Serie:

Hipercuadernos de Divulgación Científica

Dirección General de Divulgación de la Ciencia
UNAM

# El teorema de Gödel

Dr. Alfredo Alejandro Careaga
Subdirector de Innovación Tecnológica
Dirección General de Divulgación de la Ciencia
Universidad Nacional Autónoma de México

Mayo 2002

# ÍNDICE

# ÍNDICE

# I.- INTRODUCCIÓN

Querido lector,

El **teorema de Gödel** es uno de los resultados fundamentales de las matemáticas del siglo XX y una de las aportaciones cruciales a las matemáticas de todos los tiempos. Por su importancia, es equiparable a la **teoría de la relatividad** de Albert Einstein o al **principio de incertidumbre** de Werner Heisenberg.

A pesar de su enorme relevancia, poca gente fuera del mundo de la ciencia ha oído hablar de él. Es, sin embargo, un teorema que no es difícil de entender, que provoca enorme interés en quienes lo llegan a captar y cuyas aplicaciones ilustran fascinantes paradojas matemáticas.

Tal vez la mayor aportación de Kurt Gödel (1906-1978) es que, junto con otros trabajos de pensadores del siglo XX, sus teoremas establecen límites para las matemáticas en particular y para el conocimiento científico en general. En pocas palabras lo que Gödel nos dice en su teorema es que nunca llegaremos a conocer todos los secretos del Universo.

Esto es verdaderamente importante, pues antes de este resultado, los científicos y el público en general considerábamos que no existía límite alguno para la ciencia. Creíamos ingenuamente que era sólo cuestión de tiempo, pero que al final llegaríamos a comprender todos los secretos de la naturaleza. Los pensadores posteriores a la Revolución Industrial consideraban que la naturaleza era como una inmensa máquina preprogramada y con optimismo afirmaban que, tarde o temprano, los científicos llegarían a conocer todas las reglas de la máquina. Hoy sabemos que existen aspectos que son imposibles de conocer debido a las limitaciones inherentes a cualquier sistema de conocimientos, incluida la ciencia misma.

Muchas personas han afirmado que la ciencia no tiene respuestas a todas las preguntas. Cualquiera puede decir esto. Lo verdaderamente importante del trabajo de Kurt Gödel es que él fue el primero en demostrar rigurosamente esta aseveración y construyó su demostración usando el lenguaje preciso de la lógica simbólica. Gödel utilizó el rigor de las matemáticas para demostrar, sin lugar a dudas, que las matemáticas mismas son incompletas. ¿Qué quiere decir esto? ¿Qué implicaciones tiene para el conocimiento humano? ¿Porqué es tan importante éste resultado?

Kurt Gödel
(1906-1978)

En este HiperCuaderno veremos los siguientes temas que te permitirán comprender el teorema de Gödel y sus implicaciones:

**I.- Introducción**
**II.- Ayudarte a preparar tu mente para entenderlo**
**III.- Presentarte de una manera sencilla el teorema de Gödel**
**IV.- Hablar de sus implicaciones**
**V.- Darte una demostración informal del teorema**
**VI.- Hablar un poco de la vida de Kurt Gödel**
**VII.- Incluir un conjunto de ligas a otras páginas relevantes**

Espero que este trabajo sea de tu interés. Mucho te agradeceré, querido lector, que me escribas dándome tus comentarios y sugerencias que me permitirán aclarar tus dudas y mejorar el texto de este HiperCuaderno.

# II.- PREPARACIÓN DE LA MENTE

Para comprender el teorema de Gödel tenemos que preparar la mente: colocarla en una disposición especial, acostumbrarla poco a poco a clarificar paradojas y entender contradicciones aparentes.

## 1

Para empezar a calentar motores, consideremos la famosa frase de Sócrates:

**“Yo sólo sé que no sé nada"**

Sócrates afirma que sabe una sola cosa y por lo tanto se contradice al decir que no sabe nada. Ese algo que él sabe es justamente “que no sabe nada”. Si es verdad que “Sócrates no sabe nada” entonces se contradice al afirmar que “yo sólo sé que…”, pues eso que sabe, ya es algo.

Piensa, querido lector, en la aseveración que Sócrates plantea. Es muy probable que él la haya dicho con plena conciencia de la contradicción que encierran sus famosas palabras.

Sócrates hace referencia a sí mismo y ahí es donde aparece la contradicción. El teorema de Gödel tiene que ver con afirmaciones que hacen referencia a sí mismas.

## 2

Consideremos ahora la antigua paradoja llamada “paradoja de Epiménides o del mentiroso”. Epiménides era un cretense que supuestamente hizo la inmortal aseveración “todos los cretenses mienten”. Supongamos que te encuentras con Epiménides, quien te dice:

**“Soy un mentiroso empedernido. Nunca digo la verdad”.**

¿Qué podemos concluir? Analicemos esto con cuidado. Empecemos a usar un poco de lenguaje matemático. Titulemos a la proposición anterior con la letra **A**. Podemos escribir:

**A = [Nunca digo la verdad]**

Si esto es cierto, entonces Epiménides siempre miente. Por lo tanto todas las afirmaciones que él diga son falsas. En particular la frase **A**, que él mismo dijo, es necesariamente falsa y en este caso podemos concluir que él siempre dice la verdad. Es decir que si **A** es verdad, entonces **A** es mentira y viceversa.

Piénsalo un momento para que te convenzas de que existe una contradicción inherente en la frase debido a una referencia a sí mismo.

## 3

Este cuadro del pintor surrealista **René Magritte** presenta el mismo tipo de contradicción, pues debajo de un objeto que claramente es una pipa está escrita una frase en francés que dice *“Esto no es una pipa”*. El cuadro se llama *“La Traición de las Imágenes”*.

Cuando las palabras y las imágenes hacen referencia a sí mismas, aparece el potencial para lo que Magritte llama la “traición” y de esta forma surgen las paradojas y las contradicciones.

Gödel tuvo la intuición de que una proposición matemática podría hacer referencia a otra proposición matemática y posiblemente a sí misma. Esto, como veremos más adelante, no es tan fácil como parece, pues la referencia debe de hacerse usando lenguaje matemático.

## 4

Veamos una variante de la “paradoja de Epiménides”. Imaginemos ahora que aparece nuevamente ante nosotros y nos dice:

**“Esta aseveración es falsa”.**

¿Epiménides está diciendo la verdad o está mintiendo? Analicemos esto con cuidado usando un poco de lenguaje matemático. Llamemos a la proposición anterior B. Podemos escribir:

**B = [Esta aseveración no es verdad] = [B es falsa]**

Entonces hay dos posibilidades: **B** es verdadera o bien B es falsa. Veamos cada posibilidad en detalle:

Si **B** es verdadera, entonces, como **B** se refiere a sí misma, resulta que lo que **B** dice es verdad. Y justamente, lo que **B** dice es que **B** es falsa.

La otra posibilidad es que **B** sea falsa. En este caso, lo que **B** afirma es mentira y lo que afirma es que **B** es falsa. Entonces resulta que **B** es verdad.

Nuevamente encontramos que la contradicción aparece en una frase que hace referencia a sí misma.

Este tipo de paradojas que violan la dicotomía habitual que separa las aseveraciones en verdaderas o falsas inspiró a Gödel a usar el razonamiento lógico para analizar al propio razonamiento lógico. Esta idea de hacer “introspección” en las matemáticas resultó muy poderosa y fructífera.

Una forma de expresar el **teorema de Gödel** se parece a la aseveración **B**, pero Gödel sustituye la palabra **“verdad”** por la palabra **“demostrable”**. La aseveración que veremos más adelante es:

**G = [Esta aseveración no es demostrable] = [G es indemostrable]**

Lo que dice Gödel es que **G** puede ser **verdad**, pero que no vamos a poder demostrar que es **verdad**.

Aquí aparece por primera vez el hecho de que la **verdad** es más poderosa que la **demostrabilidad.**

## 5

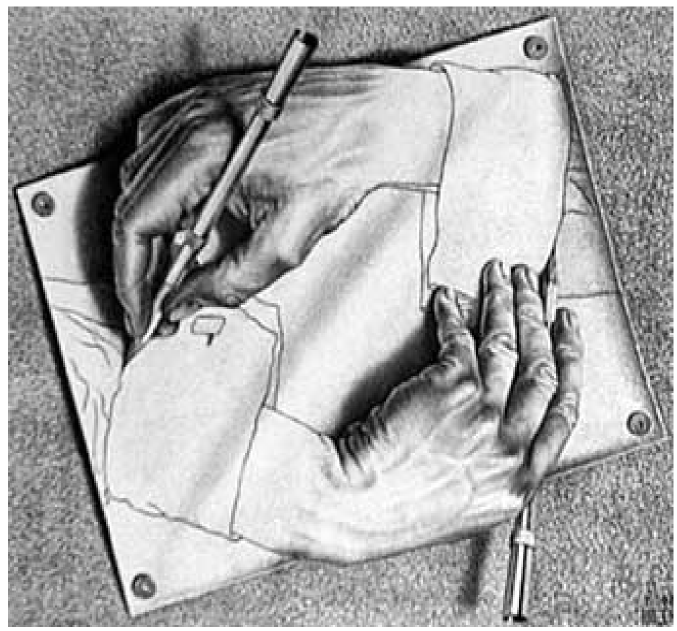
La siguiente paradoja que vamos a analizar es una variante interesante de la de Epiménides.

Consideremos las siguientes dos frases:

**La siguiente oración es falsa.**
**La oración anterior es verdadera.**

Estas dos aseveraciones tomadas por separado no encierran ninguna contradicción, pero tomadas juntas aparece la paradoja. Esta vez te dejamos que las analices y llegues a la contradicción.

