La noción abstracta de consecuencia lógica

Gladys Palau

Universidad de Buenos Aires
Argentina
email: gpalau@filo.uba.ar

April 20, 2001

1 Introducción

En la lógica contemporánease habla de dos nociones de consecuencia: por un lado, la noción de consecuencia sintáctica, comúnmente identificada con la noción de deducibilidad, representada por el signo de deductor $\vdash$; y por el otro, la noción de consecuencia semántica, identificada generalmente con la noción de consecuencia lógica y representada por el signo $\vDash$. Ambas acepciones han dado lugar a distintos enfoques de la lógica que tienen sus defensores y detractores, según sea la concepción filosófica que se sostenga respecto de la lógica.

El enfoque sintáctico se inicia a comienzos de siglo, con la idea de construir un lenguaje para la matemática que rescate sólo los aspectos puramente formales y prescinda totalmente del significado y de la verdad de los enunciados. Tal método permite obtener un cáculo carente de interpretación o *sistema logístico* [Church,1956]. Es sabido que este método fue empleado por primera vez en el campo de la lógica por Frege en su *Begriffsschrif*t, de 1879[1], se encuentran indicios de él en *The Principles of Mathematics* de Russell de 1903 y se plasma en *Principia Mathematica.* A la construcción de este enfoque deben agregarse las investigaciones de Hilbert en el campo de la fundamentación de la geometría en su *Grundlagen der Geometrie* de 1899, obra en la cual introduce el término *metamatemática* para referirse a la disciplina que, desde un metalenguaje específico, toma como investigación al lenguaje objeto de la matemática.

En particular, el concepto de sintaxis fue introducido por Carnap[2], quien en *The Logical Syntax of Language* de 1934 [1937, pág.27-28], dió por primera vez la más clara exposición de la noción de consecuencia sintáctica desde el nivel metalingüístico, al definirla en términos de derivabilidad o derivación. En efecto, al tratar la función esencial que las reglas de transformación tienen en la construcción de un cálculo, i.e., la de determinar en qué condiciones una sentencia es consecuencia de otra u otras, Carnap propone utilizar la noción de *derivable.* Dado un lenguaje L, una *derivación* $A_1, A_2, ... A_n$ (para $n \geq 0$), es una serie (finita) de sentencias, tal que cada sentencia de la serie es o una de las premisas, o una sentencia-definición (i.e,axioma) o es directamente derivable (i.e.,por la aplicación de reglas de inferencia) de una o varias sentencias anteriores. Si A_n es la sentencia final de la derivación, entonces se dice que A_n es derivable de A_1,A_2,...,A_m(i.e., A_1,A_2...,$A_m \vdash A_n$). Si el conjunto de premisas fuera vacío($\emptyset \vdash A_n$), entonces A_n es un teorema que expresa un enunciado analítico (i.e.,una verdad lógica). Alchourrón [1995] hace notar que de esta noción se infieren fácilmente las propiedades que caracterizan actualmente la noción de deducibilidad o consecuencia lógica sintáctica y cuyas demostraciones se dejan para el lector:

$\vdash$1. $\Gamma \vdash A$, si $A \in \Gamma$ (Reflexividad generalizada)

$\vdash$2. Si $\Gamma \vdash B$ y $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$, entonces $\Gamma \vdash A$ (Corte)

$\vdash$3. Si $\Gamma \vdash A$, entonces $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$ (Monotonía)

Por otra parte, el enfoque semántico, iniciado tal vez por las lógicas plurivalentes de Łukasiewicz en 1930, se tematiza a partir de los trabajos de Tarski sobre las noción de verdad (en *The Concept of Truth on Formalized Languages*) y de consecuencia lógica (en *On the Concept of Logical Consequence*). Si bien la definición de consecuencia lógica semántica que se incluye en las obras actuales de lógica no es exactamente la originaria de Tarski y más aún, ésta haya sido objeto de crítica por filósofos actuales como Etchemendy [1990], es a partir de los conceptos que presenta en los mencionados trabajos, que se elaboran los actuales conceptos de interpretación, verdad bajo una interpretación, verdad lógica y consecuencia lógica semántica. Esta última, es comúnmente formulada de la siguiente manera: $\Gamma \vDash A$ si y sólo si toda interpretación que hace verdaderos a los enunciados de Γ , hace verdadero al enunciado A y posee las siguientes propiedades:

$\vDash$ 1. $\Gamma \vDash A$ si $A \in \Gamma$ (Reflexividad generalizada)

$\vDash$ 2. Si $\Gamma \vDash B$ y $\Gamma \cup \{B\} \vDash A$, entonces $\Gamma \vDash A$ (Corte)

$\vDash$ 3. Si $\Gamma \vDash A$, entonces $\Gamma \cup \{B\} \vDash A$ (Monotonía)

Es sabido que ambas caracterizaciones de la noción de consecuencia lógica convergen en los resultados de consistencia y completitud para la lógica de orden uno, por lo cual, $\vDash$ 1,$\vDash$ 2 y $\vDash$ 3 pueden ser consideradas como las contrapartidas semánticas de las propiedades sintácticas dadas para la noción de consecuencia sintáctica.

Alchourrón, en *Concepciones de la lógica*, analiza la problemática de la primacía del enfoque sintáctico sobre el semántico y viceversa, mostrando las bondades y dificultades de cada uno de ellos y presentando luego al enfoque abstracto de Tarski como destinado a capturar las propiedades comunes a ambos tipos de enfoques.

Nosotros no hemos creído necesario entrar en esta polémica, ya que en este trabajo adoptamos la posición de R.Wojcicki [1984], según la cual la diferencia entre el enfoque sintáctico y semántico de la lógica es más bien de naturaleza filosófica que lógica. Esbozadas en forma esquemática, las razones que fundamentan esta posición son las siguientes:

(i) el análisis que se puede llevar a cabo en términos de verdad, puede realizarse también en términos de teoremas, con la ventaja manifiesta de poder analizar la estructura formal de los sistemas lógicos de manera más transparente, ya que su análisis es despojado de las connotaciones filosóficas que suelen dificultarlo; (ii) las valuaciones admisibles no necesariamente deben ser interpretadas como funciones que asignan valores de verdad a las sentencias; (iii) la cuestión de la verdad, que hasta ahora parece haber sido el centro de la actividad científica, puede ser reemplazada por la búsqueda de "buenas" teorías (en el sentido de teorías consistentes con alto grado de aceptabilidad y poder explicativo); y (iv) desde un punto de vista pragmático, la validez lógica puede ser vista como una noción pragmática, definida en términos de aceptabilidad racional, de tal forma que la inferencia $X \vdash A$ es considerada lógicamente válida si para todo individuo que acepte todos los enunciados de X, debe también aceptar A, a menos que desee actuar irracionalmente, postulada la existencia de un individuo "ideal". Esta última posición cobra valor si se tiene en cuenta la existencia de enunciados que pueden no admitir valores de verdad, como el caso tradicional de las normas y se ha tornado común en las semánticas epistémicas propuestas como interpretación para ciertos sistemas lógicos de Inteligencia Artificial.[R.Carnota, 1995]

En la sección 2 analizaremos el enfoque abstracto de Tarski, del cual la versión sintáctica y semántica de la noción de consecuencia serán vistas como especificaciones y en la sección 3 esbozaremos la definición de la noción de consecuencia lógica sintáctica vía la implicación estricta de C.I.Lewis, sólo con la intención de mostrarla como un antecedente de la lógica de secuentes de Gentzen. Finalmente la sección 4 la dedicaremos a la exposición de los sistemas de Gentzen, y en particular, de su lógica de secuencias LK para la lógica proposicional clásica, con el propósito de exponer cómo se expresa en dicho cálculo la noción de consecuencia lógica para la lógica proposicional clásica.

2 La presentación de Tarski.

La primera caracterización de Tarski de la noción de consecuencia, anterior a la presentación semántica de su trabajo *On the Concept of Logical Consequence* de 1936, debe entenderse como formando parte de su concepción acerca de la metodología de las ciencias deductivas. Sus investigaciones en este sentido, se enmarcan en la tradición iniciada por Aristóteles en *Segundos Analíticos,* con su descripción de la estructura de ciencia demostrativa; es continuada en parte por Bolzano en sus *Wissenschaftslehere* de 1837[3], y recibió un nuevo y particular impulso con las investigaciones acerca de la fundamentación de la geometría al final del siglo XIX, especialmente por la obra de M.Pasch *Vorlesungen über neuere Geometrie* de 1882. Según Patrick Suppes [1988], los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert, en su primera edición de 1897, fueron escritos bajo la influencia del "punto de vista abstracto" formulado por Pasch. Además, también data de esa época la primera gran investigación metamatemática, a saber, *Über Möglichkeiten im Relativkalkü* de L.Löwenheim de 1915, y respecto de la cual las obras de Gödel y Tarski representaron avances importantísimos. Lo peculiar de la obra de Tarski reside tal vez en haber dado la primera versión moderna de una teoría general de las ciencias deductivas, en tanto disciplina independiente y formalizada. Precisamente, en [1930a], afirma que el trabajo está dirigido a definir el significado y establecer las propiedades elementales de los conceptos más importantes de la metodología de las ciencias deductivas, la cual, siguiendo a Hilbert, se acostumbra a llamar *metamatemática*.[4]

En efecto, en la década del 30, Tarski, principalmente en *On Some Fundamental Concepts of Metamathematics* [1930a,LSM, art.III] y en *Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences* [1930b,LSM,art.V,pág.60][5] da la primera formulación metalingüística del concepto de consecuencia, conocida con el nombre de *concepción abstracta*. Se diferencia del enfoque sintáctico tradicional porque ella no está determinada por un conjunto de reglas de inferencia, sino porque pretende capturar las propiedades comunes a cualquier clase de consecuencia, y de ahí su denominación de *abstracta*. De este modo, tanto la noción sintáctica como la semántica de consecuencia, pueden ser vistas como especificaciones realizadas desde el enfoque sintáctico o semántico. Según J.Corcoran [TARSKI,A., 2983, LSM, Introducción], en este artículo Tarski intenta presentar la estructura de una ciencia deductiva, de la cual cada *intented model* es un sistema deductivo[6].

