

Giuseppe Raguní

Confines lógicos  
de la matemática

*Traducción  
de María Belén Hernández González  
con la colaboración  
de Almudena Miralles*

Nexofía

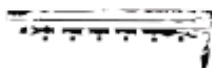


# CONFINES LÓGICOS DE LA MATEMÁTICA

*Giuseppe Raguní*

*Traducción de María Belén Hernández González  
con la colaboración de Almudena Miralles*

**Nexofía**



Título original: *I Confini Logici della Matematica*

© Giuseppe Raguní. Murcia, 2009, R. P. I. núm. 08/2009/357

Traducción: María Belén Hernández González. Colaboración:  
Almudena Miralles

Edita: Ajuntament de l'Eliana, 2011

NEXOFÍA, LIBROS ELECTRÓNICOS DE LA TORRE DEL VIRREY,  
colección dirigida por Antonio Lastra

Apartado de Correos 255  
46183 l'Eliana (Valencia) España

<<http://www.latorredelvirrey.es>>  
<[info@latorredelvirrey.es](mailto:info@latorredelvirrey.es)>

ISBN: 978-84-694-1921-2

# ÍNDICE

PREFACIO	7
----------	---

## PRIMERA PARTE. SISTEMAS AXIOMÁTICOS

I.1.	Sistemas axiomáticos formales	9
I.2.	La metamatemática	15
I.3.	Deducciones metamatemáticas	18
I.4.	Definiciones	24
I.5.	Objetivos, deseos y Sistemas <i>bien definidos</i>	25
I.6.	El Cálculo lógico clásico	29
I.7.	Consistencia y completitud sintáctica	39
I.8.	Las implicaciones de la Lógica clásica	42
I.9.	Sistemas clásicos bien <i>definidos</i>	48
I.10.	Demostraciones por absurdo	51
I.11.	Principales frutos del método axiomático	55
I.12.	No individuabilidad de existentes en Lógica <i>clásica</i>	62
I.13.	Verdades “indemostrables”	66

## SEGUNDA PARTE. COMPLETITUD SEMÁNTICA Y TEORÍA DE LOS CONJUNTOS

II.1.	Teoría aritmética de Peano	68
II.2.	Metateorema de corrección. ¿O no?	75
II.3.	Metateorema de completitud semántica	80
II.4.	Paradoja de Russell	83
II.5.	Teoría axiomática de los conjuntos	85
II.6.	El conjunto de los números naturales	90
II.7.	La unificación de la Matemática	95
II.8.	Teorema de corrección	105
II.9.	Completitud sintáctica y completitud semántica	113
II.10.	Consistencia de la Matemática ordinaria	117

- II.11. Isomorfismo**  
122
- II.12. Los números del infinito**  
129
- II.13. Los números de la metamatemática**  
138
- II.14. Los números de los Sistemas axiomáticos clásicos**  
150
- II.15. Sistemas innumerables**  
164
- II.16. Teoremas de completitud semántica y sus primeras consecuencias**  
  
168
- II.17. Otras consecuencias del Teorema de completitud semántica**  
  
175
- II.18. Límites expresivos de los Sistemas formales**  
184
- II.19. Límites expresivos fundamentales para la Matemática**  
186
- II.20. El uso intrínsecamente *semántico* de los Sistemas formales y de *TC***  
  
195

### TERCERA PARTE. INCOMPLETITUD E INDECIDIBILIDAD

- III.1. Sistemas clásicos efectivamente axiomatizables**  
203
- III.2. Ejemplos de Sistemas clásicos efectivamente axiomatizables. Consecuencias del axioma de elección**  
  
214
- III.3. La Tesis de Church-Turing**  
224
- III.4. Metateorema de Church-Turing**  
238

<b>III.5.</b>	<b>Primer teorema de incompletitud de Gödel</b>	<i>244</i>
<b>III.6.</b>	<b>Consecuencias del Teorema de incompletitud</b>	<i>253</i>
<b>III.7.</b>	<b>Gloria de Chaitin</b>	<i>267</i>
<b>III.8.</b>	<b>Vanagloria de Chaitin</b>	<i>282</i>
<b>III.9.</b>	<b>Otras equivocaciones</b>	<i>291</i>
<b>III.10.</b>	<b>Consistencia</b>	<i>303</i>
<b>III.11.</b>	<b>Epílogo conclusivo</b>	<i>311</i>
<b>III.12.</b>	<b>Síntesis</b>	<i>320</i>

## BIBLIOGRAFÍA

*324*

## REFERENCIAS EN INTERNET

*327*

*Cuando no se sabe explicar algo de forma sencilla y clara, es porque no se ha comprendido.*

## PREFACIO

“Si Dios entrase ahora por esa puerta, no podría objetar nada a esta deducción”. La frase, pronunciada por mi profesor de matemáticas<sup>1</sup> en el último curso de Bachillerato, me dio mucho que pensar. No porque elucubrara sobre la divinidad, sino porque planteaba una sencilla y difícil cuestión: ¿hasta qué punto podemos estar seguros de la corrección y la inconfutabilidad de las deducciones matemáticas? El último límite de dubitabilidad de cada lenguaje está constituido por las convenciones sobre el significado de los términos. Pero ¿cuáles y cuántas son estas convenciones en el caso de las teorías matemáticas? ¿Podrían ser infinitas?

Años después, gracias a la revista «Le Scienze», tuve conocimiento del Teorema de Incompletitud. La sorpresa, más que en el enunciado en sí, vino dada por la imposibilidad de comprender con exactitud lo que éste quería expresar, a pesar de haber releído el texto varias veces. En efecto, sucede a menudo con temas de este tipo que cualquier exposición sintética divulgativa, al no poder aclarar todos los detalles, corre el riesgo de confundir peligrosamente las ideas del lector para el cual por lo general ha sido concebida, es decir, del lector inexperto.

El itinerario que finalmente me ha conducido hasta la comprensión ha sido especialmente difícil sobre todo por tres motivos. El primero porque el tema, como a menudo sucede en Matemáticas, no se presta a ser entendido de forma aislada: para comprender bien cada detalle es necesario primero haber aclarado qué es el *modelo* de una Teoría, la Metamatemática, el

---

<sup>1</sup> El desaparecido y renombrado profesor Tullio Caponnetto del Liceo “Cutelli” de Catania.



Teorema de Completitud Semántica, la funciones recursivas...; en resumen, tener al menos una idea aproximada, pero sólida, de los fundamentos de la Lógica. El segundo motivo se debe a la ambigüedad de la terminología usada; realmente parece increíble que en un argumento tan delicado, que requiere precisión máxima, se continúe adoptando un lenguaje tan propenso a la confusión: la *completitud*, por ejemplo, puede indicar cuatro propiedades diferentes (afortunadamente nosotros usaremos sólo dos); y la *decidibilidad* para un Sistema, no significa que éste no pueda contener enunciados *indecidibles*. Además, casi nunca se distingue claramente entre teorema y metateorema. Las razones de tal imprecisión en buena parte son históricas; pero ello no puede justificar la pasividad en la investigación hacia expresiones más inequívocas, que se advierte en la mayor parte de los textos. Hay que considerar que hasta que la terminología no evolucione, el argumento quedará en un ambiente restringido a pocos y no podrá difundirse adecuadamente, como finalmente merece ochenta años después de su nacimiento. En efecto, una de las ambiciones de este libro es el empleo de algunos términos y conceptos nuevos.

El tercer motivo está constituido por los equívocos, incorrecciones y errores que hemos creído encontrar en los distintos temas. Para avanzar, después de meses de reflexión e investigación, no había más remedio que adoptar la presunción de corregirlos o bien resignarse a no comprender; claramente, exponiéndose a la posibilidad de errar. Algunas de dichas revisiones y correcciones tienen un carácter marginal, otras, en cambio, fundamental.

Todo ello justifica las razones para publicar este libro, el cual, a pesar de haber sido escrito con el objetivo irrenunciable de ser plenamente comprensible para el lector inexperto, introduce también algunas novedades en Lógica.

PRIMERA PARTE  
SISTEMAS AXIOMÁTICOS

### **I.1. Sistemas axiomáticos formales**

De las dos disciplinas matemáticas que la tradición nos ha legado, la Geometría euclidiana y el Álgebra, sólo la primera posee una estructura que puede decirse “axiomática” en sentido lato. En ella se comienza con las *definiciones* de los entes que se tratarán; siguen los *postulados*, es decir, las afirmaciones admitidas como verdaderas; al fin se habla de *nociones comunes*, o sea de reglas lógicas básicas y “autoevidentes”. Todas las deducciones, esto es, los teoremas, se deducen de tales premisas. Las definiciones, dado que utilizan otros términos indefinidos, tan sólo recuerdan al lector algunos conceptos elementales y “formas”, que debería espontáneamente poseer; en otras palabras, apelan francamente a la intuición. Para mostrar el funcionamiento del método y justificar las exigencias que han conducido a la moderna estructura axiomática, es suficiente un ejemplo elemental. Consideremos la afirmación “quién va al Polo Sur padecerá frío” e intentemos deducirla a partir de un Sistema axiomático (de modo que al final sea un teorema). Siguiendo el ejemplo de Euclides, empezaremos por definir los entes implicados, como “Polo Sur”, “frío”, etc.; pero evitaremos hacerlo suponiendo que quién escucha la frase reconoce inequívocamente tales términos. Después podremos continuar con los siguientes postulados:

[1] En el Polo Sur el Sol calienta muy poco.

[2] Donde el Sol calienta muy poco la temperatura es baja.

[3] Donde la temperatura es baja se padece frío.

Las *nociones comunes* consisten en las elementales hipótesis del caso, es decir, que el Polo Sur existe y es asequible, que no es posible encontrarse en más de un lugar a la vez, etc. La demostración de la frase antedicha sonaría así: “si fueras al Polo Sur, por el postulado [1] irías donde el Sol calienta poco y por tanto, por el postulado [2] donde la temperatura es baja. Entonces por el postulado [3] padecerías frío”.

Sin dejarnos llevar por su futilidad, el verdadero problema de la Teoría matemática que hemos construido se debe al hecho de que ella misma se encuentra ligada al significado concreto de los entes y postulados. La eventualidad de un equipamiento especial contra el frío, por ejemplo, ya pondría en peligro nuestro Sistema, porque estaríamos obligados a modificar un postulado (el [3]). Pero hay otra crítica mucho más grave. Si quisiéramos demostrar que “si tomaras el tranvía, llegarías a tiempo al concierto”, deberíamos construir un Sistema matemático nuevo que hable de tranvías, de tiempo, etc., con nuevas *nociones comunes* (y problemas imprevisibles como el tráfico).

Luego es natural desear que una Teoría matemática sea algo distinto, que esté hecha de afirmaciones más generales, en nuestro caso parecidas a: “si te encuentras en una cierta condición, que implica necesariamente otra condición, entonces al final te encontrarás en esta última”. Es decir, que sea *teoría de la deducción*, en lugar de deducción de hechos contingentes. Esta exigencia lleva, para los casos considerados, a la solución que hemos reproducido en la columna derecha de la siguiente

tabla. Las definiciones se han suprimido y no se hace más que una lista de los *símbolos* que se utilizarán; las *reglas gramaticales* definen las secuencias ordenadas de símbolos que serán denominados *proposiciones*.

SISTEMA AXIOMÁTICO TRADICIONAL	SISTEMA AXIOMÁTICO FORMAL
<p>DEFINICIÓN</p> <p>[ej.: 1) <i>el punto es aquello que no tiene partes</i>; 2) <i>la recta es longitud sin ancho que recorre igualmente todos sus puntos</i>]</p>	<p>LISTA DE SÍMBOLOS</p> <p>[ejemplo del texto]</p> <p><math>A B C D \rightarrow</math></p>
	<p>REGLAS GRAMATICALES</p> <p><i>Una proposición del Sistema está constituida solamente por una secuencia como: uno de los símbolos entre "A", "B", "C" o "D", seguido de "→" y seguido nuevamente de uno de los símbolos entre "A", "B", "C" o "D".</i></p>
<p>POSTULADOS</p> <p>[ej.: 1) <i>dos puntos distintos definen una recta</i> ; 2) <i>dada una recta existe al menos un punto que no le pertenece</i>]</p>	<p>AXIOMAS</p> <p>[1] <math>A \rightarrow B</math>          [2] <math>B \rightarrow C</math>          [3] <math>C \rightarrow D</math></p>
<p>NOCIONES COMUNES</p> <p>[ej.: 1) <i>el todo es mayor que la parte</i>; 2) <i>cosas que son iguales a la misma cosa, también son iguales entre sí</i>]</p>	<p>REGLAS DE DEDUCCIÓN</p> <p><i>De "<math>X \rightarrow Y</math>" y "<math>Y \rightarrow Z</math>" se deduce "<math>X \rightarrow Z</math>", siendo "X", "Y", "Z" símbolos cualesquiera entre "A", "B", "C" y "D" e incluyendo tanto los axiomas como los teoremas.</i></p>
<p>TEOREMAS</p> <p>[ej.: <i>dados dos puntos distintos existe al</i></p>	<p>TEOREMAS</p> <p>[1] <math>A \rightarrow C</math></p>

<i>menos una recta que no contiene ninguno de los dos</i>	[2] $B \rightarrow D$ [3] $A \rightarrow D$
---	--

Del mismo modo, las *reglas deductivas* definen las proposiciones que serán denominadas *teoremas*; para hacer esto, generalmente, especifican algunas operaciones que deben efectuarse a partir de ciertas proposiciones de base, llamadas *axiomas*. La característica fundamental (que se evidencia, precisamente, con el adjetivo *formal*) es que *símbolos y proposiciones del Sistema y, por lo tanto, también axiomas y teoremas, permanecen sin significado explícito* (o sea, expresamente predeterminado). Justamente por eso se prefiere utilizar a menudo el término “fórmula” en vez de “proposición” (que puede sugerir un carácter semántico erróneo); no obstante, en este libro usaremos el más familiar “proposición”.

Sin embargo, son las reglas gramaticales y las reglas de deducción, elegidas de forma oportuna para construir la Teoría matemática que nos interesa, las que dan implícitamente un significado puramente “operativo” a los símbolos. Explicaremos este último aspecto. Con respecto al ejemplo de la tabla, el primer teorema se obtiene aplicando la regla de deducción a partir de los axiomas [1] y [2]. El segundo, haciendo lo mismo con los axiomas [2] y [3]. El tercero, aplicando la regla de deducción en base al primer teorema y al axioma [3]. Es totalmente espontáneo, desde el análisis de nuestra regla de deducción, asociar al símbolo “ $\rightarrow$ ” un significado como “consigue”, “se deduce”, etc.; eso es un significado implícito “operativo”.

Para reconstruir las deducciones que nos interesan, consideremos ahora aquella que se define como *interpretación* del Sistema: demos a “*A*” el significado de “encontrarse en el

Polo Sur”; a “*B*” el de “encontrarse donde el Sol calienta poco”; a “*C*” el de “encontrarse donde la temperatura es baja”; a “*D*” el de “padecer frío” y a “ $\rightarrow$ ” el de “implica”. La regla gramatical es consistente con tal interpretación, puesto que formará proposiciones correctas en lengua española. Por ejemplo, según ésta se forma: “padecer frío implica encontrarse en el Polo Sur”, que está expresado en correcto español (aunque sea *falso*). Si ahora interpretamos los axiomas, resultan proposiciones *verdaderas*; en ese caso, se dice que la interpretación constituye un *modelo* del Sistema. Después controlaremos la corrección de la regla de deducción, o sea, si produce proposiciones verdaderas en el *modelo*. Con el significado de “implica” que se le da a “ $\rightarrow$ ”, “ $X \rightarrow Z$ ” es, en efecto, verdadero, si “ $X \rightarrow Y$ ” y “ $Y \rightarrow Z$ ” son verdaderos; entonces la regla, cuando actúa sobre axiomas interpretados en el *modelo*, produce teoremas *verdaderos* en el modelo, sobre los cuales puede todavía actuar produciendo otros teoremas *verdaderos*. Y así sucesivamente producirá sólo teoremas *verdaderos* para el modelo.

En nuestro ejemplo podemos darle directamente significado al teorema [3] (sin necesidad de pasar por el [1]), para afirmar como verdad que: “Encontrarse en el Polo Sur implica padecer frío”. El lector puede construirse un modelo oportuno del mismo Sistema para demostrar que “si tomaras el tranvía llegarías a tiempo al concierto” u otras deducciones del mismo tipo.

Otro ejemplo de *modelo* nos convencerá de lo efímero que es el significado dado a “ $\rightarrow$ ”. Interpretemos “*A*”, “*B*”, “*C*” y “*D*” como cuatro amigos nuestros ordenados por edad, del mayor al más joven y “ $\rightarrow$ ” como “es mayor que”. Se obtiene, claramente, otro *modelo*. Además, continua siendo válida la corrección de la regla deductiva, como el lector puede comprobar. Por lo tanto, nuestro Sistema, con todos sus teoremas, también se adapta

perfectamente a esta interpretación. El uso de sugerencias visuales para algún símbolo (como una flecha, en nuestro caso) es bastante frecuente en los lenguajes matemáticos, pero puede engañar en caso de que se trate de enfocar la lógica pura de las deducciones; ya que, como repetimos, todos los símbolos en realidad carecen de un significado prefijado.

En este momento, se estará de acuerdo sobre el hecho de que ningún abrigo magnífico, o *noción* no tan *común*, podrá invalidar un Sistema axiomático formal: éste seguirá siendo adecuado para cada *modelo*, si lo posee, siempre que sea *correcto* con respecto a las reglas deductivas. Pero no se nos escape la ventaja principal y extraordinaria de esta nueva organización abstracta de las Matemáticas<sup>2</sup>: cualquier teorema, aunque sea formidablemente largo y difícil (tal vez descubierto también gracias a la ayuda “visual” de un *modelo* concreto), vale automáticamente (esto es, sin necesidad de repetir la demostración) para todos los *modelos correctos* con respecto a las reglas de deducción del Sistema.

Como consecuencia obvia de la ausencia de significado de las proposiciones matemáticas, el mismo concepto de *verdad* es ajeno al lenguaje matemático y sólo concierne a las interpretaciones semánticas<sup>3</sup> de sus símbolos. La situación es ideal para la mordacidad de Russell: “El lenguaje matemático es una ciencia en la que no se sabe de qué se está hablando, ni si lo que se está diciendo es verdadero”<sup>4</sup>. Pero el tono irónico no debe distraer de la verdad literal de la afirmación. La utilidad indiscutible del lenguaje matemático se pone de manifiesto sólo cuando éste viene interpretado por los *modelos correctos*,

---

<sup>2</sup> Debida fundamentalmente a D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*.

<sup>3</sup> Usaremos el término *semántico* como abreviación de la locución “que tiene significado”.

<sup>4</sup> Bertrand Russell: *Misticismo e Logica*.

concretándose así en proposiciones significativas. Estas últimas también son normalmente llamadas “matemáticas”, pero el punto de vista axiomático precisa que se corrija esta confusión.

Volviendo, ahora, a la tradicional Geometría euclidiana, se reconoce que ésta se encuentra en una situación mejor con respecto a la Teoría que hemos considerado, sólo porque los entes implicados (puntos, rectas, etc.) son muy abstractos y primarios con respecto al tranvía y al frío polar. La semánticidad de tales entes se manifiesta en algunos errores (difíciles de descubrir) que han sido corregidos en su reajuste moderno. En concreto, se trata de algunos postulados (convertidos en axiomas en el reajuste formal) que faltaban (como el *de ordenamiento*: dados tres puntos alineados, hay uno y sólo uno que se encuentra entre los otros dos).

Pero la axiomática formal no hace otra cosa más que quitar la semánticidad del lenguaje puramente simbólico de las proposiciones matemáticas, separándolo claramente del lenguaje interpretado y de lo empleado en las reglas gramaticales y de deducción. ¿Es esto suficiente para concluir, como se oye a menudo, que en los Sistemas formales todo recurso *intuitivo* se elimina?

## **I.2. La metamatemática**

En primer lugar nos preguntaremos: ¿se puede prescindir del valor semántico en las reglas gramaticales y de deducción? La respuesta obvia es no. Una Teoría matemática se establece para obtener *nuevas* proposiciones; esta característica es tan natural que puede considerarse una de las propiedades definitorias de un Sistema matemático. Así pues, si se suprime el valor semántico en las reglas gramaticales y de deducción, se obtiene una lista de secuencias de símbolos sin significado; ¿cómo



podría ésta especificar, generar, otras secuencias de los mismos símbolos?

Si los teoremas o, más generalmente, las proposiciones son de número finito podríamos limitarnos a hacer una lista de las mismas, evitando la utilización de un Sistema matemático. Pero si, por la razón que sea, se quiere emplear un Sistema capaz de generar también una sola proposición *nueva*, será necesario decir cómo hacerlo mediante un lenguaje que tenga significado. Un caso muy común en el que parece necesario, es cuando se quiere crear un número *infinito* de proposiciones y/o teoremas; en efecto, esta última situación puede considerarse un caso no trivial para un Sistema axiomático. Las reglas gramaticales y de deducción, por lo tanto, no pueden no ser semánticas. Lo cual significa que para estar en condiciones de desempeñar su función, que es producir nuevas proposiciones, éstas deben ser necesariamente interpretadas (¡pero esta vez de manera unívoca!). Normalmente se expresan en el lenguaje natural: el que estamos utilizando ahora; ¡el mismo lenguaje de la publicidad y de los políticos! Sabemos bien que el lenguaje común puede ser engañoso o ambiguo; pero aquí, dada la naturaleza de nuestros temas, aspiraremos al máximo de la claridad y del rigor. En este punto encontramos una dificultad cardinal: de hecho sospechamos que es imposible fijar con absoluta precisión el grado de rigor y claridad al que debemos aspirar; tal sospecha será confirmada pronto. Entonces, ¿cómo se podrían definir reglas (gramaticales o deductivas) suficientemente claras? Por ahora limitémonos a tomar nota de la exigencia de seleccionar, a partir del lenguaje natural, un lenguaje semántico “suficientemente riguroso” como para ser

empleado en dichas reglas; lo llamaremos *metamatemática*<sup>5</sup>. Pero, pensándolo bien, esta necesidad es todavía más primordial: en realidad, ¿de qué tipo son todas las argumentaciones que se han hecho hasta aquí? Con algo de presunción (dado que la metamatemática se define como un lenguaje en un cierto modo riguroso en su terminología), podemos justamente considerarla metamatemática. Entonces, ¿hemos ahora definido circularmente la metamatemática, al servirnos precisamente de metamatemática? Sí, y no hay nada paradójico: lo mismo se hace en los diccionarios y en las gramáticas para definir una lengua y su sintaxis. En un diccionario, por ejemplo, se definen unas palabras a través de otras, en un círculo que no resulta vicioso sólo porque algunos significados, supuestamente, se conocen. Es decir, un lenguaje semántico puede ser capaz de autodefinirse. Esto equivale a afirmar algo parecido a que la metamatemática coincide con la metamatemática. Podemos expresarlo mejor: no es necesario distinguir explícitamente los distintos niveles lógicos de un lenguaje suficientemente semántico; éstos, de hecho, pueden ser clarificados en virtud del significado mismo de las afirmaciones. Poniendo un ejemplo concreto, todos pueden comprender la expresión: “En la frase la luna es roja es verbo”, sin necesidad de premisas, comillas u otras técnicas metalingüísticas.

Por otra parte, la metamatemática no se limita a definir, sino que también es capaz de deducir. Por ejemplo, la conclusión de que cierta proposición significativa es *verdadera* y, por lo tanto, que cierta interpretación es un *modelo*, es una deducción metamatemática. Lo mismo vale para la *corrección* de las reglas deductivas del Sistema respecto a un modelo. Se verán otros

---

<sup>5</sup> Del griego μετά, con el significado de “más allá de”.

ejemplos más adelante. ¿Qué decir entonces acerca de la fiabilidad y veracidad de una deducción metamatemática? Lo discutiremos en el próximo apartado.

En tanto, ya sabemos responder a la pregunta con la que concluye el apartado anterior: en los Sistemas axiomáticos formales la única especie de intuición se realiza bajo la forma de las convenciones semánticas que son necesarias para la comprensión de las reglas gramaticales y deductivas.

Puntualizamos ahora algunas convenciones sobre la terminología que usaremos en este libro. Por “lenguaje matemático” de un Sistema axiomático formal, entenderemos el lenguaje puramente simbólico (o *formal, sintáctico, codificado*), carente de significado explícito, usado en sus proposiciones. Utilizaremos también *Teoría* y *Disciplina* como sinónimos de Sistema (matemático) y, en síntesis, llamaremos *premisas* al conjunto de sus axiomas y reglas (gramaticales y deductivas). Cuando, con respecto a un *modelo* del Sistema, se verifica la *corrección* de las reglas deductivas (esto es, si en base a ellas se deducen siempre teoremas verdaderos, cuando son interpretados en el *modelo*), diremos sintéticamente que el *modelo es correcto*.

Finalmente, con “Matemática” entenderemos genéricamente el conjunto, el *corpus*, de todas las Teorías matemáticas, como se ha hecho hasta ahora.

### **I.3. Deducciones metamatemáticas**

La metamatemática se funda sobre las convenciones semánticas básicas del lenguaje común y, además, apela a principios elementales de “lógica común”. ¿No es esto un retorno de las discutibles *nociones comunes*? La principal diferencia respecto al caso tradicional es que tales conceptos no intervienen *directamente* en la deducción de los teoremas, sino

que lo hacen a través de la definición de las reglas gramaticales y deductivas. De esto se deriva que, en caso de que los conceptos semánticos usados en tales reglas no parezcan indudables, existe siempre la posibilidad de *axiomatizarlos*, como aclararemos pronto.

Consideremos el ejemplo del siguiente Sistema axiomático  $S$  (cuyas reglas suponemos que son *suficientemente claras*):

[símbolos]  $0 \ 1 \ x \ = \ +$

[regla gramatical] *una proposición se constituye única y exclusivamente con cualquier secuencia ordenada de símbolos tales que:*

- a) *Debe encontrarse uno y sólo un símbolo “=”.*
- b) *Los símbolos “+” y “=” deben estar siempre precedidos y seguidos por otro símbolo distinto a “+” o “=”.*

Así, por ejemplo, son proposiciones: “ $0x+1x0=0x+10+x$ ”, “ $1=x+00+x1$ ” y “ $1x+11=01x$ ”. En cambio, no lo es la secuencia “ $01x=10=0$ ”, que viola la *a)*, ni “ $+10+=01+1x$ ” que viola (dos veces) la *b)*.

[axiomas]  $x=x \quad x+0=x$

[regla de deducción] *un teorema se obtiene única y exclusivamente sustituyendo en un axioma el símbolo “x”, dondequiera que aparezca, por una misma secuencia ordenada arbitraria de los símbolos “0” y “1”.*

Sabemos ya que no se debe asignar significado a los

símbolos, pero hemos utilizado “+” y “=” porque trabajan en armonía con los conceptos semánticos comúnmente asociados a ellos. Obsérvese que ningún teorema puede contener el símbolo “x”: por consiguiente, en nuestro Sistema de ejemplo, los axiomas no son teoremas, contrariamente a lo que ocurre en los Sistemas comunes (clásicos).

Examinemos ahora la siguiente frase: *en el primer axioma, aplicamos la regla de deducción con la secuencia “01” obteniendo “01=01” como teorema*. La mayor parte de los lectores reconocerá en ella un ejemplo de *demostración*, es decir, un razonamiento que permite distinguir un teorema, precisamente “01=01”. ¿Cuál es el lenguaje de una demostración? No hay dudas de que, no siendo matemático, debe tratarse de metamatemática. Las demostraciones no son el único ejemplo; es facilísimo formar afirmaciones metamatemáticas, como: *cada teorema de S no empieza con “x”; cada proposición que tiene el símbolo “+” a la derecha del símbolo “=” no es un teorema de S, etc.* La sensación tangible es que se pueden deducir infinitas aserciones de este tipo. Parece entonces que la metamatemática no se limita a la definición de las reglas del Sistema, sino que interviene continuamente en Matemática mediante deducciones. Además, en los casos considerados, que hemos elegido oportunamente, ningún lector dudará de la verdad de estas afirmaciones, a menos que haya malentendido (así creemos) el significado contenido en las reglas del Sistema o en la misma afirmación. ¿Cuánta seguridad tienen esas deducciones? Detrás de esta pregunta está la ingenua pretensión de querer dar crédito únicamente a las deducciones propiamente matemáticas, esto es, a los teoremas de un Sistema axiomático formal. El interrogante, pues, sería: ¿Podrían tales conclusiones reconducirse a *teoremas interpretados* (dicho en síntesis, *axiomatizarse*)? Por supuesto.

La cuestión es que ello presupondría el reconocimiento previo de que cierta interpretación es un *modelo correcto* de un Sistema formal; o sea, presupondría otra vez deducciones basadas en convenciones semánticas, es decir, todavía de tipo metamatemático. La pregunta más apropiada sería entonces si merece la pena axiomatizarlas. Por ejemplo, para transformar en un teorema interpretado la expresión «*cada proposición que tiene el símbolo “+” a la derecha del símbolo “=” no es un teorema de  $S$* », podría aplicarse el primer Sistema axiomático introducido (véase la tabla del primer apartado), con “ $A$ ” interpretado como “cada proposición que tiene el símbolo + a la derecha del símbolo =”, “ $B$ ” como “no puede deducirse por la regla deductiva de  $S$ ”, “ $C$ ” como “no es un teorema de  $S$ ”, “ $D$ ” idéntico a “ $C$ ” (para completar el modelo) y “ $\rightarrow$ ” como “implica”. Después, una vez verificado que las interpretaciones antedichas constituyen un *modelo correcto*, la proposición considerada se deduciría interpretando el teorema “ $A \rightarrow C$ ”. Esta axiomatización ha transformado la controvertida deducción metamatemática en el teorema interpretado “ $A \rightarrow C$ ”, pero ha aceptado otras deducciones metamatemáticas: que las metaproposiciones correspondientes a los axiomas “ $A \rightarrow B$ ” y “ $B \rightarrow C$ ” sean verdaderas y la corrección de la regla deductiva para el modelo. El lector juzgará por sí mismo si todo esto ha merecido la pena. Las deducciones puramente metamatemáticas son, en cualquier caso, indispensables; todas las veces que una deducción metamatemática parece “inmediata”, haciendo un uso elemental e inequívoco de conceptos semánticos y “lógica común”, es inútil introducir un Sistema axiomático buscando una “mayor justificación” de la misma. Al menos cuando, para hacerlo, se deben incomodar conceptos y convenciones semánticas del mismo nivel de comprensión. Esto revela la idoneidad en Matemáticas del uso de deducciones

metamatemáticas extemporáneas, como las que antes hemos simplificado, no ligadas directamente a ningún específico Sistema axiomático.

Por otra parte, es indudable que, en el caso de que la deducción metamatemática (que a continuación llamaremos concisamente *metateorema*), no parezca tan indiscutible, debido a un uso ambiguo de significado o de lógica común, es muy oportuno que ésta se reobtenga más rigurosamente como teorema interpretado, mediante el uso de un Sistema axiomático basado en convenciones semánticas más elementales. O sea, mediante una formalización que distinga inequívocamente todos y solos los criterios deductivos autorizados.

Añadimos que la metamatemática opera continuamente a través de definiciones (lo observaremos en el próximo apartado) y, también, que normalmente es indispensable para describir las *propiedades* de las colecciones matemáticas (lo veremos en detalle en el apartado II.18). Además, ésta resulta, por así decirlo, *intrínsecamente* indispensable; esto significa que, para los objetivos de la Matemática, es necesaria una metamatemática capaz de emplear continuamente nuevos conceptos semánticos, es decir, de desarrollarse, de redefinirse sin cesar. Ésta puede considerarse como la conclusión filosófica esencial de los modernos teoremas y metateoremas que demarcan la epistemología Matemática, objeto de este libro. Naturalmente, a su tiempo, retornaremos con la mayor profundidad sobre este punto.

Resumimos las conclusiones más importantes de nuestro análisis. La primera es que en todo caso necesitamos convenciones semánticas y lógicas elementales, no perfectamente especificables. Para el lenguaje metamatemático que hace uso de ellas, no es posible establecer con absoluta precisión el grado de rigor que debe pretenderse. Para observarlo

más técnicamente, sea dada una definición  $D$  de “expresión semánticamente rigurosa”.  $D$  es verdaderamente dicha definición, si se interpretan sus términos de modo correcto y unívoco; de lo contrario, es una cadena de caracteres con un significado distinto, oscuro o sin sentido. Pero mientras se interpreta un término de la  $D$ , la misma definición  $D$  aún no está disponible; luego, ninguna interpretación de  $D$  puede ser rigurosamente concluida como semánticamente rigurosa o no. En resumen, una definición de “expresión semánticamente rigurosa” no puede ser concluida como “semánticamente rigurosa” en base a la misma definición.

La segunda conclusión es que el lenguaje metamatemático opera continuamente en Matemática, a través de definiciones, descripciones de propiedad y deducciones, esto es, metateoremas.

Finalmente, hemos observado que es prudente reconducir los metateoremas a teoremas interpretados sólo cuando falta la incontestabilidad de la misma deducción, debido a ambigüedad en los significados de sus términos o en el criterio deductivo. Más tarde se verá un ejemplo realmente fundamental de esto.

A algún lector podría molestarle tal vaguedad congénita en los fundamentos de la axiomática formal; los significados de los términos que utilizamos son “ciertos” (con un grado indefinible de tal certeza) en base a convenciones que, sin duda, dependen también de la experiencia, del hecho de que todos (o casi todos) están de acuerdo; lo mismo puede decirse para los principios de “lógica elemental”. ¿Hay, pues, un fundamento pragmático en los Sistemas axiomáticos formales causado por el carácter semántico de sus reglas gramaticales y deductivas?

En cada tipo de lenguaje semántico no se puede “demostrar” el significado de todos los términos que se utilizan: algunos se deben convenir al principio del discurso. Es imposible pretender



entenderse sin antes ponerse de acuerdo sobre el significado de algo y sin adoptar, aunque sea supuestamente, algunas reglas básicas de formación de las frases. Sobre estas convenciones no queda más que aceptar un grado indefinible (esperamos que suficiente) de comprensión. La respuesta a la pregunta anterior es, por lo tanto, un inevitable “sí”. No obstante, no se debe subestimar la ventaja respecto al criterio tradicional; o sea, la posibilidad de establecer, en caso de ambigüedad, convenciones semánticas más sólidas a través de nuevas axiomatizaciones.

Y, finalmente, es indudable que una actitud siempre drásticamente crítica sobre la posibilidad de conseguir entenderse, es demasiado deletérea: ¡quién la presumiera debería consiguientemente... callarse!

#### **I.4. Definiciones**

Todo aquel que haya estudiado alguna Disciplina matemática, aunque sea superficialmente, sabe lo numerosas e importantes que son las *definiciones*. En teoría, aparte de los símbolos, las reglas gramaticales, los axiomas y las reglas deductivas, no sería necesario nada más. Pero en la práctica en cada Teoría matemática habitual hay que establecer convenciones para simplificar expresiones largas. Las definiciones pueden consistir en simples *denotaciones* (también llamadas *posiciones* o *abreviaciones*) que, normalmente, sirven para reducir la longitud de las cadenas; o bien, pueden ser *autorreferenciales*, es decir, mencionar el mismo ente que se está definiendo. En la segunda Parte discutiremos el problema de la autorreferencialidad (ap. II.13).

Hemos de destacar que, a menudo, el uso de las definiciones no tiene sólo el objetivo de abreviar, sino más bien de evidenciar entes y conceptos que concentran y sintetizan propiedades numerosas a expresar; lo cual más que cómodo, es

prácticamente imprescindible para la comprensión de los argumentos. Un ejemplo emblemático que se verá más adelante es el uso del símbolo  $N$  para indicar el conjunto de los números naturales.

Como hemos señalado, también las definiciones son convenciones semánticas, esto es, están acordadas por la metamatemática. El lenguaje matemático, al estar privado de cualquier determinado significado, es incapaz de fijar aunque sea una convención tan banal como una simple abreviación.

### **I.5. Objetivos, deseos y Sistemas *bien definidos***

Tratamos ahora de imponer algunas convenciones mínimas para los Sistemas axiomáticos formales. El objetivo es, sin duda, seleccionar Sistemas que sean útiles para el conocimiento. Secuencias de caracteres sin significado sólo son un ejercicio lingüístico; nos interesan, sin embargo, sus interpretaciones *verdaderas* y en particular, que el Sistema las pueda deducir. Esto es, nos interesan sus *modelos correctos*, así como los hemos llamado. En tales condiciones, los teoremas son útiles e interesantes porque constituyen proposiciones verdaderas en tales modelos.

Empecemos por preguntarnos: ¿es siempre posible descubrir que una proposición es un teorema, si lo es? O sea: ¿siempre existe la demostración de un teorema? Y si es que sí, ¿siempre es posible identificarla? La primera pregunta tiene una única respuesta: un teorema que no puede demostrarse no es lo que *queremos llamar teorema*, en Matemáticas. En otros términos, por definición, cada teorema debe admitir al menos una demostración, esto es, un razonamiento metamatemático que nos convenza de que éste deriva de las premisas del Sistema. La segunda pregunta debe ser aclarada. Hemos convenido que la

demostración de un teorema tiene que existir siempre. Suponer que exista siempre un método efectivo para identificarla, sin embargo, parece excesivo. Nos referimos a un método “automático”, que todos podrían seguir, sin necesidad de alguna inventiva. Un método que, aunque probablemente irrealizable en la práctica (como se deduciría en consideración de los números enormes que se dan en el cálculo combinatorio), haría que la creatividad del matemático fuera en teoría superflua, porque sólo oportuna para sintetizar y simplificar los razonamientos. Comúnmente, se cree que Hilbert confiase nada menos que *cada problema* en Matemáticas fuese soluble “mecánicamente”; retomaremos el argumento en la tercera Parte. Por ahora podemos afirmar sin duda que, por lo general, las Teoría matemáticas carecen de un método de estas características; muchas demostraciones parecen el resultado de intuiciones, “observaciones” o investigaciones en parte casuales. A veces éstas crean, colateralmente, ambientes y propiedades nuevas por demostrar o confutar. La demostración de la proposición de Fermat ha resistido más de tres siglos; hoy disponemos de una muy compleja, pero no se puede descartar que un día se encuentre una mucho más simple. Ninguna previsión en ese sentido puede ser fundada sobre razones propiamente matemáticas. Y, naturalmente, quedan innumerables conjeturas por demostrar o confutar, no pocas tan antiguas como la Matemática.

Disminuyendo nuestras pretensiones, se puede imponer en primer lugar que cada demostración sea representable en los caracteres de un lenguaje convenido que emplea un número *finito* de símbolos; normalmente, aquellos alfa-numéricos del lenguaje natural. En segundo lugar, que sea reconocible como demostración una vez representada; obviamente, una condición necesaria es que sea *finita*, puesto que un razonamiento que no

termina no puede concluir. Pero también queremos más: frente a un razonamiento que *no es* una demostración, deseamos que exista siempre la posibilidad de concluirlo. En definitiva, queremos que exista siempre la posibilidad de verificar o desmentir un razonamiento que pretende ser una demostración. No admitir esto, significaría considerar *a priori* inexorablemente afectados por incertidumbre los razonamientos fundamentales de las Matemáticas. No parece sensato. Al fin y al cabo una demostración no es una propuesta, sino una afirmación que debe incluir suficientes e indiscutibles razones, aunque en los límites de la Semántica. Se pretende que estas razones puedan siempre concluirse como suficientes o insuficientes, si se indaga lo bastante. Técnicamente, queremos entonces que exista siempre la posibilidad de concluir, fijado cualquier objeto representable  $x$ , si  $x$  es una demostración o no. Llamaremos *distinguible* a un conjunto de este tipo: repetimos, un conjunto por el que, fijado cualquier objeto en la representación convenida, es posible concluir metamatemáticamente si esto pertenece al conjunto o bien no<sup>6</sup>. Otras imposiciones similares parece oportuno que deban hacerse sobre el conjunto de las proposiciones. Normalmente, si  $x$  es una cadena finita cualquiera de los caracteres admitidos, la gramática nos indica si es correcta o no. Todo y solamente aquello que el maestro señala en rojo es error de ortografía. Por otra parte, convenimos que una cadena con al menos un carácter no admitido, no es una proposición. Parece entonces normal pretender que las reglas gramaticales

---

<sup>6</sup> Seguiremos siempre la estrategia de utilizar verbos como “concluir”, “establecer”, “decidir”, etc ..., o el más técnico “metademostrar”, refiriéndonos a razonamientos metamatemáticos que conducen a metateoremas; mientras “demostrar” será utilizado solamente por los razonamientos metamatemáticos que conducen a *teoremas* propiamente dichos.

especificuen un conjunto, aquello de las proposiciones, *distinguible*.

A los Sistemas que satisfacen las condiciones anteriores, los denominaremos *bien definidos*. A continuación siempre supondremos, a menudo implícitamente, que los Sistemas matemáticos de los que hablaremos lo sean. Resumamos brevemente las condiciones de una *definición buena*: las proposiciones son *distinguibles* entre el conjunto de las cadenas finitas de los símbolos admitidos; los teoremas son proposiciones que admiten por lo menos una demostración; las demostraciones son cadenas finitas, en general semánticas, de carácter alfa-numéricos y son *distinguibles*. Estas características son una clase de “sensatez mínima” para un Sistema formal. Por eso no tendría sentido intentar formalizarlas dentro de un Sistema particular. Nos estamos refiriendo a la posibilidad de definir formalmente la *buena definición* dentro de un Sistema matemático, de modo que esto sea capaz de establecer (mediante sus teoremas) si otros Sistemas matemáticos están *bien definidos*. Para tal Sistema, de hecho, nos preguntaremos: ¿está *bien definido*? Si sí, entonces lo estaría informalmente (en su estructura de base, la definición de *bien definido* no está aún disponible) y la codifica de la *buena definición* no comprendería todos los casos. Si no, entonces la misma formalización de *bien definido* no estaría *bien definida* y se volvería cuestionable. Más adelante tendremos una confirmación del carácter *primitivo* de algunos conceptos contenidos en la *buena definición* de un Sistema (por ejemplo, el de *finito*).

¿La imposición de que las demostraciones sean *distinguibles* implica que también deban serlo los teoremas? O bien: en los Sistemas *bien definidos*, ¿el conjunto de los teoremas es *distinguible*? Si  $x$  es una cadena alfabética cualquiera, podemos entretanto distinguir si es una proposición; si es un teorema,

existe una demostración suya, esto es una conclusión metamatemática del hecho de que lo es. ¿Pero si no lo es? Una conclusión metamatemática del hecho de que no es un teorema no hace cierto parte de las *demostraciones*; la *buena definición* para el Sistema no parece implicar que siempre tenga que existir. Como veremos, hay razones concretas para desear reconocer también los *no-teoremas*, es decir, las proposiciones que el Sistema no podrá deducir. Estudiaremos este problema para los Sistemas axiomáticos que cada vez consideraremos.

A menudo se afirma que el hecho de que los elementos de un conjunto sean de número *finito* implica su *distinguibilidad* (más aún, incluso su *decidibilidad*, una condición mucho más fuerte, como veremos). Evidentemente se pasa por alto el hecho de que estos elementos podrían ser no *identificables*. Más tarde profundizaremos este concepto y mostraremos un caso (no banal) de axiomas finitos y, sin embargo, no *distinguibles*.

Subrayamos que el criterio de *distinguibilidad* del que hemos hablado, es el resultado de una genérica, a condición que convincente, “conclusión metamatemática”. El lector, pues, no tiene que interpretarla necesariamente como un procedimiento “mecánico”. En la tercera Parte del libro profundizaremos este argumento y lo que se quiere entender por “mecánico”; ahí se comprenderá por completo la razón de esta advertencia.

Naturalmente, las condiciones de *buena definición* requieren características oportunas para las *premisas* del Sistema. Más adelante las estudiaremos en relación a los Sistemas *clásicos*, definidos a continuación.

## **I.6. El Cálculo lógico clásico**

Los Sistemas axiomáticos formales considerados hasta ahora son muy simples. En cada Disciplina matemática bastante

avanzada encontramos un lenguaje formal muy cercano a lo natural. Si, por ejemplo, abrimos un libro de Geometría, hallamos expresiones como: “si una recta es perpendicular a un plano, cada plano que la contiene es perpendicular a este plano”. Estas proposiciones parecen poseer significado. En muchos teoremas aparecen ulteriores conceptos que consideraremos semánticos, como “y”, “o”, “no”, “existe” e “igual”. ¿Qué ocurre? ¿No se ha dicho que las expresiones matemáticas están privadas de significado explícito?

Para empezar, la axiomatización formal de la geometría es capaz de eliminar el significado de los términos “recta”, “plano”, etc., aunque normalmente estos términos se sigan llamando así para facilitar la comprensión. En nuestro primer ejemplo de Sistema axiomático formal hemos visto como se puede axiomatizar con un solo símbolo la oración “si ... entonces” (o bien “implica”). También los conceptos “y”, “o”, “no”, “igual”, “cada” y “existe” pueden ser axiomatizados. Tras la sorpresa inicial de este hecho, reconoceremos (en el siguiente apartado) que incluso son posibles axiomatizaciones diferentes, cada una capaz de reflejar en parte el carácter semántico de estos conceptos. La más importante de éstas, tradicionalmente, se llama *Lógica clásica* y será descrita a continuación. Puesto que el argumento es fundamental, dado que seguidamente estudiaremos sólo los Sistemas matemáticos axiomatizados según la Lógica clásica, la descripción en líneas generales que haremos no puede quedar totalmente desprovista de tecnicismo; sin embargo, no es indispensable que el lector comprenda todos los detalles.

En primer lugar, en Lógica clásica, se restringe el ámbito de las *interpretaciones*. Dado un Sistema axiomático formal, se define *interpretación clásica*, una correspondencia que asocia a cada proposición matemática del Sistema una afirmación

semántica con valor *verdadero* o *falso*, una posibilidad excluyendo la otra, y por lo que si ésta tiene el valor *verdadero* entonces la *negada* tiene el valor *falso* y viceversa. Aquí nos referimos a una negación de carácter semántico, admitiendo que cada afirmación semántica clásica tenga una negación única (como en: “el gallo canta”, “el gallo no canta”)<sup>7</sup>. Estos dos principios se llaman: *del tercer excluido* y *de no contradicción*. Un *modelo clásico* es, obviamente, una interpretación clásica que verifica los axiomas.

Sucesivamente, se axiomatizan los conceptos “no” y “o” (llamados *conectores lógicos*), mediante un Sistema axiomático oportuno, denominado *Cálculo clásico formal de los enunciados*. En concreto, se introducen símbolos arbitrarios para estos conceptos, más otros (como las letras mayúsculas) para las mismas proposiciones y los paréntesis; estos últimos en realidad no son necesarios: su uso es sólo muy cómodo. Después se establecen cuatro axiomas oportunos, algunas reglas gramaticales y dos reglas deductivas. Ahora bien, interpretando cada símbolo con el concepto semántico espontáneamente correspondiente y asumiendo que la interpretación sea *clásica*, se obtiene un *modelo*. Haremos un solo ejemplo: uno de los axiomas, es “*(notX)o(YoX)*”<sup>8</sup>. Si lo interpretamos con el semántico “no” para *not*, “o también” (esto es, con valor no exclusivo) para *o*, (“*”* y “*)*”) como operadores que establecen precedencia y consideramos “*X*” e “*Y*” como

---

<sup>7</sup> Se excluyen, naturalmente, expresiones como “¡Mira tú!”, “¡uff!”, “¿por qué haces esto?” que no son, en efecto, *afirmaciones* (con un valor indiscutido de verdad) y no interesan a la Lógica.

<sup>8</sup> Para facilitar la lectura, evitaremos de utilizar caracteres especiales para los símbolos matemáticos correspondientes a “no”, “y” y “o”, utilizando simplemente los cursivos “*not*”, “*e*” (puesto que “*y*” es normalmente usada como variable) y “*o*”.



proposiciones genéricas, asumiendo que la interpretación sea clásica, obtenemos una *verdad*. De hecho, en tal caso, la proposición “ $A \vee B$ ” es verdadera cuando al menos una de las dos proposiciones  $A$  y  $B$  es verdadera, pudiendo ser también ambas verdaderas (no exclusividad); esto es, queda excluido que ambas puedan ser falsas. Ahora, el primer miembro del axioma es precisamente falso cuando  $X$  es verdadero; pero cuando  $X$  es verdadero, el segundo miembro, ( $Y \vee X$ ), es verdadero para cualquier valor de  $Y$ . Luego el axioma siempre es verdadero. Una verificación como ésta puede realizarse para cada axioma y, dado que también reconoceremos que las reglas deductivas son *correctas*<sup>9</sup>, se tiene la certeza de que se ha construido un lenguaje matemático cuya interpretación espontánea es compatible con la semántica del lenguaje natural.

Las reglas gramaticales definen las proposiciones ya sea explícitamente (por ejemplo en: “cada secuencia de letras alfabéticas que comienza con mayúsculas es una proposición”) o implícitamente (como en: “si  $A$  es una proposición, también  $\neg A$  lo es”). Las dos reglas deductivas se llaman: de la *sustitución* y *modus ponens*. La primera funciona análogamente al ejemplo visto anteriormente: afirma que en todos los axiomas se puede sustituir una letra mayúscula por una proposición cualquiera. La segunda se ilustrará más adelante.

Los demás conceptos, “y” e “implica” pueden codificarse, en el mismo Cálculo clásico de los enunciados, como simples *abreviaciones* (o *denotaciones*) de oportunas secuencias ordenadas de los símbolos introducidos; es decir, a rigor no serían ni siquiera necesarios, si bien en la práctica son muy

---

<sup>9</sup> En base al *Metateorema de corrección* que, sin embargo, discutiremos sólo en el apartado II.2.

útiles<sup>10</sup>. En concreto, “ $AeB$ ” es una abreviación de “ $\text{not}((\text{not}A)\text{o}(\text{not}B))$ ” y “ $A$  implica  $B$ ” (o bien “ $A \rightarrow B$ ”) de “ $(\text{not}A)\text{o}B$ ”.

Con la expresión *Cálculo predicativo clásico formal del primer orden* se entiende una ampliación genérica del Cálculo formal de los enunciados. En esto se introducen dos nuevos símbolos para los conceptos “existe” (típicamente “ $\exists$ ”) y “cada” (o bien “para todo”, típicamente “ $\forall$ ”), denominados *cuantificadores lógicos*<sup>11</sup>. Pero su aspecto fundamental es la introducción de las *variables* y de los *predicados*. Lo que se pretende hacer, en concreto, es formalizar expresiones como: “ $x$  es el padre de  $y$ ”. Aquí con  $x$  e  $y$  entendemos símbolos que *varían* dentro de un conjunto prefijado de objetos, llamado *universo*. La aclaración metamatemática del universo ocurre cuando se considera un modelo del Sistema. Indicamos con  $\underline{P}(x,y)$  la codificación de la expresión antedicha; tal proposición no puede ser susceptible de un valor de verdad *verdadero/falso*, porque  $x$  e  $y$  son indeterminados. La definición de interpretación clásica se debe, pues, revisar: el valor *verdadero/falso* se exigirá sólo por un subconjunto de las proposiciones, llamado de los *enunciados*, que definiremos a continuación (mientras en el Cálculo clásico de los enunciados, *proposiciones* y *enunciados* coinciden).  $\underline{P}$  se llama *predicado*; se subraya para recordar que debe ser seguido por dos variables para formar una proposición; el orden de las variables en  $\underline{P}(x,y)$  es, en general, importante. También expresiones que incluyen predicados, como por

---

<sup>10</sup> El criterio descrito, debido a Russell y Whitehead, no es el único; se puede empezar a axiomatizar dos cualesquiera de los conceptos citados y después definir los restantes por trámite de éstos.

<sup>11</sup> Análogamente, resulta que uno cualquiera de los dos cuantificadores podría eliminarse en cuanto abreviación de una proposición que contiene el otro. No obstante, en la práctica sería muy incómodo usar uno solo.

ejemplo:  $P(x,y) \rightarrow (x=y)$ , se requiere que sean proposiciones; éstas se indicarán con una mayúscula sin subrayar, seguida de variables, como  $A(x,y)$ . En general, un predicado puede tener un número finito arbitrario, mayor o igual a uno, de variables. Las reglas gramaticales se generalizan consecuentemente; por ejemplo se establece: “si  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una proposición, también  $\forall x_1 A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  lo es”; lo mismo se dispone para  $\exists$ .

Para obtener los *enunciados* se pueden sustituir las variables por determinados valores del universo (llamados *constantes*); pero éste no es el único modo. Por ejemplo, la afirmación “para cada  $x$  existe un  $y$  tal que  $x$  es el padre de  $y$ ” (esto es “cada objeto es padre de otro objeto”) es susceptible de verdad (y es *falsa* en muchos universos). Por lo tanto, si una variable va precedida por los símbolos  $\forall$  o  $\exists$ , es como si estuviese determinada por la asignación de una constante; en tal caso se dice, de hecho, *aparente*. Libre, de otra manera. En definitiva, una proposición con variables libres puede convertirse en *enunciado* sustituyendo las variables por constantes y/o haciéndolas *aparentes* mediante los cuantificadores lógicos.

Formalmente, la definición implícita tanto de los cuantificadores lógicos, como de las proposiciones con variables (y por consiguiente de los predicados), se realiza mediante reglas gramaticales oportunas, la introducción de dos nuevos axiomas, la generalización de las reglas deductivas anteriores y dos nuevas reglas deductivas. Citamos solamente el axioma:

$$\forall x A(x) \rightarrow A(a)$$

donde la generalización de la regla deductiva de sustitución permite sustituir  $A(x)$  por cualquier proposición con variable libre  $x$  (no necesariamente la única).  $A(a)$  indica el enunciado obtenido sustituyendo  $x$  por la constante “ $a$ ”. Las dos nuevas

reglas deductivas se llaman de *particularización*:

de  $B(x) \rightarrow A$  se deduce  $\exists x (B(x) \rightarrow A)$

y de *generalización*:

de  $A \rightarrow B(x)$  se deduce  $A \rightarrow \forall x B(x)$  y *viceversa*

siendo  $A$  una proposición cualquiera que no contiene  $x$  como variable libre. Esta última regla implica que cuando en un axioma o en un teorema aparecen variables libres, esta “libertad” es ficticia, en cuanto la expresión es equivalente a otra que emplea “ $\forall x_i$ ” para cada variable libre  $x_i$ . Como consecuencia, axiomas y teoremas resultan siempre *enunciados*, es decir, susceptibles de verdad (y, en particular, como sabemos, deben ser verdaderos en cada modelo, para definición de modelo).

Naturalmente, para llevar a cabo la definición de los predicados que se entienden usar en la Teoría, habrá que añadir como axiomas aquellas oportunas condiciones que los caracterizan.

Las reglas ahora citadas definen el uso de los cuantificadores lógicos en relación a las variables. Se quiere decir que después de  $\forall$  o  $\exists$  debe haberse siempre una variable, esto es, un elemento genérico del universo; tales expresiones se llaman *de primer orden*. Por esto el Cálculo predicativo descrito se denomina *de primer orden*. Para *expresiones de segundo orden*, se entienden aquellas en las cuales los cuantificadores se usan en relación a los predicados, como en “ $\forall \underline{P}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ” o “ $\exists \underline{P}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ”. Una expresión de segundo orden interpretada podría ser: “cada relación que existe entre las rectas  $r$  y  $s$ , existe también entre las rectas  $r$  y  $t$ ” o bien “existe una propiedad tal

que cada número par no la verifica”. Naturalmente, no hay límites a este tipo de complejidad<sup>12</sup>. En principio, no hay nada de extraordinario en admitir la posibilidad de proposiciones de orden sucesivo al primero para el Sistema formal; la única advertencia – que en cualquier caso vale también para el primer orden – es de no interpretar semánticamente los símbolos, pena el no respeto de la *formalidad*. Por ejemplo, si al conjunto de los axiomas de un Sistema de primer orden adjuntásemos un solo axioma que utiliza la expresión “...  $\forall \underline{P}(x_1, x_2, \dots x_n)$ ...”, convirtiéndose así el Sistema en una Teoría de segundo orden, sería incorrecto (es decir, en contraste con los principios de la axiomática formal) deducir un teorema sustituyendo  $\underline{P}(x_1, x_2, \dots x_n)$  por un cierto predicado  $\underline{Q}(x_1, x_2, \dots x_n)$ . En efecto, la secuencia “...  $\forall \underline{P}$ (...” permanece sin significado hasta que una regla o un axioma sucesivo no explique en concreto como debe operarse sintácticamente a partir de ella. Faltando esta instrucción, la sustitución de  $\underline{Q}$  por  $\underline{P}$  obedecería a una interpretación semántica del símbolo  $\forall$ , en desacuerdo con la formalidad. Todo esto, por otra parte, también vale en el Cálculo formal del primer orden: aquí, de hecho, se tiene que obedecer a un axioma preciso (aquel ante citado) para deducir a partir de proposiciones que contengan “...  $\forall x$ ...”.

De todas formas, expresiones de orden superior al primero están generalmente ausentes en las Disciplinas matemáticas comunes; de hecho, veremos que el primer orden es suficiente

---

<sup>12</sup> En el *tercer orden*, se puede cuantificar sobre los objetos del tipo  $\underline{S}(x, \underline{P}(x_1, \dots x_n))$ , llamados *super-predicados*, donde  $x, x_1, \dots x_n$  son variables y  $\underline{P}(x_1, \dots x_n)$  es un predicado. Un ejemplo semántico podría ser: “La propiedad por la que, dadas tres rectas  $r, s$  y  $t$  se tiene que cada relación que hay entre las rectas  $r$  y  $s$  la hay también entre las rectas  $r$  y  $t$ , existe siempre, si  $s$  y  $t$  son paralelas”. Naturalmente, se puede aumentar el número de orden al infinito.

para todas las exigencias expresivas respetuosas de la formalidad (consecuencia del teorema de Lindström, apartado II.16).

Repetimos que hemos descrito una ampliación genérica del Cálculo de los enunciados: un particular Cálculo predicativo clásico formal de primer orden se obtendrá definiendo por completo los predicados que utiliza; para hacer esto, en el Sistema específico se adjuntarán los axiomas que caracterizan dichos predicados, aunque éstos deben satisfacer siempre a los dos precedentes generales. Un Sistema muy básico es el *Cálculo predicativo clásico del primer orden con igualdad*, en el que se introduce la *igualdad*, como un predicado a dos variables, caracterizado por la satisfacción de algunos axiomas, de los cuales sólo citamos:  $\forall x(x=x)$ . Normalmente se acuerda, precisamente, utilizar el carácter especial “=” en vez de una mayúscula subrayada, escribiendo “ $x=y$ ”, en lugar de “ $=(x,y)$ ”. Otros ejemplos de predicados, introducidos en diversos Sistemas axiomáticos, son: paralelismo, ortogonalidad (ambas a dos variables), paridad (a una variable), relación “mayor que” (símbolo “ $>$ ”, a dos variables), etc..

Con esto terminamos nuestro análisis de la Lógica clásica. Es evidente que en el proceso de axiomatización no viene codificado todo el significado, en sentido general, de cualquiera de los conceptos semánticos discutidos, sino sólo su uso, llamémoslo técnico, en el seno de un ámbito matemático restringido. Por ejemplo, citamos la regla deductiva del *modus ponens*: «De “ $A \rightarrow B$ ” y “ $A$ ” se deduce “ $B$ ”». Aquí “y” y “se deduce” son bien diferentes de los símbolos matemáticos “e” y “ $\rightarrow$ ” anteriormente citados. De hecho éstos no tienen ahora que obedecer a los axiomas del Cálculo clásico, sino poseer aquel valor semántico insustituible que nos permite “sacar” una proposición nueva, el teorema “ $B$ ”, a partir de las dos

proposiciones “ $A \rightarrow B$ ” y “ $A$ ”. Efectivamente, hemos ya aclarado que una regla deductiva no puede carecer de carácter semántico.

Con la expresión *Sistema axiomático predicativo clásico*, o concisamente breve *Sistema clásico*, entenderemos un Sistema constituido por un particular Cálculo predicativo clásico formal del primer orden (con su fila oportuna de predicados) *más otros axiomas y reglas propias*, sobre las que *no hacemos ninguna hipótesis específica*. Este Sistema podría, por lo tanto, incorporar expresiones *de cualquier orden* entre los axiomas y/o hacer uso de las reglas deductivas más complejas, incluida la posibilidad de no respetar la formalidad: el Sistema, para deducir los teoremas, podría exigir un significado no eliminable para sus proposiciones. De hecho, más adelante descubriremos que tendremos que “hacer las cuentas” también con Sistemas clásicos no formales.

Por otra parte, casi todas las ordinarias, informales, Disciplinas matemáticas pueden ser reconducidas a Sistemas clásicos formales, dotados del traje axiomático correcto en el cual todas las afirmaciones, comprendidos los teoremas, se reducen a secuencias de símbolos sin significado explícito. Es obvio que estamos satisfechos de la mera *posibilidad lógica* de este proceso. Hacerlo en la práctica implicaría no sólo reducir en símbolos los entes propios de la Teoría (como las rectas, los planos, etc., en el caso de la Geometría) sino también, como se ha visto, añadir a sus *premisas propias* (es decir, aquellas que, en el caso de la Geometría, incluyen sólo las rectas, el paralelismo, etc.), todos los axiomas y reglas del Cálculo predicativo clásico formal del primer orden sobre el cual el Sistema se funda. Se obtendría una Teoría matemática terriblemente (e inútilmente) complicada e incomprensible, porque semánticamente accesible sólo a través de sus reglas gramaticales y deductivas. Por eso no es sensato renunciar, en

la práctica, a la “visión semántica” espontánea de entes, propiedades, conectores y cuantificadores en ninguna Disciplina matemática bastante avanzada; aunque éstos, en la sistematización axiomática formal de la Teoría, semánticos no son.

## I.7. Consistencia y completitud sintáctica

Para introducir algunas propiedades fundamentales para el Sistema axiomático, nos serviremos del mismo Sistema axiomático definido en el tercer apartado. Esto es:

[símbolos]  $0 \ 1 \ x = +$

[regla gramatical] *una proposición se constituye única y exclusivamente con cualquier secuencia ordenada de símbolos tales que:*

- a) *Debe encontrarse uno y sólo un símbolo “=”.*
- b) *Los símbolos “+” y “=” deben estar siempre precedidos y seguidos por otro símbolo distinto a “+” o “=”.*

[axiomas]  $x=x \quad x+0=x$

[regla de deducción] *un teorema se obtiene única y exclusivamente sustituyendo en un axioma el símbolo “x”, dondequiera que aparezca, por una misma secuencia ordenada arbitraria de los símbolos “0” y “1”.*

Para este Sistema matemático, definimos (en un modo de intento *no clásico* para una cuestión de generalidad) la *negación* (o *negado*) de un teorema: la proposición obtenida cambiando su



símbolo inicial: si es “1” se sustituirá por “0” y si es “0” por “1”. Las negaciones de los teoremas “ $01=01$ ” y “ $100+0=100$ ”, son entonces: “ $11=01$ ” y “ $000+0=100$ ”.

Puesto que cada teorema comienza con “0” o “1”, existe una única negación para cada teorema. Para los axiomas, en cambio, (que, recordamos, no son teoremas) la negación no está definida. Pero esta circunstancia (no clásica, como reconoceremos), no debe infundir sospechas: no es que una consecuencia de la sencillez de nuestro ejemplo.

Un Sistema matemático se dice *consistente* respecto a la relación de negación introducida, si la negación de cada teorema no es un teorema. Para nuestro Sistema, concluiremos muy fácilmente la consistencia respecto a la negación introducida. La metademostración de tal metateorema puede ser la siguiente. Considérese un teorema arbitrario; bien si éste se deduce del primer o del segundo axioma, tendrá los símbolos iniciales de ambos miembros (esto es, de cada parte a la derecha e izquierda de “=”) iguales. Por lo tanto, su negación los tendrá diversos y, por ello, no podrá ser un teorema.

La coexistencia de una proposición y su negado como teoremas, se define *contradicción*. Luego *consistencia* significa ausencia de contradicciones.

Por lo visto, la consistencia es una propiedad sintáctica que depende de la definición de negación; desde este punto de vista, claramente, no puede tener ningún carácter “positivo” o “conveniente”. En el próximo apartado, en cambio, veremos los efectos indeseables, desde un punto de vista epistemológico, que produce la *inconsistencia* en una Teoría axiomatizada según la Lógica clásica.

Diremos que un enunciado es *indecidable* si ni éste ni su negado son teoremas. Un Sistema en el que no existen enunciados *indecidibles* se dice *sintácticamente completo* o, brevemente,

*completo*.

Resumiendo: en un Sistema *completo*, para cada enunciado, éste o su negado es un teorema. No olvidemos que estas definiciones, para ser sensatas, deben concernir sólo a los *enunciados*, es decir, las proposiciones susceptibles de verdad; en efecto, si una proposición no es susceptible de verdad, ni ésta ni la negada podrán jamás ser teoremas: ¡entonces, cada Sistema que pueda formular proposiciones con variables libres sería incompleto!

Nuestro Sistema axiomático tiene infinitos enunciados indecidibles y, por lo tanto, no es completo. Por ejemplo no se pueden decidir “ $001+01+10=0+101$ ” ni “ $1011=0010$ ”. El primero, en efecto, contiene tres símbolos “+” y por consiguiente no puede ser un teorema; lo mismo vale para su negado. El segundo no es un teorema, ni lo es su negado “por culpa” del último símbolo.

¿Por qué estas definiciones? Saber si un Sistema matemático es completo o no es muy importante en fines prácticos. Normalmente, con el objetivo de aumentar el conjunto de los teoremas, las Teorías matemáticas evolucionan introduciendo nuevos axiomas; si la Teoría es completa y se desea su consistencia, este proceso resultaría del todo inútil, en la mejor de las hipótesis. De hecho, en un Sistema completo cada enunciado que no es un teorema es el negado de un teorema; por lo tanto, si la adición de un nuevo axioma aumentase realmente el conjunto de los teoremas, se formaría un Sistema inconsistente, en el caso de que originariamente fuese consistente. Por lo tanto, si se quiere conservar la consistencia, el axioma añadido debe de ser estéril, es decir inútil. Además, un Sistema completo posee otras agradables propiedades epistemológicas que revelaremos más adelante.

Por otra parte, en un Sistema incompleto, axiomatizado según

la Lógica clásica, sabemos como hacer para ampliar sin peligro de inconsistencia el conjunto de los teoremas: añadir un enunciado *indecidable* (o su negado) como axioma. Lo justificaremos pronto.

## I.8. Las implicaciones de la Lógica clásica

A continuación nos concentraremos en el estudio de las propiedades de los Sistemas clásicos. En particular estamos interesados en la búsqueda de modelos clásicos (además correctos) para el Sistema; por brevedad, cuando en el futuro digamos *modelo* nos referiremos siempre a un *modelo clásico*. Por ello es fundamental comprender las consecuencias más trascendentes de la Lógica clásica.

Por regla común, esta Lógica se considera la más sencilla y espontánea para un lenguaje como el matemático. Sin embargo, no se puede negar que, al menos en parte, esto se deba a la costumbre, al hecho de que ésta haya estado siempre y esté todavía tácitamente supuesta en toda ordinaria Disciplina matemática: las Teorías basadas en lógicas alternativas permanecen insólitas. Para empezar, mostraremos como no todas las consecuencias de los axiomas y reglas del Cálculo lógico clásico sean semánticamente tan “indiscutibles”.

La cuestión puede ilustrarse bien observando la formalización de “*A implica B*” (desde ahora siempre “ $A \rightarrow B$ ”), que, como hemos dicho, se define como abreviación de “*(not A) o B*”. Vemos las razones que, en base a la Lógica clásica, conducen a esta posición.

Consideremos la afirmación (C) “Si hay gatos (*A*), no hay ratones (*B*)”; ¿cuando será *C* verdadera o falsa en Lógica clásica? Dos casos son obvios: 1) si *A* es verdadera y *B* es

verdadera, entonces  $C$  es verdadera; 2) si  $A$  es verdadera y  $B$  es falsa, entonces  $C$  es falsa. Quedan otros dos casos, en los que  $A$  es falsa y  $B$  puede ser verdadera o falsa. Pero si no hay gatos, la frase  $C$ , y propio desde un punto de vista semántico, no hace alguna imposición: no dice nada acerca de la presencia o ausencia de ratones. Asignar necesariamente un valor de verdad a los dos casos restantes es, por lo tanto, indudablemente forzado, pero es lo que se debe hacer en Lógica clásica por su misma definición. Se podría considerar que, en el fondo, estamos totalmente libres de asignar estos dos valores respetando el valor semántico “implica”; pero el peligro es que “ $\rightarrow$ ” pueda coincidir con otros conceptos diferentes que también queremos usar. Comenzamos por asignarle a  $C$  “falso” en ambos casos (véase la siguiente tabla); esto comporta que “ $\rightarrow$ ” sea idéntico a “ $e$ ”. De hecho  $C$  resultaría verdadera si y sólo si, tanto  $A$  como  $B$  son verdaderas; entonces “si hay gatos no hay ratones” sería equivalente a “hay gatos y no hay ratones”. No va bien.

$A$	$B$	$C$ (prueba de $A \rightarrow B$ )	$C$ (prueba de $A \rightarrow B$ )	$C$ (prueba de $A \rightarrow B$ )	$C$ (prueba de $A \rightarrow B$ )
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V
		“ $\rightarrow$ ” idéntico a “ $e$ ”	“ $\rightarrow$ ” idéntico a “ $\leftrightarrow$ ”	“ $A \rightarrow B$ ” idéntico a “ $B$ ”	ok

### Axiomatización de $A \rightarrow B$ en Lógica clásica

Probemos a asignar a los dos casos, ordenados según la tabla, respectivamente el valor falso y verdadero. Resultaría que si fuese verdadero que “si hay gatos no hay ratones”,

entonces necesariamente habría ratones dondequiera no haya gatos. Pero (por suerte) con independencia de la verdad de  $C$  (que exagera un poco las capacidades felinas), existen otros métodos de desratización. En efecto, se ha plasmado “ $\rightarrow$ ” como idéntico a “implica y co-implica” (o bien “si y sólo si”), cuya notación, “ $A \leftrightarrow B$ ”, se puede introducir formalmente como abreviación de “ $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ ”. Finalmente, asignando a los dos casos, respectivamente, verdadero y falso, se daría a “ $A \rightarrow B$ ” el mismo valor de verdad de  $B$ . Esto es, “si hay gatos no hay ratones” equivaldría a “no hay ratones”.

He aquí porque, por exclusión, se asume la última posibilidad; en esa, “ $A \rightarrow B$ ” se verifica siempre cuando  $A$  es falsa (esto es, si no hay gatos) y “ $A \rightarrow B$ ” equivale a “ $(\text{not}A) \vee B$ ”, como se anticipaba. Consecuentemente sucede que, si  $A$  es un enunciado falso y  $B$  un enunciado cualquiera, ¡“ $A \rightarrow B$ ” siempre es verdadero! El forzamiento es bastante evidente pero es indudable que, por lo visto, ésta es la solución que mejor respeta el término semántico “implica”.

Veamos ahora las dramáticas repercusiones de esto sobre la cuestión de la inconsistencia. Por supuesto, en Lógica clásica, la negación de una proposición se define mediante el símbolo “not” del Cálculo clásico del que se ha hablado en el apartado I.6. Supongamos que en el Sistema clásico arbitrario  $S$  exista una contradicción: sea “ $A$ ” un enunciado tal que tanto “ $A$ ” como “not $A$ ” son teoremas de  $S$ . Entonces, si  $M$  es un modelo correcto cualquiera de  $S$ , las interpretaciones tanto de “ $A$ ” como de “not $A$ ” serían verdaderas en  $M$ . Pero, por las características de “not”, la interpretación de “not $A$ ” es la negación semántica de la interpretación de “ $A$ ”: por lo tanto, resulta violado el principio de no contradicción:  $M$  no puede ser un modelo clásico.

La primera conclusión que evidenciamos para los Sistemas clásicos es, por consiguiente, que la existencia de un modelo

correcto implica la consistencia. En segundo lugar nos preguntaríamos si es posible “corregir” el Sistema en caso de inconsistencia: si la inconsistencia se debe sólo a “ $A$ ” o a otros pocos enunciados, se podría pensar en “ajustar” las cosas o incluso en tolerar alguna contradicción. Por ejemplo, en el lenguaje ordinario la proposición “esta afirmación es falsa” es contradictoria, como el lector podrá reconocer: no se le puede asignar un valor verdadero/falso respetando ambos principios de toda interpretación clásica. Pero se trata de una excepción muy rara y peculiar. Y, normalmente, la gente no se abstiene de hablar para no incurrir en otras paradojas<sup>13</sup>.

Sin embargo, a causa de la peculiaridad de *implica*, en ámbito matemático es absolutamente diferente. En efecto, si el Sistema demuestra un enunciado falso “ $F$ ”, puesto que, como hemos visto, “ $F \rightarrow B$ ” es verdadero sea cual sea el enunciado “ $B$ ”, se puede aplicar la regla del *modus ponens*: «de “ $F$ ” y “ $F \rightarrow B$ ” se deduce “ $B$ ”», obteniendo “ $B$ ” como teorema<sup>14</sup>. Por lo tanto,

---

<sup>13</sup> En este libro utilizaremos el término *paradoja* para indicar una afirmación contradictoria, absurda desde el punto de vista metamatemático (y, por lo tanto que se debe evitar). Algunos convienen en llamar *antinomias* las absurdidades realmente irresolubles y *paradojas* aquellas evitables. Aunque, sin duda, esto es más refinado, no hay necesidad de asignar un nombre especial a las afirmaciones que parecen absurdas pero no lo son. Por lo tanto, hablaremos sólo de las primeras, llamándolas, sin embargo, con el nombre históricamente más usado: precisamente *paradojas*. Retornaremos sobre ellas en el apartado II.13.

<sup>14</sup> Hemos utilizado el concepto de verdad para simplificar bastante la demostración; en realidad “ $B$ ” se debería deducir de modo puramente formal. Aquí la demostración correcta en el Cálculo clásico de Russell-Whitehead. Supongamos que “ $A$ ” y “ $notA$ ” sean teoremas. Del axioma ““(notX)o(YoX)””, rescrito como “ $X \rightarrow \neg(YoX)$ ”, mediante la regla deductiva de *sustitución* se deduce el teorema ““(notA)  $\rightarrow$   $\neg(Bo(notA))$ ”, donde “ $B$ ” es un enunciado cualquiera. Por *modus ponens* deducimos entonces el teorema

¡cada enunciado es un teorema! He aquí la consecuencia sintáctica radical de la inconsistencia clásica. Así, por ejemplo, “ $2+2=5$ ” implica sintácticamente cualquier enunciado, como: “ $7=7$ ”, “ $7=113$ ”, “todos los números naturales son impares”, “no todos los números naturales son impares”, etc.. En cada Teoría matemática clásica donde se haya descubierto una sola contradicción, se puede demostrar todo y el contrario de todo: cualquier otro enunciado es contradictorio. No es simplemente que la Teoría no admita algún modelo correcto: ¡es que *ningún enunciado de la Teoría puede interpretarse de modo clásico!* Realmente, semejante Teoría clásica no tendría ninguna utilidad, sea formal o no.