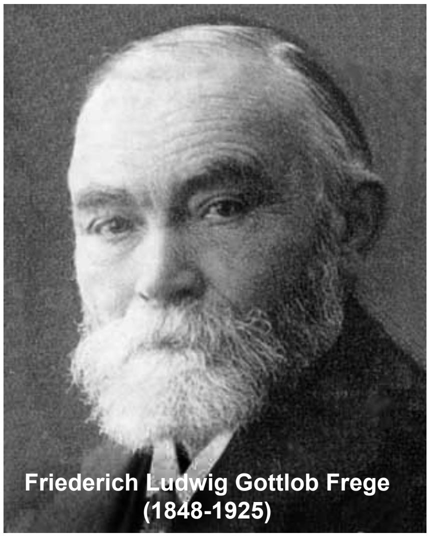
Es interesante observar que la autoreferencia a la que hemos atribuido la aparición de las contradicciones lógicas en los ejemplos anteriores está, en este caso, escondida. El disfraz de la contradicción es un círculo vicioso, ya que la primera frase hace referencia a la segunda y viceversa. Esto se parece a las “*Manos que Dibujan*”, de **M.C. Escher**.



## 6

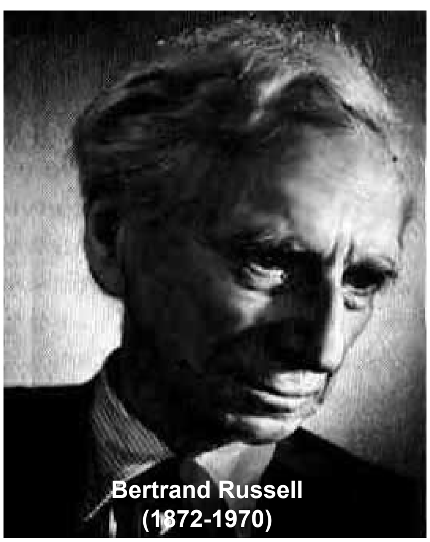
Finalmente veamos lo que se conoce como la "paradoja de Russell". Antes de plantearla les platicaré su historia:

A finales del siglo XIX el matemático Friederich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), uno de los fundadores de la lógica simbólica, propuso que las matemáticas podían reducirse a la lógica y dedicó la mayor parte de su vida a demostrarlo.Escribió dos grandes y difíciles tomos titulados **“Las Leyes Básicas de la Aritmética”**. Publicó el primer tomo y cuando el segundo estaba ya en la imprenta, en 1902, recibió una carta de un joven de 30 años llamado Bertrand Russel, quien con gran modestia le planteó una paradoja que generaba una contradicción en el sistema de axiomas de Frege. Después de muchas cartas entre ambos y de tratar de reparar su sistema de axiomas, Frege decidió finalmente publicar su segundo tomo, pero en la introducción escribió que hacía la publicación con gran tristeza, pues la obra de toda su vida quedaba en entredicho por la paradoja de Russell.



Friederich Ludwig Gottlob Frege
(1848-1925)

Bertrand Russell (1872 – 1970) fue uno de los pensadores que más lograron hacer avanzar a la lógica en el siglo XX. La paradoja que descubrió puso en duda al campo entero de las matemáticas, pues parecía que la metodología de éstos (que está basada en la lógica) tenía contradicciones esenciales y profundas. La paradoja de Russell propició numerosos e importantes trabajos en teoría de conjuntos, lógica y filosofía para consolidar nuevamente los fundamentos de las matemáticas.



Bertrand Russell
(1872-1970)

Veamos entonces la paradoja de Russell explicada en términos sencillos:

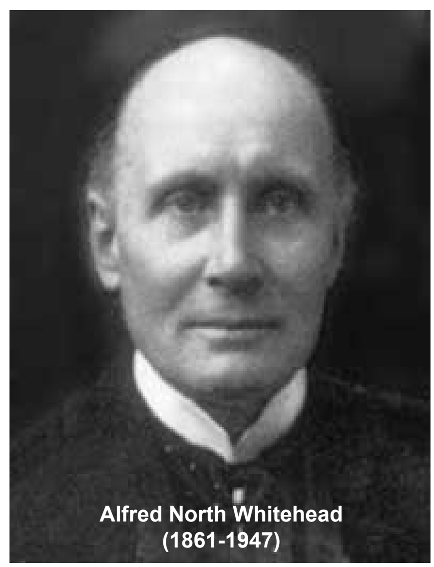
Vivimos en un pueblo apartado de la civilización. En este pueblo es mal visto que los hombres lleven barbas, por lo que todos están rasurados. En el pueblo hay un solo barbero que rasura a todos los hombres que no se rasuran a sí mismos. Entonces podemos separar a los hombres en dos conjuntos: aquellos que acuden al barbero para que los rasure (conjunto al que llamaremos **B**) y aquellos que se rasuran a sí mismos (conjunto **SM**).

Sir Bertrand te pregunta, ¿En cuál de estos dos conjuntos está el barbero?

Tal vez contestes “el barbero está en el conjunto **SM** pues él se rasura a sí mismo”. Es decir, que el barbero rasura al barbero, ¿verdad? Pero si esto es así, entonces acude al barbero para que lo rasure, lo cual implica que forma parte del conjunto **B**.

También puedes responder que el barbero forma parte del conjunto **B** de los hombres que le piden al barbero que los rasure. Pero como él es el barbero, esto quiere decir que se rasura a sí mismo, lo cual lo coloca en el conjunto **SM**.

¿Te queda claro que hay una contradicción difícil (imposible) de resolver?



Alfred North Whitehead
(1861-1947)

Para terminar mencionaré que fue el propio Bertrand Russell, junto con otro gran matemático, Alfred North Whitehead (1861-1947), quien logró reparar el daño causado a los cimientos de las matemáticas por su famosa paradoja. Entre ambos publicaron en 1913 una de las obras monumentales de esta ciencia, a la que titularon Principia Mathematica y en la que lograron volver a consolidar sus fundamentos.

Sin embargo, unos cuantos años después llegó Kurt Gödel, quién volvió a poner en aprietos al propio Bertrand Russell, a las matemáticas y a todo el conocimiento científico.

## 7

Para terminar y dejar descansar la mente te voy a contar un chiste gödeliano:

Dos hombres muy machos discutían sobre la ferocidad de sus respectivos perros. Mi Dragón, decía el primero, es tan fiero que se come a tu perrucho de un solo bocado. Estás muy equivocado, respondía el segundo, mi Diablo es capaz de matar al tuyo en menos de un minuto. Después de mucho discutir decidieron encerrarlos en un cuarto oscuro y dejar que ganara el mejor. Al cerrar la puerta empezó la pelea. Durante un rato se escucharon ladridos, gruñidos, alaridos y de pronto… silencio. Esperaron un poco más, abrieron la puerta, encendieron la luz y lo que encontraron fue… ¡la punta de las dos colas!

Bueno, si me has seguido hasta aquí, tu mente ya está preparada para entender **El teorema de Gödel**.

# III.- PRESENTACIÓN

1

## El teorema de Gödel (Toma 1)

En 1931 Kurt Gödel publicó un artículo titulado:

**“Sobre proposiciones formalmente no decidibles en *Principia Mathematica* y sistemas relacionados”**

La **proposición VI** de este artículo es lo que hoy se conoce como el **primer teorema de Gödel**. Esta proposición dice lo siguiente:

**PROPOSICION VI**. “A toda clase **c** de fórmulas ω-consistente recursivas le corresponde una clase-signo **r** tal que ni **v Gen r** ni **Neg (v Gen r)** pertenecen a **Flg(c)**, donde **v** es la variable libre de **r**”.

Esta es una traducción al español de lo que Gödel publicó en alemán, aunque igual podría estar en alemán o en jeroglíficos egipcios, pues ni tú, querido lector, ni yo la entendemos.

Vamos entonces a empezar de nuevo, pero intentando explicar esta increíble **proposición VI** de manera sencilla y comprensible.

2

## El teorema de Gödel (Toma2)

En 1931 Kurt Gödel publicó un artículo titulado:

**“Sobre proposiciones formalmente no decidibles en *Principia Mathematica* y sistemas relacionados”**

Analicemos el título del artículo:

Ya vimos, cuando hablamos de la paradoja formulada por Bertrand Russell, que ***Principia Mathematica*** fue el importantísimo libro escrito por Russell y Whitehead entre 1910 y 1913 en el que presentaron una formulación, aparentemente completa (es decir, que toda proposición verdadera podía demostrarse) y consistente (o sea que nunca aparecerían contradicciones y ni paradojas), del razonamiento matemático. Consideraron que su metodología permitiría construir cualquier formulación matemática presente y futura.

El efecto inmediato de esta publicación fue el de tranquilizar a todos los matemáticos de la época, pues volvía a darle solidez al edificio lógico que la paradoja de Russell había conmocionado. Esta magna obra exorcizaba aparentemente las dificultades; sin embargo, no dejaba totalmente claro que nunca sería posible obtener resultados contradictorios. Tampoco era del todo evidente que en verdad todas las matemáticas estaban potencialmente contenidas en su metodología.

La calma duró casi veinte años. Luego llegó el huracán Gödel.

En su artículo de 1931, Gödel se refiere a ***Principia Mathematica*** y sistemas relacionados. Esto implica que lo que va a decir es válido en la estructura lógica que proponen Russell y Whitehead en su libro, así como en cualquier otro sistema similar o relacionado, y con esto abarca a todas las construcciones de la lógica matemática que se basan en un conjunto de axiomas. Un axioma es una creencia básica que se acepta sin demostración alguna y que sirve como cimiento para construcciones intelectuales subsecuentes. Los sistemas basados en axiomas incluyen a todas las matemáticas, a buena parte de la ciencia y a numerosos territorios intelectuales todavía inexplorados. Gödel es precavido y no se atreve a afirmar que lo que va a decir es válido universalmente. Su teorema es válido para todo sistema basado en un número finito de axiomas. Lo que esto abarca es verdaderamente muchísimo territorio intelectual.

Bien, sigamos adelante. Ya hemos entendido la parte final del título del artículo: Gödel nos va a decir algo muy importante que es válido para todos los sistemas que se describen en el libro Principia Mathematica, así como para cualquier otro sistema lógico basado en un número finito de axiomas. Veamos ahora la primera parte del título, eso de **proposiciones formalmente no decidibles**:

Una **proposición** es una aseveración o una afirmación que puede ser verdadera o falsa. Por ejemplo, la siguiente es una proposición:

**“Dos más dos son cinco”** o en lenguaje matemático:

$$2 + 2 = 5$$

La falsedad de esta afirmación puede demostrarse con facilidad.

