

CURSO DE FÍSICA GENERAL

I. V. SAVÉLIEV

**EDITORIAL
MIR
MOSCÚ**

2



И. В. САВЕЛЬЕВ

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ I. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

МОСКВА •НАУКА•

CURSO DE FÍSICA GENERAL

I. V. SAVÉLIEV

I

MECÁNICA
FÍSICA MOLECULAR

Traducido al español
por el ingeniero
Antonio Ballesteros Elías

EDITORIAL MIR · MOSCÚ

Impreso en la URSS

На испанском языке

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URRS.

© Издательство «Наука». 1982

© Traducción al español. Editorial Mir. 1984

INDICE

Prólogo	10
Recomendaciones metodológicas	11
PRIMEIRA PARTE	
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO	
CAPÍTULO I. CAMPO ELÉCTRICO EN EL VACÍO 13	
1. Carga eléctrica	13
2. Ley de Coulomb	14
3. Sistemas de unidades	16
4. Escritura racionalizada de las fórmulas	17
5. Campo eléctrico. Intensidad del campo	18
6. Potencial	23
7. Energía de interacción del sistema de cargas	26
8. Relación entre la intensidad del campo eléctrico y el potencial	27
9. Dipolo	30
10. Campo de un sistema de cargas a grandes distancias	36
11. Descripción de las propiedades de los campos vectoriales	39
12. Circulación y rotor de un campo electrostático	55
13. Teorema de Gauss	56
14. Cálculo de los campos valiéndose del teorema de Gauss	58
CAPÍTULO II. CAMPO ELÉCTRICO EN LOS DIELECTRICOS 64	
15. Moléculas polares y no polares	64
16. Polarización de los dieléctricos	66
17. Campo dentro de un dieléctrico	68
18. Cargas volumétricas y superficiales ligadas	69
19. Vector de desplazamiento eléctrico	74
20. Ejemplos de cálculo del campo en los dieléctricos	77
21. Condiciones en el límite entre dos dieléctricos	81
22. Fuerzas que actúan sobre una carga en un dieléctrico	85
23. Ferroeléctricos	87
CAPÍTULO III. CONDUCTORES EN UN CAMPO ELÉCTRICO 89	
24. Equilibrio de cargas en un conductor	89
25. Conductor en un campo eléctrico externo	92
26. Capacidad eléctrica	93
27. Condensadores	94
CAPÍTULO IV. ENERGÍA DEL CAMPO ELÉCTRICO 97	
28. Energía de un conductor cargado	97
29. Energía de un condensador cargado	97
30. Energía del campo eléctrico	100

CAPITULO V. CORRIENTE ELÉCTRICA CONTINUA	103
31. Corriente eléctrica	103
32. Ecuación de continuidad	106
33. Fuerza electromotriz	107
34. Ley de Ohm. Resistencia de los conductores	109
35. Ley de Ohm para un trozo heterogéneo del circuito	112
36. Circuitos derivados. Reglas de Kirchhoff	114
37. Ley de Joule — Lenz	116
38. Ley de Joule—Lenz	118
CAPÍTULO VI. CAMPO MAGNÉTICO EN EL VACIO	120
39. Interacción de las corrientes	120
40. Campo magnético	122
41. Campo de una carga en movimiento	123
42. Ley de Biot — Savart	127
43. Fuerza de Lorentz	129
44. Ley de Ampere	132
45. El magnetismo como efecto relativista	134
46. Circuito con corriente en un campo magnético	140
47. Campo magnético de un circuito con corriente	146
48. Trabajo realizado al desplazar una corriente en un campo magnético	148
49. Divergencia y rotor de un campo magnético	153
50. Campo de un solenoide y de un toroide	157
CAPÍTULO VII. CAMPO MAGNÉTICO EN UNA SUBSTANCIA	162
51. Imanación de un material magnético	162
52. Intensidad del campo magnético	163
53. Cálculo del campo en los materiales magnéticos	169
54. Condiciones en el límite entre dos materiales magnéticos	172
55. Tipos de materiales magnéticos	175
56. Fenómenos magnetomecánicos	176
57. Diamagnetismo	181
58. Paramagnetismo	184
59. Ferromagnetismo	187
CAPITULO VIII. INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA	192
60. Fenómeno de la inducción electromagnética	192
61. Fuerza electromotriz de inducción	193
62. Métodos para medir la inducción magnética	197
63. Corrientes de Foucault	198
64. Fenómeno de la autoinducción	200
65. Corriente al abrir y cerrar un circuito	202
66. Inducción mutua	204
67. Energía de un campo magnético	206
68. Trabajo de inversión del magnetismo de un material ferromagnético	209
CAPÍTULO IX. ECUACIONES DE MAXWELL	211
69. Campo rotacional eléctrico	211
70. Corriente de desplazamiento	213
71. Ecuaciones de Maxwell	218

