Esta y otras doctrinas hacen que el pensamiento de Frege pueda constituir todavía hoy un sólido punto de partida no sólo para quien se interesa por el progreso de la lógica formal, sino también para los que se ocupan de otras regiones de la filosofía.

6. En esta edición las notas señaladas por números son de Frege, las que van entre corchetes precedidos por letras son del traductor. Los corchetes sin letras encierran palabras que fue necesario suplir para una mejor comprensión. Esto no vale naturalmente para los corchetes en las fórmulas simbólicas.

Esta publicación ha sido posible gracias a una beca de la Fundación Alexander von Humbolt y a un permiso sabático de la Universidad Católica de Valparaíso, que me permitieron consagrar un año al estudio de Frege en la Universidad de Heidelberg. Al Prof. E. Tugendhat (Heidelberg) agradezco su contínuo apoyo durante este período. Por su valioso estímulo en la ingrata tarea de traducir debo agradecer también al Prof. R. Torretti (Puerto Rico). La revista *Diálogos* (Universidad de Puerto Rico) me ha autorizado para reimprimir aquí mi versión de "Sobre sentido y denotación", publicada por vez primera en su N° 22. Mi colega el Prof. R. Vergara (Valparaíso) tuvo la gentileza de revisar conmigo gran parte de la traducción colaborando así a evitar más de un error.

Alfonso Gómez-Lobo
Valparaíso, marzo 1972

Nota: en el momento en que me disponía a poner mi manuscrito en manos del editor, apareció una buena edición de Frege, muy semejante a ésta y con importantes coincidencias en la presentación (G. Frege, *Estudios sobre Semántica*. Introducción de Jesús Mosterín, traducción de Ulises Moulines, Ediciones Ariel, Barcelona, 1971). Esta publicación se diferencia de la mía en que incluye el Prólogo a "Función y Concepto", el Prólogo y la Introducción a las *Grundgesetze* y el artículo "¿Qué es una función?". No incluye en cambio ninguna de las Investigaciones Lógicas. La bibliografía de las obras de Frege es casi completa. No hay referencias a las traducciones ni a las obras sobre Frege.

G. FREGE, LÓGICA Y SEMÁNTICA, VALPARAÍSO:
EDICIONES UNIVERSITARIAS DE VALPARAÍSO, 1972
TRADUCCIÓN ALFONSO GÓMEZ-LOBO, 21-75

FUNCION Y CONCEPTO

*(FUNKTION UND BEGRIFF)**

Hace ya bastante tiempo[1] tuve el honor de dar ante esta sociedad[a] dos conferencias[b] sobre el sistema de símbolos que he llamado ideografía (Begriffsschrift)[c]. Hoy quiero iluminar el asunto desde otro ángulo, completar algunos puntos y comunicar nuevas concepciones cuya necesidad se me ha impuesto posteriormente. No se trata de exponer aquí la totalidad de mi ideografía, sino de elucidar algunas ideas fundamentales.

Mi punto de partida es lo que en matemáticas se llama una función. Esta palabra no tuvo desde el comienzo un significado tan amplio como el que adquirió después. Haremos bien en comenzar nuestro estudio con el uso primitivo para luego fijar la atención sobre las extensiones posteriores. Por el momento hablaré únicamente de funciones de un solo argumento. Una expresión científica aparece por vez prime-

*[Primera edición: Bibl. N° 19].
[1] El 10 de enero de 1879 y el 27 de enero 1882.
[a] [Sociedad de Medicina y Ciencias Naturales de Jena].
[b] [Bibl. N° 8 y N° 12. Cf. además N° 42].
[c] [Bibl. N° 7 y 42].

ra con un significado bien marcado cuando se requiere de ella
2 para expresar una legalidad. Esto sucedió en el caso de la fun-
ción cuando se descubrió el análisis superior. Allí se trataba
por primera vez de establecer leyes válidas para las funcio-
nes en general. Hay que retroceder por lo tanto a los tiem-
pos del descubrimiento del análisis superior para saber qué
se entendía originalmente en matemáticas bajo la palabra
"función". Al hacer esta pregunta se obtiene proba-
blemente la respuesta: "por una función de x se entiende una
expresión matemática que contiene a x, una fórmula que in-
cluye la letra x". Según esto la expresión.

$$2 \cdot x^3 + x$$

sería una función de x,

$$2 \cdot 2^3 + 2$$

sería una función de 2. Esta respuesta no puede satisfacer
porque en ella no se distingue entre forma (Form) y conte-
nido (Inhalt), entre signo (Zeichen) y designado (Bezeich-
netes), un error que encontramos hoy a menudo en escritos
matemáticos, incluso de autores famosos. Con anterioridad[2]
he señalado las deficiencias de las teorías formales más en
boga de la aritmética. Se habla allí de signos que no tienen conte-
nido ni deberían tenerlo, pero luego se les atribuye propie-
dades que sólo pueden convenir razonablemente a un conte-
nido del signo. Lo mismo ocurre en este caso: una mera expre-
sión, la forma de un contenido no puede ser la esencia de la cosa;
3 sólo puede serlo el contenido mismo. ¿Cuál es entonces el
contenido, la denotación de "$2 \cdot 2^3 + 2$"? La misma que
la de "18" o de "$3 \cdot 6$". En la ecuación $2 \cdot 2^3 + 2 = 18$ se
expresa que la denotación de la conexión de signos que está
a la derecha es la misma que la denotación de la que está a la iz-
quierda. Debo oponerme aquí a la opinión de que p. ej. $2 + 5$ y
$3 + 4$ son iguales, pero no lo mismo. Lo que subyace a esta opi-
nión es nuevamente la confusión entre forma y contenido, en-

[2] *Die Grundlagen der Arithmetik,* § 92 ss. y "Uber formale Theorien der Arithmetik" [Bibl. N° 14 y 17].