Una **proposición formalmente decidible** es aquella aseveración cuya verdad o falsedad puede decidirse o demostrarse usando la metodología formal de la lógica matemática del sistema en el que estamos trabajando. Es decir, que a partir de los axiomas básicos del sistema y usando las reglas de la lógica podemos llegar a demostrar sin lugar a dudas si la proposición es verdadera o falsa. En cambio, una **proposición formalmente no decidible** es una aseveración que puede ser verdadera o falsa, pero que, ¡ojo!, hagamos lo que hagamos usando los axiomas y el formalismo del sistema lógico matemático, nunca vamos a poder decidir o demostrar si es verdadera o falsa.

Entonces el título original del artículo de Gödel:

**“Sobre proposiciones formalmente no decidibles en *Principia Mathematica* y sistemas relacionados”**

podría haberlo escrito de la siguiente manera:

“Les voy a hablar de aseveraciones cuya verdad o falsedad no vamos a poder decidir usando los razonamientos de sistemas lógicos basados en axiomas, como son, por ejemplo, los del libro *Principia Mathematica*”.

Si ahora traducimos la famosa proposición VI (conocida como el teorema de Gödel) a un lenguaje fácil de entender podríamos escribir sencillamente:

**Teorema de Gödel: “Existen aseveraciones cuya verdad/falsedad no vamos a poder demostrar”.**

Fíjate qué interesante se está poniendo esto. Gödel no se interesa en saber si una aseveración es falsa o verdadera. Lo que afirma es que en cualquier sistema lógico basado en axiomas, existen aseveraciones cuya verdad o falsedad no vamos a poder decidir. Antes de Gödel esto ni siquiera se consideraba, pues lo interesante de una aseveración era poder demostrar que era verdadera o bien que era falsa. A partir de Gödel aparece una diferencia muy sutil entre verdad/falsedad y demostrabilidad.

Dicho de otra manera, Gödel nos hace ver que la verdad es una categoría más poderosa que la demostrabilidad.

Aclaremos esto. Lo que Gödel demuestra es que en todo sistema axiomático formal existen aseveraciones cuya verdad o falsedad es imposible de decidir desde dentro del sistema. Si nos salimos del sistema, entonces podremos saber si son verdaderas o falsas, pero dentro del sistema no. Este resultado se conoce como el **teorema de indecidibilidad de Gödel**. (¿Existirá esa palabreja de indecidibilidad en español? Bueno, si no existe, la añadimos y ya. Lo que quiere decir es que no podemos decidir al respecto).

El tipo de paradojas lógicas que vimos cuando estábamos calentando la mente es justamente proposiciones no decidibles.

La existencia de estas paradojas o proposiciones no decidibles deja al sistema lógico de referencia debilitado. Un matemático quisiera que su sistema basado en unos cuantos axiomas fuera suficientemente poderoso, completo y consistente para que fuera posible decidir formalmente sobre la verdad o falsedad de cualquier proposición.

“¿Cuál es el problema?”, podría decir otro incauto matemático, la solución está simplemente en ampliar el sistema lógico en el que estamos trabajando con un axioma adicional que permita demostrar que la tal aseveración indecidible es en efecto verdadera o falsa. Y el asunto quedó resuelto, ¿no?

No, porque el teorema de Gödel vuelve a operar en este nuevo sistema lógico aumentaddo ya que van a existir otras nuevas proposiciones cuya verdad/falsedad no van a poder decidirse. Cada vez que aumentemos nuestro sistema con un nuevo axioma reparando así el problema de las proposiciones no decidibles, aparecerán otras nuevas proposiciones no decidibles. Para resolver todo este embrollo tendríamos que seguir añadiendo axiomas y más axiomas hasta llegar a un sistema lógico con un número infinito de axiomas, lo cual es imposible.

Para aclarar las objeciones anteriores, Gödel demostró que en un sistema formal suficientemente rico y poderoso para que la verdad o falsedad de cualquier aseveración siempre pueda decidirse, existirán proposiciones contradictorias y paradójicas. Esta vertiente se conoce como el **teorema de incompletez de Gödel**. (Otra nueva palabreja para añadir a nuestro idioma).

Recapitulando, el teorema de Gödel nos dice que ningún sistema basado en un número finito de axiomas está completo, ya que siempre existirán proposiciones cuya verdad o falsedad será imposible de decidir.

Equivalentemente, si se requiere que el sistema esté completo, en el sentido de que siempre podamos decidir sobre la verdad o falsedad de una proposición, entonces aparecerán paradojas y el sistema no será consistente.

Es decir, que de todas todas nos cuerna el toro.

Para terminar volvamos a enunciar el teorema de Gödel de varias maneras sencillas y comprensibles:

3

## El teorema de Gödel (Toma 3)

En 1931 Kurt Gödel publicó un artículo titulado:

**"Sobre proposiciones formalmente no decidibles en *Principia Mathematica* y sistemas relacionados"**

Aplicado específicamente al libro *Principia Mathematica* el teorema de Gödel diría:

El sistema propuesto en *Principia Mathematica* incluye proposiciones indecidibles.

*Principia Mathematica* fue entonces la primera víctima del teorema de Gödel, pero ciertamente no fue la última. Cuando Gödel dice sistemas relacionados incluye a cualquier sistema axiomático, en cuyo caso su teorema puede formularse de manera más general estremeciendo así a las matemáticas enteras:

**Toda formulación axiomática y consistente en matemáticas incluye proposiciones indecidibles.**

Pero su teorema es todavía más general, ya que muchas ciencias y otras construcciones intelectuales de la humanidad se basan en conjuntos de leyes o axiomas. Entonces el teorema de Gödel en toda su generalidad se podría plantear así:

**Toda formulación axiomática y consistente incluye proposiciones indecidibles.**

Esta última formulación nos dice simple y sencillamente que cualquier construcción intelectual que se base en un conjunto de axiomas y que sea internamente consistente (es decir, que no admita contradicciones internas), nunca quedará completa ya que siempre tendrá en su seno proposiciones que no podrá entender, explicar ni decidir si son verdaderas o falsas.

Usando la segunda versión del teorema de Gödel, podríamos decir que si logramos construir un sistema intelectual suficientemente poderoso para que sea completo (en el sentido de siempre poder decidir, explicar y entender cualquier proposición), lo lograremos pagando un precio muy alto: que en dicho sistema aparecerán irremediablemente contradicciones y paradojas, por lo que será inconsistente. Es decir:

**Si un sistema es consistente, entonces es incompleto, y si el sistema es completo, entonces es inconsistente.**

Como puedes imaginar, lector, las implicaciones del teorema de Gödel para las matemáticas, la ciencia y el conocimiento humano en general, son inmensas y sus efectos han sido devastadores para quienes creían que la ciencia, llegaría a descifrar completamente a la naturaleza. Hoy, gracias a Gödel, la ciencia se ha bajado de su arrogante torre de marfil, los científicos nos hemos vuelto un poco más humildes y todos hemos tenido que aceptar las limitaciones inherentes en el potencial del conocimiento.

En los siguientes temas veremos algunas implicaciones del teorema, una demostración informal y poco rigurosa, datos biográficos de Kurt Gódel y enlaces para que puedas profundizar en el tema. ■

# IV.- IMPLICACIONES

En esta sección vamos a analizar algunas consecuencias del teorema de Gödel en diversos sistemas de conocimiento.

Empezaremos por aquellos sistemas que están sustentados rigurosamente y cuyas hipótesis cumplen con las requeridas por dicho teorema. Poco a poco iremos considerando sistemas que relajan más y más las hipótesis subyacentes, conscientes de que tal vez ya no sea posible que el teorema se aplique con todo rigor, pero permitiendo a cambio que nuestras mentes conciban nuevas posibilidades y se planteen preguntas interesantes.

Sabemos que el teorema de Gödel puede demostrarse de una forma rigurosa y que se aplica a cualquier sistema de razonamiento basado en un conjunto finito de axiomas o leyes básicas. Estos sistemas incluyen a todas las ramas de las matemáticas, a muchos planteamientos de la filosofía y la lingüística, así como a las ciencias duras como la física o la astronomía. Sin embargo, otras ramas del conocimiento humano, por ejemplo las ciencias sociales como la economía, la psicología o la sociología u otras todavía menos científicas, como la teología o la historia, no permiten que el resultado del teorema de Gödel se les aplique con rigor y las implicaciones que se obtengan de esta dudosa aplicación pueden ser falsas.

En pocas palabras, lo que el teorema de Gödel parece afirmar en términos muy generales, es que el conocimiento racional nunca podrá penetrar hasta el final y alcanzar la verdad última y definitiva del universo. Esta limitación no solamente es válida para los conocimientos que la humanidad pueda llegar a alcanzar con toda su ciencia y tecnología presente o futura, sino que va más allá del ser humano y habla de cualquier sistema finito de conocimientos, cualquier ser creado por un ser biológico, electrónico o de cualquier otro tipo, aunque no lo podamos imaginar.

Esta limitación fue la causa de infinita angustia para matemáticos, científicos y filósofos, pero, paradójicamente, la comprensión y aceptación del teorema de Gödel es también una suerte de liberación.

En las palabras de Rudy Rucker: *Para muchos estudiantes de lógica la comprensión profunda del teorema es prácticamente una experiencia mística. Esto se debe en parte a la leyenda que el nombre de Gödel lleva consigo, pero en el fondo se debe a que la comprensión de la naturaleza laberíntica del castillo que te aprisiona, de alguna forma te otorga la libertad.*

## MATEMÁTICAS

Empecemos entonces considerando el efecto del teorema de Gödel en las matemáticas.

