press, 1953, 1006 a y 1011 b). Sin embargo, la primera formulación metafísica del principio de identidad se encuentra ya en περὶ φύσεως de Parménides. (Untersteiner, siguiendo a Cherniss, afirma que Parménides habría usado incluso el *tertium non datur*. V. Parmenide, *Testimonianze e Frammenti*. A cura di Mario Untersteiner, Firenze, La Nuova Italia, 1958, pp. CXLIV-CXLV): ὅπως ἔστιν τε καὶ ὡς οὐκ ἔστι μὴ εἶναι (Diels, F. V. S., 28 B 2, 3) que se suele traducir como "el ser es y no puede no ser") Conviene más la expresión "el ente" (estrictamente "lo ente") más próxima al griego τὸ ὄν. La palabra española "ser" es más imprecisa y se presta al equívoco ser-ente. García Bacca traduce, con un sentido más metafísico que filológico: "del ente es propio ser y del ente no es propio no ser" (V. *Los presocráticos*, T. I., México, El Colegio de México, 1943, p. 116 y siguientes). En περὶ φύσεως se comprueba que el principio de identidad es una consecuencia (o una explanación) de la infinitud y eternidad del Ente es *ingénito* (ἀγένητον) e *imperecedero* (ἀνώλεθρον) y eterno (ἀτέλεστον): el Ente es idéntico a sí mismo porque es la permanencia absoluta, fuera del tiempo (atemporalidad) y del espacio (anespacialidad). Usando un término corriente en teoría de grupos, diríamos que la identidad se deriva de la *invariancia* del Ente. El principio (*principium*, ἀρχή) es el Primero en una sucesión cuyos elementos *dependen* de El. El principio está separado de los elementos (como el *Uno* de Plotino, y el *Ente* de Parménides): es la esencia, la raíz, la "fuente", el "origen", la causa, el fundamento infinito Uno (ἕν), Unico (μουνογενές) de todo lo finito (ἀρχὴ πάντων). 'Αρχή es el ἄπειρον de Anaximandro, el *fuego* de Hercálito, el *agua* de Tales, el *aire* de Anaximenes; principio infinito y trascendente que asume diversas formas pero que es Una Realidad: *La Misma*.

La Lógica Matemática es hoy una disciplina autónoma, independiente de la Filosofía, pero para alcanzar el rango de ciencia positiva ha pagado un elevado tributo: la aniquilación de los principios, la ruptura total con la Metafísica, la relativización de la verdad transmutada en un juego mecánico, su asimilación a un cálculo y su multiplicación en "lenguas" formalizadas. Los lógicos contemporáneos, en su gran mayoría, son antimetafísicos y, en el mejor de los casos, conservan una curiosa "neutralidad" filosófica que, en el fondo, es nominalista y a-metafísica (salvo escasísimas excepciones). En una recensión crítica de la *Lógica Matemática* de Ferrater Mora-Leblanc (obra citada), García Bacca apuntaba que la Metalógica es "sospechosamente pariente de la Metafísica". En realidad, la Metalógica está en las antípodas de la Metafísica y ha tenido su origen en la negación de ésta. La semejanza es exterior, sobre todo porque ha debido acometer los viejos problemas metafísicos en su versión metalingüística; es, en realidad, un *ersatz* de la Metafísica. (V. nuestro trabajo *Caracteres antimetafísicos del pensamiento contemporáneo*, en el N°. 9 de la *Revista de Filosofía* de la Universidad Nacional de La Plata).

Los principios de identidad, no contradicción y tercero excluido se pueden formular en tres niveles: metafísico, ontológico y lógico, que se ordenan jerárquicamente: primero, el plano metafísico, luego el ontológico y después el lógico. Los dos últimos dependen del primero: la infinitud de τὸ ὄν (metafísica) fundamenta el *ens est ens* (principio ontológico) y éste el $x = x$ (principio lógico). No es posible eliminar completamente los principios por más que se extreme la formalización: reducidos a teoremas de un cálculo reaparecen en la *identidad* de los objetos-signos o en la no-contradicción, que sigue siendo el talón de Aquiles al que se reducen, en última instancia, las propiedades de un sistema axiomático. La Lógica es el reflejo de los principios trascendentes en el orden de la manifestación; su racionalidad se funda en la inteligibilidad del *Principio* (que es la Verdad o la Realidad).

(14) En la controversia Hamilton-De Morgan, Boole terció en favor de este último que tenía la razón de su parte (y que, además, era su amigo). Tal vez en su excesiva amabilidad —más notable aún si se la compara con la agresividad que trasuntan las expresiones de Hamilton— deje traslucir cierta ironía.

(15) V. la nota 11.

(16) La constitución de la Lógica como ciencia autónoma e independiente es la culminación de un proceso cuyos pasos más importantes fueron el antisicologismo de Frege y Husserl y el abandono de la fundamentación ontológica. La ruptura con la Metafísica, a la que se refiere Boole, fue polémica y hasta agresiva en la declaración de principios del Círculo de Viena y también en los primeros libros de Carnap (V., por ejemplo, *The Logical Syntax of Language* y *La Science et la Métaphysique devant l'analyse logique du langage*), en la obra de Reichenbach (V., sobre todo, *La filosofía científica*), de A. J. Ayer (V. *Language, Truth and Logic*) y Tarski (V. *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*) y del propio Lukasiewicz (V. *Aristotle's Syllogistic*), para asumir una expresión más prudente en las últimas obras de Carnap y Quine (a pesar de su nominalismo).

Perdidas sus bases ontológicas e incorporando símbolos, algoritmos y métodos de inspiración matemática, la Lógica se fue aproximando cada vez más a esta ciencia, hasta tal extremo que se planteó el problema de discutir los límites —si es que existen— entre la Matemática y la Lógica. (Digamos, de paso, que la distinción —propuesta por algunos autores— entre variable *lógica* y variable *matemática* no resuelve el problema porque, en ese caso, buena parte de las disciplinas matemáticas modernas deberían ser absorbidas por la Lógica). Para el *logicismo*, la Matemática es una rama de la Lógica: los conceptos y los teoremas matemáticos se definen y se demuestran, respectivamente, por medio de conceptos y teoremas lógicos; en suma, los entes matemáticos se derivan de nociones lógicas. Los antecedentes de la escuela logicista se remontan a Leibniz, en cuya obra lógica ya estaban implícitas las ideas básicas del logicismo. (A ello se debe, sin duda, la simpatía de Couturat y Russell por Leibniz que se concretó en sendos libros, sobre la lógica del genial filósofo y matemático alemán. Merece citarse también a Dedekind, autor del método de las "cortaduras" para la definición de los números reales, y continuador de Weierstrass en la dirección conocida como la "aritmetización de la Matemática". Los verdaderos fundadores del movimiento fueron Frege y Russell, este último jefe indiscutido de la escuela. La obra de Russell-Whitehead *Principia Mathematica* puede ser considerada la "biblia" del logicismo. B. Russell intentó solucionar el grave problema de las paradojas mediante varios ensayos que precedieron a la creación de la teoría de los tipos: a) la teoría zigzag, b) la teoría de la limitación de la extensión y c) la teoría de la supresión de las clases. (V. sendas exposiciones y críticas a estas tres teorías en F. Grahay: *Le formalisme logico-mathématique et le probléme du non-sens*, Societé d'Editions "Les Belles Lettres", París, 1957, Cap. II, y H. Poincaré: *Science et méthode*, Flammarion, París, pp. 203-206).

Un primer esbozo de la teoría de los tipos fue expuesto en un *Apéndice* del libro *Los principios de la Matemática* (V. la trad. cast., Espasa-Calpe Arg. S. A., Buenos Aires, 1948, pp. 638-644). Ya Poincaré había sostenido que las antinomias se originan en un círculo vicioso, y Russell, compartiendo la opinión del gran crítico de la Logística, formula el "principio del círculo vicioso": "Una expresión que contenga una variable aparente no puede formar parte del campo de la variable y debe pertenecer a un tipo diferente"; o, dicho de otro modo, "Ninguna totalidad puede contener miembros que sólo sean definibles en términos de esa totalidad, o que la involucren o la presupongan". En la teoría de los tipos se consideran tres órdenes o planos: a) el de las proposiciones, b) el de las funciones (o predicados) y c) el de las clases. Como lo ha explicado Wiener, no es necesario jerarquizar aparte las relaciones porque se reducen a clases y, además, como no hay diferencia esencial entre b) y c), quedan dos jerarquías: la de las proposiciones y la de las funciones (V. F. Grahay, op. cit., p. 44). La finalidad de Russell parece haber sido: "desustancializar y jerarquizar las clases" (V. E. W. Beth: *Les fondements logiques des mathématiques*, Gauthier-Villars, París, 1950, p. 168).

La teoría de los tipos establece una jerarquía que comienza con el *tipo cero* al cual pertenecen los "individuos" ("objetos" o "nombres propios"). Estos desempeñan únicamente la función de sujetos. Las propiedades (que no sean propiedades de propiedades) o, lo que es lo mismo, las clases, pertenecen al *tipo uno*: son propiedades de los individuos que pueden ocupar el lugar del sujeto y también del predicado, pero en este último caso su respectivo sujeto deberá pertenecer al tipo cero. Las propiedades de propiedades (o funciones de funciones) pertenecen al *tipo dos* y pueden desempeñar la función de sujeto o de predicado; en este último caso, su respectivo sujeto debe pertenecer a los tipos uno o cero. Esta ordenación se puede expresar también en términos de elementos (tipo cero), clases (tipo uno), clases de clases (tipo dos), etc., etc. Ninguna clase puede incluirse a sí misma como elemento (autoinclusión de una clase) o, dicho en otros términos, ninguna propiedad puede ser atribuida a sí misma (autopredicación de un predicado), porque si esta ley de la teoría no es respetada se cae en el sinsentido. Algunos autores (V. J. Ferrater Mora, *Lógica matemática*, F. C. E., México-Buenos Aires, 1955, pp. 157-164) exponen la teoría de los tipos en dos versiones: una intensional y otra extensional.

Pero Ramsey, retomando una observación de Peano "Exemplo de Richard non pertine ad mathematica sed ad linguistica" (V. E. W. Beth., op. cit., pág. 170), clasificó las antinomias en *lógicas* (como las de Burali-Forti, Cantor y Russell) y *semánticas* (como la de Richard y la del "mentiroso"), concluyendo que la teoría de los tipos no basta para eliminar estas últimas. (En realidad, Ramsey las denominaba *psicológicas*, *lingüísticas* o *epistemológicas*). En efecto, el enunciado "yo miento" o "x miente" (versión de Russell) tiene un sujeto de grado cero y un predicado de grado uno y, sin embargo, la paradoja subsiste. (Según Bochenski, Pablo de Venecia —1372-1428—, filósofo y teólogo, encontró 14 soluciones a la paradoja del mentiroso. Por otra parte, los lógicos escolásticos conocieron y estudiaron las antinomias; por ejemplo, el padre Luis de Lossada en la obra *Institutiones Dialecticae, vulgo Summulae, ad primam partem Philosophi Cursus pertinentes*, Salmanticae, 1721, reeditada en 1741 y 1882; y Juan Roig Gironella S. I. (en la actualidad) propone un tratamiento metafísico de las antinomias a través de la noción de analogía. (V. *La antinómica solución de las antinomias o paradojas lógicas*, en Pensamiento, Madrid, 1954, Vol. 10, Nº 39, pp. 287-309). V., asimismo, el trabajo de Veatch: *Metaphysics and the Paradoxes*, Review of Metaphysics 6, 199-218, 1952). También A. Koyré se apartó de los métodos logísticos al sostener que las paradojas se resuelven simplemente mediante la distinción husserliana entre "sinsentido" y "contrasentido". A raíz de su artículo "The Liar" publicado en *Philosophy and Phenomenological Research*, J. Bar-Hillel sostuvo una polémica con él que fue recogida en dicha revista (V. *The Revival of the Liar*, por J. Bar-Hillel y *Reply* por A. Koyré, en el Vol. VIII, Nº 2, pp. 245-255. V. también, A. Koyré *Epiménide, le menteur*, París, Hermann et Cie Editeurs, 1947). En el mismo año, presentamos una comunicación titulada *Análisis epistemológico del pensamiento paradójico*, donde intentábamos —con independencia de los trabajos de Koyré— resolver las paradojas prescindiendo del aparato logístico, y en nuestra comunicación *Epiménides, el mentiroso*, presentada al Instituto de Ciencias de la Educación "Ricardo Rojas", en 1958, estudiamos el aspecto metafísico de las paradojas. El mismo Russell agregó, entonces, la *teoría de los grados*, transformando la teoría de los tipos en la teoría *ramificada*, así llamada porque los tipos —excepto el cero— se *ramifican* en órdenes o grados. La nueva teoría intenta jerarquizar las funciones proposicionales: se denomina función proposicional *elemental* o de *grado cero* a la que no contiene ninguna variable aparente. Es una función proposicional de *grado uno* la que posee una o varias variables aparentes cuyos valores son individuos; y función proposicional de *segundo grado* la que menciona variables aparentes cuyos valores son funciones proposicionales de grado uno. La regla correspondiente establece que no se pueden tratar en el mismo plano proposiciones equivalentes a funciones proposicionales de distinto orden. La teoría ramificada consigue eliminar también las antionomias semánticas, pero creó dificultades de orden matemático que obligaron a Russell a complicarla más aún, agregándole dos axiomas: el de reductibilidad y el de infinitud. (V. Max Black: *The Nature of Mathematics*, London, Routledge and Kegan Paul Ltd., 2nd Impression, 1950, p.p 107-118). El mismo Ramsey y Chwistek, en sendos libros, demostraron que es preferible abandonar la complejidad de la teoría ramificada y retornar a una teoría simple de los tipos. (V. P. Ramsey: *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, Routledge and Kegan Paul, London, 1950, reimpresión de la edición de 1931; y L. Chwistek: *The Limits of Science*, London, Routledge and Kegan Paul Ltd., 152-154). En lo que se refiere al axioma del infinito, cabe observar que no es una identidad (una tautología), es decir que no se trata de un postulado puramente lógico. La adjunción de este axioma quiebra la unidad del programa logicista que establece que hay que derivar (no consideramos aquí la distinción moderna entre "derivabilidad" y "demostración") la Matemática de la Lógica partiendo de postulados estrictamente lógicos, es decir sin incluir axiomas matemáticos. Aparte de que es muy discutible la originalidad de la teoría de los tipos, desde que hay que admitir la influencia de ideas previas de Frege y el antecedente no desestimable constituido por la teoría homónima de Schroeder, se puede retrotraer su idea básica hasta la vieja concepción aristotélica de los individuos como sustancias de primer grado y de las especies como sustancias de segundo grado. (V. E. W. Beth, op. cit., p. 168-169). La doctrina de Russell ha sido objeto de diversas críticas que se tradujeron a veces en nuevas teorías que, de algún modo, la mejoraban, como las teorías simples de los tipos de Chwistek y Ramsey y la más reciente de Quine (V. *New Foundations for Mathematical Logic*, publicada en *From a Logical Point of View*, ya citado y una crítica de la doctrina de Quine en el libro ya citado de Grahay, desde la p. 59 en adelante).

([17]) La axiomática ha evolucionado desde sus comienzos intuitivos en los *Elementos* de Euclides hasta los sistemas formales puros de la Lógica y la Matemática contemporáneas. 1) La *axiomática intuitiva* se basa en la noción clásica de axioma: una proposición *evidente* que se conoce por *intuición*, igual que los conceptos fundamentales de la teoría. 2) En la *axiomática formal* los conceptos fundamentales se convierten en los *entes primitivos* y las proposiciones axiomáticas en *funciones proposicionales* o *postulados*. Ejemplo: la axiomática del número natural de G. Peano, que consta de tres signos primitivos, 0 (cero), N (número natural) y S (sucesor) y de 5 postulados: A_1. — $N(0)$; $A_2 . N(x) \supset_x N(S(x)). N(x) \supset_x (N(y) \supset_y [[S(x) = S(y)] \supset [x = y]]]$; A_3. — $N(x) \supset_x \sim [S(x) = 0]$; A_4. — $F(0)[N(x)F(x) \supset_x F(S(x))] \supset_F [N(x) \supset_x F(x)]$. Estos postulados se leen así: A_1. — Cero es un número; A_2. — El sucesor de un número es un número. A_3. — Dos números que tienen el mismo sucesor son iguales. A_4. — Cero no es el sucesor de ningún número, y A_5. — Si una propiedad es verdadera con respecto a 0 y si también lo es para un número natural cualquiera y para su sucesor, la propiedad será verdadera para todos los números (principio de inducción completa). Son bien conocidas las críticas de B. Russell (V. *Introducción a la filosofía matemática*, Buenos Aires, Losada S. A., 1945, pp. 18-23) que se pueden sintetizar diciendo que Peano no definió el campo de los números naturales, como era su propósito, sino la noción general de sucesión. Dicho en otros términos, la axiomática de Peano es *monomórfica* porque todos sus modelos posibles son progresiones y éstas son isomórficas entre sí. Por otra parte, Th. Skolem demostró que existen, además de la sucesión fundamental de los números naturales, otros modelos de la axiomática de Peano (y de otras axiomáticas similares) (V. *Peano's Axioms and Models of Arithmetics*, en *Mathematical Interpretations of Formal Systems*, por Skolem y otros, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1955, pp. 1-14). Además, Church demostró (en 1936) que la axiomática de Peano es indecidible y Rosser (en el mismo año) que es esencialmente indecidible. R. Martin destaca que esta indecidibilidad no depende del axioma de recurrencia, como lo han demostrado Rostowski y Robinson en 1953 (V. R. Martin: *Raisonnement mathématique et récurrence*, en Les Etudes Philosophiques, París, Press Univ., Nouv. série, 11 ième Année, N° 2 1956, p. 252. 3) Un *sistema formal puro* es un conjunto de *teoremas* o *tesis* obtenidas a partir de una sucesión de *signos* o *términos* por medio de un conjunto finito y bien determinado de *reglas de formación* y *reglas de derivación*. Los signos y términos indefinidos constituyen el *alfabeto* de la axiomática; las *expresiones bien formadas* o *fórmulas* se construyen mediante los signos sometidos a las *reglas de formación*, y se obtienen otras fórmulas, llamadas *teoremas* o *tesis*, aplicando a las primeras las *reglas de derivación*, llamadas también *reglas de transformación*, *deducción o demostración*. La *axiomática formalizada* o *sistema formal puro* elimina toda referencia a cualquier campo de significaciones exterior al sistema, con lo que se busca desterrar los últimos restos intuitivos: es un *lenguaje*, constituido por un *alfabeto* (los signos), ciertas *palabras* (conjuntos de signos) y *expresiones* (fórmulas). Se lo denomina *lenguaje-objeto* para distinguirlo del sistema de signos por medio del cual nos referimos al sistema formalizado que se llama *metalenguaje*. Generalmente, el metalenguaje es el lenguaje común (cualquier lengua moderna) más algunos símbolos artificiales creados ad-hoc. La teoría completa de un lenguaje-objeto es la *Semiótica*, que se formula en un metalenguaje, y se divide en Sintaxis, Semántica y Pragmática. La Sintaxis es el estudio de las relaciones formales entre los signos, la Semántica considera, además, los *designata* y la Pragmática incluye también al hablante.

Una axiomática formalizada debe cumplir ciertas condiciones:

1) *consistencia,* 2) *independencia,* 3) *saturación,* 4) *decidibilidad* y 5) *completicidad.* 1) Una axiomática es *consistente* si no se puede derivar en ella una fórmula y su negación. Esta definición es sintáctica; desde un punto de vista semántico, la consistencia se relaciona con la *interpretación* y se define así: una teoría es consistente (semánticamente) si y sólo si tiene un *modelo.* Se llama *modelo* o *representación* de un sistema axiomático a un conjunto de objetos que satisfacen los axiomas del sistema. Los objetos no tienen por qué ser "concretos" desde que pueden pertenecer a otra teoría, cualquiera sea el grado de abstracción de ésta (V. una definición más general de modelo en G. Kreisel: *Models, Translations and Interpretations,* en la obra citada *Mathematical Interpretations of Formal Systems*). A. Church (V. *Introduction to Mathematical Logic,* Vol. I, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, Second Printing, 1958, pp. 327 y seq.) distingue entre *consistencia con respecto a la probabilidad* y *consistencia con respecto a las consecuencias*; esta última es una definición semántica. Hace la misma distinción para las otras propiedades de la axiomática. 2) Se prueba la *independencia* de un sistema de axiomas si la negación respectiva de cada uno de ellos forma, con los axiomas restantes, sistemas consistentes. (Esta definición, como las de las demás propiedades, también puede ser formulada desde un punto de vista semántico). 3) El sistema está *saturado* si agregando al conjunto de axiomas una fórmula (que no sea un teorema) se obtiene una contradicción. 4) Una teoría es *decidible* si la solución del *problema de la decisión* es positiva; se llama *problema de la decisión* al que consiste en determinar si existe un *procedimiento mecánico de decisión* para una teoría dada. Un *procedimiento de decisión* para una axiomática formalizada es un método que nos permite decidir, en cada caso particular, si una fórmula es o no un teorema del sistema. Se puede definir, además, la *indecibilidad esencial*: una teoría es *esencialmente indecidible* si es consistente y si una extensión consistente de dicha teoría es indecidible. (V. S. C. Kleene: *Introduction to Metamathematics,* Princeton, D. Van Nostram Comp. Inc., p. 437, y también A.