tre signo y designado. Esto equivale a querer ver en la violeta
olorosa algo distinto de la *viola odorata* porque los nombres
no suenan igual. La diversidad en la designación no basta por
sí sola para fundamentar una diversidad en lo designado. En
el caso señalado la cosa es menos evidente sólo porque la de-
notación del signo numérico 7 no es algo perceptible por los
sentidos. La tendencia, muy difundida en el presente, a no re-
conocer como objeto nada que no pueda ser percibido por los
sentidos, induce a considerar los signos numéricos como nú-
meros, como los auténticos objetos de estudio[3]; en este caso
7 y $2 + 5$ serían ciertamente diferentes. Pero una concepción
de esta especie es insostenible pues no se puede hablar de nin- 4
gún tipo de propiedades aritméticas de los números sin recu-
rrir a la denotación de los signos numéricos. La propiedad del
número 1 p. ej. de ser él mismo el resultado de su multiplica-
ción por sí mismo, sería pura fantasía. Ninguna investiga-
ción microscópica o química, por exhaustiva que sea, po-
dría descubrir jamás esta propiedad en la inocente figura
que llamamos el signo numérico uno. Se trata tal vez de una defi-
nición, pero ninguna definición es a tal punto creadora
que esté en condiciones de atribuirle a una cosa propiedades
que ésta no posee, salvo la de expresar y designar aquello para
lo cual la definición la introduce como signo[4]. Las figuras
que llamamos signos numéricos tienen en cambio propie-
dades físicas y químicas que dependen del instrumento em-
pleado para escribirlas. Es posible imaginarse que algún día
se introduzcan signos numéricos completamente nuevos,
tal como los caracteres árabes desplazaron a los romanos. Na-
die supondrá seriamente que por ese hecho obtendremos nú-
meros completamente nuevos, objetos completamente nue-
vos para la aritmética, con propiedades no investigadas has-

[3] Cf. los artículos "Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet" de H. V. Helmholtz y "Über den Zahlbegriff" de Leopold Kronecker en *Philosophische Aufsätze.* Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum gewidmet, Leipzig, 1887.

[4] Lo que se hace al definir es asociar un sentido o una denotación con un signo. Donde sentido y denotación faltan completamente no se puede hablar en rigor ni de signo ni de definición.

ta ahora. En consecuencia, si hay que distinguir entre los signos numéricos y sus denotaciones, habrá también que reconocerle la misma denotación a las expresiones "2", "1 + 1",
5 "3 − 1", "6 : 3", pues no se alcanza a ver en qué consistiría su diferencia. Se dirá tal vez: 1 + 1 es una suma, pero 6 : 3 es un cuociente. ¿Qué es empero 6 : 3? El número que multiplicado por 3 da 6. Decimos "el número", no "un número"; mediante el artículo definido se indica que sólo hay un número. Ahora bien,

$$(1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1) = 6,$$

en consecuencia (1 + 1) es justamente el número que fue designado como (6 : 3). Las diversas expresiones corresponden a distintas concepciones y aspectos, pero siempre a la misma cosa. De lo contrario la ecuación $x^2 = 4$ contendría no sólo las dos raíces 2 y − 2, sino también (1 + 1) y otras incontables que serían diversas entre sí aunque en cierto modo semejantes. Al admitir sólo dos raíces reales, se está rechazando la opinión de que el signo de igualdad no significa una coincidencia total sino sólo una concordancia parcial. Si nos atenemos a esto vemos que las expresiones

$$\text{“}2 \cdot 1^3 + 1\text{”}$$
$$\text{“}2 \cdot 2^3 + 2\text{”}$$
$$\text{“}2 \cdot 4^3 + 4\text{“}$$

significan números, a saber 3, 18, 132. Ahora bien, si la función fuese en realidad sólo la denotación de una expresión de cálculo sería entonces precisamente un número y con ello no habríamos ganado nada nuevo para la aritmética. Es cier-
6 to que al usar la palabra "función" se suele pensar en expresiones en las cuales un número va indicado indefinidamente mediante la letra x, como p. ej.

$$\text{“}2 \cdot x^3 + x\text{”};$$

pero esto no modifica el asunto, pues esta expresión indica entonces un número, sólo que indefinidamente. Que yo la escriba o que sólo escriba "x", no introduce ninguna diferen-

cia esencial. Sin embargo, es justamente la notación con la x que indica indefinidamente un número, la que nos conduce a la concepción correcta. Llamamos x al argumento de la función y en

Argumento

$$\text{“}2 \cdot 1^3 + 1\text{”},$$
$$\text{“}2 \cdot 4^3 + 4\text{”},$$
$$\text{“}2 \cdot 5^3 + 5\text{”}$$

reconocemos la misma función, sólo que con distintos argumentos, a saber 1, 4 y 5. Esto nos permite ver que la esencia misma de la función radica en lo que es común a dichas expresiones; es decir en lo que hay en

$$\text{“}2 \cdot x^3 + x\text{”}$$

además de la "x". Esto lo podríamos escribir también de la siguiente manera

$$\text{“}2 \cdot (\ )^3 + (\ )\text{”}.$$

Lo que interesa es mostrar que el argumento no pertenece a la función, sino que forma junto con la función un todo completo, pues la función por sí sola debe ser llamada incompleta, necesitada de complementación o no saturada. Y en esto se diferencian radicalmente las funciones y los números. Este rasgo esencial de la función explica por qué reconocemos en 7
"$2 \cdot 1^3 + 1$" y en "$2 \cdot 2^3 + 2$" la misma función, pese a que estas expresiones denotan números diferentes; mientras que en "$2 \cdot 1^3 + 1$" y en "$4 - 1$"; a pesar del mismo valor numérico, no encontramos la misma función. Ahora vemos también por qué uno cae fácilmente en la tentación de ver justamente en la forma de la expresión lo esencial de la función. En la expresión reconocemos la función por el hecho de pensarla descompuesta y la posibilidad de descomponerla de ese modo es sugerida por su estructura.