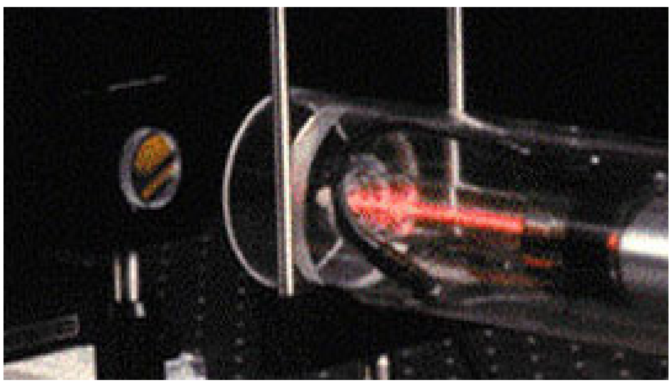
Este teorema terminó con numerosos intentos a lo largo de un siglo entero para establecer un conjunto finito de axiomas que cimentara y permitiera construir a la totalidad de las matemáticas, tanto las conocidas como las que se descubrirían en el futuro. Los intentos más importantes habían sido los de Cantor, Frege, Hilbert, Russell y Whitehead. Los resultados de Gödel constituyen un parteaguas para las matemáticas, mostrando que éstas nunca quedarán completas y que siempre quedarán problemas que no podrán resolverse bajo ningún conjunto de reglas o procedimientos.

Gödel demostró que dentro de cualquier sistema lógico rígido, como el que Russell y Whitehead desarrollaron para la aritmética, se pueden formular proposiciones para las cuales es imposible decidir si son verdaderas o falsas dentro de los axiomas del sistema. Esto es, dentro del sistema existirán siempre aseveraciones perfectamente bien definidas que no pueden ser aceptadas como ciertas ni rechazadas como falsas. Por lo tanto uno nunca podrá, usando los métodos tradicionales, estar seguro de que los axiomas del sistema matemático en cuestión no nos llevarán a contradicciones. Esto destruye la esperanza que una vez tuvieron los matemáticos de lograr la certeza en la solución de cualquier problema planteado de forma lógicamente correcta.

## CIENCIA

Si nos referimos ahora a la ciencia y al método científico en general, el teorema de Gödel, sumado al principio de incertidumbre de Heisenberg y a la impredicibilidad esencial de los sistemas caóticos, establecen limitantes profundas para los alcances del conocimiento científico. El resultado, en última instancia, es la muerte irremediable del ideal científico tradicional, que era el de establecer un conjunto de leyes o axiomas básicos a partir de los cuales pudieran deducirse y comprenderse todos los fenómenos de la naturaleza.

La física es tal vez la ciencia que mejor ha establecido sus leyes básicas o axiomas sobre los que construye su conocimiento. Por esto mismo, es de todas las ciencias la que mejor comprende las implicaciones del teorema de Gödel y de los demás resultados mencionados en el párrafo anterior. Los físicos han entendido y aceptado que las limitaciones de su disciplina no se deben tanto a la falta de presupuestos, o a la necesidad de construir instrumentos cada vez más poderosos, ni tampoco a la velocidad del avance en sus descubrimientos y ni siquiera a las restricciones inherentes a la mente humana. Hoy ya saben que nunca llegarán a resolver todos los problemas que plantea su disciplina debido a que todo sistema racional de conocimientos es esencialmente incompleto.



Una forma distinta de entender porqué la física, como cualquier otro sistema simbólico finito que usemos para describir o modelar al universo, es incompleta, es aceptando que la física, o dicho sistema simbólico finito, no existe aparte del universo, sino que es parte integrante de él. También nosotros mismos, los físicos y los pensadores formamos parte del universo. Puesto que tanto el sistema de conocimientos como nosotros, sus creadores, somos parte del universo, nuestra ciencia y nuestra comprensión del universo representan un caso de un sistema haciendo un modelo de sí mismo. Es decir, se trata de una pequeña parte de a realidad (nosotros y nuestros sistemas simbólicos) intentando hacer un modelo de la realidad completa (el universo). Esto nunca puede tener éxito debido a la paradoja que resulta de la autoreferencia: el modelo es parte del universo, por lo que, en efecto, el universo tendría que ser mayor que sí mismo (¿está claro?).

También podemos entender la imposibilidad esencial de que un modelo (científico o de cualquier tipo) sea completo mediante un argumento iterativo:

* El modelo modela al universo y el universo incluye al modelo, entonces…

* El modelo debe modelarse a sí mismo, entonces…

* El modelo debe modelar al modelo modelándose a sí mismo…

* …y así ad infinutum.

## FILOSOFÍA

La filosofía, o mejor dicho, las filosofías, son disciplinas del conocimiento que también parten de un sistema finito de axiomas básicos, por lo que también deben de sujetarse a las limitaciones impuestas por el teorema de Gödel. La implicación es que cualquier sistema filosófico, sin importar su grado de complejidad, resulta incompleto. Es decir que todo sistema filosófico contiene dentro de sí mismo, más aseveraciones verdaderas que las que puede demostrar como tales de acuerdo con sus propias reglas. Es decir, que muchas de las verdades filosóficas nunca podrán decidirse dentro del sistema filosófico que consideremos, cualquiera que este sea. Y aun si el sistema filosófico en cuestión se aumenta, incluyendo un número indefinido de axiomas adicionales, siempre existirán verdades que no pueden ser formalmente derivadas del conjunto aumentado. El teorema de Gödel establece que la verificabilidad es un concepto más débil que la verdad, en tanto que existen proposiciones verdaderas que no es posible verificar, sin importar la complejidad del sistema filosófico subyacente.

Para muchos pensadores, el teorema de Gödel constituye el último clavo en el ataúd de la filosofía clásica. Hubo una época en que la filosofía abarcaba todos los campos del conocimiento (***Filos=amor***, ***sofos=conocimiento***), pero con la llegada del método científico y el resultante auge de la ciencia, la filosofía fue perdiendo poco a poco muchos de los objetos de su estudio. La lógica, por ejemplo, que una vez era un baluarte de la filosofía, hoy forma parte de las matemáticas. La lingüística, antes también del interés de los filósofos, ahora queda comprendida en la teoría de la información. Las especulaciones filosóficas sobre la mente humana, que dieron lugar al nacimiento de la psicología, hoy encuentran poderosos resultados en los trabajos de investigadores en inteligencia artificial e informática.

La filosofía, desplazada en muchos de sus territorios por la ciencia, ha tenido que ir encontrando nuevos objetos de estudio. De alguna forma el teorema de Gödel cierra un círculo para la filosofía, pues hoy un filósofo sabe de las limitantes que el teorema de Gödel implica para su disciplina, por lo que está obligado a redefinir su objeto de estudio y terminará ampliándolo para considerar nuevamente a todo el conocimiento, pero desde una nueva perspectiva que considera ya las limitaciones impuestas por Gödel.

Por ejemplo, el credo básico del positivismo lógico lo resume Rudolf Carnap en su manifiesto cuando dice: “No damos respuestas a cuestiones filosóficas y de hecho rechazamos todo problema filosófico, sea de la metafísica, la ética o la epistemología.” (*Passmore, John.“Logical Positivism”. En The Encyclopedia of Philosophy, vol. 5, pp 52-57*).

El panteamiento de esta escuela filosófica es que toda aseveración filosófica abstracta como **"todo es uno”** no tiene sentido. No es que sea verdadera o falsa, sino que simplemente carece de significado. Esta postura se basa en el **“principio de verificabilidad”** de acuerdo al cual el significado de una aseveración es idéntico al método para verificarlo. Puesto que los positivistas no hallaron forma alguna de verificar aseveraciones como **“todo es uno”** o **“lo absoluto no existe en el tiempo”**, estas aseveraciones se consideraron como carentes de significado.

Curiosamente muchos filósofos modernos encuentran campos fértiles para su disciplina en aspectos del conocimiento que también le interesaron a Gödel, a Einstein y a otros grandes pensadores por el simple hecho de que no se basan en sistemas axiomáticos finitos. Nos referimos a lo que se pudiera llamar el misticismo. Wittgenstein, quien tuvo influencia sobre Gödel en sus años de estudiante en Viena, dice al respecto: ***“Hay en efecto cosas que no pueden ponerse en palabras. Ellas simplemente se manifiestan. Ellas constituyen lo místico.”***

El propio Wittgenstein, amigo cercano de los integrantes del Círculo de Viena, aunque no miembro del mismo, ofrece en su maravilloso libro ***Tractatus Logico-Philosophicus*** una solución a los problemas tradicionales de la filosofía: **“Aquello de lo que no nos es posible hablar, debemos dejarlo pasar en silencio”**. Wittgenstein a veces tomó posturas filosóficas que se asemejan al misticismo Zen. En el libro citado elegantemente describe su posición:

“**Sentimos que aun cuando todas las posibles preguntas científicas tengan ya una respuesta, el problema de la vida no habrá sido tocado. Por supuesto, no quedarán ya preguntas que hacer y esto es justamente la respuesta. La solución del problema de la vida se halla en la desaparición del problema”**.

## LINGÜÍSTICA

La lingüística es una de esas áreas del conocimiento humano cuyo objeto ha sido estudiado por diversas disciplinas atendiendo a numerosos enfoques. Por ejemplo: la filosofía clásica estudió la forma como las personas hablan y escriben (gramática, retórica, sintaxis, etc.); la lingüística propiamente dicha estudia los aspectos profundos de las estructuras gramaticales y sintácticas del lenguaje; la psicología ha investigado los mecanismos mentales del lenguaje y la interacción entre lenguaje e inteligencia; la informática considera la comunicación en general incluyendo los lenguajes formales que “hablan” las computadoras entre sí; la robótica e inteligencia artificial intentan construir máquinas autónomas e inteligentes que se comuniquen entre sí y con los seres humanos.

Sin importar cuál sea el enfoque particular hacia el lenguaje, el punto de partida de todas estas disciplinas es la existencia de un conjunto finito de reglas o axiomas sobre los cuales se establece la creación y el uso de los lenguajes. Es posible que algunas de estas reglas básicas no se expresen en forma explícita o que ni siquiera se conozcan todavía. Sin embargo, en todas las disciplinas mencionadas se intenta establecer dicho conjunto finito de axiomas a partir de los cuales se construyen los lenguajes. Debido a esto el estudio del lenguaje y las comunicaciones también está limitado por el teorema de Gödel.