Sintéticamente, un sistema deductivo es definido como aquel conjunto de sentencias que es idéntico al conjunto de sus consecuencias. En su presentación, Tarski caracteriza la operación de consecuencia por medio de una serie de axiomas. Esta no es tomada como una relación sino como una operación (o función) de consecuencia (Cn) definida sobre el conjunto potencia de fórmulas de un lenguaje formal S tal que le hace corresponder a cada conjunto de fórmulas de S (eventualmente vacío) otro conjunto de fórmulas formado por las consecuencias del conjunto de partida. Llamando X al conjunto de fórmulas de S que conforman el conjunto de partida, el conjunto de sus consecuencias se denotará Cn(X). Así, toda disciplina deductiva es concebida como un conjunto de sentencias organizado por una operación de consecuencia, en el cual el conjunto de las sentencias significativas (en el sentido de bien formadas), está fijado por las reglas de formación del lenguaje formalizado. En el trabajo mencionado, la operación de consecuencia es caracterizada en forma general para cualquier sistema deductivo por los siguientes axiomas metalingüísticos (formulados en el lenguaje de la teoría abstracta de conjuntos):

Axioma 1. $\mathrm{card(S)} \leq \aleph_0$

Axioma 2. Si $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{S}$, entonces $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{Cn(X)}$

Axioma 3. Si $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{S}$, entonces $\mathrm{Cn(Cn(X))} = \mathrm{Cn(X)}$

Axioma 4. Si $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{S}$, entonces $\mathrm{Cn(X)}=\sum \mathrm{Cn(Y)}_{Y \subseteq X \ para \ card(X) \prec \aleph_0}$

Axioma 5. Existe una sentencia $\mathrm{x} \in \mathrm{S}$ tal que $\mathrm{Cn(\{x\})} = \mathrm{S}$

Ax.1 dice que el conjunto de fórmulas de S es numerable (i.e., finito o denumerable); Ax.2 es conocido como el axioma de inclusión, ya que dice que toda sentencia está incluida en el conjunto de sus consecuencias, de donde se desprende que toda sentencia es una consecuencia de sí misma; Ax.3 afirma la idempotencia de la operación de consecuencia y Ax.4 dice que el conjunto de las consecuencias de X es igual al conjunto de todos los conjuntos de consecuencias de los subconjuntos finitos Y de X (finitariedad o compacidad), por lo cual su caracterización de consecuencia no admitirá reglas que contengan un número infinito de premisas. El Ax.5 y es abandonado por Tarski en *Fundamental Con-*

cepts of Methodology of Deductive Sciences [1930b], ya que se trata de un caso particular de la definición de sistema deductivo,(i.e., se trata del caso límite en el que S={x}(o x sea una sentencia contradictoria). Este es definido formalmente en [1930a,def.1] de la siguiente forma: Un conjunto X de sentencias es llamado sistema deductivo o simplemente sistema, si Cn(X)=X⊆S.

Lo peculiar de esta caracterización, como ya se anticipó, es que no presupone que haya reglas de inferencia. Es decir, aún cuando no se haya fijado ninguna regla de inferencia en S, puede seguir habiendo consecuencias. Esto es así porque, por la caracterización de consecuencia, dada una sentencia cualquiera perteneciente al conjunto X, ella es consecuencia de X y por lo tanto demostrable. Estos axiomas se cumplen, como ya se dijo, para cualquier clase de consecuencia, pero ella se articulará en forma diferente para cada sistema deductivo. En otras palabras, la noción de consecuencia específica de cada sistema deductivo dependerá de la estructura sintáctica de las reglas de inferencia propias del sistema. En otras palabras, la noción de consecuencia de cada sistema específico será una noción **extendida,** ya que agrega reglas de inferencia propias.

Tal es lo que hace Tarski cuando en [1930a] agrega un segundo grupo de axiomas que no valdrán para cualquier operación de consecuencia, sino sólo para la operación de consecuencia de aquellas disciplinas deductivas que presupongan el cálculo sentencial, es decir, en las que se usan como axiomas todas las fórmulas que desde la semántica sean verdades lógicas de la lógica sentencial. Estos axiomas introducen dos nuevos conceptos primitivos como operaciones, a saber, la negación y la implicación material.

Axioma **6***. Si x∈S, y∈S, entonces (x→y)∈S y (¬x)∈S.

*Axioma 7**. Si X⊆S, y∈S, z∈S, (y→z)∈ $Cn(X)$), entonces z∈Cn(X∪{y}) (MP)

*Axioma 8**. X⊆S, y∈S, z∈S, z∈Cn(X∪{y}) entonces (y→z)∈Cn(X) (TD)

*Axioma 9**. Si x∈S, entonces Cn({x,(¬x)}) = S

*Axioma 10**. Si x∈S, entonces Cn({x})∩ Cn({¬x}) = Cn(∅)

Ax.6* dice que las operaciones de implicación material y negación son cerradas para S; Ax.7* es la regla sintáctica del Modus Ponens; Ax.8* enuncia el Metateorema de la Deducción para el caso de las disciplinas formalizadas que no contengan sentencias con variables libres, al igual que Ax.10*. Así como los axiomas 7* y 8* caracterizan al condicional material, los últimos dos axiomas caracterizan la negación clásica, ya que Ax.9* afirma que, dada una sentencia x de S tal que ella y su negación son consecuencias, entonces el conjunto de las consecuencias de ella y su negación es igual a S, y, Ax.10* afirma que la intersección de las consecuencias de una sentencia con las consecuencias de su negación es igual al conjunto de consecuencia del vacío. En particular nos interesa destacar que la propiedad llamada *Monotonía*, a saber:

Si X ⊆ Y ⊆ S, entonces Cn(X) ⊆ Cn(Y)

esencial para la deducción, constituye el primer teorema y es demostrable como consecuencia elemental del Ax.4 (la demostración queda para el lector).

En *Fundamental Concepts of the Methodology of Deductive Sciences* [1930b], Tarski desarrolla aún más los resultados del artículo anterior y en particular, ya dijimos que deja sólo los cuatro primeros axiomas para caracterizar la operación de consecuencia.

Respecto de estos artículos, cabe señalar los siguientes puntos [LSM,Int.]: (i) no presentan ningún tipo de semántica para el lenguaje objeto de los sistemas deductivos, reflejándose de esta manera más la noción sintáctica que la noción de consecuencia semántica, la cual Tarski la dará recién en 1936; (ii) Tampoco se establece la gramá tica para dichos lenguajes objetos;y (iii), los sistemas que presenta Tarski hacen referencia a sistemas deductivos finitamente axiomatizables y eliminan aquellas clases de consecuencia determinadas por reglas de inferencia que exijan infinitas premisas.

Esta línea de investigación se completa con *Foundations of the Calculus of Systems* [LSM,pág.342][7] en cuya primer parte, según las propias palabras de Tarski, se presenta una modificación del cálculo anterior que lo hace ganar en naturalidad y simplicidad. Sobre la base de los conceptos introducidos en [1930a], se toma como primitivo el conjunto de las consecuencias del conjunto vacío, es decir, Cn(∅), que es el conjunto de consecuencias más pequeño que existe y que es un subsistema de cualquier sistema deductivo. Se lo denota por L y debe ser interpretado como el conjunto de todas las sentencias logicamente válidas. Los axiomas son los siguientes:

Axioma 1'. $\text{card}(0) < \text{card}(S) \leq \aleph_0$

Axioma 2'. Si x, y∈ S, entonces (¬x∈ S) *y* ((x→y)∈ S)

Axioma 3'. L ⊆ S

Axioma 4'. Si x,y, z∈ S, entonces ((¬x→x)→x∈L), (x→(¬x→y)∈L), *y (* (x→y)→((y→z)→(x→z))∈L).

Axioma 5'. Si x, (x→y)∈ L(donde y∈S),entonces y∈L

Los axiomas 4' y 5' son adaptaciones de los axiomas y reglas de inferencia del cálculo sentencial de Łukasiewicz [LSM, art.IV,pág.38], para lo cual el 4' hay que desdoblarlo en los siguientes tres:

Axioma 4'. (¬x→x)→x

Axioma 4". x→ (¬x→y)

Axioma 4"'.(x→y)→ ((y→z)→ (x→z))

para cualquier sentencia x,y,z∈ S. Ax.5' es la regla *Modus Ponens*

Lo peculiar de esta presentación es que ahora la noción de consecuencia no es tomada como primitiva, sino que puede ser definida a partir de los conceptos primitivos dados. Ella está dada en la def.3 del mencionado trabajo de la siguiente forma:

Para un conjunto arbitrario X⊆S el conjunto Cn(X) consiste en aquellas (y sólo esas) sentencias de S que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) y∈L, o

(ii) existen sentencias $x_1, x_2, ... x_n \in X$ tal que $(x_1 \wedge x_2 \wedge, ..., \wedge x_n) \to y \in L$

El teorema 1 muestra que la definición anterior se puede dar de la siguiente otra manera:

Para un conjunto arbitrario X⊆S, el conjunto Cn(X) es la intersección de todos los conjuntos Y que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) L ∪ X ⊆ Y

(ii) si x, (x→y)∈Y, entonces y ∈Y (donde y∈S)

De esta forma Cn(X) es el más pequeño de los conjuntos que contiene a L y a X y es cerrado para la operación de *Modus Ponens*. En otras palabras Cn(X) es la intersección de todos los conjuntos Y que están formados por premisas o leyes lógicas o se obtienen por *Modus Ponens*.

Nótese que en esta presentación, a diferencia de las anteriores, la noción de consecuencia ha sido definida mediante una regla de inferencia, en este caso el *Modus Ponens*,[8] acercándose de esta forma a la formulación de la noción de consecuencia sintáctica carnapiana; sin embargo, lo que Tarski ha definido aquí, no es la noción abstracta, sino la noción especí fica de consecuencia del cálculo sentencial clásico. No es difícil demostrar que tal noción de consecuencia cumple con los axiomas de la noción abstracta, dados en [1930a]. En efecto, ambos cálculos coinciden en el primer axioma, y los cuatro axiomas restantes de su formulación abstracta coinciden con los casos (a),(b),(c) y (d) del teorema 2 del cálculo sentencial presentado en este último trabajo.