Como hemos señalado, se han propuesto otros tipos de Lógica para obviar a este radicalismo de la Lógica clásica: con tres valores de verdad (verdadero, posible, falso), con la imposición de un método efectivo para concluir la verdad/falsedad (Lógica intuicionista) o revisando la definición misma de los conectores lógicos (Lógica lineal). Aún se consideran alternativas insólitas, pero es posible que esto cambie en un futuro.

Desde un punto de vista sintáctico, por otra parte, no hay razones para considerar en algún sentido irregular un Sistema clásico inconsistente. Si la gramática y la deducción de los teoremas respetan las reglas establecidas, no puede haber ningún otro defecto estructural en el Sistema; y de hecho, la eventual desagradable sorpresa de descubrir que la Teoría es inconsistente, no invalidaría la corrección de las deducciones hechas hasta ahora (¡dado que todos los enunciados son

---

“*Bo(notA)*”. Ahora el axioma “ $(XoY) \rightarrow \neg(YoX)$ ”, permite de deducir, por trámite de *sustitución* y *modus ponens*, el teorema “ $(notA)oB$ ” que es la abreviación de “ $A \rightarrow B$ ”. Por último, de nuevo *modus ponens* para deducir el teorema “*B*” a partir del teorema “*A*”.

teoremas!), aunque revelaría que hemos perdido totalmente nuestro tiempo desde el punto de vista epistemológico. En este sentido, la misma deducción de la contradicción, también correcta, ¿no sería desde luego inútil! La única posibilidad de error lógico podría surgir cuando una regla de deducción suponga la consistencia para generar algunos teoremas. Mencionar la consistencia (o la inconsistencia) del Sistema en una regla deductiva obedecería a un criterio circular: la consistencia, que depende de las reglas deductivas, ¿dependería a su vez de la consistencia! Aunque, como veremos más adelante (apartado II.13), la circularidad no implica necesariamente absurdidad en metamatemática, en un caso similar se necesitaría un argumento metamatemático previo que descarte la posibilidad de incurrir en paradojas. De todas formas, el caso es anómalo (nunca utilizado en las Disciplinas comunes). Excluyendo, pues, este caso peculiar, podemos afirmar que la inconsistencia no representa nunca un error lógico-sintáctico. Luego, que tal Teoría sea absolutamente inútil es un hecho indudable, pero de naturaleza distinta, que sólo concierne al aspecto semántico: precisamente el hecho de que los enunciados no pueden interpretarse sensatamente.

El reconocimiento de la existencia de incluso un único, arbitrario, enunciado no demostrable, es decir que no puede ser un teorema, es suficiente para poder atestiguar la consistencia de un Sistema clásico; puesto que esta condición también es necesaria para la consistencia, en definitiva es equivalente a ella. Por ejemplo, cada Sistema clásico incompleto es ciertamente consistente, porque un enunciado indecidible supone dos enunciados que no son teoremas: éste y el negado. En otros términos, un Sistema inconsistente siempre es completo.

Otra propiedad “extraña” de todo Sistema clásico es que, si  $T$  es un teorema, entonces “ $Y \rightarrow T$ ” es un teorema, cualquiera que



sea el enunciado “ $Y$ ”. Esto procede del axioma “ $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$ ” o bien “ $X \rightarrow (\text{not } Y \rightarrow X)$ ”, para cada pareja de enunciados “ $X$ ” e “ $Y$ ”. Dado que “ $Y$ ” es arbitrario, es lo mismo escribir el axioma como “ $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$ ”. Ahora, si “ $X$ ” es un teorema, “ $Y \rightarrow X$ ” se concluye por *modus ponens*.

Un teorema clásico que parecerá bastante obvio (pero cuya demostración no es nada breve, en el Sistema de Russell-Whitehead) es “ $A \rightarrow A$ ”, válido para cualquier enunciado “ $A$ ”. De aquí sigue la propiedad fundamental que, en cada Sistema clásico, cada axioma también es teorema: es suficiente aplicar el *modus ponens* a partir del axioma “ $A$ ”.

El metateorema de deducción, válido para los Sistemas clásicos, aunque en principio no necesario, es muy útil para simplificar demostraciones de otro modo larguísimas. Afirma que demostrar una implicación como “ $A \rightarrow B$ ” es equivalente a demostrar “ $B$ ” en el Sistema que se obtiene añadiendo al Sistema inicial el axioma “ $A$ ”. En efecto en cada Teoría clásica, cuando se intenta demostrar una tesis, las hipótesis se tratan exactamente como si fuesen axiomas. Daremos sólo una justificación intuitiva del metateorema, puesto que su metademostración (que el lector puede encontrar en un libro ordinario de Lógica) no es tan breve. Para empezar, si “ $A \rightarrow B$ ” es un teorema, es trivial que un Sistema que posee “ $A$ ” como axioma tenga también “ $B$ ” como teorema: sigue de *modus ponens*. Viceversa, sea  $S'$  el Sistema obtenido de  $S$  añadiendo el axioma “ $A$ ” y supongamos que en  $S'$ , “ $B$ ” sea un teorema; la tesis es que “ $A \rightarrow B$ ” es un teorema del Sistema  $S$ . Si “ $B$ ” es un teorema de  $S$ , cada enunciado de  $S$  implica “ $B$ ” y por lo tanto, también “ $A \rightarrow B$ ” es un teorema de  $S$ . Si “ $B$ ” no es un teorema de  $S$ , entonces en  $S'$ , “ $B$ ” puede derivar sólo gracias al axioma “ $A$ ”. Esto sugiere, justamente, que “ $A \rightarrow B$ ” sea teorema de  $S$  (como realmente concluye la metademostración correcta).

## I.9. Sistemas clásicos *bien definidos*

Discutamos ahora las implicaciones de la *buena definición* sobre las *premisas* de un Sistema clásico cualquiera. El punto de partida es la suposición que cualquier Cálculo predicativo clásico formal del primer orden sea *bien definido*; este hecho debe aceptarse como intuitivo o, si se prefiere, por convención. En rigor, por ejemplo, ¿no es incuestionable que el *modus ponens* sea una regla deductiva clara y sin ambigüedad! Sin embargo nos parece oportuno profundizar más tarde este argumento (apartado II.13). Continuamos con mostrar que si un Sistema clásico cualquiera es *bien definido*, entonces el conjunto de sus axiomas es *distinguible*. Por absurdo, sea  $E$  un enunciado que ningún razonamiento metamatemático puede concluir ni excluir que sea un axioma. Consideremos entonces el siguiente razonamiento: “del axioma  $E$  y del teorema  $E \rightarrow E$  se deduce que  $E$  es un teorema”; éste utiliza correctamente el *modus ponens* y, como se ha visto, no se engaña afirmando que  $E \rightarrow E$  es un teorema. Por lo tanto, resulta incorrecto si y sólo si  $E$  no es un axioma; pero, dado que no es posible concluir o excluir esta última cosa, tampoco es posible concluir o desmentir su corrección, o sea si es o no es una demostración de  $E$ . Pero esto es absurdo: viola la *distinguibilidad* de las demostraciones incluida en la hipótesis de *buena definición* del Sistema.

Recordemos que un Sistema clásico posee, en general, premisas propias que se suman a las del Cálculo predicativo clásico formal del primer orden sobre el cual se basa. Como caso particular (muy importante, como veremos), hay aquello en lo que el Sistema no añade ninguna regla nueva, ni gramatical ni deductiva, sino sólo axiomas propios. Metademostramos que, en este caso, la *distinguibilidad* de los axiomas también es

suficiente para concluir la *buena definición* del Sistema. Usaremos el hecho de que cualquier demostración de un teorema siempre se puede extender de modo que al final haga referencia solamente a axiomas, reglas deductivas y al enunciado demostrado (esto es, el teorema final). Queremos decir que si una demostración, para deducir el teorema  $T$ , involucra cierto otro teorema  $S$ , siempre se puede desarrollar incluyendo la demostración de  $S$ . Haciéndolo con todos los teoremas citados, se obtendrá así una demostración (quizás larguísima) que sólo menciona axiomas y reglas deductivas, además de la conclusión. De no ser así, entonces tales deducciones no derivarían únicamente de los axiomas y de las reglas, como debe ser en cada Sistema axiomático. Una demostración de tal forma la llamaremos brevemente *extensa*; para simplificar nuestra metademostración estableceremos, pues, de considerar como legítimas sólo a las demostraciones *extensas* (esta convención, claramente, descartará deducciones consideradas normalmente como cabalmente correctas pero, como hemos aclarado, no perderá realmente ninguna).

Empecemos con el observar que, ya que el conjunto de los enunciados permanece aquel definido por el Cálculo predicativo clásico formal de primer orden, éste es *distinguible* por la hipótesis de *buena definición* de éste último. De esta misma hipótesis sigue también que es posible distinguir cada razonamiento que hace un uso correcto de las cuatro reglas deductivas clásicas. Entonces, todos aquellos que no entran en esta categoría pueden excluirse de ser demostraciones. Consideremos, luego, un arbitrario razonamiento de la antedicha categoría que deduce un cierto enunciado  $C$ , mencionando un número finito de enunciados  $E_1, E_2, \dots, E_n$ . Por nuestra convención de limitarnos a las demostraciones *extensas*,  $C$  será efectivamente un teorema, o bien el razonamiento una

demostración, si y sólo si todos los enunciados  $E_1, E_2, \dots, E_n$  son axiomas de la Teoría. Por lo tanto, siendo los axiomas *distinguibles*, también podremos siempre distinguir si este razonamiento es una demostración, lo que implica la *distinguibilidad* de las demostraciones. Por último, cada teorema tiene al menos una demostración. De hecho, cada teorema debe derivar, por definición, por los axiomas y reglas deductivas; siendo los primeros *distinguibles*, son las segundas que, razonando por absurdo, no serían traducibles sin malentendidos en el lenguaje de las demostraciones. Pero esto viola la hipótesis de *buena definición* para el Cálculo predicativo clásico formal del primer orden sobre que el Sistema se asienta. Esto completa la metademostración que el Sistema está *bien definido*.

En general, sin embargo, el hecho de que los axiomas de un Sistema clásico sean *distinguibles*, no es suficiente para garantizar su *buena definición*: nada prohíbe que las reglas propias del Sistema posean cierto grado de ambigüedad que lo impida. Más adelante veremos un ejemplo no trivial de este caso.

## **I.10. Demostraciones por absurdo**

El moderno asentamiento axiomático de los Sistemas matemáticos clásicos exige una revisión, importante desde el punto de vista lógico, de las famosas “demostraciones por absurdo” o “indirectas”. En la escuela primaria (donde, por supuesto, no se adopta la axiomática formal) éstas se introducen aproximadamente así: «queriendo demostrar el enunciado “ $A$ ”, se suponga la verdad de “ $notA$ ”. A partir del Sistema que se obtiene añadiendo “ $notA$ ” a los axiomas, se deduce una contradicción: o bien “ $A$ ”, o la negación de un teorema; por eso “ $notA$ ” no puede ser verdadero, entonces será

falso y “ $A$ ” verdadero». No han faltado críticas, en el pasado, a esta técnica demostrativa. Los “acusadores” sostenían que obedecía a un criterio deductivo realmente nuevo (a una regla nueva, diríamos ahora), inicialmente no admitido. Los “defensores” pensaban que no. Otros, en una posición intermedia, mantenían que las demostraciones directas, cuando existían, eran “preferibles” a las indirectas. En la ambigüedad de un Sistema no axiomatizado, la disputa no puede resolverse concluyentemente.

Examinando superficialmente el razonamiento con la óptica de la axiomática formal, se diría que utiliza el concepto de verdad y presupone que el Sistema sea consistente (cuando descarta la situación “absurda” de una contradicción). Si fuese así, éste obedecería realmente a un criterio deductivo nuevo y además peligroso, por lo que se ha observado en el apartado I.8. Por suerte, no es verdaderamente así. Desde un punto de vista meramente sintáctico, en efecto, en base al metateorema de deducción, lo que en una demostración “por absurdo” se hace, es deducir el teorema “ $A$ ” a partir del teorema “ $(notA) \rightarrow A$ ” o bien del teorema “ $(notA) \rightarrow (notT)$ ”, siendo “ $T$ ” un teorema cualquiera. Y bien, esto es legítimo en base a las reglas deductivas clásicas; es decir, no obedece a ninguna regla deductiva nueva.

Presentaremos, por amor de completitud, la entera deducción correcta, avisando al lector que puede saltarla tranquilamente sin ningún tipo de problema para los argumentos futuros. Utilizaremos el axioma: “ $(X \rightarrow Y) \rightarrow ((ZoX) \rightarrow (ZoY))$ ” y el teorema “ $(not(notX)) \rightarrow X$ ”<sup>15</sup>, válido para cada enunciado “ $X$ ”, cuya demostración es bastante

---

<sup>15</sup> En realidad se tiene la equivalencia “ $(not(notX)) \leftrightarrow X$ ”, en armonía con el concepto semántico que dos negaciones son equivalentes a afirmar. Pero a nosotros sólo nos interesa un sentido.

larga en el Cálculo clásico de Russell-Whitehead.

Se quiere, pues, obtener como teorema “ $A$ ”, a partir del teorema “ $(notA) \rightarrow A$ ” (primer caso) o bien del teorema “ $(notA) \rightarrow (notT)$ ”, donde “ $T$ ” es un teorema cualquiera (segundo caso). En el primer caso, utilizando el axioma anterior, con “ $not(notA)$ ” en lugar de “ $X$ ” y “ $A$ ” substituido tanto a “ $Y$ ” como a “ $Z$ ”, se obtiene:

$$(not(notA) \rightarrow A) \rightarrow ((Ao(not(notA))) \rightarrow (AoA))$$

Ya que el primer término un teorema, por *modus ponens* obtenemos como teorema “ $(Ao(not(notA))) \rightarrow (AoA)$ ”. Ahora, el teorema de premisa es una abreviación de “ $(not(notA))oA$ ”. Utilizando el axioma “ $(XoY) \rightarrow (YoX)$ ” y de nuevo *modus ponens*, deducimos el teorema “ $Ao(not(notA))$ ”. Luego, aplicando otra vez *modus ponens* obtenemos el teorema “ $AoA$ ”. Por fin el axioma “ $(AoA) \rightarrow A$ ”, permite deducir el teorema “ $A$ ” por *modus ponens*. En el segundo caso, el teorema de premisa es una abreviación de “ $(not(notA))o(notT)$ ”, de la que puede obtenerse, en el modo visto, también el teorema “ $(notT)o(not(notA))$ ”, o sea “ $T \rightarrow (not(notA))$ ”. Mediante *modus ponens* se obtiene, por lo tanto, el teorema “ $not(notA)$ ”. Finalmente, utilizamos el teorema “ $not(notA) \rightarrow A$ ” para deducir “ $A$ ” con *modus ponens*.

He aquí quitado todo lo arcano<sup>16</sup> en este tipo de demostraciones, llamadas y realizadas habitualmente de forma incorrecta desde el punto de vista de la axiomática formal. Éstas, en el riguroso asentamiento axiomático, no tienen ningún carácter peculiar o “indirecto” (¡qué sólo existen demostraciones “directas”!): no utilizan el concepto de verdad, no presuponen la

---

<sup>16</sup> He leído en la *Web*: “en edad escolar, tuve dos choques: como se hacen los niños y las demostraciones por absurdo”.

consistencia y no responden a criterios deductivos nuevos. No obstante, hemos aclarado que el método tradicional, aunque irregular en la forma, conduce a deducciones legítimas.

En un ámbito metamatemático, sin embargo, las tradicionales demostraciones por absurdo no precisan ningún tipo de corrección. Como se ha visto, en Lógica clásica se asumen el principio de no contradicción y del tercer excluido para cualquier interpretación de las proposiciones de un Sistema axiomático. Parece entonces del todo oportuno que estos principios se extiendan al resto de la metamatemática y, por lo tanto, al lenguaje de una metademostración. Por otra parte, incluso desde el punto de vista del “saber común” estos principios parecen del todo naturales, aun con los defectos indicados en el octavo apartado. Y bien, las tradicionales demostraciones por absurdo obedecen a estos dos principios, como se reconoce inmediatamente. Se puede pues afirmar que, en una metademostración por absurdo, a diferencia de una demostración “por absurdo”, se utiliza realmente la técnica de descartar una contradicción semántica (como, por ejemplo, contradecir una suposición hecha); lo que significa, ahora sí, suponer consistencia en los razonamientos de la metamatemática.

Resumiendo, la técnica demostrativa tradicional por absurdo funciona tanto en ámbito metamatemático como matemático, con la puntualización de que en el segundo caso ésta debería (y en todo caso puede) ser correcta formalmente, sin utilizar el concepto de verdad u otras hipótesis que limitan la generalidad del Sistema.

Terminamos el apartado reconociendo que, como se había anunciado, la adición de un enunciado *indecidible* o de su negado como nuevo axioma del Sistema, no altera la consistencia. Sea  $S$  un Sistema en el que el enunciado “ $A$ ” es

*indecidable*;  $S$ , poseyendo enunciados indemostrables es por lo tanto consistente. Sea  $S'$  el Sistema que añade el axioma  $notA$  a los axiomas de  $S$ ; lo indicaremos sintéticamente con  $S+notA$ . Si, por absurdo (semántico) fuese inconsistente podría deducirse de éste lo que se desee, por ejemplo " $A$ ". Para el metateorema de deducción, entonces, en  $S$  puede deducirse " $notA \rightarrow A$ ". Lo que muestra que " $A$ " puede ser deducido "por absurdo" (sintáctico) en  $S$ , contra la hipótesis inicial. La misma metademostración puede aplicarse al Sistema  $S+A$ , llamémoslo  $S''$ . Vale también el inverso de este metateorema: sean  $S'$  y  $S''$ , definidos como antes, ambos consistentes; entonces " $A$ " tendrá que ser *indecidable* en  $S$  (que también será consistente). Por absurdo (semántico), supongamos, por ejemplo, que " $A$ " sea un teorema de  $S$ ; entonces lo será también para  $S'$ , que contiene todos sus axiomas. Sin embargo,  $S'$  puede deducir también " $notA$ ", dado que cada axioma es también teorema, y por lo tanto es inconsistente contra las hipótesis hechas. Análogamente se prueba que " $notA$ " no puede ser un teorema de  $S$ ; luego " $A$ " es *indecidable*.

## I.11. Frutos básicos del método axiomático

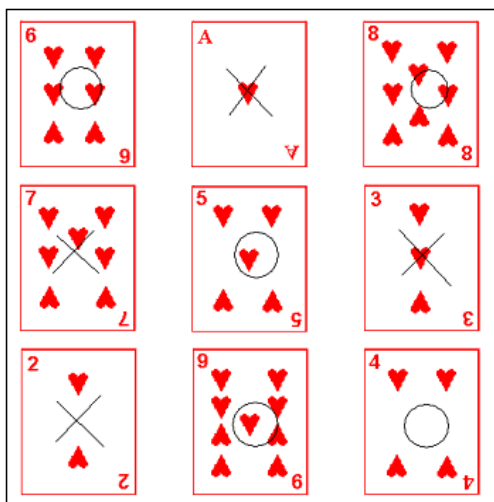
En este apartado ilustraremos algunos resultados del método axiomático formal, entre los cuales ciertos históricamente bastante importantes. Para mostrar la utilidad del uso de diversos modelos correctos de una misma Teoría matemática, consideramos el siguiente juego para dos jugadores<sup>17</sup>: dispuestas sobre la mesa las cartas descubiertas del as al nueve de un mismo palo, cada jugador, en su turno, elige una carta y la añade a su

---

<sup>17</sup> Este ejemplo procede de H. De Long: *Problemi non risolti dell'aritmetica*.



grupo inicialmente vacío. Gana el primer jugador que posea en el propio grupo tres cartas (ni más ni menos) cuya suma es 15. Se puede evitar estudiar las mejores estrategias y hacer sumas, reconociendo que hay un modelo más simple del mismo juego: el popular *tres en raya*. Para convencerse de ello, basta con un rápido vistazo a la siguiente figura.



El “teorema”, conocido probablemente por todos, que siempre se puede empatar si se sabe jugar bien (del que se convence fácilmente apurando todos los casos posibles), puede evidentemente transferirse al modelo con las cartas (cuyos casos posibles serían muchos más); y las mismas estrategias para hacerlo son las correspondientes establecidas por el cuadro. Los dos juegos encarnan dos modelos de un único Sistema axiomático

formal (del cual, por otra parte, una definición rigurosamente formal sería mucho más compleja que la descripción ofrecida por los dos modelos).

En Lógica no es infrecuente el caso en el que un modelo correcto de algún Sistema axiomático se construye mediante el modelo correcto de otro Sistema axiomático. Entre los objetivos, hay lo de indagar algunas características del primer Sistema. Un ejemplo históricamente muy importante de esta técnica, que sin duda aceleró los esfuerzos para una sistematización lógica de las Matemáticas, se tiene a propósito de las Geometrías no euclidianas; esto es, las que asumen como axioma una de las posibles negaciones del  $V$  postulado de Euclides (en adelante  $VP$ ). Éste afirma: “dada una recta  $r$  y un punto  $P$  externo a ésta, existe una y una sola recta que pasa por  $P$  y es paralela a  $r$ ”<sup>18</sup>. No pocos han sido los matemáticos que, desde la antigüedad, han tentado demostrar el enunciado, el cual no parecía poseer el indiscutible carácter definitorio de los primeros cuatro postulados. Después de una tentativa de demostración por parte de G. Saccheri en 1733 (equivocada, pero que de hecho delineó las bases para el desarrollo de la Geometría no euclidiana), a mitad del siglo XIX diferentes matemáticos, entre los cuales Gauss, se convencieron de la indemostrabilidad de  $VP$ ; algunos de éstos, como Riemann y Lobachevskij, desarrollaron en concreto Geometrías no euclidianas. ¿Pero qué hay acerca de su consistencia? Y tal pregunta suscitaba otra más inquietante: ¿estamos seguros, ante todo, de que la Geometría euclidiana (en adelante  $GE$ ), donde  $VP$  es admitido como axioma, sea consistente?

De esta manera las Geometrías no euclidianas provocaron

---

<sup>18</sup> Playfair demostró que esta proposición, más simple que la original (que omitimos) es equivalente a ella.

una discusión crítica que, más allá del problema específico de su consistencia, concernía los fundamentos de cada Teoría matemática. Nadie ponía seriamente en discusión la consistencia de la “vieja” *GE*; pero la pregunta era: ¿qué tipo de razonamiento, admitiendo que exista, podría concluir (o confutar) esta consistencia? ¿Y qué decir del mismo problema para las otras Disciplinas matemáticas? Las desconcertantes respuestas (parciales) a tales preguntas debían aguardar algún decenio.

Entre tanto, tres ejemplos no euclidianos, el primero de E. Beltrami y de validez no general, los otros dos debidos a F. Klein y H. Poincarè, con la deseada generalidad, implicaban que *VP* era *indecidable* si la *GE* era consistente. Describimos en líneas generales la interpretación de Poincarè (en adelante *IP*).

En referencia a la circunferencia euclidiana  $c$  de la figura 1.1 [véase la página siguiente], se considere la siguiente correspondencia:

PUNTO	punto interno a $c$
RECTA	arco de círculo interno a $c$ y ortogonal a $c$ (o diámetro de $c$ ).

El lector se habrá enterado de que estamos usando el carácter minúsculo para los términos que se interpretan en sentido usual, esto es euclidiano, y el mayúsculo para la nueva interpretación. La DISTANCIA entre dos PUNTOS se define de un modo especial utilizando la función logarítmica; sin necesidad de profundizar más, observaremos sólo que, con tal definición, la DISTANCIA entre dos PUNTOS, uno de los

cuales tiende a la circunferencia  $c$ , tiende al infinito. Por lo tanto, también en  $IP$  las RECTAS son de longitud infinita.

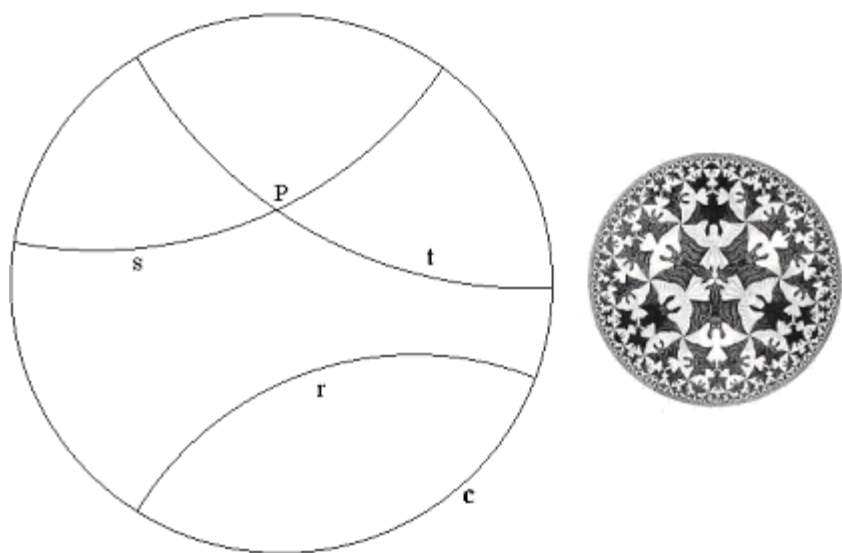


Figura 1.1. Modelo hiperbólico de Poincaré

El diseño de Escher, a la derecha, visualiza las deformaciones que sufre una figura aproximándose a la circunferencia (en el plano euclidiano todos los murciélagos o palomas tendrían la misma grandeza).

La interpretación  $IP$  se construye, pues, mediante el modelo euclidiano de  $GE$ . Si se supone que este modelo existe y es correcto (del que también sigue que  $GE$  es consistente), siendo todos los teoremas de  $GE$  verdaderos en el modelo euclidiano, resulta que en  $IP$  son verdaderos los cuatro primeros postulados de Euclides: éstos, de hecho, descienden de teoremas de  $GE$ . Por ejemplo, el primero, “dos PUNTOS distintos identifican una RECTA”, puede ser demostrado en  $GE$  en base a las propiedades de los arcos de círculos ortogonales a una circunferencia: es, pues, verdadero para  $IP$ . Entonces  $IP$  es un modelo de la Geometría que asume sólo los cuatro primeros postulados, llamémosla  $G$ . Además, puesto que la verdad de cada teorema de  $G$  en el modelo  $IP$  proviene de la misma corrección del modelo euclidiano en  $GE$ ,  $IP$  es un modelo *correcto* de  $G$ .

En cambio, aún en base a teoremas de  $GE$ , puede demostrarse que  $VP$  es falso en  $IP$ : se pueden construir infinitas RECTAS PARALELAS (definidas análogamente a “paralelas”, o sea carentes de PUNTOS en común) a una RECTA  $r$  y que pasan por un PUNTO  $P$  externo a ésta (en la figura anterior, dos de estas RECTAS son  $s$  y  $t$ ). Por lo tanto,  $VP$  no puede ser un teorema de  $G$ : si lo fuese, sería verdadero para su modelo correcto  $IP$ . Del mismo modo, tampoco *not* $VP$  puede ser un teorema de  $G$ : si lo fuese, el modelo euclidiano de  $GE$ , donde  $VP$  es axioma, no sería un modelo, como estamos suponiendo. Sigue que, en las misma hipótesis,  $VP$  es *indecidable* en  $G$ .

$IP$  es un modelo correcto de una Geometría en la que es verdadera una de las posibles negaciones de  $VP$ : precisamente, que hay infinitas rectas paralelas a una data y pasantes por un punto externo a ella. Tal Geometría se llama *hiperbólica*. Se puede probar análogamente que, todavía en la hipótesis de que la interpretación euclidiana sea un modelo correcto para  $GE$ ,

existen modelos correctos también para la Geometría *elíptica*, donde se asume como axioma que de estas rectas no existe ninguna.

Es posible que alguien haya experimentado un cierto desconcierto por la manera con la que se ha obtenido la metademostración de indecidibilidad de *VP* (recordemos, en la hipótesis que el modelo euclidiano de *GE* sea correcto): la construcción del modelo *IP* requiere un nuevo tipo de imaginación, de observación creativa. Sin duda, también en las normales demostraciones hay creatividad; pero ahí la inventiva atañe siempre y sólo la *elección* de los objetos a considerar, los cuales, en cualquier caso, siempre son elementos (en concreto, cadenas de símbolos) de la Teoría. Aquí, sin embargo, se crean estructuras *ad hoc*, que forman parte de una colección esencialmente semántica: la de los modelos del Sistema axiomático. Cierto, sería bastante deseable poder disponer de un método seguro que en todos los casos, fijado el Sistema, nos indicase los pasos a seguir para deducir la indecidibilidad de cierto enunciado; sin recurrir necesariamente a las interpretaciones, es decir a estructuras semánticas. Reafrontaremos esta cuestión.

Además, hay también otro tipo de desconcierto: en el caso, el hecho de que el Sistema *G* sea interpretable igual de bien según modelos geométricos totalmente diversos de aquello para lo que se ha creado. Pero aquí hay que admitir francamente que la única equivocación consiste en la presunción de que el Sistema *G* haya ya traducido todas las características del intuitivo modelo euclidiano que se quiere reproducir y estudiar en versión axiomática. Es más: pasada la sorpresa, podría resultar provechoso estudiar las nuevas “extrañas” interpretaciones, quizá descubriendo su utilidad. En el caso, las Geometrías no euclidianas pueden describir los espacios físicos *curvos* (por

ejemplo, *encorvados* por una densidad de energía, conforme a la Relatividad General).

El *Espacio cartesiano* es una interpretación que asocia números y ecuaciones reales a los conceptos de *GE*: una terna ordenada de números reales a “punto”, tipos oportunos de ecuaciones a “recta”, “plano”, etc., de modo que cada ente y propiedad del modelo euclidiano tiene un correspondiente equivalente. Desciende de ello que, si el Espacio cartesiano es un modelo correcto de *GE*, también lo es la interpretación euclidiana y viceversa. El Espacio cartesiano se funda sobre el llamado modelo *estándar*, esto es, la interpretación espontánea de los números reales (sobre la cual volveremos detalladamente). Así, pues, a partir del modelo *estándar* de los reales se puede construir un modelo correcto para *GE*: el Espacio cartesiano. Por lo tanto, de la existencia del modelo *estándar* de la Teoría de los números reales, seguiría la existencia de modelos correctos (y en particular la consistencia) bien para *GE*, bien, como se ha mostrado, para las Geometrías no euclidianas.

Pero, finalmente, ¿existe siempre un método para “construir” un modelo correcto o para concluir que cierta interpretación lo es? ¿O bien, menos ambiciosamente, para concluir o confutar la consistencia de un Sistema? Estos interrogantes, hacia finales del siglo XIX, suscitaron un renovado interés con respecto a la Lógica.

## **I.12. No individuabilidad de existentes en Lógica clásica**

En Lógica clásica la existencia de un ente no implica necesariamente su individuabilidad, esto es, que se pueda efectivamente mostrar, ejemplificar. Se tienen dos casos de no individuabilidad: en el primero, el objeto no es ni siquiera

representable, no admite una representación en el modo que se ha convenido pretender. En el segundo, el objeto admite una representación en el modo convenido, pero no es posible concluir que es el objeto buscado. Esto sucede porque en Lógica clásica una demostración de existencia puede no aportar ningún método para identificar el objeto existente: no *debe* ser conexa a la individuación del ente; se habla en tal caso de demostración *no constructiva*. Algunos consideran esta prerrogativa otro defecto epistemológico de la Lógica clásica.

Pensemos en el mundo real: ¿quién duda que es bastante frecuente el caso en el que es imposible individuar un objeto concreto aun estando seguros de que exista? Las palabras del primer discurso escrito, el tercer grano de arena que toqué, el número más grande pensado por Eulero, etc.. No obstante, en estos ejemplos la imposibilidad está siempre conexa a condiciones físicas y no de principio (¿y si fuésemos capaces de viajar atrás en el tiempo, de leer el pensamiento? Etc.). En Matemáticas no interesan a priori dificultades prácticas ligadas al tiempo, a la legibilidad de los caracteres, etc.. Luego, el paralelo con las imposibilidades físicas del mundo real no resistiría. Veamos un ejemplo de imposibilidad de individuación que parece de principio: “un número aún no representado” o bien “una frase todavía no considerada”. Es indudable que de estos objetos existen infinitos; por ejemplo, el número de las frases es infinito, pero todas aquellas hasta ahora consideradas son y serán siempre finitas. Sin embargo parece que, por definición, sea imposible *considerar* una de aquellas *todavía no consideradas*: en el momento en el cual se (cree que se) hace, ¡esa ya no posee la propiedad requerida! En esencia, la cuestión esconde un aspecto paradójico: la escritura “un frase todavía no considerada” parece considerar... una frase aún no considerada: ¿pero, entonces, la considera o no? Como



veremos detalladamente en el apartado II.13, es inevitable que la metamatemática deba enfrentarse con las paradojas; hay que pretender (o, más humildemente, suponer) que sea capaz de saberlas apartar. En el caso de susodicha frase, para restarle todo interés matemático, basta con observar que en ella el tiempo interviene explícitamente en la propiedad del existir: a bien mirar, hay un “antes” y un “después”. La acción de identificación del ente provoca una mutación de condiciones que hace decaer la propiedad misma de existencia del ente.

Estas observaciones benefician la perspectiva constructivista ofrecida por algunas Lógicas alternativas a la clásica, por ejemplo la Lógica *intuicionista* y la Lógica *lineal*. En esas, de cada demostración de existencia siempre desciende un método efectivo para hallar el objeto. Pero nosotros permaneceremos en el ámbito tradicional representado por la Lógica clásica.

Como ejemplo fundamental de no representabilidad consideremos el caso de los reales: ¿se puede mostrar siempre un número real? Si con “mostrar” entendemos una denotación explícita finita de todas sus cifras, la respuesta es obviamente “no”, siendo éstas infinitas. La escritura  $\sqrt{2}$ , por ejemplo, denota realmente una operación y no directamente el número que convencionalmente representa (del que no enseña declaradamente alguna cifra); la operación, no obstante, permite calcular cualquier deseada cifra suya. Manteniendo dicha convención, sólo podríamos “mostrar” números racionales no periódicos.

*Pero la imposibilidad de representación puede siempre resolverse aligerando las convenciones.* Podríamos empezar considerando como satisfactorias también expresiones como “7,6783415”, donde se conviene que los números debajo de la raya se repitan al infinito. Ahora se podrán “mostrar” todos los

números racionales, pero quedarán fuera, en general, los números reales. Una posterior convención sobre la representabilidad, podrá hacer que escrituras como  $\sqrt{2}$  y  $\pi$ , por ejemplo, representen adecuadamente precisos números reales. No existen límites para las convenciones de representabilidad, una vez fijado límpidamente el concepto a expresar; a pesar de que pueden existir límites insuperables para su conocimiento concreto. Es así porque la denotación es un hecho metamatemático (semántico) y por la Semántica no existen límites expresivos no franqueables, aparte de las mencionadas excepciones de naturaleza paradójica que debemos suponer de saber reconocer.

No obstante, la representabilidad no implica, en general, la individuabilidad. Casi en cada Teoría clásica hay teoremas que demuestran la existencia de entes (representables, si las convenciones son oportunas) sin especificar ningún método para identificarlos. Nada, en principio, impide que esa identificación sea imposible, que esté más allá de las capacidades deductivas del Sistema axiomático. Por ejemplo, la Teoría podría deducir un enunciado del tipo “ $\exists n(\dots)$ ”, pero todos los enunciados: “ $\exists n(\dots) \rightarrow (n=1)$ ”, “ $\exists n(\dots) \rightarrow (n=2)$ ”, etc., ser *indecidibles*. Entonces  $n$  quedaría indeterminado. No hay nada de paradójico, a priori equivocado, en esto.

Otra vez, pues, el presunto defecto se revela ser sólo una presunción injustificada sobre los Sistemas clásicos.

Podemos ahora reproducir un ejemplo no trivial de un Sistema con un número finito de axiomas pero *indistinguibles*, como anticipamos en el apartado I.5. Basta con suponer la existencia de cierto Sistema matemático  $S$  en el que se puede demostrar que existe un número natural  $n$  dotado de algunas propiedades, pero que no se puede efectivamente individuar.

Definimos, entonces, un nuevo Sistema  $S'$  cuyos axiomas son todos los enunciados de  $S$  con menos de  $n$  caracteres; este Sistema tiene finitos axiomas pero *indistinguibles*, puesto que no se puede identificar el valor de  $n$ . Recordando todo lo concluido en el apartado I.9, se puede, pues, afirmar que, si  $S'$  es clásico, entonces no está *bien definido*.

Con un criterio similar, se puede proponer un ejemplo no trivial de una regla deductiva que hace que el conjunto de las demostraciones no sea *distinguible* y, consecuentemente, el Sistema otra vez no *bien definido*. Consideremos, en efecto, la Teoría matemática  $S''$  que hace referencia a la no individuabilidad de  $n$  en el sistema  $S$ , mediante la siguiente regla deductiva: “cada enunciado con un número  $n$  de caracteres es un teorema”. Ahora, si  $t$  es un teorema arbitrario generado por esta regla (y ciertamente existen teoremas porque  $n$  existe), ningún razonamiento que antes no identifique  $n$  puede concluir que es un teorema. Puesto que  $n$  no es identificable, tampoco ninguna demostración de  $t$  es identificable. Un tal  $S''$ , por lo tanto, no está *bien definido*.

El hecho de que los dos Sistemas  $S'$  y  $S''$  se hayan construido a partir de  $S$  no tiene en sí nada de incorrecto, obviamente; mas bien, es un caso bastante frecuente en Matemáticas. Y, por las conclusiones ahora hechas, tampoco importa si, eventualmente, uno de los dos, o ambos, sean inconsistentes.

### **I.13. Verdades “indemostrables”**

A menudo, una propiedad que se ejemplifica para ilustrar el desconcierto causado por los Teoremas limitativos de la moderna Lógica Matemáticas, es la siguiente: “en algunas Teorías matemáticas existen enunciados verdaderos pero

indemostrables”. En realidad esto no es correcto y, una vez corregido, tampoco tan inquietante. En primer lugar, esta afirmación debe ser precisada. Consideremos un Sistema clásico formal. Hemos aclarado que el concepto de verdad se refiere siempre y sólo a las *interpretaciones* de los enunciados, puesto que éstos carecen en sí de significado explícito. Reformulemos, pues, la aserción como “existen enunciados que, aun no siendo teoremas, interpretados según un modelo correcto de la Teoría son verdaderos”. Con esto se aplacan las inquietudes: si el Sistema admite un modelo correcto, esta “extraña” propiedad siempre está satisfecha si el mismo Sistema es incompleto, esto es, si existe un enunciado *indecidable*; de hecho, éste, o (exclusivamente) su negado, será verdadero en este modelo, conforme a los principios del tercer excluido y de no contradicción. También puede ocurrir que la forma de tal enunciado sea del tipo “ $\forall xP(x)$ ”, siendo  $P(x)$  cierto predicado; en este caso, en el modelo correcto en el que este enunciado es verdadero, se tiene que  $P(c)$  es verdadero para cada constante  $c$  [por el citado axioma clásico “ $\forall xA(x) \rightarrow A(c)$ ”], empero la proposición “ $\forall xP(x)$ ” no se puede demostrar. Un ejemplo concreto es el enunciado de  $G$  “cualquier recta que pasa por un punto  $P$  externo a una recta arbitraria  $r$  no es paralela a  $r$ ”: verdadero para la Geometría elíptica, es *indecidable* en  $G$  (en la hipótesis, recordemos, que el modelo euclidiano se correcto para  $GE$ ), ya que implica la negación de  $VP$ .

Por otra parte veremos que si el enunciado es verdadero *en cada* modelo correcto, en los casos normales será necesariamente un teorema de la Teoría (esta propiedad se llama *completitud semántica*). Las excepciones, como observaremos, deben concernir Sistemas que no respeten la formalidad, esto es, en los que las proposiciones posean un

valor semántico no eliminable.

Pero, para concluir todo esto los inquietantes teoremas limitativos (nos referimos a los de *incompletitud*) no se necesitan: de hecho, veremos en la tercera Parte que éstos afirman algo bien distinto.

SEGUNDA PARTE  
COMPLETITUD SEMÁNTICA  
Y TEORÍA DE LOS CONJUNTOS

### II.1. Teoría aritmética de Peano

Son muchos los que opinan que los números naturales y las operaciones de suma y producto definidos en ellos son un concepto metamatemático preciso e inequívoco. Además, gran parte de estas personas consideran que dicho concepto es irrenunciable en toda definición Matemática, así como en la propia introducción de los Sistemas axiomáticos. Por ejemplo, cuando en una regla deductiva se afirma “sustitúyase  $x$  por *una* secuencia arbitraria ordenada de 0 y 1” ¿acaso no usamos el concepto de “número uno”? Una vez admitido el uno, es casi inmediato admitir el resto de números naturales, incluido el cero. Es más: probablemente el concepto de unidad y número natural es aún más básico de cuanto deja sospechar el ejemplo precedente: una afirmación cualquiera nace como secuencia ordenada de términos *unitarios*. Es decir, en el mismo significado de *término* (el *quark*, por así decirlo, del discurso) se sobreentiende, a nuestro parecer, la *unidad*. Incluso la *suma* parece un concepto espontáneo y carente de ambigüedad; y el *producto* puede definirse como una suma iterada  $n$ -veces, donde  $n$  es un número natural. No encontramos argumentos para desmentir tal convicción, todo lo contrario.

Por otra parte, si la “intuitividad” de los números naturales tuviera que implicar la solución instantánea de problemas que han atormentado a varios matemáticos insignes, dicho

optimismo sería sospechoso. Examinemos lo que sucede concretamente en un Sistema que define los números naturales, o sea, *aritmético*.

Hay dos versiones de Teoría aritmética lógicamente diferentes. La primera, que llamaremos *integral*, precede históricamente a la segunda; pero, como se vio después, es lógicamente más compleja. Por tal razón, es más oportuno comenzar a introducir la segunda, llamada habitualmente *de Peano* (en realidad impropriamente, puesto que la original introducida por Peano es la *integral*).

Se define *Teoría aritmética de Peano* (en síntesis *PA*) el Sistema clásico formal obtenido añadiendo al Cálculo predicativo clásico formal de primer orden con igualdad los símbolos “0, +, ·”, el predicado a dos variables  $\underline{S}(x,y)$  (que satisface los axiomas clásicos) y los axiomas propios:

$$[1] \exists x (x=0)$$

$$[2] \forall x (\exists y (\underline{S}(x,y)))$$

$$[3] \forall x (\underline{S}(x,y) \rightarrow y \neq 0)$$

$$[4] \forall x \forall y ((\underline{S}(x,z) \text{ e } \underline{S}(y,z)) \rightarrow x=y)$$

$$[5] \forall x (x+0=x)$$

$$[6] \forall x \forall y ((\underline{S}(y,z) \text{ e } \underline{S}(x+y,t)) \rightarrow x+z=t)$$

$$[7] \forall x (x \cdot 0 = 0)$$

$$[8] \forall x \forall y (\underline{S}(y,z) \rightarrow x \cdot z = x \cdot y + x)$$

además de la regla deductiva propia: “*en la expresión siguiente:  $(A(0) \text{ e } \forall x((A(x) \text{ e } \underline{S}(x,y)) \rightarrow A(y))) \rightarrow \forall x A(x)$ , sustituyendo  $A(x)$  por una proposición cualquiera con al menos una variable libre  $x$ , se obtiene un teorema*<sup>19</sup>”.

---

<sup>19</sup> Normalmente, las deducciones inductivas son consideradas más bien *axiomas*; más adelante aclararemos por qué. Por ahora ignoremos esta

También habría que especificar nuevas reglas gramaticales para establecer el uso correcto de los nuevos símbolos “0, +, ·”, pero lo pasaremos por alto.

La única precisión técnica es que el símbolo “≠” es una abreviación de “not=”. Después, algunos comentarios.  $\underline{S}(x,y)$  es interpretable, en el lenguaje ordinario, como “y es el sucesor de x”<sup>20</sup>. Puesto “z=I” como abreviación de “ $\underline{S}(0,z)$ ”, según el axioma [6], para 0 en lugar de y, se obtiene:  $\forall x(z=I \text{ e } \underline{S}(x,t) \rightarrow x+I=t)$ , habiendo usado el axioma [5] y la regla de sustitución válida para el predicado “=”; esta expresión consiente escribir el sucesor de x como x+I, para cada x. Análogamente, se puede llamar “2” el sucesor de “I”, etc. El axioma [2] afirma que cada número tiene sucesor; el [3], que cada sucesor es distinto de “0”; el [4], que si dos números tienen el mismo sucesor entonces son iguales; [5] y [6] definen la suma. En palabras, [6] establece que el sucesor de x+y es suma de x con el sucesor de y; [7] y [8] definen el producto. La regla deductiva propia se denomina *principio de inducción*: sea A(x) una proposición cualquiera con al menos una variable libre x. De A(0) y de la implicación A(x) → A(x+I), válida para cualquier x, sigue A(x) para cada x. En palabras: si una proposición es verdadera para “0” y si, suponiendo que sea verdadera para un arbitrario x es también verdadera para x+I, entonces será verdadera para todos los números naturales. Nótese que la expresión simbólica contenida en el principio de inducción no puede formalizarse como una proposición de PA, en cuanto “proposición con al menos una variable libre” no se define formalmente como un predicado en el mismo Sistema. La expresión se convierte en enunciado sólo

---

posibilidad.

<sup>20</sup> En efecto, de los mismo axiomas sigue que, para cada x, el sucesor de x es único. Pero preferimos demostrarlo más adelante (apartado II.10).



cuando  $A(x)$  se substituye por una proposición de  $PA$  con al menos una variable libre. Este enunciado será por tanto siempre del primer orden. Esto, junto al hecho de que todos los axiomas son expresados al primer orden, implica que  $PA$  es del primer orden.

Ahora preguntémosnos si “los naturales intuitivos” son un modelo correcto de dicha Teoría axiomática. La respuesta afirmativa no requiere una dosis excesiva de optimismo. Quien admite comprender qué son “los naturales intuitivos” no tiene muchos argumentos para no admitir también que estos satisfacen las *premisas* de  $PA$  y la corrección de sus cinco (en total) reglas deductivas. Indudablemente, parece excesivo cuestionar *verdaderamente* la idea de “los naturales intuitivos”: quien lo hiciera debería afirmar algo como “nunca he entendido lo que algunos entienden por *naturales*” (¡y en la escuela habrá sacado de quicio al maestro!). Se podría pensar, en cualquier caso, que los números naturales pueden definirse como *el* modelo correcto, *si existe*, de  $PA$ . Desgraciadamente se puede demostrar, como veremos más adelante, que, si  $PA$  es consistente, admite un número infinito de modelos correctos, cada uno *completamente distinto* del otro, en un sentido muy fuerte que precisaremos. En concreto, existen modelos correctos de  $PA$  *muy* distintos del de “los naturales intuitivos”. Por lo tanto esta estrategia no funcionaría lógicamente.

Pero, ¿qué tendría finalmente de peligrosa y sospechosa la meta-conclusión: “los naturales intuitivos son un modelo correcto de  $PA$ ” ?

Discutamos primero una objeción frecuente y que, en realidad, es solamente una crítica infundada. El discurso es del tipo: “si la Aritmética es clara para la mente, porqué no está claro como se resuelve la conjetura de Fermat o la de

Goldbach?<sup>21</sup>”. Se trata evidentemente de un equívoco. Es manifiesto que una sucesión larga y articulada de argumentos espontáneos y transparentes, puede dar lugar a una propiedad incluso bastante simple de enunciar, pero no tanto de resolver. Recuérdese el ejemplo famoso del *Menón* de Platón: Sócrates llama a un esclavo que muestra ignorar el teorema de Pitágoras (hecho bastante comprensible). Sucesivamente, basándose en una serie de razonamientos elementales de inmediata verdad, consigue conducirlo hasta su conclusión, demostrando así a Menón el primitivismo del saber. Se puede afirmar sin duda que si un Sistema axiomático admite un modelo intuitivo, todo teorema del Sistema, desarrollado *completamente* (es decir, incluyendo todos los posibles teoremas en los cuales se apoya), se compone de razonamientos que poseen el mismo grado de intuitividad de dicha interpretación; en efecto, tal desarrollo significa reconducirse directamente a los axiomas y reglas del Sistema, que han sido verificados intuitivamente en el modelo. Pero es obvio que ello no significa que la interpretación de cada teorema en el mismo modelo sea *inmediatamente* verificable de modo intuitivo: es normal que inicialmente el esclavo se muestre totalmente incierto con respecto a la verdad del teorema. El equívoco subestima la dificultad de encontrar el camino adecuado, análogamente al caso de un laberinto, donde la operación de salir, fácilmente enunciable, se compone de una serie de estrategias sencillas y banales. Por otra parte, admitir dicha crítica implicaría la inutilidad de adoptar un Sistema axiomático (es decir, de trabajar con las Matemáticas) ¡cada vez que se encuentre un modelo intuitivo correcto!

---

<sup>21</sup> Se trata de problemas que han hecho padecer a multitud de matemáticos. La primera ha sido resuelta recientemente, como ya se ha dicho. La segunda afirma cándidamente: “todos los números pares mayores de 2 son suma de dos números primos” y todavía está sin resolver.

Viceversa, la axiomatización, con sus teoremas, nos ayuda a descubrir los itinerarios tortuosos de las verdades en el modelo, que sólo son intuitivos en las raíces. Además nos ofrece la posibilidad de reconocer otros modelos correctos del Sistema, algunos de los cuales podrían resultar todavía más intuitivos que el original.

La verdadera objeción es otra; de la existencia de un modelo correcto deriva la consistencia del Sistema. Entonces, ¿siempre resolveremos de este modo, mediante un “modelo correcto intuitivo”, el espinoso problema de la consistencia de los Sistemas axiomáticos? La idea que no convence, es decir, es que la presentación de un modelo correcto sea un método *general* para demostrar la consistencia de los Sistemas axiomáticos clásicos<sup>22</sup>. Así, siguiendo el ejemplo optimista de los números naturales, el concepto espontáneo de espacio debería ser suficiente para convencernos de que la interpretación euclidiana es un modelo correcto del Sistema axiomático *GE*. Su carácter intuitivo es indudable, baste pensar en los esfuerzos realizados para intentar demostrar el *VP*. Ello resolvería inmediatamente el problema de la consistencia de *GE*, de las Geometrías no euclidianas y de la propia Teoría de los números reales (ya que una contradicción en ésta, originaría una contradicción en el Espacio cartesiano que es equivalente al modelo euclidiano). Conforme a este criterio, la consistencia en Matemáticas se establecería mediante una serie de intuiciones espaciales y/o cuantitativas, una para cada Disciplina. Pero, ¿qué asegura que *todas* estas intuiciones sean metamatemáticamente congruentes? ¿Por qué razones Hilbert y Gödel, entre otros, se han

---

<sup>22</sup> Entre los últimos ilustres matemáticos que defendieron esta opinión destaca la figura de G. Frege, autor de un epistolario muy instructivo, y no sólo sobre este tema, con Hilbert. Véase una valiosa síntesis en G. Lolli: *Da Euclide a Gödel*, p. 70 y ss.

preocupado de la consistencia de los Sistemas axiomáticos fundamentales?

En realidad no faltan elementos concretos de perplejidad: por ejemplo, la propia noción de *interpretación*, y por tanto de *modelo*, se basa, como reconoceremos enseguida, en el concepto semántico, intuitivo, de *conjunto*; y como veremos con la *paradoja de Russell*, dicho concepto no carece de ambigüedad. Así pues, no está garantizado que cada “modelo espontáneo” sea siempre exento de vaguedad.

Estas consideraciones, aunque sólo sea en razón de principio, imponen una puesta en discusión de los “modelos intuitivos”. Al mismo tiempo rebaten la exigencia de un método alternativo para concluir la consistencia de los Sistemas axiomáticos fundamentales como *PA*. Dicho método alternativo sólo podría ser una *demonstración*, un teorema de un oportuno Sistema axiomático. Como veremos más adelante, tal Sistema nunca puede coincidir con el mismo Sistema objeto de análisis, es decir, aquel del cual deseamos demostrar la consistencia (cosa que, francamente, nos parece escandalosamente obvia). Por tanto será otro; pero ¿quién demostrará la consistencia de éste último? Incluso ahora está perfectamente claro que no podremos excedernos en cuanto a las pretensiones...

Por otra parte, el método matemático alternativo podría incluso *construir* modelos concretos; lo cual sería muy deseable en Sistemas donde no se distinguen fácilmente modelos intuitivos (y no se ven razones para excluir dicha posibilidad).

Volviendo a la *PA*, debemos pues dudar de su consistencia, hasta prueba contraria. Nos preguntaríamos, entonces, cuáles de sus premisas estarían viciadas. Como es fácil intuir, dudar de las premisas del Cálculo lógico clásico se revela demasiado destructivo (más adelante profundizaremos en ello). Examinando las *premisas propias* de *PA*, se advierte que el

único objeto realmente cuestionable, que podría originar contradicciones, es el principio de inducción: el resto es una serie de posiciones independientes, definidoras de los símbolos propios de *PA*. En efecto, aunque dicho principio parece metamatemáticamente legítimo, no puede excluirse que sea incompatible con las demás premisas del Sistema.

## II.2. Metateorema de corrección. ¿O no?

El metateorema de corrección afirma que *cada modelo de cualquier Cálculo predicativo clásico formal del primer orden es correcto*<sup>23</sup>. En múltiples textos su metademostración está considerada “muy evidente”; sin embargo, muy pocos la presentan. Entre éstos, la mayoría da una versión que se declara “aproximada”, si bien no se aprecian diferencias sustanciales con las exposiciones consideradas completas. La describimos a continuación.

Se debe metademostrar que las cuatro reglas deductivas del Cálculo predicativo del primer orden “conservan” la verdad en cada modelo. Consideremos, por ejemplo, el *modus ponens*; la primera vez, éste operará sobre axiomas que suponemos verdaderos en un modelo arbitrario. Admitiendo que entre los axiomas hay dos enunciados del tipo “*A*” y “*A*→*B*”, el *modus ponens* deducirá “*B*”. Entonces, puesto que “*A*” y “*A*→*B*” son verdaderos, se obtiene “obviamente” que también “*B*” es verdadero. Por inducción descendente, luego, que cualquier otra deducción del *modus ponens* es correcta. Un razonamiento semejante puede hacerse para las demás reglas deductivas, lo que completa la prueba.

La inducción usada, de tipo metamatemático, es totalmente

---

<sup>23</sup> Veremos más adelante que su validez se puede generalizar.

análoga a aquella sintáctica, que opera en  $PA$ : primero se concluye, en el modo ya visto, que la corrección existe en el “primer nivel” de deducción, es decir aquel que opera en los axiomas; y después se deduce que si hay corrección en cierto nivel  $i$ , también debe haberla en el nivel  $i+1$  (para esto, se razona en modo prácticamente idéntico al caso del primer nivel de deducción). Luego la corrección valdrá en todos los niveles. Ya hemos observado que dicho principio parece del todo admisible desde un punto de vista semántico. En el apartado precedente, en efecto, sólo se ha cuestionado su compatibilidad a priori con las demás premisas de  $PA$ ; mas en caso de incompatibilidad, se podría decidir suprimir un axioma en lugar del uso de la inducción.

Examinemos, en cambio, la deducción “obvia” que hemos señalado en cursiva; ¿quién podría desaprobársela asumiendo para “ $\rightarrow$ ” el significado de “implica”? Nadie, creemos. Pero, lo que deseamos discutir es precisamente la *necesidad* de que dicho símbolo deba inevitablemente interpretarse con un concepto análogo a “implica”; o, en general, con un concepto tal que si “ $A$ ” es verdadero y “ $A \rightarrow B$ ” verdadero, entonces también “ $B$ ” es verdadero. Recordemos que “ $\rightarrow$ ” es un símbolo sin significado, definido implícitamente por algunos axiomas. ¿Qué podría convencernos de que en cada interpretación en la cual los axiomas de todo Cálculo predicativo clásico son verdaderos, el símbolo “ $\rightarrow$ ” *debe* asumir un significado equivalente a “implica”?

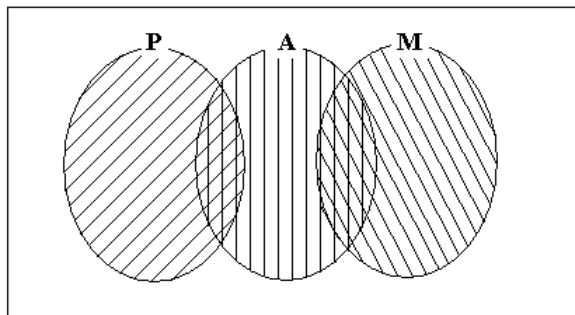
Naturalmente, la crítica, de manera equivalente, puede verse reflejada en “ $(notA)oB$ ”, del cual “ $A \rightarrow B$ ” es una abreviación (es decir: ¿qué metademuestra que “*not*” y “*o*” *deban* interpretarse como los semánticos “no” y “o”?). Parece, pues, que susodichas metademostraciones den demasiadas cosas por descontado.

Volvamos a nuestro primer ejemplo de Sistema axiomático (ap. I.1) e interpretemos “ $A$ ” como “Antonio”, un amigo nuestro enamorado de “ $B$ ”, es decir “Blanca”. Pero ésta ama a Carlos, “ $C$ ”, y Carlos ama a Daniela, “ $D$ ”. Si interpretamos “ $\rightarrow$ ” como “ama”, se obtiene un modelo (¡de infelicidad!). No obstante, la regla deductiva no es legítima, como se advierte inmediatamente; ésta no conserva la verdad: así, pues, se trata de un modelo *incorrecto*. Y bien, ¿qué excluye que una situación semejante pueda verificarse también en el Cálculo predicativo clásico del primer orden? Las posibilidades de la Semántica no son “simplemente” infinitas: se trata de un infinito que, como veremos más adelante, supera cualquier tipo de infinito definible en lenguaje matemático. El metateorema de corrección da por descontado que los axiomas del Cálculo predicativo clásico del primer orden hayan traducido *completamente* en sintaxis el significado semántico de “y”, “no”, “para todo”, etc.; es decir, que los correspondientes símbolos sintácticos no sean diversamente interpretables. Pero, ¿qué garantiza esto?

Alguna metademostración hace uso de tablas de verdad. Ciertamente, si representamos “ $A \rightarrow B$ ” mediante la tabla del apartado I.8, se observa que para “ $A$ ” verdadero y “ $A \rightarrow B$ ” verdadero, “ $B$ ” es también verdadero. Pero los conectores y cuantificadores lógicos no se definen mediante tablas de verdad. Su definición formal, como sabemos, ocurre sólo mediante axiomas que deben ser satisfechos; mientras que las tablas de verdad sólo sirven de auxilio y se construyen admitiendo interpretar siempre “o” con “o”, “not” con “no”, y así sucesivamente. La que hemos creado para definir convenientemente “ $A \rightarrow B$ ” es, precisamente, *solamente un criterio para sugerir* como definir “ $\rightarrow$ ” de modo que simule certeramente (pero no a la fuerza únicamente) un fundamental

concepto semántico que queremos reproducir en lenguaje sintáctico. Formalmente, “ $A \rightarrow B$ ” se define mediante “*not*” y “*o*”, y estos últimos mediante la satisfacción de axiomas oportunos.

Análogamente, no nos parece que se puedan metademostrar realmente como “verdaderos en toda interpretación” los tradicionales enunciados de la Lógica clásica (*Barbara*, *Celarent*, *Darii*, etc.). Mas bien, *asumirlos* como tales. Examinemos por ejemplo *Festino*: “*Si ningún pez es mamífero y algunos animales marinos son mamíferos, entonces algunos animales marinos no son peces*”. Para concluir que se trata de un silogismo universalmente válido, normalmente se observa que la conclusión no depende del significado de ninguno de los objetos mencionados. Si sustituimos el símbolo sin significado “*P*” a “pez(peces)”, “*M*” a “mamífero(s)” y “*A*” a “animal marino”, se obtiene: “*Si ningún P es M y algunos A son M, entonces algunos A no son P*”. Podemos representar la situación con el siguiente esquema:



donde, por generalidad, se ha considerado una intersección<sup>24</sup> no

<sup>24</sup> Consideramos superfluo definir los conceptos elementales de la Teoría informal de los conjuntos (también denominada “*ingenua*”), por intuitivos y espontáneos.



nula entre los conjuntos  $A$  y  $P$  (ésta podría no existir; en cambio aquella entre  $A$  y  $M$  debe existir si la premisa *algunos  $A$  son  $M$*  es verdadera; del mismo modo, aquella entre  $P$  y  $M$  no debe existir, si la premisa *ningún  $P$  es  $M$*  es verdadera). La conclusión viene del hecho que los puntos de intersección entre  $M$  y  $A$ , que existen siempre, no pueden pertenecer a  $P$ . Se dice entonces: “si las premisas son verdaderas, es también verdadera la conclusión, en cualquier interpretación para  $P$ ,  $M$  y  $A$ ”. Esto está fuera de discusión; pero innegablemente, lo está en tanto que “ningún” signifique “ningún”, “algunos”, “algunos” y así sucesivamente. Empero, en la estructura axiomática de todo Cálculo predicativo clásico de primer orden, como en cualquier otro Sistema axiomático formal, no existen símbolos con un significado preestablecido; ni, por consiguiente, hay entre ellos alguna diferente característica lógica *a priori*. Un *modelo* es cualquier interpretación semántica de los símbolos tal que los axiomas sean verdaderos; sólo éste dará un *significado implícito propio* y eventual característica lógica a cada uno de los símbolos usados; lo que vale tanto para “ $A$ ”, “ $B$ ”, “ $X$ ” etc., como para “ $o$ ”, “*not*”, “ $\forall$ ”, etc.. En definitiva, no vemos por qué deba ser excluida la posibilidad de modelos con un significado distinto para los conectivos y cuantificadores clásicos; los cuales, por tanto, podrían resultar *incorrectos*. Construir un ejemplo concreto no debería ser muy difícil; sin embargo, el argumento no reviste demasiada importancia en sí mismo y ello no anima a la investigación. De nuestra crítica no deriva, en efecto, ninguna profunda revolución en los fundamentos de la Matemática: por la sencilla razón de que los modelos incorrectos del Cálculo predicativo clásico formal del primer orden no interesan. Más en general, no estamos interesados en estudiar modelos donde “ $\forall$ ” no signifique “para todo” y así sucesivamente para el resto de los conectores lógicos. La discutida divergencia de la posición

tradicional, mas bien señala una exigencia: la de axiomatizar parte de los conceptos metamatemáticos usados ambiguamente (creemos) en las metademostraciones señaladas; y ello, perfectamente en la línea de las consideraciones hechas en el apartado I.3. En resumen, la oportunidad de reconducir dicho metateorema a teorema.

Como confirmación de que tras el “metateorema de corrección” en realidad no hay más que la exigencia de una oportuna *convención*, descubriremos que, en efecto, dicha formalización introduce condiciones explícitas que establecen expresamente de limitarse a aquellas interpretaciones que reflejen el significado tradicional de los símbolos lógicos, resultando modelos necesariamente correctos.

### **II.3. Metateorema de completitud semántica**

En 1930 Gödel metademostró que si *un Cálculo predicativo clásico formal de primer orden cualquiera es consistente, entonces admite al menos un modelo*<sup>25</sup>. Tal metateorema, llamado *de completitud semántica* por razones que veremos, posee importantísimas consecuencias. Por ahora, nos interesa solamente examinarlo con la misma óptica crítica del apartado precedente. Las metademostraciones actualmente disponibles, aun siendo notablemente más sencillas que el original, siguen siendo de gran complejidad; para nuestros objetivos, es suficiente limitarnos a trazar sus características esenciales.

Con el fin de concluir la tesis del metateorema, el primer paso es convenir una definición menos informal de *modelo* y por tanto de *interpretación*. En concreto, se asume que una

---

<sup>25</sup> También dicho metateorema será después oportunamente generalizado.

*interpretación clásica* esté determinada por un *conjunto*, denominado *universo*, tal que, haciendo variar en éste las variables del Sistema, se obtengan proposiciones susceptibles del valor de verdad *verdadero/falso* (o sea, *enunciados*) satisfaciéndose los principios del tercer excluido y de no-contradicción. Para ser más precisos, una *interpretación clásica* se define por la satisfacción de las siguientes condiciones:

- a) Existe un *conjunto*, denominado universo  $U$ , tal que toda constante del Sistema (es decir, cada símbolo cuyas reglas del Sistema no establecen la posibilidad de sustitución) sea un elemento de  $U$ .
- b) Para cada proposición  $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (donde obviamente las variables son debidas a predicados contenidos en  $E$ ), existe una función que, cualquiera que sea la  $n$ -upla  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$  de constantes de  $U$ , asocia al enunciado  $E(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$  un valor " $V$ " o exclusivamente " $F$ " (que semánticamente coincidirán con *verdadero* y *falso*). En resumen, a cada *enunciado* del Sistema debe asociarse un valor exclusivo de verdad: *verdadero* o *falso*.
- c) A los enunciados  $E(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$  y  $\text{not}E(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$  deben corresponder valores distintos (" $V$ " y " $F$ " o " $F$ " y " $V$ "), cualquiera que sea la  $n$ -upla  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$  y la proposición  $E$ . En síntesis, si a un *enunciado* del Sistema se asocia el valor *verdadero*, al negado debe asociarse *falso* y viceversa.

Estas posiciones intentan desvincular el concepto de *interpretación* de formas vagas y discutibles de la intuición y condicionan la tesis del metateorema a la determinación de un *conjunto*; un concepto ciertamente más elemental, pero todavía semántico. Un *modelo*, como sabemos, es una interpretación en

la cual todos los axiomas son verdaderos, es decir, tienen el valor “ $V$ ”. Nótese que “ $V$ ” y “ $F$ ” son dos valores distintos cualquiera: la definición expresada arriba elimina cualquier referencia explícita a la noción semántica de verdad, generalizando drásticamente el concepto de interpretación. Vale, pues, cualquier conjunto con las características descritas, incluso si, desde el punto de vista semántico, “ $V$ ”=“plátano” y “ $F$ ”=“autopista”<sup>26</sup>. Por lo tanto el primer paso hacia la formalización del concepto de *modelo* (que se concluirá con su completa codificación en el lenguaje de la Teoría axiomática de los conjuntos) implica, como era de esperar, una renuncia a intentar traducir la integral, intuitiva, noción semántica del concepto de verdad<sup>27</sup>.

Las distintas metademostraciones del metateorema de completitud semántica hacen etapa en no pocos sub-metateoremas y lemas, usando la inducción y otros principios elementales. Y, finalmente, concluyen la existencia de un modelo, en la hipótesis de consistencia, sin construirlo efectivamente: se trata, entonces, siempre de metademostraciones *no constructivas*.

A pesar de la complejidad y extensión de dichas metademostraciones, lo único que nos parece oportuno apuntar, intentando justificar la exigencia de un criterio más riguroso para deducir la tesis del metateorema, es el uso del concepto informal de *conjunto*; y esto debido a su intrínseca ambigüedad, como descubriremos inmediatamente<sup>28</sup>.

---

<sup>26</sup> Luego, que semejante concepto “de verdad” tenga escaso interés matemático es otra cuestión.

<sup>27</sup> La asunción de dicha definición, por consiguiente, debería facilitar la consideración de un modelo que viole el enunciado del metateorema de corrección, es decir, incorrecto.

## II.4. Paradoja de Russell

Hemos usado ya varias veces el concepto de *conjunto*, por su primitivismo; pero siempre de manera intuitiva, informal. No obstante, las metademostraciones precedentes y muchas metademostraciones de la Teoría informal (o *ingenua*) de los conjuntos, la usan de forma profunda, con resultados ciertamente muy alejados de la intuición. En efecto, dicha Teoría, introducida en el 1874 por Cantor, produjo resultados de enorme interés, aunque en traje ajeno a la rigurosa forma axiomática propuesta por Hilbert; más adelante los resumiremos. Por ello, aunque no sólo, ésta fue dura e injustamente atacada por muchos; pero no por el propio Hilbert, que la consideraba “un Paraíso del cual jamás podrá nadie expulsarnos”. En todo caso, era necesario darle un rigor mayor y disipar todas las dudas de muchos razonamientos que, al usar en profundidad el concepto informal de conjunto, llegaban a resultados considerados por muchos en la época, bastante inquietantes o desestabilizadores para las Matemáticas. Por otra parte, dicha prudencia estaba bien justificada: incluso antes de los resultados de Cantor, Russell había descubierto una paradoja sobre el concepto de conjunto.

Un conjunto puede tener otros conjuntos como elementos. Consideremos un conjunto  $I$  que tiene por elementos todos los

---

<sup>28</sup> La metademostración de completitud semántica se critica a veces también por su no *finitud*: es decir, porque usa explícitamente colecciones de *infinitos* elementos. Sin embargo, los conceptos de *finito* e *infinito* parecen tan fundamentales como para poderse usar sin equívoco en metamatemática. Esto no entra en conflicto con el hecho de que, en cambio, haya serios problemas para reproducirlos en lenguaje puramente matemático, como se verá. Las dos perspectivas son absolutamente diferentes.

conjuntos que gozan de una cierta propiedad  $p$ . Parece admisible preguntarse si el propio  $I$  goza de la propiedad  $p$ , caso en el cual  $I$  tendría a  $I$  mismo como elemento. Consideremos, por ejemplo, el conjunto  $I$  de todos los conjuntos con al menos tres elementos. Es cierto que de dichos conjuntos hay bastantes: seguramente al menos tres. Por tanto,  $I$  se contiene a sí mismo. Semejante cosa ocurre para el conjunto de todos los conjuntos con un número infinito de elementos: también de dichos conjuntos existen infinitos; entonces, por definición, tal conjunto se contiene a sí mismo.

¿Una sardina es un conjunto? Depende de cómo nos pongamos de acuerdo. Si convenimos que no, entonces el conjunto,  $I$ , de todos los conjuntos que no contengan sardinas, no puede contener sardinas; por tanto, se contiene a sí mismo como elemento. Si, en cambio, observamos una sardina como un conjunto, será un conjunto de órganos y no contendrá sardinas. Así,  $I$  contendrá sardinas y no a sí mismo. En cada caso visto, la pregunta de si cierto conjunto  $I$  se contiene a sí mismo parece tener significado y no se ven razones, por ahora, para que no lo tenga siempre.

Pero si siempre tiene significado, entonces también lo tiene considerar el conjunto  $P$  de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos. Preguntémonos si  $P$  contiene a  $P$ . Si lo contiene, entonces  $P$  es un conjunto que no se contiene a sí mismo; absurdo. Entonces  $P$  no se contiene a sí mismo; pero entonces, por definición de  $P$  debe pertenecer a  $P$ ; aún absurdo.

Es cierto que dicha paradoja no señala la *necesidad* de tomar algún tipo de remedio lógico, dado que no concluye que tal concepto es *siempre* paradójico: sería así si el lenguaje metamatemático fuese matemático (clásico), pero por fortuna es semántico; advierte solamente de que, para un conjunto, la propiedad de pertenecer o no pertenecer a sí mismo puede

conducir a una paradoja. Bastaría por tanto evitar esa noción y olvidarse de lo sucedido. Pero quien tenga un mínimo de experiencia en Matemáticas sabe bien que una afirmación matemática o metamatemática, tiene infinitas formas equivalentes, de modo que “evitar la noción de autopertenencia o no autopertenencia” se desvela por lo general una tarea en absoluto banal. Por ejemplo, piénsese en un conjunto cuyo elemento genérico quede imprecisado en buen parte de la Teoría; cada vez que se haga una imposición o una suposición sobre dicho elemento, habría que acordarse de considerar (y excluir) el caso en el cual éste pueda coincidir con el conjunto de partida. Tomando a ejemplo las ecuaciones ordinarias de las Matemáticas, todo el mundo experimenta cómo son numerosos, sutiles y distribuidos en cualquier tipo de expresión, los errores debidos a una división entre cero; a pesar de que no hay nada más sencillo y claro que establecer que no tiene significado dividir entre cero. Si esto se verifica en un lenguaje matemático, podemos imaginar lo que ocurriría en un ámbito no privado de ambigüedad, como el metamatemático. Por consiguiente tal incertidumbre es capaz de contagiar de manera no fácilmente predecible los metateoremas que usan el concepto de *conjunto*.

## II.5. Teoría axiomática de los conjuntos

Los cuatro apartados anteriores han puesto en evidencia problemas y desacuerdos con respecto a algunos principios semántico-lógicos usados en algunas metademostraciones. Una vía de salida, como se ha dicho en el apartado I.3, es la de axiomatizar los conceptos que han originado el desacuerdo o el sin sentido. En especial, el concepto de *modelo* y por tanto de *conjunto*. Dicha axiomatización debería reducir a *teoremas* tanto la *corrección* como la *completitud semántica*, *demostrar* la

consistencia de *PA* y, posiblemente, hacer lo mismo para otros Sistemas axiomáticos fundamentales.

La Teoría axiomática de los conjuntos (en adelante, *TC*) es un Sistema clásico formal que asume los axiomas y las reglas del Cálculo predicativo clásico formal del primer orden con igualdad; a los cuales, como toda Teoría, añade *premisas propias*. Existen tres versiones, todas sustancialmente equivalentes: *NBG* (de: von Neumann, Bernays, Gödel), *ZF* (de Zermelo y Fraenkel) y *MK* (de Morse y Kelley). La primera es estructuralmente la más simple, porque sólo tiene 17 axiomas propios y ninguna nueva regla deductiva. En las otras dos, además de los axiomas propios, están presentes “reglas deductivas axiomáticas” o “esquemas de axiomas”; es decir, reglas que generan infinitos axiomas. Explicaremos más tarde las razones que justifican la oportunidad de este tipo de reglas deductivas. Entretanto, a continuación nos referiremos a la Teoría lógicamente más sencilla: la *NBG*. Para nuestros objetivos no es necesario enseñar todos los axiomas, ni profundizar en todas las cuestiones técnicas; nos limitaremos a presentar algunas observaciones de carácter general. Comencemos con una clasificación de los axiomas según cierto grado de *intuitividad*, comprensiva bien de una espontánea interpretabilidad, bien de una razón de ser (de ser axioma), a la luz de la aún vaga idea de “conjunto” que poseemos:

1. Algunos axiomas (*extensionalidad*, existencia *del conjunto vacío*, existencia de la *unión*, existencia de la *intersección*) son bastante intuitivos. Por ejemplo, el de *extensionalidad* traduce el hecho de que si dos *conjuntos* tienen los mismos elementos, son iguales (lo viceversa es un teorema). Lo traemos como ejemplo (nótese el nuevo símbolo  $\in$ , de pertenencia):



$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x=y)$$

2. Otros axiomas (*del par, de fundación, del complementario, de la permutación, de elección, del conjunto de partes*) son moderadamente intuitivos. El axioma *de fundación* tiene como consecuencia que un *conjunto* no puede pertenecer a sí mismo: si  $x$  es un *conjunto*, se obtiene siempre que  $x \notin x$ . Entonces, la paradoja de Russell no puede subsistir porque la colección de todos los *conjuntos* que no pertenezcan a sí mismo (es decir de todos los *conjuntos*) no puede ser un *conjunto*: de otra forma, se contendría a sí mismo y esto no es posible para un *conjunto*. El axioma *del conjunto de partes* es:  $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$ , donde  $z \subseteq x$  (que se lee “ $z$  es un *subconjunto* de  $x$ ”) es una abreviación de:  $\forall t (t \in z \rightarrow t \in x)$  (es decir “todo elemento de  $z$  es también elemento de  $x$ ”); por lo tanto, literalmente afirma: “para todo *conjunto*, existe un conjunto que contiene todos y sólo sus *subconjuntos*”.
3. Otros axiomas (*del infinito, del reemplazo*) no pueden calificarse como intuitivos. El *del infinito*, con una técnica inesperada, asegura la existencia de un conjunto con infinitos elementos; el *del reemplazo*, de conjuntos cuyos elementos gozan de propiedades de cierto tipo (nada espontáneo).