CAPÍTULO X. MOVIMIENTO DE LAS PARTÍCULAS CARGADAS EN LOS CAMPOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS	221
§ 72. Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético homogéneo	221
§ 73. Desviación de las partículas con carga en movimiento por los campos eléctricos y magnéticos	223
§ 74. Determinación de la carga y la masa del electrón	226
§ 75. Determinación de la carga específica de los iones. Espectrógrafos de masa	231
§ 76. Aceleradores de partículas con carga	235
CAPÍTULO XI. TEORÍA CLÁSICA DE LA CONDUCTIBILIDAD ELÉCTRICA DE LOS METALES	241
§ 77. Naturaleza de los portadores de corriente en los metales	241
§ 78. Teoría clásica elemental de los metales	243
§ 79. Efecto Hall	247
CAPÍTULO XII. CORRIENTE ELÉCTRICA EN LOS GASES	251
80. Conductibilidad no autónoma y autónoma	251
81. Descarga en un gas no autónoma	251
82. Cámaras de ionización y contadores de partículas	255
83. Procesos que conducen a la aparición de los portadores de corriente en la descarga autónoma	260
84. Plasma de descarga gaseosa	264
85. Descarga luminiscente	266
86. Descarga en arco	269
87. Descarga por chispas y corona	270
CAPÍTULO XIII. OSCILACIONES ELÉCTRICAS	273
88. Corrientes casi estacionarias	273
89. Oscilaciones libres en un circuito sin resistencia óhmica	273
90. Oscilaciones libres amortiguadas	277
91. Oscilaciones eléctricas forzadas	280
92. Corriente alterna	285
SEGUNDA PARTE	
ONDAS	
CAPÍTULO XIV. ONDAS ELÁSTICAS	289
93. Propagación de las ondas en un medio elástico	289
94. Ecuaciones de las ondas plana y esférica	292
95. Ecuación de la onda plana que se propaga en una dirección arbitraria	295
96. Ecuación de onda	297
97. Velocidad de las ondas elásticas en un medio sólido	298
98. Energía de una onda elástica	301
99. Ondas estacionarias	305
100. Oscilaciones de una cuerda	308
101. Sonido	309
102. Velocidad del sonido en los gases	312
103. Efecto Doppler acústico	316

CAPÍTULO XV. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	319
104. Ecuación de onda para el campo electromagnético	319
105. Onda electromagnética plana	320
106. Investigación experimental de las ondas electromagnéticas	323
107. Energía de las ondas electromagnéticas	325
108. Impulso del campo electromagnético	327
109. Radiación del dipolo	330
TERCERA PARTE	
ÓPTICA	
CAPÍTULO XVI. CONOCIMIENTOS PREVIOS	338
110. Onda luminosa	333
111. Representación de las funciones armónicas por medio de los exponentes	336
112. Reflexión y refracción de una onda plana en el límite entre dos dieléctricos	338
113. Flujo luminoso	345
114. Magnitudes y unidades fotométricas	347
115. Óptica geométrica	350
116. Sistema óptico centrado	354
117. Lente delgada	362
118. Principio de Huygens	363
CAPÍTULO XVII. INTERFERENCIA DE LA LUZ	364
119. Interferencia de las ondas luminosas	364
120. Coherencia	370
121. Procedimientos para observar la interferencia de la luz	379
122. Interferencia de la luz al reflejarse en láminas delgadas	381
123. Interferómetro de Michelson	391
124. Interferencia de muchos rayos	394
CAPÍTULO XVIII. DIFRACCIÓN DE LA LUZ	402
125. Introducción	409
126. Principio de Huygens — Fresnel	403
127. Zonas de Fresnel	405
128. Difracción de Fresnel por obstáculos simples	411
129. Difracción de Fraunhofer por una rendija	423
130. Red de difracción	431
131. Difracción de rayos X	439
132. Poder separador de un objetivo	446
133. Holografía	448
CAPÍTULO XIX. POLARIZACIÓN DE LA LUZ	452
134. Luz natural y luz polarizada	452
135. Polarización por reflexión y refracción	456
136. Polarización por doble refracción	459
137. Interferencia de rayos polarizados	463
138. Paso de la luz planopolarizada a través de una lámina de cristal	465
139. Lámina de cristal entre dos polarizadores	467
140. Doble refracción artificial	471
141. Rotación del plano de polarización	473

CAPÍTULO XX. INTERACCIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS CON LA SUBSTANCIA		475
142.	Dispersión de la luz	475
143.	Velocidad de grupo	475
144.	Teoría elemental de la dispersión	481
145.	Absorción de la luz	485
146.	Difusión de la luz	486
147.	Efecto Vavilov — Cherenkov	489
CAPÍTULO XXI. ÓPTICA DE LOS MEDIOS EN MOVIMIENTO		491
148.	Velocidad de la luz	491
149.	Experimento de Fizeau	493
150.	Experimento de Michelson	496
151.	Efecto Doppler	496
APÉNDICES		504
I.	Unidades de las magnitudes eléctricas y magnéticas en el SI y en el sistema de Gauss	504
II.	Fórmulas fundamentales del electromagnetismo en el SI y en el sistema de Gauss	504
III.	Potencial vectorial	511
Índice alfabético de materias		518

PRÓLOGO

Este tomo se consagra al estudio del electromagnetismo y de las ondas (elásticas, electromagnéticas y luminosas).