Mostraremos ahora que las propiedades de la formulación sintáctica de consecuencia cumple con la formulación abstracta de Tarski, porque:

(i) $\vdash$1 es un caso del axioma de inclusión, ya que si $\Gamma \vdash$A y A$\in \Gamma$, entonces {A$\subseteq$ Cn(Γ);

(ii) $\vdash$2 es idempotencia, pues si por hipótesis $\Gamma \vdash$B, entonces {B} $\subseteq$ Cn(Γ); y si B$\vdash$A entonces{A$\subseteq \Gamma \cup${B}; además, por Monotonía, Cn(B) $\subseteq$ Cn(Cn(Γ)), de donde se sigue que

{A} $\subseteq$ Cn(Cn(Γ)); luego, de acuerdo al axioma de Idempotencia, {A} $\subseteq$ Cn(Γ), es decir $\Gamma \vdash$A.

(iii) La demostración de que $\vdash$3 es el teorema 1, o sea Monotonía, se deja como ejercicio para el lector.

Para terminar, y sólo a los efectos de introducir algunos conceptos y terminología que necesitaremos de aquí en más, recordamos que la caracterización de consecuencia dada por Tarski fue pensada para cualquier sistema deductivo, los cuales estaban presentados bajo la forma de sistemas logísticos. Esta forma de presentación actualmente es llamada *estilo-Hilbert*, y los sistemas expresados bajo esa forma suelen llamarse *cálculos estilo-Hilbert*. Es sabido que el núcleo central de esta presentación está formado por las nociones de *demostración* (o derivación) y *teoremicidad*. Se establecen algunas fórmulas bien formadas (*fbf*) como axiomas y luego se definen los teoremas como el conjunto más pequeño de fbf cerrado bajo ciertas reglas de inferencia (más estrictamente, reglas de demostración). Por último, una demostración o derivación, es una sucesión finita de *fbf* en la que cada una de ellas es o un axioma o una consecuencia lógica de anteriores por la aplicación de una regla de inferencia, en forma análoga a la definición dada por Carnap. Además la noción de consecuencia, tanto sintáctica como semántica, es caracterizada desde el metalenguaje de dichos cálculos siguiendo estrictamente la línea taskiana respecto del objeto de la metamatemática.

. En la sección siguiente trataremos de reseñar brevemente el primer intento de caracterizar la noción de consecuencia sintáctica o derivabilidad mediante la construcción de un sistema formulado al estilo-Hilbert cuyo lenguaje objeto contiene una constante lógica que reproduce en ese lenguaje objeto las propiedades metalógicas de la relación de consecuencia lógica sintáctica.

3 Los aportes de C.I. Lewis

Es sabido que en cualquier sistema estándar de lógica sentencial (i.e, equivalente al de *Principia Mathematica)* son teoremas las siguientes fórmulas:

(i) A→(B→A)

(ii) ¬A→(A→B)

o sea las hoy llamadas *paradojas de la implicación material.*

Puesto que A∨¬A es teorema, de (i) y (ii) se deriva que es teorema:

(iii) (A→B)∨(B→A)

o sea que dadas dos fórmulas cualesquiera, la primera implica la segunda o la segunda implica la primera. Obviamente (iii) es teorema si el signo → representa la implicación material. Si por el contrario, el signo → se leyera como *entailment* (o implicación lógica), tal resultado resulta falso, puesto que no es cierto que dadas dos fórmulas cualesquiera la primera implique lógicamente a la segunda o la segunda implique lógicamene a la primera. C.I. Lewis, primero en *A Survey of Symbolic Logic*,de 1919 y luego en *Symbolic Logic*, escrito en 1932 con C.H. Landford, atribuyen esta ambigüedad precisamente al significado que Russell atribuía a la implicación material y propone un nuevo signo para la implicación estricta, ⇒[9], que debe leerse como *A implica estrictamente a B* o *B se deduce lógicamente de A*. Obviamente, en este nuevo sentido (fuerte) de implicación, (ii) no resulta válida. Además, en sus sistemas no toma al signo ⇒ como primitivo, ya que en *A Survey of Symbolic Logic* toma como símbolo primitivo la noción modal de imposibilidad, y define A⇒B como la imposibilidad de (A ∧¬B), mientras que en *Symbolic Logic*, toma la noción de posibilidad (◊), y por lo tanto A ⇒ B es definida como ¬◊(A ∧¬B). De esta forma Lewis define una inferencia válida como aquella en que las premisas implican estrictamente la conclusión, o sea, que no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Presupuesta su crítica al significado de la implicación material de Russell, la idea central de Lewis fue elucidar la noción intuitiva de deducibilidad (o consecuencia lógica sintáctica), a fin de diferenciarla claramente de la implicación lógica definida a partir de la implicación material. Para varios autores, además de construir los primeros sistemas modernos para la lógica modal, C.I. Lewis es el primero que intenta representar la noción de consecuencia lógica sintáctica en el lenguaje objeto de un sistema modal, contrastando con la tradición tarskiana de caracterizarla desde el metalenguaje. Sin embargo, hay sutiles pero importantes diferencias entre ambas presentaciones. Alchourrón [1995] hace notar las siguientes diferencias: 1) la implicación estricta sólo puede reproducir la idea de cuándo una sentencia se deduce de otra sentencia, ya que a la izquierda del signo ⇒ sólo puede ponerse una sola sentencia y no un conjunto como en el caso de la presentación sintáctica (y también en la abstracta). Esta observación puede salvarse imponiendo una limitación finitista a la noción de consecuencia sintáctica, es decir para cuando la sentencia de la izquierda es una conjunción de todas las fórmulas que constituyen las premisas, lo cual hace que el conjunto

Γ de fórmulas sea finito[10]. 2) En la presentación de Lewis es posible encontrar fórmulas con expresiones anidadas, es decir que contengan más de una aparición de $\Rightarrow$ y sean del tipo $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$. Tal anidamiento es imposible en las formulaciones metalingüísticas porque en ellas, el signo $\vdash$ expresa una relación de deducibilidad o consecuencia entre el conjunto de sentencias nombrado por Γ y la sentencia nombrada por A, lo cual hace carecer de sentido las expresiones que reiteren el signo $\vdash$. 3) Por último, podría afirmarse que la formulación de Lewis de la deducibilidad en términos del operador modal posibilidad y negación pone más de manifiesto que la versión metalingüística de consecuencia, la idea de necesidad que parece encontrarse en la noción de consecuencia lógica. Pero como esta ventaja se observó recién a partir de las semánticas de Kripke para las lógicas modales y atañe por consiguiente a la noción semántica de consecuencia, nosotros no nos extenderemos en ella.

Por nuestra parte, debemos reconocer que sólo hemos realizado esta breve incursión en la versión de Lewis de la noción de consecuencia lógica sintáctica a través de un signo del lenguaje objeto de un sistema modal, con el objeto de brindar el antecedente más importante que tiene el enfoque que de esta noción dió Gerhard Gentzen, pero que presupone una formulación distinta de los sistemas o cálculos deducivos, tal como lo pasaremos a considerar en el parágrafo siguiente.

4 La presentación de Gentzen

4.1 Caracterización general

En 1934 se publica *Untersuchungen über das Logische Schliessen* de Gentzen, cuya traducción al francés (1955) fue realizada y comentada por R.Feys y J.Ladrière. En el prefacio Feys presenta la obra lógica de Gentzen como un intento de diferenciarse de la presentación al estilo- Hilbert, la cual, desde un punto de vista intuitivo, aparece como artificiosa al reducir las deducciones a un mínimo conjunto de fórmulas. El enfoque de Gentzen es caracterizado por Feys como revelador del uso frecuente y natural de razonar a partir de suposiciones en matemática. Este permite introducir la expresión, *tal cosa es verdadera bajo tal suposición*, como elemento formalizado de sus dos sistemas (implícitamente en los sistemas N de Deducción Natural y explícitamente en los sistemas L de Lógica de Secuentes). La siguiente afirmación de Gentzen [1934,pág.17] fundamenta lo dicho por Feys: *Nous voulons édifier un formalisme qui reflète le plus exactement possible les raisonnements logiques qui son réellement utilisés dans la démostrations mathématiques.* En la actualidad se coincide en aceptar a la forma de presentación de Gentzen como la que más refleja los aspectos inferenciales de los sistemas lógicos, y por lo tanto considerar al cálculo de deducción natural como la presentación más apropiada para una versión inferencial de la lógica.

En efecto, en la lógica actual, al estilo-Hilbert de presentación de los cálculos deductivos (HC), se agregan los cálculos de *Deducción Natural* (NC), y los llamados *Cálculos de Secuencias* (LC); estos dos últimos dentro del llamado *estilo-Gentzen*.