Más allá del hecho obvio de que esta clasificación es discutible, simplemente se ha querido subrayar que no todos los axiomas de la Teoría son intuitivos en el sentido antes convenido; desde luego ello parece innegable.

Evidenciamos ahora otras propiedades derivadas del Sistema. En tanto, *TC* está *bien definido*, en cuanto éste añade sólo axiomas *distinguibles* al Cálculo clásico predicativo del primer orden con igualdad<sup>29</sup>. Todo elemento de un *conjunto* es también un *conjunto*. No existen, por lo tanto, “elementos en estado puro”: todo ente de la Teoría es un *conjunto*.

El axioma *del conjunto vacío* afirma:  $\exists I \forall t (t \notin I)$ , es decir, simplemente que existe un conjunto *I* que no contiene elementos, indicado normalmente con  $\emptyset$ ; este axioma permite que una cadena de afirmaciones del tipo: “*a* es un conjunto que contiene *b*, que contiene *c*, que contiene *d*...” no sea siempre infinita. El conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos, incluso de sí mismo. En efecto, por definición de  $\emptyset$ , si *t* es un conjunto cualquiera,  $t \in \emptyset$  implica cualquier cosa, siendo falso. Entonces, es verdadero en particular también que:  $\forall t (t \in \emptyset \rightarrow t \in x)$ , es decir, precisamente  $\emptyset \subseteq x$ , para todo conjunto *x*.

El axioma *del conjunto de partes* se limita a suponer la existencia, para todo conjunto *I*, del conjunto de todos sus subconjuntos (usualmente indicado con  $P(I)$  y también llamado conjunto *de las partes* de *I*). Por otro lado, el único criterio que la Teoría proporciona para construir dicho conjunto está basado en la definición de  $z \subseteq x$ .

El axioma *de elección* es bastante famoso y merece algunos comentarios. Supongamos que un conjunto tenga como elementos conjuntos no vacíos, incluso en un número infinito. El axioma *de elección* afirma que existe un conjunto formado por

---

<sup>29</sup> En realidad, añade también reglas gramaticales *propias* (que omitimos) para los nuevos símbolos usados. Sin embargo, como se puede imaginar, dichas reglas están privadas de ambigüedad, de modo que el hecho de que no alteren la *distinguibilidad* de los enunciados, es metamatemáticamente indubitable.

un elemento  $e_1$  del primer conjunto, un elemento  $e_2$  del segundo, y así sucesivamente para todos. También éste es una simple declaración de existencia y no da ningún criterio para construir dicho conjunto: en efecto, no se excluye que alguno de los elementos  $e_i$  sea *no indivisible*. Es famoso fundamentalmente por el hecho de que, aun siendo espontáneo (hasta pasar desapercibido, entre muchos, a Russell), no puede deducirse como teorema: de hecho se ha metademostrado que es *indecidable*. Algunos *constructivistas* (seguidores de la Lógica intuicionista, por ejemplo) han resaltado, con placer, una crítica que se puede resumir con la siguiente pregunta irónica: “¿Resulta que, al final, habéis sido obligados a caracterizar algunos existentes (posiblemente no indivisibles), asumiendo para ellos cierta nueva propiedad, cual es la pertenencia a un nuevo conjunto?” En efecto, este axioma es una condición que limita parcialmente el grado de no indivisibilidad, antes absoluto, de ciertos existentes clásicos. No obstante, tales objetos quedan indeterminados en cualquier otro aspecto que no sea el pertenecer a un conjunto; por lo tanto, pueden continuar siendo, en general, absolutamente inalcanzables, sin que ello comporte contradicción alguna. En otras palabras: aceptamos la ironía, pero continuamos con inmutada consistencia hasta prueba contraria.

Como se ha dicho, se ha conseguido metademostrar que el axioma *de elección* es indecible en *TC*, gracias a los resultados de Gödel (1938) y Cohen (1963) (los cuales también han llegado a la misma conclusión para la *hipótesis del continuo*, de la cual hablaremos). Pero ¿por qué dicho axioma es necesario? Al principio no pocos matemáticos estaban convencidos de que podrían renunciar a él; la opinión cambió cuando se ha visto que gran parte de sus consecuencias o equivalencias son intuitivas y oportunas: también nosotros veremos alguna. Sin embargo, el

axioma produce también efectos indeseables que discutiremos más adelante.

Todos los axiomas de *TC* son expresiones de *primer orden*, en cuanto los cuantificadores actúan siempre y sólo sobre conjuntos, es decir, elementos del universo. De modo que en la Teoría *TC* no se consienten expresiones de orden sucesivo al primero.

## II.6. Conjunto de los números naturales

Antes de que la Teoría formal *TC* trate los temas fundamentales discutidos precedentemente, es necesario definir en ella algunos instrumentos matemáticos de base, además del conjunto de los números naturales. Lo haremos con la intención de que la explicación sea completa, aunque sintetizando en lo posible los aspectos técnicos: aun el lector que se limite a una fugaz lectura de éstos debería ser capaz de seguir el tema.

El axioma *del par*:

$$\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow (w=x \text{ o } w=y))$$

afirma que si  $x$  e  $y$  son dos conjuntos cualquiera, existe el conjunto  $z$  constituido solamente por  $x$  e  $y$ . Introduzcamos la notación  $z=\{x,y\}$  como abreviatura de dicho axioma; informalmente, ésta se lee: “ $z$  es el conjunto que contiene solamente  $x$  e  $y$  como elementos (denominado conjunto *del par*)”. Análogamente,  $z=\{x\}$  es una abreviación del teorema:  $\forall x \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow w=x)$ , que se deduce del axioma *del par* para  $x=y$ . Las escrituras que usan llaves anidadas, representan otras abreviaturas bien espontáneas. Por ejemplo,  $z=\{\{x\}\}$  es una abreviatura de: “ $z=\{t\}$  e  $t=\{x\}$ ” y así sucesivamente. De tal manera, la escritura  $z=\{\{x\},\{x,y\}\}$  es la abreviatura de un teorema (bastante largo

escrito en extenso) que establece que, para cada par de conjuntos  $x$  e  $y$ , existe el conjunto que tiene como elementos el conjunto que contiene solamente  $x$  y el conjunto que contiene solamente  $x$  e  $y$ . Tal conjunto se llama *par ordenado de  $x$  e  $y$*  y se indica brevemente con  $(x,y)$ . Es importante porque, a diferencia del conjunto del par, distingue el *orden* entre  $x$  e  $y$ : en efecto, la *pareja ordenada de  $y$  y  $x$* , es decir  $(y,x)$ , es un conjunto distinto del anterior, ya que contiene  $\{y\}$  en lugar de  $\{x\}$ . Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , no vacíos, se define *producto cartesiano de  $A$  por  $B$*  (notación  $A \cdot B$ ) el conjunto de todos los pares ordenados  $(x,y)$ , con  $x$  e  $y$  elementos arbitrarios, respectivamente, de  $A$  y  $B$ . Traducido en símbolos de  $TC$ , dicha definición corresponde a un teorema que afirma la existencia del conjunto mencionado. Todo conjunto de pares ordenados  $(x,y)$ , con  $x$  e  $y$  elementos arbitrarios, respectivamente, de  $A$  y  $B$  (o sea, todo subconjunto de  $A \cdot B$ ), se define *relación binaria* entre  $A$  y  $B$ . Para el axioma *de partes*, existe también el conjunto de todos los subconjuntos de  $A \cdot B$ , es decir, de todas las *relaciones binarias* entre  $A$  y  $B$ . Una vez más, en un plano metamatemático, no se hace más que llamar de cierto modo un conjunto cuya existencia está asegurada matemáticamente, es decir, por un teorema. Finalmente, se define *función  $f$  de  $A$  en  $B$* , una *relación binaria* entre  $A$  y  $B$  tal que, si  $(x,y)$  y  $(x',y')$  son dos pares ordenados arbitrarios de  $f$ , se tiene que:  $x=x' \rightarrow y=y'$ . En otros términos, en una *función*, la pareja de un elemento de  $A$  es un único elemento de  $B$  (mientras un elemento de  $B$  puede ser pareja de más elementos de  $A$ ). El teorema que afirma la existencia del conjunto de las funciones de  $A$  en  $B$ , para cada  $A$  y  $B$  no vacíos, es una secuencia bastante larga de símbolos de  $TC$ , como habrá intuido el lector. Éste es un típico “defecto” de  $TC$ : enunciados incluso bastante sencillos, pueden tener una enorme extensión y complejidad; lo cual desanima cualquier intento práctico de explicitar los teorema de  $TC$  en

lenguaje puramente simbólico. Lo que es importante desde el punto de vista lógico es que puede hacerse; pero *nadie* lo hace, no sólo porque el resultado sería extraordinariamente difícil de leer, sino sobre todo porque no sería de ninguna utilidad. En cambio, está bastante extendida la notación conjuntista “espontánea”, de la cual son ejemplo las llaves para indicar conjuntos y los paréntesis para las  $n$ -uplas ordenadas.

Si  $f$  es una función entre  $A$  y  $B$ , con la notación  $f(x)$  se acuerda indicar *la pareja* de  $x$ , elemento de  $B$ ; es decir, si, como antes, indicamos a éste último con  $y$ , se obtiene:  $y=f(x)$ . Limitándonos a usar un lenguaje espontáneo, definimos una *correspondencia biunívoca* entre dos conjuntos  $A$  y  $B$ : una *función*  $f$  en la cual  $f(x)$  existe para cada elemento  $x$  de  $A$  y donde si  $x_1 \neq x_2$  entonces también  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Además, para cada  $y$  perteneciente a  $B$ , debe existir un  $x$  de  $A$  tal que  $y=f(x)$ . En pocas palabras, una *correspondencia biunívoca* entre  $A$  y  $B$  es una función “uno a uno” (mejor dicho, *inyectiva*) que involucra a todo elemento de  $A$  y de  $B$ . Este instrumento consiente a la Teoría *TC* “contar” los elementos de un conjunto, como aclararemos.

En *TC* se puede demostrar el siguiente teorema: existe al menos un conjunto  $N$ , al menos un conjunto  $x_0$ , al menos una función  $s$  entre  $N$  y  $N$  y al menos dos funciones “+” y “.” entre  $N \cdot N$  y  $N$ , tales de verificar las siguientes condiciones:

- 1)  $x_0 \in N$
- 2)  $\forall x \in N (s(x) \in N)$
- 3)  $\forall x \in N (s(x) \neq x_0)$
- 4)  $\forall x \in N \forall y \in N (s(x)=s(y) \rightarrow x=y)$
- 5)  $\forall x \in N (x+x_0=x)$

- 6)  $\forall x \in N \forall y \in N (x+s(y)=s(x+y))$   
 7)  $\forall x \in N (x \cdot x_0 = x_0)$   
 8)  $\forall x \in N \forall y \in N (x \cdot s(y) = x + x \cdot y)$   
 9)  $\forall M \in P(N) ((x_0 \in M \text{ e } \forall x \in M (s(x) \in M)) \rightarrow M = N)$

donde para las funciones “+” e “·” se acuerda escribir  $x+y$  y  $x \cdot y$  en lugar de  $+(x,y)$  y  $\cdot(x,y)$ . No hay duda de que un lector “optimista”, según el mismo sentido dado en el primer apartado, debería concluir que los “espontáneos naturales” satisfacen tales condiciones. En efecto, puesto  $x_0=0$  y  $s(x)=x+1$ , se ve bien que las condiciones 1)-8) son equivalentes a los ocho axiomas de *PA*. En cambio existe sin duda un poco de incertidumbre para establecer el grado de afinidad de la condición 9), llamada *principio de inducción completa*, con el principio de inducción de *PA*: en efecto en la 9) se habla de *cualquier subconjunto* de  $N$  ( $P(N)$  es el conjunto de las partes de  $N$ ), mientras en el principio de inducción de *PA* se habla de cualquier proposición de *PA* con al menos una variable libre: ¿existe correspondencia exacta entre ambas cosas? Veremos. En todo caso, esta incertidumbre no parece cuestionar la espontaneidad del principio de inducción completa: si un subconjunto cualquiera de  $N$  contiene el cero y el sucesor de cada uno de sus elementos, entonces es totalmente intuitivo que contenga todos los números naturales. Y puesto que no puede contener elementos que no sean también de  $N$  (siendo un subconjunto suyo), tendrá que coincidir con  $N$ . Pero, aquí, estas observaciones “confiadas” sólo tienen el valor de un sencillo comentario: recordemos que debemos rechazar cualquier intuitividad de los naturales y toda afinidad (sobre todo si no es precisada claramente) de las citadas condiciones con los axiomas de *PA*.

Ahora bien, resulta que existen infinitos conjuntos que satisfacen las condiciones anteriores. Sin embargo, todos estos conjuntos son entre ellos *isomorfos*. Definiremos más adelante qué es exactamente un *isomorfismo* entre dos conjuntos: hacerlo ahora sería una complicación innecesaria. Por el momento es suficiente anticipar el comentario, más bien vago, de que la diferencia entre dos conjuntos isomorfos arbitrarios  $N_1$  y  $N_2$  no es *operativamente* significativa.

Sin suponer nada particular, decimos  $N$  uno de los infinitos conjuntos, elegido arbitrariamente, que satisfacen las condiciones anteriores. Lo llamaremos *conjunto de los números naturales*. Mediante  $N$ , desarrollaremos los discursos sucesivos, obteniendo determinados resultados. Después, cuando hablemos del *isomorfismo*, aclararemos qué consecuencias habría tenido en el estudio realizado la elección de un conjunto distinto, isomorfo a  $N$ . Los elementos de  $N$  serán llamados números naturales *conjuntísticos*, para subrayar que tienen una definición formal y no intuitiva; de hecho, dado que pertenecen a un *conjunto*, éstos son también *conjuntos*.

Disponiendo de  $N$  y de sus elementos, en  $TC$  es posible definir rigurosamente las  $n$ -uplas de conjuntos, donde  $n$  es un natural *conjuntístico*: simplemente, todos los conjuntos que pueden ponerse en *correspondencia biunívoca* con el conjunto:  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Un criterio formal del “contar”. Además, se pueden definir también las  *$n$ -uplas ordenadas* (o *sucesiones ordenadas*, o *secuencias ordenadas*) de  $n$  conjuntos  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , como obvia generalización del par ordenado. Con tales definiciones seremos capaces de formalizar rigurosamente en  $TC$  el concepto de “secuencia ordenada de símbolos”, que interviene, como se ha visto, en las *premisas* de la mayoría de los Sistemas axiomáticos. Solamente hace falta, previamente, que los símbolos del Sistema se conviertan en auténticos *conjuntos*.



Consecuentemente, se pueden también generalizar las *relaciones*: aquellas  $n$ -arias entre  $n$  conjuntos  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , son definidas como conjuntos de  $n$ -uplas ordenadas, constituidas por un elemento de  $a_1$ , después uno de  $a_2, \dots$  etc., hasta  $a_n$ . Esto servirá para la formalización de los predicados clásicos, como veremos.

## II.7. La unificación de la Matemática

En apariencia, la potencia de la Teoría  $TC$  es desconcertante para la Matemática. La formalización del concepto de conjunto, en efecto, no produce como único resultado la resolución de los problemas expuestos anteriormente; sino que comporta que toda la Matemática ordinaria se pueda desarrollar dentro de la única Teoría axiomática de los conjuntos. No obstante, este espectacular hallazgo epistemológico está condicionado por algunas limitaciones fundamentales, que consideramos útil resumir, desde ya, en tres puntos:

- 1) Las ventajas ofrecidas por la unificación conjuntista son exclusivamente de naturaleza conceptual y no práctica: en efecto, como ya hemos observado, la completa formalización en  $TC$  de una proposición incluso banal puede dar lugar a una impropionable complejidad.
- 2) Toda ambigüedad semántico-lógica resuelta por la formalización ofrecida por la Teoría  $TC$ , no “desaparece”, sino que se vuelve a presentar en la metamatemática que define e interpreta el lenguaje de  $TC$ .
- 3) No siempre la representación en  $TC$  es capaz de reproducir *fielmente* el Sistema original, incluso en el caso de que éste sea formal.

Naturalmente, intentaremos ilustrar con la mayor profundidad posible los últimos dos puntos. Por lo que respecta al más importante de ambos, el tercero, será necesario esperar hasta la tercera Parte del libro.

Empezaremos aclarando cuál es la Matemática *ordinaria* que puede representarse en *TC*. Sea *SC* un Sistema axiomático clásico cualquiera. Las reglas gramaticales y deductivas especifican colecciones: de las proposiciones y de los teoremas. Si es posible interpretar dichas colecciones con los entes de la Teoría *TC*, es decir con *conjuntos*, el Sistema axiomático se dirá *representable* en *TC*. Como se ve, es una condición bastante amplia. Si recordamos la definición de Sistema *bien definido*, allí se habla de “conjuntos”, o colecciones, de proposiciones y teoremas. Ahora bien, *TC* ha sido construido precisamente con el objetivo de hacer que sus entes matemáticos, los *conjuntos*, sean lo más parecidos y análogos posible a los “conjuntos”, o colecciones, metamatemáticos; asumiendo que ello se haya realizado de manera satisfactoria, se convendrá que todo Sistema axiomático *bien definido*, formal o no, es representable en *TC*. Por lo tanto, seguidamente admitiremos que la Matemática representable en *TC* es simplemente toda aquella *bien definida*: es decir, toda aquella que normalmente se considera “Matemática”.

La técnica de representación en *TC* es sencillamente aquella de formalizar en su lenguaje las *premisas* del Sistema *SC*, es decir, los axiomas y las reglas, gramaticales y deductivas, de este último. Por tanto, la metamatemática que funda la Teoría axiomática *SC* se codifica en el lenguaje conjuntista y *SC* mismo se representa dentro de *TC* como un conjunto de conjuntos (llamado en ocasiones *Estructura*). A continuación veremos con cierto detalle cómo esto se lleva a cabo y cuáles son sus

consecuencias. En todo caso, no es prematuro esbozar ya el punto crítico de la cuestión. La semántica que funda el Sistema arbitrario *SC* puede dividirse en dos partes: la semántica relativa a las premisas del Cálculo predicativo clásico formal del primer orden en el que el Sistema *SC* se basa (que diremos *clásica*); y la semántica *propia*, relativa a las premisas *propias* de *SC*. Con “relativa a las premisas”, incluimos tanto la semántica que *define* las premisas, como aquella *contenida* en las premisas (si el Sistema es formal, solamente las reglas gramaticales y deductivas contienen semántica). Cuando *SC* se representa en *TC*, la semántica clásica “desaparece” sólo aparentemente: en efecto, ésta “vuelve a entrar”, sin cambios, en las premisas clásicas de *TC*. La eliminación de la semántica propia, sin embargo, en general convierte en no *fiel* (en un sentido que dentro de poco precisaremos) la representación de *SC*, con todas las consecuencias que ello supone.

Examinemos con más detenimiento los pasos de la formalización, manteniendo el empeño de no cansar al lector con demasiados tecnicismos. Las proposiciones de *SC* se especifican por sus reglas gramaticales, cuya parte sustancial (por norma preponderante) está constituida por las reglas gramaticales del Cálculo predicativo clásico formal del primer orden en el que *SC* se basa. El primer paso es la definición en *TC* del *conjunto* de todos los símbolos usados por *SC*, llamémoslo *S*. Son parte de *S* los símbolos clásicos: *not*, *o*,  $\forall$ , etc.; pero éstos deben ser considerados como conjuntos, puesto que todo elemento de un conjunto es un conjunto. Por lo tanto, serán objetos que *corresponden* a los símbolos clásicos pero, en realidad, absolutamente distintos de ellos. Los distinguiremos con un asterisco: *not\**, *o\**,  $\forall^*$ ,  $\rightarrow^*$ , etc.. Del mismo modo, debe introducirse un conjunto en

correspondencia con todo predicado y símbolo *propio* de  $SC$ . Por poner un ejemplo muy sencillo, supongamos que en  $SC$  esté definido el predicado a dos variables “ $x$  es triple de  $y$ ”, representado por la notación  $\underline{I}(x,y)$  y oportunos axiomas. Puesto que  $x$  e  $y$  son variables en un conjunto universo  $U$ , el conjunto de pares ordenados de  $x$  e  $y$  tales que  $x$  es triple de  $y$ , es un subconjunto de  $U \cdot U$ , es decir, una relación binaria entre  $U$  y  $U$ . La formalización de  $\underline{I}(x,y)$  comienza, por tanto, con la introducción de un conjunto de par ordenado que podemos llamar  $(x,y)_T$ : por ahora sencillamente un elemento genérico de  $U \cdot U$ . Suponiendo que “ $x$  es triple de  $y$ ” sea el único predicado, tendremos por tanto:  $S = \{not^*, o^*, \forall^*, etc., x^*, y^*, a^*, etc., p_1^*, \dots p_n^*, (x,y)_T\}$ , donde  $p_1, \dots p_n$  son los símbolos propios de  $SC$  y  $(x,y)_T \in U \cdot U$ . Si está presente también la igualdad (una circunstancia muy común), se introducirá otra relación binaria, cuyo genérico elemento podríamos llamar  $(x,y)_=$ . En general, para todo predicado a  $n$  variables  $\underline{P}(x_1, \dots x_n)$ , se introducirá una relación  $n$ -aria entre elementos de  $U^n$  (es decir,  $U \cdot U \cdot \dots \cdot U$ ,  $n$  veces). Esto es suficiente para lo que ahora nos importa, es decir, para la definición de los símbolos  $S$ ; pero, naturalmente, los pares (o  $n$ -uplas) introducidos deberán luego caracterizarse en base a los axiomas que definen formalmente los predicados.

Completada la definición de  $S$ , se pasa a definir el conjunto de las proposiciones de  $SC$ , llamémoslo  $P$ , es decir, el conjunto de oportunas *secuencias ordenadas* de elementos de  $S$ . La formalización de las reglas gramaticales del Cálculo clásico, procede sin problemas; como ejemplo, formalicemos en  $TC$ , aun adoptando la notación espontánea, la regla gramatical implícita “si  $A$  es una proposición cualquiera también  $notA$  lo es”:

$$(s_1, s_2, \dots s_n) \in P \rightarrow (not^*, s_1, s_2, \dots s_n) \in P, \forall (s_1, s_2, \dots s_n) \in S^n$$

Naturalmente ésta no es más que una expresión definitoria implícita de  $P$ .

Para completar la definición de  $P$  se deben, pues, formalizar las reglas gramaticales *propias* de  $SC$ . Normalmente, la semántica que define las reglas gramaticales propias de los Sistemas clásicos se limita a usar conceptos plenamente formalizables en el lenguaje conjuntista; en ella típicamente, como se ha visto en los ejemplos al comienzo del libro, se usa de nuevo el concepto de “secuencia ordenada”, que sabemos perfectamente formalizable en  $TC$ . En términos más exactos, queremos decir que toda proposición (correcta) de  $SC$  es representable con una oportuna cadena de símbolos de  $TC$ ; y que una vez fijada una cadena cualquiera de símbolos de  $TC$  es posible concluir, con sólo el análisis de su secuencia, si tal cadena representa o no una proposición (correcta) de  $SC$ . En este caso diremos, precisamente, que las reglas gramaticales propias son *reproducidas fielmente* en el lenguaje conjuntista; o bien, que la semántica que las define queda suprimida sin defectos en la codificación en  $TC$ . Como decíamos, no es en absoluto limitativo suponer que esto se verifique siempre: por norma, en efecto, el respeto de la gramática obedece solamente a principios de idoneidad “estructural” de las proposiciones; y, en todo caso, un eventual (inusual) criterio irreduciblemente semántico en la selección de las proposiciones, puede ser englobado en las reglas deductivas, es decir, en la definición del objetivo final: los teoremas.

Pasemos a la definición de los conjuntos de los axiomas y de los teoremas de  $SC$ , que llamamos  $H$  y  $T$ . Como antes, entre los axiomas y reglas deductivas, podemos distinguir una parte *clásica* y una parte *propia*. Para la parte clásica, se impone en primer lugar que toda  $n$ -upla ordenada de símbolos-conjunto representada por un axioma *clásico* de  $SC$ , sea elemento de  $H$ .

Luego se formalizan las reglas deductivas clásicas, lo cual produce caracterizaciones implícitas para  $T$ . Como hemos esbozado en el ap. I.6, las reglas deductivas del Cálculo clásico requieren distinguir si cada variable contenida en una proposición es aparente o libre. Pues bien, esto puede traducirse sin problemas en el lenguaje conjuntista, gracias a la formalización de “secuencia ordenada”; por ejemplo, a través de ella podemos codificar el hecho de que una variable  $x^*$  sea precedida de  $\forall^*$  o  $\exists^*$ , en cuyo caso será aparente. Consecuentemente, la formalización de *sustitución* y *modus ponens* se realiza sin dificultad. Por ejemplo, la *modus ponens* se codifica con la siguiente expresión definitoria implícita de  $T$ :

$$((s_1, \dots, s_n) \in (HoT) \text{ e } (s_1, \dots, s_n, \rightarrow^*, t_1, \dots, t_m) \in (HoT)) \rightarrow (t_1, \dots, t_m) \in T, \forall (s_1, \dots, s_n) \in P$$

La definición del conjunto  $T$  debe ser completada con la formalización de todos los axiomas y reglas deductivas *propias*. Como hemos anticipado, éste es el punto crítico. Ante todo, tales reglas, para funcionar, podrían necesitar la asignación de un valor semántico para las proposiciones, en cuyo caso  $SC$  no sería formal. Evidentemente, el lenguaje simbólico del formal  $TC$  no podrá reproducir este tipo de deducciones. Sin embargo, incluso en el caso en que  $SC$  sea formal, podrían surgir problemas. Recordemos que el respeto de la formalidad para el Sistema, impone solamente que las proposiciones estén privas de significado; pero la definición de las *premisas* del Sistema se realiza con un lenguaje semántico sobre el cual no hemos hecho ninguna hipótesis particular. Por ejemplo, la especificación de la colección de los axiomas propios que se añade a los clásicos, podría no ser plenamente reproducible en lenguaje conjuntista

formalizado. Para poner un ejemplo concreto, sea  $S$  un Sistema formal dotado de un modelo  $M$ , para el cual suponemos un buen grado de intuitividad e inequívocabilidad de ámbito metamatemático (como el modelo euclidiano de la Geometría). Consideremos ahora el Sistema  $S'$  obtenido de  $S$  añadiendo como axiomas todos los (infinitos) enunciados de  $S$  que, interpretados en  $M$ , resultan *verdaderos*. Si  $S$  está *bien definido* y si, como estamos suponiendo, no hay problemas para interpretar un arbitrario enunciado  $E$  en  $M$  y extraer su valor de verdad, entonces también  $S'$  está *bien definido*, siendo sus axiomas *distinguibles* (ap. 1.9). Además, la formalidad es respetada: es necesario interpretar los enunciados de  $S$  en  $M$ , sólo con el fin de establecer si son o no son axiomas de  $S'$ ; una vez hecho esto,  $S'$  deduce sin atribuir ningún significado a los enunciados, como  $S$ . Pero, ¿es posible reproducir en lenguaje formal conjuntista el reconocimiento de que cierto enunciado de  $S$  es un axioma de  $S'$ ? En  $TC$  no hay dificultades para definir un conjunto que represente la colección de los axiomas de  $S'$ , porque, como veremos pronto, es posible tanto formalizar el concepto de modelo, como introducir una *función* que represente la verdad relativa al mismo. Pero definir un conjunto para representar una colección no significa necesariamente haber traducido formalmente todas las propiedades que se consideran metamatemáticamente válidas para la misma colección; y, por tanto, todos los criterios que consienten concluir o excluir si cierto elemento pertenece a dicha colección (en cuyo caso, precisamente, se dice que la representación de la colección es *fiel*). En nuestro caso, el criterio implica el concepto de verdad relativo al modelo  $M$ ; y, como ya hemos constatado en la definición de interpretación del ap. II.3, la verdad formalizada toma distancia de la verdad semántica. Claramente, si dentro de  $TC$  no fuera posible reconocer todos los axiomas de  $S'$ , tampoco

sería posible reconocer todos los teoremas de  $S'$ . En concreto, sea  $t$  un teorema de  $SC$ , y el conjunto  $t^*$  la secuencia ordenada de los símbolos-conjunto correspondiente a éste en  $TC$ . Si  $T$  es el conjunto que representa la colección de los teoremas de  $SC$ , a la demostración de que  $t$  es un teorema de  $SC$ , existente e indivisible en el seno de  $SC$  (por su *buena definición*), debería corresponder la demostración del enunciado " $t^* \in T$ " en el seno de  $TC$ . En el caso, pues, en que la representación conjuntista no sea *fiel*, tal demostración podría no estar ya disponible; es decir, " $t^* \in T$ " ser indemostrable en  $TC$ . En otros términos, la metamatemática relativa al Sistema  $TC$ , podría no reconocer *todos* los teoremas de la Teoría  $SC$  aquí representada. Porque ella no puede suplantar enteramente la metamatemática que se refería al original Sistema  $SC$  (la cual ha sido eliminada en la representación conjuntista).

Aunque por el momento falten pruebas directas de *no fidelidad* (y aún se puede esperar que todos los Sistemas formales sean *fielmente* representables), parece, pues, del todo oportuno considerarla como posible. No obstante, no daremos algún peso conclusivo a la charla anterior: la finalidad, hasta aquí, ha sido solamente plantear la duda. Sólo en la tercera Parte, en efecto, cuando se tendrá a disposición el concepto de *función recursiva*, podremos formalizar el concepto de *fidelidad* representativa y tendremos ejemplos incontrovertibles. Entonces observaremos también que, en rigor, no hay nada que impida reintroducir en la metamatemática definitoria del Sistema  $TC$ , toda especie de semántica *propia* relativa a las premisas de un Sistema cualquiera; es decir, de obviar siempre la *no fidelidad* representativa. El problema, más bien, es el precio pagado, que



frustraría la ventaja principal de la representación conjuntista<sup>30</sup>.

Entre los axiomas propios están los que definen formalmente los predicados; en los casos comunes, su traducción conjuntista no da problemas de *fidelidad*. Por ejemplo, en nuestro caso, el predicado  $\underline{T}(x,y)$  puede ser definido integralmente por la condición “ $\underline{T}(x,y) \leftrightarrow x=3 \cdot y$ ”. Por tanto, la siguiente expresión conjuntista:

$$\forall x \in U \forall y \in U (((x,y)_T, \leftrightarrow^*, x^*, =^*, 3^*, \cdot^*, y^*) \in H)$$

traduce fielmente su significado. Los axiomas de este tipo, que contribuyen a definir el conjunto  $H$ , completan la codificación de los predicados en los correspondientes conjuntos, constituidos por  $n$ -uplas ordenadas de  $U$ .

Finalmente, gracias a la discriminación de la variables libres y aparentes, es también posible distinguir el subconjunto de los enunciados,  $E$ , de  $P$ ; con ello se concluye la representación de  $SC$  en  $TC$ , puesto que en ella hay una reproducción de todo aquello que el Sistema  $SC$  puede expresar ( $P$ ), afirmar ( $E$ ), suponer ( $H$ ) y concluir ( $T$ ).

Por lo visto, aparte de los problemas de *fidelidad*, parece que la representación en  $TC$  puede realizarse siempre. Ésta fallaría en un sólo caso: si  $TC$  fuera inconsistente, mientras  $SC$  consistente. En efecto, en tal caso  $TC$  puede deducir cualquier cosa, como  $(s_1, \dots, s_n) \in T$  y también  $(not^*, s_1, \dots, s_n) \in T$  y entonces  $T$  no puede representar el conjunto de los teoremas de  $SC$ . La representación de  $SC$ , “pasando a través” del inconsistente  $TC$ , se viciaría. Suponiendo entonces  $TC$  consistente, que es lo que de ahora en adelante haremos siempre, se debe admitir que la

---

<sup>30</sup> En efecto, encontraremos que esto implicaría la pérdida de la *efectiva axiomatizabilidad* de  $TC$  (una directa característica de “mecanicidad”, como veremos), aun respetando su formalidad.

representación de un cualquiera  $SC$  en  $TC$ , realizada en el modo descrito, funciona siempre, incluso si  $SC$  fuera inconsistente.

En definitiva, la reducción conjuntista impone que *el único lenguaje metamatemático que, todo lo más, pueda ser usado en Matemática sea aquel que se refiere al Sistema matemático  $TC$* : el de todos los demás Sistemas axiomáticos se elimina. En general, con los posibles problemas de *no fidelidad* que hemos esbozado. Subrayemos que la metamatemática “que, todo lo más, hace referencia a  $TC$ ”, no es solamente aquella que funda  $TC$  y que se usa en sus demostraciones: sobre la base de lo observado en el ap. I.3, ésta incluye *toda* propiedad semántica suficientemente clara y rigurosa que, eventualmente (es decir, no necesariamente), haga referencia al solo Sistema  $TC$ . Por ejemplo, forma su parte el mismo reconocimiento de la idoneidad de la representación en  $TC$  de una cierta Teoría axiomática clásica.

No es posible representar  $TC$  en el mismo  $TC$ . Por ejemplo, los símbolos clásicos *not*, *o*,  $\forall$ , etc., que aparecen en los axiomas definitorios de la Teoría clásica  $TC$ , aunque sean los mismos que se utilizan en cualquier otra teoría clásica, no pueden ser reducidos a conjuntos, puesto que ¡sirven aquí para definir los mismos conjuntos! Por lo tanto, el “conjunto” de las proposiciones o de los teoremas de  $TC$  no puede ser definido en el mismo  $TC$ : es decir, no puede ser un *conjunto*. Así, por ejemplo, el *modus ponens* reaparecerá en forma irrenunciablemente semántica en seno a  $TC$ . Conforme a cuanto ya afirmado, la semántica clásica de los Sistemas representados en  $TC$  se reintroduce a través de la misma definición de  $TC$ . No podría ser de otra forma: un tipo de irreducible metamatemática es indispensable en la fundación de todo Sistema axiomático no banal, como sabemos.

En  $TC$  es posible formalizar el problema de la consistencia de

un Sistema clásico allí representado. Por ejemplo, la expresión:  $\exists p(p \in E \text{ e } p \notin T)$  enuncia que existe un enunciado de *SC* que no es un teorema de *SC*; y por tanto la consistencia de *SC*. Si ésta (o su negación) fuera demostrable, es decir, si fuera un teorema de *TC*, resolveríamos el problema de la consistencia para *SC*; sin olvidarse de que todo ello está *bajo la hipótesis de la consistencia para TC*. De todas formas, veremos que *TC* está “bastante lejos” de ser *completo*, por tanto es posible que el enunciado mencionado sea indecidible. Así, no es cierto que *TC* pueda resolver la consistencia de todos los Sistemas axiomáticos clásicos; no obstante, esto ocurre para las Teorías fundamentales de la Matemática, como pronto describiremos.

Asimismo, debemos resaltar que *TC* consigue representar *fielmente* todas las usuales Disciplinas matemáticas formales. Detengámonos, por ejemplo, en *PA*. El único elemento crítico, como se ha visto, es el principio de inducción. Sustancialmente, éste hace referencia a “sustitución” y “proposición con al menos una variable libre”; conceptos que, como ya se ha observado, pueden ser traducidos perfectamente en el lenguaje de *TC* gracias al concepto de “secuencia ordenada”. Una circunstancia análoga se verifica para todas las Disciplinas clásicas comúnmente usadas en Matemática.

## II.8. Teorema de corrección

Finalmente, llegamos a cómo *TC* resuelve los problemas precedentemente expuestos. Obviamente, la esperanza de anular por arte de magia las ambigüedades descritas es falaz, siendo ella misma, a fin de cuentas, una Teoría axiomática como las demás. En efecto, veremos que las resuelve para los demás Sistemas clásicos, asumiéndolas ella misma. Esto es un indicio bastante elocuente sobre la naturaleza real de las ventajas de la

unificación conjuntista de la Matemática.

Los conceptos de *interpretación* y por tanto de *modelo* de un Sistema axiomático clásico representado en *TC*, pueden ser definidos formalmente en el mismo *TC*, codificando en lenguaje conjuntista la definición de *interpretación* dada en el apartado II.3. Está claro que esto no se puede hacer para el mismo Sistema *TC*. La definición en *TC* de una interpretación para el propio *TC* pasaría por la definición *formal* del *conjunto* universo *U*, en el cual varían todos los entes de *TC*, es decir, todos los conjuntos; por tanto *U* se contendría a sí mismo, lo que no está consentido, como sabemos. Es sorprendente que hayamos topado con la enunciación de dicha obvia, aunque crucial, puntualización, únicamente en un autor<sup>31</sup>. Una *interpretación de TC* es por lo tanto un concepto completamente distinto de la interpretación de cualquier otro Sistema axiomático representado en *TC*: su carácter informal es imprescindible. No queda que definirlo mediante las condiciones citadas en el apartado II.3; pero sustituyendo el término *conjunto* por un sinónimo irrenunciablemente semántico como, por ejemplo, “colección”. Así, como consecuencia metamatemática de haber formalizado el concepto de conjunto, ¡resulta que necesitamos un concepto similar pero informal! En otras palabras, *necesitamos en todo caso* un concepto ineludiblemente semántico de “conjunto”. Para los entusiastas de la Teoría axiomática de los conjuntos, el resurgir del concepto de *colección* de las cenizas del concepto informal de conjunto, revela que la Teoría *TC* ya es inmejorablemente fundamental; para los detractores de la misma, ¡que es inútil! Resumiremos más tarde ambas posiciones opuestas.

---

<sup>31</sup> Graham Priest: *In Contradiction: a Study of the Transconsistent*.

Seguidamente, convendremos poner entre comillas los “modelos” de  $TC$  para recordar que éstos son conceptos informalizables, necesariamente semánticos. Por otra parte, esto era de esperar: una interpretación de un Sistema axiomático, y por tanto un modelo suyo, es un concepto íntimamente semántico; no es, al final, más que una colección de frases significativas. ¿Qué sentido tendría intentar eliminar el significado? En efecto, éste no puede desaparecer: en los mismos Sistemas axiomáticos representados en  $TC$ , el significado se reintroduce a través de la interpretación de las proposiciones de  $TC$ . En otras palabras, cuando se considera un “modelo” de  $TC$ , también los modelos de las Teorías representadas en  $TC$ , aquí objetos puramente simbólicos, recobran valor semántico, es decir, significado.

Un punto fundamental para realizar la deseada formalización, es la definición en  $TC$  de una *función de verdad* relativa a la interpretación. En ella se introducen novedades cruciales. De hecho tal *función*, llamémosla  $v$ , no sólo debe asociar a cada enunciado de la Teoría clásica representada un valor “ $V$ ” o “ $F$ ” satisfaciendo los puntos b) y c) del ap. II.3; sino también satisfacer otras oportunas condiciones “clave” que ponen los valores “ $V$ ” y “ $F$ ” en relación con los conectores lógicos y cuantificadores del Cálculo predicativo clásico formal de primer orden (antes reducidos a conjuntos:  $not^*$ ,  $o^*$ ,  $\forall^*$  etc.). Citaremos sólo dos condiciones:

$$1a) v(s_1, s_2, \dots, s_n) = V \leftrightarrow v(not^*, s_1, s_2, \dots, s_n) = F, \forall (s_1, \dots, s_n) \in E$$

$$1b) v(s_1, s_2, \dots, s_n) = F \leftrightarrow v(not^*, s_1, s_2, \dots, s_n) = V, \forall (s_1, \dots, s_n) \in E$$

$$2) ((v(s_1, \dots, s_n) = F) o (v(q_1, \dots, q_n) = V)) \leftrightarrow v(s_1, \dots, s_n, \rightarrow^*, q_1, \dots, q_n) = V,$$

$$\forall (s_1, \dots, s_n) \in E, \forall (q_1, \dots, q_n) \in E$$

donde  $E$  indica el conjunto de los enunciados. El primer par es sencillamente la formalización de los principios de no contradicción y tercero excluido. La segunda, forma parte de las nuevas cláusulas y establece que a un enunciado del tipo " $A \rightarrow *B$ " se le asigne el valor *verdadero* si y sólo si " $A$ " tiene el valor *falso* o bien (no exclusivo) " $B$ " el valor *verdadero*. De ello deriva que si " $A$ " y " $A \rightarrow *B$ " son ambos *verdaderos*, también " $B$ " deberá ser necesariamente *verdadero*. Por consiguiente, estas condiciones *establecen explícitamente la corrección del modus ponens* en todo Sistema clásico representado en  $TC$ ; análogas cláusulas establecen la corrección de las otras tres reglas deductivas clásicas. En definitiva, se obtiene entonces que *todo modelo de cualquier Cálculo predicativo clásico formal del primer orden es un modelo correcto* (teorema de corrección). En efecto, susodichas condiciones imponen explícitamente considerar sólo los conceptos de verdad que reflejan el significado más intuitivo de los conectores lógicos y cuantificadores; o, lo que es lo mismo, restringen las interpretaciones a aquellas en las cuales los conectores clásicos obedecen a las acostumbradas tablas de verdad; con el resultado de que todos los modelos son correctos. Así, la *demostración* rigurosa de la corrección se obtiene sin ningún criterio especial o revolucionario, sino sencillamente restringiendo el ámbito de las interpretaciones.

Como consecuencia de la formalización de *modelo*, también la propiedad de que *todo Sistema clásico con un modelo es consistente*, se convierte en *teorema* de  $TC$ . Pero, naturalmente, cuando aplicado al mismo  $TC$  queda un *metateorema*. Esto vale también para la *corrección* de sus "modelos": recordando las críticas al metateorema de corrección, para  $TC$  no queda más que *asumir* las convenciones metamatemáticas correspondientes

a las condiciones formales ahora definidas; lo que significa sencillamente *convenir* de limitarse al significado común de los conectores lógicos y cuantificadores, resultando “modelos” necesariamente correctos, si existentes, para *TC*.

Naturalmente, es muy importante que *TC* tenga al menos un “modelo” correcto. Si no fuera así, se produciría un dramático desmoronamiento de la conjuntística. De hecho, esto significaría, según los principios de la Lógica clásica, que en realidad no existe una *colección* (recuérdese, un concepto inevitablemente semántico) de objetos llamados *conjuntos* que satisfacen las premisas de *TC* y que constituyen una interpretación clásica. Por ejemplo, aunque *TC* deduzca que “existe el conjunto de los números naturales”, es decir, en concreto, una cadena del tipo “ $\exists N(x_0 \in N \text{ e } \dots \text{etc.})$ ”, desde un punto de vista semántico (metamatemático), dicho conjunto no sería interpretable, no existiría. Caería así la correspondencia entre el símbolo “ $\exists$ ” y su correspondiente concepto semántico. El desacuerdo se transmitiría a todo Sistema axiomático representado en *TC*, por lo que afectaría a todos los teoremas de la Matemática reproducible en *TC*. Por otra parte, si todo “modelo” de *TC* fuera incorrecto, por las mismas razones, no existiría una interpretación en la cual todo teorema de la Matemática reproducible en *TC* fuese ciertamente verdadero. Inversamente, uno de los resultados más deseados es justamente la posibilidad de “construir” modelos correctos para las Teorías axiomáticas fundamentales a partir de un “modelo” correcto de *TC*, como veremos dentro de poco.

Por suerte, para garantizar la existencia de “modelos” correctos para *TC*, basta la hipótesis (ya descubierta como necesaria) de que éste sea consistente: en tal caso, la existencia y corrección de sus “modelos” están aseguradas respectivamente por el *metateorema de completitud semántica* (cuya

metademostración, válida para el Cálculo predicativo clásico formal con igualdad que funda *TC*, puede generalizarse fácilmente a todo *TC* porque sólo se añaden 17 axiomas exhibidos) y por el ahora citado *metateorema* de corrección.

¿El teorema de corrección vale para todo Sistema clásico? El problema surgiría a causa de las reglas deductivas *propias* del Sistema: puesto que hemos admitido total arbitrariedad sobre las mismas, no es seguro que siempre sean correctas, naturalmente. En los casos normales, de todas formas, se puede establecer una oportuna *convención*. La idea es eliminar las reglas deductivas propias, sustituyéndolas por un conjunto infinito de axiomas (si fueran finitos, significaría que los teoremas *propios* podrían enumerarse finitamente y las reglas deductivas propias no serían necesarias), dejando sin modificar – admitiendo que esto sea posible – el conjunto de los teoremas de la Teoría original. Esto comporta convenir que *las cuatro reglas deductivas del Cálculo predicativo clásico formal del primer orden sean las únicas reglas deductivas del Sistema clásico*: las demás, aquellas *propias*, se deben reconsiderar como generadoras de *axiomas*. Con esta nueva apariencia, éstas se llaman ahora “esquemas axiomáticos”. La ventaja esencial de esta estrategia, desde un punto de vista meramente práctico, es que *todo modelo del nuevo Sistema es un modelo correcto*, en cuanto todas sus reglas deductivas son correctas<sup>32</sup>. En principio, evidentemente, no es seguro que eso se pueda hacer siempre, que el Sistema resultante se mantenga *bien definido* como el original. Pero no existen problemas en los casos normales, es decir, en todos los Sistemas

---

<sup>32</sup> Este asunto normalmente es omitido en los textos generales, donde en una Teoría como *PA*, por ejemplo, el principio de inducción se considera sin más un esquema axiomático. Aquí se ha querido presentar una justificación de por qué conviene trabajar con Sistemas dotados de infinitos axiomas; cosa que, fundadamente, podría parecer una incomprensible complicación.



de interés común. En efecto, en cada uno de ellos, las reglas deductivas propias se pueden interpretar sin dificultad como esquemas axiomáticos que generan axiomas *distinguibles* (es más: normalmente incluso *decidibles*, una condición bastante más fuerte, como veremos). Considerando que por norma también las reglas gramaticales *propias* siempre están privas de ambigüedad (tal de no alterar la *distinguibilidad* de los enunciados), se tiene entonces la certeza de la *buena definición*, por lo ya probado en el ap. I.9.

Examinemos el ejemplo emblemático del Sistema *PA*. Su principio de inducción lo reconsideramos como generador de axiomas en lugar de teoremas. ¿Cómo hemos alterado el Sistema original? Todo teorema de éste último es también teorema del nuevo Sistema, en cuanto todo axioma es un teorema. Además, las cuatro reglas deductivas no distinguen explícitamente entre axiomas y teoremas cuando deducen. Por ejemplo, el *modus ponens* deduce “*B*” a partir de “*A*” y “*A*→*B*”, indiferentemente de si uno de estos enunciados, o ambos, sean axiomas o teoremas. Por tanto, todo teorema que puede deducirse en el nuevo Sistema puede también deducirse en el original. La diferencia, pues, es solamente estructural. Además, se reconoce que los *axiomas inductivos* son *distinguibles*: se deberá verificar que el primer símbolo sea “(”, después que siga un enunciado que mencione la constante “0”, después que siga el símbolo “e”, etc. La claridad de las reglas gramaticales *propias* de *PA*, permite después concluir metamatemáticamente que la *distinguibilidad* de los enunciados se conserva. Por lo tanto, el nuevo Sistema está *bien definido*, como el Cálculo predicativo clásico formal de primer orden con igualdad en el que se basa. Esto se repite para todos los demás Sistemas de común interés matemático.

*Seguidamente asumiremos siempre, tácitamente, la*

*posibilidad de esta convención para todo Sistema clásico. En particular que el Sistema obtenido esté bien definido. En tales nuevos Sistemas, pues, los esquemas axiomáticos no son reglas deductivas, sino sólo una técnica para indicar una colección infinita de axiomas del Sistema. Recordemos que, en todo caso, toda demostración puede referirse sólo a un número finito de axiomas o no podría ser de longitud finita (una de las condiciones de buena definición).*

En síntesis, el efecto de esta convención es “filtrar” sólo los modelos correctos del Sistema original: sus *modelos incorrectos* dejan de ser *modelos* del nuevo Sistema. De hecho, si son incorrectos, será debido a las reglas deductivas *propias*, como se ha concluido; en especial, algunos teoremas deducidos mediante éstas serán falsos, en tales modelos. Entonces, dichas interpretaciones no pueden ser *modelos* de un Sistema en el cual esos teoremas son reconsiderados como axiomas.

Como consecuencia de tal convención, el teorema de corrección vale para todo Sistema clásico, incluso no formal: de ahora en adelante, simplemente podremos hablar de *modelo*, refiriéndonos a un modelo necesariamente *correcto*.

La convención ahora expuesta tiene como consecuencia que la *no fidelidad* de la representación en *TC* de cierto Sistema axiomático clásico, puede tenerse sólo en la formalización del conjunto de los *axiomas propios*. Recordemos que según la *buena definición* del Sistema y las pretensiones de *TC*, no debería haber nunca problemas para representar dicho conjunto en *TC*, llamémoslo *H*. Pero la conclusión metamatemática de que cierto enunciado *a* es un axioma (existente e individuado en el Sistema original, según su *buena definición*), podría ya no estar disponible en *TC*; o sea, el enunciado “ $a \in H$ ” ser indemostrable en *TC*. Naturalmente, tampoco serán reproducibles en *TC* todos aquellos teoremas de la Teoría que

requieran el axioma *a*.

## II.9. Completitud sintáctica y completitud semántica

Gracias al teorema de corrección, los teoremas de cualquier Sistema clásico son *verdaderos cuando interpretados en un arbitrario modelo*; enunciados así se dirán en síntesis *válidos*, aunque preferiremos repetir a menudo *verdaderos en todo modelo* para evitar equívocos. Espontáneamente surge la pregunta de si, en un Sistema que admita modelos, las proposiciones *válidas* deben ser necesariamente teoremas de la misma Teoría. Si no, nos causaría una contrariedad: tendríamos proposiciones verdaderas en todo modelo (y por lo tanto, epistemológicamente bastante importantes) que el Sistema axiomático no sería capaz de deducir. En estos casos, se podría aún recurrir a un criterio “externo” al Sistema para intentar descubrirlas, un criterio que incluso se ha axiomatizado con la introducción de *TC*; sin embargo, veremos que el resultado de tal método no está asegurado. La bella propiedad de que todas (y solas) las proposiciones *válidas* sean teoremas, se llama *completitud semántica*.

Para evitar confusiones con la completitud sintáctica y para simplificar, indicaremos a menudo sencillamente con *completitud* la *completitud sintáctica*, mientras el término *s-completitud* indicará aquella semántica.

Lo primero que haremos es justificar el nombre del metateorema de completitud semántica, el cual, como hemos visto, afirma que: *si cualquier Cálculo predicativo clásico formal del primer orden es consistente, entonces admite al menos un modelo*. La razón es que éste implica también la *s-completitud* para el Sistema, en las mismas hipótesis. Sea, en efecto, *S* un Sistema de este tipo. Por el metateorema, admite al

menos un modelo. Supongamos, pues, que  $E$  sea un arbitrario enunciado *verdadero* en cada modelo de  $S$  y busquemos la conclusión de que es un teorema. Es imposible que  $E$  sea la negación de un teorema: debido al teorema de corrección,  $E$  sería falso para cada modelo. Supongamos pues que  $E$  sea indecible; en este caso sabemos que el Sistema  $S+notE$  es consistente. Puesto que  $notE$  es un enunciado del primer orden y no añadimos ninguna nueva regla deductiva, tal Sistema todavía es un Cálculo predicativo clásico formal del primer orden; volviendo a aplicar el metateorema, concluimos que posee modelos, para los cuales  $notE$  es verdadero. Pero tales modelos son también modelos de  $S$ , porque satisfacen todos sus axiomas; por lo tanto, por hipótesis,  $E$  tiene que ser verdadero en éstos: imposible. No queda que admitir que  $E$  es un teorema de  $S$ , es decir que  $S$  es semánticamente completo.

Volvamos ahora a nuestra pretensión con respecto a los Sistemas axiomáticos clásicos *bien definidos*, a la luz de los dos tipos de completitud. Consideremos un Sistema clásico *bien definido*, dotado de modelos y por tanto consistente. La circunstancia más feliz sería el caso en que el Sistema esté completo: en efecto, cada enunciado que no sea un teorema se podría reconocer, en cuanto negación de un teorema<sup>33</sup>. El conjunto de los teoremas sería por tanto *distinguible*. Además, el Sistema sería también semánticamente completo. En efecto, no pueden existir enunciados verdaderos en cada modelo que no sean teoremas: aquellos que no son teoremas, son negaciones de teoremas y por lo tanto falsos en todo modelo. En conclusión, la completitud sintáctica, unida a la existencia de modelos, es una combinación bastante satisfactoria.

---

<sup>33</sup> Naturalmente, todo teorema es reconocible a través de su demostración, que debe existir por la *buena definición*.

Si en cambio el Sistema clásico con modelos es incompleto, podemos ciertamente reconocer las negaciones de los teoremas; pero quedan los enunciados indecidibles por descubrir, si se quiere que el conjunto de los teoremas sea *distinguible*. Este deseo no es “retórico”, sino que está ligado a una ventaja concreta: el descubrimiento de que el genérico enunciado  $I$  sea indecidible, implicaría que los esfuerzos por demostrar o confutar  $I$  son inútiles y sugeriría incluir  $I$  o  $notI$  entre los axiomas. Tal proceso, repetido, podría incluso hacer completo el Sistema; al menos, ésta parece por ahora una esperanza sensata.

Si el Sistema en cuestión (con modelos e incompleto), llamémoslo  $S$ , es  $s$ -completo, existe un criterio para reconocer los enunciados indecidibles. En efecto en tal caso, dicho  $I$  un arbitrario enunciado indecidible, los Sistemas  $S+I$  y  $S+notI$  deben admitir modelos y el criterio para reconocer  $I$  puede consistir, precisamente, en encontrarlos. [Es fácil concluir porqué deben admitir modelos: si  $S+I$  no admitiese modelos, significaría que  $I$  es falso en cada modelo de  $S$ ; pero entonces  $notI$  sería verdadero en cada modelo de  $S$  y, por tanto, un teorema por la supuesta  $s$ -completitud; esto contra la hipótesis de que  $I$  es indecidible. Al mismo absurdo semántico se llega suponiendo que  $S+notI$  no tenga modelos]. El problema de la determinación de los modelos, por cierto existentes para  $S+I$  y  $S+notI$ , puede enunciarse en el lenguaje formal de  $TC$ . Sin embargo, como sucede para cualquier otro ente matemático de la Lógica clásica, un modelo podría ser no individuable, aunque existiendo. En efecto, mientras el problema de su *representabilidad* es siempre solucionable mediante una oportuna convención metamatemática (y, consecuentemente, denotación de la interpretación), el enunciado “ $M$  es un modelo de  $S+I$ ”, por ejemplo, podría ser *indecible* en  $TC$ . Veremos, en efecto, que  $TC$  es “irremediamente” incompleto, por lo cual tal posibilidad es bien concreta. Aun así,

quedan todavía los métodos puramente metamatemáticos para determinar dichos modelos de  $S$ ; se trata de objetos que, repetimos, deben necesariamente existir en las hipótesis hechas por el Sistema. Basándonos en las críticas epistemológicas relativas al principio de *no individuabilidad* (realizadas al principio del ap. I.12), se diría forzado pensar que tal principio tenga que valer también en el ámbito de los razonamientos metamatemáticos. Por lo tanto, en el caso considerado, parece razonable especular que éstos modelos sean metamatemáticamente determinables, resultando el conjunto de teoremas *distinguishible*. Al final de la tercera Parte volveremos sobre este tema y observaremos, en efecto, que mientras dicho optimismo parece justificado para cualquier Sistema formal habitual, no lo parece para el propio  $TC$ .

Si, en cambio, el Sistema clásico con modelos e incompleto,  $S$ , no es  $s$ -completo, no está asegurado que los Sistemas  $S+I$  y  $S+notI$  tengan modelos. [Si lo estuviera, es decir, si tales modelos existieran para cada indecible  $I$ , vendría a ser que para cada enunciado indecible existen modelos de  $S$  según los cuales éste es falso; y, por otra parte, las negaciones de los teoremas son falsos en todos los modelos de  $S$  por la corrección. Entonces, si un enunciado es verdadero en cada modelo de  $S$  no puede ser más que un teorema suyo, es decir,  $S$  sería  $s$ -completo contra la hipótesis]. Para reconocer que  $I$  es indecible, no queda más que el método general: concluir que los Sistemas  $S+I$  y  $S+notI$  son consistentes (ap. I.10). De nuevo, se trata de un problema que puede ser afrontado formalmente – pero, como se ha observado, no siempre resuelto – por  $TC$ . Como en el caso precedente, si, por ejemplo, el enunciado que afirma que  $S+I$  es consistente fuera indecible en  $TC$ , se podría recurrir a razonamientos puramente metamatemáticos para concluirlo. Pero la cuestión ahora es bastante más delicada: recordemos, en

efecto, que hemos puesto en discusión la posibilidad de una conclusión metamatemática de consistencia del Sistema sobre la única base de la consideración de un modelo intuitivo suyo, introduciéndose  $TC$  también para obtener demostraciones de consistencia. Aquí la situación es peor, en cuanto tampoco está asegurado que exista un modelo de  $S+I$ . Consiguientemente, no puede haberse ninguna garantía de que la metamatemática sea siempre capaz de concluir que tal Sistema sea consistente, si es que lo es. En definitiva, en este caso no está asegurado que el conjunto de teoremas sea *distinguishible*. En especial, es también posible que un enunciado indecidible *válido* no sea reconocible como tal.

Aclaradas las ventajas de la  $s$ -completitud, el paso siguiente sería aquel de reducir a teorema de  $TC$  el metateorema de  $s$ -completitud, además de generalizarlo. En todo caso, es necesario anticipar a estos temas el concepto de *numerable* y, más en general, de *cardinalidad*. Antes de hacerlo, sin embargo, nos parece muy oportuno observar otras capacidades fundamentales de  $TC$ .

## II.10. La consistencia de la Matemática ordinaria

$TC$  puede también ofrecer la posibilidad de “construir” en concreto modelos para los Sistemas clásicos representados en él. Para hacerlo sólo hay que expresar las *premisas* del Sistema clásico,  $SC$ , en el lenguaje de la Teoría de conjuntos, convirtiéndose así en condiciones que pueden ser satisfechas por conjuntos oportunos; si uno de dichos conjuntos es determinado en  $TC$ , éste representa un válido universo para las variables de  $SC$  y, en los casos comunes, la identificación de un modelo deriva inmediatamente. Tal “construcción”, en todo caso, requiere un “modelo” correcto para  $TC$  (cuya existencia, recordemos, está

asegurada por la sencilla hipótesis de consistencia para  $TC$ ). La conversión de las premisas de  $SC$  en el lenguaje de la Teoría de conjuntos se realiza dejando sin modificar los símbolos clásicos  $not$ ,  $o$ ,  $\forall$ , etc., e interpretando los símbolos y los predicados propios de  $SC$  como conjuntos, de la misma manera descrita antes. Llamaremos sintéticamente a esta operación *correspondencia conjuntista*.

Veamos enseguida un ejemplo con  $PA$ : determinemos en concreto un modelo suyo a partir de un “modelo” correcto de  $TC$ . Comencemos convirtiendo los axiomas propios de  $PA$  en las correspondientes expresiones conjuntistas de  $TC$ . Los símbolos propios de  $PA$  son  $0$ ,  $+$ ,  $\cdot$  y el predicado  $\underline{S}(x,y)$ ; introduzcamos en correspondencia los conjuntos  $0^*$ ,  $+^*$ ,  $\cdot^*$  y la relación binaria  $S_{p,s}$  (“p” recuerda “precedente” y “s” sucesor), conjunto de pares ordenados de elementos del universo  $U$  (que debemos demostrar existente). Los primeros tres axiomas *propios* de  $PA$  quedan:

- (1)  $0^* \in U$
- (2)  $\forall x^* \in U (\exists y^* \in U ((x^*, y^*) \in S_{p,s}))$
- (3)  $\forall x^* \in U ((x^*, y^*) \in S_{p,s} \rightarrow y^* \neq 0^*)$

con los símbolos clásicos inalterados. Haciendo lo mismo para los demás axiomas de  $PA$ , se obtendrá una lista de proposiciones de  $TC$ , que llamamos (1)-(8). Según las condiciones (5) y (6) se impone, en particular, que la relación binaria  $S_{p,s}$  sea una *función*: en efecto, se puede deducir fácilmente:

$(x,y) \in S_{p,s}$  e  $(x,z) \in S_{p,s} \rightarrow y=z$ , o sea que el sucesor de  $x$  es único, para cada  $x$ . Indicando pues con  $s(x)$  la pareja  $y$  de  $x$  tal que  $(x,y) \in S_{p,s}$ , las condiciones en  $TC$  se pueden simplificar. Por ejemplo, (2) y (3) se quedan:



- (2)  $\forall x^* \in U (\exists y^* \in U (y^* = s(x^*)))$  o bien:  $\forall x^* \in U (s(x^*) \in U)$   
 (3)  $\forall x^* \in U (s(x^*) \neq 0^*)$

las cuales coinciden exactamente con las condiciones 2) y 3) que definen el conjunto de los números naturales  $N$  (ap. II.6). De manera análoga, se puede obtener que las condiciones (4)-(8) coincidan con las 4)-8) definitorias de  $N$ . Ahora ocupémonos del principio de inducción de  $PA$ . Supongamos por un momento que  $x$  sea la única variable libre para  $A(x)$ . Tratando a  $A(x)$  como si fuera un predicado un-ario, les haremos corresponder una relación un-aria, es decir, un subconjunto del universo  $U$ , llamémoslo  $A$ , para escribir después  $x^* \in A$  en lugar de  $A(x)$ . El principio de inducción se transforma, pues, en:

$$(0^* \in A \text{ e } \forall x^* \in U (x^* \in A \rightarrow s(x^*) \in A)) \rightarrow \forall x^* \in U (x^* \in A),$$

*cualquiera sea A*. La expresión implicada se puede simplificar en  $A=U$ , puesto que  $A$  es un subconjunto de  $U$ . Además, también la expresión después de  $e$  se puede simplificar. Formalizando también *cualquiera sea A*, se obtiene:

$$(9) \forall A ((0^* \in A \text{ e } \forall x^* \in A (s(x^*) \in A)) \rightarrow A=U)$$

[Si  $x$  no es la única variable libre para  $A(x)$ , es decir, si en realidad, evidenciando todas las variables libres, se tiene  $A(x, x_1, \dots, x_n)$ , recordemos que, en un axioma, para toda variable libre se puede sobrentender un símbolo “ $\forall$ ”. Entonces llamando  $B(x)$  la proposición con una única variable libre “ $\forall x_1 \dots \forall x_n A(x, x_1, \dots, x_n)$ ”, se vuelve a obtener fácilmente (mediante el uso del teorema:  $\forall x \forall y P(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x, y)$ , probable para todo  $P(x, y)$ ), una expresión idéntica a la (9) con  $B$ , subconjunto de  $U$  de todos los  $x$  que satisfacen la expresión  $B(x)$ , en lugar de  $A$ ].

La (9) es una expresión que se parece mucho a la condición 9) de los naturales conjuntistas. Si los  $A$  variasen en todo el conjunto  $P(U)$  se obtendría una coincidencia exacta. Pero el conjunto en el cual varía  $A$  es aquel de los subconjuntos de  $U$  cuyos elementos se pueden caracterizar con una condición conjuntista correspondiente a una proposición arbitraria con al menos una variable libre de  $PA$ <sup>34</sup>. Se puede decir de manera más sencilla utilizando el concepto de verdad: llamada  $A(x)$  una arbitraria proposición de  $PA$  con una variable libre  $x$ , consideremos el conjunto de todos los  $x$  de  $U$  que la hacen verdadera, llamémoslo  $A$ . Al variar  $A(x)$  en el conjunto de todas las proposiciones con al menos una variable libre de  $PA$ , se puede así obtener un conjunto de subconjuntos de  $U$  que indicamos con  $\{A, B, C, \text{etc.}\}$ . La pregunta que nos hemos planteado es si dicho conjunto contiene *todos* los subconjuntos de  $U$ , es decir, si coincide con  $P(U)$ . Si la respuesta es “no” significa que existen subconjuntos de  $U$  cuyos elementos no pueden estar caracterizados por ninguna proposición expresable en  $PA$ . Volveremos sobre este tema de importancia capital. Por ahora no es una pregunta urgente, pues la condición de los naturales conjuntistas 9) es más exigente que la (9) correspondiente a  $PA$ , es decir, implica esta última.

Como hemos afirmado en el ap. II.6, en  $TC$  se puede

---

<sup>34</sup> En notación *ingenua*, tal conjunto es:

$P(U)_1 = \{A \in P(U) : \exists A^*(x^*) \in P_1 : A = \{x^* \in U (A(x^*))\}\}$ , donde  $A^*(x^*)$  indica la secuencia de símbolos-conjunto correspondiente a  $A(x)$ ,  $P_1$  el subconjunto de  $P$  de todas las proposiciones de  $PA$  con al menos una variable libre y  $A(x^*)$  la expresión *conjuntista correspondiente* a  $A(x)$  (los dos puntos “:”, que se leen “tal que”, forman parte de las notaciones *ingenuas* y sirven sólo para limitar el número de paréntesis). Sobre la cuestión de la formalizabilidad en  $TC$  de estas “correspondencias”, aclararemos en una nota del ap. II.14.

demostrar que existe un único  $N$  (a excepción de isomorfismos) que satisfaga las condiciones 1)-9). Por tanto, este satisfará también las (1)-(9), es decir, las condiciones conjuntistas correspondientes a las premisas propias de  $PA$ . Entonces, asumiendo para  $PA$ ,  $U=N$ , la condición a) del apartado II.3 (existencia del universo) se verifica. Para verificar las condiciones b) y c) basta hacer referencia al “modelo” correcto de  $TC$ , puesto que todos los enunciados de  $PA$  tienen un enunciado conjuntista correspondiente. Así, hemos construido un modelo de  $PA$  mediante  $N$ , el conjunto de los números naturales; tal modelo es llamado *estándar* y, recordemos, está determinado a menos de isomorfismos. Naturalmente, así se ha *demostrado* también que el principio de inducción de  $PA$  es consistente con respecto a las otras premisas del mismo Sistema.

Finalmente, a partir de un modelo de  $PA$ , se puede construir un modelo de la Teoría formal de los racionales y seguidamente de la Teoría formal de los reales ( $TFR$ , de ahora en adelante), llamada también de Tarski<sup>35</sup>. De hecho, los números racionales, en su representación en  $TC$ , se pueden definir como pares ordenados de números naturales conjuntistas (por ejemplo el par  $(1,4)$  corresponde al racional  $1/4=0.25$ ), mientras los números reales como conjuntos constituidos por pares de oportunos conjuntos de racionales (a pesar de que este último aspecto no sea intuitivo, dicha construcción técnica no supone dificultades conceptuales). Además, mediante un modelo de la Teoría de los reales de Tarski, como ya se ha observado al final de la primera Parte, podemos construir un modelo de  $GE$  y de las Geometrías no euclidianas. Todo modelo construido a partir del modelo *estándar* de  $PA$ , se llama aún *estándar*.

---

<sup>35</sup> Como para los naturales, también en la Teoría de los reales hay una versión *integral*, más compleja, y una más sencilla, a menudo llamada *de Tarski*. Lo precisaremos más adelante.

En definitiva, el Sistema  $TC$  permite demostrar la consistencia de todas las Disciplinas clásicas comunes, determinando en concreto modelos a partir del conjunto  $N$ ; todo ello suponiendo la consistencia (y por consiguiente la existencia de un “modelo” correcto) *en un sólo Sistema*: el propio  $TC$ .

Desgraciadamente, la consistencia de  $TC$ , y por consiguiente del entero edificio llamado Matemática, no puede demostrarse en  $TC$  mismo; veremos con detalle este hecho – en realidad absolutamente sensato – en la tercera Parte. Según el punto de vista más crítico, la espectacular reducción conjuntista de la Matemática – aparte de los problemas de *fidelidad* representativa – sustancialmente es una elegancia finalizada en sí misma. Y sin embargo no se puede negar su aspecto aclarador, aunque sólo sea del hecho de que es vano intentar verificar la congruencia de todos los fundamentos de la Matemática.

## II.11. Isomorfismo

Aclaremos ahora qué es un *isomorfismo* entre dos conjuntos. Se trata, en concreto, de una particular *función* (es más, *correspondencia biunívoca*), es decir, un *conjunto* de la Teoría  $TC$ . No obstante, daremos una definición informal, aunque rigurosa (lo cual se hace por doquier, por las razones explicadas).

Sean dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , donde se hallan definidas un mismo número y *tipo* de *operaciones internas*. Una *operación interna* en  $A$  es sencillamente una *función* de  $A^n$  en el mismo  $A$ , donde  $n$  es cierto natural  $\geq 1$ . El número  $n$  especifica, precisamente, lo que hemos llamado en síntesis *tipo*. Indicamos con  $o_{A1}, \dots, o_{Ak}$  y  $o_{B1}, \dots, o_{Bk}$  las  $k$  operaciones internas definidas en  $A$  y  $B$ . Por ejemplo, en relación con la definición conjuntista de los números naturales, las operaciones internas definidas son tres

(ap. II.6):  $s(x)$  entre  $N$  y  $N$ ,  $+(x,y)$  y  $\cdot(x,y)$  entre  $N^2$  y  $N$ . Pues bien, un *isomorfismo* entre  $A$  y  $B$ , respecto a las operaciones internas definidas en  $A$  y  $B$ , es una *correspondencia biunívoca*  $f$  entre  $A$  y  $B$ , tal que:

$$f(o_{Ai}(x_1, \dots, x_n)) = o_{Bi}(f(x_1), \dots, f(x_n)), \text{ por cada } i = 1, 2, \dots, k.$$

En palabras, el isomorfismo es una correspondencia biunívoca que *respeto las operaciones internas*: en efecto, el resultado de una operación arbitraria  $o_{Ai}$  en  $A$ , es decir, el elemento de  $A$  llamado  $o_{Ai}(x_1, \dots, x_n)$ , es asociado por la  $f$  al elemento de  $B$  que se obtiene operando en  $B$  con la operación correspondiente (del mismo tipo),  $o_{Bi}$ , sobre los elementos de  $B$  asociados según la misma  $f$  a los elementos iniciales de  $A$ . Veremos enseguida un ejemplo concreto.

Mostraremos ahora qué diferencias surgen a causa de dos elecciones distintas del conjunto que satisface las nueve condiciones del ap. II.6; conjunto, recordemos, llamado *de los números naturales*. Para referirnos a un ejemplo auténtico, consideremos la siguiente elección: la que considera el conjunto vacío,  $\emptyset$ , como conjunto  $x_0$  y como operación  $s(x)$  la función:  $x \cup \{x\}$ , es decir la *unión*<sup>36</sup> de los conjuntos  $x$  y  $\{x\}$ . Por ello se obtiene:

$$x_0 = \emptyset$$

$$s(x_0) = \{\emptyset\}$$

$$s(s(x_0)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$s(s(s(x_0))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

---

<sup>36</sup> La *unión* de dos conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto que tiene por elementos tanto los elementos de  $A$  como los de  $B$ .

.....

y así sucesivamente. Esta elección impone, pues, de representar con dichos conjuntos los objetos metamatemáticos espontáneos  $0, 1, 2$ , etc.; en efecto, se puede fácilmente demostrar que las nueve condiciones del ap. II.6 son satisfechas.

Sin embargo, supongamos que nuestro amigo Miguel haya hecho una elección distinta: el mismo  $x_0 = \emptyset$ , pero una diferente función  $s(x)$ , precisamente:  $s(x) = x \cup \{x\} \cup \{x \cup \{x\}\}$ . Entonces él obtendrá la sucesión:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \emptyset \\
s(x_0) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
s(s(x_0)) &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\
\end{aligned}$$

.....

la cual, según nuestra elección, es interpretada como la progresión de los números pares:  $x_0=0, s(x_0)=2, s(s(x_0))=4$ , etc. Supongamos que Miguel acuerde utilizar nuestra misma notación  $0, 2, 4$ , etc., para su progresión y que elija como operación  $+$ , la misma que usamos nosotros; sin embargo, para la operación  $\cdot$ , Miguel sigue el criterio de multiplicar normalmente y después dividir el resultado por dos (“normalmente”, “dividir” y “dos” se refieren a nuestra elección). Con tales elecciones, se verifica fácilmente que también el conjunto de Miguel satisface las citadas nueve condiciones. Por ejemplo, la condición 6) es verificada para  $4+18 (=22)$ , que es el sucesivo de  $4+16 (=20)$  en la progresión de Miguel, es decir, en los números pares. La 8) es verificada para  $18 \cdot 6 (=54)$ , es decir, el resultado normal,  $108$ , dividido por  $2$ ) que efectivamente es igual a  $18+18 \cdot 4 (=18+36=54)$ . Miguel

construirá, pues, todos los modelos *estándar* a partir de su progresión. Podríamos pensar que todos sus modelos son defectuosos, porque prescinden de los números naturales impares. Pero nos equivocariamos. El punto fundamental es que *siempre existe un isomorfismo entre dos conjuntos arbitrarios que satisfacen las citadas nueve condiciones*. La demostración de esto, formalizable in *TC*, no es difícil y se puede conseguir sin esfuerzo en textos ordinarios. En nuestro caso, es inmediato verificar que la correspondencia biunívoca establecida visualmente con:

$$\begin{array}{l} 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots \\ 0, 2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots \end{array}$$

es un isomorfismo. Verifiquemos que las tres operaciones  $s(x)$ ,  $+$  y  $\cdot$ , son *respetadas*. Según nosotros,  $s(n)=n+1$ . Apliquemos la  $f$  a  $n$ , obteniendo  $2n$ , y después la  $s(x)$  de Miguel, consiguiendo  $2n+2$ . Pues bien, este número es precisamente  $f(n+1)$ . La condición que caracteriza el isomorfismo es por tanto respetada según la operación  $s(x)$ . Según nosotros,  $n+m=h$ . Apliquemos la  $f$  a  $n$  y a  $m$  y después sumemos normalmente (puesto que para Miguel esta operación es idéntica a la nuestra): se obtiene  $2n+2m=2(n+m)=2h$ ; efectivamente, el doble de  $h$ , es decir  $f(h)$ . Entonces se respeta también la operación  $+$ . Por último, según nosotros  $nm=h$ ; según Miguel,  $2n \cdot 2m=4nm/2=2nm=2h$ , el doble de  $h$  (donde el producto sobrentendido es el nuestro, mientras el indicado por “ $\cdot$ ” es el producto según Miguel). Por lo tanto, se respeta también la  $\cdot$  y concluiremos que la  $f$  es un isomorfismo.