La exposición se hace de acuerdo con el Sistema Internacional de unidades (SI). Al mismo tiempo se da a conocer al lector el sistema de Gauss (con texto en letra gallarda). En los apéndices, al final del libro, se incluyen las unidades de las magnitudes eléctricas y magnéticas en el SI y en el sistema de Gauss y se comparan las formas de las fórmulas fundamentales del electromagnetismo para ambos sistemas.

El «Curso de física general» se dedica en primer lugar a los estudiantes de los centros de enseñanza técnica superior (CETS) en los que el programa de física es más extenso. No obstante, la exposición se hace de tal modo, que, omitiendo algunas de sus partes, se puede utilizar como libro de texto en los CETS que siguen el programa de física ordinario. En las «Recomendaciones metodológicas» que preceden al texto, además de otro material, se da una relación aproximada de los cortes (omisiones) que pueden hacerse si el tiempo disponible para estudiar el libro en toda su extensión es insuficiente.

I. V. Savéliev

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS

Hacemos aquí unas aclaraciones acerca de aquellas cuestiones que no siempre se exponen correctamente. Damos también una lista aproximada de los párrafos o sus partes cuyo estudio no es obligatorio si no se dispone del tiempo necesario para el estudio del Curso en toda su extensión. Esta relación refleja el criterio particular del autor y, por lo tanto, sólo tiene carácter de recomendación.

1. No es conveniente llamar, como hacen algunos libros, ϵ_0 «permitividad eléctrica del vacío» y μ_0 «permeabilidad magnética del vacío». Estas denominaciones carecen de sentido físico. Respectivamente, no se deben estudiar las «permeabilidades absolutas» sin sentido físico $\epsilon_a = \epsilon\epsilon_0$ y $\mu_a = \mu\mu_0$.

2. En aquellos casos en que las constantes eléctrica y magnética se encuentran en la combinación $\epsilon_0\mu_0$ es preferible sustituir este producto por $1/c^2$, donde c es la constante electromagnética, que coincide con la velocidad de la luz en el vacío (véase la fórmula (39.15)).

3. Es útil tener en cuenta que ϵ_0 y μ_0 figuran en las fórmulas en combinación con el factor 4π , siendo $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ y $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$. Por eso es más conveniente utilizar los valores numéricos $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-12}$ F/m y $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$ H/m. Aún mejor es emplear los valores de estas constantes expresadas por medio de π , a saber: $\epsilon_0 = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)$ y $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-6}$.

4. No se debe escatimar el tiempo en aprender los conceptos fundamentales y las relaciones del análisis vectorial (§ 41). Este tiempo se compensa con creces por la mayor facilidad y elegancia con que se obtienen después una serie de resultados. Además, la verdadera comprensión de la naturaleza y las propiedades del campo electromagnético es imposible si no se utilizan los conceptos de divergencia y rotor.

5. Es frecuente encontrarse con afirmaciones como que el desplazamiento eléctrico D (o la intensidad del campo magnético H) es una característica del campo eléctrico (o magnético) independiente de las propiedades del medio, es decir, que $D = D_0$ y $H = H_0$, donde D_0 y H_0 son los valores de las magnitudes en ausencia del medio, mientras que D y H , los valores de las mismas magnitudes en el medio. Respectivamente, la permitividad relativa y la permeabilidad relativa del medio de determinan de la forma $\epsilon = E_0/E$ y $\mu = B/B_0$. Debe tenerse en cuenta que tales afirmaciones son erróneas. En cambio, las relaciones $E = E_0/\epsilon$ y $B = \mu B_0$ resultan ser correctas únicamente en condiciones muy específicas, que para el campo eléctrico se determinan en la pág. 80 y para el campo magnético en la pág. 170.

La inexactitud, en el caso general, de la igualdad $D = D_0$ se infiere, en particular, de la fig. 20.3. Para cerciorarnos de que en el caso general es incorrecta la relación $\mu = B/B_0$, consideremos una lámina delgada grande, de un ferromagnético homogéneo e isotrópico, situada perpendicularmente a las líneas B de un campo magnético exterior. En este caso $B = B_0$, pero μ puede alcanzar un valor del orden de 10^6 .

6. Las magnitudes D y H hay que interpretarlas como características auxiliares del campo electromagnético (las fundamentales son E y B), determinadas por las fórmulas (19.3) y (52.5). La magnitud D resulta ser útil porque su divergencia está determinada por la densidad de las cargas extrañas solamente, y la magnitud H , porque su rotor está determinado por la densidad de las corrientes macroscópicas solamente (véanse las fórmulas (19.8) y (52.6)).