Los llamados sistemas de Deducción Natural, el primero de los cuales se debe a Gentzen [1934], se caracterizan por los siguientes rasgos:[Sundholm,1983] (i) las reglas de inferencia son más bien reglas de derivación que reglas de demostración(en el sentido de que fueron pensadas para mostrar la validez de inferencias más que teoremicidad de determinadas fórmulas); (ii) no hay axiomas sino dos clases generales de supuestos, las premisas o supuestos iniciales y los supuestos adicionales; (iii) hay reglas que obligan a la introducción de supuestos adicionales que luego es obligatorio descargar, mientras que no es obligatorio descargar los supuestos iniciales o premisas; (iv) los teoremas se definen como deducciones a partir del conjunto vacío de los supuestos; (v) el significado de las constantes lógicas (al menos en los sistemas de deducción natural estrictos) se fija por medio de reglas de Introducción (I-) y de Eliminación (E-) del signo lógico en la conclusión; y (vi) una derivación (o deducción) es una sucesión finita de *fbf* donde cada una es o un supuesto inicial, o un supuesto adicional o una consecuencia lógica de anteriores por la aplicación de una de las I-reglas o E-reglas (si los supuestos han sido todos descargados, la derivación es una demostración).[11]

Una aproximación esencialmente distinta a la noción de consecuencia lógica y de sistema deductivo está dada por el llamado *Cálculo de Secuencias* (*Sequenzen Kalküle*, o *Sequent Calculi* en traducción inglesa), debido también a Gentzen [1934][12]. Según sus propias palabras, este es un cálculo logístico al estilo Hilbert, ya que tiene por objetivo fundamental la demostración de teoremas y consta de un axioma, el cual, en términos del cálculo de Secuencias, tendrá por objeto la determinación de las secuencias que son teoremas. Formalmente, el cálculo de Secuencias se diferencia esencialmente del sistema de deducción Natural porque (i) introduce el nuevo concepto de secuencia (*Sequenz*);[13] (ii) no parte de supuestos, sino de una secuencia básica o axioma y un conjunto de reglas de inferencia en tanto reglas estructurales o de estructura que hacen referencia precisamente a la estructura de las secuencias; (iii) introduce un nuevo signo en el lenguaje objeto, $\dashv$, para denotar una determinada relación entre secuentes;[14]y (iv) precisamente el signo $\dashv$ permite reflejar en su propio lenguaje objeto la noción de consecuencia lógica, en el sentido de que es posible ver a una derivación en él como una descripción de cómo es una derivación en un cálculo de Deducción Natural. Dado el objetivo de nuestro trabajo, nuestro análisis se centrará en este tipo de cálculo. En 4.2. se profundizará en algunas de sus características generales de la lógica de secuencias para la lógica proposicional clásica (LK); en 4.3. se expondrá suscintamente el sistema LK de Gentzen; finalmente el 4.4. estará destinado a mostrar cómo es expresada en LK, la noción de consecuencia de la lógica proposicional clásica.

4.2 Principales Características formales del cálculo de secuencias de Gentzen.

Ya establecida la importancia de este tipo de cálculo para el objeto de este trabajo, se pasará ahora a detallar las características meramente esbozadas en el parágrafo anterior y a agregar algunas otras, a saber: 1) el concepto de secuencia; 2) el significado del $\dashv$ 3) la estructura y significado de las reglas; y 4) su diferencia respecto del sistema de condicional estricto de Lewis, ya tratado en el capítulo anterior.

1) Ya se dijo que este tipo de cálculo introduce el concepto de secuencia.

Una secuencia es una expresión de la forma:

$$\Gamma \dashv \Omega$$

donde Γ, Ω son conjuntos de fórmulas cualesquiera (para el caso que nos ocupa, son *fbf* del lenguaje de la lógica proposicional clásica), y el signo $\dashv$ es un signo (no lógico) del lenguaje objeto, que permite construir las sentencias del cálculo de Secuencias, si se prefiere, las *s-sentencias.* Estos conjuntos están formados por fórmulas $\mathrm{A}_1,...,\mathrm{A}_m$; $\mathrm{B}_1,...,\mathrm{B}_n$, que son también sentencias del lenguaje objeto. Las s-sentencias no contienen signos lógicos; éstos están dentro de las sentencias $\mathrm{A}_1,...,\mathrm{A}_m$, $\mathrm{B}_1,...,\mathrm{B}_n$, . De esta forma una secuencia puede formularse de la siguiente manera alternativa:

$\mathrm{A}_1,...,\mathrm{A}_m \dashv \mathrm{B1},...,\mathrm{B}_n$

Las fórmulas a izquierda del $\dashv$ reciben el nombre de *antecedente* (o *prosecuente*) y las fórmulas a derecha del $\dashv$ el nombre de *consecuente* (o *postsecuente*), y para hacer referencia a cualquiera de ellos en este trabajo se usará el término *secuente.* Las fórmulas que componen el prosecuente y el postsecuente no se relacionan por ningún signo lógico; éstos están dentro de las fórmulas $\mathrm{A}_1,...,\mathrm{A}_m,\mathrm{B}_1,...,\mathrm{B}_{n.}$ Ningún secuente contiene dentro el signo $\dashv$ y ambos pueden ser vacíos.[15]

2) Respecto del significado de $\dashv$, Gentzen afirma [1934,pág.11] que la secuencia

$\mathrm{A}_1,...,\mathrm{A}_m \dashv B_1,...,\mathrm{B}_n$ para $n,m \geq 1$, tiene desde un punto de vista intuitivo el mismo significado que la fómula

$(\mathrm{A}_1 \wedge,..., \wedge \mathrm{A}_m) \rightarrow (\mathrm{B}_1 \vee,..., \vee \mathrm{B}_n)$

lo cual lleva a realizar, *prima facie*, una analogía significativa entre $\dashv$ y $\rightarrow$. Sin embargo, Kleene [1964,paragr.77] afirma que debe separarse el rol del signo $\rightarrow$ en tanto relación entre inferencias -tal como es usado por Gentzen- de su rol de conectiva extensional cuando aparece en una fórmula a probarse.[16] Puesto que a este signo, en tanto relación entre conjuntos de fórmulas, se le asignan propiedades similares al deductor $\vdash$, propone leerlo como "entail" o "give". Este significado coincide básicamente con el dado por Curry y Feys [1967], quienes directamente entienden a las secuencias como inferencias. Otros, como Kneale & Kneale [1972], inspirándose en el significado de *logical involution* de Carnap [1947], proponen traducirlo como "envolvimiento"o "desarrollo", con el fin de indicar que el postsecuente "desarrolla" lo contenido en el prosecuente.[17] En sentido similar, C.Alchourrón [1994] afirma que lo que la flecha representa no es estrictamente la relación de consecuencia sino la relación más general ya mencionada de"logical involution" (...) en la cual la relación de consecuencia lógica está representada por el caso especial de las secuencias en las que el postsecuente es un conjunto unitario (*i.e.*,donde figura uno y sólo un enunciado).

3) Ya se mencionó que los cálculos de deducción natural introdujeron, respecto de los sistemas al estilo Hilbert, una nueva forma de deducción, a saber, la deducción a partir de supuestos y mediante la utilización solamente de reglas de inferencia para los distintos operadores lógicos. Dentro de los cálculos NC, los signos lógicos adquieren su significado por medio de reglas específicas de introducción (I-reglas) o de eliminación (E-reglas). En particular, las reglas de eliminación pueden verse como "inferidas" de las de introducción, aún cuando ellas permitan obtener en el sistema nuevas inferencias. Además, se pretende que entre ambos tipos de reglas haya cierta simetría, tal como se da paradigmáticamente en el caso de las reglas de introducción y eliminación de la conjunción, ya que si se tienen dos fórmulas A y B como premisas, se puede inferir la conclusión A$\wedge B$(I $\wedge$) y vicecersa, si se tiene la fórmula A$\wedge B$ como premisa, se puede inferir tanto A como B (E $\wedge$). Pero tal simetría no se da en la misma forma respecto de las restantes reglas, porque, de darse esta simetría, se obtendrían consecuencias no deseadas. En efecto, si se pidiera de las reglas para la disyunción una simetría similar a la de la conjunción (lo cual sería esperable si se toma en cuenta la propiedad de dualidad entre ambas), la regla de E$\vee$ tendría la siguiente forma:

$$\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \ / \ \mathrm{A}, \mathrm{B}$$

lo cual no es posible porque, además de ser una fórmula mal formada, la noción clásica de deducción no permite dos fórmulas como conclusión. Esto hace que en los cálculos N presentados por Gentzen, las reglas de introducción y eliminación de los signos lógicos tengan dos formas claramente diferenciables de reglas: las que tienen fórmulas en las premisas y en la conclusión, como las reglas I $\wedge$, E $\wedge$ o I$\vee$; o bien las que tienen una (o más) deducciones previas (o derivaciones previas) como premisas y una fórmula en la conclusión, como las reglas I$\rightarrow$, I$\neg$ o E$\vee$. Estas últimas se caracterizan también por depender de las reglas que intervienen en las deducciones previas y que son las que posibilitan la deducción posterior en la que ellas intervienen. Entre estas reglas, la regla de I$\rightarrow$ ocupa un lugar crucial, pues es la traducción a los sistemas de deducción natural del metateorema de la Deducción (TD) de los sistemas al estilo Hilbert y es por ello que generalmente es tomada como la representativa de este tipo de reglas. Intuitivamente, esta regla dice que cada vez que hay una derivación de una fórmula cualquiera A, a partir de un conjunto de enunciados Γ y una hipótesis B, se puede obtener una derivación se B$\rightarrow$A a partir de Γ solamente. La premisa de la I$\rightarrow$ es una derivación (i.e.,derivación previa), que se ha construido con otras reglas de inferencia y su conclusión es una sentencia obtenida por una aplicación de I$\rightarrow$. Es en este sentido que puede decirse que estas reglas no hablan acerca de cómo extraer una sentencia a partir de otras sentencias, sino que hablan sobre deducciones y de cómo construir, a partir de las derivaciones tomadas como premisas, otra deducción de un paso más que constituirá la conclusión. Más aún, ellas nos dicen cómo, a partir de la noción de consecuencia particular determinada por las reglas involucradas en la deducción previa, se puede construir una noción de consecuencia más rica, es decir, la determinada por una regla de inferencia más.