La consecuencia de todo esto es que, para efectuar cualquier operación que implique sumas y productos de naturales en nuestro modelo, por ejemplo  $(3+28)16+(18 \times 88)$ , se puede elegir de aplicar la  $f$ , trabajar en el modelo de Miguel y después aplicar

al resultado obtenido la función inversa de la  $f$ . De hecho:  $(6+56) \cdot 32 + (36 \cdot 176) = 62 \cdot 32 + 3168 = 992 + 3168 = 4160$  es el doble del resultado correcto: 2080. Pero se puede incluso hacer algo mucho mejor: la aplicación de la  $f$  y de su inversa se puede realizar instantáneamente con el pequeño “truco” de denotar con  $0', 1', 2', \text{etc.}$ , la progresión de los números pares. En efecto, puesto  $n' = 2n$  para todo  $n$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned} 2n + 2m &= n' + m' = 2(n+m) = (n+m)' \\ 2n \cdot 2m &= n' \cdot m' = (4nm)/2 = 2nm = (nm)' \end{aligned}$$

o sea que las operaciones en el conjunto de Miguel se pueden realizar como las nuestras sobre los designadores  $0', 1', 2', \text{etc.}$  En otras palabras, si Miguel denota su progresión con  $0', 1', 2', \text{etc.}$ , él trabajará sobre dichos símbolos exactamente como nosotros trabajamos sobre  $0, 1, 2, \dots \text{etc.}$

Dos modelos distintos,  $M$  y  $M'$ , de un mismo Sistema axiomático se dicen isomorfos si valen las siguientes condiciones:

- a) los correspondientes universos,  $U$  y  $U'$  son isomorfos;
- b) el isomorfismo,  $f$ , “conserva” las constantes; es decir, llamando  $M(c)$  y  $M'(c)$  a las interpretaciones de la constante  $c$  en los dos modelos, se obtiene que:  $f(M(c)) = M'(c)$ ;
- c) Ambos modelos tienen “las mismas verdades”. Más exactamente llamando  $v_1$  y  $v_2$  a las *funciones de verdad* relativas a cada uno de los modelos, se obtiene que, para cada enunciado  $e$  de la Teoría:



$$v_1(e)=V \leftrightarrow v_2(e)=V, \forall e \in E, \text{ o bien:}$$

$$v_1(e)=F \leftrightarrow v_2(e)=F, \forall e \in E$$

donde  $E$  es, precisamente, el conjunto de los enunciados. Esta última condición se sintetiza diciendo que los dos modelos son *elementalmente equivalentes*.

Veremos que dos modelos pueden ser *elementalmente equivalentes* y no obstante, no isomorfos.

Se puede ahora demostrar inmediatamente que todo modelo construido por Miguel a partir de su conjunto universo  $0', 1', 2', \dots$  etc., es isomorfo al correspondiente, nuestro, construido con  $0, 1, 2, \dots$  etc. La condición a) ha sido demostrada. Luego, a la genérica constante  $s(s(..n \text{ veces}..(x_0)...) )$ , Miguel asocia  $2n=n'$ , mientras nosotros  $n$ ; y efectivamente  $f(n)=n'$  como es exigido por la condición b). Por último hemos visto que con la designación  $0', 1', 2', \dots$  etc., las operaciones en el modelo de Miguel conducen a resultados distintos de los nuestros sólo por el ápice (¡que, normalmente, no interviene en el concepto de verdad!); por lo tanto, es posible acordar con él un valor único de verdad para los enunciados de  $TC$ : vale también la condición c).

Llegados a este punto, la pregunta es qué diferencias concretas existan entre las progresiones  $0, 1, 2, \dots$  etc. y  $0', 1', 2', \dots$  etc. o, más en general, entre los universos de arbitrarios modelos isomorfos, al representar las propiedades *genuinamente matemáticas* de los *números naturales metamatemáticos*. La obvia respuesta es: ninguna. Si Miguel re-denomina su progresión  $0, 1, 2, \dots$  etc., desarrollará una Matemática *idéntica* a la nuestra; la única diferencia es que, según él el número  $1$  está representado por el conjunto  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ; según nosotros por  $\{\emptyset$

}; y análogamente para los sucesivos naturales. Nótese cómo ambas representaciones sean, indudablemente, insatisfactorias desde el punto de vista filosófico; no hay, por lo tanto, razones para preferir una en lugar de otra<sup>37</sup>. No obstante, en el próximo apartado presentaremos una representación más feliz (aunque no del todo) desde el punto de vista epistemológico.

Sin embargo, la tarea de un lenguaje simbólico y carente de significado como el matemático, se *acaba al representar mediante un símbolo* el concepto semántico de “número 2” (por poner un ejemplo) *y al reproducir todas sus propiedades operativas*. No puede haber nada más para las limitadas capacidades del lenguaje sintáctico de un Sistema formal: claramente, éste no puede ser la sede apropiada para cuestiones filosóficas.

Rematamos así que *todo* conjunto que satisfaga las condiciones definitorias de los números naturales conjuntistas puede entrar a constituir un modelo, isomorfo a cualquier otro que las satisfaga, perfectamente satisfactorio para representar a los números naturales metamatemáticos desde el punto de vista *operativo*; que es el único punto de vista pertinente en el formalismo matemático. Todos los modelos isomorfos son entre ellos equivalentes, indistinguibles, en este sentido. Cada uno de ellos puede llamarse *estándar*.

---

<sup>37</sup> El hecho de que en el segundo caso, a diferencia del primero, el conjunto que representa *1* contenga *un* elemento no reviste, en sí, ninguna relevancia concreta. Por otra parte, también otros modelos isomorfos usan representaciones igualmente sencillas, como:  $0 = \emptyset$ ,  $1 = \{\emptyset\}$ ,  $2 = \{\{\emptyset\}\}$ ,  $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$ ,... etc..

## II.12. Los números del infinito

Para nuestros objetivos es importante saber distinguir, aun en un nivel elemental, los distintos tipos de infinito. Los resultados de la Teoría informal de los conjuntos que presentaremos en este apartado fueron descubiertos por Cantor bastante antes que la misma Teoría fuese axiomatizada. Los expondremos de la forma más sintética e intuitiva posible: lo importante para nosotros es tener presente que estos argumentos pueden recibir, en *TC*, una formalización completa en todo detalle.

Supongamos que entre dos conjuntos exista una *correspondencia biunívoca*; para abreviar, en tal caso, se dice también que son *equipotentes*. Si los dos conjuntos equipotentes son *finitos*, parece intuitivo que deban tener “el mismo número de elementos”. Pero, en Matemáticas, para definir algo como “tener el mismo número de elementos” ¿no se puede evitar recurrir al concepto de correspondencia biunívoca! En efecto esto no refleja una limitación del lenguaje matemático sino, en todo caso, un salto lógico de nuestra mente. Si lo pensamos bien, la simple operación de contar los elementos de un conjunto, ¿no es más que el establecimiento de una “correspondencia biunívoca” con los números naturales! Ya hemos adoptado este criterio para definir una *n*-upla de conjuntos (ap. II.6). Así, por *definición*, diremos que dos conjuntos *A* y *B* tienen el mismo número de elementos, o sea, el mismo *número cardinal*, si son equipotentes, o sea si existe una correspondencia biunívoca entre ellos.

Aparentemente, *TC* permite una definición formalizada de los conceptos semánticos de *finito* e *infinito*: un conjunto *A* se dice *finito* si existe un  $n \in \mathbb{N}$ , tal que existe una correspondencia biunívoca entre *A* y  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ ; este último conjunto está definido rigurosamente en *TC* como el subconjunto de todos los

naturales conjuntistas no mayores de  $n$  (se usa el predicado “ $>$ ”). Un conjunto se dice *infinito* si no es *finito*, es decir, si dicho natural  $n$  no existe. Veremos que, por desgracia, esta definición sintáctica de conjunto *finito* (e *infinito*) no puede reflejar plenamente el significado semántico que damos a estos conceptos; volveremos sobre esta cuestión crucial.

Para los conjuntos infinitos sucede algo aparentemente extraño: estos son equipotentes a subconjuntos *proprios* (es decir, subconjuntos distintos del mismo conjunto; de hecho, es trivial que todo conjunto puede ser puesto en correspondencia biunívoca con sí mismo). Por ejemplo, he aquí una correspondencia biunívoca entre el conjunto infinito  $N$  y los naturales pares (ya observada con anterioridad):

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, \dots, n, \dots \\ 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots \end{array}$$

o entre  $N$  y los múltiplos de 3:

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, \dots, n, \dots \\ 3, 6, 9, \dots, 3n, \dots \end{array}$$

y así para otros infinitos subconjuntos propios de  $N$ . Se puede demostrar que ésta es una característica necesaria y suficiente de los conjuntos infinitos. En otras palabras, los conjuntos infinitos podrían ser *definidos*, equivalentemente, como aquellos que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio<sup>38</sup>. Entonces, para los conjuntos infinitos sucede que existen subconjuntos propios que tienen su mismo número cardinal. Los números pares, por ejemplo, son “tantos

---

<sup>38</sup> Para demostrar tal equivalencia se necesita el axioma de elección.

como” todos los números naturales. Esta aparente paradoja no debe desorientar: es consecuencia de nuestra definición de “mismo número de elementos”, la cual justamente afecta a hechos exclusivamente técnicos (como la existencia de una correspondencia biunívoca) y no semánticos (como la *noción común* euclidiana “el todo es mayor que la parte”).

Se demuestra fácilmente que la equipotencia, en los conjuntos, se comporta, por poner un ejemplo geométrico, como el paralelismo en las rectas. En especial, si dos rectas son paralelas a una tercera, son también paralelas entre sí. Todas las rectas pueden entonces separarse en clases disjuntas de rectas entre sí paralelas. Cada clase se puede identificar como una determinada “dirección” espacial. Estos tipos de clases se llaman *de equivalencia* y resulta que *no siempre son conjuntos*. No obstante, las *clases* son objetos matemáticos rigurosamente definibles en *TC* (son los objetos más básicos que poseen elementos-conjunto; si además resulta que una *clase* es elemento de otra *clase*, entonces es un *conjunto*). Del mismo modo, todos los conjuntos se pueden reagrupar en clases separadas, constituidas por todos los conjuntos entre sí equipotentes. Cada una de tales clases<sup>39</sup> se define *número cardinal* o simplemente *cardinalidad*. Por lo tanto, el “número de elementos” de un conjunto se define al final como su cardinalidad, es decir, la clase de equipotencia a la cual pertenece el mismo conjunto. Entre los números cardinales se pueden introducir las relaciones de orden  $<$  e  $\leq$ , mediante las cuales ordenarlos enteramente<sup>40</sup>.

---

<sup>39</sup> ¡Y resulta que no son conjuntos! De todas formas, la definición dada se puede modificar para convertirlas en conjuntos, pero no nos interesa profundizar más.

<sup>40</sup> Si  $c_i$  y  $c_k$  son dos cardinales, se dice que  $c_i < c_k$  si se verifican: a) existe un conjunto  $I$  de cardinalidad  $c_i$  equipotente a un subconjunto de un conjunto  $K$  de cardinalidad  $c_k$ ; b)  $I$  y  $K$  no son equipotentes. Sin la condición

La cardinalidad de los conjuntos *finitos* representa a los números naturales metamatemáticos  $0, 1, 2, \dots$  etc. Probablemente ésta es la definición más satisfactoria, desde el punto de vista filosófico, que el lenguaje matemático puede ofrecer para los números naturales intuitivos. El número “ $0$ ” viene a ser la clase de todos los conjuntos que no tienen elementos; “ $1$ ” la cardinalidad sucesiva, en susodicho ordenamiento, a “ $0$ ” (o sea, la clase de todos los conjuntos que tienen un solo elemento; pero ésta es sólo una aclaración semántica “circular”, mientras la precedente definición no es “circular”); “ $2$ ” la cardinalidad sucesiva a “ $1$ ” y así seguidamente. Con tal definición, las nueve condiciones del ap. II.6 se verifican: no hemos elegido que otro de los conjuntos isomorfos que las satisfacen. A pesar de ser verosímilmente inmejorable, ni siquiera esta definición matemática es capaz de resolver todos los problemas epistemológicos. Una crítica insuperable, por ejemplo, se debe a la ya señalada inadecuación matemática del concepto de *finito*, con respecto al correspondiente concepto semántico (profundizaremos en ello más adelante). Al no ser intachable, sería muy ingenuo o presuntuoso considerarla como obligatoria. Conjuntamente, hemos ya observado que para los objetivos de la Matemática es igualmente válida cualquier otra elección isomorfa<sup>41</sup>.

---

b) se obtiene la definición de  $c_i \leq c_k$ . Usando el axioma de elección se puede demostrar que esta última relación es *de orden total*, es decir, permite un ordenamiento de todos los números cardinales.

<sup>41</sup> La definición discutida se debe a Russell (que la retoma de Frege); pero su pretensión sobre la oportunidad de definir así los naturales, es más “tolerable”, en cuanto hace referencia a la Teoría *ingenua* (no formalizada) de los conjuntos. De este modo, sus argumentaciones, aunque sujetas a los defectos que hemos indicado, carecen de voluntad propiamente formal; y por tanto equivalen a una sencilla sugerencia de precisión, justificada por el innegable valor epistemológico del resultado.

Pasemos a las cardinalidades de los conjuntos *infinitos*. La cardinalidad de  $N$  se llama *cardinalidad del numerable* y se indica con  $\aleph_0$  (“aleph con cero”). Los números pares, por tanto, tienen la misma cardinalidad  $\aleph_0$  y se puede demostrar que lo mismo vale para cualquier subconjunto infinito de  $N$ . Pero ¿existen conjuntos infinitos con cardinalidad distinta de  $N$ ? Puesto que en *TC* se demuestra que existe  $N$ , se deduce que existe también  $P(N)$ , el conjunto de todos sus subconjuntos. Y bien,  $P(N)$ , obviamente infinito, no tiene la misma cardinalidad que  $N$ . Cantor incluso demostró que para todo conjunto  $A$ ,  $A$  y  $P(A)$  no poseen jamás la misma cardinalidad. La demostración informal (que, recordamos, puede ser rigurosamente formalizada en *TC*) es la siguiente. Supongamos por absurdo que exista una correspondencia biunívoca entre  $A$  y  $P(A)$ . Según tal correspondencia, por ejemplo, al elemento  $x_l$  de  $A$  corresponde el subconjunto  $X_l$  de  $A$ . Ahora bien,  $x_l$  puede pertenecer o no pertenecer a  $X_l$ . Consideremos el conjunto  $B$  de todos los elementos de  $A$  que no pertenecen al subconjunto de  $A$  que le corresponde según la correspondencia biunívoca. Si indicamos con  $X$  el subconjunto de  $A$  correspondiente al genérico elemento  $x$  de  $A$ ,  $B$  se expresa como:

$$B = \{x \in A \mid (x \notin X)\}$$

Sin embargo,  $B$  también es un subconjunto de  $A$  y como tal debe corresponder a un elemento  $b$  de  $A$ . Preguntémosnos si  $b$  pertenece a  $B$ . Si le pertenece, entonces non le pertenece; si no le pertenece, entonces le pertenece. Absurdo.

Se puede demostrar fácilmente que, si  $A$  es un conjunto finito de  $n$  elementos,  $P(A)$  posee  $2^n$  elementos, por cualquier valor de  $n$ . Por consiguiente, esta notación se extiende en los casos de conjuntos infinitos: así, la *cardinalidad* de  $P(N)$  se indica con

$2^{\aleph_0}$ .

Construyamos ahora una importante sucesión de cardinalidad. En correspondencia de la siguiente lista de conjuntos de cardinalidad distinta:

$$N, P(N), P(P(N)), P(P(P(N))), \dots$$

se obtiene la siguiente lista de cardinalidad:

$$\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \dots$$

Luego, podemos obtener nuevos números cardinales considerando la unión de un conjunto que pertenece a  $\aleph_0$  con un conjunto que pertenece a  $2^{\aleph_0}$  y así sucesivamente para todas las cardinalidades definidas (por lo tanto, una unión infinita). Se obtiene un conjunto, correctamente definible en *TC*, cuya cardinalidad es distinta de todas las mencionadas. Indicando con  $\Omega_0$  la nueva cardinalidad, se pueden obtener nuevos números cardinales considerando otra vez los conjuntos de las partes de los nuevos conjuntos. Repitiendo el razonamiento, se obtiene la “sucesión”:

1)  $\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \dots, \Omega_0, 2^{\Omega_0}, 2^{2^{\Omega_0}}, \dots, \Omega_1, 2^{\Omega_1}, 2^{2^{\Omega_1}}, \dots$

donde  $\Omega_1$  es la cardinalidad del conjunto obtenido de la unión infinita de conjuntos con las cardinalidades precedentes, y así sucesivamente. Usamos las comillas en el término “sucesión” porque se concluye que dicha colección de cardinalidades (aunque éstas se definan como *conjuntos*, como se ha señalado en una nota reciente), *no es un conjunto* (ni por ende una



*sucesión*, es decir, un conjunto ordenado)<sup>42</sup>. Lo mismo vale también para la colección de todas las cardinalidades.

La “sucesión” (1) resulta ya ordenada según la relación de orden total antes mencionada. Ahora, una pregunta importante: ¿la “sucesión” (1) contiene *todos* los cardinales? La respuesta “sí”, se llama “hipótesis general del continuo”. La respuesta “no”, admite que existen conjuntos con una cardinalidad intermedia entre dos términos sucesivos de ésta. En particular, la hipótesis de que entre  $\aleph_0$  y  $2^{\aleph_0}$ , es decir, entre el numerable y la cardinalidad de los números reales (como, en efecto, puede demostrarse), no existan otras cardinalidades, se llama simplemente “hipótesis del continuo”. En 1963, P. J. Cohen metademostró que tanto la hipótesis general del continuo, como la particular, son *indecidibles*. El hecho suscitó sorpresa por una sencilla razón: ninguna intuición clara, es decir, ningún “modelo” correcto intuitivo de *TC*, sugiere que la hipótesis del continuo sea más plausible que su negación. Evidentemente se trata de un tema complejo y difícil para nuestra comprensión (como también la propia metademostración de Cohen) que revela cierta nebulosidad en torno a los “modelos” de *TC*. Recorramos el itinerario: *TC* fue construido con el objetivo de axiomatizar la intuitiva “colección de los conjuntos”, la cual, pues, representaría el “modelo” correcto espontáneo de la Teoría. Pero ahora se nos pregunta: ¿Qué “modelo” espontáneo de *TC* tenemos en mente? ¿Uno para el cual la hipótesis (general

---

<sup>42</sup> En efecto, para cualquier *conjunto*, incluso infinito, de cardinales de la (1), se puede construir, con el método descrito, un *conjunto* con una cardinalidad mayor a todo cardinal contenido en el primer conjunto, pero que debe pertenecer a la “sucesión” (1) por como ésta ha sido definida; por lo tanto, ningún *conjunto* de cardinales de la (1) puede contener todos los cardinales de la misma (1). Un razonamiento muy análogo se puede hacer para la colección ordenada de todas las cardinalidades.

o particular) del continuo es verdadera o uno entre los infinitos, y absolutamente distintos entre sí, para los cuales es falsa? Evidentemente, los conceptos conjuntistas intuitivos se revelan demasiado toscos para constituir un real “modelo” correcto de *TC*; o bien, ninguno de los “modelos” de *TC* es enteramente espontáneo. Ciertamente, no se puede excluir que nuevas consideraciones iluminen esta cuestión particular; dos autores ya han afirmado que la negación de la hipótesis general del continuo sería más plausible, pero sus razonamientos son complejos (Woodin) o no convencen plenamente a todos (Freiling)<sup>43</sup>. En todo caso, a día de hoy los “modelos” de *TC* se revelan huidizos también en otros muchos temas, con las consecuencias negativas que tendremos ocasión de discutir.

Pasando ahora a ejemplos concretos, el conjunto de los números racionales estándar es numerable. Esto se demuestra con la siguiente correspondencia:

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	...
<i>1/1</i>	<i>1/2</i>	<i>2/1</i>	<i>1/3</i>	<i>2/2</i>	<i>3/1</i>	<i>1/4</i>	<i>2/3</i>	...

en la cual los racionales son ordenados por orden creciente de la suma entre numerador y denominador. Los números reales estándar, en cambio, no son numerables. La técnica de demostración informal de este hecho (aunque, como siempre, plenamente formalizable en *TC*), debida a Cantor, es especialmente interesante. Consideremos sencillamente todos los reales estándar entre *0* y *1*. Supongamos, por absurdo, que exista una correspondencia biunívoca de estos números con *N*, o sea una lista que los enumere a todos:

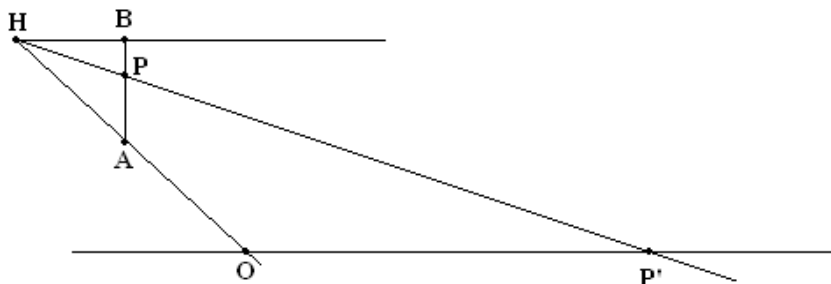
---

<sup>43</sup> C. Freiling: *Axioms of Symmetry: throwing darts at the real line*, p. 190-200; y H. Woodin: *The Continuum Hypothesis*, p. 567-576 y n. 7, p. 681-690.

1.  $0, \underline{1}086582\dots$
2.  $0, 3\underline{4}90776\dots$
3.  $0, 43\underline{3}0991\dots$
4.  $0, 908\underline{8}125\dots$

donde hemos subrayado las cifras de la diagonal, es decir, la primera cifra decimal del primer número, la segunda del segundo, etc.. Consideremos ahora un número real obtenido escribiendo después de “0,” cifras decimales *distintas* de aquellas subrayadas, por ejemplo: “0,0529...”. Pues bien, dicho número es distinto de cualquier número de la lista, ya que difiere del genérico número de posición  $k$  por su  $k$ -ésima cifra decimal, por construcción. El absurdo demuestra justamente que los números reales estándar entre 0 y 1 no son numerables.

Sin embargo, estos mismos ¡son equipotentes con *todos* los números reales estándar! En efecto, resulta que los puntos de un segmento de longitud arbitraria son equipotentes con los puntos de una recta, de un plano, incluso de un espacio de cualquier dimensión. El propio Cantor se sorprendió de estas conclusiones (muy famoso es su “*lo veo, pero no lo creo*” en una carta a Dedekind). Un ejemplo demostrativo de estos “extraños” resultados puede ser ilustrado por la siguiente figura, donde se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de un segmento  $AB$  y una semirrecta de origen  $O$  ortogonal a éste.



A cada punto  $P$  del segmento está asociado el único punto  $P'$  de intersección de la recta  $PH$  con la semirrecta. Al genérico punto  $P'$  de la semirrecta está asociado el único punto  $P$  de intersección de la recta  $P'H$  con el segmento  $AB$ . ¡El segmento  $AB$  tiene “tantos puntos como” la semirrecta!

Finalmente, Cantor demostró también que la cardinalidad de los números reales estándar es precisamente la de  $P(N)$ , es decir  $2^{\aleph_0}$ .

## II.13. Los números de la metamatemática

Discutimos ahora las características del lenguaje metamatemático a la luz de las últimas consideraciones. Recordemos que la metamatemática ha sido definida genéricamente como un lenguaje semántico que obedece a principios elementales de “rigor y lógica común” no perfectamente especificables; por tanto, con un grado de ambigüedad imposible de erradicar completamente, como hemos observado. Pero el momento es oportuno para añadir algo más.

Comenzaremos con la pregunta: ¿Cuántas son las expresiones significativas del lenguaje metamatemático? La semántica se caracteriza por su capacidad de denotar con un

*signum* todo ente o concepto que tenga un significado. Si un objeto de cualquier tipo tiene un significado, podemos denotarlo con un signo convenido, como la letra  $A$ . También “la colección de todas las expresiones semánticas” es una expresión significativa que denotamos con  $S$ . Entonces  $S$  se contendría a sí mismo; esto es un primer indicio del hecho que  $S$  no puede ser un *conjunto*, como cabía esperar. No obstante podemos todavía discutir, semánticamente, del “número” de sus elementos. Supongamos que exista un cierto conjunto  $I$  con una cardinalidad, es decir un número de elementos, superior a  $S$ . Ello vendría a decir que existe al menos un elemento de  $I$  que no puede ser denotado, representado con un signo. Pero esto es absurdo. Evidentemente, se trata de un tipo particular de absurdo metamatemático, diríamos de tipo epistemológico. Si tal elemento (que además es un *conjunto*, es decir un objeto propiamente matemático) existe y posee un *significado* no hay nada que nos impida *significarlo* con  $A$ . En este sentido, las solas que quedan excluidas son las anomalías de naturaleza paradójica, como se ha observado con el caso de un “objeto todavía no denotado” (ap. I.12): ¿es denotable? Sin embargo, hemos observado que casos como éstos, donde el tiempo interviene explícitamente en la constitución del significado, pueden fácilmente apartarse de nuestro análisis, porque interesan al mundo real pero no a las Matemáticas. Pero pronto observaremos otros tipos de paradojas.

Por lo dicho, parece que el número de expresiones semánticas no sea inferior a ninguna cardinalidad. De paso, éste es otro argumento sobre el hecho de que  $S$  no puede ser un conjunto: si lo fuese, tendría una cardinalidad y cada fijada cardinalidad es menor que otras (infinitas) cardinalidades. En cierto sentido, el “número” de elementos de  $S$  es el más grande que pueda imaginarse; sin duda, no se trata de un número matemático, es

decir, representable en seno a un Sistema axiomático formal. Hasta el momento no se ha concordado ningún nombre para tal “número”; nosotros lo llamaremos número *hiperenumerable*.

Aprovechamos para señalar que también a la *colección de todos los conjuntos* parece legítimo asignar la *hiperenumerabilidad*. El razonamiento es análogo: ningún conjunto puede tener una cardinalidad mayor que esta colección. Por absurdo, no todos los elementos de tal conjunto, que todavía son conjuntos, pertenecerían a dicha colección.

Queremos insistir con otros ejemplos sobre la *hiperenumerabilidad* de las proposiciones de la metamatemática, porque ésta parece en contraste con distintas argumentaciones aparentemente sensatas; y sobre todo porque, salvo rarísimas excepciones, se trata de un tema que ha sido y sigue siendo inexplicablemente desatendido por los expertos de Lógica.

La normal convención sobreentendida a cerca de la representación escrita de cualquier lenguaje, semántico o no, es que éste haga uso sólo de unos prefijados y *finitos* símbolos alfanuméricos. A continuación, pues, salvo explícita indicación contraria, *supondremos siempre que un cualquier lenguaje, de cualquier tipo, haga uso de una cantidad finita de símbolos*. En el ámbito propiamente matemático, ello significa limitarse a aquellos Sistemas en los cuales toda proposición es representable mediante secuencias de símbolos cuya definición, en base a cuanto se ha observado al principio de la primera Parte, no requiere semántica: basta un elenco.

El *conjunto* de todas las posibles secuencias ordenadas finitas que usan un número finito de símbolos, se puede fácilmente demostrar *numerable* en *TC*. Puesto que una frase está constituida por una secuencia finita de símbolos, se diría que también el número total de frases de cualquier lenguaje,

simbólico o semántico, tiene una *cardinalidad numerable*. ¿Cómo se explica la aparente contradicción con las consideraciones precedentes? Con el hecho de que un lenguaje semántico puede ser capaz de asociar más de un significado al mismo símbolo o secuencia de símbolos. La frase “el rollo no marcha” puede significar, a priori, un número ilimitado de cosas distintas, incluyendo alusiones económicas, metafóricas, psicológicas, eróticas, etc., todas aclaradas por el contexto. En términos más rigurosos, en un lenguaje semántico una secuencia idéntica de caracteres puede representar más de una frase significativa. La letra  $A$  o  $x$  ha indicado e indicará un número enorme de objetos diferentes en Matemáticas, sin que esto comporte necesariamente ningún grave extravío. El “contexto” clarificador, pensándolo bien, es una referencia circular del lenguaje sobre sí mismo, bien sea declarada o sobreentendida. El lenguaje semántico, de hecho, puede hacer autorreferencias, hasta el punto de redefinir arbitrariamente los significados y las reglas sintácticas que él mismo usa.

Tal posible autorreferencia, en los lenguajes semánticos, puede dar lugar a paradojas. Aquella que citamos rápidamente en el apartado I.8, “esta proposición es falsa”, es conocida como *paradoja del mentiroso*. El problema es que dicho enunciado no puede ser ni verdadero ni falso, a menos de absurdo semántico. En el mismo apartado hicimos también referencia a que una regla deductiva que mencione la consistencia (o la inconsistencia) del Sistema puede resultar paradójica. Por ejemplo: una regla que genera una contradicción ¡si el Sistema es consistente! Además vimos la paradoja de Russell. La axiomatización del concepto de *conjunto*, naturalmente, no la hace desaparecer, sino que establece la convención de prohibirla para tal término; ella reaparece en relación a otros términos necesarios (como concluimos), como “colección”. Hay otros

infinitos tipos de paradojas. “Definamos el mínimo número natural no definido por esta proposición”. Si tal expresión define un número natural cualquiera, entonces no lo define; absurdo. Por lo tanto, no define a ninguno; pero entonces... define el número “0”, aún absurdo. Hemos observado ya que en un lenguaje semántico, a diferencia de uno matemático (clásico), no hay motivos para considerar catastrófica la presencia de algunos absurdos; no obstante ¿cuál debe ser nuestra actitud con respecto a ellos? ¿Se pueden resolver de alguna manera? ¿Nos indican algo?

Russell, en tiempos en que la distinción entre lenguaje matemático y metamatemático todavía no era popular, empezó con el intentar rechazar siempre la autorreferencialidad. Él mismo se dio cuenta, un poco más tarde, de que no siempre era posible ponerlo en práctica. Ni, por otra parte, la autorreferencialidad era siempre tan temible. Las denominadas *definiciones implícitas* de un ente matemático se realizan, como hemos visto en bastantes ejemplos, mediante la satisfacción de una serie de expresiones que mencionan el mismo ente. Propiamente tales definiciones autorreferenciales se realizan sólo en un plano metamatemático, por lo tanto semántico. Como ejemplo emblemático, consideremos las condiciones conjuntistas 1)-9) que definen implícitamente el conjunto de los números naturales (ap. II.6). En lenguaje metamatemático se diría algo como: “definimos conjunto de los números naturales,  $N$ , un conjunto que satisface las siguientes condiciones: 1)  $x_0 \in N$  etc.”. La definición es autorreferencial porque las condiciones mencionan el mismo  $N$  que se está definiendo. En algunos casos la mención se puede eliminar; por ejemplo diciendo “ $N$  tiene  $x_0$  por elemento...”, se elimina la referencia a  $N$  en la condición 1). Pero obsérvese como es imposible eliminar la referencia a  $N$  en la condición 9), el principio de inducción. ¿Qué problemas podría causar tal



circularidad? Desde un punto de vista puramente sintáctico esta definición no produce ningún efecto; es decir, no posee ninguna consecuencia para las proposiciones del Sistema. El único hecho propiamente matemático es que las reglas del Sistema permiten deducir la cadena “ $\exists N (x_0 \in N \text{ e } \forall x \in N (\dots \text{etc.} \dots)$ ”. En ella, la letra “ $N$ ” puede, obviamente, ser sustituida por cualquier otra. Así, pues, la conveniencia de indicar con “ $N$ ” un conjunto en el cual las citadas condiciones se sobreentienden satisfechas, es una exigencia que no tiene relación, ni condiciona, al lenguaje propiamente matemático. Si las cosas fueran siempre así, se concluiría que el problema que estamos estudiando en el fondo es banal; porque aunque la autorreferencialidad fuese viciosa, ésta no podría jamás afectar al lenguaje matemático. Su irregularidad estaría confinada al ámbito metamatemático que le es propio y no podría contaminar al lenguaje matemático. Puesto que este último es aquel que interesa al final, concluiríamos que las definiciones con circularidad son simples expedientes para facilitar la comprensión semántica de algunos entes y conceptos; y por tanto siempre son inocuamente viciosos, si es que son viciosos.

Pero por desgracia no siempre es así. En efecto, ¡resulta que – ¡sorpresa! – la regla deductiva del *modus ponens* es autorreferencial<sup>44</sup>. Y ésta influye activamente (¡y cómo!) en el lenguaje matemático, porque genera teoremas. Consideremos, para simplificar, un Sistema axiomático donde existe sólo la regla del *modus ponens*. Su traducción, en términos que no dejan dudas, es la siguiente: “si  $A$  es un axioma o un teorema y  $A \rightarrow B$  es un axioma o un teorema, entonces  $B$  es un teorema”. Por tanto, éste define el conjunto de los teoremas de modo autorreferencial: “se dice que  $B$  es un teorema si  $A$  es un axioma

---

<sup>44</sup> Sorpresa hasta cierto punto: ya se ha visto que la formalización del *modus ponens* da lugar a una definición implícita del conjunto  $T$  de los teoremas de la Teoría.

o un teorema y  $A \rightarrow B$  es un axioma o un teorema”. No queda más remedio que coger el toro por los cuernos; pero, después de todo, éstos no parecen capaces de herir mortalmente. Si se conviene ignorar los términos aún no definidos, el *modus ponens* establece un criterio absolutamente inequívocabable para generar teoremas. Cuando se aplica por primera vez, bastará limitarse a considerar sólo los axiomas, en lugar de esforzarse (inútilmente) en determinar también los objetos, todavía indefinidos, llamados “teoremas”. Una vez hecho, se dispondrá de algunos teoremas y podrán formarse otros. Que se posea el buen sentido de ignorar los términos aún no definidos y que no sea posible obtener otros teoremas aplicando de forma distinta tal regla, son convenciones tácitas. Por otra parte, todavía no se ha sabido encontrar una alternativa... Aun sólo a causa de dicha “inocente” pero indiscutible ambigüedad, la *buenas definición* para cualquier Cálculo predicativo clásico formal de primer orden, es precisamente una cuestión más de *convención* que de deducción metamatemática (ap. I.9).

En lenguaje semántico existen, por lo visto, circularidades malas (es decir, paradojas) y buenas; y algunas de estas últimas parecen indispensables en Matemáticas<sup>45</sup>. Debemos por tanto presumir que la metamatemática, entendida como un lenguaje semántico “sabio”, siempre consiga reconocer una definición autorreferencial viciosa y apartarla; pero está claro que no se puede conseguir una certidumbre propiamente matemática de ello. Responderemos a las preguntas anteriores diciendo simplemente que las paradojas semánticas son inevitables y nos indican que el lenguaje semántico que usan no puede ser

---

<sup>45</sup> También la definición de la colección de las proposiciones de un Sistema axiomático clásico es autorreferencial y, obviamente activa en el lenguaje matemático. Otros ejemplos pueden tenerse en las reglas axiomáticas *propias* de los distintos Sistemas clásicos.

axiomatizado, es decir reducido a lenguaje matemático, tal como está.

Consideremos ahora la siguiente cuestión. “Sea dado un lenguaje cualquiera (recordemos, con un número finito de caracteres). El conjunto de todas las proposiciones simbólicas con menos de 100 caracteres es finito. De ellas, algunas definen ciertos números naturales, como «el número que sumado a 5 da 7» (que tiene 30 caracteres, incluidos los espacios). Consideremos el conjunto de todas las proposiciones simbólicas con menos de 100 caracteres que definen números naturales. Tal conjunto es finito y define siempre un número finito de números naturales. Sea  $m$  el mayor de dichos números. Entonces la proposición «el número natural sucesivo al mayor definible con menos de 100 caracteres» define el número natural  $m+1$  y tiene menos de 100 caracteres (para ser exactos 73). Absurdo”. Esto se conoce como “paradoja de Berry”, pero en realidad no se trata de una verdadera paradoja, si con dicho término entendemos un absurdo inevitable (que es aquello que hemos convenido). Detengámonos en la afirmación “tal conjunto es finito y define siempre un número finito de números naturales”. ¿Qué se entiende aquí por “define”? Si el lenguaje es semántico puede ser capaz de definir con pocas frases un número incluso infinito de entes matemáticos; un ejemplo lo tenemos en la misma definición de todo Sistema axiomático formal (no banal): sirviéndose de metamatemática, se pueden definir infinitas proposiciones y teoremas. Los mismos números naturales son, evidentemente, definidos mediante un número finito de caracteres; ¿se admitirá que es así si se admite que es posible definirlos! Susodicha afirmación, entonces, se refiere a un tipo limitado de “definición”, un tipo donde no se admiten “circularidades” o retrospecciones. La última frase usada en la “paradoja”, en cambio, define un número usando una retrospección, es decir, un criterio diferente. Se confunden, por lo

tanto, distintos niveles de interpretación. Un ejemplo concreto aclarará del todo la cuestión. Si se usan los caracteres alfanuméricos, las posibles secuencias ordenadas de dichos símbolos con una longitud menor de 100 son muchísimas, pero finitas. Supongamos de querer definir, mediante algunas de estas combinaciones, un número finito de números naturales. El criterio para hacerlo puede variar considerablemente, dependiendo de la lengua usada y/o de cualquier preferencia nuestra. Por ejemplo, es probable que se decida asignar toda cadena del tipo “00...01” al número 1, es decir, al sucesor de 0. También “el sucesor de 0”, si somos españoles, será probablemente considerado una definición de 1. El mismo número, por tanto, podrá tener más de una definición; mientras, por sencillez, podemos establecer que toda proposición defina como mucho a un solo número natural<sup>46</sup>. Imaginando pasar revista a todas las posibles combinaciones, es muy probable que descartaríamos bastantes: algunas por estar privadas de significado convenido (como «ahT\_l&Kak»), otras porque se considerará que no definan números naturales (como «el gato no ha digerido el ratón»). Obviamente, nada nos impide convenir que ciertas cadenas más o menos extrañas, como «mi número de la suerte» o «el número de los pecados capitales» definan a determinados números naturales. Antes o después, chocaremos con la misteriosa secuencia: «el número natural sucesivo al mayor definible con menos de 100 caracteres». ¿Qué haremos? Admitiremos que Miguel decida no asociarle ningún número, mientras Ana, quizá basándose en un profundo estudio, la considerará la definición de un determinado natural, por ejemplo de 239987. Terminado tal escrupuloso trabajo, reconsideremos la frase conviniendo que su término “definible”

---

<sup>46</sup> Pero en lo que sigue no cambiaría absolutamente nada si, en cambio, definiera a un número arbitrario, pero *finito*, de naturales.

se refiera precisamente a nuestra larga labor. Si se admite así, ésta define ahora un preciso natural, tanto para Miguel como para Ana. El punto fundamental es que, para ambos, *la frase posee ahora un valor semántico diferente* del que se había considerado antes: en efecto, Miguel no había asociado ningún número, mientras Ana un número que, como se debe admitir, no puede ser el mismo. Para ella no hay manera de corregir las convenciones de manera que haga coincidir los dos números, o bien los dos valores semánticos.

En otras palabras, la “paradoja de Berry”, lejos de ser una verdadera paradoja, es una señal clara de que el lenguaje semántico puede poseer distintos niveles interpretativos, como ya habíamos afirmado. Si en la “paradoja de Berry” entendemos por “definición”, dondequiera que aparezca, el concepto semántico más amplio posible, es decir todos los posibles modos de definición, se obtiene una metademostración por absurdo (semántico) del hecho de que un número finito de proposiciones simbólicas es capaz de definir, mediante la intervención de la semántica, un número infinito de números naturales. Pero, ¿cuántas deben ser, al menos, dichas proposiciones simbólicas para poderlo hacer? ¿Cuánto podemos rebajar el número 100? No se ven criterios lógicos que puedan caracterizar dicho número mínimo. ¡En efecto, no existen! Un solo carácter, como “a”, puede representar un cualquier número prefijado y, si lo convenimos, puede representar más de uno. Por ejemplo, podemos convenir que represente tanto a 3 como a 8774; se pretenderá entender por el contexto, cada vez que aparezca “a”, si este símbolo indica 3 o 8774. Pero también puede representar infinitos. Pensemos en cuántas rectas distintas indica la letra “r” en un libro de Geometría y, más en general, en toda la bibliografía matemática. ¿Por qué debería haber un límite a tal número? Con tal de que el contexto aclare de qué recta se trata,

no hay ningún problema. Ciertamente, el precio inevitable pagado es el peligro de confusión; pero en ámbito semántico tal riesgo puede subsistir. En general, cuantos más objetos sean representados por la misma secuencia, mayor es el grado de significación (y de posible confusión<sup>47</sup>) de la lengua. Así, en principio, un sólo símbolo sería suficiente para denotar individualmente cada número natural o real, o un elemento de cualquier conjunto o colección arbitrariamente grande, como la misma colección de todas las expresiones semánticas  $S$ . Obviamente, esto representa un caso límite radical, hipotético e innecesario. Los contextos interpretativos variables usados normalmente por la metamatemática no tienen necesidad de ser arriesgadamente ambiguos; al revés, esto no es conveniente ni oportuno. En efecto, normalmente no hay impedimentos para enriquecer y refinar el vocabulario, haciendo que las expresiones sean menos equivocables.

La “paradoja de Richard”, es otra pseudo-paradoja de la misma especie. En ella se supone que los números reales entre 0 y 1, *definibles mediante definiciones individuales*, sean numerables y se hace una lista de ellos. Después se define un número real entre 0 y 1 con el mismo criterio de la diagonal de Cantor, antes descrito. Dicho número no está en la lista, a pesar de que ha sido definido: absurdo. De nuevo, no se trata de una verdadera paradoja: si se admite que *todas* las definiciones individuales sean numerables, se asume un tipo de semántica limitado, que equivale a una simple denotación. Luego, en cambio, se hace uso de una definición de carácter irreduciblemente retrospectivo: ésta para funcionar se debe

---

<sup>47</sup> Y añadimos también de atractivo, pensando en el griego clásico. Ciertamente, con el pasar del tiempo las lenguas se especializan y se enriquecen con nuevos vocablos ganando en precisión, pero también en “frialdad”.

referir, mirándola desde fuera, a toda la lista considerada; por lo tanto, no puede hacer parte de ella. En otras palabras, debe ser de un tipo lógico distinto con respecto a las incluidas en la lista. Otra vez, el absurdo deriva por confundir valores semánticos diferentes del verbo “definir”. Como en el caso precedente, si las definiciones se consideran siempre en el sentido semántico más amplio, la “paradoja de Richard” puede leerse como una metademostración del hecho de que las definiciones semánticas individuales no son numerables y por tanto pueden definir un número de objetos superior al numerable: una misma cadena, diversamente interpretada, puede usarse para definir un número a priori ilimitado de números. Un razonamiento más sólido del epistemológico hecho al principio de este apartado; pero también menos general, en cuanto no excluye la posibilidad de que el número de las expresiones semánticas sea otro cardinal superior a  $\aleph_0$ . Pero es probable que en esta línea se pueda realizar una metademostración general.

Obviamente, un particular lenguaje semántico puede tener cualquier número inferior al *hiperinnumerable* de proposiciones: una cardinalidad cualquiera (innumerable o numerable) o incluso un número finito. Por otra parte los Sistemas formales, cuyo lenguaje no es semántico, tienen un número de proposiciones finito o infinito numerable, como pronto observaremos. Por lo tanto, un lenguaje con un número de proposiciones finito o infinito numerable, puede ser tanto formal como semántico. En cambio, un lenguaje que consta de un número de proposiciones superior al numerable es necesariamente semántico. De hecho, si posee un número finito de símbolos, puede adoptar sólo una cantidad numerable de cadenas finitas. Debiendo formular con ellas un número de proposiciones superior a  $\aleph_0$ , debe ser capaz de asociar más de una proposición a una misma secuencia finita de símbolos (o

sea, adoptar un contexto interpretativo variable); pero esto puede hacerse sólo asignando *valores distintos* a la misma cadena. Cada *valor* constituye<sup>48</sup>, precisamente, un *significado* y su asignación, la interpretación semántica. Nótese como la *ineliminabilidad* de dicho valor semántico derive justamente de la obligatoriedad de diferenciar la misma cadena en más de una frase interpretativa. En otras palabras, el uso de un contexto interpretativo variable representa el aspecto lógico característico de la semántica intrínseca, es decir, no eliminable.

Recordando los resultados del apartado anterior, podemos afirmar que la Teoría *TC* es capaz de operar sintácticamente sobre objetos cuya naturaleza intrínseca es semántica: los conjuntos innumerables; aunque con ciertas limitaciones, como evidenciaremos en los próximos apartados.

## II.14. Los números de los Sistemas axiomáticos clásicos

¿Cuántos son los teoremas y proposiciones de un Sistema clásico? La respuesta *formal* a esta pregunta requiere representar el Sistema en *TC*: sólo aquí la cardinalidad es un concepto formalizado. Si el conjunto de las proposiciones de un Sistema clásico es *numerable*, diremos brevemente que “el Sistema es numerable”. En un Sistema numerable, el conjunto de los teoremas puede ser numerable o finito (siendo este último un caso banal que, como ya se ha dicho, podemos excluir). Por otra parte, también en un Sistema innumerable (es decir, en el cual el conjunto de las proposiciones es innumerable) el conjunto de los teoremas podría ser numerable. No obstante, en este caso siempre es posible considerar un Sistema numerable *S'* (y *bien*

---

<sup>48</sup> Ceder aquí a la tentación de añadir “por definición”, sería presuntuoso.



*definido* si lo es  $S$ ), que tenga los mismos teoremas que  $S$ . Por ejemplo se puede definir  $S'$  de manera que sus proposiciones coincidan con los teoremas de  $S$  y esté dotado de las mismas reglas deductivas que  $S$ .  $S'$  puede entonces sustituir perfectamente a  $S$ , si lo que interesa del Sistema es su ámbito deductivo. En otras palabras, trabajar en  $S$  representaría una complicación prácticamente inútil: nos obligaría a diferenciar la cardinalidad *proposicional* de la *deductiva* sin ninguna consecuencia con respecto al ámbito deductivo del Sistema, que normalmente es lo que interesa. Por consiguiente, a continuación supondremos siempre que la cardinalidad (numerable o innumerable) de un Sistema sea determinada por la cardinalidad del conjunto de sus teoremas, es decir que coincida con la *cardinalidad deductiva*.

Si se representa en  $TC$  un arbitrario Cálculo predicativo clásico formal de primer orden, se demuestra fácilmente que los conjuntos de las proposiciones,  $P$ , y de los teoremas,  $T$ , son numerables. En efecto, éstos son subconjuntos del conjunto de todas las secuencias ordenadas finitas de los caracteres admitidos en el Sistema: sin duda un conjunto numerable, ya que el número de los caracteres es finito. Un Sistema clásico genérico, modificará los conjuntos  $P$  y  $T$  con las premisas *propias*; en especial, conforme a la convención hecha, modificará el conjunto de los axiomas  $H$  (y, por consiguiente, el de los teoremas  $T$ ) mediante nuevos axiomas o esquemas axiomáticos. Nótese que en la representación conjuntista del Sistema, tales axiomas y esquemas axiomáticos se convierten en enunciados de  $TC$  y por lo tanto siempre tendrán el primer orden, cualquiera que sea el orden expresivo de éstos en el Sistema originario. Supongamos que, después de tal operación, resulte un conjunto de axiomas  $H$ , y por tanto de teoremas  $T$ , innumerable. Se concluiría, por lo observado en el apartado

anterior, que sólo un lenguaje semántico podría enunciar todos los teoremas de la Teoría. Por consiguiente, el Sistema clásico considerado debe admitir semántica para sus proposiciones y entonces *no puede ser formal*. Además se ha observado que dicha semántica, debiendo adoptar un contexto interpretativo variable, es *ineliminable*. Por esta razón diremos que los Sistemas clásicos innumerables son *intrínsecamente* semánticos.

Viceversa, un Sistema clásico numerable no es necesariamente formal: evidentemente, las proposiciones pueden poseer un valor semántico con independencia de su número cardinal, incluso en el caso de que éste sea finito.

La elección de extender el campo de representabilidad en *TC* a los Sistemas clásicos innumerables se llama (quizá desdichadamente) *Semántica estándar*. Casi nunca se precisa claramente que ésta implica la posibilidad de representación conjuntista para ciertos Sistemas axiomáticos necesariamente *no formales*, o sea incluyendo semántica no eliminable en sus proposiciones. Típicamente, y pronto lo ejemplificaremos, la definición en *TC* de cierto subconjunto innumerable del conjunto de los teoremas de una Teoría clásica de este tipo (en particular, la traducción conjuntista de cierto esquema axiomático, conforme a nuestra convención), se realiza mediante una secuencia de la forma “... $\forall p \in I$ ...”, donde *I* es un conjunto innumerable y *p* un parámetro en función del cual queda determinado un axioma. En cambio, la convención, fiel a los principios de la axiomática formal, de limitarse a la consideración de los solos Sistemas clásicos *formales*, y por tanto numerables, se llama (todavía menos felizmente) *Semántica general* (o *de Henkin*)<sup>49</sup>. En ella, naturalmente, no se

---

<sup>49</sup> En realidad su definición habitual es distinta. No obstante, definirla en estos términos debería ser equivalente.

prohíben expresiones de dicho tipo (que son perfectamente correctas y formales); simplemente, su uso en el ámbito definitorio del conjunto de los teoremas (más en general, de las proposiciones) de un Sistema axiomático no se admite, porque éste resultaría no formal.

¿Cuál de las dos semánticas “tiene razón”? Si se ha seguido lo dicho, la pregunta correcta sería más bien: ¿Por qué se debe considerar la *Semántica estándar*? ¿Para qué sirve? En cierto sentido la respuesta es burlesca: no sólo los Sistemas innumerables son los más antiguos, sino que en la práctica éstos siguen siendo los más usados. Consideremos, como ejemplo importante, la *Teoría aritmética integral*. En tal Sistema axiomático clásico (que abreviaremos con *AI*), por lo demás idéntico a *PA*, el principio de inducción se generaliza así: “*en la expresión siguiente:  $(A(0) \wedge \forall x((A(x) \wedge \mathcal{S}(x,y)) \rightarrow A(y))) \rightarrow \forall x A(x)$ , sustituyendo  $A(x)$  por cualquier propiedad de  $x$ , se obtiene un axioma*”.

Está claro que si decimos “cualquier propiedad”, incluimos también propiedades que no pueden expresarse en el Cálculo predicativo clásico de primer orden con igualdad; por ejemplo, de orden superior al primero. Pero, más críticamente, también propiedades específicamente semánticas, de número sin duda *hiperinnumerable*. Por consiguiente, ya se puede argumentar que el Sistema será innumerable y por eso intrínsecamente semántico y no formal. Sin embargo, éste es el Sistema original para los naturales, introducido, independientemente, por Dedekind y Peano. *TC* nos permite representarlo, aunque sea parcialmente, como precisaremos. En primer lugar, hay que formalizar el concepto de *propiedad*  $A(x)$ , haciéndolo lo más general posible. Siguiendo el ejemplo de los *predicados*, parece espontáneo que a una arbitraria *propiedad* de los números naturales se haga corresponder una sub-colección de los mismos. Claramente hay

una primaria hipótesis de fondo: que dicha sub-colección se pueda expresar en lenguaje conjuntista, es decir que sea propiamente un *subconjunto*. Además, debiendo generalizar lo más posible, parece espontáneo requerir también el viceversa, es decir que *cualquier subconjunto de números naturales represente una propiedad*: aquella que caracteriza a todo elemento que le pertenece. Por lo tanto, representaremos la *propiedad*  $A(x)$  de la que se habla en la regla inductiva *integral* (normalmente llamada *inducción completa*), con un *arbitrario subconjunto del universo*. De aquí deriva la primera inevitable limitación de la representación en *TC* del Sistema, que reduce su *hiperinnumerabilidad*, no tratable en lenguaje matemático, a una cardinalidad innumerable ( $2^{\aleph_0}$ , como veremos); pero más adelante descubriremos otra restricción. Confirmaremos que dicha correspondencia exige la consideración no solamente de las usuales propiedades formales [de las cuales son ejemplos: “divisibilidad por 2 (el subconjunto de los números pares)”, “que sumados a 3 den 8” (el subconjunto  $\{5\}$ )”, “de los números primos pares mayores de 2” (el subconjunto vacío) “de los números pares que satisfacen la conjetura de Goldbach” (un subconjunto todavía desconocido, pero un subconjunto formal)], sino también de propiedades no enunciables con caracteres privados de significado: expresables sólo con un lenguaje metamatemático intrínsecamente semántico.

Empecemos a definir el conjunto de los axiomas,  $H$ , de esta Teoría. A sus axiomas, corresponden las condiciones definitorias:

- (1)  $(\exists *, x^*, (*, x^*, = *, 0^*) *) \in H$
- (2)  $(\forall *, x^*, (*, \exists *, y^*, (x, y)_s, ) *) \in H$
- (3)  $(\forall *, x^*, (x, y)_s, \rightarrow *, y^*, \neq *, 0^*) \in H$

.....

donde, por completitud, se ha introducido un símbolo-conjunto incluso para las paréntesis (que en principio no son necesarias, como hemos señalado). Con el objetivo de generalizar el principio de inducción a un arbitrario subconjunto ( $A$ ) del universo ( $U$ ), podemos establecer el criterio de indicar con la secuencia “ $A,(*,x^*),*$ ” la propiedad correspondiente al hecho de que  $x^*$  pertenezca a  $A$ . Esta convención hace que el conjunto de las proposiciones de  $AI$  sea innumerable (ya que  $U=N$ , como descubriremos pronto). Para que la nueva secuencia sea equivalente a la que expresa la propiedad a través de la conocida secuencia de símbolos-conjunto (en todos los casos en que esta última existe), podemos convenir el siguiente esquema axiomático “de comprensión”:

$$(\forall *,x^*,(*,A^*(x^*), \leftrightarrow *,A,(*,x^*),*, )*) \in H, \forall A^*(x^*) \in P_1$$

donde  $A^*(x^*)$  es la secuencia de símbolos-conjunto que expresa la propiedad,  $P_1$  el conjunto de todas las proposiciones formales de  $AI$  (es decir, todas y solas aquellas definidas *antes* de introducir la nueva secuencia) con al menos una variable libre (llamada  $x^*$ ) y  $A$  el conjunto:  $A=\{x^* \in U(A(x^*))\}$ , siendo  $A(x^*)$  la expresión *conjuntista correspondiente* a  $A^*(x^*)$ <sup>50</sup>.

<sup>50</sup> El lector podría dudar, a razón, de la formalizabilidad en  $TC$  de la *correspondencia conjuntista* y, por lo tanto, del entero esquema axiomático esbozado. Para disipar la duda sin recurrir al muy complejo lenguaje de  $TC$  (aun en su forma *ingenua*), nos valdremos de una escapatoria: en la tercera Parte (ap. III.3), observaremos que el lenguaje de  $TC$  es capaz de representar lógicamente el funcionamiento de una *máquina* cualquiera. Piénsese, pues, en una máquina concreta que, dada una secuencia de símbolos-conjunto, sea capaz de componer la expresión conjuntista y viceversa: ¡sólo hay que quitar/añadir asteriscos y comas!

Susodicho esquema axiomático conjuntista genera un número de axiomas de la representada  $AI$ , igual a la cardinalidad de  $P_I$ , que es infinito numerable. De hecho  $P_I$  sólo se diferencia del conjunto de las proposiciones del Cálculo lógico clásico formal con igualdad (que es numerable), por la formalización de algunos símbolos *proprios* (como “+\*”), sin alterar la cardinalidad.

Seguidamente, la inducción completa se puede traducir con:

$$(A, (*, 0^*), *, e^*, \forall *, x^*, \dots, \rightarrow *, \forall *, x^*, (*, A, (*, x^*, *)^*), *) \in H, \forall A \in P(U)$$

Esta última condición hace que  $H$  (y por ende  $T$ ) sea innumerable, porque se le asigna un elemento para cada elemento de  $P(U)$ . En consecuencia podemos afirmar que el originario Sistema  $AI$  no es formal y la citada definición pertenece a la Semántica estándar. Obviamente, esto no significa que la expresión “ $\forall A \in P(U)$ ” tenga algo de informal, puesto que está perfectamente definida y formalizada en  $TC$  para todo conjunto  $U$ . Sencillamente, el hecho de que  $T$  sea innumerable hace concluir (metamatemáticamente) que el Sistema axiomático originario no puede ser formal. El Sistema  $TC$ , en cuanto formal, sólo puede reproducir sus enunciados formales. Es decir, representar parcialmente dicha Teoría, pudiendo efectivamente expresar sólo su parte formal (que coincide con  $PA$ ). Aquí está la segunda limitación expresiva de la que se hablaba. Esto no quita que la misma Teoría  $TC$ , mostrándonos

---

Señalamos también que hubiera sido equivalente acabar el esquema axiomático de comprensión, en lugar que con la escritura “ $\forall A^*(x^*) \in P_I$ ”, con “ $\forall A \in P(U)_I$ ”, siendo  $P(U)_I$  definido análogamente como en una nota del apartado II.10.

que  $P(U)$ , y entonces  $T$ , es innumerable, nos habilita a concluir metamatemáticamente que la originaria  $AI$  es una Teoría informal mucho más amplia que la representada formalmente.

Desde la perspectiva de los axiomas de comprensión, hay infinitos casos (en concreto, el invariado  $2^{\aleph_0}$ ) en los cuales la secuencia “ $A, (*, x^*, *)^*$ ”, o bien la definición del conjunto  $A$ , no es codificable en caracteres sin significado.

Para construir un modelo de la Aritmética integral y demostrar que  $U=N$ , se pueden repetir los mismos pasos vistos para  $PA$ . Puesto que hemos representado la propiedad genérica  $A(x)$  con un elemento arbitrario de  $P(U)$ , se reconoce enseguida que la condición conjuntista correspondiente al principio de inducción completa es *idéntica* a la condición 9) que define el conjunto de los números naturales (ap. II.6). Por lo tanto, esta vez las condiciones para el genérico universo de un modelo de la Aritmética integral, *coinciden* con las condiciones para  $N$ . Repitiendo los mismos pasajes del apartado II.10, se construirá entonces el mismo *modelo estándar* de universo  $U=N$ , con la diferencia de que ahora se puede afirmar que éste es el *único modelo posible para tal Teoría*, a menos de isomorfismos (lo que viene de la misma unicidad de  $N$  a menos de isomorfismos). Nótese que no hemos podido concluir lo mismo para  $PA$ , por “culpa” de la condición (9) sobre su universo (ap. II.10), que es más débil de la 9) para  $N$ . Es el momento de profundizar más, observando en concreto la diferencia de  $PA$  con la Aritmética integral. La representación en  $TC$  del conjunto de los axiomas  $H$  de  $PA$  difiere sólo en relación al principio de inducción, que es más débil. Éste, sin necesidad de ningún axioma de comprensión, se puede traducir con la condición:

$$(A^*(0^*), e^*, \forall^* x^*, \dots, \rightarrow^*, \forall^* x^*, (*, A^*(x^*), *)^*) \in H, \forall A^*(x^*) \in P_I$$

donde  $P_I$  es el conjunto, infinito numerable, de todas las proposiciones de  $PA$  con al menos una variable libre. Como alternativa (para una comparación más directa con  $AI$ ) se puede emplear el mismo esquema de comprensión anterior y después definir la inducción débil mediante:

$$(A, (*, 0^*), e^*, \forall^* x^*, \dots, \rightarrow^*, \forall^* x^*, (*, A, (*, x^*), *)^*) \in H, \forall A \in P(U)_I$$

donde  $P(U)_I$  ya ha sido definido en una nota del apartado II.10: en palabras, es el subconjunto de  $P(U)$  de aquellos conjuntos cuya correspondiente propiedad es enunciable en el lenguaje de  $PA$  (que es formal). Este conjunto tiene la misma cardinalidad que  $P_I$ , es decir infinito numerable.

Por consiguiente  $H$ , y entonces  $T$  y el mismo  $PA$ , son numerables y la definición anterior respeta la Semántica general. Ahora sabemos que la respuesta a la pregunta lanzada en el apartado II.10 es un enérgico “no”: puesto que  $P(N)$  es innumerable, existe un número enorme (el mismo, invariado,  $2^{\aleph_0}$ ) de subconjuntos de  $N$  cuyos elementos no pueden ser *caracterizados* (todos y solos) por ninguna condición expresable en  $PA$ . El principio de inducción de  $PA$  no es equivalente, sino infinitamente más débil que la condición 9) del apartado II.6; o bien, del principio de inducción completa.

Debemos ahora discutir sobre una confusión, por desgracia muy difundida. Comenzaremos con una observación. Como hemos visto, la representación en  $TC$  de un Sistema clásico arbitrario hace corresponder a los predicados  $n$ -arios del



Sistema, unos subconjuntos de  $U^n$  ; por lo tanto, un predicado, considerado como variable, varía en un subconjunto de  $P(U^n)$ . En los casos no banales de Sistemas axiomáticos dotados de modelos, el conjunto universo de éstos,  $U$ , siempre es infinito; de ello se sigue que  $P(U^n)$ , para cada  $n$ , tiene una cardinalidad al menos igual a  $2^{\aleph_0}$ , por tanto siempre innumerable. De ello sigue que, si en el Sistema se permite el segundo orden expresivo, es decir, si está permitido cuantificar sobre los predicados, *podría* suceder que el Sistema sea innumerable. Por ejemplo, ello se obtendría si un axioma original de dicho Sistema usase una secuencia del tipo “... $\forall Q$ ...” (donde  $Q$  indica un genérico predicado), sin que ulteriores axiomas reduzcan la cardinalidad, por defecto innumerable, de la colección dentro la cual  $Q$  puede variar: la correspondiente representación en  $TC$  del Sistema estaría permitida en Semántica estándar, mediante una expresión del tipo “... $\forall Q \in P(U^n)$ ...” con  $P(U^n)$  innumerable (o, más generalmente, con “... $\forall Q \in R$ ...”, siendo  $R$  un subconjunto de  $P(U^n)$  aún innumerable).

De este hecho indiscutible, principalmente, deriva la confusión de considerar que todos (es más: por norma, que todos y solos) los Sistemas del segundo orden sean innumerales. En primer lugar, si un Sistema usa cualquier orden superior al primero, perfectamente puede ser numerable; por ejemplo, lo será siempre si es realmente *formal*. Como ya se ha dicho (ap. I.6), el respeto de la *formalidad*, o bien, de la *Semántica general*, impone explicitar en concreto, eventualmente con posteriores axiomas específicos, todo aquello que puede deducirse sintácticamente a partir de cualquier enunciado; ya sea del primero, del segundo o de cualquier otro orden. No hay especiales peculiaridades para

hacerlo en el caso de un orden expresivo superior al primero (y, por otro lado, en todos los casos la traducción en  $TC$  convierte la expresión en un enunciado de primer orden). En el ejemplo en examen, el respeto de la formalidad para el Sistema, impone añadir al axioma que usa la expresión “... $\forall Q$ ...”, otras premisas que expliciten en concreto como se debe deducir sintácticamente de la cadena “ $\forall Q$ ”. La correspondiente representación en  $TC$  dará lugar a un enunciado definitorio (de primer orden) del conjunto de los axiomas  $H$  de la Teoría del tipo “... $\forall Q \in S$ ...”, donde  $S$  tendrá que ser un subconjunto necesariamente numerable del conjunto  $P(U^n)^{51}$ .

Para observar en concreto un caso de este tipo, modifiquemos la Teoría  $PA$  quitando la regla axiomática de la inducción e introduciendo en su vez el axioma:

$$\forall \underline{A} ((\underline{A}(0) \text{ e } \forall x ((\underline{A}(x) \text{ e } \underline{S}(x,y)) \rightarrow \underline{A}(y))) \rightarrow \forall x \underline{A}(x))$$

donde sabemos que el predicado  $\underline{A}$  debe variar dentro de la colección de las “proposiciones con al menos una variable libre” para que esta nueva Teoría coincida con  $PA$ . El Sistema ahora es de segundo orden y, si no se añade nada más, ciertamente informal, ya que “ $\forall \underline{A}$ ” debe interpretarse semánticamente. No obstante, la formalidad es recuperable. Como se ha dicho, el hecho de que el Sistema sea de segundo orden no implica que tenga que ser inevitablemente informal. La formalidad podría restablecerse añadiendo otros axiomas del segundo orden que especifiquen las oportunas deducciones sintácticas a partir de la secuencia “ $\forall \underline{A}$ ”; pero hay dos maneras sin dudas mucho más simples. La primera es la de reconstituir

---

<sup>51</sup> Léase a propósito H. B. Enderton: “Second-order and Higher-order Logic”.

el originario  $PA$ , suplantando el axioma con uno esquema axiomático metamatemático. La segunda, siempre infalible, es la de representar la Teoría en  $TC$  (lo cual hace superflua la intervención de cualquier tipo de creatividad): así haciendo, el axioma inductivo del segundo orden resulta convertido, precisamente como hemos descrito, en un esquema axiomático conjuntístico que genera una infinidad numerable de enunciados sin significado explícito; lo cual testifica el respecto de la formalidad. En particular hemos observado que, exactamente como acabamos de predecir, el esquema contiene la secuencia “...  $\forall A \in P(U)_I$ ...”, siendo  $P(U)_I$  un subconjunto numerable de  $P(U)$ .

En segundo lugar, un Sistema que admita solamente expresiones de primer orden puede perfectamente ser innumerable. Nada más que la semántica que define las *premisas* decide como debe ser el Sistema. Como ejemplo se puede suponer, en la Teoría, la presencia de un esquema axiomático que defina un axioma del primer orden en función de una variable que varía dentro de un conjunto no numerable. En un caso como éste, la representación en  $TC$  establecerá un esquema axiomático conjuntístico que generará una cantidad innumerable de teoremas (de primer orden también en relación a la Teoría representada). Esto es precisamente lo que se ha obtenido para la inducción completa de  $AI$  (a pesar de que en este caso la originaria  $AI$  no es del primer orden, porque el esquema inductivo metamatemático admite axiomas de cualquier orden expresivo). También en este caso el Sistema representado no es formal y su definición en  $TC$  se clasifica como perteneciente a la Semántica estándar.

O bien, en la definición metamatemática de las premisas de tal Sistema de primer orden, se podría establecer explícitamente de usar un valor intrínsecamente semántico para las

proposiciones, decretándolas como innumerables. Por ejemplo, admitiendo la posibilidad de interpretarlas “simultáneamente” en todos los modelos posibles. Más adelante revisaremos este criterio, que llamaremos el *uso intrínsecamente semántico* de un Sistema formal; y lo observaremos para el propio Sistema *TC*.

Ciertamente, las ilimitadas capacidades de la semántica no están vinculadas necesariamente al segundo orden expresivo, ni a cualquier otro en particular; y son capaces de explayar toda su potencia *hiperinnumerable* incluso limitándose al primer orden.

Por desgracia, la confusión se consolida a causa de otros dos equívocos. El primero es la extensión del significado de la expresión “Lógica clásica de primer orden” (es decir, la colección de todos los “Cálculos predicativos clásicos formales de primer orden”: Sistemas cuya definición se ha precisado en el apartado I.6, excepto por los predicados *propios* que, de todas formas, deben obedecer a axiomas clásicos generales; y que, como hemos visto, siempre son *numerables*) al caso de un genérico “Sistema clásico de primer orden” (una Teoría que, en cambio, puede añadir al Cálculo predicativo clásico formal de primer orden en el que se basa, unos esquemas axiomáticos *propios* que nada prohíbe que puedan generar incluso *innumerables* axiomas, aunque expresados en el primer orden). El segundo está ligado al enunciado del teorema de Lindström, del cual hablaremos más adelante.

Naturalmente, dicho malentendido implica otros; por ejemplo, a menudo se critica el carácter no formal de los “Sistemas de segundo orden”, basándose en la intrínseca semanticidad de *algunos* de ellos. Y otros, en lugar de evidenciar que el problema no reside en el tipo de orden expresivo sino en todo caso en la innumerabilidad de los enunciados, sostienen que también algunos Sistemas del segundo orden pueden admitir una estructura perfectamente

formal como “los del primero” (en todo caso, como *algunos* del primero, rectificamos nosotros). Y así sucesivamente<sup>52</sup>.

En el marco de este grave malentendido se sitúan incluso los nombres habituales que se emplean para las Teorías *PA* y *AI*; respectivamente: “Aritmética del primer orden” y “Aritmética del segundo orden”. Si se decide de considerar ambos tipos de inducción como esquemas axiomáticos metamatemáticos, es indudable que la Aritmética de Peano resulta ser *de primer orden*, pero la Aritmética integral admite enunciados de *cualquier orden expresivo* (por lo menos, hasta que en el principio de inducción completa no se restrinja el significado de la expresión “cualquier propiedad”). Sin embargo, si se prefiere expresar cada una de las inducciones mediante un único enunciado simbólico, se obtendrá *en ambos casos* una expresión del segundo orden (como hace poco hemos observado para *PA*): por consiguiente, en este caso tanto *PA* como *AI* serán *del segundo orden*. Aunque el primero formalizable, el segundo no (el único asunto, en realidad, de efectiva trascendencia). A esta última conclusión se llega representando las Teorías en el seno de *TC*, donde, por otra parte, se restablece *para ambas el primer orden expresivo*.

Por lo visto, la acostumbrada clasificación de los Sistemas axiomáticos clásicos en base a su orden expresivo desvía, por lo general, de sus propiedades lógicas fundamentales; las cuales, están ligadas sencillamente al respeto o no respeto de la *formalidad*.

---

<sup>52</sup> Por lo tanto se llega, a menudo tácitamente, al error de considerar siempre como *del primer orden* un cualquier Sistema *formal* (o incluso, más en general, un Sistema *por cuyo lenguaje vale el Teorema de s-completitud*, un concepto que definiremos más adelante).

## II.15. Sistemas innumerables

Si un lenguaje semántico es numerable, se puede esperar que una axiomatización lo haga formal; pero si es innumerable y por tanto intrínsecamente semántico, esto es imposible. Se nos plantea, pues, qué problemas surgen en este último tipo de Sistemas axiomáticos, cuya representación en  $TC$  está permitida en Semántica estándar.

En primer lugar, debemos decidir si  $TC$  es “numerable” o no. Las comillas se deben al hecho de que la cardinalidad no puede definirse formalmente para las colecciones de las proposiciones y teoremas de  $TC$ , en cuanto éstos no son *conjuntos*. La cuestión, por otra parte, posee una única e inmediata respuesta. Puesto que el Cálculo predicativo clásico del primer orden con igualdad que funda  $TC$  es formal, lo mismo concluiremos para  $TC$ , que añade una lista finita (o infinita “numerable”, en otras versiones) de axiomas propios sin significado explícito. Así, admitiendo como hecho espontáneo que  $TC$  sea un Sistema formal, se observará algo desconcertante: el lenguaje de  $TC$ , “numerable”, no es suficiente ni siquiera para *denotar* individualmente a todos los elementos de  $P(N)$  (que todavía son conjuntos), siendo dicho conjunto innumerable; ni a los sucesivos  $P(P(\dots(N)))$ , de cardinalidad todavía mayor. Esta situación, no es peculiar por sí misma, y se repite en otros Sistemas. Por ejemplo, en la Teoría axiomática formal de los reales de Tarski (de la cual hablaremos), que es numerable y está dedicada al estudio de los números reales, innumerables. ¿Hay agravantes para  $TC$  a causa de su naturaleza fundacional? Sólo en el plano epistemológico. La Teoría, definida para estudiar ciertos objetos fundamentales, ni siquiera es capaz de denotarlos a todos de manera exclusiva: ¿no sería lógico redefinirla sólo para aquellos objetos para los que puede hacerlo? La respuesta

es que esto no se puede hacer si se conserva el axioma de las partes, que establece la existencia de conjuntos innumerables; pero dicho axioma es necesario para definir el modelo estándar de la Teoría de los números reales (a partir del estándar de  $PA$ , como se ha indicado en el ap. II.10): sin él los reales no tendrían la acostumbrada descripción conjuntista que les asigna la cardinalidad de  $P(N)$ . Una condición que no ofrece ninguna ventaja, sino muchas limitaciones. Parece preferible aceptar la situación anterior, la cual, por otra parte, no es en sí contradictoria. En todo caso, como aclararemos más tarde, son posibles dos criterios distintos para arreglar las cosas en el plano epistemológico. El primero está ligado al propio carácter informal de la “numerabilidad” del lenguaje de  $TC$  (es decir, precisamente, a las comillas) y en la práctica, hace desaparecer el problema; aunque con una táctica *ad hoc*. El segundo criterio, más radical, es una estrategia oportuna, y de hecho por lo general sobreentendida, que consiente a  $TC$  describir efectivamente todos los objetos para los que ha sido pensado, aunque dicho criterio *no respete la formalidad* del Sistema.

Volviendo a los Sistemas innumerables, se observará ahora que, a pesar de que  $TC$  pueda simbolizar perfectamente el conjunto de los teoremas de uno de tales Sistemas, esta Teoría no es capaz ni siquiera de denotar individualmente todos sus elementos, siendo éstos innumerables. Éste es el segundo sentido (que ya observamos para  $AI$  en el apartado anterior) por el cual la representabilidad en  $TC$  de Sistemas de este tipo no queda plenamente realizada. Diremos, en pocas palabras, que un Sistema innumerable no es *totalmente* representable en  $TC$ . Viceversa, no hay dudas de que todo Sistema formal bien definido sea *totalmente* representable en  $TC$ : en efecto,  $TC$  es capaz de reproducir cualquier enunciado suyo, es decir cualquier secuencia finita de caracteres sin significado. Obviamente, una

representación *no total* es también una representación *no fiel*, porque si *TC* no puede mencionar algunos teoremas de la Teoría reproducida, fallará también en deducirlos a todos. Por otra parte, recordemos que el hecho de que una representación sea *total* no implica que sea *fiel* (en realidad, hasta ahora sólo es una sospecha, pero lo confirmaremos).

Alguna perplejidad podría surgir sobre la naturaleza de los modelos de los Sistemas innumerables: puesto que a cada cadena se asocia más de un significado, parece que no podría respetarse la condición b) del ap. II.3 y por lo tanto tampoco realizarse la formalización de un modelo suyo en *TC*. En realidad hay que observar que, en el plano lógico, deben distinguirse dos niveles distintos de interpretación. El primero es capaz de asociar más de un significado a la misma cadena y genera un número innumerable de enunciados. El segundo nivel semántico es aquel propio del modelo y se realiza normalmente: en efecto, la condición b) requiere un significado para cada *enunciado* y no para cada cadena. La única peculiaridad es que la función de verdad implica un número innumerable de enunciados. No obstante, no debe pasarnos por alto una diferencia fundamental con el caso formal, debido al simple hecho de que los citados niveles semánticos no son claramente desemparejados en realidad: en los casos comunes se juntan en uno solo, o están íntimamente ligados. De ello descende que la operación de “cambiar el modelo” por otro no isomorfo, es decir de cambiar el *segundo* nivel interpretativo por otro, normalmente desbarata también el primero; con el resultado de que, en general, se modificarán los propios enunciados y por ende el mismo Sistema examinado. Esta observación, por consiguiente, sugiere una dificultad ulterior, en general elevada, para que un Sistema innumerable posea distintos modelos no isomorfos. Y los casos comunes lo



confirman, como el ya visto de la Aritmética integral.