7. La exposición de muchas cuestiones relacionadas con las oscilaciones y ondas se simplifica y facilita mucho si en vez de las funciones armónicas (es decir, el coseno y el seno) se utilizan exponentes. Por eso la introducción en el curso de física de los centros de enseñanza técnica superior de la representación de las ondas en forma de exponente se ha hecho esencialmente necesaria. Hay que tener en cuenta que es muy fácil acostumbrarse a esta representación y que el tiempo que se emplea en adquirir la costumbre se compensa con creces.

8. En el § 18 se puede omitir la demostración de la fórmula (18.4) de la densidad volumétrica de las cargas ligadas y dar dicha fórmula sin demostración.

9. Si no hay tiempo suficiente, el § 45, «El magnetismo como efecto relativista», se puede eliminar.

10. Los cálculos de los § 57 y § 58 se pueden saltar y limitarse al estudio cualitativo del diamagnetismo y el paramagnetismo.

11. En el § 76 se puede prescindir del cálculo del campo para el betatrón (fórmulas (76.4) — (76.6)).

12. El capítulo XII, «Corriente eléctrica en los gases», puede no incluirse en la variante abreviada del programa.

13. En el § 97, «Velocidad de las ondas elásticas en un medio sólido», se pueden omitir todos los cálculos y dar solamente las fórmulas definitivas (97.7) y (97.8).

14. En el § 98, «Energía de una onda elástica», es posible prescindir de la deducción de la fórmula (98.5) y comenzar el estudio de este párrafo en la fórmula (98.5).

15. La primera parte del § 112, hasta las fórmulas (112.7) y (112.8) puede omitirse.

16. El párrafo 116, «Sistema óptico centrado», se puede excluir.

17. En el § 120, «Coherencia», puede prescindirse de los cálculos que empiezan en la fórmula (120.4) y terminan en la fórmula (120.6).

18. El párrafo 124, «Interferencia de muchos rayos», se puede omitir.

19. En el § 131, «Difracción de rayos X», puede prescindirse de la deducción de las fórmulas de Laue y de estas mismas fórmulas y limitarse al estudio de la fórmula de Bragg — Wulf.

20. El párrafo 133, «Holografía», se puede excluir.

21. La parte del § 135 que se refiere a las fórmulas de Fresnel puede no estudiarse.

22. El § 143, «Velocidad de grupo», puede reducirse al estudio elemental, que termina en la fórmula (143.7). Los cálculos que empiezan en la fórmula (143.8) y terminan en la (143.13) se pueden omitir.

Subrayamos que esta lista de reducciones tiene carácter orientador. El profesor, de acuerdo con las circunstancias, puede modificarla o ampliarla a su juicio.

PRIMERA PARTE

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

CAPÍTULO I

CAMPO ELÉCTRICO EN EL VACÍO

§ 1. Carga eléctrica

Todos los cuerpos de la naturaleza pueden electrizarse, es decir, adquirir carga eléctrica. La existencia de la carga eléctrica se manifiesta en que el cuerpo cargado interacciona con otros cuerpos también cargados. Hay dos tipos de cargas eléctricas, llamadas convencionalmente positivas y negativas. Las cargas del mismo signo se repelen y las de signos distintos se atraen.

La carga eléctrica es una propiedad inseparable de algunas partículas elementales. La carga de todas las partículas elementales (si no es nula) es igual en magnitud absoluta y puede llamarse *carga elemental*. La carga elemental positiva la designaremos por medio de la letra e .

Al número de las partículas elementales pertenecen, en particular, el electrón (portador de la carga negativa $-e$), el protón (portador de la carga positiva $+e$) y el neutrón (cuya carga es nula). De estas partículas están formados los átomos y moléculas de todo cuerpo, por lo que las cargas eléctricas entran en la composición de todos los cuerpos. De ordinario las partículas portadoras de cargas distintas están presentes en el cuerpo en cantidades iguales y distribuidas con igual densidad. En este caso la suma algebraica de las cargas en cualquier volumen elemental del cuerpo es igual a cero y cada uno de estos volúmenes (y el cuerpo en conjunto) será neutro. Si por un procedimiento cualquiera se crea en el campo un exceso de partículas de un signo (y, respectivamente, un defecto de partículas del otro signo), el cuerpo resultará cargado. También se puede, sin cambiar el número total de partículas positivas y negativas, provocar una redistribución de ellas tal, que en una parte del cuerpo se produzca un exceso de cargas de un signo y en otra, de otro. Esto puede efectuarse aproximando a un cuerpo metálico no cargado otro cuerpo cargado.

Como toda carga q está formada por un conjunto de cargas elementales, será entera y múltiplo de e :

$$q = \pm Ne. \quad (1.1)$$

Pero la carga elemental es tan pequeña, que la magnitud de las cargas macroscópicas se puede considerar que varía de un modo continuo.

Si una magnitud física puede tomar solamente determinados valores discretos, se dice que esta magnitud se cuantiza. El hecho expresado por la fórmula (1.1) significa que la carga eléctrica se cuantiza.