Tal como son formuladas por Gentzen en LK, tanto las reglas estructurales como las operatorias tienen un esquema similar al de estas útimas: aceptada que la secuencia $\Gamma \dashv \Omega$ refleja en el lenguaje objeto de LK la noción de inferencia, las reglas, tanto las estructurales como las operatorias, tienen inferencias como premisas y como conclusión. Gentzen las llama *figuras de deducción* (según el caso estructurales u operatorias), en las que las premisas son las fórmulas superiores y la conclusión las fórmulas inferiores. Sin embargo, existen al menos dos diferencias fundamentales entre las reglas de los NK-cálculos y las reglas de los LK-cálculos, a saber:

(i) pese a que los esquemas operatorios se refieren a cada signo lógico, no hay reglas de eliminación; en su lugar aparecen reglas de *introducción en el prosecuente* y las reglas de introducción de NK son ahora las de *introducción en el postsecuente*);

(ii) las reglas estructurales, en tanto que permiten la permutación, repetición y agregado de fórmulas en el prosecuente y en el postsecuente, generalizan propiedades de la noción de deducción para cualquier tipo de deducción representada en una secuencia, prescindiendo totalmente de los signos lógicos que ocurren en las fórmulas que componen los secuentes; y

(iii) A diferencia de NK, las reglas de LK permiten más de una fórmula en el postsecuente. Además, análogamente a cómo las reglas operatorias fijan el significado de los signos lógicos, las reglas estructurales fijan el significado del signo $\dashv$ asignándole propiedades similares al signo metalingüístico de deducibilidad $\vdash$. Por último,

4) Ya se ha visto que C.I.Lewis, partiendo de una crítica al condicional material, fue el primero que intentó una nueva y más adecuada caracterización de la deducibilidad clásica, introduciendo en el lenguaje objeto de sus sistemas modales el condicional estricto $\Rightarrow$, pero no como término primitivo ya que este es definido en términos del operador modal Posibilidad ($\Diamond$), y de las conectivas $\wedge$ y $\neg$. Alchourrón [1995] hace notar tres grandes diferencias entre el enfoque de Lewis y el de Gentzen, a saber: (i) la presentación de Gentzen no es modal; en otras palabras, las secuencias no son sentencias de un lenguaje modal; (ii) las secuencias contemplan el caso de “deducciones” con una pluralidad de premisas, ya que permiten en el prosecuente una pluralidad de fórmulas, mientras que tal situación no se da en los sistemas de Lewis, en los cuales el antecedente de una implicación estricta es siempre una sola sentencia; y (iii), en los sistemas de Lewis se presenta el problema de las implicaciones estrictas “anidadas”, mientras que en la lógica de secuencias, por la propia definición de secuencia, el signo $\dashv$ no debe aparecer en ningún secuente, ya que las sentencias que pertenecen a ellos no son secuencias (S-sentencias), sino sentencias de otro tipo (H-sentencias).[18]

A los efectos de mostrar que la noción de consecuencia de LK, es equivalente a la noción de consecuencia de Tarski, se hace necesario detallar algunas partes esenciales del cálculo de Secuencias para la lógica clásica (LK).

4.3 El cálculo de secuencias de Gentzen.(*Sequenzen-kalküle*)

Ya se dijo que una secuencia es una expresión de la forma

$A_1,...,A_m \dashv B_1,...,B_n$ (i.e., $\Gamma \dashv \Omega$)

donde $\dashv$ es un signo auxiliar y no un signo lógico y $A_1,..A_m$ y $B_1,...,B_n$ son *fbf* cualesquiera (y Γ ,Ω son conjuntos cualesquiera de *fbf*). Las fórmulas *a izquierda* del $\dashv$ son el antecedente (o prosecuente) y las fórmulas *a derecha* son el consecuente (o postsecuente) y ambos pueden ser vacíos y el signo $\emptyset$ representará la *secuencia nula*. Si el antecedente de una secuencia es $\emptyset$, es decir $\emptyset \dashv \Omega$, la secuencia se reduce simplemente al postsecuente, es decir, a la fórmula $(B_1...\vee B_n)$ y es lo mismo que decir que Ω es verdadera (o sea: $\dashv \Omega$); si el postsecuente es $\emptyset$, es decir $\Gamma \dashv \emptyset$, la secuencia tiene el mismo significado que Γ es falso o que $(A_1 \wedge ... \wedge A_m) \rightarrow \emptyset$. Luego, afirmar la secuencia

$(A_1 \wedge,..., \wedge A_m) \dashv (B_n \vee,...,\vee B_n)$

equivale a afirmar que alguno de los A es falso o que alguno de los B es verdadero. En otras palabras, para decidir cuándo una expresión de la forma $A_1...A_m \dashv B_1...B_n$ es verdadera, el signo $\dashv$ se comporta como la implicación ($\rightarrow$), y exige que, si todos los elementos del prosecuente son verdaderos, entonces al menos uno de los elementos del postsecuente lo sea (i.e., es imposible que todas las fórmulas del prosecuente sean verdaderas y todas las del postsecuente sean falsas).

Ya se dijo también que LK se presenta en forma axiomática, porque parte de secuencias fundamentales (o axiomas esquemas), de la forma:

$$\Gamma \dashv \Gamma$$

donde Γ es una secuencia (o s-sentencia) formada por conjuntos de fórmulas cualesquiera y en las que no importa el orden de las fórmulas que contienen (o sea, de las H-sentencias);

y al que se agregan los siguientes dos grupos de reglas:

I) Reglas estructurales (para LK), (o figuras de deducción estructurales)

a derecha **(o en el *postsecuente*)** *a izquierda* **(o en el *prosecuente*)**

Atenuación$(\dashv A)$ **Atenuación(A** $\dashv$)

$$\frac{\Gamma \dashv \Omega}{\Gamma \dashv \Omega, A} \qquad \frac{\Gamma \dashv \Omega}{A, \Gamma \dashv \Omega}$$

Contracción$(\dashv C)$ **Contracción(C** $\dashv$)

$$\frac{\Gamma \dashv \Omega, A, A}{\Gamma \dashv \Omega, A} \qquad \frac{\Gamma, A, A \dashv \Omega}{\Gamma, A \dashv \Omega}$$

Permutación$(\dashv P)$ **Permutación**$(P \dashv)$

$$\frac{\Gamma \dashv \Theta, A, B, \Omega}{\Gamma \dashv \Theta, B, A, \Omega} \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Phi \dashv \Omega}{\Gamma, B, A, \Phi \dashv \Omega}$$

Corte (Eliminación)

$$\frac{\Gamma \dashv \Theta, A \qquad A, \Omega \dashv \Phi}{\Gamma, \Omega \dashv \Theta, \Phi}$$

(II) Reglas operatorias (para LK), (o figuras de deducción operatorias)

en el postsecuente (o consecuente) **en el prosecuente (o antecedente)**

Condicional

$(\dashv \rightarrow)$ $(\rightarrow \dashv)$

$$\frac{A, \Gamma \dashv \Omega, B}{\Gamma \dashv \Omega, A \rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma \dashv \Omega, A \qquad B, \Phi \dashv \Theta}{A \rightarrow B, \Gamma, \Phi \dashv \Omega, \Theta}$$

Conjunción

$(\dashv \wedge)$ $(\wedge \dashv)$

$$\frac{\Gamma \dashv \Omega, A \quad \Gamma \dashv \Omega, B}{\Gamma \dashv \Omega,\ A \wedge B} \qquad \frac{A, \Gamma \dashv \Omega}{A \wedge B, \Gamma \dashv \Omega} \quad \frac{B, \Gamma \dashv \Omega}{A \wedge B, \Gamma \dashv \Omega}$$

Disyunción

$(\dashv_\vee)$ $(\vee \dashv)$

$$\frac{\Gamma \dashv \Omega, A}{\Gamma \dashv \Omega, A \vee B} \quad \frac{\Gamma \dashv \Omega, B}{\Gamma \dashv \Omega, A \vee B} \qquad \frac{A, \Gamma \dashv \Omega \quad B, \Gamma \dashv \Omega}{A \vee B, \Gamma \dashv \Omega}$$

Negación

$$(\dashv \neg) \qquad \dfrac{A, \Gamma \dashv \Omega}{\Gamma \dashv \Omega, \neg A} \qquad\qquad (\neg \dashv) \qquad \dfrac{\Gamma \dashv \Omega, A}{\neg A, \Gamma \dashv \Omega}$$

El esquema operatorio $\neg \dashv$es el *Principio de no Contradicción*; $\dashv \neg$ representa al *Principio del Tercero Excluido*, mientras que $\to\dashv$ es el *Modus Ponens.* Feys [Gentzen,1234,pág.82-83] muestra la forma de demostrar la equivalencia de cada una de ellas con el esquema operatorio respectivo. Veamos a título de ejemplo, la demostración por la que se obtiene la secuencia correspondiente al esquema operatorio $\to\dashv$.

$$\dfrac{\dashv A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\dashv A \qquad\qquad B\dashv B}{A\to B,\ A\dashv B}\ (\to\dashv)}{A\to B,\ A\dashv B \qquad B\dashv}}{A\to B\ \ A\dashv}}{A\to B\dashv}\ (\text{Corte})$$

El primer paso ha consistido en aplicar el esquema I$\to\dashv$ a las secuencias iniciales (o axiomas esquemas) A$\dashv$A y B$\dashv$B; el segundo, en aplicar Corte al resultado obtenido más la suposición de rechazo del postsecuente, o sea B$\dashv$. luego, se aplica otra vez Corte a la secuencia obtenida junto a la afirmación de una de la secuencia inicial de I $\to\dashv$

Además, si se traducen en LK las secuencias sólo en términos de la implicación -$\to$, entonces los esquemas de estructura traducen los esquemas válidos de LK en esquemas válidos de la lógica positiva de la implicación de Hilbert (H$\to$), [Gentzen,1934,nota Feys,pág.90]. Dicho de otra manera: toda secuencia implicacional pura con antecedente vacío, o sea $\dashv$ A, y A como solo posecuente, es probable en HK.[19]

En LK, a excepción de la regla de Corte, las reglas presentan la siguiente nueva característica, llamada *propiedad de subfórmula,* a saber: *toda fórmula que aparece en la o las premisas de una regla, también aparece en la conclusión, al menos como una subfórmula (S-fórmula).*[20] De esto surge que toda demostración $\Gamma \dashv$A que no use Corte, tiene la propiedad de subfórmula, de tal forma que todo paso en tal demostración se construye a partir de una de sus subfórmulas. Tal propiedad no se cumple para el caso de Corte, ya que en toda demostración en que se usa Corte, aparece una fórmula que no tiene conexión con la que se quiere probar. En particular, Corte elimina lo que silogísticamente Aristóteles llamó el término medio, el cual desaparece en la conclusión. Ahora bien, si los axiomas y reglas estructurales (sin Corte) son suficientes para generar todas las afirmaciones que contienen $\dashv$, y además las reglas operatorias bastan para determinar el significado de las conectivas lógicas, entonces se podría esperar *a priori*, que

Corte fuera redundante. Y esto es precisamente lo que afirma el llamado *Teorema fundamental (Hauptsatz)*, según el cual toda LJ derivación de la lógica intuicionista , (o LK derivación de la lógica clásica) puede ser transformada en una LJ derivación (o LK derivación) que posee la misma secuencia final y en la cual la figura de la deducción llamada "corte" no aparece [Gentzen,1934,pág.49][21]. En principio, podría pensarse que Corte es eliminable como regla primitiva y es posible derivarla de las restantes. Pero tal camino no es posible ya que en LK los restantes esquemas de estructura tienen la propiedad subfórmula y por lo tanto no pierden ninguna fórmula en la demostración, cosa que precisamente no sucede con Corte. Lorenzen en 1955 mostró que, por no aumentar el número de teoremas, Corte podría ser admisible, donde admisibilidad significa que siempre que hay una demostración de las premisas, hay una demostración de la conclusión, y donde evidentemente el problema radica en cómo transformar paso a paso una demostración de las premisas en demostración de la conclusión, que es precisamente lo que Gentzen hace en la demostración de la eliminabilidad de Corte.