La dos partes en que se descompone la expresión de cálculo, el signo del argumento y la expresión de la función, son heterogéneas puesto que el argumento es un número, un todo completo en sí mismo, mientras que la función no lo es.

Esto se puede comparar con la división de una línea en un punto. Uno se inclina a considerar el punto divisorio como parte de ambos segmentos. Pero si queremos hacer una división perfecta, es decir, una división tal que nada sea contado dos veces y que nada quede afuera, podremos considerar al punto divisorio sólo como parte de uno de los segmentos. Este segmento queda entonces perfectamente completo en sí mismo y debe ser comparado con el argumento. Al otro segmento en cambio le falta algo. El punto divisorio, que se podría llamar su punto final, no le pertenece. Sólo al completarlo mediante este punto final u otro segmento con dos puntos finales se obtiene a partir de él algo completo. Cuando digo, p. ej., "la función $2 \cdot x^3 + x$", no se debe considerar a x como
8 parte de la función. Esta letra sólo sirve para indicar el tipo de necesidad de complementación, pues permite reconocer los lugares donde debe introducirse el signo del argumento.

Al resultado de la complementación de la función mediante su argumento lo llamamos el valor de la función para este argumento. P. ej. 3 es el valor de la función $2 \cdot x^2 + x$ para el argumento 1 pues $2 \cdot 1^2 + 1 = 3$.

Hay funciones, como p. ej. $2 + x - x$ ó $2 + 0 \cdot x$, cuyo valor es siempre el mismo sea cual fuere su argumento; tenemos en efecto que $2 = 2 + x - x$ y $2 = 2 + 0 \cdot x$. Si consideráramos el argumento como parte de la función pensaríamos que el número dos es esta función. Pero esto es incorrecto. Pese a que en este caso el valor de la función es siempre 2, la función misma debe distinguirse de 2, pues la expresión de una función debe mostrar siempre uno o más lugares destinados a ser llenados por el signo del argumento.

El método de la geometría analítica nos ofrece un medio para representarnos visualmente los valores de una función para distintos argumentos. En efecto, al considerar el argumento como el valor numérico de una abcisa y el valor correspondiente de la función como el valor numérico de la ordenada de un punto, obtenemos un conjunto de puntos que en los casos usuales representa visualmente una curva. Cada punto de la curva corresponde a un argumento con el correspondiente valor de la función.

De este modo p. ej.

$$y = x^2 - 4x$$ 9

da una parábola. Aquí "y" indica el valor de la función y el valor numérico de la ordenada, tal como "x" indica el argumento y el valor numérico de la abcisa. Si comparamos con ella la función

$$x(x - 4)$$

descubrimos que en general tiene para el mismo argumento el mismo valor que aquella. Tenemos en general que

$$x^2 - 4x = x(x - 4),$$

sea cual fuere el número que se tome para x. Por eso la curva que obtenemos de

$$y = x^2 - 4x$$

es la misma que resulta de

$$y = x(x - 4)$$

Esto lo formulo así: la función $x(x - 4)$ tiene el mismo curso de valor (Wertverlauf)[d] que la función $x^2 - 4x$.
Al escribir

$$x^2 - 4x = x(x - 4)$$

no equiparamos una función con la otra, sino solamente el valor de una función con el de la otra. Y si entendemos esta ecuación como válida para cualquier argumento que pueda introducirse en lugar de x, hemos expresado la generalización de una ecuación. En lugar de eso podemos decir también "el

[d] [Esta es tal vez la más oscura de las nociones básicas de Frege. Cf. la opinión de R. S. Wells y de Russell en Bibl. N° 62 pp. 13 y 427. Para traducirla he preferido la versión más literal dentro del contexto: *Wertverlauf* sería el curso *(Verlauf)* o la curva que describe el valor *(Wert)* de una función en el gráfico que representa su valor para distintos argumentos. En inglés se ha hecho usual traducirla por "range of values" o simplemente por "range"; Carnap sin embargo, propone "value distribution" (Bibl. N° 95, p. 118, n. 21). En castellano se emplea habitualmente "alcance" o "recorrido"].

curso del valor de la función $x(x-4)$ es igual al de la función x^2
10 $- 4x$" y aquí tenemos una ecuación entre cursos de valor. El hecho de que sea posible concebir la generalización de una ecuación entre valores de funciones como una ecuación [particular], es decir como una ecuación entre cursos de valor, es, me parece, indemostrable y debe ser entendido como una ley básica de la lógica[5].

Ahora podemos introducir también una notación simbólica abreviada para el curso del valor de una función. Con este fin reemplazo el signo del argumento en la expresión de la función por una vocal griega, encierro el todo entre paréntesis y le antepongo la misma letra griega con espíritu suave. De acuerdo con esto, p. ej.

$$\grave{\epsilon}(\epsilon^2 - 4\epsilon)$$

es el curso del valor de la función $x^2 - 4x$, y

$$\grave{\alpha}(\alpha \cdot [\alpha - 4])$$

es el curso del valor de la función $x(x-4)$, de modo que en

$$\text{``}\grave{\epsilon}(\epsilon^2 - 4\epsilon) = \grave{\alpha}(\alpha \cdot [\alpha - 4])\text{''}$$

tenemos la expresión de la identidad del primer curso de valor con el segundo. Elegí intencionalmente dos letras griegas diferentes para indicar que nada nos obliga a escoger la misma.