La magnitud de la carga, medida en diferentes sistemas inerciales de referencia, resulta ser igual. Por consiguiente, la carga eléctrica es una invariante relativista. De esto se sigue que la magnitud de la carga no depende de su estado de movimiento o reposo.

Las cargas eléctricas pueden desaparecer y aparecer de nuevo. Pero siempre aparecen o desaparecen dos cargas elementales de signos distintos. Por ejemplo, un electrón y un positrón (electrón positivo) se aniquilan al encontrarse, es decir, se transforman en fotones gamma neutros. Al ocurrir esto desaparecen las cargas $-e$ y $+e$. Durante el proceso llamado formación de pares, el fotón gamma, al entrar en el campo de un núcleo atómico se convierte en un par de partículas, o sea, en un electrón y un positrón. En este caso aparecen las cargas $-e$ y $+e$.

Así, pues, la carga total de un sistema¹⁾ eléctricamente aislado no puede cambiar. Esta afirmación lleva el nombre de ley de conservación de la carga eléctrica.

La ley de conservación de la carga eléctrica está íntimamente ligada a la invariancia relativista de la carga. En efecto, si la magnitud de la carga dependiera de su velocidad, poniendo en movimiento las cargas de un signo cualquiera variaríamos la carga total del sistema aislado.

§ 2. Ley de Coulomb

La ley a que se subordina la fuerza de interacción de las cargas puntuales fue establecida experimentalmente en 1785 por Charles-Augustin de Coulomb. Se llama *carga puntual* un cuerpo cargado cuyas dimensiones son despreciables en comparación con la distancia de este cuerpo a otros también portadores de carga eléctrica.

Valiéndose de balanzas de torsión (fig. 2.1) semejantes a las que utilizó Cavendish para determinar la constante de gravitación (véase el t. 1, § 45), midió Coulomb la fuerza de interacción de dos bolas cargadas en dependencia de la magnitud de sus cargas y de la distancia entre ellas. Coulomb partió de que al tocar una bola metálica cargada otra bola exactamente igual no cargada, la carga se distribuye por igual entre ambas bolas.

¹⁾ Un sistema se llama eléctricamente aislado si a través de la superficie que lo limita no pueden penetrar partículas cargadas.

Como resultado de sus experiencias llegó Coulomb a la conclusión de que *la fuerza con que interaccionan dos cargas puntuales en reposo es proporcional a la magnitud de cada una de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas*. La dirección de la fuerza coincide con la de la recta que une las cargas.

Advertimos que la dirección de la fuerza de interacción a lo largo de la recta que une las cargas puntuales se deduce de las razones de simetría. El espacio vacío se supone que es homogéneo e isotrópico. Por consiguiente, la única dirección que destacan en el espacio las cargas puntuales en reposo introducidas en él es la dirección de una carga a la otra. Supongamos que la fuerza F que actúa sobre la carga q_1 (fig. 2.2), formara con la dirección de q_1 a q_2 un ángulo α distinto de 0 ó π . Pero, en virtud de la simetría axial, no hay fundamentos para distinguir la fuerza F del conjunto de fuerzas con otras direcciones que forman con el eje $q_1 - q_2$ el mismo ángulo α (las direcciones de estas fuerzas forman un cono cuyo ángulo de abertura es 2α). La dificultad que surge a consecuencia de esto desaparece cuando α es igual a 0 ó π .

La ley de Coulomb se puede expresar con la fórmula

$$F_{12} = -k \frac{q_1 q_2}{r^2} e_{12}. \quad (2.1)$$

Aquí k es un coeficiente de proporcionalidad que se supone positivo; q_1 y q_2 son las magnitudes de las cargas que interaccionan; r es la

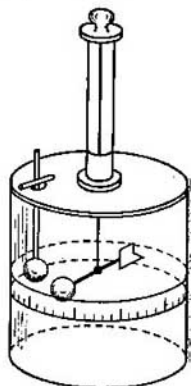


Fig. 2.1.

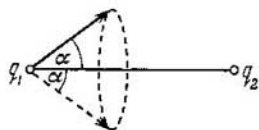


Fig. 2.2.

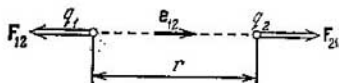


Fig. 2.3.

distancia entre las cargas; e_{12} , el vector unidad que tiene la dirección de la carga q_1 a la carga q_2 , y F_{12} , la fuerza que actúa sobre la carga q_1 (fig. 2.3; el dibujo corresponde al caso en que las cargas tienen mismos signos). La fuerza F_{21} difiere de la F_{12} en el signo:

$$F_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} e_{12}. \quad (2.2)$$

El módulo, igual para ambas cargas, de la fuerza de interacción, se puede representar de la forma

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \quad (2.3)$$

La experiencia da que la fuerza de interacción de dos cargas no varía si cerca de ellas se colocan otras cargas cualesquiera. Supongamos que hay una carga q_a y, además, N cargas q_1, q_2, \dots, q_w . De lo dicho anteriormente se infiere que la fuerza resultante F con que actúan sobre q_a las N cargas q_i se determina por la fórmula

$$F = \sum_{i=1}^N F_{ai}, \quad (2.4)$$

en la que F_{ai} es la fuerza con que actúa sobre q_a la carga q_i en ausencia de las demás $N - 1$ cargas.