Tarski y otros *Indecidable Theories*, Amsterdam North Holland Publ., 1953). 5) Un sistema es *completo* si para cualquiera de sus fórmulas se puede probar que es o no un teorema del sistema. Todo sistema completo es decidible, pero un sistema puede ser decidible sin ser completo.

La denominada "prueba de Gödel" establece que todo cálculo que posibilite la formalización de la Aritmética es incompleto por la existencia, en él, de por lo menos una fórmula indecidible o, dicho en otros términos, que no puede ser, a la vez, consistente y completo. Mediante un procedimiento propio de aritmetización de la Sintaxis, demostró por vía matemática su célebre teorema y construyó una fórmula indecidible, que afirma su propia inderivabilidad. (La expresión es análoga a la de la paradoja del mentiroso, con la diferencia que en vez de referirse a la verdad se refiere a la derivabilidad). Si bien es cierto que los resultados de Gödel han mostrado las limitaciones de la formalización y la imposibilidad de la axiomatización total de la Lógica y la Matemática, no hay que interpretarlos como el fracaso del programa metamatemático de Hilbert: cumplir una formalización estricta de las teorías matemáticas, inclusive de sus demostraciones, siguiendo el modelo del cálculo lógico; los *objetos* de la metamatemática serían los símbolos y las fórmulas (objetos-signos), desprovistos de todo contenido significativo. Lograda la formalización, Hilbert creía posible una teoría *objetiva* de la demostración, llamada *teoría de la prueba* o *metamatemática*, cuyo problema central sería la demostración de la consistencia del sistema formalizado. Otras cuestiones importantes son el problema de la decisión y el de la completicidad de la teoría. ¿Cuál es la ubicación de Boole dentro del movimiento formalista? Sin duda, Boole había visto claramente la importancia de una axiomática formalizada, aunque él mismo no llegara a formularla. Pruebas de ello son su concepción estructural de las relaciones operatorias, su teoría del signo y la analogía que cree vislumbrar entre la axiomática geométrica, el Análisis y la Lógica Simbólica, en la *Introducción*. Por supuesto que recién con Hilbert se consigue distinguir entre Matemática y Metamatemática y esta importante decisión fue necesaria para llegar, años más tarde, a los resultados de Gödel. Cierto es, por otra parte, que entre Boole y Hilbert hay una cadena de lógicos y matemáticos que jalonaron el largo camino hacia la formalización, pero ello no disminuye la importancia del aporte de Boole a la constitución de las álgebras abstractas y a la fundamentación logística de la Matemática.

Bochenski define un *sistema formalizado* como "un sistema axiomático cuyas reglas se refieren exclusivamente a la forma gráfica de las expresiones y cuyos axiomas y reglas han sido formulados explícitamente. "El sistema debe ser desarrollado únicamente mediante las reglas dadas y sin referencia alguna al sentido de las expresiones. El sistema carece de significado, pero es susceptible de "recibir diversas interpretaciones" (V. *Précis de logique mathématique,* op. cit.; p. 29). Es cierto que esta definición es completamente "neutral", pero no lo es menos que por eso mismo ha favorecido las posiciones nominalistas extremas.

PRIMEROS PRINCIPIOS

Representaremos el Universo con el símbolo 1, o la unidad, que comprenderá toda clase concebible de objetos de existencia real o no [18]. Establecemos como premisa que el mismo individuo puede encontrarse en más de una clase, porque puede poseer más de una cualidad común con otros individuos. Mediante las letras X,Y,Z, simbolizamos los miembros individuales de las clases; X se aplica a todo miembro de una clase en cuanto miembro de esa clase particular e Y a todo miembro de otra clase en cuanto miembro de dicha clase, y así sucesivamente conforme al lenguaje corriente en los tratados de Lógica.

Además, concebimos una clase de símbolos x,y,z, con los siguientes caracteres:

El símbolo x, que opera sobre cualquier sujeto que comprenda individuos o clases, elige —supondremos— todas las X que contiene dicho sujeto [19]. Análogamente, el símbolo y, que opera sobre cualquier sujeto, elige del mismo todos los individuos de la clase y comprendidos en ella, y así sucesivamente.

Cuando no se expresa sujeto alguno, suponemos que se sobreentiende 1 (el Universo), y tendremos:

$$x = x, \tag{1}$$

entendiendo por el sentido de cada término la elección, dentro del Universo, de todas las X que éste contiene, siendo el resultado de esta operación en lenguaje común, la clase X, es decir la clase de cada uno de cuyos miembros es una X.

De estas premisas se sigue que el producto xy representa, sucesivamente, la elección de la clase Y, y la elección, dentro de esta clase, de aquellos individuos de la clase X contenidos en Y, obteniendo como resultado la clase cuyos miembros son, a la vez, X e Y. Y, de la misma manera, el producto xyz representa una operación compuesta en la cual los respectivos elementos son la selección de la clase Z, y la elección dentro de ella de los individuos de la clase Y contenidos en ella, y, en el resultado así obtenido, la selección de todos los individuos de la clase X que éste contiene: el resultado final es la clase común a X, Y y Z.

Designaremos a x,y,z, "símbolos electivos" por la naturaleza de la operación que ellos representan. Y llamaremos "función electiva" a una expresión que contiene símbolos electivos y "ecuación electiva" a una ecuación cuyos miembros son funciones electivas.

No será necesario entrar a analizar ahora la operación mental que hemos representado por el símbolo electivo. No se trata de una abstracción (en la acepción corriente del término), porque no perdemos de vista lo concreto en ningún momento; podría ser referida mejor al ejercicio de las facultades de comparación y atención. Nuestra finalidad actual apunta más bien a las leyes de combinación y sucesión que rigen sus resultados y a este respecto basta expresar lo siguiente:

1°) El resultado de un acto de elección es independiente de la agrupación o clasificación del sujeto. Así, es indiferente que de un grupo de objetos considerados como una totalidad elijamos la clase X o dividamos el grupo en dos partes, elijamos de ellos las X separadamente y luego conectemos los resultados en una concepción de conjunto.

Podemos expresar esta ley matemáticamente por medio de la ecuación:

$$x(u + v) = xu + xv, \quad (20)$$

donde $u + v$ representa el sujeto indiviso y u y v sus partes constituyentes.

2°) El orden en que son representados dos actos sucesivos de elección es indistinto.

Si de la clase de los animales elegimos las ovejas, y de las ovejas las que tienen cuernos; o, si de los animales elegimos los que tienen cuernos, y entre éstos las ovejas, el resultado es el mismo: en ambos casos llegamos a la clase *ovejas con cuernos*.

La expresión simbólica de esta ley es:

$$xy = yx.$$

3°) El resultado de un acto dado de elección realizado dos veces, o cualquier número de veces en sucesión, es el resultado del mismo acto realizado una vez.

Si de un grupo de objetos elegimos las X, obtenemos una clase cuyos miembros son todos X. Si repetimos la operación en esta clase no se seguirá ningún cambio: eligiendo las X. tenemos el total. Así obtendremos:

$$xx = x,$$

o

$$x^2 = x;$$

y suponiendo que la misma operación se hubiera realizado n veces, tendríamos

$$x^n = x,$$ [21]

que es la expresión matemática de la ley establecida más arriba (*).

Las leyes que hemos establecido bajo formas simbólicas

$$x(u + v) = xu + xv, \qquad \text{(I)}$$

$$xy = yx, \qquad \text{(II)}$$

$$xn = x, \qquad \text{(III)}$$

son suficientes para fundamentar el Cálculo [22]. De la primera ley resulta que los símbolos electivos son *distributivos*; de la segunda, que son *conmutativos*. Estas propiedades las poseen en común con los símbolos de *cantidad* y, en virtud de ellas, todos los procesos del Algebra común son aplicables a este sistema. El único y suficiente axioma implícito en esta aplicación es que las

(*) La función del símbolo electivo x es elegir individuos comprendidos en la clase X. Supongamos que la clase X abarque el universo; entonces, cualquiera sea la clase Y, tendremos:

$$xy = y.$$

La función de x es aquí equivalente al símbolo $+$, en una al menos de sus interpretaciones, y la ley del índice (3) da

$$+^n = +,$$

que es la propiedad conocida de ese símbolo.

operaciones equivalentes realizadas con sujetos equivalentes producen resultados equivalentes (*).

A la tercera ley (III) la llamaremos "la ley del índice". Esta ley es característica de los símbolos electivos y reviste gran importancia porque nos permite reducir nuestros resultados a formas convenientes para su interpretación.

Del hecho que los procesos del Algebra puedan ser aplicados a nuestro sistema no debe inferirse que la

(*) En general, los lógicos aseguran que todo razonamiento depende, en última instancia, de la aplicación del *dictum de omni et nullo*, de Aristóteles. "Lo que es predicado universalmente de cualquier clase de objetos puede ser predicado, de la misma manera, de cada uno de los objetos comprendidos en dicha clase". Se acepta, sin embargo, que el *dictum* no es aplicable en forma inmediata en todos los casos, y que, en la mayoría de ellos, es necesario un proceso previo de reducción. ¿Cuáles son los elementos involucrados en ese proceso de reducción? Precisamente, son, más una parte del razonamiento general que el *dictum* mismo.

Otro medio de considerar el asunto consiste en resolver todo razonamiento en una aplicación de uno u otro de los cánones siguientes:

1) Si dos términos concuerdan con uno y el mismo tercero, concuerdan entre sí.

2) Si un término concuerda y otro no con uno y el mismo tercero, los dos primeros no concuerdan entre sí.

Pero, la aplicación de estas normas depende de los actos mentales equivalentes a aquellos que están comprendidos en el proceso de reducción al que acabamos de referirnos. Tenemos que elegir individuos en las clases, convertir proposiciones, &c., antes de aprovecharnos de su orientación. Cualquier explicación del proceso de razonamiento es insuficiente, porque no representa ni las leyes de la operación que realiza la mente en dicho proceso ni las verdades primarias que reconoce y aplica.

Cabe presumir que las leyes en cuestión estén representadas adecuadamente por las ecuaciones fundamentales de este Cálculo. La prueba de ello se encontrará en su capacidad para expresar proposiciones y exhibir los resultados de sus procesos; de todo resultado al que se pueda llegar por medio del razonamiento común.

interpretación de una ecuación electiva no sea afectada por dichos procesos. La expresión de una verdad no puede ser negada por una operación legítima, pero sí limitada. La ecuación $y = z$ implica que las clases Y y Z son equivalentes miembro a miembro. Multipliquémosla por un factor x y tendremos:

$$xy = xz,$$

que expresa que los individuos comunes a las clases X e Y son también comunes a X y Z, y viceversa. Esta es una inferencia perfectamente legítima, pero el hecho que denota es menos general que el afirmado en la proposición original.

([18]) El concepto de "universo", o "universo de discurso" —como lo denomina Boole en *An Investigation*. . .— proviene de De Morgan y ha perdurado hasta hoy. En su *Formal Logic* se lee que "en la mayor parte de las proposiciones el campo del pensamiento es mucho menos extenso que el universo total" por eso "el campo total de un tema de discusión es —desde el punto de vista de la discusión— lo que he denominado un *universo*", que posee cierta extensión, es decir, que comprende "un campo de ideas que es expresado como conteniendo la totalidad del asunto en discusión". (V. L. S. Stebbing: *A Modern Elementary Logic*, London, Methuen & Co. Ltd., Fourth Edition, 1949, pp. 91 y seq.). A la misma obra pertenece el siguiente texto, reproducido por Lewis en su libro, ya citado, *A Survey of Symbolic Logic*, p. 37: "Consideremos un par de nombres contrarios como hombre y no-hombre. Es evidente que ambos representan todo lo imaginable o real en el universo. Pero los contrarios del lenguaje común no abarcan el universo total sino una idea general. Así, con respecto a los hombres, inglés y extranjero son contrarios: cada hombre debe ser una de las dos cosas, ningún hombre puede ser ambas a la vez.

Lo mismo puede afirmarse de las nociones de entero y fraccionarios, entre los números, de par y miembro de la Cámara de los Comunes, entre las personas de un reinado (Inglaterra), de macho y hembra entre los animales, etc., etc. Con el objeto de expresar este pensamiento, supongamos que la idea total que aquí consideramos es *el universo* (que significa, simplemente, la totalidad cuyas partes estamos examinando) - y llamamos contrarios *en* o *con respecto a ese universo* a las parejas de nombres que nada tienen de común pero que contienen entre ambos la idea en consideración".

Boole desarrolló con mayor extensión el concepto de universo de discurso en su libro citado ut supra (pp. 47-48 y 166-167). En la *Proposición II* determina el valor y la significación de los símbolos 0 y 1: "...la clase representada por 1 debe ser *el Universo* porque es la única clase en la cual se encuentran *todos* los individuos que existen en *cualquier* clase. La significación de 1 (el universo de discurso) es explicado por Boole con conceptos —y hasta con expresiones— semejantes a las de De Morgan; "...junto con la idea de una clase cualquiera de objetos como *hombres* la mente imagina la idea de una clase contraria de entes que no son hombres ..." y "... el Universo total está constituido por las dos clases reunidas' (loc. cit., p. 48). Finalmente, explicará el alcance de 1 con respecto' al tiempo (op. cit., pp. 166-167).

En la lógica contemporánea, se emplean como sinónimos las expresiones "universo de discurso" y "dominio de individuos" (o, simplemente, "dominio") de un sistema. La expresión "individuos" equivale a lo que Carnap llama "los objetos básicos considerados en un sistema lingüístico dado" (V. R. Carnap: *Introduction to Symbolic Logic and its Applications*, ya cit., p. 4) y también al *tipo cero* de la teoría de los tipos de B. Russell (V. Nota 15). El empleo de la expresión "universo de discurso" es más frecuente en Algebra de clases (aunque, como veremos, se usa, por extensión, también en otras disciplinas, como la Lingüística contemporánea), y se la puede definir como "una clase no vacía". Hugues Leblanc (V. *An Introduction to Deductive Logic*, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1955, p. 95) define un universo de discurso D como un conjunto no vacío de entes y "proposición verdadera en un universo de discurso dado" a aquella en la cual los valores de sus variables son miembros de D. Se puede definir la *clase universal* mediante una propiedad como la identidad, válida universalmente para cualquier objeto: $V = \text{def. } \hat{x}(x = x)$. Se suele identificar "universo de discurso" y "clase universal" (V., por ejemplo, J. Ferrater Mora: *Lógica matemática*, México-Buenos Aires, F. C. E., 1955, p. 120, y el ensayo de A. Church sobre Algebra de clases en el ya citado *Dictionary of Philosophy*, editado por Runes, donde afirma que la clase universal comprende la totalidad del universo de discurso). La confusión parece haber empezado en 1881, con John Venn (V. *Symbolic Logic*, London, Macmillan and Co., 1894, 2nd. Edition, pp. 245-255). Sin embargo De Morgan —de quien Venn tomó el concepto— advierte sobre el riesgo de incurrir en falacias si se hace esa identificación. S. Langer (V. *An Introduction to Symbolic Logic*, 2nd. Edition, New York, Dover Publications Inc., 1953, pp. 170-171) destaca que la falacia se presenta cuando los elementos de D (universo de discurso) son clases. Si son individuos, la clase más extensa que es dable formar, puede coincidir con D, pero cuando relacionamos clases entre sí la clase más extensa 1 no es D sino un elemento de D, similar a cualquier otro objeto del dominio. Sea E dicho elemento, su relación con 1 es $E \subset 1$, pero con respecto a D, tenemos $E \varepsilon D$. En consecuencia, tienen sentido las expresiones $1 \varepsilon D$ o $1 \subset 1$, pero no $D \subset D$ o $1 \varepsilon 1$.

Si definimos universo de discurso con un criterio extensional conjuntista (clase o conjunto no vacío de individuos) es evidente que D puede ser finito o infinito y también que existen varios "universos", siendo estas conclusiones perfectamente compatibles desde un punto de vista lógico. Ahora bien, si se analiza esta noción con referencia a las proposiciones existenciales, se puede presentar —según algunos lógicos positivistas— el problema de la *existencia real* de ciertos universos de discurso. Dicha existencia sería absurda desde que fuera de "este mundo", natural y empírico, no existen otros posibles. (V., por ejemplo, S. Stebbing, *A Modern Introduction to Logic*, London, Methuen & Co. Ltd., Seventh Edition Reprinted 1953, p. 55-56). Es fácil ver, sin embargo, que la dificultad desaparece si se define adecuadamente la noción de existencia.

Eugenio Coseriu (V. *Determinación y entorno*, Hamburg, Romanistisches Jahrbuch, VII Band, 1955-56, p. 55) define el universo de discurso, dentro de la moderna Lingüística, como "el sistema universal de significaciones al que pertenecen un discurso (o un enunciado) y que determina su validez, y su sentido". En otros términos, es el contexto significativo y convencional, el plano de significaciones, que confiere sentido a una expresión del discurso. Coseriu, forzado por las exigencias de la Lingüística (en última instancia, ciencia de los hechos del lenguaje), adopta una definición "por comprensión". (Compárese con la definición citada de H. Leblanc).

(19) Lewis ha observado (V. A Survey..., op. cit., p. 52) que Boole no distingue entre la operación de elección y el resultado de esta operación: x representa, a la vez, la operación de elección y la clase de todas las x. A propósito, recordemos que en Aritmética se distingue entre *adición* (la operación) y *suma* (el resultado de dicha operación). Sin embargo, en la teoría de series la palabra *serie* designa, a la vez, la operación y el resultado de esa operación; equivocidad análoga a la que gravita sobre el término *elección* que usa Boole.

(20) La explicación de la fórmula:

$$x(u + v) = xu + xv$$

en términos de Boole, sería: $x(u + v)$ significa elegir, en la clase x, los objetos pertenecientes a la clase u o a la clase v, que es lo que expresa el segundo miembro de la igualdad $xu + xv$. Esta expresión se puede traducir como la elección, en x, de los objetos pertenecientes a $u(xu)$, luego la de los pertenecientes a $v(xv)$ y, finalmente, la reunión de las dos elecciones $(xu + xv)$. Como Boole no aceptaba más que la disyunción exclusiva (x *aut* y), sólo podía considerar la ley distributiva en el Algebra numérica, que es la que acabamos de explicar. En Logística, hay otra ley distributiva que relaciona las operaciones de conjunción y disyunción, y que se formula así, algebraicamente:

$$x + (uv) = (x + u)(x + v).$$

Boole no podía aceptar esta última ley por dos razones: 1°) porque no es válida en el Algebra corriente y 2°) porque es preciso introducir previamente la disyunción no-exclusiva (*x vel y*). Stanley Jevons fue el encargado de hacerlo generalizando, de este modo, las relaciones distributivas entre las operaciones lógicas de conjunción y disyunción. Hilbert señalaba que las denominaciones "producto lógico" y "suma lógica" son incorrectas, justamente porque estas operaciones lógicas tienen propiedades distintas de sus homónimas matemáticas. En efecto, las operaciones (matemáticas o lógicas) se definen a través de sus propiedades o leyes; y, como hemos visto, hay una ley distributiva que se cumple en la Lógica pero que carece de validez en las operaciones análogas de la Matemática. (V. D. Hilbert y W. Ackermann: *Principles of Mathematical Logic*, Chelsea Publ. Comp., New York, 1950, p. 7). Una simple comprobación numérica aclarará la cuestión:

a) $$2(3 + 4) = (2 \times 3) + (2 \times 4)$$

porque:

$$2 \times 7 = 6 + 8 = 14;$$

en cambio:

b) $$2 + (3 \times 4) \neq (2 + 3)(2 + 4)$$

porque:

$$2 + 12 \neq 5 + 6.$$

([21]) Esta ley establece una diferencia entre el Algebra de Boole y el Algebra corriente, aunque si se limita el campo de existencia de las variables a los números 0 y 1, también resulta válida en esta última; en efecto, $0.0 = 0$ y $1.1 = 1$, lo que ya sabía Husserl cuando escribía: "el cálculo algebraico se reduce al cálculo lógico si la sucesión de los números naturales se circunscribe a 0 y 1.

(V. S. Bachelard: *La logique de Husserl*, Presses Universitaires de France, París, 1957, p. 84). Un pensamiento similar fue expresado por Boole en *An Investigation* (op. cit. pág. 37).

$x.x = x$ significa que si elegimos en el universo de discurso (1) los objetos de la clase x y, en seguida, reiteramos esa operación, no se obtendrá una clase nueva, sino, otra vez, la clase x. La ley del índice corresponde a la propiedad que los lógicos actuales llaman *idempotente* (que es cumplida por la conjunción y la disyunción dentro del cálculo sentencial). En *An Investigation* (op. cit.) la ley del índice se presenta modificada: en vez de

$$x^n = x$$

tenemos solamente

$$x^2 = x.$$

La razón del cambio parece haber sido que la forma generalizada no siempre se puede interpretar lógicamente. Por ejemplo, $x^3 = x$ no es interpretable lógicamente, porque las expresiones equivalentes:

$$x(1 - x)(1 + x) = 0,$$
$$x(1 - x)(- 1 - x) = 0,$$

exigen la interpretación de los factores $1 + x$ y $- 1 - x$. El primero de ellos no se puede interpretar porque la adición de una clase cualquiera x al universo de discurso (1) es inconcebible; y el segundo tampoco es interpretable porque el símbolo $- 1$ no está sujeto a la ley $x(1 - x) = 0$, que es válida para todo símbolo dentro del sistema de Boole. Como dice Boole (V. op. cit., p. 50) existen operaciones posibles para el matemático que son ajenas al campo lógico y $x^3 = x$ es una de ellas. (Y, desde luego, también lo es $x^n = x$). Como en el desarrollo de los cálculos se pueden presentar expresiones algebraicas no interpretables lógicamente, pero que conducen a resultados finales con sentido lógico, Boole explica que tales expresiones son intermedias y comparables al símbolo $\sqrt{-1}$ en la trigonometría, igualmente ininterpretable pero conducente a una expresión final con sentido matemático. En el cap. V de su obra, ya citada, *An Investigation...*, al establecer los principios fundamentales del razonamiento simbólico, destaca en cursiva que "De hecho, es posible poner a un lado la interpretación lógica de los símbolos de una ecuación dada; convertirla en símbolos cuantitativos susceptibles de poseer solamente los valores 0 y 1; realizar con ellos todos los procedimientos que exige la solución y, finalmente, restituir a dichos símbolos su interpretación lógica (op. cit., p. 69-70).