11 $$\text{``}x^2 - 4x = x(x-4)\text{''}$$

expresa en realidad el mismo sentido, si entendemos esta ecuación como lo hicimos antes, pero de otra manera. Presenta el sentido como la generalización de una ecuación, mientras que la expresión recién introducida es simplemente una ecuación en la cual tanto el lado derecho como el lado izquierdo tiene un significado completo en sí mismo. En

[6]En algunos giros de la terminología matemática usual la palabra "función" corresponde de hecho a lo que he llamado aquí el curso de valor de una función. La función empero en el sentido usado aquí es, desde un punto de vista lógico, lo anterior.

$$\text{``}x^2 - 4x = x(x-4)\text{''}$$

el lado izquierdo, considerado aisladamente, indica sólo indefinidamente un número. Otro tanto ocurre con el lado derecho. Si tuviésemos simplemente "$x^2 - 4x$", podríamos escribir en su lugar "$y^2 - 4y$" sin cambiar el sentido, pues "y" al igual que "x" indica sólo indefinidamente un número. Pero si unimos ambos lados para formar una ecuación, debemos emplear en ambos la misma letra; allí expresamos algo que no está contenido ni en el lado izquierdo, ni en el derecho, ni en el signo de igualdad, tomados aisladamente: lo expresado es justamente una generalización. Es cierto que se trata de la generalización, de una ecuación, pero es ante todo una generalización.

Tal como indicamos indefinidamente un número mediante una letra para expresar generalización, necesitamos también indicar indefinidamente una función sirviéndonos de letras. Con este fin se usan generalmente las letras f y F de modo que en "$f(x)$" y "$F(x)$" el argumento va representado por x. La necesidad de complementación de la función se expresa aquí por el hecho de que la letra f o F lleva consigo
un par de paréntesis cuyo espacio interior está destinado a re- 12
cibir el signo del argumento. De acuerdo con esto,

$$\text{``}\grave{\epsilon} f(\epsilon)\text{''}$$

indica el curso del valor de una función que queda indeterminada.

Ahora bien, ¿Cómo se ha ampliado el significado de la palabra función con el progreso de la ciencia? Podemos distinguir en esto dos direcciones.

En primer lugar se ha ampliado el círculo de las operaciones de cálculo que contribuyen a formar una función. A la adición, multiplicación, elevación a potencia y sus contrarios se han agregado las diversas clases de paso al límite, pero sin que se tuviera siempre una clara conciencia de lo esencialmente nuevo que se estaba incorporando. Al seguir adelante se vio incluso la necesidad de buscar refugio en el lenguaje ordinario, pues el lenguaje simbólico del análisis fallaba, p.

ej. cuando se trataba de hablar de una función cuyo valor para argumentos racionales es 1 y para irracionales 0.

En segundo lugar se ha ampliado el círculo de lo que puede aparecer como argumento y valor de una función al incorporar los números complejos. Junto con esto se tuvo que definir con mayor amplitud el sentido de las expresiones »suma", "producto" etc.

Sigo adelante en ambas direcciones. Primero agrego a los signos $+$, $-$, etc. que sirven para formar la expresión de una función, signos como $=$, $>$, $<$ de modo que puedo hablar
13 p. ej. de la función $x^2 = 1$, donde x representa como antes al argumento. La primera pregunta que surge aquí es la pregunta por los valores de esta función para diversos argumentos. Si reemplazamos x sucesivamente por $-1, 0, 1, 2$, obtenemos

$$(-1)^2 = 1$$
$$0^2 = 1$$
$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1$$

De estas ecuaciones la primera y la tercera son verdaderas, las restantes son falsas. Ahora digo: "el valor de nuestra función es un valor de verdad" (Wahrheitswert) y distingo el valor de verdad de lo verdadero y el de lo falso. Al primero lo llamo sin más lo verdadero, al segundo lo falso. De acuerdo con esto p. ej. "$2^2 = 4$" denota lo verdadero tal como p. ej. "2^2" denota 4. Y "$2^2 = 1$" denota lo falso. Según ello

$$“2^2 = 4”, “2 > 1”, “2^4 = 4^2”$$

denotan lo mismo, a saber: lo verdadero, de modo que en

$$(2^2 = 4) = (2 > 1)$$

tenemos una ecuación correcta.

La objeción que se cierne aquí es "$2^2 = 4$" y "$2 > 1$" quieren decir algo completamente diferente, que expresan pensamientos diferentes; pero también "$2^4 = 4^2$" y "$4 \cdot 4 = 4^2$" expresan distintos pensamientos y sin embargo se puede reemplazar "2^4" por "$4 \cdot 4$" porque ambos signos tienen la misma denotación. En consecuencia

también "$2^4 = 4^2$" y "$4 \cdot 4 = 4^2$" tienen la misma denotación. Esto permite ver que de la igualdad de la denotación 14
no se sigue la igualdad del pensamiento. Cuando decimos "el lucero de la tarde es un planeta con un período de revolución menor que el de la tierra", hemos expresado un pensamiento diferente al de la oración "el lucero de la mañana es un planeta con un período de revolución menor que el de la tierra". En efecto, quien no sabe que el lucero de la mañana es el lucero de la tarde podría estimar que uno es verdadero y el otro falso; y sin embargo la denotación de ambas oraciones tiene que ser la misma, pues sólo se han intercambiado las expresiones "lucero de la tarde" y "lucero de la mañana" que tienen la misma denotación, es decir son nombres propios del mismo cuerpo celeste. Hay que distinguir entre sentido y denotación. "2^4" y "$4 \cdot 4$" tienen en efecto la misma denotación; es decir son nombres propios del mismo número, pero no tienen el mismo sentido. Por eso "$2^4 = 4^2$" y "$4 \cdot 4 = 4^2$" tienen efectivamente la misma denotación, pero no el mismo sentido; esto quiere decir en este caso que no contienen el mismo pensamiento[6].