En la primera sección de este HiperCuaderno vimos ya ejemplos de esto. Frases como ***"Yo sólo se que no se nada"*** o ***"Esta aseveración es falsa"*** nos llevan a contradicciones en el uso del lenguaje. Estas contradicciones son ejemplos de las limitaciones impuestas por el teorema de Gödel a cualquier sistema lingüístico.

En términos de Gödel puede demostrarse que en todo sistema lingüístico consistente algo debe de resultar indecidible. Una frase indecidible es precisamente la aseveración de esa verdad, es decir la aseveración que dice de sí misma que no es verificable. Un lenguaje consistente no puede incluir una oración que se niega a sí misma y permanecer consistente.

La excepción más significativa e importante es la poesía. Al poeta se le permiten todas las inconsistencias que desee, todas las contradicciones y todas las paradojas. Pero la poesía no viola al teorema de Gödel porque justamente no está basada en un conjunto finito de reglas o axiomas, sino todo lo contrario: la poesía goza de toda la libertad en el uso del lenguaje y no requiere de consistencia alguna. Si hacemos referencia al último párrafo de la sección anterior (filosofía) queda claro que la poesía se escapa de las garras del teorema de Gödel por que pertenece al ámbito del misticismo.

## INFORMÁTICA

Una computadora, por poderosa que sea, tiene un número finito de componentes o transistores en su unidad de procesamiento central. Cualquier programa que corra en dicha computadora, por complejo que sea, tiene un número finito de instrucciones. Los componentes del hardware y del software incluyen dentro de si los axiomas básicos del sistema computacional. Entonces, todo sistema lógico de razonamiento y de conocimientos basado en computadoras cumple con la hipótesis del teorema de Gödel y por lo tanto está sujeto a sus resultados.

Esto implica que es imposible programar una computadora, por poderosa que ésta sea, para resolver todas las cuestiones matemáticas que se le planteen o para modelar todos los sistemas que se deseen. El teorema de Gödel establece limitantes esenciales para la computación y en especial para inteligencia artificial en tanto que afirma que siempre existirán problemas indecidibles dentro de dicho sistema computacional. Es posible que estos problemas puedan decidirse con una computadora todavía más poderosa, pero también para ésta existirán nuevas incógnitas indecidibles. Un ejemplo es el de un programa que realiza un conjunto de operaciones matemáticas, pero que por complejo y sofisticado que sea, nunca podrá determinar que ya terminó de realizar sus cálculos.

El teorema de Gödel ha sido utilizado para argumentar tanto a favor como en contra de que una computadora algún día llegará a ser tan inteligente como un ser humano. Los que afirman que la computadora nunca alcanzará la inteligencia de un humano argumentan que la amplitud de los conocimientos y capacidades de la máquina están limitados por un conjunto de axiomas finito y por lo tanto debe de obedecer al teorema de Gödel, mientras que el humano no tiene estas limitaciones y puede descubrir verdades inesperadas. Los oponentes de esta postura argumentan que también la mente humana es finita y por lo tanto también está sujeta al teorema de Gödel, por lo cual algún día, por lejano que éste sea, se construirá una computadora cuyos componentes sean del mismo orden de magnitud a los de la mente humana o todavía mayores.

Nuevamente esta especulación sobre si la mente humana funciona con base en un conjunto finito de axiomas nos lleva, como llevó al propio Gödel, a considerar aspectos que sólo podrían calificarse como pertenecientes al misticismo.

## VIDA ARTIFICIAL

Es una rama de la informática que pretende crear sistemas vivos que residan completamente en una computadora. Los elementos de estas especies virtuales exhibirían todas las características de los seres vivos incluyendo su evolución. El teorema de Gödel es difícil de interpretar en este contexto, pues la definición misma de vida (como también la definición de inteligencia ) no puede considerarse todavía como bien establecida, clara y consistente. Sin embargo, intentemos plantear algunas cuestiones especulativas interesantes.

El propio Gödel afirmó que el mecanicismo en la biología puede demostrarse matemáticamente como falso; sin embargo, nunca realizó tal demostración. Es posible que los avances de vida artificial lleven a la demostración postulada por Gödel. Es probable que los avances de las investigaciones de esta disciplina estén todavía lejos de resolver completamente la pregunta "¿qué es la vida?". Es posible también que esta pregunta no tenga respuesta o que sea la pregunta equivocada. Pero cualquier intento de responderla, desde los proyectos, más modestos que sólo pretenden explicar qué es la vida, hasta los más ambiciosos que desean sintetizarla, nos dan mucho material para especular y nos acercan a una mejor comprensión del mundo en el que vivimos y de nuestra posición en él.

## MENTE Y CONCIENCIA

La sección anterior nos obliga a plantearnos preguntas como ¿qué es mi mente? y ¿qué es mi conciencia?

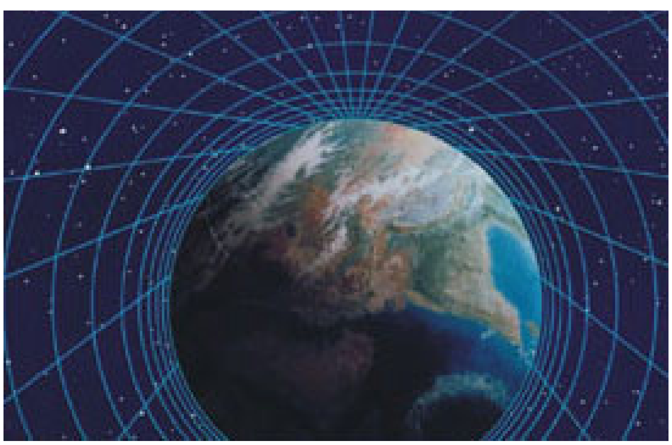
Muchos científicos piensan que el cerebro humano, constituido por un número acotado de neuronas e interacciones electro-químicas, es la base de un sistema formal increíblemente sofisticado, pero basado en un conjunto finito de reglas y axiomas. Si esto fuera cierto, entonces el teorema de Gödel implicaría que existen hechos que son verdaderos, pero que nuestra mente nunca podrá demostrar o creer o ni siquiera concebir.

No hace demasiado tiempo aparecieron en la ciencia occidental ideas especulativas de que la conciencia es mayor que el universo y que el universo entero está contenido dentro de la conciencia. Esta es una idea antigua en oriente en donde se considera factible, e incluso frecuente, el proceso de iluminación mediante el cual el individuo abre los "párpados espirituales", despierta de la inconciencia y toma posesión de la conciencia universal. Según el budismo, el hinduismo, el yoga y otras filosofías orientales es entonces a través de la conciencia que llegaremos a la comprensión del universo.

Para efectos de la aplicación del teorema de Gödel la pregunta entonces es si el universo es finito o infinito. Si aceptamos los infinitos, entonces el teorema de Gödel no se aplica y nuevamente nos vemos obligados a considerar opciones místicas para explicarnos lo inexplicable. En cambio, en el otro caso el resultado de Gödel se puede aplicar y encontramos la autoreferencia observando que tanto la conciencia como el universo son finitos y, por lo tanto, la unión de ambos representa un nuevo sistema o nuevo universo que debemos **“entender”** (si es que esta palabra todavía tiene sentido). Este proceso continúa indefinidamente de manera iterativa estableciendo por medio de la autoreferencia las limitaciones a mente y conciencia.

Las limitantes impuestas por el teorema de Gödel en este último caso implican que nunca seremos capaces de conocernos a nosotros mismos. La máxima **“conócete a ti mismo”** es inalcanzable, pues nuestra mente, como cualquier otro sistema cerrado y acotado, sólo puede conocerse a sí misma apoyándose tan sólo en lo que ya conoce de sí misma. Hay varias analogías que permiten entender porqué nuestra mente nunca llegará a entender a nuestra mente completamente. La primera es la de la yema de un dedo, la parte más sensitiva de nuestra piel, que nunca puede tocarse a sí misma. Otra es que nuestros ojos nunca pueden verse a sí mismos y a lo más que pueden aspirar es ver su reflexión en un espejo, lo que no es igual a verse a sí mismos. La última es que el cerebro, el órgano que registra el dolor, es completamente insensible al mismo.

El teorema de Gödel sugiere que una vez que nuestra habilidad para representar simbólicamente nuestras propias estructuras llega a cierto umbral crítico, hemos llegado al final del camino. El resto del territorio es inaccesible y nunca seremos capaces de comprendernos totalmente.



¿Cómo puedes saber que no estás loco? Plantearte esta pregunta es muy peligroso, pues a partir del momento que empiezas seriamente a cuestionar tu propia salud mental entras en el laberinto, caes en el remolino de las profecías autorealizables y sigues el camino del **“irás y no volverás”**. Todos sabemos que un loco interpreta al mundo a través de su propia y peculiar lógica y que, para él, esta lógica es consistente. ¿Cómo puedes saber que tu lógica no es **“peculiar”**, si la única herramienta a tu disposición para responder a la pregunta es justamente esa lógica? De nuevo nos hallamos ante la autoreferencia que habita en las entrañas del teorema de Gödel. La respuesta es indecidible. ¿Quiénes son los locos, los que están dentro del manicomio o los que están afuera? Esto nos recuerda al segundo teorema de Gödel que dice que aquellas versiones formales de la aritmética que afirman su consistencia son inconsistentes.

La lección principal que podemos sacar del teorema de Gödel es que las posibilidades de la autoreflexión tienen ciertos límites impuestos por la consistencia y que esto parece ser cierto tanto para sistemas lógico formales como para la mente humana. Cuando aplicamos el teorema a la mente concluimos que existen obstáculos esenciales sobre nuestra capacidad de autocomprensión. Tenemos que admitir que ciertas verdades sobre nosotros mismos permanecerán siempre ocultas, si la imagen que tenemos de nosotros mismos debe de permanecer consistente. En particular preguntas como **¿quién soy?**, **¿qué quiero?** o **¿porqué estoy aquí?** no encontrarán una respuesta completa dentro de nuestra propia mente.