Aunque eliminable, la regla de Corte es aplicada por Gentzen para importantes resultados metateóricos. En primer lugar se aplica en la demostración de la consistencia de la lógica de predicados tanto clásica como intuicionista: la secuencia insatisfacible "$\dashv$ " no puede ser derivable de ninguna otra secuencia que no sea por la aplicación de Corte, luego "$\dashv$ " no es derivable [Gentzen,1934,pág.109]. En segundo lugar, la utiliza para demostrar la consistencia de la aritmética sin necesidad de acudir al principio de inducción completa; en tercer lugar, para dar una solución al problema de la decisión de la lógica intuicionista; también es utilizada para demostrar la transformación de un sistema de deducción natural para la lógica intuicionista en uno de secuencias para la misma lógica, y un cálculo de deducción natural para K, en un cálculo de secuencias también para K; y por útimo, para demostrar, por un lado, la equivalencia entre los sistemas estilo-Hilbert y de secuencias para la lógica intuicionista y por el otro, los sistemas estilo- Hilbert y de secuencias para la lógica clásica. En lo que sigue veremos que la regla de Corte es indispensable para la caracterización de una noción de consecuencia lógica equivalente a la de Tarski.

4.4 La noción clásica de consecuencia lógica

Se ha dicho que las reglas de cada cálculo lógico determinan una noción de consecuencia particular, i.e, la noción de consecuencia está dada por el conjunto de reglas de inferencia del cálculo, ya sea esta un G-cálculo o un H-cálculo. En efecto, el primer sistema de deducción Natural que presenta Gentzen es para la lógica intuicionista y tal como presentó las reglas de inferencia, le alcanzaron para demostrar sólo las fórmulas universalmente válidas de este cálculo. Para obtener el cálculo clásico, Gentzen indica que sólo basta agregar al cálculo intuicionista, como fórmulas iniciales de una derivación, cualquier fórmula que sea una instancia de la fórmula fundamental $\neg$A$\vee$A, es decir del *Principio del Tercero Excluido.* también agrega una forma más natural de obtener el cálculo clásico, introduciendo un nuevo esquema de derivación, análogo al de Hilbert,a saber:

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Esto hace que el cálculo clásico tenga respecto del intuicionista una regla de inferencia más que otorga un significado distinto al signo de negación, estableciéndose así una primera diferencia entre la noción de consecuencia lógica intuicionista y la clásica.

De ahora en más pasaremos a tratar las características fundamentales que ofrece el cálculo de secuencias respecto de la noción de conscuencia lógica, algunas de las cuales ya han sido esbozadas antes.

1) La noción de consecuencia lógica es presentada por medio de reglas llamdas precisamente estructurales porque no involucran aninguna constante lógica, lo cual convierte al cálculo de secuencias en una versión de la noción de consecuencia aún más abstracta que la caracterización sintáctica, sin por ello alcanzar el grado de abstracción de la versión tarskiana, ya que la versión secuencial de consecuencia es compacta y finitista desde el comienzo porque las secuencias son series finitas de sentencias. Esto hace que pueda verse a la noción secuencial de consecuencia como un caso particular de la versión moderna al estilo Tarski y ver a la versión de Tarski como una generalización de la de Gentzen .[22]

2) A diferencia de Tarski, la versión secuencial de consecuencia no es presentada como una operación, sino como una relación generalizada entre secuencias, que cumple con las propiedades expresadas por los esquemas estructurales ya vistos. Además, en la presentación de Gentzen, las secuencias no son conjuntos, aunque como luego afirma que no importa el orden, se las suele tratar como conjuntos finitos de fórmulas [Wojcicki,1988; Fitting,1990].

3) Puesto que el sistema LK tiene una presentación axiomática, el sistema resultante no es un mero sistema al estilo Hilbert, sino que, a causa de las reglas estructurales y operatorias, permite un análisis más profundo de las propiedades estructurales de los distintos sistemas de lógica, en especial de la noción de consecuencia. En particular, a diferencia de los H-cálculos, en los L- cálculos a la derecha del $\dashv$ puede haber varias secuencias (o conjuntos) o ninguno, hecho este que diferencia sustancialmente el significado del $\dashv$ respecto de la noción de deducibilidad expresada por el deductor $\vdash$ de Hilbert, reflejando una noción más amplia que , como ya se dijo, la acerca al concepto de involución de Carnap.

4) Dado que LK está pensado para obtener teoremas, todo teorema tendrá que ser el resultado de una demostración definida de forma tal que afirme que una secuencia es demostrable cuando el postsecuente es unitario (i,e., esté compuesto por un solo enunciado), si es que se quiere representar la noción de deducción clásica, y se siga del conjunto de los prosecuentes por medio de las reglas del sistema. Gentzen utiliza las demostraciones en forma de árboles, pero existen actualmente versiones de la lógica de secuentes más modernas en las que es común realizarla en forma estándar o por tableaux [Smullyan,1968]. Cualquiera que sea la forma adoptada para las demostraciones, la secuencia (o conjunto de H-sentencias) X será un teorema de LK, si la secuencia $\dashv$ X tiene una demostración.

5) Si la noción de consecuencia es finitaria, entonces puede afirmarse que está determinada por el conjunto de sus teoremas, por lo cual, la versión LK para la lógica de orden uno es equivalente a cualquier versión estilo Hilbert, En particular, para el cálculo sentencial, se demuestra: (i) Si X es un teorema de LK sentencial, entonces X es una tautología (corrección), y (ii) Si X es una tautología, entonces X es un teorema de LK sentencial (completitud) [Fitting,1990,pág.85]

6) Las reglas estructurales de Gentzen de Permutación y Contracción, tal vez por lo obvias, no se dan generalmente como propiedades de la noción de deducibilidad. En particular, para las inferencias clásicas, ellas nos dicen que ni el orden de las premisas ni la reiteración de ellas, afectan la validez de una derivación.

7) Por último, se trataría ahora de ver cómo y en qué sentido las reglas del cálculo de secuencias "cumplen" con los axiomas de Tarski que caracterizan su noción de consecuencia lógica. De los cinco axiomas primitivos de Tarski, tomaremos sólo aquellos que se corresponden con los que caracterizan la noción de consecuencia sintáctica ya expuesta, a saber:

T1. $X \subseteq Cn(X)$(Inclusión)
T2. $X \subseteq Y$ implica $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$(Monotonía)
T3. $Cn(Cn(X)) \subseteq Cn(X)$(Idempotencia)

En lo que sigue mostraremos que ambas versiones expresan, en lenguaje propio, propiedades de la noción de consecuencia lógica que pueden considerarse las mismas, bajo ciertas condiciones.

(i) *Prima facie*, el axioma T1 parece estar directamente relacionado con la propiedad que expresa la secuencia fundamental o axioma de LK, $\Gamma \dashv \Gamma$. Sin embargo, veremos que ella expresa algo más débil que T1. Sobre la base de lo ya dicho respecto de que la noción secuencial de consecuencia expresada por $\dashv$ puede considerarse una especificación (compacta) de la de Tarski, y en el caso de que Γ fuese una secuencia compuesta por la única sentencia A, lo único que diría la secuencia fundamental es que la sentencia A "se sigue" de A, o sintácticamente, que toda sentencia se deduce de sí misma.

Pero, si a la secuencia inicial $\Gamma \dashv \Gamma$, (donde Γ puede ser un conjunto finito), se le aplica Atenuación,(A$\dashv$) se obtiene B,$\Gamma \dashv \Gamma$, entonces, expresado en lenguaje conjuntístico, sería posible afirmar: $\Gamma \subseteq \{\Gamma \cup \{B\}\}$y como $\{\Gamma \cup \{B\}\}$ se ha seguido de Γ por Atenuación, luego $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$, es decir, $X \subseteq Cn(X)$, que es T1.

De lo expuesto se desprende que para obtener T1 a partir del esquema inicial de LK, se hace necesario utilizar el esquema estructural de Atenuación A$\dashv$ y que por lo tanto T1 es expresivamente más fuerte que el axioma de LK.