Con el mismo derecho con que escribimos

$$“2^4 = 4 \cdot 4”$$

podemos escribir también

$$“(2^4 = 4^2) = (4 \cdot 4 = 4^2)”$$

y

$$“(2^2 = 4) = (2 > 1)”.$$

Se podría preguntar ulteriormente con qué fin incorporar 15
los signos $=$, $>$, $<$ al círculo de los signos que ayudan a formar la expresión de una función. Parece que en el presente gana cada vez más adeptos la opinión de que la aritmética es lógica más desarrollada, de que una fundamentación más rigurosa

[6]No niego que esta manera de presentar las cosas pueda parecer a primera vista arbitraria y artificiosa y que se me podría exigir una fundamentación más exhaustiva. Cf. mi artículo sobre sentido y denotación que aparecerá dentro de poco en la *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*. [pp. 47-75 de esta edición].

de las leyes de la aritmética conduce a leyes puramente lógicas y sólo a leyes de este tipo. Yo también comparto esta opinión y fundo sobre ella la exigencia de ampliar el lenguaje simbólico de la aritmética para formar un lenguaje simbólico lógico. Cómo se hace esto en nuestro caso, lo indicaré ahora.

Hemos visto que el valor de nuestra función $x^2 = 1$ es siempre uno de los valores de verdad. Si para un argumento determinado, p. ej. -1, el valor de la función es lo verdadero, podemos expresarlo así: "el número -1 tiene la propiedad de que su cuadrado es 1"; o más brevemente: "-1 es una raíz cuadrada de 1"; o bien "-1 cae bajo el concepto de la raíz cuadrada de 1". Si el valor de la función $x^2 = 1$ para un argumento, p. ej. para 2, es lo falso, lo podemos expresar así: "2 no es una raíz cuadrada de 1"; o "2 no cae bajo el concepto raíz cuadrada de 1". Esto nos permite ver cuán íntimamente ligado está lo que en la lógica llamamos concepto con lo que llamamos función. Efectivamente se puede afirmar de inmediato que un concepto es una función cuyo valor es siempre un valor de verdad. También el valor de la función

$$(x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

16 es siempre un valor de verdad. Obtenemos lo verdadero p. ej. para el argumento -1 y esto lo podemos expresar así: -1 es un número que es menor en una unidad que un número cuyo cuadrado es igual a su doble.
Con esto se ha expresado la caída del número -1 bajo un concepto. La función

$$x^2 = 1 \text{ y la función } (x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

tienen para el mismo argumento siempre el mismo valor, a saber para -1 y 1 lo verdadero, para todos los demás argumentos lo falso. De acuerdo con lo constatado antes diremos que estas funciones tienen el mismo curso de valor y lo expresaremos en símbolos de la siguiente manera

$$\grave{\epsilon}(\epsilon^2 = 1) = \grave{\alpha}([\alpha + 1]^2 = 2[\alpha + 1]).$$

En lógica se llama a esto igualdad de la extensión (Umfang) de los conceptos. Podemos entonces designar como extensión conceptual el curso del valor de una función cuyo valor para cualquier argumento es un valor de verdad.

No nos detendremos en las ecuaciones e inecuaciones. La forma lingüística de las ecuaciones es una oración afirmativa. Una oración de esta especie contiene como sentido un pensamiento —o pretende al menos contenerlo— y este pensamiento es en general verdadero o falso; es decir, tiene en general un valor de verdad que debe ser concebido como la denotación de la oración, tal como el número 4 es la denotación de la expresión "2 + 2" o como "Londres" es la denotación de la expresión "la capital de Inglaterra".

En general las oraciones afirmativas al igual que 17
las ecuaciones o las expresiones del análisis pueden ser pensadas como compuestas por dos partes de las cuales una está completa en sí misma y la otra requiere de complementación, de saturación. De este modo se puede descomponer p. ej. la oración

"César conquistó las Galias"

en "César", y "conquistó las Galias". La segunda parte es no saturada, lleva consigo un lugar vacío y sólo al llenar este lugar con un nombre propio o con una expresión que reemplace a un nombre propio aparecerá un sentido completo. También aquí llamo función al significado de esta parte no saturada. En este caso el argumento es César.

Vemos que aquí se ha llevado a cabo al mismo tiempo una ampliación en la otra dirección, es decir respecto de aquello que puede aparecer como argumento. No se admite sólo números sino en general objetos, entre los cuales me veo obligado a contar también a las personas. Como posibles valores de la función han sido introducidos ya antes los dos valores de verdad. Tenemos que seguir adelante y admitir como valores de función objetos sin restricción alguna. Para tener un ejemplo de esto partamos de la expresión.

"la capital del imperio alemán". 18

Es obvio que representa un nombre propio y significa un objeto.

Descompongámosla ahora en las partes

"la capital de"

e "imperio alemán". La forma del genitivo[e] se la asigno a la primera parte quedando ésta no saturada, mientras que la otra está completa en sí misma. Conforme a lo visto antes llamo a

"la capital de x"

expresión de una función. Si tomamos como argumento el imperio alemán, obtenemos como valor de la función Berlín.

Habiendo admitido así objetos sin restricción alguna como argumentos y como valores de función, nos preguntamos ahora qué llamamos aquí objeto. Estimo que de esto es imposible dar una definición escolar pues estamos ante algo que por su simplicidad no admite una división lógica. Solamente es posible señalar lo que se quiere decir. Aquí sólo se puede afirmar escuetamente: objeto es todo lo que no es función, todo aquello cuya expresión no lleva consigo un lugar vacío.

Una oración afirmativa no incluye ningún lugar vacío y por eso su denotación debe ser concebida como un objeto. Pero esta denotación es un valor de verdad. En consecuencia ambos valores de verdad son objetos.

Hemos presentado antes ecuaciones entre cursos de valor p. ej.

"$\grave{\epsilon}(\epsilon^2 - 4\epsilon) = \grave{\alpha}([\alpha - 4])$"

Esto lo podemos descomponer en "$\grave{\epsilon}(\epsilon^2 - 4\epsilon)$" y "$(\quad) = \grave{\alpha}(\alpha[\alpha - 4])$".