A partir de la ley del índice, se llega a la ley de contradicción (o "ley de dualidad", como la llama Boole), derivada algebraicamente de la primera. Si:

$$x^2 = x,$$

puedo escribir:

$$x - x^2 = 0$$

y, sacando factor común:

$$x(1 - x) = 0$$

Supongamos que x simboliza "la clase de los hombres", luego $1 - x$ será la de los no-hombres y $x(1 - x)$ será una clase cuyos miembros son, a la vez, hombres y no-hombres. Ahora bien, esta clase no existe (lo que se expresa por el símbolo 0) porque un individuo no puede ser hombre y no-hombre, lo que es simbolizado por la ecuación:

$$x(1 - x) = 0$$

que se traduce así: es imposible que un individuo posea y no posea una misma propiedad. (V. Boole, op. cit., p. 49-51), formulación que, en esencia, reproduce la del principio de no contradicción, tal como figura en la *Metafísica* de Aristóteles.

([22]) De acuerdo a las manifestaciones de su creador, el Algebra Simbólica (que hoy llamamos Algebra de Boole, distinguiéndola del Algebra de Boole-Schroeder y de las álgebras abstractas modernas) es un sistema matemático abstracto cuyas leyes se refieren a símbolos ininterpretados y cuyo significado no interesa. (V. las notas 3, 4 y 5). Es evidente, sin embargo, que Boole interpreta los símbolos electivos de dos maneras: una *algebraica*, según la cual dichos símbolos son variables cuyos valores posibles son sólo 0 y 1; y otra *lógica*, que traduce los símbolos electivos en clases lógicas (aunque Boole no lo declare explícitamente). Desde este segundo punto de vista, algunas expresiones y ciertas operaciones no son interpretables lógicamente. El escollo es salvado en forma provisoria por el propio Boole quien explica cómo, en tales casos, se suspende momentáneamente la interpretación de las expresiones u operaciones intermedias del cálculo para hacerlo al final, desde que las combinaciones simbólicas últimas son una consecuencia deducida de las premisas. (V. la nota 21 y *An Investigation*, pp. 69-70).

No obstante ello, Lewis (V. *A Survey*..., pp. 55-56) objeta a Boole su inconsecuencia con respecto a los principios por él mismo estatuidos. En efecto, según la regla formulada en la p. 70 de *An Investigation*..., Boole debería haber desarrollado su Algebra sin considerar la significación lógica de los símbolos electivos y, recién al término de las respectivas operaciones, interpretarlos como clases lógicas, señalando, a la vez, los límites de dicha interpretación. Es decir que el desarrollo del sistema abstracto debió hacerse con un criterio *neutral* y considerar separadamente las dos interpretaciones, la lógica y la matemática; lo que no siempre logra cumplir Boole.

DE LAS EXPRESIONES Y SU INTERPRETACION

Una proposición [23] es una oración que afirma o niega; por ej., *Todos los hombres son mortales, Ninguna criatura es independiente.*

Una proposición posee necesariamente dos términos [24], como *hombres, mortales*; el primero de ellos, o aquel del que se habla, es el sujeto; el último, o lo que se afirma o niega del sujeto, es el predicado. Ambos términos están conectados por la cópula, *es*, o *no es*, o por cualquier otra forma del verbo sustantivo.

El verbo sustantivo es el único verbo aceptado en Lógica; todos los otros se pueden reducir al verbo *ser* con un participio o adjetivo, por ejemplo, *Los romanos vencidos*; la palabra *vencidos* es a la vez cópula y predicado, siendo equivalente a *fueron* (cópula) *derrotados* (predicado).

Una proposición puede ser afirmativa o negativa [25] y también universal o particular. En consecuencia, tenemos en total cuatro clases de proposiciones categóricas puras.

1°) Universal-afirmativa, comúnmente representada por A.
Ejemplo, todas las X son Y.

2°) Universal-negativa, corrientemente representada por E.
Ejemplo, Ninguna X es Y.

3°) Particular-afirmativa, habitualmente simbolizada por I.
Ejemplo, Algunas X son Y.

4°) Particular-negativa, comúnmente representada por O (*).
Ejemplo, Algunas X no son Y.

1. Expresar la clase no-X, es decir la clase que incluye a todos los individuos que no son X.

La clase X y la clase no-X juntas constituyen el Universo. Pero el Universo es 1 y la clase X está determinada por el símbolo x, en consecuencia la clase no-X se puede representar por el símbolo:

$$1 - x. \quad (^{26})$$

Luego, el símbolo $1 - x$, unido a un sujeto dado, tendrá la función de elegir en dicho sujeto todas las no-X que contiene.

Y, análogamente, así como el producto xy expresa toda la clase cuyos miembros son a la vez X e Y, el símbolo $y(1 - x)$ representará la clase cuyos miembros son Y pero no X, y el símbolo $(1 - x)$ $(1 - y)$ toda la clase cuyos miembros no son ni X ni Y.

2. Expresar la proposición Todas las X son Y ([27]).

Como todas las X existentes se encuentran en la clase

(*) Esta clasificación ha sido tomada, con ligeras variantes, de los Tratados de Aldrich y Whately.

Y, es obvio que extraer del Universo todas las Y y de ellas escoger todas las X es lo mismo que elegir directamente todas las X del Universo.

$$xy = x,$$
$$x(1 - y) = 0. \tag{IV}$$

3. Expresar la proposición Ninguna X es Y.

Afirmar que ninguna X es Y es lo mismo que decir que no existen términos comunes a las clases X e Y. Como todos los individuos comunes a dichas clases son representados por xy, resulta que la proposición Ninguna X es Y puede ser expresada por la ecuación:

$$xy = 0. \tag{V}$$

4. Expresar la proposición Algunas X son Y.

Si algunas X son Y hay algunos términos comunes a las clases X e Y. Formemos con estos términos una clase independiente V a la que corresponderá un símbolo electivo propio v. Luego:

$$v = xy. \tag{VI}$$

Y como v incluye todos los términos comunes a las clases X e Y, podemos interpretar este símbolo indistintamente como Algunas X o Algunas Y.

5. Expresar la proposición Algunas X no son Y.

En la ecuación anterior, sustituyamos y por $1 - y$ y tendremos:

$$v = x(1 - y), \tag{VII}$$

siendo la interpretación de v indistintamente Algunas X o Algunas no-Y.

Las ecuaciones anteriores constituyen la teoría completa de las proposiciones categóricas; nada más cabe esperar en lo que respecta al empleo del análisis para la deducción de las inferencias lógicas. No obstante, puede resultar satisfactorio referirse a algunas formas particulares que se deducen de las ecuaciones tercera y cuarta y que son susceptibles de aplicaciones similares.

Si multiplicamos la ecuación (VI) por x, tenemos

$$vx = x^2y = xy,$$

en virtud de (III).

Comparando con (VI), obtenemos

$$v = vx,$$

o

$$v(1 - x) = 0. \qquad \text{(VIII)}$$

Y multiplicando (VI) por y, y reduciendo de manera semejante, tenemos

$$v = vy,$$

o

$$v(1 - y) = 0. \qquad \text{(IX)}$$

Comparando (VIII) y (IX),

$$vx = vy = v. \qquad \text{(X)}$$

Y, además, comparando (VIII) y (IX) con (IV), tenemos como equivalente de este sistema de ecuaciones las proposiciones

Todas las V son X.
Todas las V son Y.

El sistema (X) puede reemplazar a (VI), o la simple ecuación:

$$vx = vy, \qquad \text{(XI)}$$

puede también ser usada, asignando a vx la interpretación Algunas X y a vy Algunas Y. Sin embargo, se observa que el sistema no expresa mucho más que la simple ecuación (VI) de la cual se ha derivado. En realidad, ambas expresan la proposición Algunas X son Y, pero el sistema (X) no implica que la clase V incluya *todos* los términos que son comunes a X e Y.

Del mismo modo, de la ecuación (VII) que expresa la proposición Algunas X no son Y, deducimos el sistema:

$$vx = v(1 - y) = v, \tag{XII}$$

donde la interpretación de $v(1 - y)$ es Algunas no-Y. Desde que, en este caso, $vy = 0$, hay que tener cuidado de interpretar vy como Algunas Y.

Si multiplicamos la primera ecuación del sistema (XII), por ejemplo

$$vx = v(1 - y),$$

por y, tenemos

$$vxy = vy(1 - y);$$

$$\therefore vxy = 0, \tag{XIII}$$

que es una forma que se puede presentar ocasionalmente. Para interpretarla, no es necesario volver a la ecuación primitiva porque la condición gracias a la cual vx representa Algunas X nos mostró, en virtud de (V), que su significación será:

Algunas X no son Y,

comprendiendo el sujeto *todas* las X que se encuentran en la clase V.

Universalmente, en estos casos, la diferencia de forma implica una diferencia de interpretación con respecto al símbolo auxiliar v, y cada forma es interpretable por sí misma. Además, estas diferencias no introducen en el Cálculo innecesarias confusiones. Al contrario, de aquí en adelante se verá que confieren a sus conclusiones una precisión y una determinación que, de otro modo, no se podrían asegurar.

Finalmente, destacamos que todas las ecuaciones por medio de las cuales se expresan las verdades particulares, se deducen de una ecuación general cualquiera, que expresa una proposición general cualquiera, de la cual aquellas proposiciones particulares son deducciones necesarias.

Todo ello ya ha sido mostrado parcialmente pero es ejemplificado en forma mucho más completa en el esquema siguiente.

La ecuación general

$$x = y,$$

implica que las clases X e Y son equivalentes miembro a miembro; que cada individuo perteneciente a una de ellas también pertenece a la otra. Multipliquemos la ecuación por x y tendremos

$$x^2 = xy;$$
$$\therefore \ x = xy,$$

que implica, por (IV), que todas las X son Y. Multipliquemos la misma ecuación por y y tendremos, análogamente:

$$y = xy;$$

que significa que todas las Y son X. Tomemos cualquiera de estas ecuaciones, la última por ejemplo, y escribiéndola bajo la forma:

$$(1 - x)y = 0,$$

podemos considerarla como una ecuación en la cual y, una cantidad desconocida, aparece expresada en términos de x. Cuando volvamos a tratar la solución de las ecuaciones electivas (y el resultado se puede verificar aquí por sustitución), se podrá ver que la solución más general de esta ecuación es:

$$y = vx,$$

que implica Todas las Y son X y Algunas X son Y. Multiplicando por x, obtenemos:

$$vy = vx,$$

que implica, indistintamente, Algunas Y son X y Algunas X son Y, que es la forma particular a la que llegamos anteriormente.

Para facilitar la consulta, el resultado anterior y algunos otros serán clasificados en la Tabla anexa, cuya primera columna contiene proposiciones, la segunda ecuaciones y la tercera las condiciones de la interpretación final. Cabe señalar que las ecuaciones auxiliares formuladas en esta columna no son independientes: están implicadas en la segunda columna o en la condición para la interpretación de v. Pero se ha creído prudente escribirlas por separado por razones de facilidad y conveniencia. Además, es bueno tener presente que, aunque se hayan dado tres formas diferentes para la expresión de cada una de las proposiciones *particulares*, todas están incluidas en realidad en la primera forma.

TABLA

La clase X	x	
La clase no-X	$1 - x$	
Todas las X son Y Todas las Y son X	$x = y$	
Todas las X son Y	$x(1 - y) = 0$	
Ninguna X es Y	$xy = 0$	
Todas las Y son X Algunas X son Y	$y = vx$	$vx =$ algunas X $v(1 - x) = 0.$
Ninguna Y es X Algunas no-X son Y	$y = v(1 - x)$	$v(1 - x) =$ algunas no-X $vx = 0$
Algunas X son Y	$v = xy$	$v =$ algunas X o algunas Y.
	ó $vx = vy$	$vx =$ algunas X, $vy =$ algunas Y
	ó $vx(1 - y) = 0$	$v(1 - x) = 0,$ $v(1 - y) = 0$

	$v = x(1-y)$	v = algunas X, o algunas no-Y
Algunas X no son Y	ó $vx = v(1-y)$	vx = algunas X, $v(1-y)$ algunas no-Y
	ó $vxy = 0$	$v(1-x) = 0, vy = 0$

(23) Aristóteles definía la proposición (ἀπόφανσις o λόγος ἀποφάντικος) como una "oración en la cual reside la verdad o la falsedad". Sin embargo, no todas las oraciones poseen esta propiedad: "la plegaria es una oración pero no es una proposición, porque no es ni verdadera ni falsa" (V. *De Interpretatione* V, 17 a, en *The Works of Aristotle translated into English* under the Editorship of W. D. Ross, London, Oxford Univ. Press, 1950). La palabra λόγος es traducida también como "discurso", "enunciado" o "expresión" y, en la versión inglesa dirigida por Ross, se anota "sentence". En el texto de Boole, nosotros hemos traducido esta palabra como "oración", siguiendo la interpretación corriente, que es la que usa el autor. Una versión realizada desde el punto de vista de la Logística, hubiera preferido "sentencia" (V. *Lógica matemática*, de Ferrater Mora-Leblanc, p. 21, obra ya citada) o "frase" (V. G. Stahl: *Enfoque moderno de la Lógica clásica*, Ediciones de la Universidad de Chile, 1958, Santiago, p. 71) o quizás también "enunciado" (V. Ferrater-Mora-Leblanc, loc. cit.). Así también I. M. Bochenski (V. *Ancient Formal Logic*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1951) al traducir a Aristóteles interpretándolo desde un punto de vista semiótico. En su libro mencionado, clasifica los símbolos en *atómicos* (φάσεις) y *moleculares* (λόγοι). La "sentencia" (ἀπόφανσις) pertenece a estos últimos. Las sentencias se clasifican, a su vez, en atómicas y moleculares. Entre las primeras se encuentran la afirmación (κατάφασις) y la negación (ἀπόφασις) (V. I. M. Bochenski, op. cit., p. 28).

La definición de proposición propuesta por Boole corresponde, en realidad, a lo que Aristóteles denominaba πρότασις: una oración que afirma o niega algo de algo (πρότασις μὲν οὖν ἐστὶ λόγος καταφατικὸς ἢ ἀποφατικὸς τινὸς κατά τινὸς. (V. I, 24 a 16-17, en la edición anotada de Ross de *Aristotle's Prior an Posterior Analytics,* At the Clarendon Press, 1949, Oxford). Como lo señala Lukasiewicz (V. op. cit., p. 3) en este sentido, también la conclusión es πρότασις porque afirma algo acerca de algo. (Aristóteles dice: τὸ δὲ συμπέρασμα τὶ κατά τινός ἐστιν (V. la edición citada de Ross, 53 a 8-9).

Es posible que Boole encontrara más "sintáctica" —y, por ello, más conveniente para su sistema— la definición de πρότασις que la de ἀπόφανσις porque esta última utiliza los valores verdad-falsedad, que le confieren a la "sentencia" un sentido "semántico". Es cierto, por otra parte, que Aristóteles reconoce que la afirmación y la negación son usadas, a veces, en reemplazo de la verdad y la falsedad, respectivamente; sin embargo, el estagirita distingue enérgicamente ambas relaciones (V. Bochenski, op. cit., p. 31).

R. Carnap (V. *Introduction to Semantics,* Cambridge-Massachusetts, Harvard University Press, 1948, 235) destaca que el término "proposición" es usado para expresar una "sentencia declarativa", o también como "lo que es expresado (significado, formulado, representado, designado), por una sentencia declara tiva". El primer uso, asimila la proposición a la sentencia, el último distingue la proposición como "lo expresado" por una sentencia. La mayor parte de los lógicos contemporáneos emplean la proposición en el segundo sentido (inclusive el propio Carnap), siguiendo una interpretación que se remonta a Aristóteles. En uno de sus últimos trabajos, Carnap usa "sentence" y "statement" como sinónimos y con el significado de sentencias declarativas (indicativas, proposicionales) (V. *Empiricism, Semantics, and Ontology,* en la obra colectiva editada por L. Linky *Semantics and the Philosophy of Language,* The University of Illinois Press at Urbana, 1952, p. 209).

([24]) La premisa está constituida por dos elementos que Aristóteles denomina "términos" (ὅροι). El significado original de ὅρος, o de su correspondiente latino *terminus* es "límite" y éste es el sentido de los dos ὅροι de la premisa. El sujeto y el predicado son el principio y el fin de las premisas, es decir sus límites: "éste es el verdadero significado de ὅρος; hay que evitar cuidadosamente la identificación de esta palabra lógica con expresiones sicológicas o metafísicas como "idea", "noción", "concepto" (V. Lukasiewicz, op. cit., p. 3). Bochenski ha señalado que, a veces, Aristóteles emplea ὅρος como sinónimo de ορισμός, definición (V. Bochenski op. cit., p. 33).

([25]) La proposición (ἀπόφανσις o λόγος ἀποφάντικος) puede ser afirmativa (κατάφασις, *affirmatio*) o negativa (ἀπόφασις, *negatio*). Aunque ambas expresiones son de Aristóteles, no fue él quien las utilizó por primera vez ni tampoco son palabras de uso lógico exclusivo. El término κατάφασις parece haber sido introducido por el Pseudo-Dionisio en su *Teología Mística* que es, en realidad, una *Teología Negativa* (V. en nuestro trabajo *Caracteres antimetafísicos del pensamiento contemporáneo* el parágrafo titulado *Objeto y método de la Metafísica*, en la *Revista de Filosofía* de la Facultad de Humanidades de La Plata, Nº. 9).

([26]) $1 - x$ es la clase complemento de x, el conjunto de los individuos que no pertenecen a x y que sumados a ella nos da 1 (el universo de discurso):

$$x + (1 - x) = 1$$

$1 - x$ es el universo menos las x, es decir todos los individuos que no son x. Por ejemplo, si la clase de los romanos es x, $1 - x$ será la clase de los no-romanos. Actualmente, se suele usar para el complemento de clases el símbolo de la negación colocado sobre la letra que designa la clase negada:

$$\overline{A}$$

y se define así:

$$\overline{A} = \text{def. } \hat{x} - (x \varepsilon A)$$

La fórmula $x + (1 — x) = 1$ es la expresión del principio de tercero excluido así como $x(1 — x) = 0$ simboliza el principio de no contradicción (V. Nota 21). Se pueden deducir algebraicamente ambas fórmulas, operando con los símbolos como si fueran variables y constantes numéricas:

a) $x(1 — x) = x + 1 — x = 1$

b) $x(1 — x) = x — xx$, por la propiedad distributiva, pero como: $xx = x$, por la ley del índice, tenemos que: $x — x = 0$.

([27]) Boole no introdujo la relación de inclusión; Schroeder —que entró en contacto con el cálculo de Boole en 1877 y lo tenía en muy elevada estima— sustituyó la cópula de igualdad por la de *subsunción*, quedando reservado a Peirce el mérito histórico de haber introducido la relación de inclusión. En lugar de ella, se usa en el texto la relación de igualdad (=). Por ejemplo, $x = y$ significa que las clases x e y tienen idénticos miembros; por eso, la proposición "Todo X es Y" se representa $xy = x$, o, también $x(1 — y) = 0$, que significa "lo que es x pero no y es igual a cero". Las cuatro proposiciones típicas de la lógica clásica se expresan así:

Todo x es y:	$x = vy$	o	$x(1 — y) = 0$
Ningún x es y:	$x = v(1 — y)$	o	$xy = 0$
Algún x es y:	$vx = wy$	o	$v = xy$
Algún x no es y:	$vx = w(1 — y)$	o	$v = x(1 — y)$

Hemos tomado este cuadro de la obra de Lewis ya citada (p. 57) corrigiendo la tercera línea de la segunda columna que está equivocada en el texto. A juicio de este autor, la interpretación del coeficiente v como "algún" es arbitraria porque puede ser nulo. Por su parte, E. W. Beth considera que la simbolización de "Algún x es y" como $wx = vy$ es inadecuada, siendo la correcta $xy \neq 0$ (V. E. W. Beth: *The Origin and Growth of Symbolic Logic*, Synthèse, Vol. VI, Nº 7-8, May 1947-May 1948, Netherlands, p. 271).

DE LA CONVERSION DE PROPOSICIONES

Se dice que una proposición ha sido convertida cuanso sus términos se han traspuesto; cuando no se hace nada más se denomina conversión simple; por ejemplo:

Ningún hombre virtuoso es tirano, *es convertida en*
Ningún tirano es hombre virtuoso.

Los lógicos reconocen también la conversión *per accidens*, o por limitación, por ejemplo,

Todos los pájaros son animales, *es convertida en*
Algunos animales son pájaros.

Y la conversión por *contraposición* o *negación*, como

Todo poeta es hombre de genio, *es convertida en*
El que no es hombre de genio no es poeta.