En cuanto a la *corrección*, manteniendo la convención de introducir solamente esquemas axiomáticos, evitando nuevas reglas deductivas, ésta sigue valiendo para tales Sistemas, puesto que vale para las reglas deductivas clásicas.

Aparte de los límites de su representación en *TC*, los Sistemas innumerables tienen otros dos defectos: en primer lugar, justamente el hecho de que no sólo para deducir, sino también para enunciar individualmente todos los teoremas, se precisa una semántica irreducible. Nunca, pues, es posible vaciar totalmente de significado a los enunciados, como pretendería el formalismo hilbertiano. El segundo defecto es que para estos Sistemas, como veremos en el próximo apartado, en general no vale el teorema de completitud semántica. Al no estar asegurado que sean *s*-completos, podrían entonces tener las consecuencias negativas discutidas en el ap. II.9: en particular, podría ser imposible *distinguir* todos los enunciados indecidibles; y, entre ellos, podría haber algunos *válidos*, es decir, verdaderos en cada modelo. Consideremos por ejemplo el caso de la Aritmética integral; hemos visto que su modelo estándar es único, a excepción de isomorfismo (por lo tanto, podemos afirmar que lo que es verdadero para éste, es *válido*). Si dicho Sistema no fuera *s*-completo, podrían existir enunciados verdaderos en el modelo estándar (y, por su unicidad, no interpretables como *falsos* en ningún modelo) que no son teoremas (ni negaciones de teoremas: por lo tanto, indecidibles). Y, lo que es peor, no reconocibles metamatemáticamente como indecidibles. Consideraciones análogas (incluida la unicidad del modelo estándar a excepción de isomorfismo), se repiten para la *Teoría integral de los reales*, que definiremos más adelante.

Como se ha dicho, la consideración de este tipo de Sistemas, más que una necesidad, es una toma de conciencia: siempre en

Matemáticas éstos se han usado, se usan y se usarán. En el caso de las Teorías integrales de los naturales y los reales, incluso se puede decir que tales Sistemas son aquellos que el matemático *normalmente y espontáneamente* considera en sus análisis. La razón se debe a la posibilidad de “sumar” al poder deductivo *formal*, la ventaja debida a la unicidad del modelo a menos de isomorfismos (en efecto, veremos que dicha unicidad no vale para los Sistemas clásicos *formales*). En síntesis, la conveniencia es el *posible* uso de la *verdad*, referida al único modelo estándar, para “deducir” (no siempre teoremas; de aquí las comillas). En efecto, dado que las *falsedades* no pueden interpretarse correctamente, poco importa, epistemológicamente, si no todas las “deducciones” obtenidas a través del concepto de verdad son propiamente teoremas.

Veremos que el mismo lenguaje de *TC*, es decir, la osamenta de toda la Matemática, se interpreta normalmente semánticamente; e incluso de manera totalmente “libre”, es decir, admitiendo la posibilidad de usar simultáneamente todos sus posibles “modelos”. Ello – que constituye el ya señalado *uso intrínsecamente semántico* del Sistema – significa de hecho tratar la Teoría como innumerable y por tanto, no formal.

## **II.16. Teoremas de completitud semántica y sus primeras consecuencias**

Finalmente, es posible formalizar en *TC* el Teorema de completitud semántica. Recordemos que éste afirma la existencia de al menos un modelo si el Sistema es consistente y que implica la *s*-completitud. Incluso su versión formalizada tiene un carácter *no constructivo*. La demostración se puede generalizar a *todos los Sistemas clásicos formales* (de cualquier

orden expresivo)<sup>53</sup>. En otros términos, el Teorema de completitud semántica vale para cualquier Sistema axiomático clásico cuyo lenguaje respete la formalidad.

Diremos que el Teorema de *s*-completitud *vale para el lenguaje* de un Sistema clásico dado, cuando no sólo éste vale para el Sistema, sino que también se verifica lo siguiente: si modificamos sus axiomas, quitándole alguno o añadiendo a éstos una colección, todo lo más infinita *numerable*, de enunciados del propio Sistema (incluyendo la posibilidad de añadir nuevos símbolos no semánticos, sin modificar, en todo caso, las reglas gramaticales y deductivas) de modo que se obtenga un nuevo Sistema consistente, entonces también dicho Sistema tendrá modelos. Como ejemplo elemental, el Teorema de *s*-completitud vale para el lenguaje de cualquier Sistema clásico formal, es decir, para *el lenguaje formal*; pero, en principio, no se excluye que pueda valer también para un lenguaje semántico. Evidentemente, la validez del Teorema de *s*-completitud *para el lenguaje de una Teoría* es una condición más fuerte de la simple *s*-completitud: ésta implica la *s*-completitud de la Teoría misma, pero no viceversa. Más adelante pondremos un ejemplo (importante) de un Sistema intrínsecamente semántico para cuyo lenguaje no vale el Teorema de *s*-completitud, a pesar de resultar *s*-completo (y también completo).

El Teorema de *s*-completitud tiene consecuencias muy importantes que requieren una paciente reflexión.

Empecemos enunciando el teorema de Lindström; éste afirma que *un Sistema clásico para cuyo lenguaje valga el Teorema de s-completitud*<sup>54</sup> *puede expresarse en el primer orden*. Nótese que

---

<sup>53</sup> L. Henkin: *Completeness in the Theory of Types*.

<sup>54</sup> En realidad, el teorema original (P. Lindström: *On Extensions of Elementary Logic*) tiene como hipótesis que para la Teoría valgan el

el teorema no afirma ni que el primer orden es siempre productor de s-completitud, ni que para un lenguaje de orden superior al primero no valga nunca el Teorema de s-completitud. Sólo expresa que, en este último caso, su lenguaje *podría* siempre ser sustituido, redefinido, por otro que haga uso solamente del primer orden expresivo. Ciertamente, este hecho confiere al primer orden una importancia especial (por otra parte ya manifiesta con las propiedades de *TC*: todo Sistema formal, en efecto, en cuanto *totalmente* representable en *TC*, puede expresarse en el primer orden). Pero esto no justifica confundir, en general, el lenguaje de segundo orden con la no validez del Teorema de s-completitud, ni el de primer orden con su validez o con la formalidad del lenguaje<sup>55</sup>.

Pasemos a las repercusiones del Teorema de s-completitud sobre el “número” y el tipo de modelos de la Teoría clásica arbitraria para cuyo lenguaje éste valga. Para empezar, tenemos que si dicha Teoría es incompleta, entonces existen modelos suyos no isomorfos entre sí. En efecto, para cada enunciado indecidible *I*, deben existir, en base al teorema, al menos dos

---

teorema de compacidad semántica y el de Löwenheim-Skolem. Consideramos aquí, por simplicidad, una hipótesis más fuerte: en efecto, veremos que estos dos teoremas descienden de la validez del Teorema de s-completitud para el lenguaje de la Teoría.

<sup>55</sup> A veces dicho teorema es enunciado diciendo que *ningún Sistema que use un orden expresivo superior al primero puede satisfacer el teorema de compacidad semántica y el de Löwenheim-Skolem*. Evidentemente, según esta forma del enunciado, se da a entender que todo Sistema *formal* (o, más en general, para cuyo lenguaje vale el Teorema de s-completitud) de orden superior al primero, deba considerarse como “del primer orden con más de una salida”. Una posición manifiestamente innecesaria, ambigua y forzada que sólo se explica con la incorrecta categorización de los órdenes expresivos de la que hablamos. Léase a propósito M. Rossberg: *First-Order Logic, Second-Order Logic, and Completeness*, p. 307 y ss.

modelos del Sistema en los cuales  $I$  no tiene el mismo valor de verdad; por lo tanto, al menos dos modelos no isomorfos. Pero ¿cuál es el problema representado por modelos no isomorfos?

Para hacer una comparación con la Física, consideremos un motor eléctrico reversible. Se trata de un objeto capaz de funcionar de dos maneras complementarias. Atravesado por corriente eléctrica produce trabajo (motor); viceversa, el objeto produce corriente eléctrica si se realiza trabajo al mover su eje (dínamo). Ambas interpretaciones del objeto, “es un motor”, “es una dínamo”, son igualmente correctas (serían por lo tanto “modelos” del objeto). Pero son profundamente diferentes. Por ejemplo, la afirmación “el objeto produce trabajo durante su funcionamiento”, tiene distintos valores de verdad en los dos “modelos”. Entonces, en esta comparación orientadora, los dos “modelos” no serían “isomorfos”. ¿Cuál es el problema? Simplemente que el objeto no puede definirse ni motor, ni dínamo; no es un representante exclusivo de ninguna de estas dos clases de objetos. Si un Sistema axiomático tiene un modelo no isomorfo al modelo “espontáneo” para el cual el propio Sistema había sido pensado (típicamente, un modelo *estándar*), significa que el Sistema no es exclusivo de este modelo, no caracteriza solamente a los objetos *estándar*; sino que puede representar igualmente bien objetos de naturaleza diferente (a menudo, totalmente diferente). No sólo no existen razones de naturaleza sintáctica, o sea puramente matemática, para preferir un modelo en lugar de otro, sino que ningún instrumento formal de la Teoría es capaz de diferenciar los dos modelos: desde el punto de vista del lenguaje matemático, estos son absolutamente indistinguibles. Por lo tanto, las consecuencias son de tipo semántico y, como veremos, comprometen la representabilidad matemática de conceptos metamatemáticos fundamentales. No obstante, también son capaces de producir loables frutos.

Inicialmente, la falta de unicidad del modelo a excepción de isomorfismo (abreviado: de *categoricidad*) fue vista sólo como un defecto. Hilbert supuso tácitamente que la completitud sintáctica implicase también la *categoricidad*, además de las cosas agradables que ya hemos señalado. En efecto se obtiene que en un Sistema clásico completo, dos modelos distintos cualquiera deben ser *elementalmente equivalentes* (ap. II.11): si la interpretación de cierto enunciado es verdadera en el primero, dicho enunciado no puede ser la negación de un teorema: pues, será un teorema; pero entonces será también verdadero cuando es interpretado en el segundo modelo y viceversa. Aun así, veremos que esto no es suficiente para asegurar la categoricidad.

Dado un Sistema clásico  $S$ , definimos *sub-Sistema finito* de  $S$ , todo Sistema clásico que tiene como axiomas un subconjunto finito de axiomas de  $S$ . El teorema de *compacidad sintáctica*, válido en ámbito del todo general, afirma que  *$S$  es consistente si, y sólo si, cada su sub-Sistema finito es consistente*. Exponemos una fácil *metdemostración* que usa la hipótesis de *buena definición* para el Sistema. La condición necesaria es inmediata: supongamos que  $S$  sea consistente y que, por absurdo, exista un sub-Sistema suyo inconsistente. Entonces, sería inconsistente también  $S$ , ya que contiene todos sus axiomas: absurdo. Supongamos, ahora, que todo sub-Sistema finito de  $S$  sea consistente, mientras  $S$ , por absurdo, inconsistente. Dicho  $E$  un enunciado cualquiera, existe en  $S$ , pues, una demostración de  $E$  y otra de  $\text{not}E$ . Según la *buena definición* de  $S$ , las dos demostraciones deben usar, juntas, una cantidad finita de axiomas de  $S$ . Pero entonces, cualquier sub-Sistema finito de  $S$  que los incluya es capaz de derivar la misma contradicción, resultando así inconsistente: absurdo.

En un Sistema para cuyo lenguaje valga el Teorema de s-

completitud, vale en especial también el teorema de *compacidad semántica*: *el Sistema tiene modelos si, y sólo si, cada su sub-Sistema finito tiene modelos*. Esto es una fácil consecuencia del teorema precedente, dado que ahora la consistencia implica la existencia de modelos.

Detengámonos ahora en *PA*. Tratándose de un Sistema formal, a su lenguaje se puede aplicar el Teorema de s-completitud y de compacidad semántica. Consideremos el Sistema, *PA'*, obtenido añadiendo a las premisas de *PA*, los infinitos axiomas:

$$\begin{aligned}
 &c \neq 0 \\
 &\underline{S}(0,y) \rightarrow c \neq y \\
 &(\underline{S}(0,y) \text{ e } \underline{S}(y,z)) \rightarrow c \neq z \\
 &(\underline{S}(0,y) \text{ e } \underline{S}(y,z) \text{ e } \underline{S}(z,t)) \rightarrow c \neq t \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

siendo *c* un *nuevo* símbolo de constante. O bien, indicando sintéticamente con *s(x)* el sucesor de *x*:

$$c \neq 0, \quad c \neq s(0), \quad c \neq s(s(0)), \quad c \neq s(s(s(0))), \quad \dots\dots\dots$$

o, todavía más sencillamente (ap. II.1):

$$c \neq 0, \quad c \neq 1, \quad c \neq 2, \quad c \neq 3, \quad \dots\dots\dots$$

Los puntos suspensivos son un recurso semántico perfectamente admisible (puesto que perfectamente claro) en este contexto, que es el contexto metamatemático del esquema axiomático. No obstante, cuando se formalice *PA'* en *TC*, el conjunto de estos infinitos axiomas puede ser rigurosamente definido como el conjunto que contiene la genérica cadena "*c\**",

$\neq *, n^*$ ,  $\forall n^* \in N$ , donde  $N$  es el conjunto de los números naturales, único a menos de isomorfismo, que constituye el universo del modelo estándar de  $PA$ . Ahora consideremos un arbitrario sub-Sistema finito de  $PA'$  y construyamos un modelo suyo a partir del modelo estándar de  $PA$ . Si no contiene ninguno de los nuevos axiomas es el mismo modelo estándar de  $PA$ . Si contiene un cualquier número finito de los nuevos, sólo hay que considerar la interpretación constituida por el modelo estándar de  $PA$  junto a la interpretación de  $c$  con una constante suficientemente grande de su universo  $N$ ; por ejemplo, los tres axiomas:  $c \neq 0$ ,  $c \neq 57$ ,  $c \neq 8202$  son verdaderos asumiendo  $c=42307$ . Para el teorema de compacidad semántica, entonces, el Sistema  $PA'$  tiene al menos un modelo, llamémoslo  $M'$ ; el cual, en particular, también es modelo de  $PA$ .

Por lo visto, existe un modelo de  $PA$  que admite una constante,  $c$ , que no coincide con ninguna constante estándar: en efecto, es distinta de  $0, 1, 2, \dots$  etc. En términos más rigurosos: la interpretación de la constante  $c$  en  $M'$  no puede asociarse isomórficamente a ninguna interpretación estándar. Dicho modelo, pues, no es isomorfo al modelo estándar; en pocas palabras, basta decir que “no es estándar”.

Por consiguiente, el Sistema  $PA$  se adapta perfectamente también a la descripción de objetos, como  $c$ , en absoluto distintos de los números naturales conjuntistas. Dichos números satisfacen todos los axiomas de  $PA$ : admiten un único sucesor y predecesor<sup>56</sup> (también éstos no estándar), las operaciones de suma y producto, y todo lo que se deriva de los axiomas de  $PA$ . La espontánea interpretación de dichos números, siendo cada uno de ellos mayor

---

<sup>56</sup> Se puede demostrar fácilmente por inducción que cada natural, excepto “0”, admite un único predecesor, o bien es el sucesor de algún natural.



que cualquier número natural, es que sean de “grandezza infinita”<sup>57</sup>.

Resumiendo, aun admitiendo que los números naturales conjuntistas sean una representación satisfactoria de los números naturales metamatemáticos (lo cual, como se ha anticipado, será pronto puesto en discusión incluso para la mejor de las elecciones del conjunto que satisface las 9 condiciones del ap. II.6), resulta que el Sistema  $PA$  no puede caracterizarse como *aquel* de los números naturales conjuntistas. He aquí la justificación de por qué los naturales “intuitivos” ni siquiera pueden definirse como *el* modelo de  $PA$ , como se ha anticipado en el ap. II.1. Sin embargo, pueden definirse como *el* modelo de la Aritmética integral, aparte de isomorfismo; pero ello no nos satisface plenamente por el carácter irreduciblemente no formal de dicha Teoría.

La metademostración vista no parece depender de la completitud o incompletitud sintáctica de  $PA$ . En efecto, veremos en la tercera Parte que  $PA$  es incompleto; sin embargo, una metademostración muy similar se puede repetir para el Sistema formal de los reales, demostrado ser completo por Tarski. Lo haremos a continuación.

## **II.17. Otras consecuencias del Teorema de completitud semántica**

La Teoría *integral* de los números reales admite, entre las premisas propias, que *todo conjunto de números reales limitado superiormente tiene extremo superior*. Siendo su universo,  $R$ , un conjunto infinito, el conjunto  $P(R)$  es innumerable. Se puede demostrar en  $TC$  que el conjunto de todos los subconjuntos de

---

<sup>57</sup> Otras curiosidades sobre dichos números son presentadas sintéticamente por ejemplo en G. Lolli: *È possibile concepire gli infinitesimi?*.

reales limitados superiormente tiene la misma cardinalidad de  $P(R)$ . De este modo, si se interpreta el citado principio como un esquema axiomático, resulta que éste genera una cantidad innumerable de axiomas<sup>58</sup>. Entonces, el Sistema es intrínsecamente semántico (no formal). Se puede demostrar en *TC* que dicho Sistema es categórico (se trata de un ordinario teorema de unicidad). Así, pues, podemos afirmar que su modelo es, a menos de isomorfismo, *el* de los números reales, con los sabidos límites debidos a su no formalidad. Para superar su naturaleza no formal, se puede considerar una versión reducida del Sistema, que limita los citados axiomas a una cantidad numerable: el análogo de *PA*, para el caso de los naturales. Esta Teoría formal de los reales (en adelante, *TFR*) es sintácticamente completa, como ha demostrado Tarski. De paso, de ello se deduce que también la *GE* es completa: en efecto, a cada enunciado indecidible suyo, a través de la interpretación del *Espacio cartesiano*, equivalente al modelo euclidiano, correspondería un enunciado indecidible de *TFR*. Siendo *TFR* formal, para su lenguaje vale el Teorema de *s*-completitud y de compacidad semántica. Consideremos el Sistema *TFR'* que añade a *TFR* la siguiente colección infinita de axiomas:

$$\exists c(c>0), \exists c(1/2>c>0), \exists c(1/3>c>0), \exists c(1/4>c>0), \dots$$

siendo *c* un nuevo símbolo de constante. También en este caso dicha colección puede ser definida formalmente en *TC*. Cada sub-Sistema suyo posee un modelo. De hecho, para cada fijado *n*, siempre es posible determinar en *TFR* un real positivo *r* tal que  $1/n > r$ ; dicho *r* hará que sean verificados

---

<sup>58</sup> Éste es el único hecho que aquí nos interesa. Quién desee saber qué exactas propiedades matemáticas signifiquen “limitado superiormente” y “extremo superior”, puede consultar un cualquier libro de análisis.

todos los enunciados:  $\exists c(c>0), \exists c(1/2>c>0), \dots \exists c(1/n>c>0)$ . Entonces, para el teorema de compacidad semántica este Sistema posee un modelo, el cual también es modelo de *TFR*. Se concluye enseguida que dicho modelo no es isomorfo al modelo estándar: porque admite una constante  $c$  que es menor de  $1/n$ , para cada valor de  $n$ . En efecto esa constante no puede interpretarse en el modelo estándar, donde la cantidad  $1/n$ , a partir de cierto  $n$ , siempre es menor de cualquier número real prefijado. Por lo tanto, incluso la Teoría formal de los reales, completa, admite modelos no estándar (si bien, como se ha observado, todos *elementalmente equivalentes* al modelo estándar) y, consecuentemente, no puede caracterizar únicamente los números reales, tal y como se entienden normalmente. La completitud sintáctica no implica la categoricidad, como supuso Hilbert. Por desgracia, este equívoco se prolongó durante algunos años, después del anuncio del Teorema de  $s$ -completitud (1930), en todos los Lógicos del tiempo, incluidos Skolem y Gödel (cosa que, dada la peculiaridad de las metademostraciones ahora vistas, no debe escandalizar demasiado). Sólo a partir de 1934 estas singulares implicaciones del Teorema, empezaron a dilucidarse para Skolem; pero la comprensión total de las mismas (con la interpretación detallada del teorema Löwenheim-Skolem, que veremos dentro de poco) no se alcanzará antes de 1936, con Malcev<sup>59</sup>.

Las metademostraciones consideradas permiten también concluir que *los lenguajes* de la Aritmética integral y de la Teoría integral de los reales son semánticamente incompletos. En efecto, éstas se pueden repetir, inalteradas, para dichos dos

---

<sup>59</sup> Para una explicación histórica detallada, aconsejamos la lectura de P. Mancosu; R. Zach; C. Badesa: *The Development of Mathematical Logic from Russell to Tarski: 1900–1935*.

Sistemas no formales, pero aplicando el teorema de compacidad *sintáctica* en lugar que semántica. Se formarán análogos nuevos Sistemas que añaden los infinitos axiomas citados, consistentes por el teorema de compacidad sintáctica. Sin embargo, estos Sistemas no pueden tener modelos, porque también serían modelos no isomorfos (por las razones explicadas) de los Sistemas originales, en contra de su categoricidad. Por consiguiente, existen extensiones consistentes de estas Teorías integrales, pero sin modelos.

No obstante, *el hecho de que para los lenguajes de las Teorías integrales de la Aritmética y de los números reales no valga el teorema de s-completitud no implica que esos Sistemas sean necesariamente s-incompletos*. Esta argumentación merece un poco de atención, puesto que no hemos podido encontrar ninguna bibliografía al respecto. Veamos un ejemplo. Considérese el Sistema clásico cuyos axiomas son todos y solos los enunciados *verdaderos* de la Teoría aritmética integral; naturalmente, *verdaderos* en su modelo estándar, el único a menos de isomorfismo. Tal Sistema puede ser obtenido a partir de la Aritmética integral, añadiendo precisamente, como esquema axiomático, “todos los enunciados verdaderos en el modelo estándar”. Representa, en efecto, la Teoría aritmética más potente. Evidentemente, este Sistema sigue admitiendo el modelo estándar como único modelo aparte de isomorfismo; además, es completo y s-completo por construcción. [Más en general, *para un Sistema categórico, la completitud y la s-completitud son equivalentes*. De hecho, sea  $E$  un enunciado arbitrario de un Sistema categórico y s-completo. Si es verdadero para el único modelo (a excepción de isomorfismo) será un teorema, por la s-completitud; si es falso,  $\text{not}E$  será verdadero y será un teorema por la misma razón. Por otra parte, sabemos que si un Sistema cualquiera posee al menos

un modelo y es completo, es también semánticamente completo (ap. II.9)].

Sin embargo, *para el lenguaje* del Sistema ahora definido, no vale el Teorema de s-completitud. Para concluir esto basta repetir la acostumbrada metademostración que añade los infinitos axiomas citados: el nuevo Sistema que se forma es consistente, por el teorema de compacidad sintáctica, pero no tiene modelos o se violaría la categoricidad. Se puede hacer un discurso análogo para el Sistema clásico cuyos axiomas son todos y solos los enunciados *verdaderos* en el modelo estándar de la Teoría integral de los reales.

Volvamos ahora a los Sistemas integrales de la Aritmética y de los reales. ¿Es posible que éstos sean completos, o, que es lo mismo, s-completos, *coincidiendo* así con los dos respectivos Sistemas ampliados ahora considerados? La incompletitud semántica de sus lenguajes no lo prohíbe. Volveremos a este tema en la tercera Parte. De momento, podemos ya comentar que la (s-)completitud de tales Sistemas nos revelaría que cualquier nuevo tipo de “deducción” semántica, como la basada en la consideración de los modelos (en nuestro casos del único modelo) para “deducir” (por ejemplo, deducir empleando el concepto de verdad), en teoría sería inútil, no siendo capaz de concluir nada nuevo (sin merma de que en la práctica podría resultar cómodo). Aquello, sin olvidar que, por la intrínseca no formalidad de estos Sistemas, las propias deducciones sintácticas, esto es, realizadas sólo en base a las *premisas*, en general requieren valor semántico para las proposiciones.

La no categoricidad de las Teorías formales de la Aritmética y de los números reales ha sido concluida por metademostraciones muy particulares; las cuales, no está claro que puedan repetirse para cualquier otro Sistema formal. Por lo tanto, hasta ahora, nada impide que otros Sistemas formales

puedan ser categóricos. Otra esperanza es que los universos de los modelos no estándar tengan siempre cardinalidad distinta de aquellos de los modelos estándar. Por ejemplo, reconsideremos el caso de  $PA$ . En base a sus axiomas (ap. II.1), todo modelo de  $PA$  debe contener al menos todos los números del tipo  $0$ ,  $s(0)$ ,  $s(s(0))$ , ..., o bien,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ , ..., es decir, objetos isomorfos a los naturales conjuntistas estándar. Si el modelo no contiene otros entes es (isomorfo al) estándar; si no, es no estándar. El modelo no estándar que hemos considerado antes, contiene también la constante no estándar  $c$  y todos los números no estándar obtenibles por ella mediante los predicados “sucesor” y “predecesor”; por consiguiente, su universo parece “más grande” que  $N$ . ¿Es posible, quizá, distinguir entre sí modelos no isomorfos, según la diferente cardinalidad de sus universos?

El teorema de Löwenheim-Skolem frustra estas esperanzas, al menos en lo que respecta al caso de modelos con universos de cardinalidad infinita (seguidamente diremos para abreviar: *modelos de cardinalidad infinita* o incluso *modelos infinitos*). Sin duda alguna, el caso de modelos con cardinalidad infinita es el caso ordinario para las Teorías matemáticas de mayor interés; aun así, existe un sector matemático dedicado al estudio de los *modelos finitos*, en relación a Teorías útiles en el campo de la computación. Pero en adelante supondremos siempre que los modelos sean infinitos.

El teorema de Löwenheim-Skolem (a menudo L-S en adelante) se aplica aún a todo Sistema para cuyo lenguaje valga el Teorema de  $s$ -completitud; y por lo tanto a todos los Sistemas formales. Se puede demostrar en  $TC$  a partir del teorema de compacidad semántica (de cuya formalización en  $TC$  hablaremos después) y del axioma de elección; y afirma: *Sea dado un Sistema, dotado de un modelo infinito, para cuyo lenguaje valga el Teorema de  $s$ -completitud y tal que sus*

*proposiciones tengan cardinalidad mayor o igual al numerable. Entonces, éste admite modelos de cualquier cardinalidad infinita*<sup>60</sup>. Por consiguiente, no sólo no vale nunca la categoricidad para tales Sistemas (modelos de cardinalidad distinta, obviamente, no son isomorfos por definición de *cardinalidad*: sus universos no son equipotentes), sino que para éstos se verifica siempre una “explosión” de modelos de todas las posibles cardinalidades. Por ejemplo, volviendo al Sistema *PA'*, puesto que éste es numerable (es decir, lo es el conjunto de sus proposiciones) y el universo de cada uno de sus modelos debe ser infinito (en base a la definición formalizada de *infinito* introducida en el ap. II.12), se obtiene que éste admite modelos de cualquier cardinalidad, ninguno de ellos estándar. En especial, admite incluso modelos numerables, que también serán modelos no estándar de *PA*. Se concluye, pues, que ¡*PA* admite modelos numerables estándar y no estándar! Lo mismo se repite para *TFR*: existen modelos suyos no estándar de la misma cardinalidad que el estándar:  $2^{\aleph_0}$ . Además, ¡existe también un modelo suyo numerable (no estándar)! El Sistema *TFR*, pensado para la descripción de los números reales estándar de cardinalidad  $2^{\aleph_0}$ , describe perfectamente también objetos completamente distintos, de cardinalidad numerable. Pero, después de todo, tampoco sería fundado sorprendernos demasiado: de hecho, aun cuando *TFR* describe el universo estándar *R*, de cardinalidad  $2^{\aleph_0}$ , sólo puede hacerlo parcialmente, en tanto sus proposiciones, numerables, no son suficientes ni siquiera para denotar individualmente todos los elementos de *R*.

No presentaremos, por cierto, la compleja demostración

---

<sup>60</sup> Con esta formulación pretendemos juntar las dos distintas versiones del teorema, llamadas “para arriba” y “para abajo”.

formal del teorema de Löwenheim-Skolem; no obstante, una justificación de la explosión de modelos implicada por el teorema no está lejos de la intuición. Consideremos un Sistema clásico cuyo conjunto de proposiciones tenga una cierta cardinalidad, dotado de un modelo infinito  $M$ . Teniendo presente que existe siempre la posibilidad de añadir nuevos símbolos, incluso semánticos, parece razonable que sea siempre posible agrandar el Sistema y su lenguaje, eventualmente aumentando sin límites su cardinalidad, manteniendo la consistencia. Si empujamos suficientemente el agrandamiento, se forma un Sistema consistente que no puede tener ya a  $M$  como modelo (por ejemplo, si las constantes del Sistema exceden los elementos de su universo). En consecuencia, en el caso de que para el lenguaje valga la  $s$ -completitud, existe siempre otro modelo de dicho Sistema ampliado, que también es modelo del Sistema original y que no es isomorfo a  $M$ ; considerado que dicho discurso se puede repetir hasta el infinito, he aquí justificada la explosión de modelos no isomorfos. Si, por otra parte, el Sistema original es categórico, entonces, ninguna extensión consistente del Sistema, empujada lo bastante hasta convertir  $M$  en inadecuado para ser un modelo, puede tener un modelo; lo cual indica que para el lenguaje de tal Sistema no puede valer el Teorema de  $s$ -completitud. Por tanto, el teorema de L-S nos aclara que *categoricidad y validez del Teorema de  $s$ -completitud para el lenguaje de un Sistema con modelos infinitos son propiedades complementarias, imposibles de satisfacer simultáneamente.*

Llegados a este punto, es oportuno señalar una aplicación útil de los modelos no estándar, debida a Robinson: ésta revela que, después de todo, la categoricidad tiene también un desenlace negativo; de hecho, inhibe el desarrollo de los Sistemas, por el hecho mismo de que el añadido de nuevas premisas puede hacer



decaer sus interpretaciones válidas, es decir sus modelos. Volvamos al Sistema  $TFR'$ . En él, la constante  $c$  tiene esta vez el aspecto de un *infinitésimo*. Tal concepto no encuentra una interpretación correcta en el modelo estándar de los reales. Aun así, resulta muy útil usarlo en la práctica: estamos hablando de aquellos objetos indicados por norma con  $dx$ ,  $dy$ ,  $df$ , etc., muy usados en el Cálculo no por casualidad llamado *infinitesimal*. ¿Son cantidades nulas o no? Según como convenga, parecería... La historia de los infinitésimos en Matemáticas es muy interesante pero no es ésta la sede oportuna para tratarlo. Digamos solamente que se ha siempre usado sin la preocupación de definirlos formalmente, ni de interpretarlos nítidamente. Sin embargo, los nuevos infinitos axiomas de  $TFR'$  son capaces de definirlos formalmente, a través de la constante  $c$ , como números como los demás. El hecho fundamental es que modelos de  $TFR'$  existen y son también modelos (no estándar) de  $TFR$ . Hay, pues, que construir un modelo concreto de  $TFR'$  que pueda considerarse como una ampliación de los reales estándar (llamados a veces pseudo-reales) y que incluya los infinitésimos; cosa que, efectivamente, se puede hacer<sup>61</sup>. Lo cual cierra del todo la cuestión; no obstante, se comprenderá que no merece la pena trabajar en  $TFR'$  sólo para poder disponer formalmente de los infinitésimos; ni esforzarse de interpretar  $TFR$  con el nuevo modelo no estándar: claramente, nos vale el simple resultado de que el uso informal de los infinitésimos dentro del modelo estándar (por otra parte tampoco necesario), se encuentra legitimado en un ambiente más general.

Añádase que el uso de modelos no estándar, no sólo ha resuelto problemas conceptuales como éste, sino también

---

<sup>61</sup> Como fue revelado por primera vez por A. Robinson, en 1960; su publicación más reciente al respecto es *Non-standard Analysis*.

problemas matemáticos concretos antes sin resolver<sup>62</sup>.

Cuando el teorema de Löwenheim-Skolem se aplica al mismo Sistema  $TC$ , se obtienen consecuencias indudablemente dramáticas; pero éstas se han exagerado (y no raramente se siguen exagerando) de manera imposible de compartir, como intentaremos mostrar.

## II.18. Límites expresivos de los Sistemas formales

Consideremos un Sistema axiomático clásico formal cualquiera, dotado de un modelo con un universo  $U$ . La pretensión ingenua, normalmente sobreentendida frente a tal Teoría, es que ésta puede describir y aclarar cualquier aspecto de las propiedades de  $U$ . Parece razonable, por ejemplo, pedir que la Teoría formal de los números naturales, es decir  $PA$ , sea capaz de decidir todas las *propiedades* de los números naturales. Pues bien, en el caso de que  $U$  sea infinito, es decir en el caso normal, esto se revela un burdo equívoco. De hecho, hemos visto que el conjunto de todas las propiedades de  $U$  se representa en  $TC$  con el conjunto  $P(U)$ , de todos los subconjuntos de  $U$ . Pero para  $U$  infinito, la mínima cardinalidad de  $P(U)$  es  $2^{\aleph_0}$ , siempre superior al numerable, es decir a la cardinalidad de las proposiciones del Sistema. Por tanto, *el Sistema no es ni siquiera capaz de denotar individualmente todas las propiedades de  $U$* . Si  $U$  es infinito, el lenguaje en el cual se pueden formular todas las propiedades del universo es intrínsecamente semántico; y por tanto, siempre más rico que el lenguaje del Sistema. Incluso más rico que el lenguaje de

---

<sup>62</sup> Los más famosos en relación con algunas propiedades de los *operadores lineales compactos*, por obra de Robinson y Bernstein. Otros, se centran en los métodos estadísticos de resolución, como en S. Albeverio *et al*: *Non standard methods in stochastic analysis and mathematical physics*.

*cualquier* Sistema formal. Continuando con el ejemplo de los naturales, es inútil buscar alternativas formales a *PA* para resolver el problema.

El lenguaje de los alabados Sistemas axiomáticos clásicos formales posee así una embarazosa y grave insuficiencia. Se reafirma que la metamatemática es insustituible, no sólo para definirlos, sino también para denotar individualmente todas las propiedades de su universo. Debemos subrayar que este límite no tiene nada que ver con el famoso Teorema de incompletitud, que veremos más tarde; y sin embargo, esta confusión existe. Evidentemente, el límite del que hablamos es independiente de que el Sistema axiomático sea sintácticamente completo o incompleto; por ejemplo, vale también para el Sistema completo *TFR*. Si el Sistema es completo, cuando sus teoremas se interpretan en un modelo, serán capaces de establecer la verdad o falsedad en el modelo de todos los enunciados que el lenguaje matemático pueda enunciar; pero ciertamente no de aquellos que no puede enunciar. Y, como se ha visto, de estos últimos, aun limitándonos a aquellos que sólo mencionan las propiedades del universo, existe siempre una cantidad aplastante con respecto a los que pueden formularse en el Sistema.

La estrategia que se podría usar para intentar superar este límite es de ámbito interpretativo: en concreto, “cambiar” el modelo. Pero sobre ello discutiremos después.

## **II.19. Límites expresivos fundamentales para la Matemática**

Cuando se toman en consideración los “modelos” del Sistema *TC*, se manifiestan profundas repercusiones en toda la Matemática. Indicamos con *C* (de Cántor) el universo de un

genérico “modelo” suyo; éste representa la colección de todos los conjuntos. Sabemos ya que  $C$  no puede ser un conjunto. Se obtiene un absurdo, por ejemplo, suponiendo que  $C$  tenga cierta cardinalidad  $\alpha$ . En efecto, hemos visto que en  $TC$  se puede demostrar que existen conjuntos de cardinalidad superior a  $\alpha$ , cualquiera que sea el valor de  $\alpha$ ; cuyos elementos son todavía conjuntos, es decir, elementos del universo. Entonces no podrían pertenecer todos a  $C$ : absurdo<sup>63</sup>. Sin embargo, aunque  $C$  no es un *conjunto*, es una colección a la que es posible asociar, en sentido metamatemático, los conceptos de “finito”, “infinito”, y también una “cardinalidad”, si bien no formalizable. Por ejemplo, no se obtiene ninguna contradicción suponiendo que  $C$  sea “numerable”. Tal hipótesis metamatemática implicaría que, en realidad, no pueden existir conjuntos de “cardinalidad” superior al “numerable”; no obstante, sucede que  $TC$  no es capaz de “darse cuenta” de ello. Aclaremos este punto. En la interpretación donde  $C$  es “numerable”, cuando  $TC$  demuestra, por ejemplo, que  $P(N)$  no es numerable, es porque no puede admitir como *función*, es decir, como *conjunto*, una correspondencia uno a uno entre los elementos de  $P(N)$  y  $N$  concebida por la metamatemática. En otros términos,  $P(N)$  es correctamente no numerable dentro de  $TC$ , pero puede ser “numerable” fuera de éste, es decir, en sentido metamatemático: la correspondencia uno a uno de sus elementos con  $N$  no puede ser descrita formalmente como un conjunto, sino sólo metamatemáticamente. Un razonamiento de este tipo, en general, puede justificar cualquier “cardinalidad” supuesta para  $C$ : todas las cardinalidades mayores a ésta se deberían solamente

---

<sup>63</sup> Esta falsa paradoja es conocida como “*paradoja de Skolem*” y, normalmente, se concluye con la hipótesis de que  $C$  sea numerable; pero, en realidad, se mantiene también admitiendo para  $C$  una cardinalidad cualquiera, como hemos visto.

a la limitación del lenguaje matemático y desaparecerían en el ámbito metamatemático.

La argumentación ahora expuesta consiente también resolver el problema de la *indescriptibilidad individual* de elementos innumerables del lenguaje “numerable” de  $TC$ , observada en el ap. II.15. En efecto, del mismo modo, sólo en un plano metamatemático sería posible establecer una “correspondencia biunívoca” entre los elementos de un conjunto innumerable y (un subconjunto de) las denotaciones individuales del lenguaje “numerable” de  $TC$ . Así, el lenguaje “numerable” de  $TC$  sería de verdad capaz de cualquier descripción individual; pero, como de costumbre, el propio  $TC$  no puede “darse cuenta”. Sin embargo, este criterio de resolución no es general porque vale solamente en el caso en que se asume que  $C$  es “numerable”. Si se asume como “innumerable” (de manera que los conjuntos innumerables resulten admitidos en metamatemática) y se sigue considerando, como normalmente, “numerable” el lenguaje de  $TC$ , el problema reaparece. Más adelante describiremos otro criterio de resolución más drástico, basado en una interpretación no convencional (no formal) de las proposiciones de  $TC$ .

Los ejemplos ahora vistos plantean las primeras dudas sobre la posibilidad de que se pueda tener siempre una exacta correspondencia de los conceptos de *infinito* y *cardinalidad* entre el plano metamatemático y el puramente matemático. Luego, esta incertidumbre desorbita si se aplican las consecuencias del Teorema de  $s$ -completitud al propio lenguaje de  $TC$ .

Como dijimos en el ap. II.15, parece del todo espontáneo considerar  $TC$  como un Sistema formal; al cual, por tanto, poder aplicar el *metateorema* de  $s$ -completitud (ciertamente no la versión formalizada en el propio  $TC$ ) y todas las consecuencias mostradas, incluido el *metateorema* de Löwenheim-Skolem.

Ahora bien, hemos visto que la definición conjuntista de *finito*, *infinito*, *numerable* y de las sucesivas *cardinalidades*, dependen básicamente del conjunto de los números naturales  $N$ . Pero los elementos de este conjunto, siendo todavía conjuntos, son también elementos del universo del “modelo” de  $TC$ , que está sujeto a la indeterminación debida al metateorema de L-S aplicado a  $TC$  mismo: existen “modelos” correctos de  $TC$  no “isomorfos” entre sí y también de distinta “cardinalidad”. De esto sigue que, si  $N$  y  $N'$  son los conjuntos de los naturales, cada uno único a excepción de isomorfismo, que se refieren a dos de estos “modelos”, no es seguro, desde un punto de vista metamatemático, ni que entre  $N$  y  $N'$  exista “isomorfismo”, ni que estos conjuntos deban tener la misma “cardinalidad”<sup>64</sup>. Por lo tanto, el *numerable* relativo a un “modelo” correcto no coincide en general con el *numerable* relativo a otro; y ambos, como se ha visto, pueden diferir del “numerable” metamatemático. En otras palabras, ¡el concepto de *numerable*, y consecuentemente de *toda cardinalidad* sucesiva, no es absoluto, sino *relativo* al “modelo” de  $TC$  que se está considerando! Y la misma crítica se extiende al propio concepto de *finito*. En efecto, si no está asegurado que  $N$  sea “numerable”, tampoco es cierto que el *finito* matemático coincida con el “finito” metamatemático. Por ejemplo, en un “modelo” de  $TC$  con una “cardinalidad” suficientemente alta, el conjunto  $N$  podría ser “innumerable”, visto desde fuera. Entonces, también un conjunto *finito*, es decir, cuyos elementos son equipotentes

---

<sup>64</sup> Por ejemplo, si  $N'$  – al contrario de  $N$  – se refiere a un “modelo” de  $TC$  que, en violación de la hipótesis del continuo, admite un número cualquiera de cardinalidad comprendido entre  $N'$  y  $P(N')$ , obviamente no estará garantizado metamatemáticamente que  $P(N)$  y  $P(N')$  tengan la misma “cardinalidad”; lo mismo, por consiguiente, podrá decirse también para  $N$  y  $N'$ .

con todos los números de  $N$  comprendidos entre 0 y cierto número natural  $n$ , podría no ser “finito” desde fuera, es decir, en el sentido metamatemático<sup>65</sup>. Pero no sólo: en analogía con lo observado en el ap. II.16, en un peculiar “modelo” de  $TC$  (que llamaremos “no estándar”) el conjunto  $N$  podría también ser *numerable* y, a pesar de ello, no estándar. Si tal  $N$  admite una constante no estándar  $c$  semejante a la antes considerada, entonces la definición de *finito* se aleja nuevamente de su valor semántico, dado que los números naturales estándar comprendidos entre 0 y  $c$  son infinitos.

Hacemos notar, a propósito de esto, una incorrección bastante común con respecto a la formalización en  $TC$  de los dos teoremas de compacidad (sintáctica y semántica). Su *demostración*, requiere la previa formalización del concepto de *finito*. Se lee a menudo que el teorema de compacidad sintáctica (el cual, recordamos, tiene validez general) tiene una consecuencia “absolutamente intuitiva”: que toda demostración de cualquier Teoría matemática puede usar sólo un número *finito* de premisas. La demostración, sin duda, es sencilla<sup>66</sup>. Sin embargo el desliz deriva del olvido de que nos estamos refiriendo precisamente a un concepto *formalizado* de *finito*; por

---

<sup>65</sup> En un conjunto innumerable, los números comprendidos entre dos números distintos cualquiera pueden ser infinitos, como se verifica en el conjunto ordenado de los números reales.

<sup>66</sup> Sea  $S$  un Sistema consistente y sea  $T$  un teorema suyo cualquiera. Consideremos el Sistema, por tanto inconsistente,  $S'=S+notT$ . Por el teorema de compacidad sintáctica, existe un sub-Sistema finito suyo,  $\Sigma'$ , inconsistente.  $\Sigma'$  debe contener  $notT$  entre los axiomas: de otro modo, sería consistente por el teorema de compacidad sintáctica aplicado a  $S$ . Entonces, podemos indicarlo con  $\Sigma'=\Sigma+notT$ , donde  $\Sigma$  es un sub-Sistema finito de  $S$ . Siendo  $\Sigma+notT$  inconsistente,  $T$  es deducible de  $\Sigma$  (“por absurdo”, en base al metateorema de deducción); por consiguiente  $T$  es deducible con un número finito de axiomas de  $S$ .

lo tanto, posiblemente no coincidente con el significado de “finito” que, en cambio, se usa en la *metademostración* (basándose en la hipótesis de *buena definición* para el Sistema axiomático). La proclamada sensatez del corolario, en rigor, es solamente una ilusión. Si se quiere seguir el camino formal y *demostrar* el teorema de compacidad sintáctica, entonces su plausibilidad intuitiva, o sea basada en el concepto propiamente semántico de finito, está toda por verificar (en todo caso, metamatemáticamente): ésta, en efecto, estaría en relación con la presunta “espontaneidad” del “modelo” de *TC* al cual el *finito* matemático, usado en la demostración, se refiere. Discutiremos pronto si es posible elegir algo como “el modelo correcto espontáneo (o estándar)” para *TC*: un tema sujeto a inevitable nebulosidad, como se verá.

Indiscutiblemente, todo esto tiene consecuencias dramáticas para la Matemática. Intentemos resumirlas. Del concepto matemático de *finito*, minado por dicho relativismo, depende, como vimos en el ap. II.12, la definición conjuntista metamatemáticamente más satisfactoria del conjunto de los números naturales; que resulta, entonces, igualmente relativa a un “modelo” prefijado de *TC* y no necesariamente de acuerdo con el concepto intuitivo semántico de “número natural”. También el concepto de *infinito* posee, pues, el mismo tipo de relativismo y, por consiguiente, ¡la misma aplicabilidad del teorema de L-S! Es más, la relatividad del concepto de “cardinalidad”, hace que la subdivisión misma de los Sistemas en “numerables” y “no numerables” (y, por consiguiente, también en “formales” y “no formales”, para cuyo lenguaje valga o no valga el Teorema de *s-completitud*, etc.) quede inevitablemente sometida a un consenso de tipo metamatemático; porque no puede ser formalizada de modo *certeramente* correspondiente a los relativos conceptos



semánticos espontáneos. Incluso la “categoricidad” está sujeta a una crítica parecida: que sólo haya un  $N$ , a excepción de isomorfismo, es verdad sólo en relación a un “modelo” preestablecido de  $TC$ . Pero si se considera la explosión de los posibles “modelos” para  $TC$ , entonces dicha “unicidad” entra en crisis.

No obstante, no tiene mucho sentido extraer de estos límites consecuencias extraordinariamente catastróficas. Una de las primeras conclusiones derivadas del teorema de L-S se debe al propio Skolem y es todavía compartida por algunos: el teorema<sup>67</sup> mostraría que en Matemáticas es inútil, quizá presuntuoso, considerar modelos innumerables: de hecho, bastan los numerables. En efecto, no se puede negar que el dominio epistemológico de todo modelo de cardinalidad superior es exclusivo de la semántica, como hemos observado. No obstante, ningún “modelo” de  $TC$ , en el fondo, puede carecer de esta característica, incluso si es “numerable”: lo evidenciaremos dentro de poco. Además,  $TC$  puede describir formalmente sin problemas conjuntos, y por tanto modelos de las Teorías que representa, de cualquier cardinalidad innumerable, si bien no pueda denotar individualmente todos sus elementos. Es verdad que esto no es necesario y hasta puede considerarse inútil; pero, en algunos casos, como en la Teoría formal de los reales, la elección de un modelo innumerable parece a la mayoría de los Matemáticos la más sensata y satisfactoria. Lo que importa – y que es indudable – es que en ningún caso y desde ninguna perspectiva dicha elección puede ser concluida como contradictoria o errada. A razón de ello, esta crítica *no puede demoler efectivamente los modelos de cardinalidad superior al*

---

<sup>67</sup> O, más sencillamente, una versión suya menos general: *todo Sistema con modelos infinitos para cuyo lenguaje vale el Teorema de  $s$ -completitud, admite un modelo numerable.*

*numerable*, ni el punto de vista de quien desea usarlos. *Y ni siquiera es capaz de ofrecer mayor rigor o sanar el descrito relativismo*: ya vimos, en el ejemplo fundamental de los naturales, que hay modelos numerables no isomorfos entre sí; análogamente, veremos pronto que fijar la “cardinalidad” de un “modelo” de *TC*, no significa en absoluto fijar su “modelo”, incluso si dicha “cardinalidad” es la “numerable”.

Las críticas de Quine van mucho más allá. El punto de vista que las resume es la consideración de que dos Matemáticos nunca podrán estar seguros de usar el mismo “modelo” para *TC*; y, por tanto, tampoco de que coincidan sus conceptos de “conjunto”, “número natural”, “numerable”, “innumerable”, etc. En efecto, es cierto que no es posible ningún tipo de convención formalizable que asegure dicho acuerdo: el lenguaje de *TC*, obviamente, es el mismo para todos sus “modelos”, aunque sean profundamente distintos (lo cual ocurre para cualquier otro Sistema formal). No obstante, también es verdad que esto no significa necesariamente que dichos conceptos no puedan ser distinguidos *en absoluto*. De hecho, podrían ser distinguidos – y en realidad no hay otra elección – por la metamatemática; según un acuerdo de naturaleza genuinamente semántica. Obviamente, se puede dudar de este poder, como se puede dudar de cualquier convención semántica que fundamente la metamatemática; pero hemos ya observado en la primera Parte que, si se quiere creer como posible un tipo cualquiera de comunicación, también se deberá admitir alguna forma previa de acuerdo semántico informal. Y en el caso fundamental de los números naturales, este acuerdo, después de todo, parece innegable: realmente ¿se puede sostener que es ilusorio intentar desarrollar un estudio de sus propiedades, al menos las básicas, que sea compartido por todos aquellos interesados? Para una crítica filosófica exhaustiva contra el punto de vista de Quine, recomendamos la lectura de

un breve y muy eficaz artículo de H. Hrachovec<sup>68</sup>.

Estas muy sensatas razones, por otra parte, no pueden resolver del todo el problema cardinal. Admitir que es posible concordar un significado para los conceptos de “número natural”, “numerable”, etc., significa admitir que es posible convenir un “modelo estándar” para  $TC$ . Pero si se intenta especificar exactamente las características de dicho “modelo” espontáneo, entonces la cosa se complica. Incluso la misma “cardinalidad” sería discutible, pero supongamos de tenerla fijada; si se desea, con la prudente “cardinalidad numerable” de Skolem. Ahora bien, ya observamos que  $TC$  es incompleto, siendo la hipótesis general del continuo indecidible (ap. II.12). Hay que añadir que se han descubierto muchos otros enunciados indecidibles<sup>69</sup> y que, como reconoceremos en la tercera Parte, la incompletitud de  $TC$  es ineliminable. El punto débil es que ninguno de estos enunciados parece verdadero o falso en el “modelo espontáneo” de  $TC$ ; el cual, por consiguiente, cada vez tiene menos de espontáneo. Piénsese, en comparación, en el caso del  $V$  postulado de la Geometría euclidiana: allí, el “modelo espontáneo euclidiano” lo indica tan enérgicamente como verdadero que indujo muchos Matemáticos a considerarlo como un posible teorema. En cambio, aquí ¿en qué “modelo” pensamos? ¿Uno para el cual la hipótesis del continuo es verdadera o uno de los infinitos – entre sí completamente distintos – en la que es falsa? Y la misma pregunta se puede repetir para todos los demás (infinitos, como se verá) enunciados indecidibles.

En definitiva, hay que reconocer abiertamente que no se

---

<sup>68</sup> *Ontological Relativity reconsidered: Quine on Löwenheim-Skolem, Davidson on Quine.*

<sup>69</sup> Por ejemplo, *la hipótesis de Suslin, de Kurepa y de Martin*; hay otros más.

tienen las ideas claras sobre como está hecho el “modelo” de *TC* que nos consiente – lo consideramos a pesar de todo innegable – una visión común y unitaria de la Matemática. La sensación tangible que se percibe es que cuanto más nos adentramos en los fundamentos de las Matemáticas, más parece ilusorio intentar dilucidar inequívocamente cada detalle.

A propósito se debe subrayar un hecho: manifiestamente, los problemas que han salido a la luz no se deben a la unificación fundamental realizada por *TC*. Es más, para este aspecto, la reducción conjuntista de la Matemática opera como una lente de aumento, revelando y unificando todas las ambigüedades ya presentes en las Teorías que unifica: en todo caso, pues, en clave favorable. Por ejemplo, supongamos tener sólo el Sistema *PA*, olvidando *TC*; *PA* sería, entonces, el único Sistema *formal* que puede usarse para definir los números naturales. Pero a *PA* podemos siempre aplicarle el *metateorema* de L-S y reencontrar la desconcertante pluralidad de modelos de todas las cardinalidades; en consecuencia, la representatividad en lenguaje puramente matemático de los números naturales “intuitivos” entrará en crisis de manera análoga a como hemos evidenciado en seno a *TC*.

Cuando un problema de relativismo se manifiesta sólo en *TC* es porque tiene relación con un concepto que se ha formalizado sólo en *TC* (como, por ejemplo, el de *finito*): en el caso que se decida no formalizarlo, éste, por supuesto, se quedará con su propia ambigüedad semántica.

## **II.20. El uso *intrínsecamente semántico* de los Sistemas formales y de *TC***

Ya se ha anunciado que la oportunidad de sustituir el modelo es capaz de ampliar la capacidad expresiva de un

Sistema axiomático formal. Para constatarlo es suficiente un sencillo ejemplo sobre el primer Sistema axiomático que hemos definido (ap. I.1). Interpretemos  $A, B, C$  y  $D$  como  $0, 1, 2, 3$  y “ $\rightarrow$ ” como “ $<$ ”, es decir, “menor de”; puesto que los tres axiomas se satisfacen, se obtiene un modelo. Además la regla deductiva es correcta, porque si  $X < Y$  y  $Y < Z$ , también valdrá que  $X < Z$ . Con los únicos tres teoremas que se pueden deducir, obtenemos la siguiente interpretación:  $0 < 2, 0 < 3$  y  $1 < 3$ . No obstante, está claro que si nos referimos al modelo  $0, 1, 3, 4$ , con el mismo significado para “ $\rightarrow$ ”, podemos también deducir  $0 < 4$  y  $1 < 4$ . Con esta estrategia es posible hacer que este banalísimo Sistema, de tres teoremas sólo, sea capaz de deducir infinitas propiedades de los números naturales. El uso de distintos modelos es por tanto capaz de aumentar espectacularmente el poder expresivo de la Teoría. En particular puede ocurrir que un enunciado  $E$  interpretado en el nuevo modelo  $M_2$  exprese una propiedad  $p$  del universo del originario modelo estudiado  $M_1$ ; incluso una propiedad antes incodificable, es decir, que no puede ser expresada mediante ningún enunciado interpretado en  $M_1$  (y hemos visto que hay siempre infinitos, si  $M_1$  es infinito). En otras palabras, para enunciar y eventualmente demostrar la propiedad  $p$ , se recurriría a un modelo distinto del modelo al cual la misma  $p$  se refiere. Naturalmente, entre los dos modelos deberá existir una oportuna *relación*. Sentimos no poder traer auténticos y útiles ejemplos aplicados para este criterio; es probable que normalmente estas deducciones se obtengan mediante el uso de un distinto Sistema axiomático, en lugar de un distinto modelo (lo cual sería siempre posible cuando dicha *relación* es propiamente matemática). En todo caso, es plausible que el método sea subestimado, sobre todo en el caso de que dicha *relación* sea intrínsecamente semántica, aun siendo

metamatemáticamente indiscutible. No obstante, podemos preguntarnos hasta qué punto el criterio descrito puede resolver los límites expresivos de la Teoría. Ante todo, la sencilla denotación de todas las propiedades del universo de un modelo infinito requeriría una cantidad innumerable de otros modelos: ¿hay suficientes? El teorema de Löwenheim-Skolem podría tranquilizarnos (!) desde este punto de vista. ¿Cuántas son todas las cardinalidades? Por lo observado en una nota del ap. II.12, sabemos que la colección de todas las cardinalidades tiene siempre más elementos que cualquier *conjunto* de números cardinales. Se trata, por lo tanto, de un tipo de infinito “más fuerte” de lo normal (recordemos que una posible definición de conjunto infinito es que el conjunto tenga “tantos elementos como” los de un subconjunto suyo propio). En efecto, en el ámbito de las *clases*, descritas según la Teoría de los conjuntos *NBG*, se puede definir una “correspondencia biunívoca” (con comillas porque no es entre conjuntos y, por tanto, no es ella misma un conjunto) entre esta colección y la colección de todos los conjuntos; en consecuencia, se puede afirmar que también la primera es *hiperinnumerable* como la segunda. Pero incluso limitándose a los modelos isomorfos entre sí, la situación es tranquilizadora: en toda Teoría dotada de modelos, el número de modelos isomorfos es ciertamente *hiperinnumerable*. Para concluir esto, basta observar que se puede sustituir el universo del modelo, cuyos elementos indicamos con  $a, b, c, \dots$ , con un universo que contiene los elementos  $(a,x), (b,x), (c,x) \dots$ , siendo  $x$  un conjunto *cualquiera*. Si la presencia de  $x$  es ininfluyente en las operaciones, se obtiene un modelo distinto pero isomorfo al inicial. Puesto que el número de todos los conjuntos es *hiperinnumerable*, se llega

a la conclusión<sup>70</sup>.

Está claro que admitir el uso de uno cualquiera de los *hiperinnumerables* modelos del Sistema para deducir, implica considerar innumerables enunciados interpretados; y entonces *tratar el Sistema como no formal*. En esto consiste, pues, lo que podemos denominar el *uso intrínsecamente semántico* de un Sistema formal: considerarlo de hecho como no formal, admitiendo para sus proposiciones la posibilidad de innumerables interpretaciones. Todo ello sin alterar minimamente el lenguaje de la Teoría (ni mucho menos su número de orden expresivo).

Sin embargo, por lo que respecta al ámbito interpretativo de la crucial Teoría *TC*, se tiene una situación singular. A parte las razones explicadas, la interpretación de las proposiciones de *TC* resultaría oportuna por un motivo más fundamental: el deseo de poder describir todos los conjuntos (o, por lo menos, todos los elementos de un conjunto innumerable). Se pretendería, es decir, que *TC* fuese capaz de describir efectivamente todo objeto para el cual la propia Teoría ha sido creada, como contemplado en el ap. II.15.

El problema al interpretar *TC*, como hemos visto, es que la distinción, la especificación, de cualquier “modelo” correcto, incluso del más intuitivo, es incierta. No parece lícito sostener que son posibles interpretaciones del lenguaje de *TC* capaces de asignar a cada enunciado uno y un solo claro significado. En consecuencia, tendría muy poco sentido hablar, como antes, de distintos modelos en *relación*. Por otra parte, la exigencia de una interpretación que vaya más allá de las posibilidades de un sólo “modelo”, parece concreta y efectiva: basta reconocer que *lo que normalmente se hace cuando se trabaja con la Teoría TC*,

---

<sup>70</sup> Para más detalles véase G. Gerla: *Proprietà che si conservano*, cap. 6.

*no es dar un significado indiscutible a sus enunciados según un “modelo suyo preestablecido” (¿qué “modelo”?); sino, inversamente, se intenta transformar cualquier afirmación semántica relacionada con conceptos conjuntistas, en secuencias de símbolos de TC. Se entiende que ello equivalga, en cierto sentido, a utilizar el “modelo” más conveniente para formalizar la frase. Realmente, es como si se admitiesen simultáneamente todos los hiperinnumerables “modelos” concebibles, o bien, si se prefiere, un único “modelo” de tipo “dinámico”, en el cual la colección de los conjuntos se adapta a nuestras exigencias mudables. Claramente, se trata de un uso intrínsecamente semántico, porque maneja el Sistema como no formal. Su lado positivo, manifiestamente, es la capacidad para remediar a todo límite expresivo de TC: de representar *totalmente* y *fielmente* (dado que cualquier criterio semántico relativo a las premisas puede ser reproducido por el “modelo dinámico”) incluso a los Sistemas innumerables. El negativo es la pérdida de formalidad y el carácter huidizo de la interpretación, que además, debe saber arreglárselas para remediar a las emergentes ambigüedades del lenguaje, como en breve observaremos.*

Para intentar precisar el funcionamiento de dicha interpretación “dinámica” de TC, tomemos como ejemplo la descripción de las propiedades de los números naturales. Sabemos que el lenguaje “numerable” del Sistema formal TC es incapaz de denotar individualmente un número infinito de elementos de  $P(N)$ , es decir, de propiedades de los números naturales. Imaginemos de establecer un “modelo” tradicional infinito,  $C$ , de la Teoría<sup>71</sup>; es decir, un “modelo” que asocie un

---

<sup>71</sup> Y, si se quiere, se suponga “no numerable” para resolver el problema de la insuficiencia expresiva de TC con una estrategia más general que la descrita en el apartado precedente.



único e indiscutible significado a cada proposición. Puesto que el lenguaje de  $TC$  interpretado en  $C$  sigue “numerable”, éste seguirá sin poder describir infinitos de los elementos de  $P(N)$ . No obstante, a estos elementos habría que poder aplicar las premisas de  $TC$ , si es verdad que son conjuntos. En efecto, esto se podría hacer sólo *redefiniendo*  $C$ , o sea “cambiando” el “modelo”. La redefinición del “modelo” puede (y debe) consentir la descripción propiamente matemática de propiedades, que todavía son *conjuntos*, antes incodificables. Naturalmente, tal redefinición no puede establecerse de manera oficial o consciente, dado que todo “modelo”, realmente, es indistinto; sencillamente, se realiza cuando se codifique en lenguaje conjuntista la propiedad (es decir, el conjunto) que cada vez nos interesa estudiar. Cuando se haga esto, en general podrá cambiar el “modelo”  $C$ , pudiendo incluso tener otra “cardinalidad”. Lo que implica que ¡también  $N$  y  $P(N)$  podrán cambiar! Por ello, no hay duda de que considerar la colección de todos los “modelos” como un único “modelo dinámico” no convencional, da lugar, en general, a una situación de ambigüedad de la cual no queda más que la sencilla suposición de saberse desenredar; un malestar que cabía esperar. Otro precio que se paga es que surgirán siempre nuevos conjuntos no formalizables (entre éstos, quizá algunos que “antes” lo eran). Pero está claro que el “ciclo” puede teóricamente repetirse hasta el infinito para permitir la descripción de cualquier conjunto.

Naturalmente, el uso intrínsecamente semántico de  $TC$  resuelve sólo aparentemente los problemas discutidos anteriormente. Es verdad que el Sistema – *distinto de  $TC$*  – obtenido de  $TC$  interpretando libremente, de la manera descrita, sus proposiciones puede escapar al metateorema de  $s$ -completitud y a sus consecuencias. Pero la pluralidad de “modelos” y, con ello, la relatividad de los conceptos de

*número, finito, cardinalidad, categoricidad, etc.*, se reencuentra intacta en seno al propio “modelo dinámico”, por como ha sido definido. Además, el uso de dicho “modelo dinámico” comporta, claramente, una explícita renuncia a resolver los enunciados indecidibles de *TC*, dado que éste absorbe tanto los “modelos” para los cuales son verdaderos, como aquellos para los que son falsos. De hecho, por su capacidad de poder describir cualquier concepto conjuntista, *este uso de TC equivale al empleo de la tradicional Teoría “ingenua” de los conjuntos.*

Intentemos ahora extraer algunas fundamentales conclusiones al final de esta segunda Parte. La Teoría axiomática de los conjuntos, aun con límites, permite unificar y formalizar (*en teoría*, desde luego no en práctica por la intratabilidad de su formalismo) toda la Matemática. Al hacerlo, las ambigüedades, antes esparcidas en los fundamentos de cada una de las Disciplinas, se concentran todas en la base de esta Teoría. Ninguna de las “roñas” del edificio desaparece, sino se esconde bajo sus cimientos. Ésta Teoría consiente formalizar conceptos muy importantes y fundamentales (como los de *finito e infinito*), aunque con el amargo descubrimiento de que ni estos ni otros pueden considerarse certeramente correspondientes a los metamatemáticos; que son, naturalmente, el verdadero objetivo del conocimiento. Por otra parte, este problema no se debe a *TC*, sino que reside en los fundamentos de todo Sistema clásico formal. La Teoría, además, no puede describir *fielmente* todos los Sistemas formales, a menos de perder, como hemos anticipado, su carácter determinístico de tipo “mecánico” (esto se concluirá e ilustrará en la tercera Parte; hasta ahora, sólo hemos señalado la duda de que todos los Sistemas formales sean *fielmente* representables). Para el ámbito interpretativo, se

observa que sus “modelos” están sujetos a una nebulosidad que parece inevitable y además, para que la Teoría misma pueda describir todos los objetos para los cuales está pensada, la única posibilidad de carácter general es una interpretación libre de sus proposiciones, es decir admitir el uso “simultáneo” de todos sus posibles, *hiperinnumerables*, “modelos”. Este uso, si bien resuelve todos los límites expresivos de la Teoría, consintiendo representar *total* y *fielmente* también a los Sistemas no formales, equivale pero a considerar *TC* como innumerable y por tanto no formal.

En ciertos aspectos, pues, la situación parece dar la razón a una famosa crítica atribuida a Poincaré: “*la Teoría axiomática de los conjuntos es un error del que algún día nos recuperaremos*”. Su unificación, *teórica* y no *de hecho*, tiene límites de *fidelidad* y no resuelve ni mejora ninguna ambigüedad. La naturaleza de sus “modelos” es oscura y se necesita una cantidad innumerable de ellos – es decir, se precisa que el Sistema abandone el riguroso formalismo, reconvirtiéndose en Teoría “ingenua” de los conjuntos – para poder describir todo aquello para lo que ha sido creada. Todo esto manifiesta la inutilidad de su aspecto formal y parece justificar un retorno a la “ingenuidad” cantoriana.

Sin embargo, resumiremos su defensa en tres puntos: 1) *TC* es capaz de formalizar algunos metateoremas fundamentales y representar *fielmente* los Sistemas formales más comunes e importantes. 2) Toda Teoría formal tiene análogos límites expresivos, insalvables en el respecto de la formalidad. 3) La concentración de todas las ambigüedades de las Disciplinas matemáticas en los fundamentos de una única Teoría, capaz de unificar toda la Matemática más importante, es un resultado epistemológicamente loable que consiente revisar la naturaleza de dichos problemas de manera unitaria y exhaustiva. Y, por

ejemplo, de concluir definitivamente que las raíces de la Matemática no pueden ser dilucidadas en todos sus detalles.

TERCERA PARTE  
INCOMPLETITUD E INDECIDIBILIDAD

### III.1. Sistemas clásicos efectivamente axiomatizables

El objetivo de los siguientes apartados será profundizar en la naturaleza de los sistemas formales. En particular nos interesa estudiar en qué condiciones éstos pueden tener ciertas propiedades favorables que acentúan su determinismo.

Recordemos que las demostraciones, según la *buena definición*, son *distinguibles*. Esto quiere decir que, dado un objeto cualquiera, es posible determinar metamatemáticamente si es una demostración o no. Pero un razonamiento metamatemático puede referirse al significado de las palabras del modo más general y arbitrario y por lo tanto obtenerse por trámite de una estrategia inclasificable; sin embargo, es espontáneo desear, como ya mencionamos en el apartado I.5, un método de conclusión “automático”, “mecánico”, que no estuviese ligado a la fantasía o habilidad del Matemático. Nos referimos concretamente a una *máquina* que, ante las premisas de un Sistema formal, sea capaz de responder siempre con un “sí” o con un “no” a la pregunta de si un objeto cualquiera es una demostración de algún teorema.

Una colección se dice *decidible* si es numerable y si existe un *procedimiento mecánico, describable finitamente*, capaz de establecer, dado un objeto cualquiera, si éste le pertenece o no<sup>72</sup>.

---

<sup>72</sup> Es evidente la importancia del orden de los términos en la definición: no es lo mismo decir “dado un objeto cualquiera, existe un procedimiento mecánico capaz de...etc.” Esta última definición no exige que dicho

Un Sistema matemático se dice *efectivamente axiomatizable* (que abreviaremos con *ef. ax.*) si la colección de las demostraciones de sus teoremas es *decidible*. El procedimiento mecánico que hace *decidible* una colección numerable se llama, concisamente, *de decisión*. Naturalmente, la *decidibilidad* es una condición más fuerte que la *distinguibilidad*.

Pero ¿qué debemos entender exactamente por “procedimiento mecánico describible finitamente”? Parece que sería oportuno definir más rigurosamente este concepto. Ofreceremos, entretanto, una aclaración informal de la idea. Generalmente<sup>73</sup>, nos referimos a una Estructura (evitamos el término “Sistema” por motivos obvios), con un *programa* prefijado que:

- Admite un número finito de objetos finitos y sin ambigüedad, que llamaremos *inputs*, los cuales arrancan su funcionamiento.
- Es capaz de señalar su *parada*, es decir, la espera de nuevos *inputs*.
- Cuando se para tras los *inputs*, habrá producido un número finito de resultados (o *outputs*) finitos. La misma señalización de *parada* es otro *output* particular. De todas formas, cabe la posibilidad de que nunca se pare, en cuyo caso es posible que produzca infinitos *outputs* finitos (aunque, como caso particular, podría no producir jamás

---

procedimiento sea único para todos los objetos y equivale a una *distinguibilidad* que introduce como única novedad el carácter mecánico de las conclusiones. También en metamatemática, como en un lenguaje simbólico, es importante el orden de los términos en un periodo; claro que no es frecuente encontrarse con sutilezas de este tipo en el lenguaje común.

<sup>73</sup> Seguimos aquí, como ejemplo, algunas trazas de F. Montagna: *Teoria della computabilità*.

un *output*).

Además, debe poseer estas otras características:

- Una vez fijado el *programa*, cada *output* depende sólo y únicamente de los *inputs*. Con lo que, repitiendo en un momento cualquiera los mismos *inputs*, se vuelve a obtener el mismo resultado.
- El programa es un conjunto finito de *instrucciones*; cada *instrucción* es un objeto bien determinado que no cambia en el tiempo.
- Las *instrucciones* se traducen en operaciones simples y necesarias que no requieren ni fantasía, ni preferencia, ni especial inteligencia. No pueden implicar operaciones de azar como el lanzamiento de un dado o de una moneda<sup>74</sup>. Dan siempre resultados parciales únicos (y por consiguiente un único resultado final): por ese motivo, no pueden consistir en elecciones arbitrarias entre diversas acciones posibles.
- Tiempo, dimensiones físicas, energía absorbida y otros límites prácticos, no influyen en el funcionamiento de la máquina.

La eventualidad de que la máquina pueda no pararse podría haber sorprendido alguien acostumbrado a contar siempre con recursos agotables. El lector que no esté acostumbrado a la

---

<sup>74</sup> Esta condición, por lo tanto, excluye explícitamente cualquier procedimiento que utilice algo parecido a una función de tipo *random* (que genera, al menos en teoría, números *casuales*; nótese que se trata de una técnica de cálculo muy usada). Retomaremos el tema en el apartado III.6.

informática, puede pensar en el ejemplo de un coche. El *input* podría ser “*¡vamos a la playa!*”. El conjunto de las instrucciones, dejando a un lado las operaciones de conducción, se puede sintetizar con “*seguir el itinerario marcado en rojo en el mapa*”. El resultado (o parte de ello, si así lo decidimos) es todo lo que el coche produce: aceleración, humo, el tránsito sobre una colina o por un litoral, etc. Un ejemplo en el que el procedimiento no se para, es el siguiente. *Input*: “*¡en marcha!*”; programa: “*seguir el itinerario marcado en rojo*”, donde dicho itinerario es una curva cerrada en sí misma. No nos interesa tener en cuenta la gasolina o el desgaste del coche; ni la duración finita de la vida del coche, del conductor o del universo. Porque lo que queremos es descubrir los límites teóricos de la teoría que tratamos, al margen de las dificultades prácticas. Por otra parte, el caso de *no parada* no debe ser considerado en principio como necesariamente “negativo”, como veremos.

De todas formas, existe una posterior hipótesis simplificadora que, en nuestro caso, parece oportuno admitir acerca de los objetos, tanto de *input* como de *output*: que éstos se limiten a cadenas alfa-numéricas (de longitud finita, como dijimos). Esto se asume en consideración de la aplicación de las máquinas a los Sistemas axiomáticos concretos, donde están así representadas tanto las proposiciones como las argumentaciones de la metamatemática (como las demostraciones, según la *buena definición*). Por otra parte, desde un punto de vista lógico, dicha hipótesis no limita en ningún modo las máquinas: baste pensar que un normal ordenador (que sólo maneja cadenas binarias de “0” y “1”) puede hacerse capaz de efectuar cualquier tipo de acción (incluso poner en marcha otra máquina cualquiera) y que, desde nuestro punto de vista, no



nos interesa el objeto de un *output* en sí, sino sólo su representación simbólica característica. En consecuencia de tal hipótesis, el *programa* de una máquina cualquiera provoca exclusivamente un procesamiento de las cadenas alfanuméricas de *input*, produciendo, cuando sí, cadenas alfanuméricas de *output*.

Ciertamente, estas aclaraciones sobre las máquinas mitigan sólo en parte el descontento por la necesidad de recurrir a ellas, a estos nuevos conceptos informales. De hecho, ¿no sería más oportuno, por ejemplo, tratar de reconducir esa “Estructura mecánica” a un simple Sistema matemático? Dejemos la respuesta para más adelante.

Hay que notar que en la definición de colección *decidible* se usa el concepto informal de “numerable” (efectivamente, este término debería ir entre comillas). No obstante, veremos que gracias a la convención representada por la *Tesis de Church-Turing*, a cualquier colección decidible corresponde efectivamente un particular *conjunto numerable*. Por este motivo, hemos omitido y continuaremos omitiendo las comillas.

*Si un Sistema axiomático es ef. ax., entonces es formal.* En efecto, como el conjunto de las demostraciones es numerable, también lo es el de los teoremas. Además, en un Sistema *ef. ax.*, la máquina, discriminando todas y solas las demostraciones por orden de longitud, puede producir en salida todos y solos los teoremas del Sistema. Ello puede llevarse a cabo, por ejemplo, si se conviene que, en cada demostración propiamente dicha, la última cadena tenga siempre que simbolizar la conclusión, es decir el teorema. En definitiva, al ser todos *outputs* de una máquina, tanto las demostraciones como los teoremas no poseen un carácter semántico ineliminable. Así, el Sistema respeta la formalidad en lo relativo a sus teoremas y entonces se puede calificar de *deductivamente formal*. Ahora, conforme a la

convención simplificadora que hicimos al principio del apartado II.14, podemos desatender el caso en que, a pesar de ello, la Teoría sea informal a causa de una semántica irreducible en proposiciones que no son teoremas: una situación, como hemos explicado, poco interesante en sí, inusual y en todo caso eludible.

Viceversa: ¿un Sistema axiomático formal es siempre *ef. ax.*? Dado un Sistema formal arbitrario, para buscar un método de reconocimiento “mecánico” de las demostraciones, se podría considerar ante todo una generación combinatoria y ordenada de todas las posibles cadenas finitas de los símbolos finitos admitidos. Si éstos son los caracteres alfa-numéricos, podemos convenir que las primeras “frases” sean todas aquellas constituidas por un solo símbolo en orden alfa-numérico. Después consideraremos todas aquellas constituidas por dos símbolos y así sucesivamente, siempre respetando el orden alfa-numérico. Una máquina automática puede generar sin problemas esta secuencia. Antes de que surja una cadena que contenga enunciados del Sistema (y por lo tanto, posiblemente una demostración), será necesario “aguardar” bastante, ya que las combinaciones que dan lugar a frases de este tipo sólo serán una mínima parte de las totales. Pero éste es un problema de carácter puramente práctico que de momento no nos interesa. A continuación, con el objetivo de que el Sistema sea *ef. ax.*, la máquina debería diferenciar dichas frases en demostraciones y no-demostraciones. Sin embargo, nada impide que cada demostración dependa de modo singular y exclusivo de la particular expresión formal del enunciado a demostrar. Lo que queremos decir concretamente es que, si  $E$  es un enunciado genérico del Sistema, el razonamiento que concluye que  $E$  es un teorema podría depender *intrínsecamente* de  $E$ ; es decir,

ser distinto para cada  $E$  (aunque no asocie ningún significado a  $E$ ). En tal caso, si los teoremas son infinitos (una hipótesis, recordamos, de no trivialidad para el Sistema), podría ser imposible establecer *un número finito de indicaciones no semánticas* para reconocer todas las demostraciones; es decir, transferir la lógica demostrativa del Sistema a un procedimiento mecánico. Por tanto, parece razonable *dudar* de que todo Sistema formal sea efectivamente axiomatizable. Precisamente descubrir si es así o no, será uno de los principales objetivos de los temas que trataremos.