## EL BUDISMO ZEN

En el párrafo anterior escribimos la frase “...las posibilidades de la autoreflexión tienen ciertos límites impuestos por la consistencia.” La consistencia de nuestros sistemas matemáticos o mentales occidentales es algo sagrado, precioso, cuya pérdida ni siquiera nos atrevemos a concebir. ¿Qué pasaría si prescindiéramos de la consistencia?

La respuesta es sencilla: no pasaría nada. Prescindir de la consistencia ha sido el enfoque del budismo Zen desde hace siglos. La respuesta que el Zen da a preguntas como ¿qué es la conciencia? y ¿quién soy yo? es, como todo en el Zen, a la vez muy sencillo y extremadamente complejo: La verdad, dice el Zen, la encontraremos yendo a sacar agua del pozo y cortando la leña para el hogar, es decir, en la vida cotidiana y en el aquí y el ahora. El Zen es lo más opuesto que hay al teorema de Gödel. Se sirve de contradicciones, paradojas y planteamientos carentes de consistencia lógica para "apagar" la mente y viajar por el camino místico directo hacia la iluminación o la conciencia del universo. Un planteamiento de este estilo se escapa del laberinto creado por el teorema de Gödel de una manera poco convencional: en vez de seguir el hilo de Ariadna y recorrer el laberinto en sentido inverso hasta llegar a la puerta de salida, salta imposiblemente hacia arriba desafiando a la lógica y ya está fuera. ■

# V.- DEMOSTRACIÓN

Hoy en día se conocen numerosas demostraciones del teorema de Gödel. En esta sección presentaremos una demostración no muy rigurosa pero muy fácil de entender. Si te interesas lector, en una demostración realizada con todo el rigor matemático te sugerimos la que el propio Gödel publicó, misma que encontrarás en la sección de enlaces a otras páginas.

La demostración del teorema de Gödel que vamos a presentar tiene sabor a informática y está inspirada en la que hallamos en el excelente libro de **Rudy Rucker: *Infinity and The Mind***.

Resulta que la empresa transnacional de alta tecnología **La Torre de Marfil, Inc.** ha diseñado y construido una nueva computadora tan poderosa que la ha bautizado como la **Máquina de la Verdad Universal** (**MVU**) ya que es capaz de contestar correctamente cualquier pregunta que se le haga.

Esta máquina utiliza un grandísimo número de transistores que supera en varios órdenes de magnitud al de cualquier supercomputadora anteriormente construida. La máquina realiza una inmensidad de operaciones lógico-matemáticas por segundo, tiene una enorme memoria RAM y una capacidad de almacenamiento en disco verdaderamente fabulosa. En cuanto a su software, esta computadora maneja los últimos avances de la inteligencia artificial y sus bases de datos y sistemas expertos contienen la totalidad del conocimiento de la humanidad. La cantidad total de líneas de código de estos programas es inmensa. Nunca antes se habían escrito programas tan complejos. Es verdaderamente la máquina de la verdad universal.

El día de su presentación, con muchos bombos y platillos, la orgullosa empresa **La Torre de Marfil, Inc.**, pone la máquina a disposición del público y pide que se le hagan preguntas, cualesquiera preguntas, mismas que la **MVU** contestará infaliblemente y de forma inmediata.

Al evento asistió un joven llamado **Kurt Gödel** que primero escribió la siguiente frase:

**G = La MVU no dirá que esta frase (o sea G) es verdad**

Y después le hizo la siguiente pregunta a la máquina:

**La frase G, ¿es verdadera o es falsa?**

La máquina empezó a vibrar, arrojó un poco de humo, un par de chispas y se congeló permanentemente sin haber dado respuesta a la pregunta de Gödel. Con esto terminó el evento, **La Torre de Marfil, Inc.** quebró y Gödel fue aclamado como uno de los científicos más brillantes del siglo XX.

¿Qué sucedió en el interior de la máquina? Veamos:

En primer lugar es importante destacar que la computadora era finita en todas sus características: el número de transistores, la cantidad de líneas de código y todos sus demás parámetros, si bien eran mucho muy grandes, no eran infinitos. Esto es equivalente a decir que estamos tratando con un sistema basado en un número finito de axiomas.

El razonamiento de la máquina fue el siguiente:

Voy a suponer que **G** es **verdad**, y si ese fuera el caso, entonces podría responder “En efecto, **G** es **verdad**”. Pero al examinar a la frase **G** aparece inmediatamente una contradicción, pues la frase dice justamente que yo, la **MVU**, nunca diré que **G** es **verdad**. O sea, que si concluyo que **G** es **verdad** y lo digo públicamente, entonces por el hecho mismo de decirlo hago que **G** sea **falsa** y como consecuencia mi aseveración sería una mentira y yo no puedo mentir.

Con lo anterior queda establecido que yo, la **MVU**, nunca diré que **G** es **verdad**. Como consecuencia, por el simple hecho de guardar silencio hago que **G** sea **verdad**. Como soy la **MVU** y nunca puedo mentir, mejor no contesto y me congelo!

Al congelarse y no responder, la **Máquina de la Verdad Universal** hace que la frase **G** sea cierta. Entonces Gödel dice: Yo conozco una **verdad** que la **MUV** no puede afirmar. Yo sé que la frase **G** es **verdadera**, pero la máquina es incapaz de decidir si **G** es **verdadera** o es **falsa**. Por lo tanto la máquina no es verdaderamente universal.

Además no importa si le aumentan sus transistores y sus líneas de código un millón de millones de veces, pues la máquina nunca podrá decidir sobre la **verdad** o **falsedad** de la frase **G**.

La demostración que acabamos de presentar no tiene el rigor que las matemáticas requieren. Sin embargo

Gödel fue capaz de encontrar para cualquier sistema axiomático finito una ecuación polinómica compleja cuya solución existe si y sólo si **G** es **verdad**. Es decir, que **G** no es una frase vaga y mal definida que se basa en juegos de palabras. Al contrario, **G** es un problema matemático específico cuya solución conocemos, pero que el sistema axiomático en cuestión es incapaz de decidir si es **cierta** o **falsa**. La consecuencia demoledora del **teorema de Gödel** es que dicho sistema axiomático finito, cualquiera que este sea, no puede representar una teoría completa y definitiva de las matemáticas. ■

# VI.- BIOGRAFÍA

**Kurt Gödel** nació el 28 de abril de 1906 en la ciudad de Brünn, Moravia, que entonces formaba parte de la monarquía Austro Húngara. Esta ciudad hoy se conoce como Brno y es parte de la República Checa.

Gödel murió el 14 de enero de 1978 en Princeton, Nueva Jersey Estados Unidos a los casi 72 años de edad.


Kurt, en medio de sus padres y su hermano mayor, cerca de 1910

La familia Gödel formaba parte de una minoría alemana en Brünn (Brno). El padre de Kurt se había abierto camino por su propio esfuerzo y había llegado a ser director de una de las numerosas pequeñas empresas textiles de la ciudad. Desde pequeño Kurt Gödel fue delicado de salud y de carácter depresivo. Su infancia quedó marcada por una fiebre reumática que tuvo a los seis años de edad y que le dejó para el resto de su vida una actitud temerosa en relación con su salud. De niño se ganó el apodo de Der Herr Warum o el Señor Porqué, debido a su insaciable curiosidad. Fue a la escuela primaria y secundaria en Brno hasta cumplir 17 años de edad. Mostró una gran capacidad para el razonamiento abstracto, destacando en estudios de latín, matemáticas e historia. Al terminar el Gimnasio (equivalente a la preparatoria en México) había llegado a dominar las matemáticas del nivel universitario.

Para realizar estudios superiores, en 1923 el joven Kurt fue a la Universidad de Viena. Originalmente su intención era la de estudiar física teórica, pero empezó a asistir también a cursos de filosofía y matemáticas y poco a poco cambió su enfoque hacia estas disciplinas. Ahí tuvo por profesores a eminentes matemáticos: **Furtwngler**, **Hahn**, **Wirtinger**, **Menger**, **Helly** y otros. La ciudad de Viena, en esos tiempos, era un lugar sumamente interesante. En ella se estaban iniciando grandes movimientos culturales, como el psicoanálisis, la música dodecafónica, la arquitectura moderna, la pintura no representativa y otros más. Entre los pensadores que vivían en Viena destacan **Sigmund Freud**, **Arnold Schönberg**, **Adolf Loos** y **Oscar Kokoshka**. Estos mismos años fueron también de enorme desarrollo filosófico, lo que resultó de enorme importancia para Gödel. En 1921 **Ludwig Wittgenstein** había publicado su ***Tractatus Logico-Philosophicus*** y el positivismo lógico estaba en pleno desarrollo en el ***"Círculo de Viena"***.

En estos años universitarios el principal maestro de Gödel, **Hans Hahn**, lo invitó a asistir a las reuniones del famoso **Círculo de Viena**, agrupación formada por filósofos, físicos y matemáticos muy relevantes, entre otros: **Rudolf Carnap** (1891-1970), el propio **Hans Hahn** (1879-1934) **Moritz Schlick** (1882-1936), **Friedrich Waismann** (1896-1959) **Otto Neurath** (1882-1945) y otros. A este grupo de personas las influyó mucho **Ludwig Wittgenstein** (1889-1951) y su precursor **Ernest Mach** (1838-1910). Las reuniones del **Círculo de Viena** se llevaban a cabo en un salón de seminarios cercano al departamento de matemáticas y Gödel asistía regularmente a estas reuniones.

En la universidad Kurt estudió teoría de números, participó en un seminario de estudio del libro ***Introducción a la Filosofía Matemática*** de **Bertrand Russell**, se enfocó hacia la lógica matemática y empezó a publicar artículos sobre el tema. Asistió en Bologna a una conferencia impartida por **David Hilbert** quien explícitamente estableció el problema de la consistencia y completez de los sistemas matemáticos.

Como estudiante en la Universidad de Viena conoció a su futura esposa, Adela, y en 1929 se hizo ciudadano austriaco. En este mismo año murió su padre y él presentó su primer artículo importante sobrelógica que ya dejaba entrever sus trabajos fundamentales. En 1930 recibió el grado de Doctor en Filosofía y publicó una versión combinatoria de su resultado sobre proposiciones no decidibles que fue publicado por la Academia de Ciencias de Viena. También en ese mismo año se integró al profesorado de la Universidad de Viena, en el que permaneció ocho años más. El primer curso que impartió fue el de fundamentos de la aritmética.