Toda proposición puede ser consecuentemente convertida por alguno de estos tres procedimientos, a saber E en I simplemente, A y O por negación, A y E por limitación.

Las formas canónicas primarias ya determinadas para la expresión de las proposiciones son:

Todas las X son Y	$x(1-y)=0,$	A
Ninguna X es Y	$xy=0,$	E
Algunas X son Y	$v=xy,$	I
Algunas X no son Y	$v=x(1-y)$	O

Examinando estas expresiones, observamos que E

e I son simétricas con respecto a x e y, de manera tal que si x es cambiada en y, e y en x, las ecuaciones resultan inalteradas. En consecuencia, E e I pueden ser interpretadas como:

Ninguna Y es X,
Algunas Y son X,

respectivamente. Así llegamos a la regla conocida de los lógicos que dice que las proposiciones particulares afirmativas y universales negativas admiten ser convertidas simplemente.

Las ecuaciones A y O se pueden escribir bajo las formas:

$$(1 - y) \{1 - (1 - x)\} = 0,$$
$$v = (1 - y) \{1 - (1 - x)\}.$$

Ahora bien, éstas son precisamente las formas que habríamos obtenido si hubiéramos cambiado, en esas ecuaciones, la x en $1 - y$ y la y en $1 - x$, que representarían el cambio, en las proposiciones originales, de las X en no-Y y de las Y en no-X, resultando las proposiciones:

Todas las no-Y son no-X,
Algunas no-Y no son no-X (a).

O, por simple inversión del orden de los factores en el segundo miembro de 0, y escribiéndola en la forma:

$$v = (1 - y)x,$$

podemos interpretarla, por I, como

Algunas no-Y son X,

que es, en realidad, otra forma de (a). En consecuencia, se sigue la regla que las proposiciones universales afirmativas y particulares negativas admiten una conversión negativa, denominada también conversión por contraproposición.

Las ecuaciones A y E, escritas en las formas:

$$(1-y)x = 0,$$
$$vx = 0,$$

tienen como solución las formas respectivas:

$$x = vy,$$
$$x = v(1-y),$$

cuya corrección puede ser evidenciada sustituyendo estos valores de x en las ecuaciones a las cuales pertenecen, y observando que dichas ecuaciones son satisfechas con absoluta independencia de la naturaleza del símbolo v. La primera solución puede ser interpretada como:

Algunas Y son X,

y la segunda:

Algunas no-Y son X.

De donde resulta que las proposiciones universales afirmativas y universales negativas son convertibles por limitación, o, dicho de otro modo, *per accidens*.

Las precedentes son las leyes de conversión aceptadas por el Arzobispo Whately. Los autores difieren, sin embargo, acerca de la admisibilidad de la conversión negativa. La cuestión depende de que admitamos el uso de términos como no-X, no-Y. Concordando con los que piensan que tales términos deben ser admitidos, aun cuando cambien la *calidad* de la proposición, me veo obligado a observar que la clasificación actual de los mismos es equivocada y deficiente. Así la conversión de Ninguna X es Y en Todas las Y son no-X, aunque perfectamente legítima, no es reconocida en el esquema anterior. En consecuencia, convendría estudiar la cuestión en forma más completa.

Aunque intentáramos deducir del sistema de ecuaciones que hemos obtenido las leyes de la conversión y, además, de la transformación general de las proposiciones, deberíamos reconocer los siguientes elementos diferentes cada uno de ellos relacionado con un proceso matemático distinto.

1°) La negación de un término, es decir el cambio de X en no-X, o de no-X en X.

2°) La traducción de una proposición de una *calidad* a otra, como si cambiáramos:

Todas las X son Y en Algunas X son Y. A en I, lo que sería legítimo; o:

Todas las X son Y en Ninguna X es Y. A en E, lo que sería ilegítimo.

3°) La conversión simple de una proposición.

Las condiciones a las cuales deben sujetarse estos procesos para realizarse legítimamente, se pueden deducir de las ecuaciones que expresan las proposiciones.

Tenemos:

Todas las X son Y	$x(1-y)=0.$	A
Ninguna X es Y	$xy=0$	E

Escribamos E bajo la forma:

$$x\{1-(1-y)\}=0,$$

y es interpretable, por A, como:

Todas las X son no-Y,

de modo que podemos cambiar:

Ninguna X es Y por Todas las X son no-Y.

De la misma manera, A interpretado por E da:

Ninguna X es no-Y,

o sea que es posible cambiar:

Todas las X son Y en Ninguna X es no-Y.

De estos casos extraemos la siguiente regla: una proposición universal afirmativa es convertible en una universal negativa y viceversa, por negación del predicado.

Nuevamente tenemos:

Algunas X son Y $\quad v = xy$,

Algunas X no son Y $\quad v = x(1 - y)$.

Estas ecuaciones difieren de las consideradas anteriormente sólo por la presencia del término v. En consecuencia, es aplicable el mismo razonamiento y llegamos a la regla: una proposición particular afirmativa es convertible en una particular negativa, y viceversa, por negación del predicado.

Supongamos la proposiciones universales:

Todas las X son Y $\quad x(1 - y) = 0$,

Ninguna X es Y $\quad xy = 0$.

Multiplicando por v obtenemos

$$vx(1 - y) = 0,$$
$$vxy = 0,$$

que son interpretables como

Algunas X son Y I

Algunas X no son Y O

Por lo tanto, una universal afirmativa es convertible en una particular-afirmativa y una universal-negativa en una particular negativa, sin negación del sujeto o del predicado.

Combinando la regla anterior con la ya probada de la conversión simple, llegamos al siguiente sistema de leyes independientes de transformación.

1°) Una proposición afirmativa puede ser cambiada en su correspondiente negativa (A en E, o I en O), y viceversa, por negación del predicado.

2°) Una proposición universal puede ser cambiada en su correspondiente proposición particular (A en I, o E en O).

3°) En una proposición particular afirmativa o universal negativa, los términos pueden ser convertidos mutuamente.

Donde la negación de un término equivale al cambio de X en no-X y viceversa, y no debe ser interpretada como si afectara la *calidad* de la proposición.

Toda transformación válida se puede reducir a las reglas anteriores. En consecuencia, tenemos:

Todas las X son Y,
Ninguna X es no-Y por la primera regla,
Ninguna no-Y es X por la tercera regla,
Todas las no-Y son no-X por la primera regla,

lo que es un ejemplo de *conversión negativa*. *Nuevamente,*

Ninguna X es Y,
Ninguna Y es X (tercera regla),
Todas las Y son no-X (primera regla).

que es el caso ya deducido.

DE LOS SILOGISMOS

Un silogismo está compuesto de tres proposiciones; la última de ellas, denominada la conclusión, es una consecuencia lógica de las dos primeras llamadas las premisas; por ejemplo,

$$\textit{Premisas}\begin{cases}\text{Todas las } Y \text{ son } X.\\ \text{Todas las } Z \text{ son } Y.\end{cases}$$

$$\textit{Conclusión,}\quad \text{Todas las } Z \text{ son } X.$$

Todo silogismo tiene tres y sólo tres términos, de los cuales el que es sujeto de la conclusión es llamado el término *menor*, el predicado de la conclusión término *mayor* y el restante, común a ambas premisas, es denominado término *medio*. Así, en la fórmula precedente, Z es el término menor, X el mayor e Y el término medio.

La figura de un silogismo depende de la situación del término medio con respecto a los términos de la conclusión. Las diversas figuras aparecen en el esquema anexo.

1a. Fig.	*2a. Fig.*	*3a. Fig.*	*4a. Fig.*
$Y\ X$	$X\ Y$	$Y\ X$	$X\ Y$
$Z\ Y$	$Z\ Y$	$Y\ Z$	$Y\ Z$
$Z\ X$	$Z\ X$	$Z\ X$	$Z\ X$

Cuando designamos las tres proposiciones de un silogismo por sus símbolos usuales (A,E,I,O) y en su orden real, decimos que determinamos el modo del silogismo.

Así el silogismo formulado anteriormente como ilustración pertenece al modo AAA de la primera figura.

Los modos de todos los silogismos corrientemente aceptados como válidos están representados por medio de vocales en los siguientes versos mnemotécnicos:

Fig. 1. — bArbArA, cElArEnt, dArII, fErIO que prioris.

Fig. 2. — cEsArE, cAmEstrEs, fEstInO, bArOkO, secundae.

Fig. 3. — Tertia dArAptI, dIsAmIs, dAtIsI, fElAptOn, bOkArdO, fErIsO, habet: quarta insuper addit.

Fig. 4. — brAmAntIp, cAmEnEs, dImArIs, fEsApO, frEsIsOn.

La ecuación mediante la cual expresamos cualquier proposición referente a las clases X e Y, es una ecuación entre los símbolos x e y, y la ecuación con la cual expresamos toda proposición referente a las clases Y y Z es una ecuación entre los símbolos y y z. Si de dos ecuaciones como éstas eliminamos y, el resultado, si es que no se anula, será una ecuación entre y y z y puede ser interpretado en una proposición referente a las clases X y Z. Y, en consecuencia, constituirá el tercer miembro, o conclusión, de un silogismo en el que las dos proposiciones dadas son las premisas.

El resultado de eliminar y de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} ay + b &= 0, \\ a'y + b' &= 0, \end{aligned} \qquad \text{(XIV)}$$

es la ecuación:

$$ab' - a'b = 0. \qquad \text{(XV)}$$

Ahora bien, siendo las ecuaciones de las proposiciones del primer orden con respecto a cada una de las variables involucradas, todos los casos de eliminación que vamos a considerar serán reducibles al caso anterior, reemplazando las constantes a, b, a', b', por funciones de x,z y el símbolo auxiliar v.

En la elección de las ecuaciones para expresar nuestras premisas, la única restricción es que aquéllas no sean *ambas* de la forma $ay = 0$, porque en esos casos la eliminación sería imposible. Cuando ambas ecuaciones son de esta forma es necesario resolver una de ellas y es indistinto cuál elegimos para ese propósito. Si la que elegimos es de la forma: $xy = 0$, su solución será:

$$y = v(1 - x), \qquad \text{(XVI)}$$

si es de la forma $(1 - x)y = 0$, la solución será

$$y = vx, \qquad \text{(XVII)}$$

y éstos son los únicos casos que se pueden presentar. La razón de esta excepción se verá más adelante.

Por razones de uniformidad, en la expresión de las proposiciones particulares, nos limitaremos a las formas:

$vx = vy$	Algunas X son Y,
$vx = v(1 - y)$	Algunas X no son Y.

Estas formas poseen una analogía más estrecha con (XVI) y (XVII) que las otras formas que pueden ser usadas.

Entre las fórmulas a desarrollar ([28]) y los cánones aristotélicos se observan, excepcionalmente, algunas diferencias sobre las cuales conviene advertir al lector.

Para la correcta comprensión de este respecto, es atinado señalar que la estructura esencial de un silogismo es, en cierta medida, arbitraria. Suponiendo que el orden de las premisas esté establecido y, en él, quede determinada la distinción entre el término mayor y el menor, es sólo una cuestión de elección cuál de los dos tendrá precedencia en la conclusión. Los lógicos han decidido esta alternativa en favor del término menor pero es fácil ver que se trata de una convención. Si se acepta que el término mayor ocupara el primer lugar en la conclusión, se puede construir un esquema lógico que, en algunos casos, puede ser menos conveniente que el existente aunque, en otros, resulta superior. Lo que se ha perdido en *barbara* se ganará en *bramantip*. La conveniencia reside *quizás* en el ordenamiento aceptado (*), pero se debe tener presente que es *solamente* un orden.

El nuevo método que vamos a exponer está referido a un esquema de ordenamiento en mayor medida que a otro, en consecuencia dará siempre la conclusión más general, debiendo observarse sólo su validez abstracta considerada como el resultado del razonamiento puro. Y, en consecuencia, a veces seremos espectadores de conclusiones que un lógico llamaría informales pero nunca de expresiones que el razonamiento estime falsas.

Los cánones aristotélicos, sin embargo, junto a la

(*) El punto de vista contrario fue sostenido por Hobbes. El problema ha sido discutido objetivamente por Hallam en su *Introduction to the literature, of Europe*, vol. III, p. 309. En el uso retórico del silogismo la superioridad parece ser inseparable de la forma rechazada.

restricción del *orden* de los términos de una conclusión también limita su naturaleza y esta limitación tiene mayores consecuencias que la primera. Por un cambio de figura, podemos reemplazar la conclusión particular de *bramantip* por la conclusión general de *barbara*; pero no podemos de este modo reducir a una regla inferencias como:

Algunas no-X no son Y.

Sin embargo, existen casos en que esas inferencias pueden ser realizadas con legitimidad y, de hecho, se suelen presentar frecuentemente en los argumentos no restringidos. Mas, si una inferencia de este tipo, o de cualquiera otra naturaleza, es legítima en sí también se verá que lo es en los resultados de nuestro método.

Restringiendo el canon de interpretación, podemos circunscribir los resultados que hemos formulado dentro de los límites de la lógica escolástica, pero ello equivaldría solamente a restringirnos a usar una parte de las conclusiones que nos permiten nuestros análisis.

La clasificación que hemos de adoptar es puramente matemática; más adelante consideraremos el ordenamiento lógico al cual corresponde. Bastará, como referencia, nombrar las premisas y las respectivas figuras en que se basan.

1a. Clase. — Formas en las que no entra v.

Aquellas que admiten una inferencia con AA,EA, Fig. 1; AE,EA, Fig. 2; AA,AE, Fig. 4.

Ej.: AA, Fig. 1, y, por mutación de premisas (cambio de orden) AA, Fig. 4.

Todas las Y son X, $y(1-x)=0$, o $(1-x)y=0$
Todas las Z son Y, $z(1-y)=0$, o $zy-z=0$
Eliminando y, por (XV), tenemos:

$$z(1-x)=0,$$

$\therefore$ Todas las Z son X.

Un modo conveniente de efectuar la eliminación de la y es escribir la ecuación de las premisas de manera que y aparezca sólo como un factor de un miembro de la primera ecuación y como un factor del miembro opuesto en la segunda y luego multiplicar las ecuaciones omitiendo la y. Adoptaremos este método.

Ej.: AE, Fig. 2, y, por mutación de premisas, EA, Fig. 2.

Todas las X son Y, $x(1-y)=0$, o $zx=xy$
Ninguna Z es Y $zy=0$, $\underline{zy=0}$
$zx=0$

$\therefore$ Ninguna Z es X.

El único caso en el que no existe inferencia es AA, Fig. 2.

Todas las X son Y, $x(1-y)=0$, $x=xy$
Todas las Z son Y, $z(1-y)=0$, $\underline{zy=z}$
$xz=xz$

$\therefore$ $0=0$

2a. Clase. — Cuando v es introducida para solucionar una ecuación.

Los casos válidos determinables directa o indirectamente (*) por las reglas aristotélicas son AE, Fig. 1; AA, AE, EA, Fig. 3; EA, Fig. 4.

(*) Decimos *directa* o *indirectamente* porque, en ciertos casos, se requiere la mutación o conversión de las premisas. Así, AE (Fig. 1) se resuelve en Fe-

Los casos válidos que no son determinables por este procedimiento son: *EE*, Fig. 1; *EE*, Fig. 2; *EE*, Fig. 3; *EE*, Fig. 4.

Ejemplo: *AE*, Fig. 1, y, por mutación de premisas, *EA*, Fig. 4.

Todas las Y son X, $\quad y(1 - x) = 0, \quad y = vx$ (a)
Ninguna Z es Y, $\quad zy \quad 0, \quad 0 = zy$

$$0 \equiv vzx$$

$\therefore$ Algunas X no son Z.

La razón que nos impide interpretar $vzx = 0$ como Algunas Z son no-X, es que la interpretación de vx como Algunas X ya está determinada para los términos reales de la primera ecuación (a); representando v a Algunos, sólo con respecto a la clase X.

La razón del empleo de una solución de una de las ecuaciones primitivas puede verse en las observaciones sobre (XVI) y (XVII). Si hubiéramos solucionado la segunda ecuación en lugar de la primera, tendríamos:

$$(1 - x)y = 0,$$
$$v(1 - z) = y, \ (a),$$
$$v(1 - z)(1 - x) = 0, \ (b),$$

$\therefore$ Algunas no-Z son X.

Aquí hay que observar que la segunda ecuación (a) fija el sentido de $v(1 - z)$ como Algunas no-Z. El significado completo del resultado (b) es que todas las

sapo (Fig. 4) o en Ferio (Fig. 1). Aristóteles y sus continuadores descartaron la cuarta figura por considerarla sólo una modificación de la primera; pero siendo ésta una mera cuestión de forma, cada uno de los esquemas puede ser llamado aristotélico.

no-Z que se encuentran en la clase Y están en la clase X y es evidente que éste no podría ser expresado de otra manera.

Ej. 2: AA, Fig. 3:

$$\begin{array}{lll} \text{Todas las } Y \text{ son } X, & y(1-x)=0, & y=vx \\ \text{Todas las } Y \text{ son } Z, & y(1-z)=0, & 0=y(1-z) \\ \hline & & 0=vx(1-z) \end{array}$$

$\therefore$ Algunas X son Z.

Si hubiéramos resuelto la segunda ecuación, tendríamos como resultado Algunas Z son X. La forma de la ecuación final particulariza a qué X o a qué Z se refieren, y esta observación tiene carácter general.

La siguiente, EE, Fig. 1, y, por mutación, EE, Fig. 4, es un ejemplo de un caso válido no determinable mediante las reglas aristotélicas.

$$\begin{array}{lll} \text{Ninguna } Y \text{ es } X, & xy=0, & 0=xy \\ \text{Ninguna } Z \text{ es } Y, & zy=0, & y=v(1-z) \\ \hline & & 0=v(1-z)x \end{array}$$

Algunas no-Z no son X

3a. Clase. — Cuando v se encuentra en una de las ecuaciones, pero no es introducida como solución.

Los casos válidos determinables en forma *directa* o *indirectamente* por medio de las reglas aristotélicas son AI, EI, Fig. 1; AO, EI, OA, IE, Fig. 2; AI, AO, EI, EO, IA, IE, OA, OE, Fig. 3; IA, IE, Fig. 4.

Aquellos que no se pueden determinar por este procedimiento son OE, Fig. 1; EO, Fig. 4.

Los casos en los que ninguna inferencia es posible son AO, EO, IA, IE, OA, Fig. 1; AI, EO. IA, Fig. 2; OA, OE, AI, EI, AO, Fig. 4.

Ejemplo 1: AI, Fig. 1, y, por mutación, IA, Fig. 4.

Todas las Y son X,	$y(1 - x) = 0$
Algunas Z son Y,	$vz = vy$
	$vz(1 - x) = 0$
	$\therefore$ Algunas Z con X.

Ejemplo 2: AO, Fig. 2, y, por mutación, OA, Fig. 2.

Todas las X son Y,	$x(1 - y) = 0,$	$x = xy$
Algunas Z no son Y,	$vz = v(1 - y),$	$vy = v(1 - z)$
		$vx = vx(1 - z)$
		$vxz = 0$
		$\therefore$ Algunas Z no son X.

Se verá que la interpretación de vz como Algunas Z está implicada en la ecuación $vz = v(1 - y)$ que puede ser considerada como la expresión de la proposición Algunas Z no son Y.

Los casos no determinables por medio de las reglas aristotélicas son OE, Fig. 1 y, por mutación, EO, Fig. 4.

Algunas Y no son X	$vy = v(1 - x)$
Ninguna Z es Y	$0 = zy$
	$0 = v(1 - x)z$
	$\therefore$ Algunas no-X no son Z.

La ecuación de la primera premisa nos permite, en este caso, interpretar $v(1 - x)$ pero no nos autoriza a hacer lo propio con vz. Tomamos como ejemplos dos casos en los cuales ninguna inferencia es posible de siguientes:

AO, Fig. 1, y, por mutación, OA, Fig. 4.

Todas las Y son X,	$y(1-x)=0,$	$y(1-x)=0$
Algunas Z no	$vz=v(1-y)(a)$	$v(1-z)=vy$
son Y,		$v(1-z)(1-x)=0$
		$0=0$

desde que la ecuación auxiliar es, en este caso, $v(1-z)=0$.

Prácticamente no es necesario —aunque satisface— realizar esta reducción. La ecuación (a), ya se ha visto, define vz como Algunas Z pero no define $v(1-z)$, en consecuencia debemos detenernos en el resultado de la eliminación (b) y conformarnos con decir que no es susceptible de ser interpretada como una relación entre las clases X e Y.

Tenemos como segundo ejemplo AI, Fig. 2, y, por mutación, IA, Fig. 2.

Todas las X son Y,	$x(1-y)=0,$	$x=xy$
Algunas Z son Y,	$vz=vy,$	$vy=vz$
		$vx=vxz$
		$v(1-z)x=0$
		$0=0,$

siendo, en este caso, la ecuación auxiliar $v(1-z)=0$.

En realidad, en todos los casos de esta clase en los cuales no es posible la inferencia, el resultado de la eliminación es reducible a la forma $0=0$. En consecuencia no es necesario abundar en ejemplos.

4a. Clase. — Cuando v entra en ambas ecuaciones.

Ninguna inferencia es posible en ningún caso, pero existe una distinción entre los casos válidos que es característica de esta clase. Ls dos divisiones son:

1°) Cuando el resultado de la eliminación se puede reducir a la forma $0 = 0$ por medio de las ecuaciones auxiliares. Los casos son *II*, *OI*, Fig. 1; *II*, *OO*, Fig. 2; *II*, *IO*, *OI*, *OO*, Fig. 3; *II*, *IO*, Fig. 4.