En un Sistema *ef. ax.*, como acabamos de observar, el procedimiento mecánico de decisión de la demostraciones se puede modificar fácilmente para que produzca en salida todos y solos los teoremas del Sistema (he aquí un ejemplo “positivo” de máquina que no concluye, salvo en el caso trivial de que el Sistema tenga un número finito de teoremas); esta propiedad se indica brevemente diciendo que los teoremas son *efectivamente numerables*. En general no vale el caso inverso: si en una Teoría clásica el conjunto de los teoremas es *efectivamente numerable* (es decir, si existe una máquina capaz de hacer un elenco de todos y solos sus teoremas), no quiere decir que ésta sea *ef. ax.* (lo observaremos mejor en el apartado III.3); de todas formas, en los casos de interés práctico, este caso es decididamente insólito.

Si existiesen Sistemas formales no *ef. ax.*, como hemos supuesto por lógica prudencia, sus teoremas, siempre numerables, podrían no serlo *efectivamente*; es decir, podría no existir ninguna máquina capaz de generarlos todos y solos.

Hay que subrayar que la *efectiva numerabilidad* no implica la *decidibilidad*: el procedimiento mecánico, ligeramente modificado para controlar si un determinado objeto se encuentra en la lista exhaustiva de elementos de la colección que él mismo genera, puede ciertamente reconocer, antes o después, si un

objeto determinado le pertenece; pero si no le pertenece, tal procedimiento no se pararía y nos quedaríamos “para siempre” con la duda. Por lo tanto, en un Sistema *ef. ax.*, no es seguro que el conjunto de los teoremas sea *decidible*.

Para de que lo sea, basta con que también el conjunto de los enunciados que no son teoremas sea *efectivamente numerable*: en efecto, presentaríamos el enunciado *E* a ambos procedimientos y esperaríamos la primera respuesta de uno de los dos, durante un tiempo finito<sup>75</sup>. La condición, por otra parte, también es necesaria: si el conjunto de los teoremas es decidible, el procedimiento *de decisión* puede hacer un elenco exclusivo y exhaustivo tanto de los teoremas como de los no-teoremas: bastará con enviarles en *input* todas las posibles secuencias finitas de símbolos del Sistema, ordenadas por longitud y alfanuméricamente.

Si el conjunto de los teoremas es *decidible* se dice que el Sistema mismo lo es. Inmediatamente es preciso advertir de los peligros de esta terminología. Obviamente, que una Teoría sea *decidible* no implica que no pueda contener enunciados *indecidibles*, es decir que tenga que ser completa; en efecto, si un enunciado *I* es indecidible, la decidibilidad del Sistema comporta solamente que una máquina sepa reconocerlo, o sea concluir que ni *I*, ni su negación son teoremas. Es verdad que la terminología usual en este caso es poco afortunada, pero hay que resistir a la tentación de modificarla, porque por desgracia ya está muy difundida. Una buena norma para rehuir confusiones es evitar las formas verbales del verbo “decidir”<sup>76</sup> y usar sólo los adjetivos *decidible* e *indecidible*, especificando siempre si se

---

<sup>75</sup> No hay que dejarse engañar por las referencias al tiempo, cuya única finalidad es la de ilustrar mejor el asunto: “responder en un tiempo finito” o “responder antes o después” equivalen simplemente a “concluir”; mientras “no pararse nunca” a la imposibilidad de hacerlo.

refiere a un Sistema o a un enunciado individual.

Ciertamente la decidibilidad, para un Sistema matemático, representa un grado sumo de su conocimiento. Si  $E$  es un enunciado cualquiera, poniendo en marcha el procedimiento mecánico *de decisión*, que siempre termina, una vez con *input*  $E$  y después con *notE*, se podría concluir siempre si  $E$  es un teorema, la negación de un teorema o un enunciado indecidible. Y, por lo tanto, también establecer que el Sistema es incompleto, si lo es (en cambio, si es completo, en general esto no puede concluirse basándose sólo en el procedimiento finito de decisión). También el problema de la consistencia se resolvería inmediatamente: fijado un enunciado  $E$  arbitrario, el Sistema será consistente si y sólo si al menos uno de los dos enunciados entre  $E$  y *notE* no es un teorema. La genialidad de los Matemáticos, en dichos Sistemas, ¡quedaría sustancialmente limitada a la brevedad o elegancia de las deducciones!<sup>77</sup> Por suerte para ellos, de todos modos, los Sistemas decidibles son en efecto una utopía. Para empezar, en todos los casos reales, la consistencia sólo puede *suponerse* como verdadera, como veremos. Y sólo en pocos casos (que pronto ejemplificaremos), si ésta se admite, se concluye que el Sistema es decidible.

Un caso trivial de Sistema *decidible* es el de cualquier Sistema clásico formal inconsistente: en él, cada enunciado es un teorema. Por lo tanto, un Sistema *indecidible*, es decir no *decidible*, es necesariamente consistente.

---

<sup>76</sup> Como en: “decidir un enunciado”, usado en el sentido de: “establecer si es un teorema o no”. De hecho, si se “han decidido” un enunciado y su negación como “no teoremas”, el enunciado es... ¡indecidible!

<sup>77</sup> Está bastante difundida la idea de que este determinismo haya representado “el sueño” de Hilbert; sin embargo, como luego comentaremos, es muy probable que se trate de una generalización exagerada.

Consideremos ahora un Sistema axiomático *ef. ax.* y consistente. Sea  $E$  un enunciado cuyo cualquiera; si  $E$  es un teorema, el mencionado procedimiento mecánico de comparación con los teoremas de *output* de la máquina está capacitado para descubrirlo. Si  $E$  no es un teorema, se tienen dos casos: en el primero,  $E$  es la negación de un teorema y esto se puede descubrir verificando  $\text{not}E$  en la misma manera; no hay que pasar por alto que, para hacerlo, se necesita la hipótesis de la consistencia. En el segundo caso, en el que  $E$  es indecible, este procedimiento, sin embargo, fallaría: en efecto, éste no se pararía y no podríamos llegar a ninguna conclusión. Naturalmente, dependiendo del Sistema, es posible que existan diferentes procedimientos para llegar a la correcta conclusión; pero, como no se vislumbran métodos generales, hay que dudar de ello. Como dijimos en el apartado II.9, el conjunto de los teoremas es *distinguishible* para cada Sistema con modelos y  $s$ -completo (y entonces también en nuestro caso particular, en el cual el Sistema es formal y consistente) en la hipótesis en que todos los modelos del Sistema sean individuables (en el peor caso, metamatemáticamente; tal hipótesis es sobradamente optimista sólo para el caso del Sistema  $TC$ , como veremos más adelante): en efecto, los enunciados indecibles se pueden reconocer considerando modelos oportunos. Así, pues, se pone de manifiesto que añadiendo el hecho de que el Sistema formal sea también *ef. ax.*, además de consistente, las cosas no cambian sustancialmente: en efecto, aunque ahora se disponga de un procedimiento mecánico que nos permite reconocer los teoremas y las negaciones de teoremas, para los enunciados indecibles sólo nos queda, en general, la consideración metamatemática de modelos.

Por consiguiente, se diría que, en general, en un Sistema *ef. ax.* y *consistente* los Matemáticos no deben temer ser “reemplazados” por los informáticos. No sólo por las razones

prácticas ligadas a las limitaciones físicas de las máquinas (que, como pronto veremos, de hecho hacen inviable la resolución mecánica de problemas incluso de modesta complejidad); sino también, precisamente por la no-mecanizabilidad, en general, de preguntas como: “¿es indemostrable tal enunciado?”.

Por otra parte, en un Sistema *ef. ax.*, consistente y completo, el procedimiento antes descrito es, obviamente, *de decisión*: al faltar los enunciados indecidibles, éste clasifica todos los enunciados en teoremas y no-teoremas, los cuales en este caso coinciden con las negaciones de los teoremas. Así, un tal Sistema será *decidible*; pero hay que recordar que para llegar a esta conclusión es necesaria la hipótesis de la consistencia. Un ejemplo importante de este caso es la Teoría formal de los números reales (*TFR*), o bien la Geometría euclidiana (*GE*); Sistemas que, como hemos señalado, son completos: una máquina podría entonces clasificar cada enunciado, presuponiendo la consistencia. Pero, por desgracia, este hecho posee un interés exclusivamente teórico.

En muchos sitios se afirma que si una colección es finita entonces es decidible. Se trata, claramente, de un grave error. Ante todo, la colección tampoco podría resultar *distinguible*, como observamos en un caso donde está involucrada la no individuabilidad de los entes (ap. I.12). Más aún, una colección finita podría ser *distinguible* y no decidible. Así resulta, por ejemplo, si al menos un elemento de la colección posee un carácter irreduciblemente semántico. En este caso, sólo la metamatemática podría discriminar perfectamente todos los elementos de la colección, mientras toda máquina fallará. En el apartado III.9 se considerará un ejemplo muy fundamental.

Volvamos finalmente a la idea, que antes apuntamos, de la posibilidad de definir el *procedimiento mecánico* sirviéndonos simplemente de un Sistema matemático. Deberíamos arreglar las

cosas de manera que para cada cadena del lenguaje en que estén expresadas las demostraciones, los *outputs* “esta cadena es una demostración” o “esta cadena no es una demostración”, sean sencillamente *teoremas* de un oportuno Sistema matemático, llamémoslo  $S$ . No existe alguna particular dificultad para hacerlo, pero la cuestión es que dicha propiedad no sería equivalente a la *efectiva axiomatizabilidad* antes definida. Para serlo, si reflexionamos, deberíamos estar seguros de que los teoremas de  $S$  sean *efectivamente numerables*, es decir, que puedan ser generados exclusivamente y exhaustivamente por una *máquina*. Entonces, el concepto de máquina volvería a surgir.

Para traducir en lenguaje matemático la idea de *procedimiento mecánico* es necesaria una apropiada convención: la *Tesis de Church-Turing*, de la que hablaremos más adelante.

### **III.2. Ejemplos de Sistemas clásicos *ef. ax.* Dos consecuencias del axioma de elección**

La efectiva axiomatizabilidad ¿es una condición difícil para los Sistemas clásicos formales comunes? Desde luego que no. Las cuatro reglas deductivas clásicas poseen un carácter que se puede mecanizar perfectamente<sup>78</sup>. Consideremos, por ejemplo, el *modus ponens*; para reproducirlo exactamente en una máquina, basta con programarla de modo que, teniendo “ $A$ ” y “ $A \rightarrow B$ ” como *inputs*, produzca “ $B$ ” como *output*. Algo análogo ocurre con la regla de sustitución y las restantes. También es posible programar una máquina de modo que pueda concluir o excluir si una determinada deducción, representada por finitos caracteres

---

<sup>78</sup> Contando con resolver sus “inocentes” ambigüedades: recuérdense, a este propósito, las consideraciones del apartado II.13 sobre el *modus ponens*.



alfanuméricos, hace un uso correcto de las cuatro reglas deductivas clásicas. Entonces, acordándonos de nuestras convenciones generales sobre los Sistemas clásicos, es decir que usen sólo esquemas axiomáticos y reglas gramaticales perfectamente claras (en particular fielmente reproducibles por una máquina), se puede repetir una metademostración del todo análoga a la del apartado I.9, para concluir que en cada Sistema clásico de este tipo, *la decidibilidad de las demostraciones es equivalente a la decidibilidad de los axiomas*. De hecho, la *efectiva axiomatizabilidad* de un Sistema se define corrientemente mediante la condición de *decidibilidad* para sus axiomas. Sin embargo, si de esto se quiere derivar la *efectiva numerabilidad* de los teoremas (como normalmente se hace) hay que dar por descontado que las reglas deductivas del Sistema sean sólo las clásicas o, más en general, que las premisas *propias* de la Teoría sean sin ambigüedad y mecanizables. He aquí por qué nuestra alternativa, perfectamente equivalente para los Sistemas de interés común, parece más general.

Por otra parte, la decidibilidad de los axiomas es una condición habitual en los comunes Sistemas axiomáticos clásicos formales: *PA*, *TFR* y el mismo *TC*, son *ef. ax.* Este último hecho podría empujar apresuradamente hacia conclusiones muy optimistas sobre la Matemática entera, pero es necesario recordar el problema de la *no fidelidad* general de las representaciones en *TC*.

Sin embargo, antes de profundizar en el asunto, parece oportuno ofrecer un ejemplo concreto de Sistema *ef. ax.*, con el fin de verificar de forma tangible sus propiedades. Proponemos un ejemplo sencillo, pero al mismo tiempo general. Consideremos un Sistema con una infinidad numerable de axiomas,  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  y dos reglas de deducción perfectamente mecanizables, como las clásicas,  $D_1$  y  $D_2$ .

Supongamos que  $D_1$  sea aplicable a cada axioma o teorema individual  $T$ , produciendo siempre un nuevo teorema  $Z$ . Indicaremos este razonamiento deductivo con:  $D_1(T) \rightarrow Z$ . En cambio  $D_2$ , imitando el *modus ponens*, opere sobre cada pareja de distintos axiomas y/o teoremas, también produciendo siempre un nuevo teorema. Supondremos además que  $D_2(X, Y) = D_2(Y, X)$ , es decir, que a  $D_2$  no le importe el orden de la pareja a la que se aplica, como para el *modus ponens*.

Ante todo, busquemos un criterio mecánico para generar todas y solas las demostraciones. Es obvio que no podemos proceder de un modo arbitrario. Por ejemplo, la idea de enumerar primero todas las demostraciones que usan  $D_1$  y luego las que usan  $D_2$ , no es buena, ya que el primer grupo es infinito; encontraríamos la misma dificultad si decidiésemos emplear  $A_2$  sólo tras haber agotado todas las demostraciones que usan  $A_1$ . Pero el hecho de que algunos criterios para enumerar la infinidad numerable de los elementos de una colección fallen, no quiere decir que tengan que fallar todos. Una buena idea sería la de proceder por “niveles de deducción”. Suponiendo de poder disponer solamente de  $A_1$ , apliquemos ambas reglas deductivas. Ya que la  $D_2$  no se puede aplicar, obtenemos sólo:

$$D_1(A_1) \rightarrow T_1$$

que completa el primer “nivel” de deducción. Fíjense que en este ejemplo, los axiomas no son teoremas; pero eso no limita de ningún modo la generalidad. El segundo “nivel” corresponderá a todas las posibles *nuevas* deducciones obtenibles de  $A_1$ ,  $T_1$ , más el siguiente axioma,  $A_2$ . Esto es:

$$D_1(T_1) \rightarrow T_2$$

$$\begin{aligned}
D_1 (A_2) &\rightarrow T_3 \\
D_2 (A_1, T_1) &\rightarrow T_4 \\
D_2 (A_1, A_2) &\rightarrow T_5 \\
D_2 (T_1, A_2) &\rightarrow T_6
\end{aligned}$$

El tercer “nivel” considerará todas las posibles, nuevas, deducciones obtenibles de los axiomas y teoremas de los que ahora disponemos, más el siguiente axioma  $A_3$ :

$$\begin{aligned}
D_1 (T_2) &\rightarrow T_7 \\
\text{.....} & \\
D_1 (T_6) &\rightarrow T_{11} \\
D_1 (A_3) &\rightarrow T_{12} \\
D_2 (A_1, T_2) &\rightarrow T_{13} \\
\text{.....} & \\
D_2 (A_1, T_6) &\rightarrow T_{17} \\
D_2 (A_1, A_3) &\rightarrow T_{18} \\
D_2 (T_1, T_2) &\rightarrow T_{19} \\
\text{.....} & \\
D_2 (T_1, T_6) &\rightarrow T_{23} \\
D_2 (T_1, A_3) &\rightarrow T_{24} \\
D_2 (A_2, T_2) &\rightarrow T_{25} \\
\text{.....} & \\
D_2 (A_2, T_6) &\rightarrow T_{29} \\
D_2 (A_2, A_3) &\rightarrow T_{30} \\
D_2 (T_2, T_3) &\rightarrow T_{31} \\
\text{.....} & \\
D_2 (T_2, T_6) &\rightarrow T_{34} \\
D_2 (T_2, A_3) &\rightarrow T_{35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2(T_3, T_4) &\rightarrow T_{36} \\
D_2(T_3, T_5) &\rightarrow T_{37} \\
D_2(T_3, T_6) &\rightarrow T_{38} \\
D_2(T_3, A_3) &\rightarrow T_{39} \\
D_2(T_4, T_5) &\rightarrow T_{40} \\
D_2(T_4, T_6) &\rightarrow T_{41} \\
D_2(T_4, A_3) &\rightarrow T_{42} \\
D_2(T_5, T_6) &\rightarrow T_{43} \\
D_2(T_5, A_3) &\rightarrow T_{44} \\
D_2(T_6, A_3) &\rightarrow T_{45}
\end{aligned}$$

Se obtienen 39 nuevos teoremas. El cuarto “nivel” operará sobre 49 entre axiomas y teoremas y producirá unos 1200 nuevos teoremas. El quinto, más de 720000; el sexto una cantidad ¡del orden de centenas de miles de millones! Este simple ejemplo es suficiente para hacernos comprender el carácter ideal, puramente lógico, de nuestro tema. Las máquinas pueden ayudar a los Matemáticos y ya lo han hecho en varias circunstancias (como en la demostración del teorema “de los cuatro colores”<sup>79</sup>); pero no es realista considerar que los puedan sustituir en la obtención de los teoremas de un Sistema axiomático *ef. ax.* de lo más común<sup>80</sup>.

Fíjense en cómo el método descrito produzca todas las posibles demostraciones y, por ende, todos los posibles teoremas.

---

<sup>79</sup> Una presentación divulgativa en K. Appel y W. Haken: “*Il problema dei quattro colori*”.

<sup>80</sup> Al menos, en base a las conocidas leyes físicas. Considerando una máquina que trabaje, en paralelo, con todas las partículas del universo y que realice cada deducción en el tiempo que tarda la luz en atravesar un protón, se necesitarían unos  $7 \cdot 10^{67}$  años de trabajo para completar el décimo nivel de deducción del Sistema del ejemplo (que tiene unas  $3 \cdot 10^{178}$  nuevas demostraciones). ¡Sin haber llegado todavía a involucrar  $A_{11}$ !

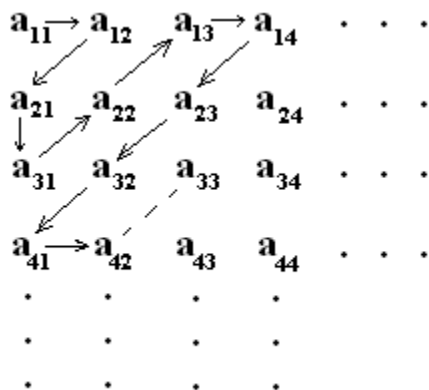
En efecto, el método procede tanto “hacia atrás”, es decir, considerando los teoremas ya producidos, como “hacia delante”, cuando añade nuevos axiomas. No es el único, como pronto veremos. Por otra parte, dentro de poco describiremos un criterio general muy intuitivo para enumerar todos y solos los elementos de una unión infinita numerable de conjuntos infinitos numerables.

Por cierto, las demostraciones se podrían escribir de manera que sólo mencionen los axiomas y la conclusión, es decir de forma *extensa* (ap. I.9); entonces, si los axiomas son decidibles, también las demostraciones los son (y viceversa). En efecto, el criterio general *de decisión* de las demostraciones, puede consistir en un control de tipo sintáctico sobre la prefijada cadena de caracteres: que no haya símbolos no admitidos, que haya el mismo número de paréntesis abiertos que cerrados, que  $D_1$  y  $D_2$  operen, respectivamente, con uno y dos enunciados distintos, que todos los enunciados mencionados explícitamente sean axiomas y, para terminar, que el teorema final sea la cadena correctamente producida por las operaciones mecánicas que reproducen el razonamiento; la penúltima condición requiere precisamente la decidibilidad de los axiomas. Entonces, un método alternativo para generar todas y solas las demostraciones podría ser simplemente el de enumerar, en orden, todas las cadenas alfa-numéricas y luego seleccionarlas con el descrito control sintáctico. Naturalmente, sería mucho menos eficiente que el método anterior, porque se descartarían muchísimas cadenas.

Por lo que respecta al conjunto de los teoremas, sin embargo, no podemos concluir su decidibilidad, a pesar de que los procedimientos descritos los enumeren todos y solos. De hecho, los teoremas son cadenas en las que, en general, ninguna propiedad está relacionada con la posición en la lista generada

por uno de los dos criterios referidos. Por ejemplo, no es seguro que  $T_{42}$  sea una cadena más larga que  $T_{41}$  y más corta que  $T_{43}$ . Consideremos como prueba, el *modus ponens*, que de “ $A$ ” y “ $A \rightarrow B$ ” deduce “ $B$ ”. Nada prohíbe que “ $B$ ” sea una cadena mucho más pequeña que “ $A$ ”; si es así, la máquina, tras haber demostrado el largo teorema “ $A \rightarrow B$ ”, generaría el corto “ $B$ ” (suponiendo que antes hubiese deducido “ $A$ ”). Es decir, “ $A \rightarrow B$ ” y “ $B$ ” serían sucesivas en la lista, aunque sus longitudes sean muy diferentes. Como en el caso de la longitud, ninguna otra propiedad, en principio, nos podría guiar en la búsqueda del teorema en la lista, ni inducirnos a descartar el tener que comprobar, en teoría, infinitos elementos. En otras palabras, parece que el único método mecánico general para verificar si un enunciado determinado es un teorema, es la comparación con la lista  $T_1, T_2, T_3, \dots$ . Pero dicho procedimiento sólo concluirá si realmente se trata de un teorema. Si no lo es, no podrá concluirlo, porque no terminará.

El ejemplo descrito nos ha mostrado cómo una unión de conjuntos infinitos numerables puede ser numerable; no obstante, quedan dudas sobre su validez general, ya que en nuestro caso lo hemos concluido gracias a una enumeración “astuta” que no es dicho que deba existir siempre. Sin embargo, tiene validez general: *la unión de una infinidad numerable de conjuntos infinitos numerables siempre es numerable*. Para llegar a esa conclusión, sean  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  esos conjuntos y  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots$  los elementos de  $A_1$ : el primer índice se refiere al conjunto. Haciendo lo mismo para los otros conjuntos, podemos representar los elementos de la unión de todos los conjuntos, mediante la matriz infinita:



Se puede apreciar que el movimiento de las flechas, perfectamente mecanizable (llamado “del serpiente”), es capaz de enumerar todos y solos los elementos: ninguno se le puede escapar<sup>81</sup>. Esta deducción, a la que hemos llegado a través de una argumentación convincente pero informal, puede demostrarse formalmente en *TC* a partir del *axioma de elección*. Por lo tanto, en este caso, el axioma de elección nos ayuda a deducir formalmente una propiedad “visual” absolutamente indiscutible, como es el movimiento “del serpiente”.

Sin embargo, ya avisamos que no todas las consecuencias de dicho axioma son igualmente razonables. Aprovechamos para mencionar una famosa consecuencia “paradójica” suya, conocida como la “paradoja” de Banach-Tarski:

es posible subdividir una esfera (euclidiana de tres dimensiones) en un

---

<sup>81</sup> No es el único; también valdría, por ejemplo, el siguiente movimiento de los “lados cuadrados”:  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{23}, a_{13}, a_{14}, a_{24}, \dots$  que recorre los lados de las submatrices cuadradas.

número finito de partes tales que, mediante traslaciones y rotaciones isométricas, se puedan recomponer en **dos** esferas idénticas a la primera.

Una especie de multiplicación de los panes y los peces. El teorema tiene carácter no constructivo: no describe explícitamente la descomposición cuya existencia afirma. De todos modos, está claro que a tales porciones no se les puede asociar unas *medidas* numéricas correspondientes a aquellas del mundo físico. En efecto, como otras veces, no hay nada realmente paradójico: “sólo” el hecho de que, precisamente, ningún concepto físico de “medida” puede definirse para *cualquier tipo* de porción tridimensional. De esto también sigue que no es posible definir ninguna medida, invariante para traslaciones, para todo subconjunto de la recta real<sup>82</sup>. Aunque permanece indiscutible la “locura” del resultado, estas consecuencias, a pensarlo bien, no son tan catastróficas como muchos afirman. El hecho tranquilizador es justo que estas porciones no medibles implicadas en la “multiplicación”, y no concebidas por nuestra intuición común, no son concretamente ejemplificadas ni en la demostración ni en las propiedades de interés ordinario. Desde siempre la Matemática nos acostumbra a la existencia de objetos de dicha naturaleza: parece inevitable que éstos deban añadirse a los objetos más intuitivos que se pretendía describir exclusivamente. En el fondo, basta con la aceptada y habitual interpretación analítica de la Geometría para obtener consecuencias del mismo modo “paradójicas”, tanto en el plano como en el espacio. Por ejemplo, si *siempre* se admite la posibilidad de asignar una masa no nula y no infinitesimal a cada segmento *propio* (es decir, que no se reduzca a un punto), se concluiría que un rectángulo *propio* (es decir, que no se reduzca a un segmento) tiene masa infinita, ya que contiene infinitos

---

<sup>82</sup> G. Vitali: “*Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*”.



segmentos *propios* distintos. Un análogo absurdo se alcanza si suponemos poder conferir *siempre* una masa nula y no infinitesimal a cada rectángulo *propio*: un paralelepípedo *propio* (o sea, que no se reduzca a un rectángulo), como contiene infinitos rectángulos *propios* distintos, tendría igualmente masa infinita. ¿Qué particularidad especial tendría el caso tridimensional para que esto no se repita para un paralelepípedo *propio* (es decir, que no se reduzca a un rectángulo)? Parece que las razones estarían ligadas sólo a nuestra incapacidad *física* de observar más dimensiones espaciales; pero dicha limitación, indudablemente, no está relacionada con la Teoría geométrica en sí. En concreto, la *medida* de un paralelepípedo propio también debe ser considerada como infinitesimal en el caso en que se quiera que un hiper-paralelepípedo (de cuatro dimensiones) *propio* (es decir, que no se reduzca a un paralelepípedo) tenga la *medida* análoga (de masa, de volumen, etc.) finita. Y nótese que una esfera infinitesimal se escaparía a la “paradoja” de Banach-Tarski. Luego, si esta última propiedad no se desea (por ejemplo para hacer que el espacio geométrico resulte más afín al físico), esto debería imponerse explícitamente en el seno del Sistema geométrico; pero, como normalmente no se hace nada parecido, tampoco parece sensato pretender que a cada paralelepípedo propio se le pueda *siempre* asociar una *medida* no nula ni infinitesimal.

Quizás el rol del axioma de elección en la “paradoja” de Banach-Tarski sea sencillamente el de “detonador” del carácter inimaginable y no físico del continuo. Como otras veces, la molestia que representan estos resultados contrarios a la intuición, tan sólo revela la presunción de que la Teoría matemática adoptada reproduzca con exactitud el mundo real que a través de ella pretendíamos representar. Cuando las quejas prevalezcan sobre las aprobaciones, convendrá modificar el

### III.3. La Tesis de Church-Turing

Busquemos ahora la forma de traducir en lenguaje formal el concepto de *procedimiento mecánico*. Consideremos una máquina genérica que con los  $n$  inputs  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , haya producido, tras detenerse (lo cual suponemos) los  $m$  outputs  $o_1, o_2, \dots, o_m$ . Recordando que cada  $i_i$  y  $o_i$  es una cadena finita de los finitos caracteres alfanuméricos, podemos asignar un *código numérico* a cada símbolo y representar cada cadena mediante un número natural. Pongamos un ejemplo concreto: admitamos que la máquina sea una videocámara fija, mandada mediante palabras, con dos inputs  $i_1$  e  $i_2$ . La máquina sabe obedecer a órdenes como “acción” y “enfocar a 7 metros” asignados a  $i_1$  e  $i_2$ . Establezcamos, por simplicidad, los siguientes caracteres alfanuméricos sabidos: 29 alfabéticos minúsculos, 10 numéricos, coma y espacio en blanco (para separar las palabras). En total, pues, 41 símbolos (ciertamente, en un caso real, no hay dificultad para incluir muchos otros más, como las mayúsculas, los símbolos de operaciones, la puntuación, etc.). A continuación, establezcamos el siguiente código de dos cifras: “01” para “a”, “02” para “b”,... , “29” para “z”, “30” para “0”, “31” para “1”,... , “39” para “9”, “40” para “,” y “41” para el espacio en blanco “ ”. Así,  $i_1$  será representado por la cadena “01030310...”, mientras  $i_2$  por “06160718...”. Como la coma también tiene un código, finalmente podremos *codificar con un solo número toda la secuencia de los ingresos* “ $i_1, i_2$ ”: “01030310...4006160718...”. En definitiva, a través de un código oportuno, el ingreso total, es decir toda la secuencia de los inputs, se puede representar mediante un solo número natural; lo mismo se repite, análogamente, para la secuencia de

todos los outputs. Toda la información contenida en los inputs/outputs es reproducible a partir del número, incluso el mismo número de inputs/outputs: en nuestro caso, la secuencia “40” nos indica, en efecto, el inicio de un nuevo input (obviamente, si se quiere usar el símbolo “,” dentro de un input/output, se podrá usar un nuevo carácter distinto, como “/”, de código “42”, para separar los diferentes inputs/outputs). Muchos de los lectores sabrán que, en efecto, existe un código numérico estándar de este tipo, llamado ASCII; el cual, además, para simplificar las técnicas de cálculo en los comunes ordenadores, representa cada carácter a través de un código numérico binario. De hecho, dos solas cifras, por ejemplo “0” y “1”, son suficientes para cualquier codificación. De todos modos, para nuestra perspectiva, es decir para el aspecto puramente lógico, esta simplificación no es necesaria.

Por lo visto, *cada procedimiento mecánico puede considerarse como una elaboración de un número natural de ingreso que, si finaliza, finaliza con la generación de un número natural de salida.* De primeras, este indisoluble vínculo de las máquinas con los números naturales podría sorprender, pero en realidad no hay ningún misterio: sólo es la consecuencia de haber pedido que tanto los inputs como los outputs sean de longitud finita, de número finito y representables a través de la combinación de un número finito de símbolos. Como ejemplo hipotéticamente contrario, el lector podría pensar que, realmente, no hay dificultad para enviar en ingreso a un ordenador ciertos números reales, como  $\sqrt{3}$  por ejemplo; la máquina, según parece, sabrá trabajar correctamente con ellos. Además, sabrá proporcionar en output, como respuesta a oportunos programas, números reales como  $\pi$  o  $\sqrt{52}$ . Lo que se está pasando por alto es precisamente que no se trata de verdaderos números reales, sino de símbolos o secuencias de símbolos (cuya

codifica en todo caso es un número natural) que *representan* números reales. En particular, representan *operaciones* capaces de obtener cuantas cifras se deseen del número en cuestión; pero, en todo caso, cualquier máquina trabajará siempre y sólo con un número *finito* de ellas, es decir, con números racionales (mejor dicho, con los números naturales biunivocamente correspondientes a éstos). Se trata, pues, de una técnica que no puede representar a todos los números reales, sino un número despreciable de ellos ( $\aleph_0$  respecto a  $2^{\aleph_0}$ ). En efecto, todas las combinaciones posibles de los símbolos alfanuméricos (o, más en general, de una infinidad numerable de caracteres) sólo son numerables. En base a lo que ya hemos observado, únicamente recurriendo a semántica ineliminable podríamos realizar (en principio, no de hecho) una denotación alfanumérica de todos los números reales; pero ninguna máquina, por definición, podría descifrarla, asignando valores diferentes a una misma cadena de caracteres.

En definitiva, cualquier elaboración mecánica consiste, desde una perspectiva lógica, en una operación aritmética (es decir, que se efectúa sobre números naturales, para producir, en caso de que se detenga, otro número natural), en la que no influyen comportamientos casuales ni intervenciones que requieran originalidad, inventiva o una inteligencia especial. Realmente parece que se trate de algo que puede llevarse a cabo dentro de una Teoría aritmética suficientemente potente.

El *programa* de la máquina es una lista finita de *instrucciones*; podemos partir de la sencilla hipótesis de que cada instrucción básica sea traducible en un número finito de operaciones de suma y producto de números naturales, más la posibilidad de guardar el resultado en una memoria que puede ser leída por siguientes instrucciones. Tal archivación se llama concisamente *asignación* (se sobrentiende *en memoria*). La máquina sigue las instrucciones

una detrás de otra y, en nuestras hipótesis básicas, siempre termina. La señalización de la parada es precisamente la última instrucción. ¿Qué más puede hacer una máquina? Hasta el momento es equivalente a una calculadora de bolsillo (de las más sencillas, no programable) que siempre contesta algo (posiblemente “error”) cuando se pulsa “=”. Pero una máquina puede hacer algo más. Una evolución posible se tendría, por ejemplo, haciendo que la máquina pudiese poner en marcha a otra; ya que esta última podría poner en marcha la primera, está incluido también el caso de que una máquina ponga en marcha a sí misma. Claramente, esta posibilidad permite que la elaboración no termine. Para generalizar al máximo, basta con suponer que la máquina pueda volver a ejecutar una parte de las instrucciones de su mismo programa (si una máquina apela a otra máquina, podemos considerar que se trate de una sola máquina: aquella constituida por ambas). Si el número de veces en que este grupo de instrucciones debe repetirse está establecido con exactitud, entonces, desde el punto de vista lógico, esta evolución es sólo una simplificación del caso precedente y el cálculo siempre termina. Por ejemplo, una instrucción que dijese “repetir el grupo de instrucciones comprendido entre la número 7 y la número 29, 2300 veces” lo único que hace es acortar un programa que de otro modo sería muy largo; pero, desde el punto de vista lógico, no hay un verdadero progreso. En cambio, la verdadera novedad se obtiene cuando el número de ciclos que se debe efectuar no es conocido a priori; esto se puede conseguir a través de una *iteración condicionada*. Por ejemplo, consideremos un programa que, dados dos números  $n$  y  $m$ , calcula el natural más pequeño  $k$  tal que  $n \cdot k = m$ . El programa sería el siguiente:

1. Introduce en la memoria  $A$  el valor numérico del input  $n$
2. Introduce en la memoria  $B$  el valor numérico del input  $m$

3. Introduce en la memoria  $C$  el valor numérico  $0$
4. Multiplica el valor numérico de  $A$  por el de  $C$  e introdúcelo en la memoria  $D$
5. Si el valor numérico de  $D$  es igual al de  $B$ , salta a la instrucción número 8. Si no, continua con la instrucción siguiente
6. Suma 1 al valor *numérico* de  $C$  y vuelve a introducirlo en  $C$
7. Salta a la instrucción *número* 4
8. Imprime en salida “la respuesta es” seguida del valor numérico de  $C$
9. Termina

Como se puede constatar, el programa proporciona siempre la respuesta exacta si  $m/n$  es un número natural. Si no es así, el grupo de las instrucciones 4-7 se repite, en teoría, hasta el infinito. “En teoría”, porque tras un cierto tiempo la máquina, si está bien configurada, sabrá indicar, en salida, que se le está requiriendo un cálculo demasiado grande que ya no puede efectuar. En efecto, los valores de  $D$  y de  $C$  crecen indefinidamente y cada máquina real tiene límites en la representación de los números. Pero ésta es sólo una circunstancia del ejemplo: no siempre los ciclos infinitos provocan errores del tipo “demasiado grande”, “demasiado pequeño” o cualquier otro que la máquina sepa reconocer. Por ejemplo, para limitar el tamaño de los números, podríamos introducir entre las instrucciones 6 y 7 otra nueva: “si el valor numérico de  $C$  es mayor de 1000, asigna a  $C$  el valor numérico 1”. Ahora, si la máquina puede trabajar con números grandes al

menos hasta  $1000 \cdot n$ , ciertamente continuará hasta el infinito (mientras le quede energía o no se rompa...).

Este ejemplo es mucho menos trivial de lo que parece, porque se puede generalizar fácilmente: el mismo esquema es capaz de encontrar, si existe, el valor mínimo de  $k$  tal que una condición genérica  $C(n_1, n_2, \dots, n_p, k)$ , del todo arbitraria, sea satisfecha. Al variar de la condición, se obtiene una clase de problemas que, como hemos observado, enriquece la tipología del cálculo, aun con el posible inconveniente de ciclo infinito, o sea de que la máquina nunca se pare; el cual representa precisamente el caso en que dicho mínimo no existe.

Ahora volvamos a preguntarnos si la máquina podría hacer algo más. La convicción que se ha alcanzado es que no puede hacer *nada más* (aparte de cálculos que hagan uso de la señalada generación de números casuales, de la cual hablaremos más adelante). Esta conclusión empírica, llamada *Tesis de Church-Turing*, está corroborada principalmente por los siguientes hechos:

1. Existen *distintos* modelos<sup>83</sup> elementales, definibles rigurosamente, representativos de la máquinas (*funciones recursivas, máquina de Turing,  $\lambda$ -cálculo, máquina RAM* y otros) y todos son equivalentes entre ellos (y equivalentes al esquema que hemos trazado sintéticamente).
2. De éstos, el modelo más famoso, la *máquina de Turing*, se obtuvo con el *objetivo* de simular la actividad de un *ser*

---

<sup>83</sup> Evidentemente, aquí nos referimos al significado tradicional de “modelo matemático”: un conjunto de proposiciones y condiciones matemáticas que intentan reproducir el comportamiento de una estructura real determinada.

*humano* (el ser más imaginativo; al menos, desde el punto de vista humano...) empeñado a llevar a cabo cálculos con un criterio de tipo determinista, sin que la *Tesis de Church-Turing* aún se hubiese formulado.

3. Todos los *intentos* por ampliar el campo de la calculabilidad, hasta ahora han fracasado.

Una línea de investigación que generaliza la *máquina de Turing* revela que una máquina que admitiese una *acción a distancia* instantánea podría transgredir la *Tesis de Church-Turing*<sup>84</sup>. Como la mecánica cuántica admite este principio<sup>85</sup>, se podría pensar que un ordenador cuántico podría infringir la *Tesis de Church-Turing*. Pero, aunque la cuestión no puede darse por cerrada, ninguno de los actuales modelos cuánticos de cálculo viola la Tesis. Retomaremos más adelante la discusión sobre la validez de la *Tesis de Church-Turing*, que como fácilmente se puede imaginar, ha provocado algunas controversias.

El modelo matemático de las máquinas que más fácilmente se puede formalizar en *TC* lo constituyen las *funciones recursivas*. La definición rigurosa y detallada de estas funciones no es conceptualmente difícil ni compleja y el lector interesado podrá hallarla con facilidad en los textos de Lógica. Para nuestro

---

<sup>84</sup> R. Gandy: *Church's thesis and principles for mechanisms*, pp. 123-148.

<sup>85</sup> Por ejemplo, la observación de una partícula en un lugar determinado hace "desaparecer" instantáneamente la parte de su grupo de ondas que se encuentra en cualquier otro lugar, aunque a una enorme distancia. Una partícula, en efecto, se representa por un conjunto de ondas espaciales; a cada onda se le asocia una función espacial que representa físicamente la probabilidad de que la partícula sea realmente observada en un determinado lugar.



objetivo basta con una descripción sinóptica. Las *funciones recursivas* son todas las funciones definidas en  $N^m$  (siendo  $m$  un número natural arbitrario) y con valores en  $N$ , que se pueden asignar mediante *composición*, *recursión*, y *minimalización* a partir de ciertas funciones *elementales*, que se asumen como *recursivas* por convención. Las funciones elementales son: la *función nula* (que vale siempre 0), la *función sucesora* (o sea,  $f(n)=n+1$ ) y todas las funciones de proyección (o sea, fijada una  $m$ -upla genérica  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ , las  $m$  funciones que asocian a esa  $m$ -upla uno solo de los números de la misma  $m$ -upla; concretamente:  $f_1(n_1, \dots, n_m)=n_1, f_2(n_1, \dots, n_m)=n_2, \dots, f_m(n_1, \dots, n_m)=n_m$ ).

Se dice que una función  $f$  es obtenida por *composición* de las dos funciones  $g$  y  $h$ , sencillamente si:  $f(n)=g(h(n))$ . Se dice que una función  $f$  es definida por *recursión* a través de las dos funciones  $g$  y  $h$ , si se define mediante el siguiente esquema informal:

$$\begin{aligned} f(0, n_1 \dots n_m) &= g(n_1 \dots n_m) \\ f(n+1, n_1 \dots n_m) &= h(n, f(n, n_1 \dots n_m), n_1 \dots n_m) \end{aligned}$$

Formalmente, es la definición implícita:

$$(f(0, n_1 \dots n_m) = g(n_1 \dots n_m)) \wedge (\forall n \in N (f(n+1, n_1 \dots n_m) = h(n, f(n, n_1 \dots n_m), n_1 \dots n_m)))$$

Como ejemplo sencillo de las muchas funciones comunes que pueden definirse por *recursión*, podemos citar la función exponencial  $m^n$ :

$$\begin{aligned} m^0 &= 1 \\ m^{n+1} &= m^n \cdot m \end{aligned}$$

Pero, ¡incluso el producto aritmético “ $\cdot$ ” puede definirse por *recursión* de la función suma “ $+$ ”! Por eso no es necesaria una función producto *elemental*.

Finalmente, se dice que la función  $f$  es definida por *minimalización* a partir de la función  $g$ , cuando:

$$f(n_1, \dots, n_m) = \text{mínimo valor de } n \text{ tal que: } g(n_1, \dots, n_m, n) = 0$$

Formalizada correctamente en lenguaje de *TC*, esta condición sería:

$$(f(n_1, \dots, n_m) = n) \leftrightarrow (\exists n \in N((g(n_1, \dots, n_m) = 0) \wedge (\forall m \in N(((m \neq n) \wedge (g(n_1, \dots, n_m, m) = 0)) \rightarrow (n < m))))))$$

en la que se usa el predicado “ $<$ ”. Póngase atención en cómo esta condición corresponda exactamente al esquema precedente de *iteración condicionada*: aquí se usa  $n$  en lugar que  $k$  y la condición  $g(n_1, \dots, n_m, n) = 0$  es la antes denominada  $C(n_1, n_2, \dots, n_p, k)$ . En efecto, con la *minimalización* se formaliza también el caso de *no parada* de la máquina: a éste corresponde el caso en que dicho mínimo,  $n$ , no existe y a la función  $f(n_1, \dots, n_m)$  no se le puede asociar un valor numérico. En cambio, cuando  $n$  existe, representa el código del conjunto de los outputs, incluido el que señala la parada. Comúnmente, cuando  $n$  no existe, se dice que la función “no está definida”, pero con esto no se debe entender que no sea representable en lenguaje matemático, ni que no represente el cálculo de una máquina: por lo visto, representa un cálculo mecánico que no termina. Como ejemplo concreto, consideremos la función  $f$  definida por *minimalización* a partir de la función  $g(4, m, n) = m \cdot n - 4$  (de hecho, también la sustracción puede definirse recursivamente). Como la  $g$  es recursiva,

también la  $f$  lo es:

$$f(4, m) = \text{mínimo valor de } n \text{ tal que: } m \cdot n - 4 = 0$$

Observando que  $n=4/m$ , concluimos que: a) si existe un valor de  $n$  que satisfaga la condición, éste es único; b)  $n$  existe sólo para los tres valores de  $m$ : 1, 2 y 4. En todos los demás casos, por ejemplo si  $m=17$ ,  $n$  no existe y la función  $f$  “no está definida”; pero esto no significa que la expresión  $f(4, 17)$  no tenga significado. En efecto, su definición implícita se obtiene particularizando para  $m=17$  la definición formal de la  $f$ :

$$(f(4,17)=n) \leftrightarrow (\exists n \in N((17 \cdot n - 4 = 0) \wedge (\forall p \in N(\dots \rightarrow (n < p))))))$$

Luego, que dicho  $n$  no exista, es decir que el enunciado a la derecha de “ $\leftrightarrow$ ” sea falso, es un hecho distinto que, cierto, no quita significado a la expresión. Naturalmente, también se puede decidir indicar la  $f$  con  $4/m$ , obteniendo que tal denotación tenga significado para cada  $m$ , aunque sólo en tres casos represente un número natural.

Como ya dijimos, se puede metademostrar que el uso de cualquier otro modelo capaz de representar los cálculos de una máquina cualquiera es equivalente al uso de las funciones recursivas. Esta metademostración consiste en el reconocimiento de que la representación mediante funciones del modelo alternativo, por ejemplo, de la *máquina de Turing*, conduce a un tipo de funciones equivalentes a las funciones recursivas; se trata, pues, de una conclusión que no deja lugar a discusiones. Disponiendo de las funciones recursivas, la *Tesis de Church-Turing* se expresa afirmando que: a) la elaboración de una máquina cualquiera es representable a través de una función recursiva; b) dada una función recursiva cualquiera, siempre

existe una máquina que reproduce efectivamente dicha función. Respecto al segundo punto no hay ninguna duda: tal como se han definido las funciones recursivas, cualquiera debe reconocer que siempre es posible programar una máquina para que pueda reproducirlas. Es bastante fácil, teóricamente, escribir un programa para el cálculo mecánico de las funciones *elementales* y de las que se pueden obtenerse de ellas mediante *composición* y *recursión* (tómese como ejemplo la función exponencial). También hemos visto, de forma concreta, la realización mecánica de una *minimalización*. En general, las dificultades en la programación se deben sobre todo a la complejidad de la función que se tiene que representar (pensemos por ejemplo en la variedad de efectos diferentes que un programa informático común debe proporcionar como respuesta a los inputs del usuario). Diríamos, por lo tanto, que el punto b) puede considerarse un metateorema indiscutible. En cambio, es el punto a) el que da lugar a discusiones; pero de eso hablaremos más adelante.

Es necesario precisar que el entero programa de una máquina, al ser una sucesión de instrucciones representables mediante funciones recursivas, también es representable a través de una única función recursiva (como se deduce fácilmente de las propiedades que definen las funciones recursivas). En consecuencia, el genérico programa de una máquina cualquiera se puede representar también a través de un número finito de caracteres alfanuméricos: en última instancia, precisamente a través de la definición de la función recursiva que le corresponde.

Pasemos ahora a traducir tanto la *efectiva numerabilidad*, como la *decidibilidad* de una colección, en términos de funciones recursivas. En *TC*, diremos que un conjunto de números naturales  $L$  es *recursivamente numerable* si existe una

función recursiva  $f_L$  tal que:

$$\forall n \in N((n \in L \rightarrow f_L(n)=1) \text{ e } (n \notin L \rightarrow \text{not } \exists m \in N(m=f_L(n))))$$

Informalmente:

$$f_L(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \in L \\ \text{“no definida”}, & \text{si } n \notin L \end{cases}$$

El valor numérico “1” (al que se le asigna normalmente el valor semántico “verdadero”) no es importante y puede ser sustituido por cualquier otro; lo esencial es que a la  $f_L(n)$  le corresponda un valor numérico (o sea que “esté definida”) para cada  $n$  que pertenezca a  $L$ , mientras *no* debe asociar ningún valor si  $n$  pertenece a  $L$ .

Sin embargo, un conjunto de números naturales  $R$  se dice *recursivamente decidable* (o sencillamente *recursivo*<sup>86</sup>), si existe una función recursiva  $f_R$  tal que:

$$\forall n \in N((n \in R \rightarrow f_R(n)=1) \text{ e } (n \notin R \rightarrow f_R(n)=0))$$

De nuevo, los valores numéricos “0” y “1” no son importantes: basta con que sean distintos. Informalmente:

$$f_R(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \in R \\ 0, & \text{si } n \notin R \end{cases}$$

---

<sup>86</sup> Que es la elección común, en realidad un poco ambigua: de hecho, la Tesis de Church-Turing incita a confundir los términos *recursivo* y *mecanizable*. Pero, para un conjunto, este último adjetivo no implica, en general, *decidibilidad*: un Sistema sólo *efectivamente numerable* es, en cierto sentido, igualmente *mecanizable*.

Si un conjunto es *recursivamente decidible*, también es *recursivamente numerable*. De hecho, siempre se puede considerar una función recursiva, distinta de la que caracteriza la *recursiva decidibilidad*, que coincide con ésta si  $n \in R$  y que no esté definida si  $n \notin R$  (en nuestro caso, por ejemplo, puede ser la función  $1/f_R(n)$ ).

Ahora, sea  $P$  una colección cualquiera de proposiciones alfanuméricas *efectivamente numerable*. Codificando mediante números naturales los símbolos alfanuméricos, se puede hacer que a cada proposición le corresponda un número natural; y, por lo tanto, a  $P$  un conjunto de números naturales. Este último conjunto  $L$ , rigurosamente formalizado en  $TC$ , debe ser *recursivamente numerable*. En efecto, por hipótesis, existe una máquina que con input todos los números naturales, es capaz de producir un listado de todos y solos los números que son códigos de proposiciones de  $P$ , aunque, en general, sin saber *excluir* ninguno. Entonces, por la Tesis de Church-Turing, debe existir una función recursiva que asuma un valor constante  $v$  (al cual podría darse el significado de “sí, pertenece a  $L$ , o sea es el código de una proposición de  $P$ ”) en correspondencia de estos mismos números, mientras en correspondencia de los otros números naturales asumirá valores distintos de  $v$  o no estará definida. Finalmente, queda sólo construir otra función recursiva que respete el valor  $v$ , mientras, discriminando eventuales valores distintos de  $v$ , resulte no definida siempre que  $n \notin L$ .

También vale el viceversa: si el conjunto de naturales que representa, en la codificación, la colección  $P$  es *recursivamente numerable*, entonces la colección  $P$  es *efectivamente numerable*. De hecho, basta considerar una máquina que para los valores de  $n$  tales que la función recursiva  $f_L(n)$  tome un valor finito (no necesariamente 1) imprima la proposición de código  $n$ . Ésta, que

existe por la Tesis de Church-Turing, engendrará todas y solas las proposiciones de  $P$ .

Análogamente, se puede concluir fácilmente que si  $P$  es una colección cualquiera de proposiciones alfanuméricas *decidible*, existe en  $TC$  un conjunto *recursivamente decidible* que le corresponde según la codificación y viceversa.

En otras palabras,  $TC$  consigue reproducir, sirviéndose de las funciones recursivas, la *efectiva numerabilidad* y la *decidibilidad* de una colección cualquiera de proposiciones: el resultado de la Tesis de Church-Turing es la de hacer que los términos “*recursivamente*” y “*efectivamente*” sean equivalentes.

Para terminar, consideremos un genérico Sistema clásico  $S$  representable *fielmente* en  $TC$ . Entonces, por definición, todos sus teoremas son reproducibles y reconocibles en  $TC$ , mediante correspondientes teoremas de  $TC$ . Por la efectiva axiomatizabilidad de  $TC$  se tiene, pues, que los teoremas de  $S$  son *efectivamente numerables*. Esto, en general, no implica que  $S$  sea *ef. ax.*: de hecho, para los axiomas, como para los teoremas, sólo podemos deducir que son *efectivamente numerables* (no necesariamente *decidibles*). Por otra parte, en un Sistema en el que los axiomas son sólo efectivamente numerables (lo que no es incompatible con el hecho de que sean *distinguibles*, según la *buena definición*), las demostraciones también lo son (repetiendo la metademostración del apartado I.9) y, por lo tanto, también los teoremas. Así que este caso, efectivamente algo inusual, es igualmente bastante “bueno”, porque, de nuevo, todos y solos los teoremas de la Teoría se pueden obtener mecánicamente. Claramente, un caso particular, común e importante de Sistemas *fielmente* representables en  $TC$ , es el de los Sistemas *ef. ax.*

También vale el contrario: si  $S$  es un Sistema clásico cuyos teoremas – o bien axiomas, por lo visto – son *efectivamente*

*numerables*, entonces éste es *fielmente* representable en *TC*. No admitirlo significaría suponer, por todo lo que hemos dicho, que la teoría *TC* no puede concluir que un determinado número natural (el código de un determinado teorema de *S* no reproducible en *TC*) forma parte de un conjunto *recursivamente numerable*; lo que implicaría que la función recursiva característica de este conjunto no es representable en *TC*: absurdo, por definición de función recursiva.

En definitiva, como consecuencia de la Tesis de Church-Turing, *los Sistemas que no son fielmente representables en TC son todos y solos aquellos cuyos axiomas no son efectivamente numerables*; en particular, dichos Sistemas no pueden ser, obviamente, efectivamente axiomatizables.

### III.4. Metateorema de Church-Turing

Ahora metademostraremos por absurdo que si *TC* es consistente, entonces es incompleto.

Consideremos un input *arbitrario*  $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ , que a menudo abreviaremos con  $\underline{i}$ , y pongámoslo en la entrada de una máquina *arbitraria*; considerando que el caso en que la máquina no haga nada es un caso particular de *parada* (ya que la máquina permanece en el estado de *parada*), podemos afirmar que, en todos los casos, la máquina se detiene o no se detiene; téngase en cuenta que no estamos admitiendo que sepamos descubrirlo, sino el simple hecho que la máquina se detiene o no. Llamemos  $f_R$  la función recursiva que reproduce los cálculos de la máquina y  $n$  el número natural que, según la codificación escogida, representa la entrada  $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ . Consideremos, pues, el enunciado de *TC*:  $\exists m \in N (f_R(n) = m)$ ; éste, según hemos dicho, traduce en *TC* el hecho de que la máquina se para con la entrada  $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ . Ahora recordemos que, según los *metateoremas* de s-



completitud y de corrección, debe existir al menos un “modelo” correcto de  $TC$ . Entonces tal enunciado, interpretado en dicho “modelo”, traduce *correctamente* el caso en que la máquina se para con ingreso  $i$ , mientras que su negación *correctamente* el caso en que no se para. Pero, por la supuesta completitud de  $TC$ , dicho enunciado o su negación ha de ser un teorema. Así, razonando por absurdo, deducimos que  $TC$  siempre es capaz de concluir *correctamente* si una máquina *cualquiera* se detiene o no se detiene con un input *cualquiera*. De esto no se derivaría nada de absurdo; si no fuera por el hecho de que, siendo  $TC$  mismo *ef. ax.*, existe una máquina, llamémosla  $D$ , capaz de producir todos y solos sus teoremas. Entonces, la máquina  $D$  sería capaz de reconocer si una máquina *cualquiera* se detiene o no se detiene con un input arbitrario; lo cual, en particular, también valdrá para la misma  $D$  o para cualquier máquina que contenga  $D$ . Que esto es imposible lo descubrió Turing: se trata del famoso *problema de la parada*. Para resolverlo, describamos el funcionamiento de  $D$ . Ésta máquina debe recibir en entrada el programa de la máquina genérica  $M$  (o bien, la definición de la función recursiva que representa  $M$ ) y el input genérico  $i$  aplicado a  $M$ ; con dichas entradas, debe pararse siempre, produciendo sólo una de las dos posibles respuestas, que pueden ser consideradas de forma alfa-numérica: “ $M$  se para con el input  $i$ ” y “ $M$  no se para con el input  $i$ ”. Esto confirma, para empezar, que  $D$  puede respetar la convención, admitida para todas las máquinas, de trabajar sólo con inputs y outputs alfa-numéricos. En el siguiente esquema (figura 3.1), se supone que el programa genérico de la máquina  $M$  en análisis,  $p_M$ , tenga que enviarse por el canal superior de las entradas de  $D$ , mientras que el input  $i$  de  $M$  por el inferior.

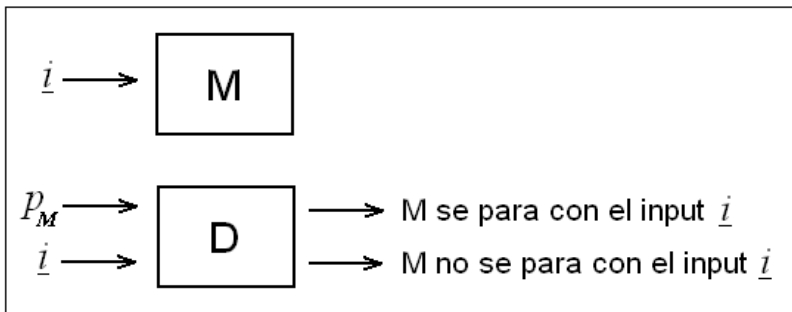


Fig. 3.1 Máquina genérica M y máquina decisional D

Construyamos ahora una máquina  $Q$ , cuyo input sea duplicado y enviado por ambos los canales de una máquina  $D$  contenida en su interior; además, la salida “se para” de la máquina  $D$  ponga en marcha un ciclo infinito (esto siempre se puede llevar a cabo: por ejemplo, la instrucción n. 8 podría ser “salta a la instrucción n. 25”, mientras que la instrucción n. 25 “salta a la instrucción n. 8”), mientras que la salida “no se para”, termine el funcionamiento de la  $Q$ . En fin, preguntémosnos qué sucede si mandamos como input a la  $Q$  su mismo programa  $p_Q$ , como en la siguiente figura 3.2:

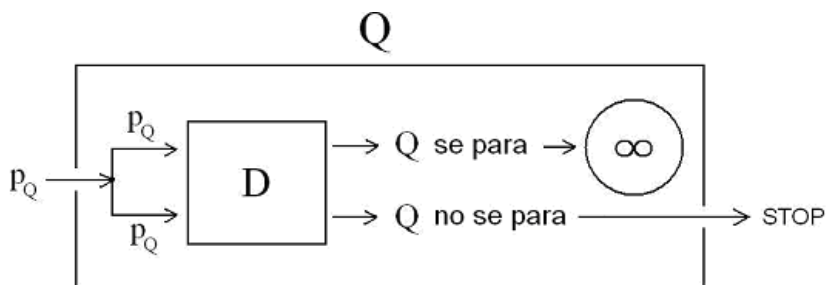


Fig. 3.2 paradoja de la parada de Turing

Si con el input  $p_Q$  la máquina  $Q$  se para, entonces  $D$ , en su interior, responderá “se para” y ejecutará el ciclo infinito; por lo tanto, la máquina  $Q$  no se para: imposible. Entonces  $Q$  no se para y  $D$ , en su interior, responderá “no se para” y entonces... la máquina  $Q$  se para: de nuevo imposible.

*Este metateorema se puede aplicar, más en general, a un cualquier Sistema clásico consistente en el que puedan ser representadas todas las funciones recursivas y cuyos axiomas sean efectivamente numerables.* La hipótesis de consistencia garantiza, dado que se trata ciertamente de un Sistema *formal*<sup>87</sup>, la existencia de un modelo correcto, por los teoremas de *s-completitud* y de *corrección*. Por lo que respecta a las funciones recursivas, naturalmente, no se exige que puedan ser definidas formalmente en la Teoría en cuestión: esto sólo se puede hacer dentro de *TC*, ya que sólo ahí el concepto de función (que es un *conjunto*) se puede formalizar. Únicamente se exige que éstas se puedan representar operativamente en el lenguaje de la Teoría. Por ejemplo, la función  $g(4,m,n)=m \cdot n - 4$  del apartado anterior, puede representarse operativamente en *PA* con el enunciado  $\exists k(k=m \cdot n - 4)$  (en efecto, también la sustracción se puede definir en *PA*). El caso en el que el enunciado es verdadero, si existe, corresponde al caso en que la función asocia el número natural  $k$  a la terna  $(4,m,n)$ ; aquél en que el enunciado es falso, si existe, al caso en el cual la función no asocia nada a dicha terna (o sea, trivialmente, “no está definida”). Así mismo, la función recursiva

---

<sup>87</sup> La metademostración que vimos en el apartado III.1, del hecho de que un Sistema *ef. ax.* es formal (incluida la conclusión de que, en sus demostraciones, la semántica es eliminable) es válida también en el caso más general en que sólo tiene los axiomas (o bien los teoremas, como vimos en el apartado anterior) *efectivamente numerables*. O también *recursivamente numerables*: caso en que la formalidad le deriva de la misma formalidad de las funciones recursivas.

$f(4,m)$ , definida por minimalización a partir de la  $g(4,m,n)$ , se puede expresar en  $PA$  del siguiente modo:

$$\exists n((m \cdot n - 4 = 0) \wedge (\forall p(((p \neq n) \wedge (m \cdot p - 4 = 0)) \rightarrow (n < p))))$$

En efecto, ya que las funciones recursivas son aritméticas, nos esperamos que  $PA$  sea una Teoría adecuada para poderlas siempre representar de forma operativa. Gödel, como paso previo a su primer Teorema de incompletitud (que veremos en el siguiente apartado), demostró que realmente es así, que todas las funciones recursivas y, por ende, todos los enunciados que las contienen, se pueden representar operativamente en  $PA$ <sup>88</sup>.

Para toda Teoría matemática de este tipo, se puede repetir el razonamiento hecho: suponiendo su *completitud*, deducimos que la Teoría podría resolver el *problema de la parada* de una máquina cualquiera. Pero, de nuevo, subrayamos que *de esto, en general, no deriva ningún absurdo*: una Teoría clásica formal puede resolver el *problema de la parada* y más tarde veremos incluso un ejemplo de ello. La paradoja de Turing que hemos descrito, se manifiesta sólo exigiendo que, además, dicha Teoría tenga los axiomas, o bien los teoremas, *efectivamente numerables* – en efecto, no es necesario que la Teoría sea *efectivamente axiomatizable* (aunque esta diferencia tenga escaso interés práctico) – es decir exigiendo, por lo visto, que exista una *máquina* capaz de resolver el *problema de la parada* de una máquina cualquiera. En particular,  $PA$  es *ef. ax.* y, por lo tanto, el metateorema de Church-Turing es válido para él:  $PA$  es incompleto.

---

<sup>88</sup> En realidad, haciendo uso de una definición de *representabilidad* mucho más exigente de la que estamos refiriendo, demostró mucho más que esto; dicho “más” sirve para construir concretamente el enunciado indecidible que demuestra la tesis de su Teorema.

Acabamos de concluir la incompletitud de la Teoría matemática que satisface las hipótesis del Metateorema de Church-Turing, llamémosla  $T$ , a través de un razonamiento informal que involucra el concepto de máquina y usa la Tesis de Church-Turing. Para formalizar completamente el Metateorema se debe, pues, eliminar la referencia a las máquinas (y entonces también a la Tesis de Church-Turing) adoperando en sus veces un modelo de ellas codificado en  $TC$ . Sin embargo, hay que destacar que la misma tesis del Metateorema considera el Sistema  $T$  “desde fuera”, así que, en el caso en que éste sea la misma Teoría  $TC$ , dicha formalización no puede realizarse. Por otro lado, cuando  $T$  es distinto de  $TC$ , la formalización del Metateorema en  $TC$  no da problemas: cogiendo como modelo la máquina de Turing, se obtiene, en el modo descrito, *el Teorema de Church-Turing*, mientras mediante las funciones recursivas, el *primer Teorema de incompletitud de Gödel*.

De todas formas, es infrecuente que dichos Teoremas se presenten de modo totalmente formalizado, ya que normalmente el modelo usado para las máquinas (máquina de Turing o funciones recursivas) sólo se maneja metamatemáticamente y no en veste codificada en  $TC$ . Resultan de ello, pues, aún *metateoremas*, si bien con una estructura mucho más rigurosa que la del Metateorema ahora expuesto. En el apartado siguiente esbozaremos, en dicha versión (que es la versión original), el Primer Teorema de incompletitud de Gödel, aunque citando un libro donde el mismo aparece totalmente formalizado en  $TC$ . Como se puede imaginar, la estructura formal simplifica y automatiza los razonamientos más críticos y peculiares de la metademostración, pero a cambio de un complejo e incómodo formalismo (cuya interpretación posee distintos “niveles” semánticos). Por este motivo, incluso desde un punto de vista didáctico, es realmente preferible estudiar la estrategia de la

original (meta)demostración de Gödel, la cual, además, es la primera históricamente.

De cualquier modo, está claro que la mayor relevancia epistemológica del Teorema de incompletitud se obtiene refiriéndose a las *máquinas* y readmitiendo la Tesis de Church-Turing. Que es lo haremos en el apartado III.6.

### III.5. Primer Teorema de incompletitud de Gödel

Ilustrar los detalles de la compleja (meta)demostración de Gödel no forma parte de los objetivos de este libro; pero hay que señalar que conseguir hacerlo es una empresa realmente excepcional<sup>89</sup>. La demostración propiamente dicha, precedida por una particular codificación de los símbolos aritméticos, requiere la definición de 45 funciones recursivas. La número 33, en el libro de Ivorra citado en la última nota, ¡ocupa 14 renglones de símbolos!

Nuestra ambición consiste, más bien, en explicar la lógica del razonamiento de Gödel que, por su peculiaridad, ha dado lugar a muchas malinterpretaciones; una de las más difundidas y nefastas (a veces del mismo Wittgenstein) es que se trate de una paradoja. Pero, ¿cómo podría una contradicción demostrar algo, aparte del hecho de que el Sistema que la deduce es inconsistente? Es verdad, en cambio, que la idea de la demostración *se inspira* en la

---

<sup>89</sup> Aparte de la demostración original, necesariamente condensada, de Gödel (véase K. Gödel: *Über formal unentscheidbare Sätze der "Principia Mathematica" und verwandter Systeme I*, pp. 173-198) podemos citar la demostración, completa de todos los detalles, contenida en el libro de C. Ivorra Castillo: *Lógica y Teoría de Conjuntos*, p. 119-136 y 153-179 (¡45 páginas en total!). Aquí, a continuación, la demostración es formalizada completamente en *TC*. De todas formas, existe una versión mucho más sencilla del Teorema, debida a G. Boolos: *A new proof of the Gödel incompleteness theorem*.

paradoja del mentiroso, como sugiere el mismo Gödel.

La hipótesis que Gödel admite para el Sistema clásico a examen es que la colección de sus axiomas sea *recursiva* (o *recursivamente decidable*, como preferimos decir), condición que define, por analogía con el caso mecánico, un Sistema *recursivamente axiomatizable*. Recordemos que dicha condición (es más, también la más débil *recursiva numerabilidad* de los axiomas, como observado en una reciente nota) implica la formalidad para el Sistema y el hecho de que la semántica contenida en sus demostraciones sea eliminable. Además, Gödel supone que el Sistema contenga los axiomas de *PA* o los deduzca como teoremas, es decir que sea una Teoría aritmética “bastante potente”, como se suele abreviar. En realidad, la “potencia” que se necesita es sencillamente la que permite representar, en la manera que hemos descrito hace poco, las funciones recursivas. De hecho, esta capacidad es poseída también por una Teoría más general de *PA*, llamada Aritmética de Robinson, en la que el principio de inducción se sustituye por un axioma que afirma que cada natural distinto de cero es sucesor de otro natural (lo que, en *PA*, se puede demostrar por inducción). La última hipótesis para el Sistema es que éste (o la sub-Teoría aritmética que se puede desarrollar dentro de él) admita el modelo estándar de los números naturales, o sea, el de universo  $N^{90}$ . Obviamente, esta

---

<sup>90</sup> En realidad, Gödel asume una hipótesis más débil, llamada  $\omega$ -consistencia: resulta, en efecto, que una Teoría aritmética que admite el modelo estándar es  $\omega$ -consistente. Sin embargo, la  $\omega$ -consistencia, una condición más fuerte que la simple consistencia, es poco interesante en sí misma, porque el Teorema de Gödel se puede generalizar con la hipótesis de la simple consistencia para el Sistema. Además, es mucho más fácil reproducir el razonamiento de Gödel tomando en consideración el modelo intuitivo estándar al que los lectores están acostumbrados. Por estos motivos, decidimos evitar la  $\omega$ -consistencia.

hipótesis es más fuerte que la simple consistencia supuesta por el metateorema de Church-Turing. En efecto, la demostración de Gödel puede generalizarse; pero, de momento, nos interesa describir su versión original. Subrayamos que, como importante caso particular de Sistema idóneo para el Metateorema, tenemos el mismo *TC*: de hecho, hemos visto que las condiciones 1-9 del apartado II.6 implican enunciados equivalentes a los axiomas de Peano y se puede demostrar que se verifican en el seno de un determinado conjunto  $N$ , único a menos de isomorfismo, que constituye por definición misma, el modelo estándar de los números naturales.

La primera operación que ha de hacerse, como hemos dicho, es una concreta codificación numérica de los símbolos. Por ejemplo, a *not* y a  $\forall$ , Gödel les asigna, respectivamente, los números 3 y 7; esta elección, en realidad, es arbitraria. El paso siguiente es la codificación de las secuencias de símbolos; lo más natural, sería asignar el número 37 a una cadena como “*not* $\forall$ ”. Pero, innegablemente, esto no es necesario: depende de la convención que se lleve a cabo; y ésta última, de la finalidad que se persiga. Uno de los objetivos fundamentales es la codificación de las mismas demostraciones. Para conseguirlo de forma sencilla, evitando usar nuevos símbolos, las demostraciones pueden ser consideradas como secuencias ordenadas de enunciados que son axiomas o teoremas (excepto el último que es el nuevo teorema, o sea el enunciado demostrado). Como ejemplo, veamos la siguiente demostración: “Del axioma  $\forall xA(x) \rightarrow A(a)$ , por la regla de sustitución se obtiene  $\forall x(x=x) \rightarrow a=a$ ; pero  $\forall x(x=x)$  es un axioma (de igualdad), por lo tanto por *modus ponens* se obtiene el teorema  $a=a$ ; finalmente, por sustitución, se obtiene el teorema  $2=2$ ”. El razonamiento se puede codificar simplemente como se codificaría la cadena:



$$“\forall x A(x) \rightarrow A(a) \quad \forall x(x=x) \rightarrow a=a \quad \forall x(x=x) a=a \quad 2=2”$$

El objetivo que Gödel quiere alcanzar, dado un número natural estándar cualquiera (o sea del tipo  $0, 1, 2, \dots$ ), no se limita a la recomposición de la cadena que posiblemente representa; sino, aparte de eso, incluye el poder ya reconocer, a través de una operación que se pueda expresar sólo con funciones recursivas, si dicho número es o no es el código de una cadena que constituye un *enunciado correcto*, un *axioma*, o una *demostración*. En otras palabras, la posibilidad de reproducir en términos de oportunas expresiones aritméticas (aquellas que representan en el Sistema dichas funciones recursivas), la *recursiva decidibilidad* de tales colecciones. Para poder hacerlo, establece un particular criterio de codificación de las cadenas, relacionado con los números primos. Por ejemplo, la cadena “*not*  $\forall$ ” se codifica con el número  $p_1^3 \cdot p_2^7$ , donde  $p_1$  y  $p_2$  son los dos primeros números primos, o sea 2 y 3: entonces dicho número es 17496. Este método se generaliza para toda cadena. El código de una cadena de longitud común, viene a ser así un número inimaginablemente alto; pero eso no importa. La siguiente tabla representa emblemáticamente la lista ordenada de todas las cadenas según dicho código (también llamado número de Gödel o gödeliano); sólo en el caso de “*not*” y “*not*  $\forall$ ” el código es el correcto: en los demás casos, hemos puesto un número arbitrario (¡el verdadero número es mucho mayor!) ya que lo único que pretendemos hacer es enfocar la lógica de la demostración.

3)	<i>not</i>	símbolo
.....		
17496)	<i>not</i> $\forall$	expresión incorrecta
.....		
542342)	$2=2$	enunciado

.....  
67122260)  $\forall x(x=x)$  axioma

.....  
349481018)  $\exists x(x+6=x+125)$  enunciado

.....  
2360928264)  $\forall xA(x) \rightarrow A(a) \forall x(x=x) \rightarrow a=a \forall$   
 $x(x=x)a=a2=2$   
demostración

.....

Sucesivamente, Gödel despliega una particular función recursiva, cuya representación aritmética indicaremos con  $G(x,y)$ , dotada de un propiedad fundamental. Antes de exponerla, queremos señalar que la  $G(x,y)$ , expresada enteramente con los símbolos elementales de  $PA$ , cubriría más de 440000 caracteres, es decir, unas 190 páginas de este libro<sup>91</sup>. He aquí por qué Gödel se ve obligado a definir 45 funciones recursivas y a construir la  $G(x,y)$  mediante composición, recursión y minimalización de las mismas. La importante propiedad de la expresión  $G(x,y)$  es la siguiente: *cuando es interpretada en el modelo estándar*, se verifica si y sólo si  $x$  es el código de una demostración que demuestra el teorema cuyo código es  $y$ . Es decir, indicando con el índice  $N$  la interpretación en el modelo estándar, se obtiene:

$G_N(x,y)$  es verdadera si y sólo si  $x$  es el código de una demostración del enunciado con código  $y$

Por ejemplo, en base a nuestra tabla de símbolos, la expresión  $G_N(x,y)$  se verificaría con los valores  $x=2360928264$  e

<sup>91</sup> Hemos hecho un rápido cálculo aproximado, sin mucha pretensión de precisión; no obstante, el orden de la cifra debería ser correcto.

$y=542342$ .

A continuación, Gödel demuestra que existe un valor estándar del número natural  $y$ , llamémoslo  $\tilde{y}$ , tal que el código del enunciado:  $\text{not} \exists x(G(x, \tilde{y}))$  sea precisamente  $\tilde{y}$ . O sea, en la tabla, tendremos:

$$\tilde{y}) \quad \text{not} \exists x(G(x, \tilde{y}))$$

Dicho enunciado, *interpretado en el modelo estándar* dice: no existe un valor estándar de  $x$  tal que  $G_N(x, \tilde{y})$  se verifique; o sea, no existe un código de demostración (es decir, no existe demostración) que demuestre el enunciado de código  $\tilde{y}$ . Y entonces: *este mismo enunciado no es un teorema*.

Supongamos ahora que el enunciado  $\tilde{y}$  sea un teorema. Entonces, por la corrección del modelo estándar,  $\tilde{y}$  debería ser verdadero cuando es interpretado en dicho modelo; pero, en cambio, es evidentemente falso: imposible. Supongamos, del mismo modo, que la negación del enunciado  $\tilde{y}$ , o sea  $\exists x(G(x, \tilde{y}))$ <sup>92</sup>, sea un teorema; por la misma razón, este enunciado debería ser verdadero si es interpretado en el modelo estándar. Pero aquí afirma que el enunciado de código  $\tilde{y}$ , su negación, es un teorema; por lo tanto, si fuera cierto, serían teoremas tanto  $\tilde{y}$  como su negación, o sea el Sistema inconsistente: imposible. Un absurdo inevitable, ya que, por hipótesis, el modelo estándar es un modelo (correcto, por el teorema de corrección). Sólo queda concluir que  $\tilde{y}$  es indecible y, por tanto, que el Sistema matemático es incompleto.