Esta última parte requiere ser completada pues ella
19 lleva consigo a la izquierda del signo de igualdad un lugar vacío. La primera parte "$\grave{\epsilon}(\epsilon^2 - 4\epsilon)$" es perfectamente completa, denota en consecuencia un objeto. Los cursos del valor de las funciones son objetos, mientras que las funciones mismas no lo son. Habíamos llamado a $\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 1)$ curso de valor, pero también lo pudimos designar como extensión del concepto raíz cuadrada de 1. Por lo tanto las extensiones conceptuales son también objetos, aunque los conceptos mismos no lo sean.

Después de haber ampliado así el círculo de lo que se puede tomar como argumento, se hace necesario fijar convenciones más exactas para las denotaciones de los signos que se usan habitualmente. Mientras lo considerado como objeto en la aritmética son sólo los números enteros, las letras a y b en "$a + b$" indican solamente números enteros y el signo de adición sólo debe ser explicado entre enteros. Toda ampliación del ámbito de los objetos que son indicados por "a" y "b" obliga a dar una nueva explicación del signo de adición. Como un imperativo del rigor científico aparece la necesidad de tomar medidas para que una expresión jamás pueda carecer de denotación, para que nunca calculemos, sin darnos cuenta, con signos vacíos creyendo tratar con objetos. En el pasado se han hecho malas experiencias con series divergentes infinitas. Es necesario por lo tanto establecer convenciones de las cuales se siga p. ej. qué denota

"$\odot + 1$",

si "$\odot$" ha de denotar el sol. Como se establezcan estas convenciones es relativamente indiferente, lo importante es que 20
las haya, que "$a + b$" tenga siempre una denotación, sean cual fueren los signos de objetos determinados que puedan ocupar el lugar de "a" y "b". En el caso de los conceptos esto implica la exigencia de que tengan como valor para todo argumento un valor de verdad; que respecto de cada objeto esté determinado si éste cae bajo el concepto o no. En otras palabras: se exige de los conceptos que estén tajantemente delimitados. Sin la satisfacción de esta exigencia sería imposible establecer leyes lógicas relativas a ellos. Para todo argumento x para el cual "$x + 1$" no tuviese una denotación,

[e] [En alemán la expresión "imperio alemán" dentro de la frase propuesta va en genitivo. Al descomponer la frase esta expresión queda en nominativo y "la forma del genitivo" puede serle asignada a la primera parte].

tampoco la función $x + 1 = 10$ tendría un valor y en consecuencia un valor de verdad, de modo que el concepto,

lo que aumentado en 1 da 10

no tendría a su vez límites tajantes. La exigencia de delimitar tajantemente los conceptos exige también que las funciones en general tengan para todo argumento un valor.

Hasta ahora hemos considerado los valores de verdad sólo como valores de función y no como argumentos. Según lo que acabamos de decir, una función debe tener también un valor cuando se toma como argumento un valor de verdad. Pero dada la existencia de los signos ya usuales, de lo que se trata casi siempre es de que haya una convención con este fin, sin que importe mucho qué se determine. Consideremos ahora algunas funciones que son importantes para nosotros precisamente cuando su argumento es un valor de verdad.

21 Introduzco como función de esta especie

$$—— x,$$

y establezco que el valor de esta función ha de ser lo verdadero cuando se toma como argumento lo verdadero. En todos los demás casos el valor de esta función es lo falso, es decir tanto si el argumento es lo falso como si el argumento no es un valor de verdad. Según esto p. ej.

$$—— 1 + 3 = 4$$

es lo verdadero, mientras que tanto

$$—— 1 + 3 = 5$$

como

$$—— 4$$

es lo falso. Esta función tiene entonces como valor el argumento mismo, si éste es un valor de verdad. A este trazo horizontal lo llamé antes trazo del contenido[/], un nombre que ya no parece ser adecuado. Lo llamaré ahora simplemente el trazo horizontal.

[/][*Begriffschrift*, Bibl. N° 4 y 42, § 2].

Al escribir una ecuación o una inecuación, p. ej. $5 > 4$, se quiere en general expresar a la vez un juicio; se quiere afirmar, en nuestro ejemplo, que 5 es mayor que 4. Según la concepción que he expuesto aquí "$5 > 4$" o "$1 + 3 = 5$" son sólo expresiones de valores de verdad, sin que con ello se quiera afirmar algo. Esta distinción entre la acción de juzgar y aquello sobre lo que se juzga parece ineludible, pues de lo contrario no se podría expresar la mera suposición de un caso sin juzgar a la vez si se da o no. Necesitamos por lo tanto 22
un signo especial para poder afirmar algo. Con este fin me sirvo de un trazo vertical en el extremo izquierdo del horizontal de modo que p. ej. con

$$\text{“}\vdash\!\!—— 2 + 3 = 5\text{”}$$

afirmamos: $2 + 3$ es igual a 5. No estamos sólo escribiendo un valor de verdad, como en

$$\text{“}2 + 3 = 5\text{”},$$

sino que a la vez decimos que ese valor es lo verdadero[7].

La función más simple después de la anterior es quizás aquella cuyo valor es lo falso para los argumentos para los cuales el valor de —— x es lo verdadero; y cuyo valor, a la inversa, es lo verdadero para los argumentos para los cuales el valor de —— x es lo falso. La designo así

$$—\!\!\top\!\!— x,$$

y llamo al pequeño trazo vertical el trazo de la negación. Yo concibo esta función como una función con el argumento —— x:

$$(—\!\!\top\!\!— x) = (—\!\!\top\!\!— [—— x]),$$

donde pienso que los dos trazos horizontales se han fundido en uno solo. Pero tenemos también

$$(—— [—\!\!\top\!\!— x]) = (—\!\!\top\!\!— x),$$

[7]El trazo del juicio [i. e. el vertical] no puede ser usado para formar la expresión de una función porque no sirve, acompañado de otros signos, para designar un objeto. "$\vdash\!\!—— 2 + 3 = 5$" no designa nada sino que afirma algo.