2°) Cuando el resultado de la eliminación no se puede reducir a la forma $0 = 0$ por medio de las ecuaciones auxiliares.

Los casos son *IO*, *OO*, Fig. 1; *IO*, *OI*, Fig. 2; *OI*, *OO*, Fig. 4.

Tomemos, como un ejemplo del primer caso, *II*, Fig. 3.

Algunas X son Y, $\quad vx = vy$, $\quad vx = vy$

Algunas Z son Y, $\quad v'z = v'y$, $\quad v'y = v'z$

$$\overline{}$$
$$vv'x = vv'z$$

Ahora bien, las ecuaciones auxiliares $v(1 - x) = 0$, $v'(1 - z) = 0$, dan $vx = v$, $v'z = v'$. Sustituyendo, tenemos:

$$vv' = vv',$$
$$\therefore\ 0 = 0.$$

Como un ejemplo del último caso, tenemos *IO*, Fig. 1.

Algunas Y son X, $\quad vy = vx$, $\quad vy = vx$

Algunas Z no son Y, $\quad v'z = v'(1—y)$, $\quad v'(1 - z) = v'y$

$$\overline{}$$
$$vv'(1 - z) = vv'x$$

Si las ecuaciones auxiliares son $v(1 - x) = 0$, $v'(1—z) = 0$, lo anterior se reduce a $vv' = 0$.

Todos los casos similares se pueden reducir a esta forma. Su interpretación es que las clases v y v' no tienen miembro común, lo que es evidente. La precedente clasificación está basada exclusivamente en distinciones matemáticas. Puede inquirirse ahora a qué división lógica corresponde.

Los casos válidos de la primera clase comprenden todos aquellos en los cuales de dos premisas universales se extrae una conclusión universal. Vemos que incluyen las premisas de *barbara* y *celarent* de la primera figura, de *cesare* y *camestres* en la segunda y de *bramantip* y *camenes* en la cuarta. Las premisas de *bramantip* han sido incluidas porque admiten una conclusión universal, aunque no en la misma figura.

Los casos legítimos de la segunda clase son aquellos en los que una conclusión particular sólo es deducible de dos premisas universales.

Los casos válidos de la tercera clase son aquellos en los cuales una conclusión se deduce de dos premisas, siendo una universal y la otra particular.

La clase cuarta no tiene casos válidos.

Entre los casos en que no es posible inferencia de ninguna naturaleza, encontramos seis en la cuarta clase, distinguibles de los otros porque el resultado de la eliminación no asume la forma $0 = 0$.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Algunas } Y \text{ son } X,\\ \text{Algunas } Z \text{ no son } Y,\end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{Algunas } Y \text{ no son } X,\\ \text{Algunas } Z \text{ no son } Y,\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Algunas } X \text{ son } Y,\\ \text{Algunas } Z \text{ no son } Y,\end{array}\right\}$$

y los tres restantes que se obtienen por mutación de las premisas. Se podría suponer que existiera alguna peculiaridad lógica para responder a la peculiaridad matemática a la que nos hemos referido, y en realidad hay una digna de ser señalada. Si examinamos cada par de premisas en el esquema precedente, encontraremos que *virtualmente* no existe el término medio, es decir *no hay medio de comparación* en ninguno de los términos. Así, en el primer ejemplo, se establece que los individuos de los que se habló en la primera premisa pertenecen a la clase Y, pero aquellos a los que se hizo referencia en la segunda pertenecen —según se afirma *virtualmente*— a la clase no-Y; por ninguna transformación legítima, o conversión, podríamos modificar este estado de cosas. Sin embargo, se podrá establecer una comparación con la clase Y en una premisa y con la no-Y en la otra.

Ahora bien, además de los seis precedentes, en cada caso se encontrará un término medio expresado o implicado. Elegiré dos de los casos más difíciles:

En AO, Fig. 1, por ejemplo:

Todas las Y son X,
Algunas Z no son Y,

tenemos, por *conversión negativa* de la primera premisa,

Todas las no-X son no-Y,
Algunas Z no son Y,

y el término medio es entendido ahora como no-Y.

Nuevamente, en EO, Fig. 1,

Ninguna Y es X,
Algunas Z no son Y,

una conversión probada de la primera premisa (Vid. *De la Conversión de las Proposiciones*) que da:

Todas las X son no-Y,
Algunas Z son no-Y,

y el término medio, que es el verdadero medio de comparación, es evidentemente no-Y, pero, como las no-Y de una premisa *pueden ser* diferentes de los de la otra, ninguna conclusión puede extraerse.

En consecuencia, la condición matemática en cuestión —la irreductibilidad de la ecuación final a la forma $0 = 0$— representa adecuadamente la condición lógica de la inexistencia de término medio, o medio común de comparación, en las premisas dadas.

Tengo para mí que la distinción producida por la presencia o ausencia del término medio, en el estricto sentido aquí establecido, no ha sido señalada antes de ahora por los lógicos. Esta distinción, aunque real y digna de atención, no es de ningún modo obvia y podría haber pasado desapercibida en el ejemplo dado a no ser por la peculiaridad que le confiere su expresión matemática. Lo que se presenta como original en este caso es la prueba de la existencia de combinaciones de premisas en las que no existe absolutamente ningún medio de comparación. Cuando existe ese medio de comparación, o verdadero término medio, la condició de que su cuantificación en ambas premisas juntas debe sobrepasar a la cuantificación como un todo simple, ha sido mostrada hábil y claramente por el Profesor De Morgan al señalar su necesidad para la inferencia válida. (*Cambridge Memoirs*, Vol. VIII, Part. 3). E, indudablemente, éste es el verdadero principio del silogismo considerado desde el punto de vista de la Aritmética.

Ya hemos dicho que sería factible imponer condiciones de interpretación que restringieran los resultados de este cálculo a las formas aristotélicas. Esas condiciones serían:

1°) Convenir en no interpretar las formas $v(1-x)$, $v(1-z)$.

2°) Acordar el rechazo de toda interpretación en la que el orden de los términos violara la regla aristotélica.

O, en lugar de la segunda condición, se podría convenir en que estando determinada la conclusión, si fuera necesario se podría cambiar el orden de las premisas para hacer formal el silogismo. En realidad, del carácter *general* del sistema, resulta manifiesto que éste puede ser construido para representar cualquier esquema concebible de lógica, imponiendo las condiciones apropiadas al caso considerado.

Hemos descubierto que, en cierta clase de casos, es necesario reemplazar las dos ecuaciones que expresan proposiciones universales por sus soluciones; y parece conveniente destacar que hubiera sido admisible haberlo hecho (*), en todos los ejemplos, de manera que cada caso del silogismo, sin excepción, pudiera ser tra-

(*) Conviene ilustrar este criterio con un ejemplo. En *Barbara*:

Todas las Y son X,	$y = vx$
Todas las Z son Y,	$z = v'y$
	$z = vv'x$

$\therefore$ Todas las Z son X.

tado por ecuaciones comprendidas en las formas generales:

$$\begin{array}{llll} y = vx, & \text{ó} & y - vx = 0 & A, \\ y = v(1 - x), & \text{ó} & y + vx - v = 0 & E, \\ vy = vx, & & vy - vx = 0 & I, \\ vy = v(1 - x), & & vy + vx - v = 0 & O. \end{array}$$

Ahora multiplicamos la ecuación resultante por $1 - x$, que da

$$x(1 - x) = 0,$$

y, en consecuencia, la misma conclusión Todas las Z son X.

Algunos ejemplos suplementarios de la aplicación, en el texto, del sistema de ecuaciones a la demostración de teoremas generales será, quizás, conveniente.

Consideremos que y sea el término a eliminar y que x represente indistintamente cualquiera de los tres símbolos, por consiguiente cada una de las ecuaciones de las premisas de cualquier silogismo puede ser escrita bajo la forma:

$$ay + bx = 0, \qquad (\alpha)$$

si la premisa es afirmativa; y en la forma:

$$ay + b(1 - x) = 0, \qquad (\beta)$$

si es negativa, siendo a y b constantes o expresiones de la forma $\pm v$. Para probarlo en detalle, examinemos cada clase de proposiciones haciendo a y sucesivamente sujeto y predicado.

A,	Todas las Y son X,	$y - vx = 0,$	(γ)
	Todas las X son Y,	$x - vy = 0,$	(δ)
E,	Ninguna Y es X,	$xy = 0,$	
	Ninguna X es Y,	$y - v(1 - x) = 0,$	(ε)
I,	Algunas X son Y,		
	Algunas Y son X,	$vx - vy = 0,$	(ζ)
O,	Algunas Y no son X,	$vy - v(1 - x) = 0,$	(η)
	Algunas X no son Y,	$vx = v(1 - y),$	
		$\therefore\ vy - v(1 - x) = 0.$	(θ)

Las ecuaciones afirmativas (γ), (δ) y (ζ), pertenecen a (α), y las ecuaciones negativas (ε), (η) y (θ), a (β). Se puede ver que las dos ecuaciones nega-

Tal vez sea mejor el sistema que hemos empleado realmente, porque distingue los casos en los que v sólo *puede* de aquellos en los que *debe* ser empleada. Pero,

tivas son semejantes pero existe una diferencia de interpretación. En la primera:

$$v(1 - x) = \text{Algunas no-}X,$$

en la última:

$$v(1 - x) = 0.$$

La utilidad de las dos formas generales de referencia (α) y (β) se desprenderá de la aplicación siguiente.

1°) *Una conclusión alcanzada a partir de dos proposiciones afirmativas es afirmativa.*

Por (α) tenemos para las proposiciones dadas:

$$ay + bx = 0,$$
$$a'y + b'z = 0,$$

y eliminando:

$$ab'z - a'bx = 0,$$

que es de la forma (α); de donde, si hay una conclusión, es afirmativa.

2°) *Una conclusión deducida de una proposición afirmativa y una negativa es negativa.*

Por (α) y (β), tenemos para las proposiciones dadas:

$$ay + bx = 0,$$
$$a'y + b'(1 - z) = 0,$$
$$\therefore\ a'bx - ab'(1 - z) = 0,$$

que es la forma (β). De donde la conclusión, si existe, es negativa.

3°) *Una conclusión derivada de dos premisas negativas implicará una negación (no-X, no-Z) tanto del sujeto como del predicado y, en consecuencia, será inadmisible en el sistema de Aristóteles, aunque válida en sí misma.*

Siendo las premisas:

$$a'y + b'(1 - x) = 0,$$
$$a'y + b'(1 - z) = 0,$$

la conclusión será:

$$ab'(1 - z) - a'b(1 - x) = 0,$$

que se puede interpretar solamente como una proposición que tiene una negación en cada término.

para la demostración de ciertas propiedades generales del silogismo, el sistema precedente resulta muy con-

4°) *Teniendo en cuenta sólo aquellos silogismos en los que la conclusión es la más general que puede ser deducida de las premisas —si, en un silogismo aristotélico, la premisa menor es cambiada en calidad (de afirmativa a negativa o de negativa a afirmativa), sea o no cambiada en cantidad— no se puede deducir conclusión en la misma figura.*

Una proposición aristotélica no admite un término de la forma no-Z en el sujeto. Si cambiamos la cantidad de la proposición menor de un silogismo, la transferimos de la forma general

$$ay + bz = 0,$$

a la forma general:

$$a'y + b'(1 - z) = 0;$$

véase (α) y (β), o viceversa. Y, por consiguiente, en la ecuación de la conclusión habrá un cambio de z en $1 - z$, o viceversa, lo que equivalente, sin embargo, a un cambio de Z en no-Z o de no-Z en Z.

Ahora bien, el sujeto de la conclusión original debe haber involucrado una Z y no una no-Z, luego el sujeto de la nueva conclusión implicará una no-Z y la conclusión no podrá ser admitida dentro de las formas aristotélicas excepto por conversión, lo que exigiría un cambio de figura.

Las conclusiones de este Cálculo son siempre las más generales que pueden derivarse, y, en consecuencia, la demostración anterior no debe suponerse que puede ser extendida a un silogismo en el cual se deduce una conclusión particular cuando es posible una universal. Este es el caso de *bramantip*, sólo dentro de las formas aristotélicas, y entonces la transformación de *bramantip* en *camenes*, y viceversa, es el caso restrictivo contemplado en la proposición preliminar del teorema.

5°) *Si sustituimos la premisa menor de un silogismo aristotélico por su contradictoria no se puede deducir ninguna conclusión dentro de la misma figura.*

Aquí sólo es necesario examinar el caso de *bramantip* porque todos los otros están determinados por la última proposición.

Cambiando la menor de *bramantip* por su contradictoria, tenemos AO, Fig. 4, que no admite inferencia legítima.

Es decir que el teorema es verdadero sin excepción. En manera análoga, se pueden demostrar muchos otros teoremas generales.

veniente por su simplicidad y por la mutua analogía de sus formas. Lo aplicaremos al teorema siguiente (*).

Dadas las tres proposiciones de un silogismo, demostrar que existe un orden en el que pueden ser colocadas legítimamente y determinar dicho orden.

Todas las formas dadas más arriba para la expresión de proposiciones son casos particulares de la forma general:

$$a + bx + cy = 0.$$

Supongamos, para las premisas del silogismo dado, las ecuaciones:

$$a + bx + cy = 0 \qquad \text{(XVIII)}$$

$$a' + b'z + c'y = 0, \qquad \text{(XIX)}$$

(*) Este elegante teorema me fue comunicado por el Reverendo Charles Graves, *Fellow* y Profesor de Matemáticas en el Trinity College (Dublin), a quien deseo expresar aquí mi profundo reconocimiento por su acertadísimo análisis de la primera parte de este libro y por algunas aplicaciones nuevas del método. El ejemplo siguiente de reducción *ad impossibile* figura entre ellos:

Modo a reducir *Baroko*	Todas las X son Y,	$1 - y = v'(1 - x)$
	Algunas Z no son Y	$vz = v(1 - y)$
	Algunas Z no son X	$vz = vv'(1 - x)$
Modo reducido *Barbara*	Todas las X son Y	$1 - y = v'(1 - x)$
	Todas las Z son X	$z(1 - x) = 0$
	Todas las Z son Y	$z(1 - y) = 0.$

La conclusión del modo reducido es la contradictoria de la premisa menor suprimida. Luego, etc. Hay que destacar que la prueba matemática de las proposiciones contradictorias es que al eliminar un símbolo electivo de sus ecuaciones el otro símbolo electivo también desaparece. La reducción *ostensiva* de *Baroko* y *Bokardo* carece de dificultad.

El Profesor Graves sugiere el empleo de la ecuación $x = vy$ para la expresión primaria de la proposición Todas las X son Y y observa que multiplicando ambos miembros por $1 - y$ obtenemos $x(1 - y) = 0$, que es la ecuación que establecimos en el texto, siendo la primera una solución de ésta.

luego, eliminando y, tendremos como conclusión:

$$ac' - a'c + bc'x - b'cz = 0, \qquad \text{(XX)}$$

Si tomamos ésta como una de nuestras premisas y cualquiera de las ecuaciones originales, por ejemplo (XVIII), como la otra, y eliminando un término común x de ellas obtenemos un resultado equivalente a la restante premisa (XIX), resulta que hay más de un orden en el que las proposiciones pueden ser escritas legítimamente; pero si ello no ocurre sólo es válido un ordenamiento único.

Efectuando, luego, las eliminaciones, tenemos:

$$bc(a' + b'z + c'y) = 0, \qquad \text{(XXI)}$$

que equivale a (XIX) multiplicado por un factor bc. Ahora, examinando el valor de este factor en las ecuaciones A, E, I, O, encontramos que en cada caso es v o $-v$. Pero es evidente que si una ecuación que expresa una proposición dada es multiplicada por un factor extraño derivado de otra ecuación, su interpretación estará limitada o resultará imposible. De este modo, o no habrá resultado en absoluto o el resultado será una *limitación* de la proposición restante.

Sin embargo, si una de las ecuaciones originales fuera:

$$x = y \quad \text{ó} \quad x - y = 0,$$

el factor bc sería -1 y no limitaría la interpretación de las otras premisas. Por consiguiente, si el primer miembro de un silogismo fuera interpretado como la representación de la proposición doble Todas las X son Y y Todas las Y son X, el orden de las otras premisas sería indiferente.

Una forma más general de la investigación anterior podría ser la expresión de las premisas por las ecuaciones:

$$a + bx + cy + dxy = 0, \qquad \text{(XXII)}$$
$$a' + b'z + c'y + d'zy = 0, \qquad \text{(XXIII)}$$

Después de la doble eliminación de y y x, tendríamos:

$$(bc - ad)(a' + b'z + c'y + d'zy) = 0;$$

y se vería que el factor $bc - ad$ debe, en cada caso, o desaparecer o expresar una limitación del significado.

La determinación del orden de las proposiciones es lo suficientemente obvia.

([28]) El método de desarrollo de una función es expuesto en el Cap. V de *An Investigatión*... Se llama *función de* x —$f(x)$— a una expresión algebraica que contiene un símbolo x; cuando la expresión contiene dos símbolos —$f(x,y)$— se dice que es una función de x e y etc., etc. Verbigracia: $1 - x$, $\dfrac{1+x}{1-x}$ son funciones de x; pero $x - y$, $\dfrac{x+y}{x-2y}$ son funciones de x e y.

Si en una función $f(x)$ sustituimos x por 1 el resultado se expresa $f(1)$ y, análogamente, si sustituimos x por 0 escribiremos $f(0)$. Siendo x un símbolo lógico, o una variable algebraica cuyos únicos valores son 0 y 1, se dice que una función $f(x)$ está desarrollada cuando se la ha reducido a la forma $ax + b(1 - x)$; a y b deben estar determinados de manera tal que el resultado sea equivalente a la función de la cual dicha forma fue derivada. La regla general del desarrollo de una función consta de dos partes: la primera se relaciona con los constituyentes de la expansión, la segunda se refiere a la determinación de los coeficientes respectivos (V. las reglas en Boole: *An Investigation*..., pp. 75-76, y en Lewis, op. cit., p. 59).

DE LAS PROPOSICIONES Y LOS SILOGISMOS HIPOTETICOS

Una proposición hipotética se define como la resultante de *dos o más proposiciones categóricas unidas por una cópula* (o conjunción). Las diferentes clases de proposiciones hipotéticas se denominan, a partir de sus conjunciones respectivas, condicional (si), disyuntiva (o), etc.

En las proposiciones condicionales, la proposición categórica de la que resulta la otra se llama *antecedente* y la resultante de ésta *consecuente*.

Existen dos y solamente dos fórmulas del silogismo condicional.

1°) La constructiva:
Si A es B, entonces C es D,
A es B, en consecuencia C es D.

2°) La destructiva:
Si A es B, entonces C es D.
C no es D, en consecuencia A no es B.

Un dilema es un silogismo condicional complejo, con varios antecedentes en la mayor y una menor disyuntiva.

Si examinamos cada una de las formas del silogismo condicional expresado más arriba, veremos que la validez del argumento no depende de ninguna consideración que tenga conexión con los términos A, B, C, D, en cuanto representantes de individuos o de clases. De hecho, podemos representar las proposiciones A es B, C es D, por medio de los símbolos arbitrarios X e Y, respectivamente, y expresar nuestros silogismos en formas como las siguientes:

Si X es verdadera, entonces Y es verdadera,
X es verdadera, en consecuencia Y es verdadera.

De esta manera, lo que vamos a considerar no son objetos o clases de objetos sino las verdades de las proposiciones, es decir de esas proposiciones elementales que están incorporadas en los términos de nuestras premisas hipotéticas.

Podemos adecuar a los símbolos X, Y, Z, que representan las proposiciones, los símbolos electivos x, y, z, en el sentido siguiente:

El Universo hipotético, 1, comprenderá todos los casos concebibles y las circunstancias anexas.

El símbolo electivo x, junto a cada sujeto que exprese dichos casos, elegirá aquellos en los que la proposición X es verdadera y del mismo modo en lo que respecta a Y y Z.

Si nos limitamos a considerar una proposición dada X manteniendo en suspenso cualquier otra estimación, sólo serán concebibles dos casos: 1°) que la proposición dada sea verdadera y 2°) que sea falsa (28).

(28) Basándose en el principio obvio de que una proposición es verdadera o falsa, y aplicándolo también a aserciones referentes a hechos futuros, los estoicos intentaron fundar la doctrina del destino. Se ha refutado este argumento observando que implica "un abuso de la palabra *verdad*, cuyo signi-

Estos casos constituyen la totalidad del Universo de la proposición, de manera que como el primero está determinado por el símbolo electivo x el último lo está por el símbolo $1 - x$.

Pero, si se aceptan otros planteos, cada uno de estos casos se resuelve en otros, particularmente menos extensos, cuyo número dependerá de la cantidad de consideraciones exteriores admitidas. Así, si relacionamos las proposiciones X e Y, el número total de casos concebibles se encontrarán expuestos en el esquema siguiente.