En 1931 publicó su famoso teorema bajo el título **Über formal unentscheidbare Stze der *Principia Mathematica* und verwandter systeme**. Ya sabemos por las páginas previas, que Gödel demostró resultados fundamentales sobre cualquier sistema basado en un número finito de axiomas. En particular que en estos sistemas existen proposiciones que no pueden afirmarse o negarse y en particular, que la consistencia de los axiomas no puede ser demostrada. Esto terminó con los intentos de Cantor, Frege, Russell, Hilbert y otros eminentes matemáticos para establecer un conjunto de axiomas que permitieran construir la totalidad de las matemáticas basada en ellos.

En 1933 Adolf Hitler llegó al poder. Al principio este hecho aparentemente no tuvo ningún impacto en la vida de Gödel, quien tenía poco interés en la política. Sin embargo uno de los miembros del **Circulo de Viena**, el profesor Moritz Schlick fue asesinado por su antiguo alumno, ahora nazi, el Dr. Hans Nelboeeck. Este brutal asesinato de un académico en el campus universitario por razones políticas y raciales marca el principio del fin del **Círculo de Viena** y presagia los dramáticos eventos que vendrían poco después.

Al respecto de este evento, **Rudolf Gödel**, médico y hermano de Kurt escribió:

*Este triste suceso fue seguramente la causa de la severa crisis nerviosa que mi hermano sufrió durante un tiempo. Poco después de su recuperación recibió su primera invitación como Profesor Invitado en Estados Unidos.*

Rudolf Gödel

Gödel aceptó esta invitación e hizo su primer viaje a Estados Unidos, donde impartió en 1934 un conjunto de cursos en la **Universidad de Princeton** sobre sustrabajos recientes. También impartió una conferencia magistral en la reunión anual de la **American Mathematical Society**. En Princeton conoció a Albert Einstein con quien mantuvo una larga y fructífera amistad.

Durante este año Gödel desarrolló sus ideas sobre computabilidad y funciones recursivas y el concepto de **"verdad"**. En 1935 regresó nuevamente a Princeton por un breve período. El intenso trabajo, los viajes y la situación de la política europea lo afectaron y nuevamente fue víctima de una severa depresión. A su regreso a Viena continuó con labores de enseñanza e investigación y también contrajo matrimonio con **Adele Porkert**.

Gödel con su esposa Adele

En 1937 demostró la consistencia del axioma de elección y de la hipótesis del continuo de Georg Cantor con el conjunto aceptado de axiomas de la teoría de conjuntos.

En los años siguientes la situación en Europa empeoró considerablemente. En 1938 Austria fue anexada a Alemania y Gödel recibió la notificación de incorporarse al ejército. Kurt entonces tomó la decisión de emigrar. Sin embargo, la Segunda Guerra Mundial dificultó su salida y para hacerlo tuvo que atravesar la Unión Soviética, llegar a Japón y de ahí cruzar el Océano Pacífico a Estados Unidos, donde llegó en 1940.

En Estados Unidos, Gödel impartió cátedras en el **Instituto de Estudios Avanzados de Princeton**, donde también habían llegado eminentes científicos europeos como **Einstein**, **Weyl** y **Von Neumann**, y en las universidades de **Princeton, Brown** y **Yale**. Durante la década de los cuarenta mantuvo contacto frecuente con Einstein y colaboró con él en diversos aspectos de la T**eoría de la Relatividad** y el concepto de **"tiempo"**. Einstein y Gödel se hicieron amigos y con frecuencia se les veía caminando sobre el césped frente a uno de los edificios del Instituto discutiendo animadamente sobre la **Teoría de la Relatividad**. El propio Gödel publicó varios artículos sobre Relatividad en el que describe una clase especial de universo en el que es permisible viajar en el tiempo. En 1946 se hizo miembro permanente del **Instituto de Estudios Avanzados de Princeton** en el que permaneció hasta su muerte. En 1948 él y su esposa adoptaron la ciudadanía norteamericana. En ese año Kurt halló nuevas soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein e impartió conferencias sobre la **Relatividad** y el concepto de **"tiempo"**.

Entre 1940 y 1955 Gödel trabajó intensamente, desplegando una gran actividad de investigación en lógica, filosofía de las matemáticas y en la **Teoría General de la Relatividad**, por la que había llegado a interesarse profundamente debido a las frecuentes conversaciones con Einstein.

En 1951 volvió a tener serias depresiones que lo llevaron al hospital. En este año también empezó a

recoger frutos de sus trabajos. En éste y los siguientes años recibió diversos premios y grados honoríficos de Yale, Brown, Harvard, la Academia de Ciencias de Estados Unidos, la American Philosophical Society, la London Mathematical Society, y la Royal Society of London. En cambio, rechazó un título honorario que le ofreció la Universidad de Viena debido a la amargura que le causó la complicidad austriaca con el Tercer Reich.

A partir de 1955 siguió cosechando premios y distinciones, pero su creatividad fue disminuyendo debido fundamentalmente a frecuentes depresiones. En 1958 publicó artículos sobre la hipótesis del continuo y aportó nuevas interpretaciones de la teoría de números clásica. En su última publicación argumentó en favor de un método para demostrar la consistencia de las matemáticas bajo la hipótesis de que los objetos mentales tuvieran una existencia objetiva.

En los años subsecuentes, su salud siguió siendo precaria y Gödel empezó a sospechar que alguien quería envenenarlo. Siempre había sido una persona introvertida a quien le disgustaba la publicidad, por lo que en los siguientes años hizo tan solo dos o tres apariciones públicas.

Su hermano Rudolf, médico, escribió:

*Mi hermano tenía opiniones muy particulares y fijas de cualquier tema y era muy difícil convencerlo de lo contrario. Desgraciadamente durante toda su vida consideró que tenía la razón en todo, no solo en matemáticas, sino también en medicina. Fue un paciente muy difícil para sus médicos. Después de sufrir hemorragias severas de una úlcera duodenal mantuvo una dieta sumamente estricta (demasiado estricta) que le causó una lenta pérdida de peso.*

Durante los setenta, Gödel pasó más y más tiempo cuidando de su salud y cosechando honores.

Fue aceptado como miembro de la Academia Británica y del Instituto de Francia, recibió un Doctorado Honoris Causa de la Rockefeller University y la Medalla Nacional a la Ciencia de Estados Unidos.

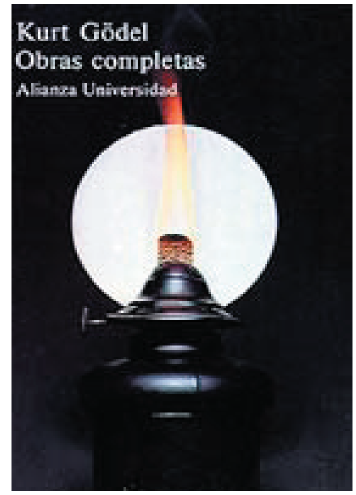
Hacia el final de su vida, Gödel se convenció de que lo que ya sospechaba era cierto y que alguien intentaba envenenarlo, por lo que dejó de comer para evitarlo. Kurt Gödel murió de inanición en un hospital, a la 1 p.m. el sábado **14 de enero de 1978**.

# VII.- ENLACES Y REFERENCIAS

## 1

***Las Obras completas de Kurt Gödel*** las publicó Alianza Editorial en 1981. Su número de referencia es el ISBN 84-206-2286-9. La introducción, traducción y comentarios son de Jesús Mosterín. Tiene una excelente bibliografía.

http://www.alianzaeditorial.es/busqueda_catalogo.htm




## 2

En la siguiente liga encontrarás el artículo original de Kurt Gödel: **"On Formally Undecidable Propositions"**. También es posible hallarlo impreso en inglés en la Editorial Dover. Te recomiendo que visite este enlace y recorras el artículo completo para tener un sabor del lenguaje matemático que Gödel inventó para poder demostrar su teorema.

http://www.ddc.net/ygg/etext/godel/

## 3

La biografía de Kurt Gödel, junto con la de muchos otros matemáticos, se encuentra en esta excelente página relativa a la historia de las matemáticas:

http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/

## 4

Otro enlace donde se halla un episodio misterioso de la vida de Gödel es el siguiente:

http://www.earlham.edu/~peters/writing/godel.htm

## 5

Un tercer enlace nos lleva a otra biografía:

http://www.unca.edu/math/club/godel.html

## 6

The Kurt Gödel Society. La Sociedad Kurt Gödel es una organización internacional que promueve la investigación en lógica, filosofía e historia de las matemáticas, sobre todo en relación con la biografía de Kurt Gödel. También se interesa en otras disciplinas a las que Gödel contribuyó, especialmente matemáticas, física, teología y filosofía.

http://kgs.logic.at

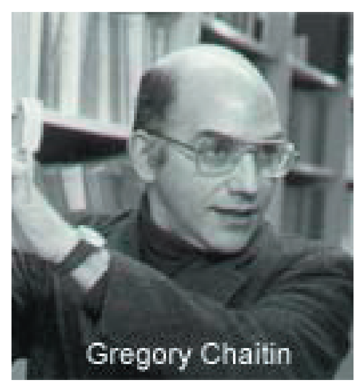
## 7

Después de que Gödel demostró su famoso teorema han aparecido numerosas demostraciones diferentes del mismo resultado. En esta liga encontrarás un artículo de Gregory Chaitin que presenta una demostración con base en argumentos de la teoría de la información. La forma en que se puede enunciar el teorema de Gödel con este lenguaje es la siguiente:

"*Si un teorema contiene más información que un conjunto dado de axiomas, entonces es imposible derivar dicho teorema a partir de los axiomas*".

Contrastando con las demostraciones tradicionales que presentaban al teorema de Gödel como algo patológico y poco frecuente, el novedoso punto de vista de Chaitin sugiere que el fenómeno de "incompletez" descubierto por Gödel es bastante natural y frecuente.