Muchas de las confusiones sobre esta metademostración pueden disiparse si se considera concretamente la posibilidad de modelos no estándar. Normalmente, para llegar a la conclusión

---

<sup>92</sup> Recordemos que la doble negación equivale a la afirmación (ap. I.10).

de que un enunciado es indecidible, se toman en consideración dos modelos: uno en que el enunciado es verdadero y otro en que es falso (como se hizo, por ejemplo, en el caso del quinto postulado de Euclides). Aquí, en cambio, se considera únicamente el modelo estándar, y a la conclusión de que el enunciado  $\tilde{y}$  es indecidible se llega sólo en base a su auto-referencia. Interpretado en el modelo estándar, dicho enunciado expresa su propia indemostrabilidad; ya que ésta se ha demostrado (en efecto, se ha demostrado que es indecidible), el enunciado es verdadero en dicho modelo. ¿En qué modelo (no estándar) sería falso? Ciertamente un tal modelo debe existir: si  $\tilde{y}$  fuese verdadero en cada modelo sería un teorema por la completitud semántica del Sistema (que es formal). Y, sin duda, en un modelo así el enunciado  $\text{not } \exists x(G(x,\tilde{y}))$  no puede aún significar “no existe el código de una demostración que demuestre el teorema con código  $\tilde{y}$ ”: de otro modo,  $\tilde{y}$  sería otra vez verdadero. En efecto, uno de los errores más frecuentes es precisamente considerar que  $G(x,y)$  signifique *siempre* (o sea en cada modelo) lo que significa en el modelo estándar: esto, evidentemente, no es posible en el respecto de las hipótesis del Teorema. Por esta razón hemos preferido no llamar a la  $G(x,y)$  del modo habitual, más intuitivo, pero también más engañoso:  $Dem(x,y)$ .

Para proponer algo que se parezca a un caso concreto de interpretación no estándar donde  $\tilde{y}$  sea falso y  $G(x,y)$  no signifique “ $x$  es una demostración de  $y$ ”, pondremos un ejemplo de “principio”, es decir que no se debe tomar al pie de la letra. Suponga el lector que la expresión  $G(x,y)$  sea concretamente la siguiente:

$$y=127 \cdot 3^{y/x}$$

naturalmente, *no es así*, es sólo un ejemplo ideal. Tal ecuación, en efecto, se puede resolver con infinitas parejas de números naturales, como tiene que ser para la verdadera  $G(x,y)$ . Supongamos además que  $\tilde{y}$  sea realmente el número 127. De este modo, el enunciado indecidible sería:

$$127) \quad \text{not} \exists x(127=127 \cdot 3^{127/x})$$

Cuando se interpreta en el modelo estándar, este enunciado afirma que el enunciado de código 127, o sea él mismo, no es un teorema; y, como sabemos, en las hipótesis hechas, debe ser verdadero en dicho modelo. También desde este punto de vista, la elección de la expresión es correcta: de hecho, la ecuación propuesta sólo se podría resolver si  $127/x=0$ , lo que es imposible para cualquier número natural estándar  $x$ . Pero si lo interpretamos en un modelo no estándar, las cosas pueden ser distintas. Por ejemplo, si sustituimos  $x$  por la constante no estándar  $c$  antes considerada (ap. II.16), la ecuación puede cumplirse si se considera que  $c$  es (infinitamente) mayor de cualquier número natural estándar: entonces, en efecto,  $127/c$  tendería a cero y  $3^{127/c}$  a uno<sup>93</sup>. He aquí como el enunciado indecidible  $\tilde{y}$  puede resultar falso en un modelo no estándar (y, realmente, *tiene que* ser falso en un determinado modelo no estándar  $M$ ). Además, en dicho modelo  $M$ ,  $G(x,y)$  no puede interpretarse correctamente como “ $x$  es el código de una demostración del enunciado con código  $y$ ”; en efecto, si tomamos  $x=c$  e  $y=127$ , resulta que, aunque  $G_M(c,127)$  sea verdadera,  $c$  no es el código de ninguna expresión, ya que todos los códigos definidos son naturales estándar.

---

<sup>93</sup> Para hacer riguroso el razonamiento, basta con definir de forma oportuna las operaciones de división y de exponenciación de modo que generalicen las habituales.

Digámoslo de otro modo: demostrando que  $\tilde{y}$  es indecidible, hemos *demostrado* los enunciados:  $notG(0,\tilde{y})$ ,  $notG(1,\tilde{y})$ ,  $notG(2,\tilde{y})$ , etc. y sin embargo el enunciado:  $\forall x(notG(x,\tilde{y}))$ , o bien  $not\exists x(G(x,\tilde{y}))$ , aunque verdadero en el modelo estándar, no es demostrable. La situación no es en absoluto distinta de la que ya describimos en el apartado I.13, con respecto a la Geometría elíptica: también en dicho modelo de  $G$ , para cada recta que pase por un punto  $P$  externo una recta prefijada  $r$ , es verdad (y se puede demostrar si se describe el modelo sirviéndose de la Geometría euclidiana, tal y como hicimos para el modelo hiperbólico en el apartado I.10) que ésta no es paralela a  $r$ . Sin embargo, en  $G$  no se puede demostrar que “cualquier recta que pase por  $P$  no es paralela a  $r$ ”: lo atestiguan el modelo euclidiano y el hiperbólico. Del mismo modo,  $not\exists x(G(x,\tilde{y}))$  no se puede demostrar, de hecho es falso en oportunos modelos no estándar.

De todas formas, subrayamos que *el Teorema de incompletitud no se debe a la existencia de los modelos no estándar* (como algunas veces se lee): estos últimos, en efecto, existen siempre en las hipótesis (muy largas) del teorema de L-S y de hecho, en la segunda Parte, los hemos observado también en Teorías *sintácticamente completas*, como *TFR*.

Como hemos anticipado, la hipótesis de la existencia del modelo estándar para el Sistema se puede debilitar con la simple consistencia<sup>94</sup>. Esto fue (meta)demostrado por Rosser a

---

<sup>94</sup> Pero ¿en qué casos concretos se aplicaría dicha generalización? En realidad, en el caso de  $PA$ , la formalización en  $TC$  (que sólo exige la hipótesis de consistencia para  $TC$ ) es capaz, como sabemos, de *demostrar* la existencia del modelo estándar para  $PA$ . Sin embargo, esto no vale para otros Sistemas que respondan a las hipótesis del teorema: por ejemplo para el Sistema  $PA'$  (apartado II.16) que admite sólo modelos no estándar. Ahora, en cambio, el teorema de incompletitud se puede aplicar también a

través de un enunciado auto-referente, distinto al de Gödel.

Para terminar, recordamos que las descritas metademostraciones son completamente formalizables en  $TC$  (constituyéndose así un verdadero *teorema*) excepto en el caso en que el Sistema que verifica las hipótesis sea el mismo  $TC$ ; en éste, la incompletitud descrita debe considerarse tajantemente como un *metateorema*.

### III.6. Consecuencias del Teorema de incompletitud

La importancia del Teorema de incompletitud se debe, no ya al simple hecho de que el Sistema matemático de la hipótesis se haya revelado incompleto, sino más bien al hecho de que éste sea *incompletable*. El Teorema, en efecto, puede aplicarse a cualquier extensión del Sistema de partida, siempre que sean respetadas sus hipótesis. Si  $I$  es un enunciado indecidible cualquiera de la Teoría (si queremos, el mismo *enunciado de Gödel*, de código  $\tilde{y}$ ), añadiendo  $I$  o  $\text{not}I$  a los axiomas del Sistema, se obtiene un Sistema consistente  $y$ , sin duda, “más potente” que el original. Además, si  $I$  es exhibido, los nuevos axiomas siguen siendo *recursivamente decidibles*, si antes lo eran. Por lo tanto, volviendo a aplicar el Teorema, se concluye otra vez la incompletitud del Sistema; y si, por ejemplo,  $I$  era el *enunciado de Gödel*, se podrá reconstruir un nuevo *enunciado de Gödel*. Sintetizando, un Sistema clásico que satisface las hipótesis del Teorema de incompletitud es *esencialmente incompleto*: no se puede completar añadiéndole axiomas, aunque sean infinitos, mientras se conserve la consistencia y la *recursiva numerabilidad* del conjunto de sus axiomas. Sin embargo, antes de detallar todas las demás consecuencias, es

---

$PA'$ .

conveniente volver a referirnos al más general Metateorema de Church-Turing (o de incompletitud), restableciendo la Tesis de Church-Turing.

En la conclusión del Metateorema de Church-Turing, hemos visto que negar la tesis implica la existencia de una máquina  $D$  que resuelve el problema de la parada de cada máquina. Ahora bien, dado un Sistema *ef. ax.* cualquiera (o, más generalmente, cuyos axiomas sean efectivamente numerables), siempre podemos considerar una máquina que, para concluir si un enunciado determinado es un teorema, examine la lista completa de todos los teoremas generada por la máquina característica del Sistema. Si el enunciado no es un teorema, dicho procedimiento mecánico no terminaría; pero a través de la máquina  $D$  podríamos descubrirlo y, por tanto, llegar a la conclusión de que no es un teorema. Por eso, si existiera la máquina  $D$ , cada Sistema cuyos axiomas fuesen efectivamente numerables sería decidible. En cambio, del Metateorema de incompletitud se deduce que esto es imposible: en particular, se deduce que *cada Sistema que satisface sus hipótesis es indecidible*. Para admitirlo, razonamos por absurdo: como consecuencia, también sería decidible el conjunto de los enunciados indecidibles. Para cada uno de ellos, escojamos el más corto entre él y su negación (o, en general, uno de los dos según un criterio arbitrario, pero mecanizable) y añadámoslo a los axiomas del Sistema. Se habrá formado un Sistema nuevo, consistente, *completo* y aún *ef. ax.* (o, más en general, aún con axiomas efectivamente numerables) que, al ser una extensión del primero, tiene la misma “potencia expresiva”: imposible.

$PA$  y cualquier otra Teoría *ef. ax.* de números naturales no menos “potente” (es más, también alguna menos “potente”, como la Aritmética de Robinson) es esencialmente indecidible. Y también es esencialmente indecidible la



propia *TC*, o sea toda la matemática clásica formal (describible conjuntísticamente)<sup>95</sup>.

Lo que sucede en un Sistema matemático que satisface las hipótesis del Metateorema de incompletitud es que el conjunto de sus enunciados indecidibles no es efectivamente numerable: si lo fuera, también el más general conjunto de los enunciados que no son teoremas sería efectivamente numerable y entonces el Sistema sería decidible (ap. III.1); una obvia consecuencia necesaria es que los enunciados indecidibles tienen que ser infinitos<sup>96</sup>. Por lo visto, no sólo no es posible mecanizar el proceso de reconocimiento de los infinitos enunciados indecidibles, sino tampoco hacer mecánicamente un elenco exclusivo y exhaustivo de ellos.

Por consiguiente, si examinamos la codificación numérica de los enunciados indecidibles, obtenemos un subconjunto infinito de números naturales estándar que no es efectivamente numerable, o sea, cuyos elementos ninguna máquina es capaz de enumerar todos y solos. Pero, evidentemente, *la conclusión de que existen subconjuntos de naturales no efectivamente numerables* (es más, que son de número despreciable los que lo son) *puede alcanzarse independientemente del Metateorema de incompletitud*; en efecto, se puede deducir simplemente del hecho de que el conjunto de todos los cálculos mecánicos, o sea de todas las funciones recursivas, es numerable, mientras

---

<sup>95</sup> A menudo incorrectamente denominada “de primer orden”, en base a la incorrecta trascendencia asignada al orden expresivo observada en el ap. II.14.

<sup>96</sup> Si fueran finitos, al ser también *distinguibles* y formales, se podría hacer una enumeración explícita de ellos, siempre reproducible por una máquina. Para la *distinguibilidad* de los enunciados indecidibles de un Sistema formal, recórdese el ap. II.9 (también retomaremos el tema en el ap. III.9).

que el conjunto  $P(N)$  es innumerable<sup>97</sup>. De la innumerabilidad de  $P(N)$  se deduce también que para definir todas y solas las cifras de un número real (que puede verse como un subconjunto infinito de números naturales), es necesario recurrir a una semántica ineliminable, excepto para un número insignificante de casos ( $\aleph_0$  respecto a  $2^{\aleph_0}$ ). Así que es epistemológicamente incorrecto afirmar, como hacen algunos, que ésta es una consecuencia del Metateorema de incompletitud. La importancia del Metateorema, que efectivamente llega a esa conclusión para un subconjunto específico, se debe a la naturaleza de dicho subconjunto y no al hecho de que existen subconjuntos de este tipo; lo cual se puede demostrar independientemente.

Para reconocer los enunciados indecidibles de una Teoría que verifica las hipótesis del Metateorema de incompletitud, sólo nos quedan los métodos puramente metamatemáticos (semánticos). Por esta razón dijimos al principio del libro que la metamatemática es *intrínsecamente* indispensable (ap. I.3). Al no ser mecanizable, dicho criterio tiene que poseer la capacidad de definir nuevos conceptos continua e imprevisiblemente, adaptándolos cada vez al enunciado del que se debe probar la indecidibilidad. Por la naturaleza misma del lenguaje semántico, capaz incluso de redefinirse, no hay razón para creer que este proceso no sea siempre posible. De hecho, la misma *representabilidad* de los modelos que permiten reconocer un enunciado indecidible (los cuales, recordemos, *deben existir* en base al Teorema de s-

---

<sup>97</sup> Como otras veces, se podría pensar en asignar más de un significado al resultado de cada cálculo; pero ya hemos observado que esta operación, para resolver dicho problema, debería ser intrínsecamente semántica y por lo tanto no ejecutable por ninguna máquina.

completitud) es un concepto convenientemente redefinible<sup>98</sup>. La única y fundamental excepción a este optimismo concierne al propio Sistema *TC*, por la descrita ambigüedad de sus “modelos”; más adelante lo constataremos con un ejemplo.

Así, el Metateorema descubre límites posteriores a la capacidad de mecanizar el proceso de identificación de los modelos de una Teoría que satisface sus hipótesis. Ya sabíamos que la “cardinalidad” de los modelos de un Sistema, al ser hiperenumerable (ap. II.20), es terreno exclusivo de la Semántica; pero ahora sabemos que también un “subsistema” numerable suyo (constituido por los modelos que permitirían reconocer todos los enunciados indecidibles) no es efectivamente numerable, no puede ser generado exclusiva y exhaustivamente por ninguna máquina.

Otra consecuencia del Metateorema es la demostración de la existencia de Sistemas clásicos formales no *ef. ax.* y, por consiguiente, no representables *fielmente* en *TC*. Consideremos, en efecto, un Sistema que, además de los axiomas de *PA*, contenga como axioma *I*, o bien *notI*, para cada enunciado indecidible *I*. Como se trata de un Sistema completo y “más potente” que *PA*, en base al Metateorema de incompletitud, no puede ser *ef. ax.*; es más, ni siquiera puede tener los axiomas efectivamente numerables. De esto deducimos, en base a la conclusión a la que llegamos al final

---

<sup>98</sup> Un ejemplo de dramático debilitamiento del concepto de representabilidad para un modelo, se tiene en la mencionada metademostración de consistencia relativa de las Teorías *no cantorianas* de los conjuntos (o sea en las que no vale la hipótesis del continuo) realizada por Cohen: ésta considera, en efecto, una interpretación bastante peculiar (con propiedades “forzadas”, en inglés *forced*) en la que la hipótesis del continuo es falsa; y dicha interpretación, en hipótesis de consistencia para la Teoría de los conjuntos, resulta ser un modelo.

del apartado III.3, que dicho Sistema no es representable *fielmente* en *TC*: la Teoría axiomática de los conjuntos no puede reconocer todos sus teoremas. Un caso particular de gran importancia de este último ejemplo es el Sistema en el cual, para cada indecidible  $I$  de  $PA$ , se añade como axioma, entre  $I$  y  $\text{not}I$ , aquello que se revela *verdadero* en el modelo estándar. Este Sistema formal, llamémoslo  $PAV$ , permite así deducir todos y solos los enunciados de  $PA$  verdaderos en el modelo estándar: ¡una Teoría indudablemente útil!<sup>99</sup> Además, según lo visto, una Teoría *capaz de resolver el problema de la parada* de cada máquina. Por desgracia, aunque sea formal, no es *ef. ax.*, ni por tanto representable *fielmente* en *TC*: ni *TC*, ni otra máquina cualquiera, es capaz de llevar a cabo una enumeración exhaustiva y exclusiva de sus teoremas. La semántica contenida *en la definición* de sus axiomas (en particular de los últimos añadidos) no puede ser reproducida íntegramente por ninguna máquina, ni por el lenguaje conjuntístico formalizado; o sea, no puede ser eliminada. De esto sigue, obviamente, que tampoco el conjunto de las demostraciones es efectivamente numerable.

Llegados a este punto, parece oportuno subrayar lo que realmente significa, cuando se define la Teoría  $PA$ , tener optimistamente “delante de nuestras narices” el modelo de los números naturales intuitivos (ap. II.1): significa intuir una interpretación cuyas infinitas verdades no pueden ser exclusivamente y totalmente reproducidas por ninguna

---

<sup>99</sup> De este modo, hemos distinguido cuatro Sistemas aritméticos:  $PA$ , la Teoría Aritmética Integral ( $AI$ ), y los Sistemas que se obtienen de éstos, añadiendo como axiomas los enunciados de las respectivas Teorías, *verdaderos* en el modelo estándar:  $PAV$  y  $AIV$ . Con la posibilidad (ya señalada en el ap. II.17 y que comentaremos más tarde) de que  $AI$  y  $AIV$  coincidan.

máquina; en otras palabras, significa *admitir un número infinito de convenciones semánticas que no se pueden especificar completamente a través de métodos mecánicos* (no efectivamente numerables, en efecto). Después de todo, ¿no parece una postura tan inocente!

El *teorema de Tarski* es una especie de generalización de lo que acabamos de observar en la Teoría aritmética  $PA$  en relación al concepto de verdad en su modelo estándar. Éste afirma que el lenguaje sintáctico de un Sistema que verifica las hipótesis del Metateorema de incompletitud, no puede poseer un *predicado efectivamente numerable*  $\underline{V}(x)$ , tal que  $\underline{V}(x)=1$  si y sólo si el enunciado del código  $x$  es verdadero en el modelo  $M$ , sea cual sea el modelo  $M$ . Un predicado  $\underline{P}(x)$  se dice efectivamente (o recursivamente) numerable, si es posible calcular mecánicamente  $\underline{P}(x)$  para cada valor de  $x$ . Así que, el teorema de Tarski afirma que el conjunto de los enunciados verdaderos para un modelo prefijado cualquiera no es efectivamente numerable. Para demostrarlo, es suficiente considerar un Sistema que añade a los axiomas de la Teoría original de hipótesis, todos los enunciados que se verifican en  $M$ ; razonando por absurdo, se obtiene que los axiomas de este Sistema serían efectivamente numerables. La Teoría, además, sería más “potente” que la inicial y completa: imposible. O bien, con un desenlace más interesante, se puede utilizar el hecho de que, en toda Teoría de hipótesis, cada predicado con la propiedad de  $\underline{V}(x)$ , puede volverse auto-referencial (como el de Gödel)<sup>100</sup>; concretamente, debería existir un código  $x_k$  tal

---

<sup>100</sup> En realidad, normalmente esto se demuestra en el caso de un predicado *decidible* (también llamado *recursivo*: llamado  $\underline{P}(x)$ , cuando para cada  $x$  es posible calcular mecánicamente si  $\underline{P}(x)$  vale o no). Sin embargo, presumimos que esto debe poderse extender al caso en que sólo sea efectivamente numerable. En efecto, la propia demostración de Gödel

que:

$$x_k \quad \underline{V}(x_k) \neq I$$

una versión de la paradoja del mentiroso que, como ya hemos visto, implica siempre el absurdo. En efecto, este enunciado no puede ser verdadero en  $M$ : si lo fuera, por definición de  $\underline{V}$ , tendría que resultar  $\underline{V}(x_k)=I$ , y así se verificaría también su negación. Si fuera falso, entonces su negación  $\underline{V}(x_k)=I$  sería verdadera y entonces, por definición de  $\underline{V}$ , el enunciado de código  $x_k$  debería ser verdadero en  $M$ , en contra de lo supuesto. Absurdo.

Este teorema no se aplica si el predicado de verdad no es efectivamente numerable o si el Sistema no responde a las hipótesis del Metateorema de incompletitud: por ejemplo, no es válido para el decidible  $TFR$ . Sin embargo, una versión más general del teorema, el *Metateorema de Tarski*, es válido para todos los Sistemas clásicos consistentes, incluso no formales. Y afirma que en ninguna Teoría clásica consistente, el lenguaje matemático, *oportunamente interpretado*, es capaz de *definir* un concepto de verdad universal (o sea, válido para cada enunciado, como debe serlo el concepto de verdad). Algo distinto del anterior *teorema* de Tarski. La conclusión del Metateorema se basa en el hecho de que, a fin de que se pueda definir (y así *enunciar*) la verdad para *todos* los enunciados, *incluida tal enunciación*, el lenguaje tiene que poseer la capacidad de hacer auto-referencias; con el resultado de que resurgiría la *paradoja del mentiroso*: “este mismo enunciado es falso”.

De este modo, la *definición integral* de las verdades para un 

---

también debería poderse extender al caso en que el Sistema tenga los axiomas sólo recursivamente numerables, en manera análoga a cuanto supuesto por el Metateorema de Church-Turing.

modelo de un Sistema matemático debe efectuarse fuera del Sistema<sup>101</sup>. Naturalmente, este hecho no tiene nada que ver con la completitud o incompletitud sintáctica: el Sistema puede perfectamente ser capaz de deducir todos los enunciados verdaderos para un modelo (resultando, así, sintácticamente completo); en un caso similar, de hecho, éste se limita a deducirlos, mientras sólo desde fuera los teoremas pueden ser considerados como “verdaderos para el modelo”.

Para terminar, señalamos que, en estricto rigor, no hay nada que prohíba interpretar el metalenguaje definitorio de *TC* obviando siempre al problema de la *no fidelidad* representativa de un Sistema cualquiera en el mismo *TC*, como anticipamos en el apartado II.7. El único problema es el precio que se paga. Pongamos, como ejemplo, el caso de *PAV*: un Sistema que define los axiomas utilizando el concepto de “verdadero en el modelo estándar”. Nada impide emplear dicho concepto también en el seno de la Teoría *TC*, introduciendo, en sentido genuinamente semántico, el conjunto de los enunciados “verdaderos en el modelo estándar de *PA*” y deducir a partir de ello. Ahora *PAV* está reproducido *fielmente* en *TC*, pero *TC* se ha convertido en una Teoría totalmente *diferente*, capaz de deducir todos y solos los elementos de un conjunto de enunciados no efectivamente numerable, como hemos visto. Así, *su tipo de deducción ya no puede ser mecánico: ella ha perdido su efectiva axiomatizabilidad*, aun conservando la formalidad.

Recapitulando, *el Metateorema de incompletitud nos aclara, desde el punto de vista lógico, cómo las máquinas nos pueden ayudar en el estudio de un Sistema clásico formal:*

---

<sup>101</sup> Como ya intuyó Russell en 1903: en la primera página de *Los principios de la matemática* se lee “...además de estos [conceptos], la Matemática usa un concepto que no forma parte de las proposiciones que considera, es decir la noción de la “verdad”.

- a) Existen Sistemas clásicos formales para los que no existe ninguna máquina capaz de enumerar todos y solos sus teoremas; éstos son también *no fielmente* reproducibles en *TC*. Entre ellos se encuentran los más deseables, como *PAV*, o sea el Sistema que deduce todos y solos los enunciados de *PA* verdaderos en el modelo estándar. Y que resuelve el problema de la parada de una máquina cualquiera.
- b) Existen Sistemas clásicos formales para los que, suponiendo su consistencia, existen máquinas capaces de enumerar todos y solos sus teoremas; pero *no* capaces de resolver todos los problemas matemáticos: por ejemplo, para cada enunciado fijado *E*, de indicarnos si *no es* un teorema (y, en particular, si es indecidible); o de resolver el problema de la parada de una máquina cualquiera. De este tipo son las disciplinas matemáticas más fundamentales, como *PA* y *TC*.
- c) Existen Sistemas clásicos formales decidibles, si se supone su consistencia; o sea, para los que existen máquinas capaces de resolver cualquier problema matemático, *en tal hipótesis*. Algunos ejemplos son *TFR*, *GE*, así como una parte de la Aritmética aún más restringida que la Aritmética de Robinson; la consistencia de estos Sistemas sigue de la hipótesis de consistencia para *TC*. Sin embargo, estas Teorías son limitadas en cuanto a expresividad: en ellas, por ejemplo, no pueden ser representadas todas las funciones recursivas, o sea, todas las máquinas.

Ahora parece un buen momento para discutir la posibilidad de sobrepasar estos límites, o sea, de considerar máquinas que violen la Tesis de Church-Turing. Pero antes queremos aclarar la naturaleza exacta de esta convención, en apariencia tan



peculiar. En realidad, sólo se trata de la formalización de un concepto. Reconsideremos lo que sucede con el concepto de conjunto. Adoptar los axiomas de *TC* significa definir un ente matemático que debería parecerse al concepto matemático de “conjunto”. Análogamente, las funciones recursivas (o los otros modelos equivalentes) representan una definición matemática de “máquina”. La “Tesis de Church-Turing” en efecto, es la suposición de que esta definición concuerde con el concepto semántico de “máquina”. ¿Por qué no se evidencia y discute la convención análoga para el caso de “conjunto”? Además, existen razones de peso para dudar de ese acuerdo: en efecto, hemos visto que en cuanto se estudian los fundamentos de *TC* resurge el concepto, necesariamente semántico, de “colección”; esto demuestra que la formalización del concepto de “conjunto” no puede acaparar todo su valor semántico. Viceversa, para el caso de las “máquinas”, parece realmente que dicho problema no exista; ¿cómo se explica esta incongruencia?

Con dos motivos. Paradójicamente, el primero se debe precisamente a lo concreto que es el concepto de “máquina”, respecto al, más abstracto, de “conjunto”. Los axiomas de *TC* se consideran, desde el punto de vista epistemológico, como un intento de concretar esa abstracción. El hecho de que este intento tenga sus limitaciones, o, si se prefiere, que falle en parte, no nos molesta demasiado porque nos confirma que su carácter ideal no es definible rigurosamente; así, sus consecuencias – que, en realidad, son graves: la nebulosidad de los “modelos” de *TC*, con todas sus dramáticas repercusiones – son más aceptables filosóficamente. En el caso de “máquina”, en cambio, la idea aun concreta que tenemos es tan amplia que nos parece sospechoso que pueda abarcarse totalmente con un puñado de reglas matemáticas. Más aún, por las fuertes limitaciones

epistemológicas que, como hemos visto, tal convención produce (el segundo motivo).

Ya se ha señalado que, dejando a parte el uso de los números casuales (que discutiremos dentro de poco), hasta ahora no se han encontrado extensiones efectivas de las modalidades de un cálculo mecánico. Sin embargo, podemos observar perfectamente qué tipo de operación debería ser capaz de realizar una “máquina” capaz de reconocer todos y solos los enunciados indecidibles de una Teoría que satisfaga las hipótesis del Metateorema de incompletitud; lo cual, como sabemos, implicaría la decidibilidad para el Sistema. O bien, de qué tipo es la “superioridad” humana, exaltada por alguien<sup>102</sup> respecto a una cualquier máquina que respete la Tesis de Church-Turing. Por ejemplo, como se ha visto, el saber reconocer la veracidad, en un modelo prefijado, de los enunciados indecidibles del Sistema matemático. Se trata, por lo tanto, de operaciones de tipo genuinamente semántico que, más bien que “inteligencia” (en el sentido tradicional dado a este término), requieren el uso de una convención dinámica acerca de los significados que se deben asignar a los enunciados. “Dinámica”, porque la estrategia para asignar esos significados no puede precisarse exactamente de una vez por todas: si así fuera, se podría mecanizar. En otras palabras, nuestra superioridad primaria respecto a una máquina, entendida tradicionalmente, es poder dar un valor semántico redefinible – según un contexto o una conveniencia no previsible mecánicamente – a los enunciados de la Teoría; poder gestionar de algún modo (en un ámbito que a priori no está exento de

---

<sup>102</sup> J.R. Lucas: *Mind, Machines and Gödel* y más recientemente R. Penrose: *La nuova mente dell'imperatore*. Se trata de un punto de vista, ya superado totalmente, que ha sido desmentido por muchas objeciones; pero para desmontarlo basta con precisar el argumento, como intentaremos hacer a continuación.

ambigüedad), la cantidad *hiperinnúmerable* de los conceptos semánticos. Obviamente, este tipo de capacidad, aunque sea “maravilloso”, también está sujeto al peligro de la ambigüedad: de hecho, no se considera deseable para las máquinas, en su definición tradicional. Queremos decir que, en Lógica, el concepto de “máquina” se introduce precisamente para exigir un tipo de determinismo riguroso e inconsciente de la deducción, excluyendo cualquier comportamiento insondable.

En definitiva, para que una máquina pueda simular el razonamiento humano, no basta con una ampliación normal de sus capacidades de cálculo, sino que se vuelve necesaria una característica de naturaleza totalmente diferente de las que tradicionalmente se asocian al concepto de “mecánico”: la posibilidad de interpretar (imprevisiblemente) los enunciados. Una capacidad que calificar sin más como “inteligencia superior” parece, al mismo tiempo, inmodesto y restrictivo.

Una vez aclarado esto, se puede entender que, desde el punto de vista lógico, no debemos esperar demasiado de cálculos mecánicos basados en la casualidad. Ante todo es necesario precisar la naturaleza exacta de dicha casualidad. Consideremos una máquina capaz de lanzar dados sobre una mesa y de leer el resultado para usarlo en sus cálculos sucesivos. Para “agitar su mano mecánica” antes del lanzamiento, se puede recurrir a distintas tretas: en función de la hora, haciendo uso de las cifras imprevisibles de los números reales (en realidad simulados mediante números racionales, como sabemos) o usando diferentes algoritmos específicos, a menudo resultado de complejos estudios. Cálculos que usan esta función, llamados *random*, sirven sobre todo en ámbito estadístico, para la simulación de eventos reales. En realidad, un cálculo de este tipo sólo aparentemente es *casual*, en el estricto significado del término. Lo que queremos decir es que, por ejemplo, un cálculo

*random* a partir de las cifras de la hora, en realidad es íntegramente determinístico: si se considera la hora como uno de los *inputs*, la máquina respeta la Tesis de Church-Turing. Lo mismo vale para cualquier otra modalidad de generación *random*; por eso, sería más correcto hablar de *simulación de la casualidad*, o bien de *pseudo-casualidad*. No obstante, en los casos prácticos ordinarios dicha simulación puede siempre realizarse satisfactoriamente.

Ahora bien, el lector juzgará sin duda como ridícula la esperanza de obtener *casualmente* los enunciados indecibles de un Sistema matemático o las cifras de un determinado número real. Sin embargo, es muy probable que los procesos mentales humanos, incluidas las imprevisibles asignaciones de significado a los símbolos, usen, entre otras estrategias, *también* algunas de tipo casual. Por lo tanto, un procedimiento mecánico pseudo-casual, corregido por un cierto grado de determinismo, podría simular, aun parcialmente, ese criterio intrínsecamente semántico. Así, debe considerarse posible obtener, con un criterio de este tipo, una ayuda a la deducción.

Resumiendo, de momento no existe un uso regulado de las operaciones *random* en el ámbito de la Lógica: en ella, tradicionalmente, nunca se deduce haciendo uso de la casualidad. Sin embargo, en principio, nada impide admitir esta posibilidad en alguna circunstancia; por ejemplo, intentando simular, aunque parcial o aproximadamente, el criterio intrínsecamente semántico de la asignación de significado a las proposiciones matemáticas.

### **III.7. Gloria de Chaitin**

En 1974 G. Chaitin formuló una interesante versión informática del Metateorema de incompletitud. En primer

lugar, demos una definición: una máquina se dice *universal* cuando su comportamiento entrada/salida puede reproducir, como caso particular, el comportamiento entrada/salida de cualquier otra máquina. En otras palabras, una máquina universal puede simular lógicamente cualquier máquina. Así, su comportamiento entrada/salida representa todo lo que es calculable mecánicamente. La existencia de máquinas universales y los criterios para obtenerlas están asegurados por la Tesis de Church-Turing y por los descritos modelos representativos de todas las máquinas. El modelo de las funciones recursivas, como hemos visto, describe la elaboración de una máquina cualquiera a través de las operaciones fundamentales de *composición*, *recursión* y *minimalización*. Por lo tanto, cualquier máquina en la que es posible poner en marcha un programa donde las instrucciones correspondientes a dichas operaciones puedan aparecer en un punto arbitrario (del mismo programa) y con una frecuencia arbitraria, es universal. Ya hemos concretado cuales son las instrucciones lógicas capaces de reproducir dichas operaciones: 1) suma de números naturales; 2) registro de datos en la memoria y posibilidad de su futura lectura; 3) iteración condicionada<sup>103</sup>. Cualquier computadora programable (incluidas muchas calculadoras de bolsillo) posee estos instrumentos operativos y, por tanto, representa una máquina universal<sup>104</sup>. La *máquina de Turing* y la *máquina RAM* también

---

<sup>103</sup> Ejemplos de iteración condicionada, para quien sabe un poco de informática, son los ciclos *DO*, *FOR*, etc.

<sup>104</sup> En rigor, sólo en teoría: el hecho de que en cada ordenador real la memoria sea limitada (aunque, desde el punto de vista lógico ampliable sin límites) hace que su universalidad siempre sea un límite ideal; pero la máquina puede aproximarse cuanto se desee a tal abstracción, ampliando oportunamente su memoria.

son universales. Obviamente, la existencia de máquinas universales implica también la existencia de funciones recursivas universales: aquellas que representan matemáticamente su comportamiento.

Ahora consideremos una máquina universal arbitraria  $U$  y supongamos que trabaje elaborando exclusivamente secuencias finitas de cifras binarias constituidas por los símbolos “0” y “1” (llamados *bits*), como normalmente sucede en la realidad. Cada programa es una secuencia de bits y cualquier secuencia de bits puede considerarse un programa<sup>105</sup>. El comportamiento de la máquina cuando se arranca cierto *programa*, que consideraremos siempre completo de todos sus inputs, no está determinado solamente por sus instrucciones, sino también por un primario *programa interno* (que equivale al *Sistema operativo* más el *firmware*, éste último un conjunto de instrucciones no modificables que maniobran directamente los dispositivos físicos de la máquina). Dicho programa interno, también constituido por una secuencia de bits, establece convenciones de representación (es decir, un código) de los números naturales y de las instrucciones, y en base a ellas concretiza las reglas con las que elaborar los datos. Por el carácter universal de la máquina, el mismo debe ser capaz de reproducir operativamente todas las funciones recursivas. Añadiendo la hipótesis de corrección, o sea la ausencia de errores, el programa interno de una máquina universal arbitraria representa una ejemplificación concreta de una Teoría formal que satisface las hipótesis del Metateorema de incompletitud.

Por lo dicho, la secuencia binaria *total* que representa un

---

<sup>105</sup> Un programa que usa instrucciones incorrectas o sin significado determina en todo caso una respuesta, como un mensaje de error o una no parada.

programa genérico de la máquina universal  $U$ , completa de todos sus inputs, está constituida por las instrucciones *propias* del programa (nos referimos a las que constituyen el así dicho programa *externo*,  $P$ , a cargo del usuario<sup>106</sup>) más los bits de sus inputs  $I$ , más el programa interno  $M$ .

Así, indicando con  $L(s)$  la longitud de una determinada cadena  $s$ , la *longitud total* de un programa genérico de  $U$  viene dada por:  $L(M)+L(P)+L(I)$ , donde  $L(P)+L(I)$  es un valor variable, mientras  $L(M)$  una constante que depende de la máquina  $U$ .

Se define *complejidad de Solomonoff* (o de Kolmogorov o de Chaitin) de una determinada secuencia binaria  $s$ , la *longitud total*,  $K(s)$ , del programa *más corto* de  $U$  capaz de producir en output *sólo y solamente*  $s$ . Una secuencia binaria se denomina *casual respecto a la máquina  $U$* , si su complejidad no es *sustancialmente* menor que su longitud. El término “sustancialmente” parece, justamente, inoportuno: su objetivo, en efecto, es simplemente dejar abierta, por generalidad, la convención sobre el “grado” de casualidad deseado. Nosotros estableceremos, como referencia, que una diferencia superior a 10 bits sea “sustancial”; por lo tanto reformulamos: *una secuencia se dice casual respecto a la máquina  $U$  si:  $K(s) \geq L(s) - 10$* .

En términos más sencillos, una secuencia binaria casual no es *sustancialmente comprimible* (o sea, en más de 10 bits) a través de ningún programa; es decir, de ninguna manera. Para una secuencia no casual cualquiera, en cambio, resulta que

---

<sup>106</sup> En realidad generalmente el programa externo no se escribe en código binario, sino en un lenguaje de *alto nivel* (que usa términos como *PRINT*, *DO*, etc.). Una adecuada operación, llamada *compilación*, traduce el programa externo en código binario. Este último es *ejecutable* efectivamente por la máquina y comanda el *programa interno*.

$K(s) < L(s) - 10$ , lo que significa que existe al menos un programa de  $U$  que la genera únicamente, cuya longitud total es menor de  $L(s) - 10$ : por lo tanto, la cadena es *sustancialmente* comprimible.

¿Siempre existen secuencias binarias casuales? Combinando de todas las formas posibles  $p$  cifras binarias se pueden obtener  $2^p$  secuencias binarias distintas. O sea, el número de distintas cadenas de la misma longitud  $p$  es  $2^p$ . Por ejemplo, existen  $16 = 2^4$  secuencias binarias distintas de longitud 4. ¿Podrían ser todas las  $2^p$  cadenas no casuales para cada  $p$ ? Cada una de ellas debería ser el único output de un programa cuya longitud total fuese menor de  $p - 10$  bits. Pero ¿cuántos son todos los programas de número total de bits menor de  $p - 10$ ? Con longitud de un solo bit existen los dos programas “0” y “1”, con longitud de dos bits existen cuatro programas, etc.; con longitud  $p - 11$  bits existen  $2^{p-11}$  programas. Por lo tanto, el número de programas de longitud menor de  $p - 10$  bits resulta de la suma:  $2^1 + 2^2 + \dots + 2^{p-11}$ , igual a  $2^{p-10} - 2$ . Pero este número es manifiestamente más pequeño que  $2^p$ . Suponiendo que cada uno de estos programas imprima sólo y solamente una de las  $2^p$  cadenas de longitud  $p$  (claramente, una situación extremadamente optimista) tendríamos que sólo  $2^{p-10} - 2$  de las  $2^p$  cadenas son no casuales. Pero la relación  $(2^{p-10} - 2)/2^p$  es aproximadamente  $1/1024$  para cada valor de  $p$ . Esto significa que, en la situación más exageradamente optimista, sólo un número sobre 1024, aproximadamente, ¡no es casual para cada valor de  $p$ ! La casualidad respecto a una prefijada máquina universal  $U$  es, de este modo, la condición normal para una genérica secuencia binaria. Indudablemente, esta propiedad se puede considerar de validez general, puesto que una reducción de 10 bits es normalmente considerada una pequeña reducción.

Ahora, muchos lectores se habrán quedado perplejos: si la



mayor parte de las cadenas binarias son incompresibles, ¿cómo se explica la difusión y eficacia de los varios programas de compresión que nos permiten reducir las dimensiones de los archivos informáticos (por ejemplo, antes de enviarlos por *e-mail*)? Ante todo, debemos subrayar que la compresión que aquí estamos considerando no admite ninguna pérdida de información: de la cadena comprimida siempre se debe poder reconstruir *exactamente* cada bit de la cadena original. Este caso se llama *lossless* (“sin pérdida”). Otro caso lógico, totalmente diferente, se obtiene admitiendo una (limitada) pérdida de información: hay muchísimas cadenas no casuales que se diferencian en pocos bits de una cadena casual. La mayor parte de los programas de compresión audiovisual (formatos *mpeg*, *jpeg*, *mp3*, etc....) opera con una pérdida de información (cuyo grado puede ser establecido por el usuario). Del tipo *lossless*, en cambio, deben ser las compresiones de textos y programas ejecutables (comunes archivos comprimidos *lossless*, por ejemplo, son los que tienen la extensión *zip*, *rar*, etc.). En estos casos, la técnica de compresión consiste en la eliminación de las *redundancias*. Si tomamos en consideración un texto en una lengua cualquiera, observaremos que algunos caracteres son mucho más frecuentes que otros; en un texto en español, las “a” son mucho más numerosas que las “z” y éstas últimas mucho más numerosas que el símbolo “\$”. La técnica de compresión que puede usarse, equivale a una redefinición del código binario de los caracteres: los símbolos más frecuentes se codifican con pocos bits, mientras que los más raros se asocian a las combinaciones binarias más largas. Esta redefinición se establece, tras un estudio sobre la cadena, mediante un programa adecuado que emplea un ulterior número  $r$  de bits; de este modo, la compresión será efectiva sólo si el número de bits ahorrados es sustancialmente mayor que  $r$ .

A menudo (pero no siempre) también los programas informáticos son redundantes, sea por la presencia de texto o porque a algunas instrucciones, estadísticamente, les siguen otras determinadas. Reflexionando un poco, nos convenceremos de que es realmente difícil que un producto humano cualquiera sea (fuertemente) casual. Normalmente, no lo son los valores de la frecuencia y de la duración de las notas de cualquier composición musical; y tampoco las imágenes de cualquier película: por ejemplo, los objetos superiores son estadísticamente más claros que los inferiores. En el fondo, todo tipo de “creación” no puede no constituir una diferenciación con respecto al caos de la casualidad; la cual, si realmente es absoluta, no puede *significar* verdaderamente nada. Y tampoco debe preocupar el hecho de que haya poquísimas cadenas no casuales en comparación con las casuales, puesto que, en todo caso, podemos disponer de una infinidad numerable de ellas.

Un archivo comprimido a través de una técnica *lossless ideal*, es decir capaz de eliminar todas las redundancias, sería casual; se puede *simular* este caso intentando (inútilmente) comprimir otra vez un archivo ya comprimido con la misma técnica *lossless*.

Una máquina universal  $U$  siempre es capaz, dada una arbitraria secuencia binaria, de constituir el programa que ésta representa y ejecutarlo. Por lo tanto, siempre es capaz de concluir si una cadena no es casual: deberá individuar un programa de longitud total sustancialmente más corta que su longitud, que la imprime únicamente. En cambio, parece más problemática la conclusión de casualidad para una cierta cadena  $s$  (cuya longitud suponemos, naturalmente, mayor de 10): un programa que use un método directo debería analizar las salidas de todos los programas de longitud total menor de  $L(s)-10$ , para descubrir si imprimen sólo y solamente  $s$ . Pero,

para llevar a buen puerto tal análisis y, posiblemente, concluir la casualidad de  $s$ , debería ser capaz de reconocer todos los programas que imprimen a lo sumo una cadena y no terminan. Si consiguiese hacerlo para cada  $s$ , dicho programa sería capaz de resolver el problema de la *parada* para una clase de programas muy general. Esta observación sugiere, pues, una relación entre la posibilidad de concluir siempre que una cadena es casual, si lo es, con la de resolver el problema de la *parada* de un cualquier cálculo; lo que, como sabemos, es imposible para una máquina, conforme al Metateorema de incompletitud.

Efectivamente, la interpretación de Chaitin del Metateorema de incompletitud para una máquina universal  $U$ , tiene como consecuencia que  $U$  puede reconocer la casualidad de un número necesariamente *finito* de cadenas. La formulación exacta, más general, es la siguiente: *existe un número natural  $c$ , que depende de la máquina  $U$ , tal que  $U$  no puede concluir, para ninguna cadena  $s$ , que  $K(s) > c$* . En otras palabras, cada máquina universal tiene un límite superior para la complejidad que puede concluir de una cadena.

Antes de la metademostración, observemos cómo del Metateorema se deriva, otra vez, una incompletitud de tipo esencial para el Sistema formal representado por la máquina  $U$  (más exactamente, por su programa interno  $M$ ). Hemos visto que existen cadenas casuales arbitrariamente grandes; en particular, habrá infinitas para que resulte  $L(s_r) > c + 10$ , siendo  $s_r$  una arbitraria cadena casual (*string random*). Tenemos entonces que todos los “enunciados” del tipo «la cadena  $s_r$ , para la cual resulta  $L(s_r) > c + 10$ , es casual» son “indecidibles” para la máquina universal. Por absurdo, o sea admitiendo que la máquina pueda concluir tal enunciado, la misma máquina, en base a la relación  $K(s_r) \geq L(s_r) - 10$ , válida para toda cadena casual, deduciría

también  $K(s_r) > c$ , transgrediendo el Metateorema que acabamos de formular. Los enunciados de este tipo son infinitos y reaparecen inexorablemente en cualquier máquina universal, independientemente de cuantos “axiomas” se quieran añadir, incluso un número infinito<sup>107</sup>, al *programa interno*.

Otra consecuencia del Metateorema (no mencionada, según parece, por ninguna de las publicaciones consultadas) es que *ningún programa mecánico que termina siempre puede ser certificado como un programa ideal de compresión lossless*, o sea, capaz de eliminar todas las redundancias de una cualquier cadena. De hecho, dicho programa sólo no conseguiría comprimir las cadenas casuales; entonces, sirviéndonos de él, podríamos reconocer una cadena casual arbitrariamente grande, lo que es imposible.

Para demostrar el Metateorema de incompletitud de Chaitin, razonamos por absurdo: supongamos que, para cada número natural  $n$  (arbitrariamente grande),  $M$  pueda demostrar el enunciado  $K(s) > n$  para cierta cadena binaria  $s$ . Entonces podríamos considerar el siguiente programa  $P$ : con input  $n$ , se consideran en orden de longitud creciente todos los programas de  $U$  (se usará un programa, llamémoslo  $G$ , que genera todas las posibles combinaciones binarias), hasta encontrar el primero que imprima correctamente “ $K(s) > n$ ”. Después, lo modificaremos para hacerle imprimir única y exclusivamente la cadena  $s$  y terminaremos. Indicando con  $st(n)$  la cadena que, en la máquina  $U$ , representa el número natural  $n$  (o sea el código binario del número  $n$ ), la longitud total del programa  $P$  es sustancialmente:

---

<sup>107</sup> Del metateorema se deriva que el conjunto de los infinitos axiomas (que suponemos correctos), “ $s_1$  es casual,  $s_2$  es casual, ...” no es *efectivamente numerable*. Entonces, un Sistema de cálculo obtenido a partir del programa interno de una máquina universal añadiendo las condiciones correspondientes a dichos infinitos axiomas, ya no podría ser una *máquina*.

$$L(st(n)) + L(M) + L(G)$$

donde  $L(G)$  es el número de bits del programa  $G$ . El único número no constante es el primero. Por lo tanto  $P$ , de dicha longitud total, imprime una cadena  $s$  cuya complejidad es mayor que  $n$ .

Normalmente, la metademostración continua asumiendo que  $L(st(n))$  es aproximadamente  $\log_b(n)$ , donde  $b$  es la base escogida para la representación (exponencial) de los números naturales (estándar<sup>108</sup>). Por ejemplo, la habitual representación decimal de los naturales es un código exponencial en base 10, en efecto largo aproximadamente  $\log_{10}(n)$  para cada  $n$ . Normalmente, en los ordenadores se emplea más bien el código binario en base 2:

$0$	para $0$	[en base decimal: $0$ ]
$1$	para $s(0)$	[en base decimal: $1$ ]
$10$	para $s(s(0))$	[en base decimal: $2$ ]
$11$	para $s(s(s(0)))$	[en base decimal: $3$ ]
$100$	para $s(s(s(s(0))))$	[en base decimal: $4$ ]

.....

Nótese que todas las combinaciones que empiezan por “0” no se usan en este código, excepto en el único caso de “0”. También aquí el número de cifras del número  $n$  es aproximadamente  $\log_2(n)$ , para todo  $n$ . De hecho, puede demostrarse fácilmente que esta propiedad vale para todas las

---

<sup>108</sup> De ahora en adelante omitiremos precisar que los números naturales codificados en el interior de las máquinas de cálculo ordinarias son, naturalmente, aquellos estándar.

representaciones exponenciales en base arbitraria  $b$ .

No obstante, nada, en principio, prohíbe que la máquina use un código particular, no exponencial y del todo arbitrario. Antes de seguir, es conveniente abandonar la notación  $s(...(0)...)$  para el genérico natural estándar y emplear la escritura  $n_m$  para indicar el número natural que en el habitual código decimal se escribe  $m$  [así,  $n_2$  y  $n_{268}$  representan los números normalmente indicados con 2 y 268].

Para empezar, consideremos el siguiente código (privado de todo criterio aparente):

$0$	para	$n_6$
$1$	para	$n_1$
$10$	para	$n_{2127}$
$11$	para	$n_5$
$100$	para	$n_{40008}$
.....		

y a continuación dos códigos no exponenciales que siguen un criterio evidente:

$1$	para	$n_0$
$11$	para	$n_1$
$111$	para	$n_2$
$1111$	para	$n_3$
.....		

y:

$10101010$	para	$n_0$
$101010101$	para	$n_1$
$1010101010$	para	$n_2$

.....

El primer código no convencional es capaz de reducir aquellas cadenas que contienen muchos números naturales cuya representación en base 10 es 2127 y 40008; por lo tanto, podría ser útil en ciertos casos. En cambio, los otros dos ejemplos son códigos bastante derrochadores de bits, porque no utilizan muchísimas de las posibles combinaciones binarias. En el primero de los dos (en el que el bit "0" puede usarse como separador), la longitud del código de un número  $n$  es igual a  $n+1$ ; en el segundo, incluso a  $n+8$ . Es evidente que trabajar con estos códigos sería muy incómodo (por no decir insensato); pero, desde el punto de vista lógico, la elección de la representación binaria de los números es irrelevante, ya que ésta determina solamente el modo en que la máquina deberá ejecutar las operaciones (de suma, asignación, etc.).

Para generalizar la metademostración, utilizaremos el hecho de que la máquina  $U$  es universal; por lo tanto, será capaz de reproducir cualquier código exponencial. Elijamos uno cualquiera, por ejemplo el en base 2. Entonces, debe existir un programa  $D$  de  $U$  que teniendo como input una combinación binaria arbitraria que empieza con "1", proporciona en salida el número natural que le corresponde según el código binario en base 2; este último número, por cierto, representado a través del código característico de la  $U$ , o sea mediante la cadena  $st(n)$ . El algoritmo más primitivo para  $D$  puede basarse en el precedente programa  $G$ , contando, con otras pocas instrucciones de longitud total  $h$ , todas las posibles combinaciones binarias que empiecen por "1", hasta encontrar la misma cadena de input; después imprimir la cuenta. Entonces, la longitud total del programa  $D$  será:  $L(M) + L(G) + h + \log_2(n)$  y tendrá como salida  $st(n)$ , o sea, el input

del programa precedente  $P$ . Combinando los programas  $D$  y  $P$  se forma un único programa cuya longitud total es aproximadamente:

$$L(M)+L(G)+h+\log_2(n)$$

o sea  $k+\log_2(n)$ , con  $k$  constante, capaz de imprimir una cadena  $s$ , de complejidad mayor que  $n$ , para cada  $n$ . Ahora bien, como el programa imprime solamente  $s$ , su longitud debe ser mayor o igual a  $K(s)$ , por definición de complejidad; es decir, será:  $k+\log_2(n) \geq K(s)$ . Y de la hipótesis  $K(s) > n$ , surge finalmente:

$$k+\log_2(n) > n, \text{ para cada } n$$

lo que evidentemente es imposible: la diferencia  $n-\log(n)$ , sea cual sea la base del logaritmo, se hace arbitrariamente grande al crecer de  $n^{109}$ .

Claramente, la constante  $c$  depende sólo de la máquina. Se puede tener una idea de su valor, estimándolo como el valor máximo de  $n$  para que en la metademostración no se obtenga absurdo, o sea cogiendo:  $c \approx L(M)+L(G)+h+\log_2(n)$ . En síntesis,  $c$  difiere de una constante de la longitud del programa interno  $M$ . Efectivamente, se puede metademostrar rigurosamente que  $c$  depende sólo del programa interno  $M$ .

La casualidad de una cadena depende de la máquina universal que se tome en consideración. Una cadena casual para una máquina universal, puede no serlo para otra, y viceversa (fijado en ambas el mismo parámetro, o *sustancialidad*, de la

---

<sup>109</sup> Añadiendo la Tesis de Church-Turing, se obtiene aún un Metateorema equivalente al Metateorema de Church-Turing (o de incompletitud).



compresión). El ejemplo típico que todos (incluido Chaitin) citan a representación de una cadena “no casual”, es una cadena que se puede compendiar con expresiones como “20 veces 01”, “167 veces 1”, “un millón de veces 0”, etc., cuando el grado de compresión sustancial convenido sea lo suficientemente pequeño. Sin embargo, *esto no es exacto*. Nadie duda de que estas expresiones compriman la representación normal y espontánea de las cadenas, pero aquí hay que preguntarse: ¿no casual respecto a qué máquina? Tomemos una máquina universal  $U$  que use un código irregular del tipo de los que hemos ejemplificado hace poco. Si a la cadena “un millón”, o al número natural que ésta representa, dicho código asocia una cadena binaria de longitud mil millones, se ve bien que la última de las nombradas descripciones, traducida en bits, de ninguna manera será más corta que la cadena que produce. Es verdad que  $U$  podría reproducir siempre, a través de un adecuado programa  $D$ , un código en base 2 capaz de comprimir fuertemente la cadena de input; pero, de nuevo, la longitud de  $D$  podría ser arbitrariamente grande, dependiendo del código con el que la máquina represente las instrucciones (por ejemplo, el código binario de la instrucción  $DO$  podría ser de dos mil millones de bits). Nadie cuestiona la absurdidad práctica de una elección de este tipo; pero, desde el punto de vista lógico, queda el hecho de que la cadena examinada podría ser *casual* en tal máquina. Sin embargo, es indudable que una cadena tan regular termina con ser no casual en cualquier máquina, *si suficientemente larga*. Más concretamente, para cada máquina  $U$ , existe un número natural  $n$ , tal que la descripción “ $n$  veces 0” (por seguir con el ejemplo), traducida en bits, sea sustancialmente más corta que la cadena que produce; que, de este modo, será no casual. Para probarlo se puede considerar, en la máquina, la reproducción de un código exponencial en una cierta base  $b$  y repetir el

razonamiento de la metademostración.

Como ejemplo inverso, podemos suponer que, refiriéndonos al código clásico en base 2, la descripción “2127 veces 110” no sea *sustancialmente* más corta que la cadena que representa: esto, como simple consecuencia de pretender un altísimo grado de compresión (mucho más grande de 10 bits). Si no lo es por “culpa” de pocos bits, entonces la misma descripción en una máquina universal que usara el primero de los códigos antes ejemplificados, podría ahora representar una compresión *sustancial*: en efecto, el número 2127 aquí se representa sólo con “10”, mientras que en el clásico código binario tiene muchos más bits (claro que se podría poner un ejemplo diferente en que esta diferencia de bits fuera tan grande como quisiéramos). En definitiva, dicha cadena podría ser casual en el primer código y no casual en el segundo, en base al mismo grado de compresión convenido.

Dada una cadena suficientemente larga, casual para una determinada máquina universal, no hay nada – por cuanto sé – que prohíbe que exista *siempre* otra máquina universal, que use un código diferente, en la que dicha cadena sea no casual, según el mismo parámetro de compresión juzgado satisfactorio. La impresión de que, más bien, esto sea cierto, deriva del hecho que, en principio, me parece siempre posible definir, sin emplear demasiados bits, un código donde a una cierta cadena arbitraria en bits y en longitud se reasocie un número de bits bastante menor (siendo dicho “bastante” aproximadamente proporcional a la longitud de la cadena originaria)<sup>110</sup>. Si esto es cierto, entonces cualquier cadena suficientemente grande podría ser *sustancialmente* comprimida; pero, para hacerlo se necesitaría

---

<sup>110</sup> Se entiende que esto debería metademostrarse rigurosamente. Sencillamente, estamos adelantando una conjetura fundada sobre una impresión intuitiva que podría revelarse errónea.

emplear, en general, una máquina universal *ad hoc*, para la cual, como sabemos, siempre quedará una cantidad aplastante de otras cadenas casuales. En todo caso, sería imposible que un conjunto *finito* de máquinas universales “dejase”, de esta manera, sólo un número finito de cadenas casuales. De hecho, una máquina universal cualquiera siempre es capaz de simular, con un programa finito, el comportamiento de un número finito de otras máquinas: entonces, también para ella habría un número finito (aunque distinto del anterior) de cadenas casuales, lo cual es imposible. En cambio, manteniendo que la propiedad enunciada sea verdadera, existiría ciertamente un conjunto *infinito* de máquinas universales que “eliminase”, en el sentido descrito, la casualidad de todas las cadenas más largas de un determinado valor. Pero es evidente que, al tratarse de una infinidad no efectivamente numerable, sería un tipo de “resolución” de la casualidad totalmente ilusoria en práctica.

### **III.8. Vanagloria de Chaitin**

Desgraciadamente, Chaitin se concede afirmaciones superficiales, a menudo incorrectas, que dan lugar a peligrosas confusiones sobre la cuestión de la incompletitud, de por sí ya no tan fácil. Sus (numerosos) defensores afirman que estos problemas surgen sólo cuando se atribuye, erróneamente, un peso exagerado a algunas afirmaciones informales suyas, que pretenden únicamente aclarar la cuestión al gran público. Pero, algunos errores que señalaremos demuestran que no siempre es así. Además, también es indudable que, en el empeño de publicitar lo más posible algunos de sus resultados, él les otorga una importancia que en realidad no poseen.

La primera, fundamental, incorrección que señalamos es precisamente su ligera proclamación de haber descubierto “la

casualidad en Aritmética”<sup>111</sup>. Como hemos visto, la casualidad es una propiedad que *concierna a las cadenas de caracteres* y no, en manera directa, a los números naturales. En el habitual código en base 2 tenemos que, efectivamente, un número infinito y preponderante de las cadenas que representan los números naturales son casuales. Pero, obviamente, *no existe ninguna razón lógica* que imponga la elección de una codificación en lugar de otra. En los últimos dos códigos no exponenciales que ejemplificamos en el apartado anterior, ocurre que sólo un número finito de números naturales (o mejor dicho, de cadenas que representan números naturales) es casual. De hecho, hemos observado que una secuencia del tipo “1111...” termina siendo no casual en cualquier máquina universal. El hecho de que codificaciones como éstas sean grotescamente dispendiosas de caracteres, es una cuestión que no atañe ni a la Teoría de los números naturales ni a la Lógica. La única propiedad de la Aritmética (pero, más en general, de cualquier Sistema formal que satisfaga las hipótesis del Metateorema de incompletitud) relacionada con la casualidad de las cadenas, es la imposibilidad, para dicha Teoría, de demostrar la casualidad de cadenas lo bastante largas. La cual, como hemos visto, es una reformulación del Metateorema de incompletitud<sup>112</sup>.

Por otra parte, también hemos observado que *la casualidad*

---

<sup>111</sup> Dos ejemplos: <<Recientemente he demostrado que existe casualidad en la teoría de los números. Mi trabajo demuestra que – usando una metáfora de Einstein – ¡a veces Dios juega a los dados con los números enteros!>>, G.J. Chaitin: *La casualità in Aritmetica*>>; <<En pocas palabras, Gödel descubrió la incompletitud, Turing la incomputabilidad y yo la casualidad>>”, prólogo del libro *The unknowable*. Afirmaciones de este tipo se repiten en casi todas sus publicaciones más recientes.

<sup>112</sup> Según parece, ninguna de las publicaciones consultadas señala el error lógico que acabamos de discutir.

*de las cadenas tampoco es absoluta, sino relativa* al programa interno (con una atención especial al código) empleado por la máquina universal.

En el mismo artículo de «Le Scienze» citado en la última nota, Chaitin escribe:

La mayor parte de los matemáticos no ha dado mucha importancia [a la incompletitud]... [en cambio] quizá sería necesario buscar nuevos axiomas válidos para los números enteros. La cantidad de problemas matemáticos que han quedado sin resolver durante cientos o miles de años tiende a reafirmar mi tesis. ¿No podría ser que alguno de estos enunciados fuese indemostrable? Si así fuera, quizás los matemáticos deberían aceptarlo como axioma. Esta propuesta podría parecer ridícula a muchos matemáticos... pero no a los científicos empíricos... En realidad, en algunos casos, los matemáticos ya han asumido como fundamento conjeturas no demostradas pero útiles.

Muchos de los axiomas que fundan las Teorías matemáticas ordinarias poseen una primitividad que hace incuestionable su indecidibilidad. Ciertamente, no es siempre así. Cuando no lo es, la preocupación constante de los Matemáticos es la de buscar una demostración/confutación del enunciado o metademostración de su indecidibilidad. Este criterio tradicional, no solamente parece sensato, sino es capaz de producir resultados valiosos desde el punto de vista tanto epistemológico como puramente matemático. Lo hemos constatado en el caso del  $V$  postulado de Euclides (que en efecto resistió dos mil años); pero también las metademostraciones de indecidibilidad del axioma de elección y de la hipótesis del continuo constituyen sin duda resultados de notable interés, tanto por el tema en sí como por el método empleado.

Por lo dicho, el considerar un enunciado como indemostrable sobre un fundamento exclusivamente empírico, suena como a

querer renunciar a priori al desarrollo de la Lógica y Matemática posiblemente en relación con él. Además, sería inútil. Cuando un enunciado que parece esencial o importante para el progreso de la teoría se resiste a la demostración o clasificación como indecible, los Matemáticos, adoptando desde mucho un criterio de tipo empírico, usan precisamente el término *conjetura*. Las conjeturas se tratan como enunciados verdaderos (es decir, de hecho como axiomas) para estudiar sus consecuencias, con la eventualidad de que finalmente produzcan equivalencias demostrables o refutables. Considerarlos *axiomas* sin más que por empirismo sería, en síntesis, no sólo presuntuoso y renunciador, sino específicamente innecesario. La “presunción renunciataria” consiste precisamente en el “proclamar”, sin ninguna justificación lógica ni ambición a tenerla, que la Teoría original, supuesta consistente, conserve la consistencia con los nuevos axiomas; y esto, repetimos, sin ninguna ventaja concreta, ya que cada consecuencia del suponer como verdaderos estos enunciados puede estudiarse igualmente bien en la Teoría original.

No se entiende por qué el Metateorema de incompletitud debería cambiar este estado lógico de las cosas: lo único que hace es aclararnos la naturaleza de los enunciados indecibles de una Teoría que satisface sus hipótesis. En particular, nos indica que éstos son infinitos, inexorablemente presentes y no identificables integralmente de forma mecánica. Desde la normal perspectiva, ciertamente malas noticias; las cuales, no obstante, para ningún enunciado indecible obstaculizan la posibilidad de un reconocimiento puramente metamatemático (con la eventualidad de nuevos progresos lógico-matemáticos). Y, sobre todo, que en ningún caso sirven para justificar el uso de un “remedio” insensato.

Esta actitud, destinada evidentemente a suscitar clamor más

allá del buen sentido, se repite enfáticamente en casi todas las obras más recientes de Chaitin: él, víctima de un obtuso entusiasmo de la incompletitud, llega hasta cuestionar la misma oportunidad de los Sistemas axiomáticos hilbertianos<sup>113</sup>.

Otra incorrección ha sido destacada recientemente por T. Franzén<sup>114</sup>. En el *abstract* de un artículo suyo, Chaitin afirma que, como consecuencia del Metateorema de incompletitud de Gödel, “*un conjunto de axiomas de [complejidad] K, no puede demostrar un enunciado de [complejidad] sustancialmente mayor de K*”<sup>115</sup>. En primer lugar, en esta sentencia, sorprende el referirse a los enunciados: el Metateorema de incompletitud de Chaitin establece una limitación al deducir la complejidad de *cadena arbitrarias* y no sólo de las que constituyen enunciados del Sistema. Luego, la conclusión es evidentemente errónea. Franzén rebate así: del único axioma “ $\forall x(x=x)$ ”, de complejidad constante, se puede obtener un teorema, del tipo “ $n=n$ ”, de complejidad arbitrariamente grande: basta con que la cadena que represente  $n$  tenga una complejidad lo suficientemente alta (en el código en base 2, esto está garantizado al crecer en  $n$ ). En otro escrito, Chaitin parece

---

<sup>113</sup> léase, por ejemplo: G. Chaitin, *The halting probability  $\Omega$ : irreducible complexity in pure mathematics*, p. 2 y ss.

<sup>114</sup> T. Franzén: *Gödel's Theorem: an incomplete guide to its use and abuse*.

<sup>115</sup> G. J. Chaitin: *Gödel's Theorem and Information*. En realidad Chaitin no usa el término *complejidad* sino “contenido de información”. Empero, como se está refiriendo al Metateorema de incompletitud, esta identificación parece espontánea. Por otra parte, en el caso de que, en cambio, se refiera a un contenido epistemológico más general (como quizás sugeriría otra de sus frases de efecto: “*querría decir que de 10 libras de axiomas no se puede obtener un teorema de 20 libras*”), se podría estar de acuerdo a condición de añadir el contenido epistemológico de las reglas deductivas; es decir, refiriéndose a las *premisas* y no a los solos axiomas.

querer corregir el tiro, proponiendo la conjetura de que «*cuando sucede, no es posible demostrar que un teorema tiene una complejidad sustancialmente mayor que la del conjunto de axiomas del que deriva*»<sup>116</sup>; la frase equivaldría a “ninguna máquina universal  $U$  puede concluir que  $K(t)$  es sustancialmente mayor que  $K(M)$  (la complejidad del programa interno), sea cual sea el teorema  $t$ ”. Sin embargo, manteniendo para el término *sustancialmente* el significado ya establecido (o sea, un valor variable a priori, determinado solamente por una convención), se llega a la conclusión de que esto también es falso. En efecto, la afirmación dista mucho de la formulación del Metateorema de incompletitud de Chaitin, que recordamos: “para cada máquina universal  $U$ , existe un  $c$  tal que  $U$  no puede concluir que  $K(s) > c$ , sea cual sea la cadena  $s$ ”. Se percibe que las dos frases podrían reconciliarse (pasando por alto el hecho de que la primera pierde de generalidad refiriéndose sólo a los teoremas), en el caso de que “mayor que  $c$ ” implicara “sustancialmente mayor que  $K(M)$ ”, o sea si  $c$  fuera sustancialmente mayor que  $K(M)$ . Pero  $c$ , por lo que hemos antes concluido, difiere de un valor constante de  $K(M)$ ; por lo tanto, basta con aumentar oportunamente el grado de *sustancialidad*, para obtener que  $c$  no es *sustancialmente* mayor que  $K(M)$ .

Franzén continua criticando, creemos que justamente, otras afirmaciones “a la ligera” de Chaitin; pero, las omitimos no juzgándolas de interés fundamental.

Finalmente, atenderemos el tema de la famosa constante de Chaitin  $\Omega$ . En una arbitraria máquina universal  $U$ , pongamos en marcha todos los programas posibles, ordenados por longitud. Definimos la secuencia binaria  $V_U$ , tal que su  $i$ -ésimo bit es “1”

---

<sup>116</sup> G. J. Chaitin: *Lisp Program-size complexity II*.



si el programa  $i$ -ésimo se para, “0” si no se para.  $V_U$  es una cadena binaria de longitud infinita, cuyo conocimiento resolvería el problema de la parada de  $U$  y, por la universalidad de la máquina, cualquier problema matemático de cualquier Teoría *ef. ax.* (o, más en general, cuyos axiomas sean efectivamente numerables). El Metateorema de incompletitud prohíbe que  $V_U$  pueda ser calculado por una máquina.  $V_U$  es una cadena “oráculo” muy interesante, pero sus cifras no son del todo casuales: si escogemos al azar una de las posibles combinaciones binarias de longitud  $k$ , la probabilidad de que represente el código de un programa “sensato” (o del que no se sepa reconocer con un simple vistazo si se para o no), es baja, para cada  $k$ . Normalmente, cuando las instrucciones no están bien escritas, o no obedecen a reglas sintácticas precisas, se hace de manera que la máquina termine, imprimiendo un mensaje de error. Por lo tanto, comúnmente, la cadena  $V_U$  tiene muchísimos más “1” que “0”.

Una evolución de cadena “oráculo” sin duda mucho más interesante, se obtiene a través de la constante  $\Omega$  (que nosotros preferimos llamar  $\Omega_U$  para recordar que depende de la máquina), introducida por Chaitin.  $\Omega_U$  puede definirse como el código binario de un número real comprendido entre 0 y 1: el que representa la probabilidad de que un programa de la máquina  $U$ , elegido al azar, se pare<sup>117</sup>. En base a lo que hemos observado, tampoco los primeros bits de  $\Omega_U$  son casuales: para una máquina usual, por ejemplo,  $\Omega_U$ , expresado en base 10, será del tipo 0.9999623..., o sea muy cercano a 1 (que representa la certeza de

---

<sup>117</sup> De todas formas, para dar sentido a tal definición, hay que restringir el ámbito de las máquinas al de aquellas cuyos programas sean *auto-limitados*: o sea, su longitud en bits debe ser uno de los input del propio programa. Pero no nos interesa profundizar más en el asunto.

que la máquina se pare). Sin embargo, tras algunos “9”, la cifra se hace rápidamente imprevisible, como se puede intuir.

La secuencia binaria de  $\Omega_U$  representa una especie de “máxima compresión” del contenido informativo de  $V_U$ : conociendo los primeros  $n$  bits de  $\Omega_U$  se puede resolver el problema de la parada para todos los programas de longitud menor o igual a  $n$  (los cuales son  $2^{n+1}-2$ )<sup>118</sup>. Para hacer lo mismo con  $V_U$ , en cambio, ¡sería necesario conocer sus primeros  $2^{n+1}-2$  bits! De las muchas propiedades de  $\Omega_U$ , quizás la más interesante sea la siguiente: aun siendo no calculable, es el *límite* de una lista infinita, efectivamente numerable,  $s_1, s_2, \dots$  de cadenas finitas. De un modo más claro, tenemos que: el  $i$ -ésimo bit de  $\Omega_U$  vale  $b$  si y sólo si existe un  $c > 0$  tal que el  $i$ -ésimo bit de  $s_j$  es  $b$ , para cada  $j > c$ . En concreto, lo que se puede hacer con una máquina para calcular  $\Omega_U$ , es intentar demostrar que la  $i$ -ésima cifra de dichas cadenas finitas  $s_1, s_2, \dots$  “se asienta” sobre un valor constante  $b$ ; es decir, que  $b$  ya no cambiará en todas las cadenas sucesivas. Haciendo esto, se habrá demostrado que el  $i$ -ésimo bit de  $\Omega_U$  es precisamente  $b$ . El número de cifras de  $\Omega_U$  calculables mecánicamente (por la misma máquina universal  $U$  o por cualquier otra) siempre es finito: el mismo Chaitin prueba que, para cada máquina con programa interno  $M$ , existe un número  $c$  tal que cada enunciado del tipo “el  $i$ -ésimo bit de  $\Omega_U$  es  $b$ ”, con  $i > K(M) + c$ , es indecidible para la máquina<sup>119</sup>. En efecto, se trata de otra formulación del Metateorema de incompletitud. Esto no significa, naturalmente, que exista una determinada cifra-límite en el cálculo del número  $\Omega_U$ : aumentando oportunamente la complejidad de la máquina  $M$ ,

---

<sup>118</sup> Una explicación accesible del modo, en M. Gardner: *Il numero casuale  $\Omega$  e il problema dell'arresto*.

<sup>119</sup> G. J. Chaitin: *The limits of Mathematics*.

siempre se puede calcular cualquier su remota cifra; pero, ninguna máquina puede “avanzar eternamente”, o sea calcular todas sus cifras (en caso de que dispusiera de un tiempo infinito).

El cálculo de un número considerable de cifras de  $\Omega_U$  en una máquina universal oportuna, ha sido llevado a cabo por Calude y otros<sup>120</sup>.

El fascinante interés epistemológico del número  $\Omega_U$  es indiscutible y su introducción constituye sin duda una de las glorias de Chaitin (si no lo tratamos en el apartado precedente fue sólo para simplificar su lectura); las cuales, por supuesto, no se acaban aquí. Sin embargo, es evidente que él exagera su importancia. La cantidad de sus publicaciones sobre  $\Omega$  (o una simple ojeada a su *home page*) bastan para demostrarlo.  $\Omega_U$  no es, naturalmente, el verdadero *objetivo* del conocimiento: ¿qué deberíamos hacer con una secuencia casual de bits? Es verdad que a partir de un determinado número de sus cifras se puede resolver el problema de la parada de la máquina para un número elevado de sus primeros programas (que representan el único interés propiamente matemático de la historia); pero, para obtener esas cifras lo único que se puede hacer es... ¡¡resolver el problema de la parada de la misma máquina para un número incluso *superior* (como confirman Calude *et al.*) de los primeros programas de la máquina!! Dar algunas cifras de  $\Omega_U$  es sólo un fantástico, insuperable, modo de *resumir* el comportamiento de los primeros programas de la máquina. Luego, lo que efectivamente hagan estos programas (que sería el verdadero objetivo), parece no interesar ni a Chaitin ni a sus seguidores<sup>121</sup>. Claro, esto se debe a que ellos están atraídos por el aspecto

---

<sup>120</sup> C. S. Calude; M. J. Dinneen; Chi-Kou Shu: *Computing a glimpse of randomness*.

puramente teórico del tema, de cuyo innegable poder de sugestión participamos. Pero, después de todo, puesto que ninguna divinidad nos regala cifras de  $\Omega$ , éstas tampoco pueden ser *el medio* para obtener el conocimiento<sup>122</sup>: sólo son el inmejorable modo de resumirlo, tras haberlo obtenido – posiblemente sobre temas interesantes – mediante teoremas y metateoremas.

### III.9. Otras equivocaciones

Ya hemos apuntado distintos errores de interpretación del Metateorema de incompletitud<sup>123</sup>, pero hay más, y algunos bastante relevantes.

Antes de 1936 (año en que Malcev, como vimos en el apartado II.17, establece la actual interpretación general del teorema de Löwenheim-Skolem), era común el error de

---

<sup>121</sup> Calude *et al.* no evidencian el interés propiamente matemático de los programas para los que resuelven el problema de la parada. Por lo que imaginamos que éste sea escaso; pero, aunque así no fuera, lo que tendría valor matemático sería en todo caso la particular demostración de parada/no parada y no el correspondiente peso sobre un bit de  $\Omega$ .

<sup>122</sup> Como sin embargo Chaitin sugiere en el artículo: *Meta-mathematics and the foundations of Mathematics*, EATCS Bulletin, vol. 77, pp. 167-179 (2002). Aquí expone un método que en principio debería ser capaz de resolver la hipótesis de Riemann. Pero el razonamiento es un manifiesto círculo vicioso.