	Casos	*Expresiones electivas*	
1°)	X verdadera, Y verdadera	xy	
2°)	X verdadera, Y falsa	$x(1 - y)$	
3°)	X falsa, Y verdadera	$(1 - x)y$	
4°)	X falsa, Y falsa	$(1 - x)(1 - y)$	(XXIV)

ficado preciso es id quod rest *est*. Una aserción sobre el futuro no es ni verdadera ni falsa". (*Necesidad y predestinación*, de Copleston, p. 36). Sin embargo, si el axioma estoico fuera presentado bajo la forma: "Es cierto que un acontecimiento tendrá lugar o no tendrá lugar", la refutación anterior no lograría encontrar la dificultad señalada. La respuesta apropiada tendría que ser que ninguna definición meramente verbal puede definir la cuestión acerca de cuál sea el curso y la constitución real de la Naturaleza. Cuando afirmamos que es cierto que un hecho tendrá o no lugar, suponemos tácitamente que el orden de los acontecimientos es necesario y que el Futuro no es sino una evolución del Presente; por consiguiente, el estado actual de las cosas determina completamente el que vendrá. Y ésta es (por lo menos en lo que respecta a la conducta de los agentes morales) la verdadera cuestión disputada. Expuesto en su forma propia, el razonamiento estoico no implica un abuso de lenguaje sino una *petitio principii*.

Habría que agregar que, en la actualidad, los iluminados defensores de la doctrina de la Necesidad, contemplando el fin como señalado sólo en y a través de los medios, repudian acertadamente esas consecuencias prácticamente enfermizas que son el reproche formulado al Fatalismo.

Si agregamos las expresiones electivas para los dos primeros casos del esquema precedente, la suma será x, que es el símbolo electivo adecuado para el caso más general en que X es verdadera con independencia de toda consideración acerca de Y; y si añadimos las expresiones electivas en los dos últimos casos simultáneamente, el resultado será $1 - x$ que es la expresión electiva apropiada al caso más general en que X es falsa.

De esta manera, la extensión del Universo hipotético no depende absolutamente del número de las circunstancias consideradas. Y conviene destacar que, independientemente de que dichas circunstancias sean pocas o muchas, la suma de las expresiones electivas que representan todos los casos concebibles seguirá siendo la unidad. Consideremos, en consecuencia, las tres proposiciones X, llueve; Y, graniza; Z, hiela. Los casos posibles son los siguientes:

Casos	*Expresiones electivas*
1°) Llueve, graniza y hiela	xyz
2°) Llueve y graniza, pero no hiela	$xy(1 - z)$
3°) Llueve y hiela, pero no graniza	$xz(1 - y)$
4) Hiela y graniza, pero no llueve	$zy\ (1-x)$
5°) Llueve, pero ni graniza ni hiela	$x(1 - y)(1 - z)$
6°) Graniza, pero ni llueve ni hiela	$y(1 - x)(1 - z)$

7°) Hiela, pero ni graniza ni llueve	$z(1-x)(1-y)$
8°) Ni llueve, ni graniza ni hiela	$(1-x)(1-y)(1-z)$
	$1 = \text{suma}$

Expresión de las proposiciones hipotéticas

Expresar que una proposición dada X es verdadera.

El símbolo $1 - x$ elige los casos en los que la proposición X es falsa. Pero, si la proposición es verdadera, no existen tales casos en su Universo hipotético, por consiguiente:

$$1 - x = 0,$$

o

$$x = 1, \qquad \text{(XXV)}$$

Expresar que una proposición dada X es falsa.

El símbolo electivo x elige todos aquellos casos en los cuales la proposición es verdadera, de manera que si la proposición es falsa:

$$x = 0, \qquad \text{(XXVI)}$$

Y, en todos los casos, habiendo determinado la expresión electiva adecuada a una proposición dada, afirmamos la verdad de esa proposición igualando la expresión electiva a la unidad, y su falsedad igualando la misma expresión a 0.

Expresar que dos proposiciones, X e Y, son simultáneamente verdaderas.

El símbolo electivo apropiado a este caso es xy, por consiguiente la ecuación considerada es:

$$xy = 1, \qquad \text{(XXVII)}$$

Expresar que dos proposiciones, X e Y, son simultáneamente falsas.

Evidentemente, la condición será:

$$(1 - x)(1 - y) = 1,$$

o

$$x + y - xy = 0, \qquad \text{(XXVIII)}$$

Expresar que la proposición X es verdadera o la proposición Y es verdadera.

Afirmar que una u otra de las dos proposiciones es verdadera equivale a decir que no es verdad que ambas son falsas. Como la expresión electiva adecuada a las mismas, siendo ambas falsas, es $(1 - x)(1 - y)$, la ecuación requerida será:

$$(1 - x)(1 - y) = 0,$$

o

$$x + y - xy = 1, \qquad \text{(XXIX)}$$

Y, mediante consideraciones indirectas de esta naturaleza, se pueden expresar todas las proposiciones disyuntivas por numerosos que sean sus miembros. Pero, en la práctica, será siempre preferible la regla general siguiente.

Regla. — Considérese cuáles son los casos distintos y mutuamente exclusivos en los cuales está implícito, en el enunciado de la proposición dada, que algunos de ellos es verdadero e iguálese a la unidad la suma de sus expresiones electivas. Esta será la ecuación de la proposición dada.

En efecto, la suma de las expresiones electivas para todos los distintos casos concebibles será la unidad. Pero, como todos estos casos son mutuamente exclusivos y se ha afirmado en la proposición dada que algún caso

—de un conjunto dado de ellos— es verdadero, resulta que todos los que no están incluidos en dicho conjunto son falsos y que sus expresiones electivas son, respectivamente, iguales a 0. Luego, las uma de las expresiones electivas para los casos restantes, es decir aquellos que están incluidos en el conjunto dado, será igual a la unidad. En consecuencia, alguno de esos casos será verdadero pero, como se excluyen mutuamente, es imposible que más de uno sea verdadero. De donde, la regla en cuestión.

Y, en la aplicación de esta regla, hay que observar que si los casos considerados en la proposición disyuntiva dada no son mutuamente exclusivos, deben ser resueltos en una serie equivalente de casos que sí lo sean.

De este modo, si consideramos la proposición del ejemplo anterior, X es verdadera o Y es verdadera, y suponemos que sus dos miembros no son exclusivos hasta el punto que en la enumeración de los casos posibles calculamos que las proposiciones X e Y son ambas verdaderas, entonces los casos que integran el Universo de la proposición con sus expresiones electivas son:

1°) X verdadera e Y falsa, $x(1-y)$
2°) Y verdadera y X falsa, $y(1-x)$
3°) X verdadera e Y verdadera, xy

y la suma de todas estas expresiones electivas, igualadas a la unidad, da:

$$x + y - xy = 1 \qquad \text{(XXX)}$$

como antes. Pero si suponemos que los miembros de la proposición disyuntiva son exclusivos entonces los únicos casos a considerar son:

1°) X verdadera, Y falsa, $x(1 - y)$

2°) Y verdadera, X falsa, $y(1 - x)$

Y la suma de estas expresiones electivas, igualada a 0, da

$$x - 2xy + y = 1 \tag{XXXI}$$

Los ejemplos adjuntos ilustrarán mejor este método.

Expresar la proposición X no es verdadera o Y no es verdadera, siendo sus miembros exclusivos.

Los casos mutuamente exclusivos son:

1°) X no verdadera, Y verdadera, $y(1 - x)$

2°) Y no verdadera, X verdadera, $x(1 - y)$

y la suma de ellos, igualada a la unidad, da:

$$x - 2xy + y = 1, \tag{XXXII}$$

que es igual a (XXXI), y de hecho las proposiciones que representan son equivalentes.

Expresar la proposición X no es verdadera o Y no es verdadera, no siendo sus miembros exclusivos.

A los casos considerados en el último ejemplo, hay que agregar el siguiente:

X no verdadera, Y no verdadera, $(1 - x)(1 - y)$.

La suma de las expresiones electivas da:

$$x(1 - y) + y(1 - x) + (1 - x)(1 - y) = 1,$$

o

$$xy = 0, \tag{XXXIII}$$

Expresar la proposición disyuntiva X es verdadera, o Y es verdadera, o Z es verdadera, siendo sus miembros exclusivos.

Aquí los casos mutuamente exclusivos son:

1°) X verdadera, Y falsa, Z falsa, $x(1-y)(1-z)$,
2°) Y verdadera, Z falsa, X falsa, $y(1-z)(1-x)$,
3°) Z verdadera, X falsa, Y falsa, $z(1-x)(1-y)$,

e, igualando la suma de las expresiones electivas a 1, después de la reducción obtenemos:

$$x+y+z-2(xy+yz+zx)+ \\ +3\,xyz=1, \qquad \text{(XXXIV)}$$

La expresión de la misma proposición cuando sus miembros no son exclusivos, será:

$$(1-x)(1-y)(1-z)=0, \qquad \text{(XXXV)}$$

Y es fácil ver que nuestro método es aplicable a la expresión de toda proposición semejante cuyos miembros estén sujetos a cualquier cuantificación específica y a la condición de exclusión.

Expresar la proposición condicional Si X es verdadera Y es verdadera.

Esta expresión implica que todos los casos de X verdadera son también casos de Y verdadera. Los primeros están determinados por el símbolo electivo x y los últimos por y, por consiguiente, en virtud de (IV), tenemos:

$$x(1-y)=0, \qquad \text{(XXXVI)}$$

Expresar la proposición condicional Si X es verdadera Y no es verdadera.

La ecuación, será evidentemente,

$$xy=0, \qquad \text{(XXXVII)}$$

que es equivalente a (XXXIII) y, en realidad, la proposición disyuntiva X no es verdadera o Y no es verdadera y la proposición condicional Si X es verdadera Y no es verdadera, son equivalentes.

Expresar que Si X no es verdadera Y no es verdadera.

En (XXXVI), reemplacemos x por $1 - x$ e y por $1 - y$, y tendremos:

$$(1-x)\, y = 0.$$

Los resultados obtenidos admiten ser verificados en varias formas diferentes. Bástenos examinar en modo más detenido la ecuación:

$$x - 2xy + y = 1, \qquad \text{(XXXVIII)}$$

que expresa la proposición condicional X es verdadera o Y es verdadera, siendo, en este caso, sus miembros exclusivos.

En primer término, supongamos que la proposición X sea verdadera, entonces $x = 1$, y sustituyendo tenemos:

$$1 - 2y + y = 1 \quad \therefore \quad -y = 0, \quad \text{o} \quad y = 0,$$

que significa que Y no es verdadera.

En segundo lugar, supongamos que X no sea verdadera, entonces $x = 0$ y la ecuación correspondiente será:

$$y = 1 \qquad \text{(XXXIX)}$$

o sea que Y es verdadera. Podemos proceder en manera análoga suponiendo que Y sea verdadera o que Y sea falsa.

Además, en virtud de la propiedad $x^2 = x$, $y^2 = y$, podemos escribir la ecuación en la forma siguiente:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 1,$$

y, extrayendo la raíz cuadrada, obtenemos:

$$x - y = \pm 1, \tag{XL}$$

que representa el caso real, porque si X es verdadera o falsa Y será, respectivamente, falsa o verdadera, y tenemos:

$$\begin{aligned} x &= 1 \quad \text{ó} \quad 0, \\ y &= 0 \quad \text{ó} \quad 1, \\ \therefore \quad x - y &= 1 \quad \text{ó} \quad -1 \end{aligned}$$

El análisis de los otros casos no presentará dificultades.

Ejemplos de silogismo hipotético

El tratamiento de cada una de las formas de silogismo hipotético consistirá en formar las ecuaciones de las premisas y eliminar el símbolo o los símbolos que se encuentren en más de una de ellas. El resultado obtenido será la expresión de la conclusión.

1°) Silogismo disyuntivo.

O X es verdadera o Y es verdadera (exclusivas),	$x + y - 2xy = 1$
X es verdadera,	$x = 1$
En consecuencia, Y no es verdadera,	$\therefore \ y = 0$
X es verdadera o Y es verdadera (no exclusivas),	$x + y - xy = 1$
X no es verdadera,	$x = 0$
En consecuencia Y es verdadera,	$\therefore \ y = 1$

2°) Silogismo condicional constructivo.

Si X es verdadera, Y es verdadera,	$x(1-y) = 0$
X es verdadera,	$x = 1$
En consecuencia Y es verdadera,	$\therefore\ 1-y = 0$
	o $y = 1$

3°) Silogismo condicional destructivo.

Si X es verdadera Y es verdadera,	$x(1-y) = 0$
Y no es verdadera,	$y = 0$
En consecuencia X no es verdadera	$\therefore\ x = 0$

4°) Dilema constructivo simple, la premisa menor exclusiva.

Si X es verdadera, Y es verdadera,	$x(1-y) = 0,$	(XLI)
Si Z es verdadera, Y es verdadera,	$z(1-y) = 0,$	(XLII)
X es verdadera, o Z es verdadera,	$x + z - 2xz = 1,$	(XLIII)

De las ecuaciones (XLI), (XLII), (XLIII), tenemos que eliminar x y z. Por cualquier procedimiento que lo hagamos, el resultado es:

$$y = 1;$$

lo que significa que la proposición Y es verdadera.

5°) Dilema constructivo complejo, la premisa menor no exclusiva.

Si X es verdadera, Y es verdadera,	$x(1-y) = 0$

Si W es verdadera Z es verdadera, $w(1 - z) = 0$
X es verdadera o W es verdadera, $x + w - xw = 1$

Eliminando x de estas ecuaciones, tenemos:

$$y + z - yz = 1,$$

que expresa la conclusión Y es verdadera o Z es verdadera, siendo los miembros no exclusivos.

6°) Dilema destructivo complejo, la premisa menor exclusiva.

Si X es verdadera Y es verdadera, $x(1 - y) = 0$
Si W es verdadera Z es verdadera, $w(1 - z) = 0$
Y no es verdadera o Z no es verdadera, $y + z - 2yz = 1$

Hay que eliminar y y z de las ecuaciones precedentes. El resultado es:

$$xw = 0,$$

que expresa la conclusión X no es verdadera o Y no es verdadera, siendo los miembros *no exclusivos*.

7°) Dilema destructivo complejo, la premisa menor no exclusiva.

Si X es verdadera Y es verdadera, $x(1 - y) = 0$
Si W es verdadera Z es verdadera, $w(1 - z) = 0$

Y no es verdadera o Z no es verdadera, $yz = 0$

Eliminando y y z tenemos:

$$xw = 0,$$

que indica la misma conclusión del ejemplo anterior.

De éste y de otros casos similares, resulta que sean o no exclusivos los miembros de la premisa menor de un dilema los miembros de la conclusión (disyuntiva) nunca son exclusivos. Este hecho parece haber escapado a la observación de los lógicos.

Las anteriores son las principales formas del silogismo hipotético reconocidas por los lógicos. Sería fácil, sin embargo, ampliar la lista especialmente mediante la fusión de los caracteres disyuntivos y condicional en la misma proposición; el siguiente es un ejemplo.

Si X es verdadera, entonces Y es verdadera o Z es verdadera, $x(1 - y - z + yz) = 0$

Y no es verdadera, $y = 0$

En consecuencia, si X es verdadera Z es verdadera, $\therefore\ x(1 - z) = 0$

Lo que los lógicos llaman una proposición *causal* es en realidad un silogismo condicional cuya premisa mayor ha sido suprimida.

La aserción La proposición X es verdadera *porque* la proposición Y es verdadera, equivale a la aserción:

La proposición Y es verdadera.

En consecuencia la proposición X es verdadera, y estas dos proposiciones son la premisa menor y la conclusión del silogismo condicional:

Si Y es verdadera, X es verdadera,
Y es verdadera,
En consecuencia X es verdadera.

Y, de este modo, las proposiciones causales se consideran incluidas entre las aplicaciones de nuestro método general.

Nótese que hay una familia de proposiciones disyuntivas condicionales que no pertenecen, en rigor, a la clase considerada en este capítulo. Estas proposiciones son aquellas en las cuales la fuerza de la partícula disyuntiva o condicional se apoya en el predicado de la proposición como si, hablando de los habitantes de una isla particular, dijéramos que todos ellos son *europeos o asiáticos*; significando que es verdadero de cada individuo el ser europeo o asiático. Si adjudicamos el símbolo electivo x a los habitantes, y a los europeos y z a los asiáticos, la ecuación correspondiente a la proposición anterior será:

$$x = xy + xz, \quad \text{o} \quad x(1 - y - z) = 0, \qquad (a)$$

a la cual debemos agregar la condición $yz = 0$, desde que ningún europeo es asiático. La naturaleza de los símbolos x,y,z, está indicando que la proposición pertenece a aquellas que hemos denominado anteriormente *categóricas*. Muy distinta de la precedente es la proposición Todos los habitantes son europeos o todos son asiáticos. Aquí la partícula disyuntiva separa proposiciones. El caso es el que ya ha sido considerado en

(XXXI), en este mismo capítulo; y los símbolos por medio de los cuales ha sido expresado, aunque están sujetos a las mismas leyes de (*a*), tienen una interpretación completamente distinta (*).

La distinción es real e importante. Es posible representar por medio de signos electivos toda proposición que pueda ser formulada en un lenguaje; y las leyes de combinación de dichos símbolos son las mismas en todos los casos. Pero, mientras en una clase de ejemplos los símbolos hacen referencia a colecciones de objetos, en la otra se refieren a las verdades de las proposiciones constituyentes.

(*) Algunos autores, entre ellos el Dr. Latham (*First Outlines*), consideran que la única función de una conjunción es conectar *proposiciones*, no *palabras*. No estoy de acuerdo con este criterio. La proposición Todo animal es racional *o* irracional, no puede reducirse a Todo animal es racional *o* todo animal es irracional. La primera pertenece a las proposiciones categóricas puras, la última a las hipotéticas. En las proposiciones *singulares*, tales conversiones podrían permitirse. Este animal es racional *o* irracional es equivalente a Este animal es racional *o* es irracional. Esta peculiaridad de las proposiciones *singulares* casi justificaría que las ubicáramos, a pesar de ser realmente universales, en una clase separada como lo hacen Ramus y sus continuadores.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES ELECTIVAS

Como los símbolos electivos se combinan de acuerdo a las leyes de la cantidad podemos, gracias al teorema de Maclaurin, desarrollar [28] una función dada $\phi(x)$, en potencias crecientes de x, con excepción de los casos conocidos en que no se cumple. Así, tenemos:

$$\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \frac{\phi''(0)}{1.2}x^2 + \&c., \qquad \text{(XLIV)}$$

Pero, como $x^2 = x$, $x^3 = x$, &c., entonces:

$$\phi(x) = \phi(0) + x\{\phi'(0) + \frac{\phi''(0)}{1.2} + \&c.\}, \qquad \text{(XLV)}$$

Si, en (XLIV) hacemos $x = 1$, tenemos:

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{\phi''(0)}{1.2} + \&c.,$$

entonces:

$$\phi'(0) + \frac{\phi''(0)}{1.2} + \frac{\phi'''(0)}{1.2.3} + \&c. = \phi(1) - \phi(0) \qquad [29]$$

Sustituyendo este valor por el coeficiente de x en el segundo miembro de (XLV), tenemos (*):

$$\phi(x) = \phi(0) + \{\phi(1) - \phi(0)\}x, \qquad \text{(XLVI)}$$

(*) Aunque este teorema y los siguientes han sido demostrados sólo para aquellas formas de funciones que son desarrollables mediante el teorema de Maclaurin, se las puede considerar verdaderas para formas cualesquiera como que emplearemos también en la forma:

$$\phi(x) = \phi(1)x + \phi(0)(1 - x), \qquad \text{(XLVII)}$$

Toda función de x en la cual las potencias enteras de dicho símbolo estén implicadas separadamente se reducen, por este teorema, al orden primero. Las cantidades $\phi(0)$, $\phi(1)$, se denominarán módulos de la función $\phi(x)$. Tienen gran importancia en la teoría de las funciones electivas, como se desprende de las proposiciones siguientes.

se verá en las aplicaciones. La razón de este hecho parece ser que, como las funciones electivas resultan interpretables sólo a través de una forma de ampliación, no se presenta dificultad alguna en la interpretación.

El desarrollo de $\phi(x)$ también se puede determinar así. Por la conocida fórmula para la extensión en factoriales:

$$\phi(x) = \phi(0) + \Delta\phi(0)x + \frac{\Delta^2\phi(0)}{1.2}x(x-1) + \&c.$$

Pero, siendo x un símbolo electivo, $x(x-1) = 0$, por consiguiente todos los términos que siguen al segundo se anulan. También: $\Delta\phi(0) = \phi(1) - \phi(0)$, entonces:

$$\phi\{x = \phi(0)\} + \{\phi(1) - \phi(0)\}x.$$

El matemático puede interesarse en el hecho que éste no es el único caso en el cual una extensión se detiene en el segundo término. La ampliación de las funciones operativas compuestas $\phi\left\{\frac{d}{dx} + x^{-1}\right\}$ y $\phi\left\{x + \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}\right\}$ son respectivamente:

$$\phi\left(\frac{d}{dx}\right) + \phi'\left(\frac{d}{dx}\right)x^{-1}$$

y:

$$\phi(x) + \phi'(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}$$

(Vid. *Cambridge Mathematical Journal*, Vol. IV, p. 219).

Proposición 1. Dos funciones cualesquiera $\phi(x)$, $\psi(x)$ son equivalentes si sus módulos correspondientes son iguales.

Esta es una consecuencia evidente de la última proposición. Porque desde que:

$$\phi(x) = \phi(0) + \{\phi(1) - \phi(0)\}x,$$
$$\psi(x) = \psi(0) + \{\psi(1) - \psi(0)\}x,$$

es evidente que si $\phi(0) = \psi(0)$, $\phi(1) = \psi(1)$, las dos extensiones serán equivalentes y, en consecuencia, las funciones que representan también lo serán.

La conversa de esta proposición es igualmente verdadera.

Si dos funciones son equivalentes sus correspondientes módulos son iguales.