El hecho expresado por la fórmula (2.4) permite, conociendo la ley de interacción entre cargas puntuales, calcular la fuerza de interacción entre las cargas concentradas en los cuerpos de dimensiones finitas. Para esto hay que dividir cada una de las cargas en cargas tan pequeñas dq , que se puedan considerar puntuales, calcular por la fórmula (2.1) la fuerza de interacción entre las cargas dq tomadas de dos en dos, y luego sumar vectorialmente estas fuerzas. Matemáticamente esta operación coincide totalmente con el cálculo de las fuerzas de atracción gravitatoria entre cuerpos de dimensiones finitas (véase el t. 1, § 45).

§ 3. Sistemas de unidades

Elijiendo adecuadamente la unidad de carga (las unidades para F y r fueron ya establecidas en la mecánica) se puede conseguir que el coeficiente de proporcionalidad de la fórmula (2.1) sea igual a la unidad. La unidad de carga correspondiente (se supone que F y r se miden en unidades del sistema CGS) se llama *unidad electrostática absoluta de carga* (abreviadamente: unidad de carga CGSE). Esta unidad es igual a la carga que, en el vacío, interacciona con otra carga igual a ella, situada a 1 cm de distancia, con la fuerza de 1 dina.

Por medio de mediciones escrupulosas (descritas en el § 74) se halló que la carga elemental es

$$e = 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ unid. de carga-CGSE}. \quad (3.1)$$

Tomando las unidades de longitud, masa, tiempo y carga como base, se puede construir un sistema de unidades de las magnitudes eléctricas y magnéticas. El sistema que tiene por unidades fundamentales el centímetro, gramo, segundo y la unidad de carga CGSE se llama *sistema absoluto de unidades electrostáticas* (sistema CGSE).

Este sistema se basa en la ley de Coulomb, es decir, en la interacción entre cargas en reposo. Más adelante conoceremos el *sistema absoluto de unidades electromagnéticas* (sistema CGSM), que se basa en la ley de interacción entre conductores por los cuales pasa corriente eléctrica. También es absoluto el *sistema de Gauss*, en el cual las unidades del sistema CGSE y las de las magnitudes magnéticas, con las unidades del sistema CGSM.

En el sistema CGSE la fórmula (2.3) tiene la forma

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \quad (3.2)$$

Esta fórmula es válida en el caso en que las cargas están en el vacío. Para las cargas que se encuentran en un medio tiene que ser precisada (véase el § 22).

El 1º de enero de 1963 entró en vigor en la URSS el Estándar estatal GOST 9867—61 que prescribe como preferible el empleo del Sistema Internacional de unidades, designado por el símbolo SI. Las unidades fundamentales de este sistema son el metro, kilogramo, segundo, amperio, kelvin, candela y mol. La unidad de fuerza del SI es el newton (N), igual a 10^5 dinas.

Al establecer las unidades de las magnitudes eléctricas y magnéticas el SI lo mismo que el sistema CGSM parte de la ley de interacción no de las cargas sino de los conductores con corriente. Por eso el coeficiente de proporcionalidad de la fórmula de la ley de Coulomb resulta ser distinto de la unidad de magnitud dimensional.

La unidad de carga en el SI es el *culombio* (C). Experimentalmente se ha establecido que

$$1 \text{ C} = 2\,998 \cdot 10^9 \text{ (aproximadamente } 3 \cdot 10^9 \text{) unid. de carga CGSE.} \quad (3.3)$$

Para formarnos una idea de la magnitud de la carga de 1 C calculamos la fuerza con que interaccionarían dos cargas de 1 C cada una distantes entre sí 1 m. De acuerdo con (3.2)

$$F = \frac{3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9}{100^2} \text{ CGSE} = 9 \cdot 10^{14} \text{ dinas} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \approx 10^9 \text{ kgf.} \quad (3.4)$$

La carga elemental expresada en culombios es

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C.} \quad (3.5)$$

§ 4. Escritura racionalizada de las fórmulas

En muchas fórmulas de electrodinámica si éstas se escriben en los sistemas CGS (y en particular en el de Gauss) figuran los factores 4π y la llamada constante electrodinámica c igual a la velocidad de la luz en el vacío. Para evitarlos en las fórmulas prácticamente más

importantes el coeficiente de proporcionalidad de la ley de Coulomb se supone igual a $1/4\pi\epsilon_0$. Entonces la expresión de la ley para las cargas que se encuentran en el vacío toma la forma

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \quad (4.1)$$

Respectivamente varían también otras fórmulas. La escritura de las fórmulas modificada de esta forma se denomina *racionalizada*. Los sistemas de unidades construidos utilizando las fórmulas racionalizadas también se llaman *racionalizados*. A estos sistemas pertenece el SI.