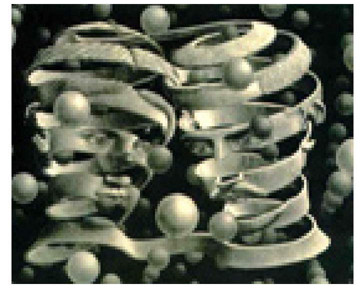
http://www.cs.auckland.ac.nz/CDMTCS/chaitin/georgia.html


Gregory Chaitin

## 8

Otra demostración del teorema, esta vez a través de un sistema llamado **teoría de números tipográfica**, se encuentra en:

http://www2.ncsu.edu/unity/lockers/users/f/felder/public/kenny/papers/godel.html



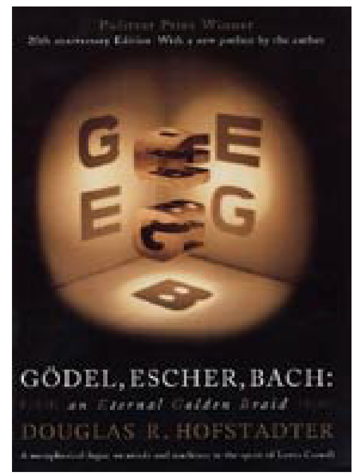
## 9

Si te interesas, lector, en el teorema de Gödel, pero te gustan también los grabados de Escher y la música de Bach, te recomiendo ampliamente el libro de Douglas Hofstadter titulado ***Gödel, Escher, Bach, an Eternal Golden Braid***.

Es un libro fascinante que te muestra como la autoreferencia y la recursividad que Gödel explica la había ya usado Juan Sebastián Bach en sus investigaciones musicales y posteriormente M.C. Escher en sus maravillosos y paradójicos grabados.

El libro en inglés nuevo debe de costar alrededor de $14 dólares. Usado lo consigues por $7 dólares. Puedes pedirlo a amazon.com con la liga:

http://www.amazon.com/exec/obidos/ASIN/0465026567/qid%3D917673465/sr%3D1-1/103-7368880-2922211




## 10

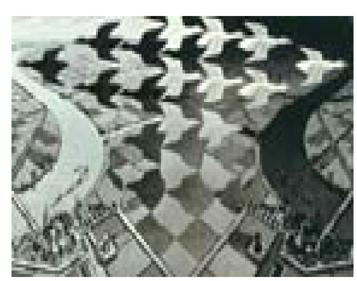
Esta página mantenida por Mårten Stenius contiene un conjunto de ligas a temas relativos con el libro Gödel, Escher, Bach, Una Eterna Trenza Dorada de Douglas Hofstadter que mencioné arriba. Tal vez la quieras explorar antes de comprar el libro.

http://www.student.nada.kth.se/~d90-mst/geb/

## 11

Otra página con diferentes recursos para profundizar en el libro de Hofstadter es:

http://www.geocities.com/ResearchTriangle/6100/geb.html



**12**

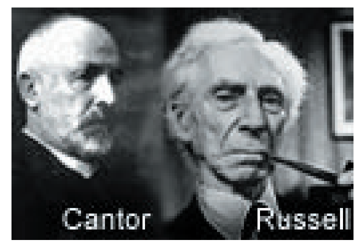
El siguiente enlace contiene un conjunto de ideas de Charles Kendrick sobre el teorema de Gödel y sus conexiones con el budismo Zen.

http://www.myrkul.org/recent/godel.htm

**13**

Una página que contiene resultados importantes de diversos matemáticos (Cantor, Russell, Richard, Tarski y Gödel) relacionados con el teorema de Gödel es:

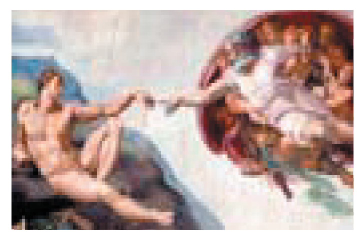
http://www.math.hawaii.edu/~dale/godel/godel.html




**14**

La siguiente liga nos lleva a una página en la que el autor usa el teorema de Gödel para demostrar la existencia de Dios:

http://www.stats.uwaterloo.ca/~cgsmall/ontology.html



**15**

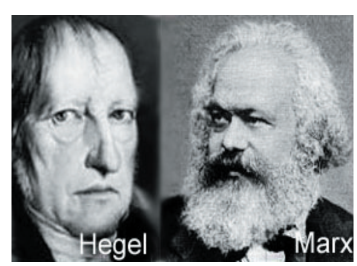
Este artículo discute cómo el teorema de Gödel tiene implicaciones para los estudios de vida artificial, es decir la existencia de organismos "vivos" cuya existencia transcurre enteramente dentro de una computadora. También hace referencia a la robótica, que son los organismos mecánicos y cibernéticos con existencia independiente.

http://scholar.lib.vt.edu/ejournals/SPT/v2n3n4/sullins.html

**16**

El teorema de Gödel tiene implicaciones hasta en las ciencias políticas, la economía y la filosofía de la historia. Un ejemplo de Gödel y el marxismo se encuentra en:

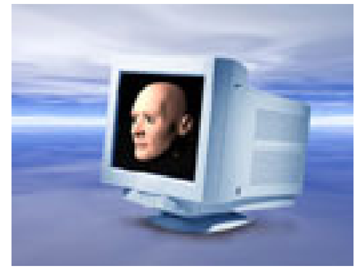
http://www.ltn.lv/%7Epodnieks/marxism.htm



**17**

**La Mente vs. Gödel**. Las auto-referencias en los trabajos de Gödel tienen relevancia con la autoreferencia que pueden intentar tanto las computadoras como la mente humana. Este artículo profundiza en el tema:

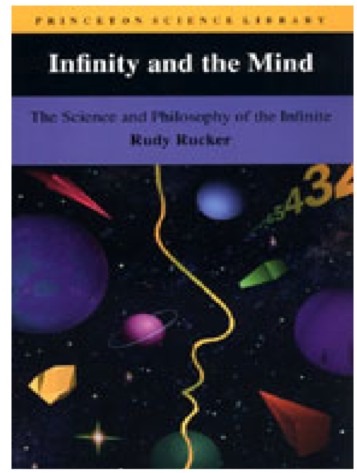
http://nl.ijs.si/~damjan/g-m-c.html



**18**

Un excelente libro para profundizar en temas relacionados es ***Infinity and the Mind*** de Rudy Rucker (Editorial Birkhpuser), pues se dedica a analizar los problemas del infinito, que es precisamente donde el teorema de Gödel ya no se aplica. Recordemos que este teorema requiere de un sistema de conocimientos basado en un conjunto finito de axiomas. ¿Qué pasará cuando consideremos conjuntos infinitos de axiomas?

http://www.amazon.com/exec/obidos/tg/detail/-/0691001723/qid=1031080639/sr=1=1-1/ref=sr_1_1/102-7919877-6458511?v=glance=books

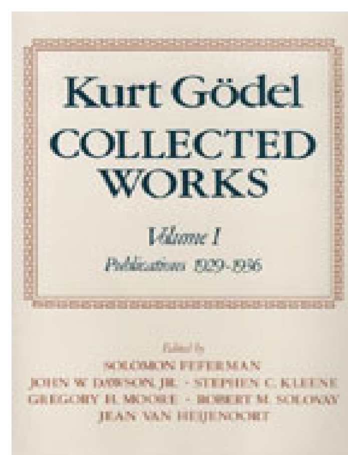



## OTRAS BIOGRAFÍAS

**19**

Feferman, S., Dawson, J. et al (Ed.) 1986. ***Kurt Gödel, Collected Works***, New York: Oxford Univerdity Press, vol I.

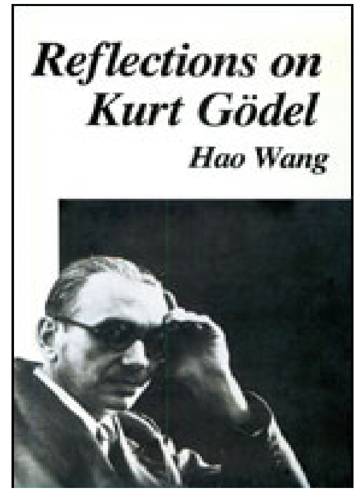
http://www.amazon.com/exec/obidos/tg/detail/-/0195147200/ref=pd_bxgy_img_2/102-6547738-8896130?v=glance



**20**

Wang, Hao. 1991. ***Reflections on Kurt Gödel***. Cambridge, Mass: MIT Press.

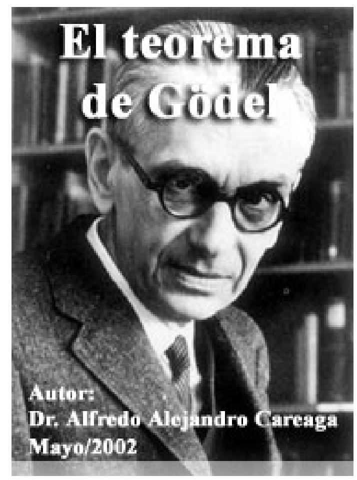
http://www.amazon.com/exec/obidos/tg/detail/-/0262730871/qid=1032301278/sr=1-3/ref=sr_1_3/002-2185903-2063234?v=glance&s=books




**21**

Una excelente explicación del teorema de Gödel para el público en general, que empieza por preparar tu mente para entender las paradojas, que lo presenta de manera sencilla, que habla de sus implicaciones, ofrece una demostración informal, resume la biografía de Kurt Gödel y reune un conjunto de ligas relevantes. Encuentra la autoreferencia en:

http://www.dgdc.unam.mx/Hipercuadernos/Godel/Intro.html



Serie:

Hipercuadernos de
Divulgación Científica

*El teorema de Gödel*

Autor:

Dr. Alfredo Alejandro Careaga
Subdirector de Innovación Tecnológica
Dirección General de Divulgación de la Ciencia
Universidad Nacional Autónoma de México

Mayo 2002

Dirección General de
Divulgación de la Ciencia
UNAM

Diseño: Esteban López Jiménez