Entre las aplicaciones más importantes del teorema anterior, destacaremos la siguiente:

Supongamos que se quiere determinar para qué formas de la función $\phi(x)$ es satisfecha la ecuación siguiente:

$$\{\phi(x)\}^n = \phi(x).$$

Aquí obtenemos, de inmediato, la expresión de las condiciones en cuestión:

$$\{\phi(0)\}^n = \phi(0). \quad \{\phi(1)\}^n = \phi(1), \qquad \text{(XLVIII)}$$

Nuevamente, supongamos que se quiere determinar bajo qué condiciones se satisface la ecuación siguiente:

$$\phi(x)\psi(x) = \chi(x),$$

El teorema general nos da, de inmediato:

$$\phi(0)\psi(0) = \chi(0). \quad \phi(1)\psi(1) = \chi(1). \quad \text{(XLIX)}$$

Este resultado puede ser demostrado igualmente sustituyendo $\phi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ por sus formas ampliadas, e igualando los coeficientes de la ecuación resultante reducida adecuadamente.

Todos los teoremas precedentes pueden ser extendidos a funciones de más de un símbolo. Porque, como los distintos símbolos electivos se combinan entre sí de acuerdo a las mismas leyes como símbolos de cantidad, podemos extender, primeramente, una función dada con respecto a cualquier símbolo particular que contenga y, luego, ampliar el resultado a cualquier otro símbolo y así sucesivamente, sin tener en cuenta el orden de las extensiones.

Así, siendo la función dada $\phi(xy)$, tenemos:

$$\phi(xy) = \phi(xo) + \{\phi(x1) - \phi(xo)\}y,$$

y ampliando los coeficientes con respecto a x, y reduciendo,

$$\begin{aligned}\phi(xy) = \phi(00) &+ \{\phi(10) - \phi(00)\}x + \{\phi(01) - \phi(00)\}y \\ &+ \{\phi(11) - \phi(10) - \phi(01) + \phi(00)\}xy, \qquad \text{(L)}\end{aligned}$$

expresiones que podemos formular mediante la elegante forma simétrica:

$$\begin{aligned}\phi(xy) = \phi(00)(1-x)(1-y) &+ \phi(01)y(1-x) \\ + \phi(10)x(1-y) &+ \phi(11)xy, \qquad \text{(LI)}\end{aligned}$$

donde tenemos, de acuerdo con el lenguaje ya empleado, $\phi(00)$, $\phi(01)$, $\phi(10)$, $\phi(11)$, como módulos de la función $\phi(xy)$.

Observando las formas generales precedentes, se verá que son equivalentes todas las funciones de dos variables cuyos módulos correspondientes son iguales.

De este modo, las condiciones de las que depende que sea satisfecha la ecuación:

$$\{\phi(xy)\}^n = \phi(xy)$$

resultan ser:

$$\{\phi(00)\}^n = \phi(00), \quad \{\phi(01)\}^n = \phi(01),$$
$$\{\phi(10)\}^n = \phi(10), \quad \{\phi(11)\}^n = \phi(11), \qquad \text{(LII)}$$

Y las condiciones de las que depende que sea satisfecha la siguiente ecuación:

$$\phi(xy)\psi(xy) = \chi(xy),$$

son:

$$\phi(00)\psi(00) = \chi(00), \quad \phi(01)\psi(01) = \chi(01),$$
$$\phi(10)\psi(10) = \chi(10), \quad \phi(11)\psi(11) = \chi(11), \text{ (LIII)}$$

Es muy fácil determinar, por inducción de (XLVII), y (LI), la forma general de la función electiva ampliada. Es evidente que si el número de símbolos electivos es m, el número de los módulos será 2^m, y sus valores separados serán obtenidos intercambiando, de todos los modos posibles, los valores 1 y 0 en los lugares de los símbolos electivos de la función dada. Los diversos términos de la extensión de los cuales los módulos sirven de coeficientes se formarán, en consecuencia, escribiendo para cada 1 que aparezca bajo signo funcional el símbolo electivo x, etc., al cual representa, y para cada 0 el correspondiente $1 - x$, etc., y, considerándolos como factores, el producto de los mismos multiplicado por el módulo del cual han sido obtenidos, constituye un término de la extensión.

De esta manera, si representamos los módulos de toda función electiva $\phi(xy\ldots)$ por $a_1, a_2 \ldots a_r$, la función misma, cuando es ampliada y ordenada con referencia a los módulos, asumirá la forma:

$$\phi(xy) = a_1t_1 + a_2t_2 \ldots + a_rt_r \qquad \text{(LIV)}$$

en la cual $t_1,t_2,\ldots t_r$ son funciones de $x,y,\ldots$ reducidas a factores de las formas $x,y,\ldots 1-x, 1-y,\ldots$ etc. Las funciones satisfacen individualmente las relaciones del índice:

$$t_1^n = t_1,\ t_2^n = t_2,\ \&\text{c.} \qquad \text{(LV)}$$

y las demás relaciones:

$$t_1t_2 = 0\ldots t_1t_2 = 0,\ \&\text{c.} \qquad \text{(LVI)}$$

el producto de dos cualesquiera de ellas se anula.

Esta característica podrá inferirse rápidamente observando las formas particulares (XLVII) y (LI). Así, en la última, tenemos para los valores de t_1,t_2,etc., las formas:

$$xy,\ x(1-y),\ (1-x)y,\ (1-x)(1-y);$$

y es evidente que las mismas satisfacen la relación del índice y que todos sus productos se anulan. Llamaremos $t_1, t_2,\ldots$ a las funciones constituyentes de $\phi(xy)$ y definiremos la peculiaridad de anulación de los productos binarios diciendo que esas funciones son *exclusivas*. Y, en realidad, las clases que representan son mutuamente exclusivas.

La suma de todos los constituyentes de una función ampliada es la unidad. Se obtendrá una demostración elegante de esta proposición desarrollando 1 como función de todos los símbolos electivos propuestos.

Así, si en (LI) suponemos $\phi(xy) = 1$, tenemos $\phi(11) = 1$,

$$\phi(10) = 1,\quad \phi(01) = 1,\quad \phi(00) = 1,$$

y (LI) da:

$$1 = xy + x(1 - y) + (1 - x)y + (1 - x)(1 - y), \qquad \text{(LVII)}$$

Es obvio, en verdad, que aunque los símbolos involucrados sean numerosos, cuando la suma de los constituyentes es igual a la unidad, todos los módulos de la unidad son la unidad. Estamos ya en condiciones de considerar la cuestión de la interpretación general de las ecuaciones electivas. Para ello, nos resultarán muy útiles las proposiciones siguientes.

Proposición 2. Si el primer miembro de la ecuación general $\phi(xy\ldots) = 0$, es ampliado en una serie de términos, todos ellos de la forma at, siendo a el módulo de la función dada, tendremos para cada módulo numérico de la función a que no se anule, la ecuación:

$$at = 0,$$

y las interpretaciones combinadas de estas ecuaciones expresarán la significación total de la ecuación original.

Porque representando la ecuación bajo la forma:

$$a_1t_1 + a_2t_2 \ldots + a_rt_r = 0, \qquad \text{(LVIII)}$$

Multiplicando por t_1 tenemos, por (LVI):

$$a_1t_1 = 0, \qquad \text{(LIX)}$$

donde si a_1 es una constante numérica distinta de cero:

$$t_1 = 0,$$

y análogamente para todos los módulos distintos de cero. Y como de estas ecuaciones constituyentes podemos formar la ecuación dada, sus interpretaciones expresarán simultáneamente su significación plena.

De manera que si la ecuación dada fuera:

$$x - y = 0, \text{ } X \text{ e } Y \text{ son idénticas,} \qquad \text{(LX)}$$

tendríamos $\phi(11) = 0$, $\phi(10) = 1$, $\phi(01) = -1$, $\phi(00) = = 0$, es decir que la ampliación (LI) asumiría la forma

$$x(1 - y) - y(1 - x) = 0,$$

donde, por el teorema anterior:

$$x(1 - y) = 0, \quad \text{Todas las } X \text{ son } Y,$$
$$y(1 - x) = 0, \quad \text{Todas las } Y \text{ son } X,$$

resultados que son, al mismo tiempo, equivalentes a (LX).

Puede ocurrir que la satisfacción simultánea de las ecuaciones así deducidas requiera que uno o más de los símbolos electivos sea igual a cero. Esto sólo implica la no existencia de una clase, puede suceder también que se llegue a un resultado final de la forma:

$$1 = 0,$$

que indicaría la existencia del universo lógico. Tales casos sólo se presentarán cuando intentemos unir proposiciones contradictorias en una simple ecuación. La manera en que parece eludirse la dificultad en el resultado es característica.

Resulta de esta proposición que las diferencias en la interpretación de las funciones electivas dependen únicamente del número y de la posición de los módulos iguales a cero. Ninguna modificación del valor de un módulo, excepto el que ocasiona su anulación, produce cambio alguno en la interpretación de la ecuación que lo contiene. Si entre el número infinito de los distintos valores que nos está permitido asignar a los módulos distintos de cero en una ecuación dada, un valor cualquiera fuera preferido, será la unidad porque cuando todos los módulos de una función o son 0 ó 1, la función misma satisface la condición

$$\{\phi(xy\dots)\}^n = \phi(xy\dots),$$

con lo que se introduce a la vez la simetría en nuestro Cálculo y se nos proporciona modelos fijos de referencia.

Proposición 3. Si $w = \phi(xy\dots), w, x, y, \dots$ son símbolos electivos y el segundo miembro fuera ampliado y ordenado completamente en una serie de términos de la forma at, podremos igualar separadamente a 0 cada término en el que el módulo a no satisfaga la condición:

$$a^n = a,$$

y dejar como valor de w la suma de los términos restantes.

Como la naturaleza de la demostración de esta proposición, no es afectada por el número de los términos del segundo miembro nos limitaremos, por razones de simplicidad, a suponer que sean cuatro y admitimos que solamente los módulos de los dos primeros satisfacen la ley del índice.

Tenemos, por consiguiente:

$$w = a_1t_1 + a_2t_2 + a_3t_3 + a_4t_4, \qquad \text{(LXI)}$$

con las relaciones

$$a_1^n = a_1, \; a_2^n = a_2,$$

sumadas a los dos conjuntos de relaciones que conectan $t_1\, t_2, t_3, t_4$, de acuerdo con (LV) y (LVI).

Elevando al cuadrado (LXI), tenemos:

$$w = a_1t_1 + a_2t_2 + a_3^2t_3 + a_4^2t_4,$$

y restando (LXI):

$$(a_3^2 - a_3)t_3 + (a_4^2 - a_4)t_4 = 0;$$

y, admitiendo por hipótesis que los coeficientes de estos términos son distintos de cero, tenemos por la proposición II:

$$t_3 = 0, \quad t_4 = 0, \tag{LXII}$$

donde (LXI) resulta:

$$z = a_1t_1 + a_2t_2.$$

La utilidad de esta proposición se verá más adelante.

Proposición 4. Las funciones $t_1\, t_2 \ldots t_r$, mutuamente exclusivas, nos darán siempre:

$$\psi(a_1t_1 + a_2t_2 \ldots + a_rt_r) = \psi(a_1)t_1 + \psi(a_2)t_2 \ldots + \psi(a_r)t_r, \tag{LXIII}$$

cualesquiera sean los valores de $a_1, a_2, \ldots a_r$, o la forma de ψ.

Representemos la función $a_1t_1 + a_2t_2 + a_rt_r$ por:

$$\phi(xy) \ldots),$$

entonces los módulos $a_1a_2, \ldots a_r$, estarán dados por las expresiones:

$$\phi(11\ldots), \quad \phi(10), \quad (\ldots)\phi(00\ldots).$$

También

$$\begin{aligned}
&\psi(a_1t_1 + a_2t_2 \ldots + a_rt_r) = \psi\{\phi(xy\ldots)\}\\
&= \psi\{\phi(11\ldots)\}xy\ldots + \psi\{\phi(10)\}x(1-y)\ldots\\
&\qquad + \psi\{\phi(00)\}(1-x)(1-y)\ldots\\
&= \psi(a_1)xy\ldots + \psi(a_2)x(1-y)\ldots +\\
&\qquad + \psi(a_r)(1-x)(1-y)\ldots\\
&= \psi(a_1)t_1 + \psi(a_2)t_2 \ldots + \psi(a_r)\,t_r,
\end{aligned} \tag{LXIV}$$

No sería difícil ampliar la lista de propiedades interesantes como las expresadas en los ejemplos anteriores. Pero bastan para nuestros requerimientos actuales las que hemos comunicado. La proposición siguiente servirá de ilustración de su utilidad.

Proposición 5. Cualquiera sea el proceso de razonamiento que apliquemos a una proposición singular dada, el resultado será la misma proposición o una limitación de ella.

Representemos la ecuación de la proposición dada bajo su forma más general:

$$a_1t_1 + a_2t_2 \ldots + a_rt_r = 0, \qquad \text{(LXV)}$$

que se resuelve en tantas ecuaciones de la forma $t = 0$ como módulos distintos de 0 existan.

Ahora bien, la transformación más general de esta ecuación es:

$$\psi(a_1t_1 + a_2t_2 \ldots + a_rt_r) = \psi(0) \qquad \text{(LXVI)}$$

a condición de que atribuyamos a ψ un carácter completamente arbitrario, permitiendo además incluir nuevos símbolos electivos que tengan *cualquier relación supuesta* con los originales.

El desarrollo de (LXVI) da, por la última proposición:

$$\psi(a_1)t_1 + \psi(a_2)t_2 \ldots + \psi(a_r)t_r = \psi(0).$$

Para reducirla a la forma general de referencia, sólo es necesario observar que como:

$$t_1 + t_2 \ldots + t_r = 1,$$

podemos escribir en vez de $\psi(0)$:

$$\psi(0)(t_1 + t_2 \ldots + t_r),$$

donde, sustituyendo y por trasposición:

$$\{\psi(a_1) - \psi(0)\}t_1 + \{\psi(a_2) - \psi(0)\}t_2 \ldots +$$
$$+ \{\psi(a_2) - \psi(0)\}t_r = 0.$$

De donde resulta que si a es cualquier módulo de la ecuación original, el módulo correspondiente de la ecuación transformada será:

$$\psi(a) - \psi(0).$$

Si $a = 0$, entonces $\psi(a) - \psi(0) = \psi(0) - \psi(0) = 0$, donde no hay *nuevos términos* en la ecuación transformada y, en consecuencia, tampoco hay *nuevas proposiciones* dadas por la igualación a 0 de sus miembros constituyentes.

Nuevamente, desde que $\psi(a) - \psi(0)$ pueden ser iguales a 0 sin que a lo sea, debe haber términos en la ecuación transformada que ya estaban en la primitiva. Por consiguiente, algunas de las verdades que pertenecían a la proposición original pueden desaparecer por completo en la interpretación del resultado final.

Finalmente, si $\psi(a) - \psi(0)$ no es igual a 0, habrá una constante numérica o deben estar implicados nuevos símbolos electivos. En el primer caso, el término en el que se encuentre dará:

$$t = 0,$$

que es uno de los integrantes de la ecuación original; en el último caso tendremos:

$$\{\psi(a - \psi(0)\}t = 0,$$

donde t tiene un factor limitante. La interpretación de esta ecuación es, en consecuencia, una limitación de la interpretación de (LXV).

La finalidad de la última investigación se presentará en manera más evidente al matemático que al lógico. Como de cualquier ecuación matemática se puede deducir un número infinito de otras, parece necesario señalar que cuando la ecuación original expresa una proposición lógica todo miembro de la serie derivada, aun cuando haya sido obtenido por extensión bajo un signo funcional, admite una interpretación consistente y exacta.

(29) E. W. Beth (V. op. cit., p. 273) observa que Boole acepta la demostración de este teorema de MacLaurin, a pesar de que no parece digna de gran confianza.

DE LA SOLUCION DE LAS ECUACIONES ELECTIVAS

Cualquiera sea la manera en que un símbolo electivo, considerado desconocido, esté involucrado en una ecuación dada, es posible asignarle su valor total por medio de los símbolos electivos restantes tomados como conocidos. Cabe señalar que dichas ecuaciones, debido a la naturaleza misma de los símbolos electivos, son necesariamente lineales y sus soluciones tienen una analogía muy estrecha con las de las ecuaciones diferenciales lineales; en una, símbolos electivos arbitrarios ocupan el lugar de las constantes arbitrarias de la otra. En primer lugar, ilustraremos el método de solución por medio de ejemplos particulares y, luego, lo aplicaremos a la investigación de teoremas generales.

Dado $(1-x)y = 0$, (Todas las Y son X), determinar y en términos de x.

Como y es una función de x, podemos suponer que $y = vx + v'(1-x)$ (siendo ésta la expresión de una función arbitraria de x), quedando por determinar los módulos v y v'. Tenemos, entonces:

$$(1-x)\{vx + v'(1-x)\} = 0,$$

o, en una multiplicación real:

$$v'(1-x) = 0:$$

que debe ser generalmente verdadera; sin imponer ninguna restricción a x, debemos suponer $v' = 0$, no habiendo condición limitativa de v, tenemos:

$$y = vx, \qquad \text{(LXVII)}$$

Esta es la solución completa de la ecuación. La condición de ser y un símbolo electivo exige que v también lo sea (desde que debe satisfacer la ley del índice), siendo arbitraria su interpretación en otras relaciones.

Análogamente, la solución de la ecuación $xy = 0$, es:

$$y = v(1 - x) \qquad \text{(LXVIII)}.$$

Dado $(1 - x)zy = 0$ (Todas las Y que son Z son X), determinar y.

Como y es una función de x y z, podemos suponer que:

$$y = v(1-x)(1-z) + v'(1-x)z + v''x(1-z) + v'''xz$$

Y sustituyendo, obtenemos:

$$v'(1 - x)z = 0,$$

luego $v' = 0$. La solución completa es, en consecuencia:

$$y = v(1 - x)(1 - z) + v''x(1 - z) + v'''xz, \qquad \text{(LXIX)}$$

siendo v', v'', v''', símbolos electivos arbitrarios; y la interpretación rigurosa de este resultado es que Toda Y es no-X y no-Z o X y no-Z, o X y Z. Merece destacarse que la ecuación anterior, debido a su forma lineal, puede resolverse agregando las dos soluciones particulares con referencia a x y z; y, reemplazando las constantes arbitrarias que cada una implica por una función arbitraria del otro símbolo, el resultado es:

$$y = x\phi(z) + (1 - z)\psi(x), \qquad \text{(LXX)}$$

Para mostrar que esta solución es equivalente a la otra sólo basta sustituir las funciones arbitrarias $\phi(z)$, $\psi(x)$ por sus equivalentes:

$$wz + w'(1 - z) \quad \text{y} \quad w''x + w'''(1 - x),$$

obtenemos:

$$y = wxz + (w' + w'')x(1 - z) + w'''(1 - x)(1 - z).$$

Considerando el carácter completamente arbitrario de w' y w'', podemos reemplazar su suma por un símbolo simple w', donde:

$$y = wxz + w'x(1 - z) + w'''(1 - x)(1 - z),$$

que concuerda con (LXIX).

La solución de la ecuación $wx(1 - y)z = 0$, expresada por medio de funciones arbitrarias, es:

$$z = (1 - w)\phi(xy) + (1 - x)\psi(wy) + y\chi(wx), \qquad \text{(LXXI)}$$

Estos ejemplos pueden servir para poner de relieve la analogía existente entre las soluciones de las ecuaciones electivas y las del orden correspondiente de ecuaciones diferenciales lineales. Así, la expresión de la integral de una ecuación diferencial parcial por funciones arbitrarias o mediante una serie con coeficientes arbitrarios, está en estrecha analogía con el caso presentado en los dos últimos ejemplos. Llevar más lejos esta comparación sería más una curiosidad que una analogía útil. Preferimos considerar el problema de la solución de las ecuaciones electivas bajo su aspecto más general: ése será el objeto de las investigaciones siguientes.

Resolver la ecuación general $\phi(xy) = 0$, con referencia a y.

Si ampliamos la ecuación dada con respecto a x e y, tenemos:

$$\phi(00)(1-x)(1-y) + \phi(01)(1-x)y + \phi(10)x(1-y) + \phi(11)xy = 0 \qquad \text{(LXXII)}$$

siendo los coeficientes $\phi(00)$, etc., constantes numéricas.

La expresión general de y, como función de x, es:

$$y = vx + v'(1-x),$$

siendo v y v' símbolos desconocidos a determinar. Sustituyendo este valor en (LXXII), obtenemos un resultado que puede ser escrito en la forma siguiente:

$$[\phi(10) + \{\phi(11) - \phi(10)\}v]x + [\phi(00) + \{\phi(00) - \phi(00)\}v'](1-x) = 0;$$

y, con el objeto de satisfacer esta ecuación sin restringir de ningún modo la generalidad de x, tenemos:

$$\phi(10) + \{\phi(11) - \phi(10)\}v = 0,$$
$$\phi(00) + \{\phi(01) - \phi(00)\}v' = 0,$$

de donde deducimos:

$$v = \frac{\phi(10)}{\phi(10) - \phi(11)}, \quad v' = \frac{\phi(00)}{\phi(01) - \phi(00)},$$

luego:

$$y = \frac{\phi(10)}{\phi(10) - \phi(11)}x + \frac{\phi(00)}{\phi(00) - \phi(01)}(1-x), \qquad \text{(LXXIII)}$$

Si hubiéramos ampliado la ecuación general con respecto a y solamente, habríamos obtenido:

$$\phi(x0) + \{\phi(x1) - \phi(x0)\}y = 0;$$

pero puede haber alarmado a quienes no están acostumbrados al mecanismo de Algebra Simbólica el que hayamos deducido de esta ecuación:

$$y = \frac{\phi(x0)}{\phi(x0) - \phi(x1)},$$

debido al carácter aparentemente sin sentido del segundo miembro. Tal resultado, sin embargo, hubiera sido perfectamente legítimo y la expansión del segundo miembro nos hubiera dado la solución obtenida más arriba. En el siguiente ejemplo, emplearé este método y me permito aconsejar a quienes pueda parecerle dudoso, que verifiquen sus conclusiones por el método anterior.