<sup>123</sup> Para las próximas cuestiones, la Tesis de Church-Turing no es indispensable, por lo que podríamos referirnos al *Teorema* de incompletitud (así como a axiomas *recursivamente* numerables, etc.). Sin embargo, nos parece más orgánico mantener la generalización.

considerar la no categoricidad de los Sistemas formales como una consecuencia del Metateorema de incompletitud. Reiteramos que, en efecto, si un Sistema para cuyo lenguaje es válido el Teorema de s-completitud es sintácticamente incompleto, no puede ser categórico: porque admite modelos para los que el valor de verdad de un enunciado indecidible es opuesto, y, por lo tanto, no isomorfos. Sin embargo, la no categoricidad de un Sistema con un modelo infinito es una consecuencia *general* del Teorema de s-completitud (ap. II.17). Y vale también para Sistemas sintácticamente completos, como *TFR* y *PAV* (recordemos, el Sistema formal capaz de deducir todos y solos los enunciados de *PA* verdaderos en el modelo estándar). De este modo, también *PAV*, al que, cierto, no se aplica el Metateorema de incompletitud, admite modelos no estándar (para llegar fácilmente a esa conclusión, se puede repetir, tal cual, la metademostración que involucra la constante *c*, como en el apartado II.16). Sin embargo, el mismo Gödel, en 1934, ¡parece considerar incluso la no categoricidad de las *verdades de la Aritmética* como una consecuencia de su Teorema de incompletitud<sup>124</sup>! Y hasta hoy muchos siguen afirmando que la no categoricidad de *PA* se debe a su incompletitud: una afirmación *epistemológicamente* errónea, como esperamos haber aclarado.

Pero vayamos al error, a nuestro juicio, más clamoroso e inexplicable: el de considerar el Metateorema de incompletitud válido para la *Teoría aritmética integral*; o sea, recordemos, para el Sistema aritmético que usa el principio de inducción completa, es decir, generalizada a cada subconjunto del universo (ap. II.14). Como hemos observado representando la Teoría en

---

<sup>124</sup> Un desliz considerado “extraordinario” por algunos. Para un análisis detallado de toda la cuestión, recomendamos J. Kennedy: *Completeness Theorems and the Separation of the First and Higher-Order Logic*.

*TC*, los axiomas generados por este esquema axiomático son innumerables; por lo tanto, no pueden ser efectivamente numerables. El Sistema no satisface las hipótesis del Metateorema de incompletitud.

Parece injustificable que casi todas las publicaciones, cartáceas o reperibles en la *Web*, evadan este asunto. Normalmente, la terminología precisa usada deja que desear inesperadamente en el punto en cuestión, y se afirma algo vago como “toda la Aritmética, puesto que contiene los axiomas de Peano, está sujeta al Teorema de incompletitud”. Pero también *PAV*, completo, es una ampliación de *PA*, que añade a esta Teoría otros axiomas: todos los enunciados indecidibles de *PA* verdaderos en el modelo estándar. Indudablemente, el hecho de que un Sistema contenga las premisas de otro Sistema que satisface las hipótesis del Metateorema, no es suficiente para que éste haga lo mismo: además de la “potencia expresiva”, también se tiene que conservar la decidibilidad (o, más generalmente, la efectiva numerabilidad) de los axiomas.

Subrayamos que sorprende no sólo la imposibilidad de encontrar afirmaciones que concuerden con nuestro punto de vista (como del tipo «el Teorema de incompletitud no vale para la Aritmética “del segundo orden”»); sino también la extrema dificultad a la hora de encontrar, enunciada claramente, la propiedad inversa<sup>125</sup>. Un hecho cuanto menos sospechoso.

En efecto este error se remonta a Gödel y, por lo que

---

<sup>125</sup> Dos excepciones: E. Moriconi: *I teoremi di Gödel*, p. 32: “obviamente el primer teorema de incompletitud es demostrable también en la Aritmética de segundo orden”; y C. Wright: *On Quantifying into Predicate Position: Steps towards a New(tralist) Perspective*, p. 22. En este último trabajo quizás es significativo que el autor comente esta propiedad con una serie de delicadas cuestiones epistemológicas. De todas formas, en ambos casos la propiedad es considerada como obvia, sin ninguna explicación.

sabemos, nunca ha sido puesto en evidencia ni corregido. En la misma presentación de su Teorema de incompletitud en el convenio de Königsberg de 1930, Gödel expuso su resultado como una prueba de la invalidez del Teorema de  $s$ -completitud para [el lenguaje de] la Aritmética: ya que, explica Gödel, la Aritmética es categórica<sup>126</sup>. Puesto que se refiere a una Aritmética categórica, debe tratarse de la que usa el principio de inducción completa; es decir, de la *integral*. En realidad ya hemos visto que su categoricidad, ella sola, es suficiente para descartar la validez del Teorema de  $s$ -completitud para su lenguaje; pero, evidentemente, Gödel llega a esa conclusión considerando la incompletitud sintáctica que le vendría al aplicar su nuevo Teorema. En conjunto, juzgamos comprensible este error en Gödel: teniendo en cuenta que, como los demás lógicos de su tiempo, sobrevuela la necesidad de separar desde un punto de vista lógico los Sistemas formales de los irreductiblemente no formales, se le escapa que el principio de inducción completa genera una cantidad innumerable de axiomas (y, por lo tanto, no totalmente codificable con sus gödelianos).

En cambio, no comprendemos la persistencia de este error hasta nuestros días. Siguiendo la opinión que consideramos errónea, supongamos querer aplicar la demostración original de Gödel a la Teoría aritmética integral. Recordemos que en  $PA$  se demuestra que existe una expresión  $G(x,y)$  tal que, interpretada en el modelo estándar, signifique “ $x$  es el código de la demostración del teorema de código  $y$ ”; puesto que el modelo estándar también es modelo (único, a menos de isomorfismo) de la Aritmética integral, también en esta última Teoría, si es correcta, dicho significado debe mantenerse. Y en efecto se mantiene, pero la diferencia fundamental de ámbito semántico, es que ahora las

---

<sup>126</sup> K. Gödel: *Collected Works. I: Publications 1929–1936*, p. 26-29.

demostraciones con código no pueden ser *todas*: o serían numerables. Así, en la Teoría Aritmética integral, también la interpretación estándar (la única posible) del enunciado de Gödel, de código  $\tilde{y}$ , es la misma: “*no existe código de una demostración de este enunciado*”, o bien, “*yo no soy demostrable en PA*”. Pero ahora esto no significa “*yo no soy demostrable en esta Teoría*”, como significa dentro de *PA*. Por lo tanto, no hay nada que impida que el enunciado  $\tilde{y}$  pueda demostrarse (mediante una demostración no codificable, siendo intrínsecamente semántica), resultando ser un teorema de la Aritmética integral; concretamente, que sea una de las nuevas deducciones obtenibles a través del principio de inducción completa.

Es probable que muchos malentendidos surjan cuando se quiera expresar la inducción completa mediante un solo enunciado simbólico, a saber:

$$\forall \underline{P}((\underline{P}(0) \text{ e } \forall x((\underline{P}(x) \text{ e } S(x,y)) \rightarrow \underline{P}(y))) \rightarrow \forall x \underline{P}(x))$$

que se asumirá como único axioma. Esto, naturalmente, es del todo legítimo. Ahora, por el hecho de que dicho axioma es exhibido, claro y, supuestamente, inequívoco, seguiría la efectiva axiomatizabilidad de la Aritmética integral. La equivocación esencial de esta última inferencia, como señalamos al final del apartado III.1, consiste en el considerar que una colección finita sea siempre decidible. En el axioma, la secuencia “ $\forall \underline{P}$ ” es formalmente indefinida: todos los demás axiomas y reglas deductivas clásicas, después del símbolo “ $\forall$ ”, tienen siempre una *variable*; sin embargo  $\underline{P}$  es un predicado (y además no definido formalmente en el Sistema). Por consiguiente, el axioma es estéril desde el punto de vista formal. Si se pretende que éste genere (infinitos) nuevos teoremas,



tenemos que interpretarlo semánticamente. En particular, sabemos que la secuencia “ $\forall \underline{P}$ ” debe interpretarse con “cualquier sea la propiedad  $\underline{P}$ ”. Por lo tanto el Sistema no es formal: algunos enunciados suyos, en particular un axioma, se deben interpretar semánticamente. Es evidente que en estas circunstancias, en general, no subsisten ni la decidibilidad, ni la efectiva numerabilidad de los axiomas. Recordamos, en efecto, que ambas condiciones implican la formalidad de los entes, en cuanto *outputs* de una máquina. Si un nuestro amigo usara el mismo enunciado simbólico, pero interpretando la secuencia “ $\forall \underline{P}$ ” con “cualquier propiedad de los números menores de 37”, en realidad asumiría *otro axioma*, se referiría a una Teoría axiomática *distinta* de la Aritmética integral. No obstante, una máquina cualquiera, siendo incapaz de discriminar el significado de los términos, concluiría erróneamente que se trata del mismo axioma.

Para descubrir si la semántica empleada es eliminable, basta representar el Sistema en el seno de la Teoría formal de los conjuntos, *TC*, como hicimos en el apartado II.14. La secuencia “ $\forall \underline{P}$ ”, que debe traducirse con “ $\forall A \in P(U)$ ”, siendo *U* el universo de las variables, no puede seguir siendo un enunciado de la Teoría a representar, sino que tiene que ser un enunciado propio de *TC*<sup>127</sup>. Se obtiene, como observamos, un esquema axiomático conjuntista que genera, siendo el conjunto  $P(U)$  innumerable, una cantidad innumerable de axiomas inductivos. Ninguna máquina puede producir un elenco exclusivo (y hasta no exclusivo) que los contenga todos. La informalidad del

---

<sup>127</sup> Para poderlo expresar en la Teoría a representar, habría que definir en ella las herramientas análogas a las conjuntistas, como  $\in$ ,  $P(U)$ , etc., intentando así definir *TC* dentro del mismo *TC*. Lo cual es imposible (como ya observamos en el ap. II.7): la colección de los enunciados de la Teoría que se está representando ya no podría ser un *conjunto*.

principio de inducción completa, y entonces del Sistema, no es eliminable.

Recordamos que estos pasajes se pueden repetir exactamente para el Sistema *PA* (ap. II.14), con la diferencia esencial que ahora el esquema axiomático conjuntista genera una cantidad *numerable* de axiomas simbólicos y la formalidad se restablece. Más aún, resulta que los axiomas son distinguibles mecánicamente, es decir decidibles.

Afirmaciones como “*la incompletitud sintáctica de la Aritmética del primer orden produce la incompletitud semántica de la Lógica de segundo orden*”<sup>128</sup> parecen similares al error de Gödel. Pasando por alto la ambigua terminología del “orden expresivo”, de nuevo parece que, en primer lugar, se quiera sugerir la transmisión automática de la incompletitud sintáctica al Sistema ampliado, o sea, al “de segundo orden” (primera equivocación); y, a continuación, a partir de la incompletitud sintáctica y de la categoricidad, deducir la incompletitud semántica (cuando bastaría la sola categoricidad, más la infinidad del modelo). Por lo demás, la afirmación se desmiente literalmente con la simple observación de que tampoco para el lenguaje de la *Teoría integral de los reales* (de segundo orden, en su versión original), informal y categórica, vale el Teorema de *s-completitud*; y esto a pesar de que su versión formal, *TFR*, (de primer orden, en su versión original) sea sintácticamente completa. Evidentemente, la incompletitud semántica del lenguaje de esta Teoría la *produce* sólo su categoricidad, junto a la infinidad del modelo.

Si estamos en lo cierto, llegados a este punto tiene sentido preguntarse si las Teorías integrales de la aritmética y de los

---

<sup>128</sup> E. Moriconi: *I teoremi di Gödel*, p. 743. Una frase muy similar se repite en el *abstract* de F. Berto: “Gödel’s first theorem”.

reales pueden ser completas, o bien semánticamente completas (las dos nociones son equivalentes en el caso de categoricidad, como mostramos en el ap. II.17). Lo cual, recordemos, es bien distinto del afirmar que para *los lenguajes* de dichas Teorías valga el Teorema de *s-completitud* (ap. II.17). Dada la semanticidad intrínseca de estos Sistemas, en ellos las deducciones dependen, en general, del significado atribuido a las proposiciones; por lo que, su propio ámbito deductivo está sujeto al terreno de la interpretación. De lo que descende que la respuesta a nuestra cuestión no es codificable en un Sistema formal y sólo puede ser afrontada por la metamatemática. Sin embargo, debemos recordar de encontrarnos en un caso en el cual no es cierto que esta última pueda siempre reconocer eventuales enunciados indecidibles (ap. II.15). Una consideración muy superficial nos empujaría a considerar incompleta la Aritmética integral: la simple observación de que, para que una determinada propiedad sea verdadera para cada  $n \in \mathbb{N}$ , no se ve como hecho lógicamente necesario que se deba poder *demostrar* que si ella vale para el número  $i$  tenga que valer también para  $i+1$ . Si es realmente así, la Aritmética integral no sería capaz de deducir todas las verdades del modelo estándar, quizás ni siquiera todos los teoremas de *PAV*. Obviamente, no se trata de una argumentación minimamente conclusiva. El problema de la individuación de metademostraciones entorno a este argumento, por lo que sabemos, permanece abierto para ambas Teorías.

Durante muchos años, tras el descubrimiento de la incompletitud esencial, se siguió creyendo (o esperando) que los enunciados indecidibles relacionados con el Metateorema de incompletitud fueran todos del tipo muy peculiar del enunciado de Gödel. O bien, que el Metateorema no tuviese ninguna consecuencia concreta sobre los habituales enunciados de real

interés. Un largo trabajo iniciado en 1960 por J. Robinson, M. Davis y H. Putnam y terminado en 1970 por Y. Matyasevich, ha demostrado que no es así<sup>129</sup>. Consideremos una arbitraria ecuación polinomial con coeficientes enteros y exponentes naturales (como, por ejemplo,  $4x^{23}+125x^{12}y^7z-34yz^{12}-770=0$ , o bien  $7x^2-4y^{29}+15yz-18=0$ ). Nos preguntamos si posee *soluciones enteras* para sus variables. Este problema se suele resumir hablando de ecuaciones *diofánticas*, del matemático alejandrino Diofanto. Fijense en que no hablamos concretamente de encontrar las soluciones, sino únicamente de poder concluir si existen o no. Pues bien, el resultado de susodicho estudio es que este problema es equivalente a resolver el enunciado de *TC*:  $\exists m \in N(f_R(n)=m)$ , donde  $f_R(n)$  es una función recursiva *arbitraria* (ap. III.4). Del Metateorema de incompletitud, por lo tanto, sigue que dicho problema es esencialmente indecidible. En otras palabras, considerada una ecuación diofántica arbitraria, el enunciado, expresable también en *PA*, que afirma que dicha ecuación tiene soluciones enteras es, en general, indecidible. “En general” significa que sólo para casos particulares (pero, igualmente de número infinito), el enunciado es demostrable o refutable; en lo restantes casos, igualmente infinitos, es indecidible. Además, esta indecidibilidad es de tipo esencial, o sea, como ya vimos, no existe ningún procedimiento mecánico capaz de catalogar todos los enunciados en “demostrables”, “refutables”, e “indecidibles”, o bien susodichas ecuaciones en “con soluciones enteras”, “sin soluciones enteras” e “indecidibles”. De esta manera, el trabajo proporcionó un ejemplo de tangible importancia matemática sobre la incompletitud, dando una respuesta negativa al *décimo*

---

<sup>129</sup> La mejor síntesis, probablemente en M. Davis; Y. Matiyasevich; J. Robinson: *Hilbert's Tenth Problem: Diophantine Equations: Positive Aspects of a Negative Solution*.

*problema de Hilbert*<sup>130</sup>.

Finalmente, es preciso desmentir el equívoco, bastante frecuente, de exaltar irracionalmente el aspecto indeterminista del Metateorema de incompletitud. Sin duda, en él deposita su nefasto peso la moderna pueril tendencia al “entusiasmo de la incertidumbre”. Una actitud, sin sorpresa de moda tras la afirmación de la Teoría cuántica y de la Relatividad, algo repugnante para el escueto raciocinio.

Para ningún determinado enunciado indecidible  $I$  de un Sistema formal, que suponemos consistente, el Metateorema de incompletitud impide que exista un razonamiento que pueda distinguirlo, o sea, que pueda reconocer, concluir, metademostrar que  $I$  es indecidible. Sólo prohíbe que el conjunto de todas estas conclusiones sea mecanizable: éste conjunto estaría formado por un número infinito de acuerdos irreductiblemente semánticos. Por este aspecto, al contrario, el Teorema de  $s$ -completitud nos anima: dos modelos distintos del Sistema, uno en el que  $I$  es verdadero, otro en el que  $I$  es falso, *siempre tienen que existir*. Su individuación concretizaría una válida metademostración de que  $I$  es indecidible. Ya hemos observado (ap. III.6) que la representabilidad de un modelo es un concepto que, posiblemente, se puede debilitar convenientemente de forma que se incluyan estructuras cada vez más abstractas (y de esto son ejemplo las interpretaciones *forced* de Cohen); por lo tanto, *existen válidas razones de principio para considerar que tal metademostración sea siempre posible*. Lo cual no significa, obviamente, que en la práctica sea siempre

---

<sup>130</sup> En el 1900, Hilbert presentó al II Congreso Internacional de Matemáticas de París, una lista de 23 famosos problemas. El décimo preguntaba, precisamente, un procedimiento finito general capaz, dada una arbitraria ecuación diofántica, de determinar si admitía soluciones o no. La *Web* ofrece mucha información sobre los 23 problemas de Hilbert.

fácil de obtener, ni que determinados problemas no podrían quedar en punto muerto durante siglos o milenios. “Sólo” en el caso de *TC* (¡si “sólo” puede ser el adverbio oportuno para un Sistema tan fundamental!), este optimismo está sin duda fuera de lugar, a causa de la inevitable nebulosidad de sus “modelos”.

Observemos algunos ejemplos. En el caso de *PA*, una vez reconocido que un dado enunciado suyo es indecidible, la misma espontaneidad del modelo estándar, o sea de los naturales “intuitivos”, siempre debería permitir la conclusión de si éste es verdadero o falso en dicho modelo (casi siempre, el modelo que más interesa). Consideremos, por ejemplo, la conjetura de Goldbach: “cada número par mayor de 2 es suma de dos números primos”. Si es indecidible, por lo dicho, parece lógico (aunque desde un punto de vista más epistemológico que metamatemático) que esto deba poderse metademostrar. De dicha metademostración se concluiría de forma inmediata su verdad en el modelo estándar (de manera que podríamos incluirlo entre los axiomas de *PAV*). En efecto, si existiera un natural estándar para el cual la conjetura sea falsa, entonces sería falsa en todos los modelos que contuviesen dicho número (o, para ser exactos, un número a éste isomorfo). Pero *cada modelo* de *PA* contiene un número a éste isomorfo. Hay que destacar este punto: cada modelo de *PA*, estándar o no, contiene ciertamente objetos isomorfos a los números naturales estándar. Esto en base a los mismos axiomas de *PA* (ap. II.1): cada universo debe contener “0”,  $s(0)$ ,  $s(s(0))$ , ..., es decir entes isomorfos a los naturales estándar. Claramente, se trata de una peculiaridad de *PA* que, en general, no vale para los modelos no isomorfos de otros Sistemas matemáticos. Por ejemplo, las RECTAS de un modelo no euclidiano de *G* no contienen las rectas euclidianas, sino que son *todas* objetos de diferente naturaleza.

Retomando el razonamiento, entonces la conjetura de

Goldbach sería falsa en todos los modelos y no podría ser indecidible: su negación sería un teorema por el Teorema de  $s$ -completitud. En otras palabras, si la conjetura de Goldbach es indecidible, puede ser falsificada sólo por números naturales no estándar.

Claramente, esta conclusión no sería una deducción sintáctica de  $PA$ , sino una metademostración que determina un axioma de  $PAV$ ; un Sistema, como sabemos, no efectivamente axiomatizable.

Tomemos de ejemplo, ahora, una arbitraria ecuación diofántica  $D(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$  en las  $k$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_k$  y consideremos el enunciado de  $PA$  que expresa la ausencia de soluciones enteras suyas. Supongamos que dicho enunciado sea indecidible; entonces, tendrá que ser necesariamente *verdadero* en el modelo estándar. La razón es análoga al caso anterior: si existiera una  $k$ -upla de naturales estándar  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , tales que  $D(n_1, n_2, \dots, n_k) = 0$ , entonces el enunciado considerado sería falso en todos los modelos de  $PA$ , porque todos los modelos de  $PA$  contienen una  $k$ -upla isomorfa a la  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . Por lo tanto, si dicho enunciado es indecidible, tal ecuación diofántica no podrá admitir soluciones enteras estándar, sino solamente no estándar (y, necesariamente, tendrá que admitirlas de este tipo).

En definitiva, admitida la espontaneidad del modelo estándar, un atento análisis de cualquier enunciado de  $PA$  que se ha reconocido como indecidible, siempre debe permitir concluir su valor de verdad en el modelo estándar. Esto justifica, sin duda, un cauto optimismo *de principio* acerca de la posibilidad de individuar metamatemáticamente, aunque sea a uno a uno, los axiomas del Sistema completo  $PAV$ .

Viceversa, veamos el caso de  $TC$ . Como ejemplo interesante, que aún tiene que ver con los números naturales, podemos examinar el caso de un enunciado del tipo: “existe un número

finito de valores de  $x$  tal que  $C(x)$  se cumpla”, donde  $C(x)$  es una expresión de  $PA$ . Recordemos que el término “finito” debe definirse a través del universo  $N$  del modelo estándar<sup>131</sup>. De esto sigue que dicho enunciado no puede expresarse en  $PA$ , ya que su lenguaje es incapaz de distinguir sus diferentes modelos. En cambio, puede expresarse en  $TC$ .

Ahora bien, supongamos que tal enunciado se establezca, de algún modo, como indecidible en  $TC$ . De ello, se podría concluir que tiene que ser *verdadero* para los valores estándar de la variable  $x$ . De hecho, si fuera falso, o sea, si existiesen infinitos naturales estándar que verificaran  $C(x)$ , entonces, por lo que ya hemos observado, esta falsedad sería totalmente general, porque se mantendría admitiendo la posibilidad de valores también no estándar para  $x$ . Y, del mismo modo, se concluiría que  $C(x)$  tendrá que verificarse para un número infinito de naturales no estándar. Sin embargo, esta vez existe una objeción de naturaleza semántica: si dicho enunciado es indecidible en  $TC$ , entonces asume un valor diferente de verdad en los distintos “modelos” de  $TC$ . Pero cambiando el “modelo” de  $TC$ , cambia también el conjunto  $N$  y, por lo tanto, la misma definición de *finito*. En otras palabras, si se quiere que el enunciado conserve su significado epistemológico usual, parece que tiene que estar indisolublemente ligado a un “modelo” específico de  $TC$  (aquel cuyo significado de *finito* concuerde con la semántica de la metamatemática, que llamaríamos “modelo estándar”). Esta observación, que saca a la luz las ambigüedades de las

---

<sup>131</sup> Ya hemos observado (ap. II.19) que si en la definición de *finito* del apartado II.12 se usa, en vez del estándar  $N$ , el universo de un modelo no estándar, incluso numerable, se puede obtener un conjunto *infinito* en el sentido propiamente metamatemático. De hecho, si se toma  $n=c$ , donde  $c$  es una constante no estándar, se obtiene que los números naturales isomorfos a los estándar comprendidos entre  $\theta$  y  $n$  son infinitos.



interpretaciones del lenguaje de  $TC$  y de los propios conceptos de *finito* e *infinito* discutidos al final de la segunda Parte, revela inequívocamente la *discutibilidad* de cualquier razonamiento que concluya la indecidibilidad de un enunciado de tal tipo en  $TC$ .

### III.10. Consistencia

Y, por fin, llegamos a la cuestión considerada quizá como la más asombrosa que haya esclarecido la Lógica moderna: la relacionada con la consistencia. En realidad, básicamente hay un hecho bastante simple y espontáneo: que para concluir la consistencia de un Sistema Matemático no podemos limitarnos al lenguaje de la propia Teoría. Se requiere un lenguaje, eventualmente formalizado, *externo* al Sistema; que lo estudie “desde fuera”.

Hemos visto cómo  $TC$  demuestra la consistencia de las principales Teorías matemáticas en la hipótesis de que ella misma sea consistente. ¿Pero lo es de verdad? Si no lo fuera, toda la Matemática que puede ser representada en ella (es decir, todo aquello que normalmente se entiende como “Matemática”) caería como un castillo de naipes. Así que la pregunta es importante; ¿podría contestarla el mismo Sistema  $TC$ ? Claramente, si  $TC$  demostrara la negación de un teorema suyo, ésta sería la prueba de su inconsistencia. Pero, supongamos que, efectivamente, sea consistente. ¿Podría eso deducirse con un teorema de  $TC$ ? Obviamente, no.

Rápidamente podría razonarse así: si cuestionamos su consistencia, o sea, si admitimos la posibilidad de que sea inconsistente, cualquier teorema suyo  $T$  podría ser contradicho por el teorema  $notT$ . Y esto, en particular, valdría también si  $T$  significara “este Sistema es consistente”. Este argumento no es

incorrecto, pero en realidad hay algo de más profundo. En la primera Parte (ap. I.8), hemos observado que si un Sistema clásico es inconsistente, *ninguno* de sus enunciados puede ser interpretado de modo clásico, es decir respetando los principios de no contradicción y del tercero excluido; de hecho, *cualquier afirmación* de la Teoría podría ser deducida y refutada. Si fuera la Geometría euclidiana, por ejemplo, podríamos deducir que “una recta coincide con un punto”, con un “cuadrado”, con un “triángulo” y con cualquier otro objeto de la Teoría. Al mismo tiempo también valdrían las negaciones de estos enunciados. Estando así las cosas, es evidente que no sólo tal Teoría abusaría del significado que damos a “recta”, “punto”, “cuadrado”, etc., sino que en realidad no se podría dar ningún (otro) significado razonable a ninguno de los objetos que ella trata. En otras palabras, *un Sistema clásico inconsistente no posee ninguna interpretación sensata de cualquiera de sus proposiciones*. Por lo tanto, el simple admitir que un enunciado cualquiera del Sistema signifique algo, implica suponer que sea consistente (es más: que tenga modelos). Así que, si se cuestiona la consistencia del Sistema, es decir si no se puede estar seguros de su consistencia (lo cual, como pronto reconoceremos, vale para *TC* y, por lo tanto, para toda la Matemática), tampoco se puede estarlo de la sensatez de cualquier interpretación de cualquier enunciado de la Teoría, incluido el caso eventual de “este Sistema es consistente”. Pongamos ejemplos concretos: en un Sistema de este tipo (pero en realidad, en *cualquier* Sistema, como ya hemos anticipado), cuando se demuestra un teorema arbitrario, como “ $6$  es par” o el Teorema de Pitágoras, en realidad lo que se demuestra es: “si el Sistema admite el modelo estándar (y, por lo tanto, es consistente),  $6$  es par”, y “si el Sistema admite el modelo euclidiano (y, por lo tanto, es consistente), en cada triángulo rectángulo  $c_1^2 + c_2^2 = I^2$ ”; y así

sucesivamente. Nótese el *innegable valor epistemológico de estas conclusiones*, a pesar de la clamorosa posibilidad de fracaso si el Sistema de revelase inconsistente.

Sin embargo, veamos lo que ocurre si a un determinado teorema  $T$  de una tal Teoría, se atribuye el significado “este Sistema es consistente”, en una cierta interpretación  $M$ . Análogamente, lo que en realidad se determinaría a través de este teorema es que “si el Sistema admite el modelo  $M$  (y por lo tanto es consistente), entonces el Sistema es consistente”. *Se trataría, esta vez, de algo ya sabido y, sobre todo, que no demuestra en absoluto la consistencia del Sistema.*

Por consiguiente, podemos enunciar el siguiente *Metateorema de la indemostrabilidad interna de la consistencia*: “si un Sistema clásico es consistente, esta conclusión no puede alcanzarse a través del solo lenguaje del Sistema”. Hay que destacar que esta conclusión *vale para un Sistema matemático clásico cualquiera, formal o no*. De esto sigue que tampoco la conclusión de que un determinado enunciado es indecidible puede alcanzarse dentro de la misma Teoría, ya que ésta implicaría la consistencia.

Volvamos a  $TC$ . Por lo visto, su consistencia podría demostrarse en un Sistema externo, más general. En efecto, a pesar de que  $TC$  parezca a muchos *demasiado* general y abstracto, ya hay algo de este tipo: la *Teoría de las categorías*. Pero, profundizando, surgen serias dudas acerca de la posibilidad de demostrar la consistencia del Cálculo predicativo clásico formal, o sea, del núcleo básico de  $TC$ . La razón es que un Sistema *externo* a él, capaz de *predicar* su consistencia, debería contener un núcleo equivalente a un Cálculo predicativo clásico formal, puesto que es en un Sistema de este tipo donde se formaliza el concepto de *predicado*.

Empero, aunque la consistencia de cada parte de  $TC$  se

demostrase a partir de un Sistema matemático más general que  $TC$ , el problema de la consistencia se reproduciría para este nuevo Sistema. En otras palabras, llegados a un cierto punto – que, en efecto, puede depender de las exigencias – es necesario detenerse en el formalismo y buscar un criterio *metamatemático* de reconocimiento de la consistencia. Dicho criterio, al estar ligado a las incertidumbres intrínsecas de la semántica pura, posiblemente podrá consistir en un simple “convencimiento intuitivo”, sino incluso en una “esperanza sensata”. Esta última posición, en efecto, es la relativa al Sistema  $TC$ : hasta la actualidad, no existe ninguna metademostración rigurosa de su consistencia, sino sólo un “más que sensato convencimiento” de ella, corroborado por dos milenios de eficaces aplicaciones de las Teorías que ésta engloba.

Vamos a añadir algunos comentarios a cuanto expuesto. Considérese un Sistema clásico arbitrario  $S$  y un enunciado suyo  $E$ ; supongamos la existencia de un modelo  $M$  de  $S$  tal que  $E$ , interpretado en  $M$  – sintéticamente:  $E(M)$  – signifique “ $S$  es consistente”. Por lo tanto, estamos suponiendo que  $E(M)$  sea verdadero. Examinemos el enunciado  $E$ . ¿Podría ser la negación de un teorema? Ciertamente no: sería falso en todos los modelos, mientras en  $M$  es verdadero. ¿Puede ser  $E$  indecidible? No hay nada que lo impida. Como sabemos, la existencia de un enunciado indemostrable es una condición necesaria y suficiente para que  $S$  sea consistente, como estamos suponiendo. Si  $S$  es formal, por el Teorema de  $s$ -completitud debe existir un modelo  $M'$  en donde  $E(M')$  sea falso. Esto es posible, siempre que  $E(M')$  tenga un significado distinto de  $E(M)$ , o sea de “ $S$  es consistente”.

Finalmente, ¿puede  $E$  ser un teorema? La interpretación de  $E$  en todos los modelos sería verdadera, como  $E(M)$ , que en base a nuestras hipótesis es verdadero. Como hemos observado, de

ningún modo esto transgrediría el Metateorema de la indemostrabilidad interna de la consistencia: el hecho de que  $E$  sea un teorema no puede demostrar, en sentido genuinamente epistemológico, la consistencia del Sistema, porque el mismo significado que se ha dado a  $E(M)$  requiere la hipótesis de consistencia para el Sistema. Así que este caso también es posible.

En definitiva, para cada enunciado  $E$  que, como  $E(M)$ , signifique “ $S$  es consistente” en una cierta interpretación  $M$ , se tiene un situación peculiar que lo diferencia de cualquier otro enunciado significativo en  $M$ : *preocuparse de demostrar  $E$  en la Teoría  $S$  no tiene ninguna repercusión epistemológica relativa a la interpretación  $M$* . Porque la consistencia del Sistema, o sea, la verdad de  $E(M)$ , se supone con el sólo admitir dicho significado para  $E(M)$ . En cualquier caso, el problema de concluir si  $S$  es consistente no está al alcance de  $S$ , como exige el Metateorema de la indemostrabilidad interna de la consistencia.

Luego, el hecho de que en un particular Sistema supuestamente consistente, el enunciado  $E$  sea un teorema o sea indecidible, depende del Sistema y de la propia forma del enunciado  $E$ . Claro, si un Sistema externo demostrara que  $E$  es indecidible, también demostraría que  $S$  es consistente y, así, la veracidad de  $E(M)$ . Pero, por desgracia, esto nunca se verifica en una Teoría de interés *fundamental* como  $TC$ .

Veamos ahora el caso de un Sistema que satisface las hipótesis del Metateorema de incompletitud, o sea: consistente, *ef. ax.* y capaz de representar todas las funciones recursivas (concisamente, *suficientemente potente*). En estas condiciones, siempre es posible individuar enunciados del Sistema tales que, interpretados en un modelo oportuno, tengan el significado de “este Sistema es consistente”. De hecho, hemos admitido que es posible considerar una expresión  $G(x,y)$  tal que en el modelo

estándar signifique “ $x$  es el código de una demostración del enunciado de código  $y$ ”. Pues bien, el enunciado:  $\exists y(\text{not} \exists x(G(x,y)))$ , interpretado en el modelo estándar, afirma “existe (el código de) un enunciado tal que no existe el código de su demostración”, o bien “existe un enunciado que no es un teorema”. Lo cual, como sabemos, es equivalente a “este Sistema es consistente”. Existen infinitas formas equivalentes para expresar la consistencia, siempre en el ámbito del modelo estándar; por ejemplo, si 92507 es el gödeliano del enunciado “ $4=29$ ”, también el enunciado “ $\text{not} \exists x(G(x,92507))$ ” expresa la consistencia del Sistema. Pues bien, resulta que “normalmente” estos enunciados son indecidibles. Esta trabajosa demostración, que Gödel señaló en el mismo congreso de Königsberg, se conoce como *Segundo Teorema de incompletitud* y fue lograda por Hilbert y Bernays sólo en 1939<sup>132</sup>. ¿Qué significa “normalmente”? Significa que también existen otros enunciados, que expresan, de la misma manera, la consistencia del Sistema cuando interpretados en modelos oportunos, los cuales, en cambio, resultan ser *teoremas* de la Teoría. Sin que este hecho implique, como ya hemos observado, una demostración real de la consistencia del Sistema, transgrediendo el Metateorema de la indemostrabilidad interna de la consistencia. Por desgracia, no estamos capacitados para añadir más datos sobre este asunto. Sólo citaremos nuestras fuentes<sup>133</sup>.

---

<sup>132</sup> D. Hilbert; D. P. Bernays: *Grundlagen der Mathematik*. La demostración consiste en el demostrar que un tal enunciado,  $C$ , implica el de Gödel,  $G$ . Entonces, si  $C$  fuera un teorema, también  $G$  lo sería por *modus ponens*. Además, por la corrección,  $C$  no puede ser la negación de un teorema. También dicho Teorema se puede formalizar en  $TC$  como el Primer Teorema de incompletitud.

<sup>133</sup> G. Lolli: *Da Euclide a Gödel*, p. 140 y 142. A. Martini: *Notazioni ordinali e progressioni transfinite di teorie*, p. 11-15.

¿Cuáles son, entonces, las conclusiones de todo esto? El Segundo Teorema de incompletitud determina otra clase de enunciados esencialmente indecidibles en toda Teoría que satisface las sabidas hipótesis de Gödel. Mientras el Primer Teorema de incompletitud distingue al solo enunciado de Gödel, el Segundo extiende la indecidibilidad a una categoría mucho más amplia de enunciados. No obstante, a pesar de tal drástica generalización, este Teorema no introduce ningún espectacular concepto nuevo acerca de la consistencia del Sistema, en contra de lo que habitualmente se cree. Tampoco lo haría si fuera válido *para cada* enunciado interpretable como “este Sistema es consistente” (lo cual, ratificamos, parece ser falso). En todo caso expresa, de hecho, una propiedad que es *circunstancial* para el tipo de Sistema: en otras Teorías, estos tipos de enunciados pueden ser perfectamente teoremas, sin que el Metateorema de indemostrabilidad interna de la consistencia (el único resultado epistemológicamente relevante sobre la consistencia) sea infringido.

En efecto, el error común sobre el Segundo Teorema de incompletitud es tanto considerar que valga para todos los enunciados que expresen la consistencia del Sistema en un cierto modelo, como juzgar que implica que “un Sistema consistente no puede demostrar su propia consistencia”. En cambio, esta última conclusión se alcanza con la diferente e intuitiva metademostración que antes hemos expuesto y, lo que es sobre todo importante, *vale para cualquier Sistema clásico, incluso no formal*.

A menudo el error se agrava con un tipo de “demostraciones intuitivas”, incorrectas, del Segundo Teorema de incompletitud, del siguiente estilo: “Sea  $S$  un Sistema que satisface las hipótesis del Teorema de incompletitud y  $C$  un enunciado suyo que afirma la consistencia del mismo  $S$ . El primer Teorema de

incompletitud demuestra que si  $S$  es consistente, el enunciado de Gödel,  $G$ , es indecidible. Entonces si  $C$  fuese demostrable, podría deducirse que  $G$  es indecidible y por lo tanto indemostrable. Pero como  $G$  afirma ser indemostrable, esto significaría demostrar  $G$ , lo cual es absurdo. Por lo tanto,  $C$  es indemostrable<sup>134</sup>. El lector debería ya tener claro donde está el fallo: en el razonamiento, se da a  $C$  y a  $G$  un valor semántico que sólo se puede otorgar suponiendo que el Sistema admita un *modelo* con dichas interpretaciones y, por lo tanto, que ya sea consistente. *En este modelo* es indiscutible que la verdad de  $C$  implica la verdad de  $G$ , pero la implicación *sintáctica*  $C \rightarrow G$  es una cuestión totalmente distinta. En general, no deriva ningún absurdo de la posibilidad de que  $C$  sea un teorema; de hecho, para algunas formas de  $C$  realmente lo es, como hemos señalado. El hecho de que un enunciado del tipo de  $C$  sea un teorema, no demuestra en absoluto que el Sistema sea consistente (en caso de inconsistencia, ¿no se tiene que cada enunciado es un teorema?); porque, repetimos, lo “demostraría” sólo... en la hipótesis en que  $S$  tenga un modelo (aquel que permite interpretar  $C$  con “ $S$  es consistente”), ¡resultando, así, ya consistente por hipótesis! En realidad, demostrar la implicación sintáctica  $C \rightarrow G$  no es nada trivial, y además, como hemos destacado, parece no valer siempre, sino que depende de la forma sintáctica del enunciado  $C$ .

De este modo, reafirmamos que el único resultado de importancia relevante sobre la consistencia se debe al Metateorema de su indemostrabilidad interna. Y destacamos que la metademostración de éste, al referirse a un Sistema clásico cualquiera, debe consistir en un razonamiento puramente metamatemático, o sea, no puede formalizarse.

---

<sup>134</sup> Así, por ejemplo, en P. Odifreddi: *Metamorfosi di un Teorema*.



### III.11. Epílogo conclusivo

Vamos a hacer un resumen sintético de los resultados obtenidos por la Lógica moderna acerca de los Sistemas axiomáticos clásicos de la Matemática<sup>135</sup>. Para el lenguaje de todos los Sistemas clásicos *formales*, o sea, cuyas proposiciones pueden ser privadas de todo contenido semántico, como exigido por el formalismo de Hilbert, vale el Teorema de s-completitud; éste nos asegura la existencia de modelos capaces de hacernos reconocer todos los enunciados indecidibles. En cuanto a la determinación metamatemática de dichos modelos, desde el punto de vista filosófico es razonable un cierto optimismo, teniendo en cuenta el hecho de que la semántica es capaz de redefinir oportunamente las convenciones sobre la representabilidad de estructuras como los modelos de los Sistemas matemáticos. Sin embargo, para la Teoría formal de los conjuntos, o sea, para el mismo fundamento de todas las Matemáticas, este optimismo es infundado, ya que la naturaleza de sus modelos es inevitablemente nebulosa.

Por otra parte, el Teorema de s-completitud también tiene el efecto de “multiplicar hasta el infinito” el número de modelos no isomorfos de los habituales Sistemas formales. En particular se tiene que cualquier Sistema formal con al menos un modelo infinito no puede caracterizar únicamente a los objetos que con él se pretendía estudiar, sino describe igualmente bien, de forma indistinguible para su lenguaje, infinitas clases de objetos totalmente diferentes de éstos.

Algunos Sistemas formales, en hipótesis de consistencia, son

---

<sup>135</sup> Recordamos que otras conclusiones fundamentales sobre la Matemática y la Teoría de los conjuntos se han expuesto al final de la segunda Parte.

decidibles; o sea, no sólo son reconocibles todos sus enunciados indecidibles, sino que es incluso posible programar una máquina de modo que, enviando a su entrada un enunciado arbitrario, lo sepa catalogar, en salida, como “teorema”, “negación de teorema” o “indecidible”; sin embargo, el poder expresivo de ellos es limitado. Otros Sistemas formales mucho más ricos (porque permiten describir cualquier máquina), admiten máquinas capaces de enumerar todos y solos sus teoremas, pero no de hacer lo mismo con los enunciados indecidibles, para cuya individuación, en general, sólo se puede recurrir a criterios metamatemáticos. Finalmente, en los Sistemas clásicos formales más ricos (que no sólo describen todas las máquinas, sino que permiten, en teoría, resolver el problema de la parada de cualquier máquina), tampoco es posible una enumeración mecánica de todos y solos los teoremas (aun siendo éstos numerables): en efecto, una parte (infinita) de sus axiomas se define a través de una semántica *irreducible*, o sea, que ningún programa de ninguna máquina puede reproducir del todo. Por consiguiente, cualquier máquina fallará también al individuar todas y solas las demostraciones.

Los Sistemas clásicos esencialmente no formales (o sea, cuyo carácter no formal no puede eliminarse) requieren, para la función de las reglas deductivas, un determinado significado para (al menos una parte de) las proposiciones. Por lo tanto, sólo representan una axiomatización, naturalmente no plenamente formal, de una parte de la Metamatemática. Para sus lenguajes, en general, no vale el Teorema de *s*-completitud y por lo tanto es posible que posean un modelo único a menos de isomorfismo. Tampoco el Metateorema de incompletitud vale para ellos; por otra parte, no sólo estos Sistemas no son, obviamente,

“mecanizables”<sup>136</sup>, sino su criterio deductivo está sujeto a la inevitable incertidumbre de las convenciones semánticas con las que se interpretan sus proposiciones.

El Metateorema de la indemostrabilidad interna de la consistencia, *válido para cualquier Sistema clásico*, formal o no, nos informa de que *el problema de la consistencia es fundamentalmente irresoluble en términos puramente matemáticos*. A saber: en el nivel más básico de la Matemática, en el mejor de los casos se puede llegar a admitir la consistencia (o a suponerla como razonable) en base a consideraciones puramente metamatemáticas.

Llegados a este punto, surge como muy oportuna una discusión acerca de las consecuencias de los resultados de Gödel sobre el llamado *programa* de Hilbert. La frase más habitual sobre este asunto, probablemente ya aburrida a muchos, es que dichos resultados “asestaron a dicho *programa* un golpe mortal”. Pero, ¿qué es el *programa* de Hilbert?

A partir de 1920, Hilbert delineó un programa de organización lógica de la Matemática que puede resumirse en tres puntos:

1. Formalizar todas las Disciplinas matemáticas.
2. Concluir su consistencia a través de métodos *finitistas*.
3. Resolver todas sus cuestiones acerca de la completitud/incompletitud y decidibilidad/indecidibilidad.

Por desgracias, nunca se ha aclarado del todo lo que Hilbert entendía exactamente con el adjetivo *finitista*. La idea más aceptada es que entendiera excluir los conjuntos infinitos, por su

---

<sup>136</sup> En concreto, sus teoremas no son efectivamente numerables.

carácter abstracto. Si es así, Hilbert consideraba que debía evitarse, al nivel más fundamental de la Matemática, el uso de los cuantificadores  $\forall$  y  $\exists$ . En efecto, este uso es estrictamente necesario sólo cuando se aplica a variables que varían en un universo infinito: si es finito, de  $n$  elementos, la expresión  $\forall xP(x)$ , por ejemplo, puede ser sustituida por la expresión:  $P(x_1)\wedge P(x_2)\wedge P(x_3)\wedge \dots \wedge P(x_n)$ . De este modo, el uso de los cuantificadores serviría *sólo* para simplificar, según la lógica *finitista*. Otros sostienen (o añaden a la idea anterior) que Hilbert pretendía referirse a un método específicamente *mecánico*: en efecto, cualquier *máquina* propiamente dicha se programa con un número *finito* de instrucciones. Esta última suposición se enlaza con la opinión de que Hilbert creyera en la posibilidad, al menos en principio, de una resolución *mecánica* de todos los problemas matemáticos. Sin embargo, no hay dudas de que, para concluir la consistencia, se trataría de un criterio bastante ingenuo (quizá demasiado para Hilbert): ¿qué demostraría, ante todo, la consistencia del Sistema matemático representado por la máquina? Es probable que esta idea sea fruto del asignar demasiada importancia a las ambiciones formales de Hilbert, olvidando que él fue el primero en consolidar la realidad de la metamatemática. En efecto, parece que Hilbert nunca haya declarado nada semejante. Creemos más razonable entender que él sabía bien que la última demostración de consistencia tendría que ser metamatemática, o sea propiamente una metademostración; quizá la exigía de un tipo sencillo, no sujeta a la ambigüedad de la consideración de colecciones infinitas. Una ingenuidad más perdonable, diríamos hoy. Por otra parte, tras la demostración cardinal de Gödel (el cual, incidentalmente, juzgó como “misteriosas” las motivaciones de la exigencia

finitista de Hilbert<sup>137</sup>), el mismo Hilbert, en la introducción de sus citados *Grundlagen der Mathematik* afirmó que se le había malinterpretado en lo relativo al significado de su *programa*: ¿por qué no creerle?

Sea como fuere, a pesar de que la situación se presente un poco enredada para sacar conclusiones categóricas, se pueden extraer algunos puntos sólidos:

1. El mismo trabajo de Gödel encuentra su motivación en el *programa* de Hilbert y se realiza según su prevista formalización.
2. Sea lo que sea lo que Hilbert entiende exactamente por finitista, no hay dudas sobre el hecho de que él concibe un criterio dictado por una lógica consecucencial preestablecida y absolutamente indiscutible. Esta visión determinista está confirmada por distintas afirmaciones como la siguiente:

*Todo problema matemático bien definido debe ser necesariamente susceptible de una solución exacta, ya sea en la forma de una respuesta directa a la pregunta planteada o por medio de la demostración de la imposibilidad de hallar una solución. [...] Por más que estos problemas parezcan inabordables y nos sintamos incapaces ante ellos, sin embargo, tenemos la firme convicción de que su solución debe seguir a partir de un número finito de deducciones lógicas. [...] Siempre escuchamos dentro de nosotros una llamada perenne: he aquí el problema, ¡busca la solución! La puedes hallar usando el razonamiento puro, porque el matemático nunca dirá "ignorabimus" <sup>138</sup>.*

3. Los resultados de Gödel y Turing demuestran inequívocamente que para la resolución de algunos problemas *no es suficiente una lógica cuyos parámetros de deducción hayan sido completamente preestablecidos.*

---

<sup>137</sup> H. Wang: *A logical journey: from Gödel to philosophy*, p. 82.

<sup>138</sup> D. Hilbert: *Los problemas futuros de la Matemática*.

En particular, para reconocer los enunciados indecidibles de algunas Teorías fundamentales, entre las cuales la Aritmética formal, se requiere algo básicamente distinto a un “razonamiento puro” de carácter predefinido: unos acuerdos semánticos no previsibles que conciernen el delicado e informalizable concepto de verdad; los cuales, al no ser mecanizables, poseen, en general, un cierto grado de ambigüedad. Además, para el caso de *TC*, o sea para el fundamento último de la Matemática formal, este proceso, en el supuesto que pueda llevarse a cabo, sería intrínsecamente incierto y discutible, dada la inevitable ambigüedad de sus “modelos”.

4. También a causa del Metateorema de la indemostrabilidad interna de la consistencia, *no existe por el momento ninguna metademostración convincente (ni “finitista” ni “infinitista”) de la consistencia de TC*, ni de ninguna otra Teoría de base para toda la Matemática. Más bien, un “sensato convencimiento” de ella, sobre una base en parte empírica.

En definitiva, puede afirmarse con certeza que el optimismo de Hilbert se ha revelado erróneo. Para algunas cuestiones de la Matemática, las razones de la “lógica pura” son de tipo, diríamos, “infinitista”: lejos de un determinismo de tipo mecánico, no se pueden precisar de una vez por todas y, a veces, consisten en una serie de infinitos e imprevisibles consensos o convenciones, justificados en un ámbito exclusivamente semántico (ejemplo: el reconocimiento de los enunciados indecidibles de *PA* y *TC*). Ante algunos problemas, como la posibilidad general de reconocer la indecidibilidad de un enunciado, la única estrategia es la de precisar o redefinir, de

una forma a priori imprevisible, las modalidades de su interpretación, hasta concluir, o quizá simplemente hasta *convenir* (aunque sobre una base de ineludibles motivaciones semánticas) su indecidibilidad. Un ejemplo, más veces citado, es el de la *hipótesis del continuo*, metademostrada como indecidible por Cohen a través de “modelos”, en efecto, bastante peculiares. Y sin embargo, el simple hecho de que en el “modelo más intuitivo” de *TC*, este enunciado no se sepa concluir como verdadero o falso, nos señala que, en general, la individuación de “modelos” para la crucial Teoría *TC* – y por lo tanto también la individuación de enunciados indecidibles suyos – es un asunto substancialmente incierto. Por último, hemos visto que un mismo tipo de incertidumbre contagia, por principio, el problema de la consistencia de los fundamentos de toda la Matemática.

No obstante, es necesario destacar que los resultados de Gödel *no hunden el programa hilbertiano, sino que lo realizan*, si bien con consecuencias que hacen naufragar, en buena parte, las esperanzas optimistas de Hilbert.

Si a toda costa quisiéramos designar a un “perdedor”, como consecuencia de los resultados de la Lógica moderna, éste podría ser el punto de vista de la escuela *bourbakista*: aquel grupo de matemáticos franceses que, con el nombre colectivo de Nicolas Bourbaki, impulsaron, a partir de 1935, la refundación metódica y rigurosa de todas las Disciplinas matemáticas bajo el impulso de la unificación conjuntista. Ante todo, hay que reconocer que, en términos generales, este esfuerzo ha de considerarse encomiable, ya que dotó a las Teorías del nuevo carácter axiomático formal (aunque con una profundidad comprensiblemente limitada). No obstante, lo que se pone en discusión es precisamente la pretendida visión unificadora del conjuntismo. En primer lugar, realmente se trata sólo de una

*visión*, porque de hecho nunca se aplica en profundidad la Teoría *TC*, sino algo que, aún siendo sólo la Teoría ingenua de los conjuntos, pretende ser una Teoría formalizada. Y si este defecto es absolutamente excusable (a causa de la intratable complejidad del lenguaje conjuntista formal), no puede serlo la típica actitud superficial sobre los dramáticos desenlaces del formalismo conjuntista: si se pretende que “en el fondo” de los enunciados se halle realmente la Teoría formalizada de los conjuntos, o sea *TC*, habría también que asumir todas las consecuencias. Pero los bourbakistas nunca lo hacen (¿por superioridad?). Estas consecuencias no sólo ponen en discusión el número y la misma naturaleza de los “modelos” de *TC*<sup>139</sup>, junto con la correspondencia entre todos los conceptos matemáticos fundamentales (número natural, cardinalidad, finito, infinito, etc...) y los homónimos metamatemáticos (como vimos detalladamente en la segunda Parte); sino que también, por efecto del Metateorema de incompletitud, cuestionan la *fidelidad* de la representación conjuntista de algunos Sistemas formales. Concretamente, *TC* no es capaz de reproducir todos los teoremas de todas las Teorías formales no *ef. ax.* (o, más en general, cuyos axiomas no son efectivamente numerables), por ejemplos aquellos de *PAV*, el Sistema capaz de deducir todos y solos los enunciados de *PA* verdaderos en el modelo estándar.

Por si fuera poco, existe un grave defecto desmotivante (como ha sido oportunamente subrayado por Gabriele Lolli<sup>140</sup>): la utilidad misma de la “construcción genética” que a partir de *PA* llega, a través de generalizaciones conjuntistas (esbozadas al final del ap. II.10), a la definición de la Teoría de los reales *TFR*,

---

<sup>139</sup> De manera que, por ejemplo, uno se preguntaría ¿en qué “modelo intuitivo” tiene lugar la espectacular reducción conjuntista de la Matemática?

<sup>140</sup> G. Lolli: *Da Euclide a Gödel*, p. 110-111.



se hace dudosa, desde el punto de vista epistemológico, a causa de la simple observación de que en dicho proceso no se conservan las propiedades lógicas más interesantes e importantes, como la completitud y la decidibilidad. En efecto, *PA* es incompleto e indecidible, mientras *TFR* completo y decidible. El mero hecho de expresar y enlazar ambas Teorías dentro de *TC* no es capaz, al final, de “unificarlas” de manera tan prodigiosa: la diferencia que hemos explicado basta para “separarlas en casa” también en ámbito conjuntista.

De ninguna manera todo esto debe interpretarse como una demolición de la Teoría *TC*. Como destacamos en el transcurso de la segunda Parte, la formalización que ofrece *TC* es un paso necesario para resolver graves ambigüedades y para la codificación del concepto de *modelo*; y el intento de unificación conjuntista tenía que investigarse de todas formas, aun a costa de revelarse inútil.

Los descritos confines lógicos de la Matemática, ¿representan un dramático trastorno cultural? Más bien, constituyen una importante conquista. La “vieja” Matemática sigue funcionando como siempre; sin embargo, sobre un plano puramente teórico, ha perdido algo de aquella aura dorada de incuestionable infalibilidad con la que se ha alabado durante siglos. No obstante, el drama filosófico, en el fondo, sería sólo la consecuencia de haber considerado la Matemática como algo puramente automático, “mecánico”; como un terreno de árida tautología. Lo cual, afortunadamente, para algunas Teorías fundamentales no es.

### **III.12. Síntesis**

Y así hemos llegado al final del libro. En nuestra panorámica de la Lógica, no demasiado exhaustiva y sólo ocasionalmente

técnica, hemos, no obstante, introducido nuevos conceptos y temas, arrojando luz sobre algunas inexactitudes difundidas que muy probablemente darán que hablar. Nos parece oportuno hacer un resumen final de las principales:

- Se han introducido los nuevos conceptos de *distinguibilidad* para los elementos de una colección, de Sistema matemático *bien definido* (ap. I.5) y de *fidelidad* de la representación conjuntista de un Sistema (ap. II.7).

- Entre las razones que justifican la oportunidad de una Teoría formalizada de los conjuntos, hemos incluido la exigencia de formalizar el Metateorema de corrección, cuya (meta)demostración habitual pusimos en duda (ap. II.2).

- Hemos reconocido explícitamente que un lenguaje semántico, como el metamatemático, puede constar de un “número” de proposiciones superior a cualquier cardinalidad, numerable o innumerable; este “número” se ha llamado *hiperinnumerable*. La *paradoja de Berry* puede ser leída como una prueba del hecho de que un número finito de expresiones semánticas puede denotar un número infinito de objetos; la *de Richard* como una prueba del hecho de que las definiciones semánticas no son numerables (ap. II.13).

- Hemos observado que los Sistemas matemáticos que admiten un número innumerable de teoremas, previstos por la llamada *Semántica estándar*, no pueden ser *formales*. La llamada *Semántica general* o *de Henkin* representa, por otro lado, la convención de limitarse a los Sistemas clásicos *formales*, necesariamente numerables (ap. II.14).

- Se ha puesto de manifiesto que la clasificación habitual de los Sistemas axiomáticos clásicos según el orden expresivo

(*primer orden, segundo orden, etc.*), en general es fuente de despiste acerca de sus propiedades lógicas fundamentales; las cuales están ligadas sencillamente al respeto o no respeto de la *formalidad* (ap. II.14).

- Hemos evidenciado una propiedad elemental e incontestable que hasta ahora parece haberse pasado por alto o, tal vez, no destacado lo suficiente: el hecho de que para *el lenguaje* de una Teoría no valga el Teorema de completitud semántica, no implica que la misma Teoría tenga que ser necesariamente *semánticamente incompleta* (ap. II.17). Por consiguiente, esta cuestión está en discusión para el caso de las Teorías *integrales* (o sea, no formales) de la Aritmética y de los números reales (ap. III.9).

- Como consecuencia del primer Teorema de incompletitud de Gödel, se ha destacado la propiedad, para algunas Teorías formales, de no ser *fielmente* representables en lenguaje conjuntista formalizado: son todas y solas aquellas cuyos axiomas no son efectivamente numerables (app. III.3 y III.6).

- Se han evidenciado algunas inexactitudes ligadas a la interpretación informática del Teorema de incompletitud, debidas *ab origine* al mismo Chaitin. En particular, hemos mostrado que es erróneo hablar de *casualidad en Aritmética*: en efecto, la casualidad es una propiedad que atañe sólo a las cadenas de caracteres y repercute en los números naturales únicamente a través de la codificación que se haya elegido para ellos (la cual en principio es arbitraria). De hecho, existen codificaciones que hacen finito el número de números naturales casuales (o mejor dicho, de las cadenas que los representan), aunque sean absolutamente incómodas. Hemos ratificado otras incorrecciones de Chaitin, ya señaladas por T. Franzén en un

reciente libro (ap. III.8).

- Se ha puesto de manifiesto el error muy difundido de considerar que el Teorema de incompletitud pueda aplicarse también a la Aritmética *integral*, o sea, a la Teoría – llamada habitualmente “de segundo orden” – que usa, como esquema axiomático, el principio de inducción completa. Puesto que tal principio genera una cantidad innumerable de axiomas, dicha Teoría no es efectivamente axiomatizable (ni, más en general, sus axiomas son efectivamente numerables). Incluso queriendo considerar la inducción como un único enunciado, se forma un axioma semántico que no es decidible (ni efectivamente numerable), ya que su semanticidad no es eliminable (app. III.9 y II.14). Este error, que nunca ha sido señalado, se remonta a la propia comunicación de Gödel de su famoso Teorema (ap. III.9).

- Se ha subrayado lo infundado de la moda de exaltar el aspecto indeterminista del Teorema de incompletitud: en efecto, en base al Teorema de completitud semántica, cada enunciado indecidible puede reconocerse tomando en consideración oportunos modelos del Sistema. Un criterio, en general intrínsecamente semántico, que sólo en el caso de la Teoría formalizada de los conjuntos puede juzgarse con pesimismo. En el caso de la Aritmética de Peano, una vez reconocido que un dado enunciado suyo es indecidible, en principio siempre debería poderse concluir si éste es verdadero o falso para el *modelo estándar*; a pesar de que este proceso no se pueda mecanizar (ap. III.9).

- La importancia del llamado *Segundo Teorema de incompletitud* ha sido fuertemente reducida. En efecto, hemos observado que éste Teorema expresa un hecho contingente que, aunque generalice drásticamente la incompletitud exhibida por

el Primer Teorema, no tiene la repercusión especial de “la indemostrabilidad de la consistencia del Sistema para el mismo Sistema”, como normalmente se pretende. Esta relevancia, en cambio, compete a un nuevo Metateorema, espontáneo y *totalmente general*, que se ha llamado *de la indemostrabilidad interna de la consistencia* (ap. III.10).

## BIBLIOGRAFÍA

- AGAZZI, E.: *La logica simbolica*, ed. Vita e Pensiero, Brescia, 1964.
- ALBEVERIO, S. et. al.: *Non standard methods in stochastic analysis and mathematical physics*, Academic Press, New York, 1986.
- ÁLVAREZ VELAZCO, A.: *El problema del continuo antes de Cohen*, Aportaciones Matemáticas, Memorias n. 35, p. 61-69, México, 2005.
- AMOR, J.A.: *El problema del continuo después de Cohen*, Aportaciones Matemáticas, Memorias n. 35, p. 71-80, México, 2005.
- BELLOTTI, L.: *Woodin on the Continuum Problem: an overview and some objections*, Logic and Philosophy of Science, Vol. III, n. 1, 2005.
- BERTO, F.: *Teorie dell'assurdo*, Carocci Roma, 2006.
- BOOLOS, G.: *A new proof of the Gödel incompleteness theorem*, Notice of the AMS, Vol. 36 n.4, 1989.
- CALUDE, C. S.; DINEEN, M. J.; CHI-KOU, S.: *Computing a glimpse of randomness*, Experimental Mathematics n. 11:3, 2000.
- CHAITIN, G.J.: *Casualità e dimostrazione matematica*, Le Scienze n. 85, septiembre, 1975.
- *Gödel's Theorem and Information*, International Journal of Theoretical Physics n. 22, 1982.
- *Information, Randomness and Incompleteness*, World Scientific New York, 1987.
- *La casualità in Aritmetica*, Le Scienze n. 241, septiembre, 1988.
- *Lisp Program-size complexity II*, Applied Mathematics and Computation n. 52, 1992.
- *The limits of Mathematics*, Springer-Verlag, Singapur, 1997.
- *Meta-mathematics and the foundations of Mathematics*, EATCS Bulletin, vol. 77, 2002.
- *The halting probability  $\Omega$ : irreducible complexity in pure mathematics*, Milan Journal of Mathematics n. 75, 2007.
- COHEN, P.J. Y HERSCH, R.: *La teoria non cantoriana degli insiemi*, Le Scienze n.1, septiembre, 1968.
- DAVIS, M. Y HERSCH, R.: *L'analisi non standard*, Le Scienze n.40, septiembre, 1972.

- DAVIS, M.; MATIYASEVICH, Y.; ROBINSON, J.: *Hilbert's Tenth Problem: Diophantine Equations: Positive Aspects of a Negative Solution*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 28, 1976.
- DE LONG, H.: *Problemi non risolti dell'aritmetica*, Le Scienze n. 34, junio, 1971.
- FRANZÉN, T.: *Gödel's Theorem: an incomplete guide to its use and abuse*, A. K. Peters, 2005.
- FREILING, C.: *Axioms of Symmetry: throwing darts at the real line*, Journal of Symbolic Logic n. 51, p. 190-200, 1986.
- GANDY, R.: *Church's thesis and principles for mechanisms*, in The Kleene Symposium, p. 123-148, North Holland Amsterdam, 1980.
- GARDNER, M.: *Il numero casuale  $\Omega$  e il problema dell'arresto*, Le Scienze n. 139, marzo, 1980.
- GENTILINI, P.: *Didattica della Dimostrazione*, en P.Gentilini, *Dalla matematica di base all'attività in classe: spunti di approfondimento per Docenti di Scuola Secondaria*, Nuova ATA Genova, 2001.
- GIRARD, J.Y.: *La logica lineare*, Le Scienze Quaderni n. 60, Logica, junio, 1991.
- GÖDEL, K.: *Collected Works. I: Publications 1929–1936*, eds. S. Feferman et al., Oxford University Press, 1986.
- *Über formal unentscheidbare Sätze der "Principia Mathematica" und verwandter Systeme I*, en "Monatshefte für Mathematik und Physik", 38, pp. 173-198, 1931.
- HENKIN, L.: *Completeness in the Theory of Types*, Journal of Symbolic Logic, n. 15, 1950.
- HILBERT, D. Y BERNAYS, D. P.: *Grundlagen der Mathematik*, ed. Springer Berlin, segunda edición, 1970.
- HILBERT, D.: *Grundlagen der Geometrie*, ed. Teubner Stocarda, 1956.
- LEONESI, S.; TOFFALORI, C.; L'INNOCENTE, S.: *Cinquant'anni di Teoria dei modelli*, 2002, en Bollettino dell'unione matematica italiana, Sez. A, Vol. 7, n. 2, p. 347-382, 2004.
- LINDSTRÖM, P.: *On Extensions of Elementary Logic*, Theoria, n. 35, 1969.
- LOLLI, G.: *Da Euclide a Gödel*, Il Mulino, 2004.
- *La logica come fondamento dell'informatica*, Le Scienze Quaderni n. 60, Logica, junio, 1991.
- *Nuovi modelli del sistema dei numeri reali*, Le Scienze n. 48, agosto,

1972.

- LUCAS, J.R.: *Mind, Machines and Gödel*, en *Philosophy*, n. 36, 1961.
- PALLADINO, D. Y PALLADINO C.: *Le Geometrie non euclidee*, Carocci Roma, 2008.
- PENROSE, R.: *La nuova mente dell'imperatore*, Adelphi Milán, 1990.
- PREVIALE, F.: *Matematica generale e Aritmetica*, Enciclopedia italiana delle Scienze, Matemática y Física Vol. 1, Instituto Geográfico de Agostini Novara, 1974.
- PRIEST, G.: *In Contradiction: a Study of the Transconsistent*, Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1987.
- QUINE, W.V.: *Completeness of Quantification Theory: Löwenheim's Theorem*, Appendix to *Methods of Logic*, rev. ed. New York, p. 253-260, 1959.
- QUINE, W.V.: *Ontological relativity*, in *Ontological Relativity and Other Essays*, p. 26-68, Columbia Press New York and London, 1969.
- *Quiddities. An Intermittently Philosophical Dictionary*, Penguin Books London, 1990.
- ROBINSON, A.: *Applicazioni della logica simbolica all'algebra*, Le Scienze Quaderni n. 60, Logica, junio, 1991.
- *Non-standard Analysis*, Princeton University Press, 1996.
- ROGERS, R.: *Logica matematica e teorie formalizzate*, Feltrinelli Milán, 1978.
- RUSSELL, B.: *I principi della Matematica*, ed. Newton Compton, 1989.
- *Misticismo e Logica*, Longanesi Milano, 1964.
- *Introduzione alla filosofia della Matematica*, ed. Newton Compton, 1989.
- SPERANZA, F.: *Logica*, Enciclopedia italiana delle Scienze, Matemática y Física Vol.1, Instituto Geográfico de Agostini Novara, 1974.
- TARSKI, A.: *Verità e dimostrazione*, Le Scienze n. 50, octubre, 1972.
- TORRES FALCÓN, Y.: *Teoremas limitativos de la lógica clásica de primer orden*, Signos filosóficos, n. 7, enero-junio, p. 245-262, 2002.
- VITALI, G.: *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, 1905, en: "G. Vitali, Opere sull'analisi reale e complessa – Carteggio", Unione Matematica Italiana, Bologna, 1984.
- WANG, H.: *A logical journey: from Gödel to philosophy*, MIT Press, Cambridge MA, 1996.
- WOODIN, H.: *The Continuum Hypothesis*, Notices of the AMS, Vol. 48, n. 6, p. 567-576 y n. 7, p. 681-690, 2001.



## REFERENCIAS EN INTERNET

- ANDRETTA, A.: *Dispense del corso di Istituzioni di Logica Matematica A.A. 2006-2007*,  
<<http://www.dm.unito.it/personalpages/andretta/dispense/dispense.pdf>>.
- *Corso di Teoria degli insiemi*, 2006,  
<<http://homes.dsi.unimi.it/~sel/scuola2006/insiemi.pdf>>.
- ANTONELLI, A.: *Il teorema di Gödel e la filosofia della mente*, 2000,  
<<http://philosophy.ucdavis.edu/antonelli/papers/siena.pdf>>.
- AUSIELLO, G.; D'AMORE, F.; GAMBOSI, G.: *Linguaggi, Modelli, Complessità*, 2002,  
<<http://www.dis.uniroma1.it/~ausiello/InfoTeoRMvo/main.pdf>>.
- BARTOCCI, U.: *Una breve presentazione (critica) del Teorema d'incompletezza di Gödel*, mayo 2007,  
<<http://www.cartesio-episteme.net/mat/teor-goed.pdf>>.
- BERARDUCCI, A.: *Corso di Teoria dei modelli*, 2006,  
<<http://www.dm.unipi.it/~berardu/Didattica/Appunti/modelli.pdf>>.
- *Istituzioni di Logica Matematica 2007-08. Parte sulle interpretazioni e teorie indecidibili*,  
<<http://www.dm.unipi.it/~berardu/Didattica/ILM08-09/interpretazioni.pdf>>.
- BERNAYS, P.: *On a Symposium on the Foundations of Mathematics*, 1971,  
<[http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/bernays28\\_2003-05-19.pdf](http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/bernays28_2003-05-19.pdf)>.
- BORZACCHINI, L.: *Il computer e la metamatematica*, 2002,  
<<http://www.swif.uniba.it/lei/storiasc/diffusione/recensioni/borzacchini.pdf>>.

>.

BRUNI, R. Y GALVAGNI, M.: *I fondamenti della matematica dopo i teoremi di incompletezza: K. Gödel, S. Feferman*, 2001,  
<[http://www.philos.unifi.it/upload/sub/Materiali/Documenti/bruni\\_galvagni\\_fondamenti\\_matematica.pdf](http://www.philos.unifi.it/upload/sub/Materiali/Documenti/bruni_galvagni_fondamenti_matematica.pdf)>.

BURRIS, S. N.: *From Richard Dedekind to Gerhard Gentzen*,  
<<http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/LOGIC/logicians.html>>.

CASARI, E.: *La filosofia della Matematica del '900*, Sansoni, p. 1-25, 1973,  
<<http://www.math.unipd.it/~azanardo/ssis/Casari.pdf>>.

DI SAVERIO, G.: *La crisi dei fondamenti della Matematica*, 1° capitolo, Tesi di Laurea *Dal paradiso di Hilbert all'inferno di Gödel*, Univ. de Perugia, 2003,  
<<http://www.cartesio-episteme.net/mat/disav1.doc>>.

DOVIER, A. Y GIACOBazzi, R.: *Dispense per il Corso di Fondamenti dell'Informatica: Linguaggi Formali, Calcolabilità e Complessità*, 2006,  
<<http://users.dimi.uniud.it/~agostino.dovier/DID/dispensa.pdf>>.

ENDERTON, H. B.: *Second-order and Higher-order Logic*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2007,  
<<http://plato.stanford.edu/entries/logic-higher-order/>>.

FEFERMAN, S.: *Mathematical Intuition vs. Mathematical Monsters*, 1998,  
<<http://math.stanford.edu/~feferman/papers/intuition.pdf>>.

FRIXIONE, M.: *Dispense di Teoria della ricorsività e calcolabilità effettiva*, 1991,  
<[http://www.dif.unige.it/epi/hp/frixione/appunti\\_computabilita.pdf](http://www.dif.unige.it/epi/hp/frixione/appunti_computabilita.pdf)>.

GERLA, G.: *Proprietà che si conservano*, apuntes de Lógica matemática,  
<<http://www.dmi.unisa.it/people/gerla/www/didattica.html>>.

HILBERT, D.: *Comunicación al II Congreso internacional de Matemática de*

Paris, 1900. Traducción consultada: *Los problemas futuros de la Matemática*, edición de J. R. Ortiz,  
<<http://personales.ya.com/casanchi/ref/pfuturos01.htm>>.

HRACHOVEC, H.: *Ontological Relativity reconsidered: Quine on Löwenheim-Skolem, Davidson on Quine*, 2005,  
<[http://sammelpunkt.philo.at:8080/1078/1/quine\\_skolem\\_orig.pdf](http://sammelpunkt.philo.at:8080/1078/1/quine_skolem_orig.pdf)>.

IVORRA CASTILLO, C.: *Lógica y Teoría de Conjuntos*, 2006,  
<<http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Logica.pdf>>.

KENNEDY, J.: *Completeness Theorems and the Separation of the First and Higher-Order Logic*, 2008,  
<<http://igitur-archive.library.uu.nl/lg/2008-0317-201019/UUindex.html>>.

LICATA, I.: *Oracoli di Turing e Sistemi Logicamente Aperti*, 2005, VBJ n.62,  
<[http://webonline.gruppoinfomedia.it/dac/articlezip.php?form\\_fileid=41&form\\_rivista=vbj&form\\_rivistanum=62&form\\_risoluzione=3](http://webonline.gruppoinfomedia.it/dac/articlezip.php?form_fileid=41&form_rivista=vbj&form_rivistanum=62&form_risoluzione=3)>.

LOLLI, G.: *È possibile concepire gli infinitesimi?*, 2007,  
<<http://homepage.sns.it/lolli/articoli/InfinitesimiRoma.pdf>>.

MAKOWSKY, J.A.: *Encounters with A. Mostowski*, 2007,  
<<http://www.cs.technion.ac.il/~admlogic/TR/2007/mostowski-2.pdf>>.

MANCOSU, P.; ZACH, R.; BADESA, C.: *The Development of Mathematical Logic from Russell to Tarski: 1900–1935*, a publicar en ed. Leila Haaparanta, Oxford University Press, borrador del mayo 2004,  
<<http://www.ucalgary.ca/~rzach/papers/history.html>>.

MARTINI, A.: *Notazioni ordinali e progressioni transfinita di teorie*, Tesis de Laurea, Univ. de Pisa, 2006,  
<<http://etd.adm.unipi.it/theses/available/etd-11082006-161824/unrestricted/tesi.pdf>>.

MONTAGNA, F.: *Teoria della Computabilità*, 2002,

<<http://docenti.lett.unisi.it/files/4/1/1/23/teocomputab.pdf>>.

MORICONI, E.: *I teoremi di Gödel*, 2006, SWIF – Sito Web Italiano per la Filosofia,  
<<http://lgxserve.ciseca.uniba.it/lei/biblioteca/lr/public/moriconi-1.0.pdf>>.

ODIFREDDI, P.: *Metamorfosi di un Teorema*, 1994,  
<<http://www.vialattea.net/odifreddi/godel.htm>>.

ROSSBERG, M.: *First-Order Logic, Second-Order Logic, and Completeness*,  
Hendricks et al. (eds.) Logos Verlag Berlin, 2004,  
<<http://www.st-andrews.ac.uk/~mr30/papers/RossbergCompleteness.pdf>>.

SAMBIN, G.: *Per una dinamica nei fondamenti*, 2005,  
<<http://www.math.unipd.it/~sambin/txt/PUDbook2005-28maggio.pdf>>.

SIDER, T.: *Math Logic. Notes for Boolos & Jeffrey, Computability and Logic*, 2004,  
<<http://tedsider.org/teaching/510/notes.pdf>>.

SIMPSON, S. G.: *Mathematical Logic*, 2005,  
<<http://www.math.psu.edu/simpson/courses/math557/logic.pdf>>.

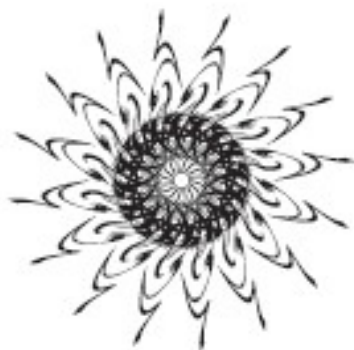
VIGNA, S.: *Dispense per il corso di informatica teorica*, 2001,  
<<http://vigna.dsi.unimi.it/InformaticaTeorica.pdf>>.

WRIGHT, C.: *On Quantifying into Predicate Position: Steps towards a New(tralist) Perspective*, 2007,  
<<http://philpapers.org/autosense.pl?searchStr=Crispin%20Wright>>.

ZANARDO, A.: *Teorie assiomatiche. I numeri naturali*, 2005,  
<[http://www.math.unipd.it/~azanardo/ssis/Teor\\_Ass.pdf](http://www.math.unipd.it/~azanardo/ssis/Teor_Ass.pdf)>.



Este libro electrónico  
se acabó de diseñar y componer  
en diciembre del 2011.  
El resultado es este documento PDF





Nexofía