23 pues el valor de $-\!\!\top\!\!-\ x$ es siempre un valor de verdad. Concibo por lo tanto en "$-\!\!\top\!\!-\ x$" los dos fragmentos del trazo a la derecha y a la izquierda del trazo de la negación como horizontales en el sentido particular de esta palabra que fue explicado con anterioridad.
De acuerdo con esto p. ej.

$$\text{“}-\!\!\top\!\!-\ 2^2 = 5\text{”}$$

denota lo verdadero y podemos agregar el trazo del juicio:

$$\vdash\!\!\top\!\!-\ 2^2 = 5.$$

Con esto afirmamos que $2^2 = 5$ no es lo verdadero o que 2^2 no es 5.
Pero

$$\vdash\!\!\top\!\!-\ 2.$$

es también lo verdadero, pues $\text{———}\ 2$ es lo falso:

$$\vdash\!\!\top\!\!-\ 2;$$

es decir 2 no es lo verdadero.

Cómo represento la universalidad se verá fácilmente en un ejemplo. Supongamos que hay que expresar que todo objeto es igual a si mismo. En

$$x = x$$

tenemos una función cuyo argumento está indicado por "x". Supongamos ahora que haya que expresar que el valor de esta función es siempre lo verdadero, sea cual fuere el argumento que se tome. Por

$$\text{“}-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ f(\mathfrak{a})\text{”}$$

entiendo lo verdadero, si la función $f(x)$ tiene siempre como valor lo verdadero, sea cual fuere el argumento; en todos los demás casos

$$\text{“}-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ f(\mathfrak{a})\text{”}$$

debe denotar lo falso. Para nuestra función $x = x$ tenemos el primer caso. En consecuencia

$$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

es lo verdadero y esto lo podemos escribir así:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

Los trazos horizontales a la izquierda y a la derecha de la concavidad deben ser entendidos como horizontales en nuestro sentido. En lugar de " $\mathfrak{a}$ " se podría elegir cualquier otra letra gótica, excepto aquellas como $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{F}$, que sirven para designar una función.

Esta simbología permite negar la universalidad p. ej. en

$$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1.$$

En efecto, $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$ es lo falso, porque el valor de la función $x^2 = 1$ no es para cualquier argumento lo verdadero. P. ej. para el argumento 2 obtenemos $2^2 = 1$; esto es lo falso. Ahora bien, si $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$ es lo falso, $\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$ es lo verdadero de acuerdo a lo que se estableció más arriba sobre el trazo de la negación. Tenemos por lo tanto

$$\vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1;$$

es decir, "no todo objeto es raíz cuadrada de 1", o bien, "hay objetos que no son raíz cuadrada de 1". ¿Se puede 25
expresar también que hay raíces cuadradas de 1? ¡Por cierto!
Basta tomar, en lugar de la función $x^2 = 1$, la función

$$-\!\!\top\!\!-\ x^2 = 1.$$

A partir de

$$\text{“}-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ -\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1\text{”}$$

por fusión de los trazos horizontales surge

“$-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$”.

Esto denota lo falso, pues el valor de la función

$$-\!\!\top\!\!-\ x^2 = 1$$

no es para todo argumento lo verdadero. P. ej.

$$-\!\!\top\!\!-\ 1^2 = 1$$

es lo falso, pues $1^2 = 1$ es lo verdadero. Dado entonces que

$$-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$$

es lo falso, entonces

$$-\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$$

es lo verdadero:

$$\vdash\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1;$$

es decir “no para todo argumento es el valor de la función

$$-\!\!\top\!\!-\ x^2 = 1$$

lo verdadero”; o bien “no para todo argumento el valor de la función $x^2 = 1$ es lo falso”; o bien “hay por lo menos una raíz cuadrada de 1”.

Daré a continuación algunos ejemplos con símbolos y con palabras:

$$\vdash\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a} \geqq 0$$

hay por lo menos un número positivo;

26 $$\vdash\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a} < 0$$

hay por lo menos un número negativo;

$$\vdash\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a}^3 - 3\,\mathfrak{a}^2 + 2\,\mathfrak{a} = 0$$

hay por lo menos una raíz de la ecuación

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0.$$

A partir de esto se ve como hay que expresar las importantes oraciones existenciales. Si indicamos indefinidamente un concepto con la letra de función f, entonces tenemos en

$$-\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ f(\mathfrak{a})$$

la fórmula en que están incluidos los últimos ejemplos exceptuando los trazos del juicio. Las expresiones

“$-\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$”, “$-\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a} \geqq 0$”,

“$-\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a} < 0$”, “$-\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ \mathfrak{a}^3 - 3\,\mathfrak{a}^2 + 2\,\mathfrak{a} = 0$”.

surgen de dicha fórmula de manera similar a como p. ej. de x^2 surgen “1^2”, “2^2”, “3^2”. Tal como en x^2 tenemos una función cuyo argumento está indicado por “x”, así también entiendo

“$-\!\!\top\!\!-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-\ f(\mathfrak{a})$”

como expresión de una función cuyo argumento está indicado por “f”. Una función de esta especie es por cierto radicalmente diferente de las que hemos considerado hasta ahora, pues como argumento suyo solamente puede aparecer una función. Tal como las funciones son radicalmente diferentes de los objetos, así las funciones cuyos argumentos son y deben ser funciones, son también radicalmente diferentes de aquellas funciones cuyos argumentos son objetos y no pueden ser otra cosa. A éstas las llamo funciones de primer 27
grado, a aquéllas, de segundo grado. De manera similar distingo entre conceptos de primer y de segundo grado[8]. En rigor hace ya tiempo que se tiene en el análisis funciones de segundo grado, p. ej. las integrales definidas, en cuanto se considera la función a integrar como argumento.