Resolver la ecuación general $\phi(xyz) = 0$, o, en otras palabras, determinar el valor de z como función de x e y.

Ampliando la ecuación dada con respecto a z, tenemos:

$$\phi(xyo) + \{\phi(xy1) - \phi(xy0)\}z = 0;$$

$$\therefore z = \frac{\phi(xy0)}{\phi(yx0) - \phi(xy1)} \ldots \qquad \text{(LXXIV)}$$

y desarrollando el segundo miembro como una función de x e y, con el auxilio del teorema general, llegamos a:

$$z = \frac{\phi(110)}{\phi(110) - \phi(111)} xy + \frac{\phi(100)}{\phi(100) - \phi(101)} x(1 - y)$$

$$+ \frac{\phi(010)}{\phi(010) - \phi(011)} (1 - x)\, y$$

$$+ \frac{\phi(010)}{\phi(010) - \phi(011)} (1 - x)\, y + \frac{\phi(000)}{\phi(000) - \phi(001)}$$

$$\text{(LXXV)}$$

y ésta es la solución completa requerida. Por el mismo método podemos resolver una ecuación que implique cualquier número dado de símbolos electivos.

En la interpretación de cualquier solución general de esta naturaleza se pueden presentar los siguientes casos.

Siendo constantes los valores de los módulos $\phi(00)$, $\phi(01)$, etc., uno o más de los coeficientes de la solución puede asumir la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{1}{0}$. En el primer caso, el símbolo indefinido $\frac{0}{0}$ puede ser reemplazado por un símbolo electivo arbitrario v. En el último, el término que es multiplicado por un factor $\frac{1}{0}$ (o por cualquier constante numérica excepto 1), puede ser igualado separadamente a 0, lo que indicará la existencia de una proposición subsidiaria. La evidencia de lo antedicho surge de (LXII).

Ejemplo: dado $x(1-y) = 0$, Todas las X son Y, determinar y como una función de x.

Consideremos $\phi(xy) = x(1-y)$, luego $\phi(10) = 1$, $\phi(11) = 0$, $\phi(01) = 0$, $\phi(00) = 0$; de donde, por la (LXXIII):

$$y = \frac{1}{1-0}x + \frac{0}{0-0}(1-x) = x + \frac{0}{0}(1-x)$$

$$= x + v(1-x), \qquad \text{(LXXVI)}$$

siendo v un símbolo electivo arbitrario. La interpretación de este resultado es que la clase Y consiste de toda la clase X con un resto indefinido de no-X. Este resto es indefinido en el más alto sentido, es decir que puede variar desde 0 hasta la totalidad de la clase de las no-X.

Ejemplo: Dado $x(1 - z) + z = y$ (la clase Y consiste de la clase total Z, con esas no-Z en cuanto son X) encontrar Z .

Aquí $\phi(xyz) = x(1 - z) - y + z$, donde tenemos el siguiente conjunto de valores para los módulos:

$$\phi(110) = 0,\ \phi(111) = 0,\ \phi(100) = 1,\ \phi(101) = 1,$$
$$\phi(010) = 1,\ \phi(011) = 0,\ \phi(000) = 0,\ \phi(001) = 1,$$

y sustituyendo en la fórmula general (LXXV), tenemos:

$$z = \frac{0}{0}\,xy + \frac{1}{0}\,x(1 - y) + (1 - x)y, \qquad \text{(LXXVII)}$$

el coeficiente infinito del segundo término indica la ecuación:

$$x(1 - y) = 0, \text{ Todas las } X \text{ son } Y;$$

y reemplazando el coeficiente indeterminado del primer término por v (símbolo electivo arbitrario), tenemos:

$$z = (1 - x)y + vxy,$$

cuya interpretación es que la clase Z está constituída por todas las Y que no son X y por un resto *indefinido* de Y que son X. Por supuesto que este resto indefinido puede ser igual a 0. Los dos resultados que hemos obtenido son inferencias lógicas (no muy obvias) deducidas de las proposiciones originales y nos proporcionan toda la información que contienen con respecto a la clase Z y a sus elementos constituyentes.

Ejemplo: dado $x = y(1-z) + z(1-y)$. La clase X está formada por todas las Y que son no-Z y todas las Z que son no-Y. La clase Z es requerida.

Tenemos:

$$\phi(xyz) = x - y(1-z)(1-y),$$

$$\phi(110) = 0,\ \phi(111) = 1,\ \phi(100) = 1,\ \phi(101) = 0,$$

$$\phi(010) = -1,\ \phi(011) = 0,\ \phi(000) = 0,\ \phi(001) = -1$$

de donde, sustituyendo en (LXXV):

$$z = x(1-y) + y(1-x), \qquad \text{(LXXVIII)}$$

cuya interpretación es, la clase Z está constituida por todas las X que no son Y y todas las Y que no son X; inferencia estrictamente lógica.

Ejemplo: Dado $y\{1 - z(1-x)\} = 0$, Todas las Y son Z y no-X.

Procediendo como anteriormente para formar los módulos y sustituyendo en las fórmulas generales, tenemos:

$$z = \frac{1}{0}xy + \frac{0}{0}x(1-y) + y(1-x) + \frac{0}{0}(1-x)(1-y),$$

o

$$\begin{aligned} z &= y(1-x) + vx(1-y) + v'(1-x)(1-y) \\ &= y(1-x) + (1-y)\phi(x), \qquad \text{(LXXIX)} \end{aligned}$$

con la relación $xy = 0$; de donde resulta que Ninguna Y es X y que la clase Z está formada por todas las Y que no son X y por un resto indefinido de no-Y.

Este método, en combinación con el de Lagrange denominado de los multiplicadores indeterminados, puede ser aplicado con mucha elegancia al tratamiento de las ecuaciones simultáneas. Los límites que nos hemos fijado sólo nos permiten presentar un único ejemplo, pero el tema es merecedor de investigaciones ulteriores.

Dadas las ecuaciones $x(1-z)=0$, $z(1-y)=0$, Todas las X son Z, Todas las Z son Y, determinar el valor total de z con todas las relaciones subsidiarias que conectan x e y.

Sumando a la primera ecuación, la segunda multiplicada por una constante indeterminada λ, tenemos:

$$x(1-z)+\lambda z(1-y)=0,$$

y determinando los módulos y sustituyendo en (LXXV),

$$z=xy+\frac{1}{1-\lambda}x(1-y)+\frac{0}{0}(1-x)y, \qquad \text{(LXXX)}$$

de donde derivamos:

$$z=xy+v(1-x)y,$$

con la relación subsidiaria:

$$x(1-y)=0;$$

la primera expresión significa que la clase Z está formada por todas las X que son Y con un resto indefinido de no-X que son Y; la última ecuación expresa que Todas las X son Y. Esta es, en realidad, la conclusión del silogismo del cual son premisas las dos proposiciones dadas.

Asignando un sentido apropiado a nuestros símbolos, todas las ecuaciones que hemos analizado admitirían ser interpretadas mediante proposiciones hipotéticas, aunque parece suficiente el haberlas considerado como ejemplos de proposiciones categóricas.

Esta característica de los símbolos electivos en virtud de la cual toda ecuación electiva se puede reducir a un sistema de ecuaciones $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, etc., construidas de manera tal que todos los productos binarios t_1t_2, t_1t_3, etc., se anulan, representa una doctrina general dentro de la Lógica referida al análisis último de las proposiciones, de la cual convendría ofrecer alguna ilustración.

Cualquiera de estos constituyentes t_1,t_2, etc. consisten solamente de factores de las formas x,y,. . . $1 - w$, $1 - z$, etc. En consecuencia, representa, en proposiciones categóricas, una clase compuesta, es decir una clase definida por la presencia de algunas cualidades y por la ausencia de otras.

Cada ecuación constituyente $t_1 = 0$, etc., expresa una negación de la existencia de alguna clase definida de ese modo, y las diferentes clases son mutuamente exclusivas.

De este modo, todas las proposiciones categóricas se pueden resolver en una negación de la existencia de ciertas clases compuestas, no siendo ningún miembro de dicha clase miembro de otra.

La proposición, Todas las X son Y, expresada por la ecuación $x(1 - y) = 0$, se resuelve en la negación de la existencia de una clase cuyos miembros son X y no-Y.

La proposición Algunas X son Y, expresada por $v = xy$, se resuelve como sigue, desarrollándola:

$$v - xy = vx(1 - y) + vy(1 - x) + v(1 - x)(1 - y) - xy(1 - v);$$

$$\therefore vx(1 - y) = 0, \; vy(1 - x) = 0, \; v(1 - x)(1 - y) = 0, \; (1 - v)xy = 0.$$

Las tres primeras implican que no existe clase cuyos miembros pertenezcan a cierto desconocido "Algunas", y son 1°) X y no-Y; 2°) Y y no-X; 3°) no-X y no-Y. La cuarta significa que no existe clase cuyos miembros sean X e Y, sin pertenecer a este desconocido "Algunas".

Del mismo análisis resulta que *todas las proposiciones hipotéticas se pueden resolver en negaciones de la coexistencia de la verdad o falsedad de ciertas aserciones.*

Así la proposición, si X es verdadera Y es verdadera, se resuelve por su ecuación $x(1 - y) = 0$, negando que coexistan la verdad de X y la falsedad de Y.

Y la proposición, X es verdadera o Y es verdadera, ambos miembros exclusivos, se resuelve en una negación primero, de que X e Y sean ambas verdaderas, y segundo, de que X e Y sean ambas falsas.

Pero, cabe preguntarse ¿no se necesita algo más que un sistema de negaciones para la constitución de una proposición afirmativa? ¿No se requerirá algún elemento positivo? Indudablemente, se necesita uno; y este elemento positivo es reemplazado en las proposiciones categóricas por la suposición (que puede ser considerada como un requisito previo del razonamiento en estos casos) de que *hay* un Universo de concepciones y que cada individuo en él contenido pertenece o no a la clase propuesta; en las proposiciones hipotéticas, por la suposición (que es también un requisito previo) de que existe un Universo de casos concebibles y que toda proposición dada es o verdadera o falsa. En realidad, la cuestión de la existencia de concepciones (εἶ ἔστι) es previa a cualquier declaración acerca de sus cualidades o relaciones (τί ἔστι) —Aristóteles, *Anal. Post.* lib. II, Cap. 2.

De lo anterior, parecería deducirse que las proposiciones pueden ser consideradas como basadas, a la vez, en un fundamento positivo y negativo. Dicho punto de vista no es extraño, sin embargo, al espíritu del razonamiento deductivo ni inadecuado a su método; este último procede siempre por limitaciones, en tanto que el primer considera lo particular como derivado de lo general.

Demostración del método de los multiplicadores indeterminados aplicado a las ecuaciones electivas simultáneas (30).

Para evitar innecesarias complicaciones, bastará considerar el caso de tres ecuaciones con tres símbolos electivos, que son las más generales de esta clase. Se verá que el caso es caracterizado por cualquier nota que afecte la naturaleza de la demostración, que pudiera presentarse en la discusión del problema más general. En dicho problema, el número de ecuaciones y el número de variables son ambos ilimitados.

Sean las ecuaciones dadas:

$$\phi(xyz) = 0, \quad \psi(xyz) = 0, \quad \chi(xyz) = 0, \tag{I}$$

Multiplicando las ecuaciones segunda y tercera por las constantes arbitrarias h y k, y sumándoselas a la primera, obtenemos:

$$\phi(xyz) + h\psi(xyz) + k\chi(xyz) = 0, \tag{II}$$

donde se ve que, resolviendo esta ecuación con respecto a toda variable z por el teorema general (LXXV) obtendremos, no sólo el valor general de z con independencia de h y de k, sino además todas las relaciones subsidiarias que pueden existir entre x e y independientemente de z.

Si representamos la ecuación general (II) bajo la forma $F(xyz) = 0$, su solución se puede escribir, por (LXXV), en la siguiente forma:

$$z = \frac{xy}{1 - \dfrac{F(111)}{F(110)}} + \frac{x(1-y)}{1 - \dfrac{F(101)}{F(100)}} + \frac{x(1-y)}{1 - \dfrac{F(011)}{F(010)}} + \frac{(1-x)(1-y)}{1 - \dfrac{F(001)}{F(000)}}$$

y hemos visto que cualquiera de estos cuatro términos puede ser igualado a cero, cuyo módulo, que podemos representar por M, no satisface la condición $M^n = M$ o, lo que es aquí lo mismo, su módulo no tiene otro valor que 0 ó 1.

Consideremos el módulo (supongamos M_1 (del primer término, a saber: $\dfrac{1}{1 - \dfrac{F(111)}{F(100)}}$ y asignando al símbolo F su sentido completo, tenemos:

$$M_1 = \frac{1}{1 - \dfrac{\phi(111) + h\psi(111) + k\chi(111)}{\phi(110) + h\psi(110) + k\chi(110)}}$$

Es evidente que la condición $M''_1 = M_1$ no puede ser satisfecha a menos que el miembro de la derecha sea independiente de h y de k; si ése fuera el caso, tendríamos la función:

$$\frac{\phi(111) + h\psi(111) + k\chi(111)}{\phi(110) + h\psi(110) + k\chi(110)}$$

independiente de h y de k.

Supongamos que:

$$\frac{\phi(111) + h\psi(111) + k\chi(111)}{\phi(110) + h\psi(110) + k\chi(110)} = c,$$

siendo c independiente de h y de k; tenemos, simplificando las fracciones e igualando los coeficientes:

$\phi(111) = c\phi(110)$, $\psi(111) = c\psi(110)$, $\chi(111) = c\chi(110)$;

luego, eliminando c:

$$\frac{\phi(111)}{\phi(110)} = \frac{\psi(111)}{\psi(110)} = \frac{\chi(111)}{\chi(110)},$$

que es equivalente al sistema triple:

$$\left.\begin{array}{l}\phi(111)\psi(110) - \phi(110)\psi(111) = 0\\ \psi(111)\chi(110) - \psi(110)\chi(111) = 0\\ \chi(111)\phi(110) - \chi(110)\psi(111) = 0\end{array}\right\} \qquad \text{(III)}$$

y resulta que si cualquiera de estas ecuaciones no es satisfecha, el módulo M_1 no satisfará la condición $M_1^n = M_1$, por lo tanto el primer término del valor de z debe ser igualado a 0, y tendremos:

$$xy = 0,$$

una relación entre x e y independiente de z.

Si desarrollamos en términos de z cada par de ecuaciones primitivas (I), tendremos:

$$\phi(xy0) + \{\phi(xy1) - \phi(xy0)\}z = 0,$$
$$\psi(xy0) + \{\psi(xy1) - \psi(xy0)\}z = 0,$$
$$\chi(xy0) + \{\chi(xy1) - \chi(xy0)\}z = 0,$$

y eliminando sucesivamente z de cada par de estas ecuaciones, tenemos

$$\phi(xy1)\psi(xy0) - \phi(xy0)\psi(xy1) = 0,$$
$$\psi(xy1)\chi(xy0) - \psi(xy0)\chi(xy1) = 0,$$
$$\chi(xy1)\phi(xy0) - \chi(xy0)\phi(xy1) = 0,$$

que expresan todas las relaciones entre x e y formadas por la eliminación de z. Desarrollándolas, y escribiendo el primer término en forma completa, tenemos:

$$\{\phi(111)\psi(110) - \phi(110)\psi(111)\}xy + \&c. = 0,$$
$$\{\psi(111)\chi(110) - \psi(110)\chi(111)\}xy + \&c. = 0,$$
$$\{\chi(111)\phi(110) - \chi(110)\phi(111)\}xy + \&c. = 0,$$

y resulta de la proposición (II) que si el coeficiente de xy en cualquiera de estas ecuaciones no es igual a cero, tendremos la ecuación

$$xy = 0,$$

pero los coeficientes en cuestión son los mismos que los primeros miembros del sistema (III) y los dos conjuntos de condiciones concuerdan exactamente. De este modo, en lo que respecta al primer término del desarrollo, el método de coeficientes indeterminados conduce al mismo resultado que la eliminación ordinaria; y es obvio que siendo similar la forma se aplicará el mismo razonamiento a todos los otros términos.

Supongamos, en segundo lugar, que las condiciones III) son satisfechas en forma tal que M_1 es independiente de h y de k. Asumirán indistintamente las formas equivalentes:

$$M = \frac{1}{1 - \dfrac{\phi(111)}{\phi(110)}} = \frac{1}{1 - \dfrac{\psi(111)}{\psi(110)}} = \frac{1}{1 - \dfrac{\chi(111)}{\chi(110)}}$$

Estas son las formas exactas del primer módulo en los valores desarrollados de z, deducidas simplemente de la solución de las tres ecuaciones primitivas. Si este valor común de M_1 es 1 o $\dfrac{0}{0} = v$, el término será conservado en z; para cualquier otro valor constante (excepto 0) tenemos una relación $xy = 0$, no dada por eliminación pero deducible simplemente de las ecuaciones primitivas, y en forma análoga para todos los otros términos. De este modo, en cada caso la expresión de las relaciones subsidiarias acompaña necesariamente al proceso de solución.

Si lo sometemos a consideración, es evidente que una prueba similar se aplicará a la discusión de un sistema indefinido así como al número de sus símbolos y de sus ecuaciones.

([30]). Este método complica el cálculo más que lo facilita. La utilización de algoritmos complejos y, en general, de un aparato algebraico excesivo, dificulta la comprensión lógica de ciertas expresiones simbólicas usadas por Boole. Schroeder simplificó el cálculo lógico suprimiendo las operaciones "inversas" (la resta y la división) e introdujo otras modificaciones que lo perfeccionaron, como la dualidad de las operaciones de adición y multiplicación y el paralelismo entre el 1 y el 0. El cálculo de Boole, así modificado, se conoce con el nombre de *Algebra de Boole-Schroeder* o Algebra clásica de la Lógica.

POST SCRIPTUM

Durante la impresión de esta obra, se me han ocurrido algunas consideraciones y explicaciones que son agregadas aquí.

Las observaciones acerca de las relaciones entre la Lógica y el Lenguaje (pág. 13) son apenas lo suficientemente explícitas. Sostengo que ambas dependen, fundamentalmente, de nuestra habilidad para formar nociones generales mediante la facultad de abstracción. El lenguaje es un instrumento —no indispensable— de la Lógica.

A las observaciones sobre *Causa* (pág. 22) quiero agregar lo siguiente: Considerando la Causa como un antecedente invariable en la Naturaleza (que es el punto de vista de Brown) asociado o no a la idea de Poder, como ha sido sugerido por Sir John Herschel, el conocimiento de su existencia es un conocimiento expresado adecuadamente por la palabra *que* (τὸ ὁτὶ), no por *porqué* (τὸ διοτὶ) Cabe destacar que las dos más grandes autoridades dentro de la Lógica (moderna y antigua) aceptan esta última interpretación aunque difieren ampliamente en su aplicación a la Matemática. Sir William Hamilton sostiene que la Matemática muestra sólo el *que* (τὸ ὁτὶ); Aristóteles, en cambio, decía: El *porqué* pertenece a los matemáticos porque ellos poseen las demostraciones de las Causas. (*Anal. Post.*, lib. I, cap. XIV). Hay que aceptar que el punto de vista de Aristóteles es consistente (aunque erróneo) con el sentido que, en varias partes de sus escritos, asigna virtualmente a la palabra Causa, a saber el de un antecedente en la Lógica; es decir que significa afirmar que las premisas son la causa de la conclusión. Me parece que este punto de vista confiere aún a sus investigaciones físicas mucho de su carácter peculiar.

Reconsiderando, pienso que el criterio sostenido en la pág. 96, acerca de la presencia o ausencia de un medio de comparación, podría deducirse fácilmente de la doctrina del Profesor De Morgan, por consiguiente, declino proclamarme su descubridor. Se puede destacar, sin embargo, la forma en que sepresenta en este libro.

Creo prudente cambiar la opinión expresada en las páginas 97,98. El sistema de ecuaciones allí expuesto para formular las proposiciones de un silogismo es *siempre* preferible al empleado anteriormente, ante todo por su generalidad y luego por su fácil interpretación.

En virtud del principio de que una proposición es verdadera o falsa, todo símbolo electivo empleado en la expresión de proposiciones hipotéticas admite solamente los valores 0 y 1, que son las únicas formas cuantitativas de un símbolo electivo. En realidad, es posible, basándose en la teoría de probabilidades (que es puramente cuantitativa), llegar a un sistema de métodos y procedimientos para el tratamiento de las proposiciones hipotéticas exactamente igual a los que hemos formulado. Los dos sistemas de símbolos electivos y de cantidades *contactan* (si se nos permite la expresión) en los puntos 0 y 1. Me parece que en ello está implícito que la verdad incondicionada (categórica) y la verdad probable se encuentran para constituir la verdad contingente (hipotética). La doctrina general de los símbolos electivos y todas sus aplicaciones más características son completamente independientes de cualquier origen cuantitativo.

ÍNDICE