La magnitud ϵ_0 recibe el nombre de *constante eléctrica*. Su dimensión es la de la capacidad eléctrica dividida por la longitud. Se expresa en unidades denominadas faradio por metro. Para hallar el valor numérico de ϵ_0 sustituimos en la fórmula (4.1) los valores de las magnitudes correspondientes al caso de dos cargas de 1 C cada una, distantes 1 m entre sí. De acuerdo con (3.4), la fuerza de interacción en este caso es igual a $9 \cdot 10^9$ N. Sustituyendo este valor de la fuerza, así como los de $q_1 = q_2 = 1$ C y $r = 1$ m, en la fórmula (4.1), obtenemos

$$9 \cdot 10^9 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 \cdot 1}{1^2},$$

de donde

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 0,885 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}. \quad (4.2)$$

El sistema de unidades de Gauss se ha utilizado mucho, y todavía se sigue empleando, en la literatura de física. Por eso creemos necesario dar a conocer al lector tanto el sistema de unidades SI como el sistema de Gauss. La exposición se hará en el SI. Al mismo tiempo se indicará la forma que las fórmulas obtenidas tienen en el sistema de Gauss. En el apéndice II, al final del libro, se compara la escritura de las fórmulas fundamentales de la electrodinámica en el SI y en el sistema de Gauss.

§ 5. Campo eléctrico. Intensidad del campo

La interacción de las cargas en reposo se efectúa por medio del *campo eléctrico*¹⁾. Toda carga hace que varíen las propiedades del espacio que la rodea: crea en él un campo eléctrico. Este campo se manifiesta en que una carga eléctrica, situada en un punto cualquiera de él, se encuentra bajo la acción de una fuerza. Por consiguiente, para saber si en un lugar dado existe campo eléctrico

¹⁾ En el § 40 veremos que en el caso de cargas móviles, además de por el campo eléctrico, la interacción también se efectúa por medio del campo magnético.

hay que colocar en él un cuerpo cargado (en adelante, para simplificar diremos simplemente una carga) y determinar si éste experimenta la acción de una fuerza eléctrica o no. Por la magnitud de la fuerza que actúa sobre la carga dada es posible, evidentemente, inferir la «intensidad» del campo.

Así, para descubrir y estudiar un campo eléctrico hay que valerse de una determinada carga de «ensayo». Para que la fuerza que actúa sobre la carga de ensayo caracterice el campo «en un punto dado», esta última debe ser puntual. De lo contrario dicha fuerza caracterizará las propiedades del campo promediadas por el volumen que ocupa el cuerpo portador de la carga de ensayo.

Estudiemos con ayuda de una carga puntual de ensayo q_{ens} el campo creado por una carga puntual q en reposo. Situando la carga de ensayo en el punto cuya posición respecto a la carga q está determinada por el radio vector r (fig. 5.1), descubrimos que sobre la carga de ensayo actúa la fuerza

$$\mathbf{F} = q_{ens} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \right) \quad (5.1)$$

(véanse (2.2) y (4.1)). Aquí \mathbf{e}_r es el versor del radio vector r .

De la fórmula (5.1) se sigue que la fuerza que actúa sobre la carga de ensayo depende no sólo de las magnitudes que definen el campo (de q y r), sino también de la magnitud de la carga de ensayo q_{ens} . Si se toman cargas de ensayo de distintas magnitudes q'_{ens} , q''_{ens} y así sucesivamente, las fuerzas \mathbf{F}' , \mathbf{F}'' , . . . , que ellas experimentan en el punto dado del campo serán distintas. Pero en (5.1) se ve que la relación \mathbf{F}/q_{ens} es la misma para todas las cargas de ensayo y sólo depende de las magnitudes q y r que definen el campo en el punto dado. Por eso es natural tomar esta relación como magnitud característica del campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_{ens}}. \quad (5.2)$$

Esta magnitud vectorial se llama *intensidad del campo eléctrico* en el punto dado (es decir, en el punto en que la carga de ensayo q_{ens} experimenta la acción de la fuerza \mathbf{F}).

De acuerdo con la fórmula (5.2), la intensidad del campo eléctrico es numéricamente igual a la fuerza que actúa sobre la carga puntual unitaria que se halla en el punto dado del campo. La dirección del vector \mathbf{E} coincide con la dirección de la fuerza que actúa sobre la carga positiva.

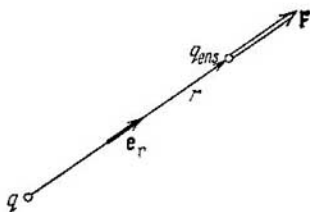


Fig. 5.1.

Advertimos que la fórmula (5.2) sigue siendo válida si como carga de ensayo se toma una carga negativa ($q_{\text{ens}} < 0$). En este caso los vectores E y F tendrán sentidos opuestos.