[8] Cf. mis *Grundlagen des Arithmetik* [Bibl. N° 14 y 17] § 53 al final, donde en lugar de “segundo grado” usé el término “segundo orden”. La prueba ontológica de la existencia de Dios padece el defecto de tratar la existencia como un concepto de primer orden.

Ahora conviene agregar algo sobre funciones con dos argumentos. Obtuvimos la expresión de una función al descomponer el signo compuesto de un objeto en una parte saturada y una parte no saturada. Descomponemos así p. ej. el signo

$$"3 > 2"$$

de lo verdadero en "3" y "$x > 2$". La parte no saturada "$x > 2$" la podemos descomponer de la misma manera en "2" y

$$"x > y",$$

donde "y" nos permite reconocer el lugar vacío que antes ocupaba "2". En

$$x > y$$

tenemos una función con dos argumentos, de los cuales uno es indicado por "x", el otro por "y" y en

$$3 > 2$$

28 tenemos el valor de esta función para los argumentos 3 y 2. Tenemos aquí una función cuyo valor es siempre un valor de verdad. Las funciones de este tipo con un argumento las hemos llamado conceptos, aquellas con dos argumentos las llamamos relaciones. También tenemos relaciones p. ej. en

$$x^2 + y^2 = 9$$

y en

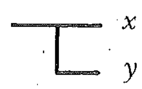
$$x^2 + y^2 > 9,$$

mientras que la función

$$x^2 + y^2$$

tiene números como valores. En consecuencia no la llamaremos relación.

Ahora introduciré una función que no es propia de la aritmética. El valor de la función



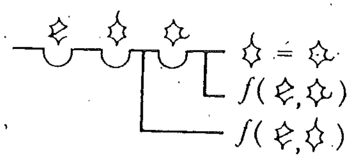
es lo falso si se toma como argumento y, lo verdadero y como argumento x, un objeto que no es lo verdadero; en todos los demás casos el valor de esta función es lo verdadero. El trazo horizontal inferior y las dos partes en que queda dividido el superior por el trazo vertical deben ser entendidos como horizontales. Según esto se puede considerar siempre a ——— x e ——— y como argumentos de nuestra función, es decir, como valores de verdad.

En las funciones con un argumento distinguimos entre las de primer y las de segundo grado. Aquí es posible una mayor variedad. Una función con dos argumentos puede ser del mismo o de diferente grado con respecto a ellos: hay fun- 29
ciones del mismo grado y de grado diferente. Las consideradas hasta ahora eran del mismo grado. Una función de diferente grado es p. ej. el cuociente diferencial cuando se toman como argumentos la función a diferenciar y el argumento para el cual se diferencia; o bien la integral definida, en cuanto se toman como argumentos la función por integrar y el límite superior. Las funciones del mismo grado pueden dividirse a su vez en funciones de primer y de segundo grado. Una de segundo grado sería p. ej.

$$F(f(1)),$$

donde "F" y "f" indican los argumentos.

Las funciones de segundo grado con un argumento deben distinguirse según pueda aparecer como argumento suyo una función con un argumento o una con dos, pues una función con un argumento es tan radicalmente diferente de una con dos argumentos que justamente donde una puede aparecer como argumento, la otra, no puede y viceversa. Algunas funciones de segundo grado con un argumento exigen como tal una función con un argumento, otras exigen una función con dos argumentos y estas dos clases se dividen en forma tajante.



30 es un ejemplo de una función de segundo grado con un argumento, la cual exige como argumento una función con dos argumentos. La letra f indica el argumento y los dos lugares separados por la coma entre los paréntesis que siguen a "f" hacen notar que f representa una función con dos argumentos.

En las funciones con dos argumentos la variedad es todavía mayor.

Si damos desde aquí una mirada retrospectiva al desarrollo de la aritmética, discernimos una ascensión gradual. En un comienzo se calculaba con números individuales, con el 1, con el 3, etc.

$$2 + 3 = 5, \qquad 2 \cdot 3 = 6$$

son teoremas de este tipo. Luego se avanzó a leyes más universales, válidas para todos los números. En la simbología esto corresponde a la adopción del cálculo mediante letras.

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

es un teorema de este tipo. Con esto se había llegado ya a la consideración de funciones individuales, sin usar todavía esta palabra en sentido matemático y sin haber captado aún su significado. El ascenso al nivel siguiente fue el reconocimiento de leyes universales de las funciones y con esto la acuñación del término técnico "función". En el plano de los símbolos corresponde a ello la introducción de las letras f, F para indicar indefinidamente las funciones. En

$$\frac{df(x) \cdot F(x)}{dx} = F(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} + f(x)\frac{dF(x)}{dx}$$

31 tenemos un teorema de este tipo. A esta altura se tenía ya funciones individuales de segundo grado, sin haber captado

lo que nosotros llamamos función de segundo grado. Se podría pensar que esto seguiría avanzando así, sin embargo este último paso ya no es tan rico en consecuencias como los anteriores, pues en el avance sucesivo en lugar de funciones de segundo grado pueden ser consideradas funciones de primer grado, como se mostrará en otro lugar[8]. Pero con esto no se elimina la distinción entre funciones de primer y de segundo grado, pues no es una distinción arbitraria sino profundamente fundada en la naturaleza de las cosas.

También se puede considerar, en lugar de funciones de dos argumentos, funciones de un argumento único pero complejo; la distinción empero entre funciones de un argumento y de dos argumentos sigue en pie con todo su rigor.

[8] [*Grundgesetze der Arithmetik* I, §§ 25, 34-37, Bibl. N° 23 y 41].