(ii) En principio, Atenuación es T2, o sea Monotonía. Intuitivamente, lo que Monotonía dice es que, dado un conjunto X de premisas, de las cuales se deduce una conclusión, es posible agregar a X un número finito de sentencias, sin que se vea alterada la obtención de la conclusión. Ya vimos que LK presenta dos formas de Atenuación, la Atenuación en el postsecuente ($\dashv$ A) y la Atenuación en el prosecuente (A$\dashv$). Existen formulaciones de la lógica de secuencias que unifican[23]en su formulación a ambos tipos y que por lo tanto facilitan demostrar la equivalencia de esta propiedad con la Monotonía, [Fitting,1990], a saber:

Sean las afirmaciones $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ y $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$,(donde Γ y Ω son secuencias o conjuntos finitos) y las secuencias:

$$\Gamma_1 \dashv \Omega_1 \qquad (1)$$
$$\Gamma_2 \dashv \Omega_2 \qquad (2)$$

Puesto que $\dashv$ representa un caso particular finitista de la noción de consecuencia tarskiana en su versión actual, de (1) se obtiene que Ω_1 es $\mathrm{Cn}(\Gamma_1)$ y que Ω_2 es $\mathrm{Cn}(\Gamma_2)$; y como además $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces se sigue que $\mathrm{Cn}(\Gamma_1)\subseteq\mathrm{Cn}(\Gamma_2)$, es decir Monotonía.[24]

En este punto debemos aclarar que existe otra tercer forma de expresar la propiedad de Monotonía en lógica de secuentes que se obtiene por Atenuación en el prosecuente e Introducción de la conjunción, es decir por un refuerzo del antecedente por conjunción, o sea :

$$\frac{\dfrac{A \dashv B}{A, C \dashv B}}{A \wedge C \dashv B} \; (para\; \Gamma y\; \Omega \;=\; \emptyset)$$

Esta formulación se refleja en el lenguaje objeto de K por medio de la ley conocida con el nombre de *Refuerzo del Antecedente*, por lo cual la carencia de esta ley como teorema es otra forma de afirmar la no-monotonía de un cálculo lógico. Obviamente, la Atenuación expresada por la regla estructural es más general y es independiente, como ya se vió de cualquier conectivo lógico.

(iii) Falta ahora mostrar que Corte refleja de alguna manera el axioma T3 de Tarski, o sea Idempotencia. La vinculación entre ambos no es sencilla de ver como en los casos anteriores, por lo cual y a los efectos de claridad expositiva, partiremos de una versión más simple de la regla de Corte:

$$\frac{\Gamma \dashv \mathrm{A} \qquad \mathrm{A},\Omega \dashv \mathrm{B}}{\Gamma,\Omega \dashv \mathrm{B}}$$

donde Γ y Ω son secuencias (o conjuntos finitos) y A y B sentencias.

Lo que dice Corte es que si un enunciado A se sigue de una secuencia (o conjunto finito) Γ ; y de ese mismo enunciado A junto con otra secuencia Ω se sigue otro enunciado B; entonces, B se sigue de las secuencias Γ y Ω , eliminando A[25], es decir, produciendo un "corte" en la derivación.

Se trata ahora de ver en qué sentido el axioma T3 de Tarski refleja la regla de Eliminación o Corte.

T3 dice que si una sentencia $\mathrm{B}\in\mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(\mathrm{X}))$ entonces $\mathrm{B}\in\mathrm{Cn}(\mathrm{X})$, para un conjunto X de sentencias finito.

(i) Supongamos que B∈Cn(Cn(X)), entonces la sentencia B ha sido obtenida de todas las consecuencias del conjunto X, es decir, del conjunto Cn(X).(ii) Como el conjunto X es finito, en el conjunto Cn(X) están todas las sentencias originarias de X (que pertenecen a Cn(X) por T1), más otras que no estaban en X, en particular, la sentencia A (o sea que A∈Cn(X). (iii) Por ello, la sentencia B se ha obtenido de todas las sentencias originarias de X más la sentencia A. Luego B∈Cn(X).

Por lo expuesto, es posible decir que la sentencia que se ha "eliminado" o "cortado" es A, ya que por pertenecer al conjunto formado por las sentencias originarias de X más ella misma (es decir Cn(X), por T1 también pertenece al conjunto Cn(Cn(X)). Si bien hay que admitir que Corte no dice exactamente lo mismo que T3, es posible afirmar que la regla de Corte formulada por Gentzen es un caso particular finitista del axioma T3 de Tarski.

En síntesis, ya vimos que, al ser las secuencias conjuntos finitos, la noción secuencial de consecuencia es de por sí finita y compacta y que además, la regla de Corte puede verse como un caso particular finito de T3 de Tarski.

Por otra parte, ya vimos que por un lado, el llamado *Teorema Fundamental* de Gentzen mostró que Corte es eliminable, pero que por el otro, el mismo Gentzen la aplicó para importantes resultados metateóricos. Pero es obvio que de su aplicabilidad no se infiere la necesidad de incluirla entre las reglas estructurales. Lo que en realidad sucede es que sin la regla de Corte no se podría caracterizar la idea de deducibilidad, ya que sin ella, no habría *Modus Ponens*, puesto que esta última es un caso particular de la primera. La razón es la siguiente: partiendo de la formulación simplificada de Corte ya dada, a saber:

$$\frac{\Gamma \dashv \mathrm{A} \qquad \mathrm{A},\Omega \dashv \mathrm{B}}{\Gamma, \Omega \dashv \mathrm{B}}$$

no es difícil ver que el siguiente esquema:

$$\frac{\Gamma \dashv \mathrm{A} \qquad \mathrm{A},\Gamma \dashv \mathrm{B}}{\Gamma \dashv \mathrm{B}}$$

es un caso particular de Corte. Si además la secuencia Γ es vacía, se obtiene el *Modus Ponens:*

$$\frac{\dashv A \qquad A \dashv B}{\dashv B}$$

Luego, la noción de consecuencia caracterizada por la lógica de secuentes, a través de la regla de Corte, valida al *Modus Ponens* como regla de la lógica clásica.

Para concluir y a manera de síntesis expondremos las propiedades de la operación de consecuencia tal como se la encuentra comúnmente formulada en la lliteratura lógica actual, siguiendo en líneas generales el desarrollo presentado por R,Wojcicki en sus libros *Lectures on Propositional Calculi* [1984] y *Theory of Logical Calculi* [1988].

Dado un lenguaje proposicional S, una operación Cn definida sobre S es una operación de consecuencia (equivalente a la de Tarski[1930a]), si para todo conjunto de fórmulas X,Y de S, se satisfacen las siguientes condiciones:

T1	$X \subseteq Cn(X)$	(Inclusión)
T2	$X \subseteq Y$ implica $Cn(x) \subseteq Cn(Y)$	(Monotonía)
T3	$Cn(Cn(X)) \subseteq Cn(X)$	(Idempotencia)

Si además se cumple:

T4 $Cn(X) = U\{Cn(Y)/Y$ es finito y $Y \subseteq X\}$,

entonces Cn es *finitaria* (o *compacta*);

y si se cumple:

T5 $eCn(X) \subseteq Cn(eX)$ para toda sustitución e,

entonces Cn es *estructural* (o *lógica*)

Si además Cn es compacta y estructural, Cn es *estándar*.

Como puede observarse, tomando sólo en cuenta las tres primeras condiciones queda caracterizada la operación de consecuencia. Respecto de la versión de Tarski, se han eliminado el axioma 1 original que exigía la numerabilidad de S, ya que puede haber lenguajes no numerables, para los cuales también puede exisitir una operación de consecuencia y el 4, es decir, la compacidad, ya que esta restricción finitista no es exigible para toda operación de consecuencia. Como segundo axioma se incluye ahora la monotonía, que en la axiomática de Tarski, era deducible directamente de la compacidad (Teorema1), tal como ya lo vimos. La compacidad se introduce en T4, y por último, T5 expresa la operación sustitución uniforme como condición para que una operación de consecuencia sea una operación de consecuencia lógica. Debe destacarse que T4 y T5 expresan propiedades independientes, y que aparecen en forma conjunta si la operación de consecuencia es estándar.

De lo expuesto se desprende en primer lugar que los axiomas T1-T3 son suficientes para definir un cálculo, y en segundo, que pueden existir cálculos cuya operación de consecuencia no sea estructural, es decir que no contengan reglas de inferencia estructurales (i.e. lógicas), y que sin embargo sí tengan una operación de consecuencia, tal como lo vimos antes. Dicho de otra forma, todo cálculo estructural es un cálculo, pero no viceversa. En particular, los cálculos estructurales proposicionales pueden ser llamados también lógicas proposicionales, sin que de ello pueda inferirse que se trata de la lógica proposicional clásica (K), simplemente porque hasta ahora sólo se ha definido la noción de cálculo o sistema lógico, pero no se han dado aún las condiciones que deberían agregarse a una operación de consecuencia estructural para que sea la operación de consecuencia de la lógica clásica proposicional.

Para que la operación Cn de consecuencia de un cálculo sea la operación de consecuencia de la lógica proposicional clásica K, debe satisfacer las siguientes condiciones:

	a.	Cn satisface MP_{Cn} sii MP es una regla de L
	b.	Cn satisface TD_{Cn} sii TD es una regla de L
(T)	c.	Cn satisface$(\rightarrow)_{Cn}$ sii MP y TD ambas son reglas de L
	d.	Cn satisface $(\wedge)_{Cn}$ sii AD y SP son reglas de L
	e	Cn satisface $(\vee)_{Cn}$ sii AT y SM son reglas de L

(T) f. Cn satisface $((\neg\ ))_{Cn}$ sii CN y RAK son reglas de L

(donde MP es abreviatura de *Modus Ponens*; TD, *Teorema de la Deducción*; AD, *Adjunción*; SP, *Simplificación*; AT, *Adición*; SM, *Summation* (Elim$\vee$); CN, *Contradicción* (Duns Scoto); RAK, *Reducción al absurdo* y donde las condiciones indicadas por (T) son las establecidas por Tarski [1930] como axiomas para la operación de consecuencia de la lógica clásica).

A modo de corolorario, dado un cálculo lógico cualquiera, si su operación de consecuencia no satisface todas las condiciones anteriores (o formulaciones equivalentes), dicho cálculo no será la lógica proposicional clásica ni tampoco podrá constituir una extensión de la misma. Tal cálculo deberá entonces ser considerado un cálculo lógico divergente de K aunque no necesariamente una lógica alternativa.

Gladys Palau
Universidad de Buenos Aires

email: gpalau@filo.uba.ar

Referencias bibliograficas

-ALCHOURRON,Carlos,[1995]: *Concepciones de la lógica*, en, LOGICA, vol.7 de la Enciclopedia IberoAmericana de Filosofia,(EIAF), Madrid, Ed.Trotta.

-CARNAP,R.;[1937],*The Logical Syntax of Language*, London,Routledge & Kegan Paul Ltd.

-CARNAP,R.;[1947], *Meaning and Necessity.An Study in Sematics and Modal Logic.* Phoenix Books, The University of Chicago Press.

-CARNOTA, Raúl: *Lógica e Inteligencia Artificial,* en LOGICA, vol.7. de la Enciclopedia IberoAmericana De Filosofía (EIAF), Madrid, Ed.Trotta.

-CHURCH, A; [1956], *Introduction to Mathematical Logic,* Princeton University Press.

-ETCHEMENDY,J.,[1990], *The Concept of Logical Consecuence,* Harvard University Press.

-FITTING, Mervin, [1990], *First Order Logic and Automated Theorem Proving*,Springer-Verlag.

-GENTZEN, G.,[l955], *Recherches sur la déduction logique*, Paris,P.U.F. -SMULLYAN,Raymond,[1968], *First Order Logic*, Springer-Verlag.

-SUPPES, Patrick,[1988], *Philosophical Interpretations of Tarski's Work*,en the Journal of Symbolic Logic,vol.53.1.

-SUNDHOLM,G.; [1983], *Systems of Deductions,* en *Handbook of Philosophical Logic,* vol.I, *Elements of Classical Logic*, Reidel Publishing Company.

-TARSKI, A. [1930a] *On Some Fundamental Concepts of Metamathematics*, en Logic, Semantics, Metamathematics (LSM).

-TARSKI, A. [1930b] *Investigations into the sentential calculus*, con Jan Łukasiewicz, en LSM,pág.38.

-TARSKI, A. [1930c] *Fundamental Conceptos of the Methodology of the Deductive Sciences*, en LSM, pág. 60.

-TARSKI, A. [1933] *The Concept of Truth in Formalized Languages*, traducción inglesa en LSM, pág. 153.

-TARSKI, A. [1934] *Some Methodological Investigations on the Definability of Concepts*, en LSM,pág.298

-TARSKI, A. [1935/36] *Foundations of the Calculus of System*, en LSM, pág. 342.

-TARSKI, A. [1936], *On the Concept of Logical Consequence*, en LSM, pág. 409

-TARSKI, A. [1983], *Logic, Semantics, Metamathematics,*(LSM), Segunda Edición con Introducción de J.Corcoran, translated by J.H.Woodger. U.S.A., Hackett Publishing Company.

-WOJCICKI,Ryszard,[1984], *Lectures on Propositional Calculi*, The Publishing House of the Polish Academy of Science.

-WOJCICKI,Ryszard,[l988], *Theory of logical calculi, Basic Theory of Consequence Operations*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

4.4.1 Notas

1. Respecto de si la presentación de Frege es realmente sintáctica, hay diferencias de interpretación, ya que fue el primer lógico contemporáneo que definió el significado de las conectivas lógicas como funciones de verdad, y al igual que Peano en su *Formulaire*, en su *Begriffsschrift* Frege las trata casi siempre en forma inseparable de sus significados [Kneebone,1965,pág.177],

2. Corresponde hacer notar que el concepto de semántica, también se debe a Carnap, y que, tanto el concepto de metamatemática, como el de sintáxis y semántica fueron adoptados en el mismo sentido también por Tarski.

3. Bolzano dio una definición de deducibilidad, que se aproxima más a la versión semántica, al decir que las proposiciones M,N,O,... son deducibles de las proposiciones A,B,C,...,en relación a sus variables contituyentes i,j,..., si todo conjunto de conceptos que se pongan en los lugares i,j,...que hacen a todas las proposiciones A,B,C,...verdaderas, también hacen a todas las proposiciones M,N,O,... verdaderas.

4. Este artículo reproduce un trabajo de Tarski leído en 1928 en la Polish Mathematical Society.

5. Las versiones de las obras citadas de Tarski se encuentran en *Logic, Semantics,and Metamathematics* (LSM), Segunda Edición editada y con introducción de John Corcoran, Hackett Publishing Company, (Primera Edición: Oxford University Press en 1956.)

6. Por *intented model* debe entenderse un par (S,Cn), donde S es el conjunto de todas las sentencias del lenguaje y Cn la relación de derivabilidad entendida como una función que va de un conjunto de sentencias al conjunto de sus consecuencias. Luego, un sistema deductivo es definido como un conjunto de sentencias cerrado bajo la operación de derivabilidad.

7. Este artículo originariamente apareció en dos partes, la primera en 1935 y la segunda en 1936.

8. Más aún, Tarski muestra que si una sentencia cualquiera y, ha sido obtenida de otras sentencias $x_1,...,x_n$ (n=1), entonces la implicación $(x_1,...,x_n) \longrightarrow y$, pertenece al conjunto L de las sentencias universalmente válidas, y de esta forma la regla del *Modus Ponens* es suficiente

como única regla de inferencia para una teoría deductiva, siempre y cuando el conjunto de los axiomas sea apropiado.

9. En lugar del símbolo que Lewis utiliza para la implicación estricta, utilizaremos el signo $\Rightarrow$.

10. Debe destacarse que esta restricción finitista es de muy distinta naturaleza a la que impone el axioma de compacidad, la cual no impide indagar en conjuntos infinitos, sino que sólo pide la existencia de subconjuntos finitos con la misma potencia deductiva.

11. Pese a que no es nuestro objetivo ni exponer, ni analizar ni comparar los sistemas de deducción, queremos observar al menos la dificultad principal de cada uno. En general se acepta que el estilo Hilbert-Frege presenta el inconveniente de que aún la deducción más sencilla debe derivarse del conjunto prefijado de axiomas y que a fin de aceptar las demostracións a partir de suposiciones debe demostrarse primeramente el Teorema de la Deducción. Repecto de los sistemas NC, se acepta que no todos los sistemas lógicos son suceptibles de ser expresados de esa forma. Por ejemplo, los sistemas modales intermedios entre S4 y S5 que no pueden aislar el comportamiento del operador $\Diamond$ no pueden expresarlo en término de reglas I y E.

12. En la nota A del libro de Gentzen [1934], Feys hace notar que en realidad los sistemas NC y LC no son dos cálculos sino dos grupos de cáculos. Los cálculos N, se valen de "aserciones con suposiciones", y tienen su origen en Jaskowski, quien también en 1934, siguiendo una idea de Łukasiewicz, elaboró un método análogo.Los L-cálculos, que se valen de "aserciones de consecuencia", deben a Hertz (1922-1929) las nociones de secuencia y de esquema estructural, pero sin embargo nadie antes llegó a enunciar la totalidad de los esquemas en forma análoga a la de Gentzen.

13. Lamentablemente no existe un uso uniforme respecto de la traducción del término *sequenzen*. Por ejemplo, Belnap [1975] lo traduce al inglés como *consecution*; Feys, utiliza la palabra francesa *sequence*, mientras que otros utilizan el anglicismo *secuente*. Dado que para este trabajo se ha dispuesto de la traducción de Feys, se ha adoptado el término *secuencia*. El término *secuente* se reserva para hacer referencia indistintamente al prosecuente como al postsecuente.

14. Se ha decidido no respetar el signo $\longrightarrow$ utilizado por Gentzen para relacionar secuentes porque en este trabajo un signosimilar se ha utilizado para representar al condicional material. En su lugar,se ha elegido el signo $\dashv$ porque gráficamente refleja el significado intuitivo que en el cálculo de secuencias tiene $\longrightarrow$ (el sentido de la flecha y la raya vertical del turnstyle).

15. En su uso más común en lógica, la palabra secuencia se usa spara designar sucesiones ordenadas de fórmulas. En la presentación de Gentzen, lo único que interesa diferenciar es el conjunto de fórmulas que constituyen el prosecuente del conjunto que constituye el postsecuente, sin que intervenga en nada el orden de las fórmulas pertenecientes a ambos conjuntos.

16. Una diferencia esencial entre los signos de implicación material y de relación entre secuentes es que, mientras el$\rightarrow$ se puede dar en forma anidada, el $\dashv$ siempre se presenta entre secuencias fundamentales. Esta es la razón por la cual se ha decidido reservar la palabra *secuencia* para las secuencias fundamentales o s-sentencias formadas a partir del $\dashv$.

17.Creemos necesario destacar que mientras el trabajo de Gentzen es de 1934, el libro de Carnap Formalization in Logic, en el cual introduce el conepto de *logical involution* es de 1943.

18. Dadas las diferencias estructurales presentadas, se conviene generalmente en llamar a las sentencias de un cálculo de secuentes, *S-sentencias* y a las sentencias pertenecientes a un

sistema deductivo al estilo-Hilbert, H-*s*entencias.

19 Esta traducción se lleva a cabo a partir de que toda secuencia probable en SK tiene antecedente vacío, es decir,tiene la forma $\dashv$ $B_n\vee$,...,$\vee B_n$; luego toda sub-fórmula Bi$\vee$Bj es traducible como (Bi-$\longrightarrow$Bj)-$\longrightarrow$Bj.

20. Nótese que, en relación a la lógica relevante 5, la propiedad de subformula puede ser pensada como una condición para la deducción relevante y que entonces la regla de Corte elimina toda relación de relevancia entre premisas y conclusión.

21. Las derivaciones sin uso de Corte en LK corresponden a las derivaciones normales de NK, donde por *derivación normal,* debe entenderse una derivación en la cual una I-regla nunca es seguida por la E-regla correspondiente.

22. Como se verá más adelante, la versión moderna de la noción de consecuencia tarskiana sólo incluye los axiomas correspondientes a la versión sintáctica dada en la sección 1y por ello de ahora en más los indicaremos como T1,T2 y T3.

23. Unificar la formulación de esta regla de tal manera que abarque Atenuación tanto en el prosecuente como en el postsecuente, permite también caracterizar las lógicas no-monótonas como aquellas que carecen de Atenuación.

24. Otra versión de Atenuación que tiene una semejanza mayor con Monotonía es la de Wojcicki [1988,pág. 330], que es la siguiente: para cualquier conjunto de fórmulas X,Y,

$$\frac{X \dashv Y}{X\cup X' \dashv Y\cup Y'}$$

25. que la regla de Corte elimine la sentencia A de la fórmula inferior, ha determinado que algunos lógicos llamen a esta regla Eliminación y al Teorema Fundamental, *Teorema de eliminación* [Anderson&Belnap,1975]