Al concepto de intensidad del campo eléctrico hemos llegado investigando el campo de una carga puntual en reposo. No obstante, la definición (5.2) se extiende también al caso del campo creado por cualquier conjunto de cargas en reposo. En este caso es necesario, además, hacer la siguiente aclaración. Puede ocurrir que la posición de las cargas que condicionan el campo que se estudia varíe bajo la influencia de la carga de ensayo. Esto ocurre, por ejemplo, cuando las cargas creadoras del campo se encuentran en un conductor y pueden desplazarse libremente dentro de los límites de éste. Por eso, para no introducir variaciones sensibles en el campo que se investiga, la magnitud de la carga de ensayo debe tomarse suficientemente pequeña.

De las fórmulas (5.2) y (5.1) se deduce que la intensidad del campo de una carga puntual es proporcional a la magnitud de la carga q e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r desde dicha carga hasta el punto dado del campo:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} e_r. \quad (5.3)$$

El vector E está dirigido a lo largo de la recta radial que pasa por la carga y por el punto dado del campo, y su sentido, si es positivo, va de la carga al punto, y si es negativo, del punto a la carga.

En el sistema de Gauss la fórmula de la intensidad del campo de una carga puntual en el vacío tiene la forma

$$E = \frac{q}{r^2} e_r. \quad (5.4)$$

Como unidad de intensidad del campo eléctrico se toma la intensidad en un punto tal, que sobre una carga igual a la unidad (1 C en el SI ó 1 unidad de carga CGSE en el sistema de Gauss) actúe una fuerza cuya magnitud sea también igual a la unidad (1 N en el SI ó 1 dina en el sistema de Gauss). En el sistema de Gauss esta unidad carece de nombre especial. En el SI la unidad de intensidad del campo eléctrico se llama voltio por metro y se designa V/m (véase la fórmula (8.5)).

De acuerdo con la fórmula (5.3), la carga de 1 C crea en el vacío, a la distancia de 1 m, la intensidad

$$E = \frac{1}{4\pi [1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)]} \frac{1}{1^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ V/m.}$$

Esta misma intensidad en el sistema de Gauss es

$$E = \frac{q}{r^2} = \frac{3 \cdot 10^9}{100^2} = 3 \cdot 10^5 \text{ unid. CGSE.}$$

Comparando ambos resultados hallamos que

$$1 \text{ unid. CGSE de intensidad de campo} = 3 \cdot 10^4 \text{ V/m.} \quad (5.5)$$

Según (5.2), la fuerza que actúa sobre la carga de ensayo es

$$\mathbf{F} = q_{\text{ens}} \mathbf{E}.$$

Es evidente que sobre toda carga puntual q^1 , en un punto del campo de intensidad \mathbf{E} , actuará la fuerza

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}. \quad (5.6)$$

Si la carga q es positiva, el sentido de la fuerza coincide con el del vector \mathbf{E} . Cuando q es negativa, los sentidos de los vectores \mathbf{F} y \mathbf{E} son opuestos.

En el § 2 se indicó que la fuerza con que un sistema de cargas actúa sobre una carga que no forme parte de él, es igual a la suma vectorial de las fuerzas que, sobre dicha carga, ejercen por separado cada una de las cargas del sistema (véase la fórmula (2.4)). De aquí se infiere que la *intensidad del campo de un sistema de cargas es igual a la suma vectorial de las intensidades de los campos que crearían cada una de las cargas del sistema por separado*:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i. \quad (5.7)$$

Esta última afirmación se llama *principio de superposición de los campos eléctricos*.

El principio de superposición permite calcular la intensidad del campo de cualquier sistema de cargas. Dividiendo las cargas extensas en fracciones suficientemente pequeñas dq , cualquier sistema de cargas se puede reducir a un conjunto de cargas puntuales. La aportación de cada una de estas cargas al campo resultante se calcula por la fórmula (5.3).

El campo eléctrico se puede describir conociendo la magnitud y la dirección del vector \mathbf{E} para cada punto. El conjunto de estos vectores forma el campo del vector intensidad de campo eléctrico (compárese con el campo del vector velocidad, t. 1, § 72). El campo del vector velocidad se puede representar muy intuitivamente por medio de las líneas de intensidad. Análogamente, el campo eléctrico se puede describir valiéndose de las líneas de intensidad (de campo eléctrico), que abreviadamente llamaremos líneas \mathbf{E} (también se denominan líneas de fuerza). Las líneas de intensidad se trazan de tal modo que la tangente a ellas en cada punto coincida con la direc-

¹) En la fórmula (5.3), q designa la carga que determina el campo. En la fórmula (5.6) se llama q la carga que experimenta, en el punto de intensidad \mathbf{E} , la acción de la fuerza \mathbf{F} .

ción del vector E . La densidad de estas líneas se elige de manera que la cantidad de líneas que atraviesan la unidad de área de una superficie perpendicular a ellas sea igual al valor numérico del vector E . Entonces, por la figura de las líneas de intensidad se pueden deducir

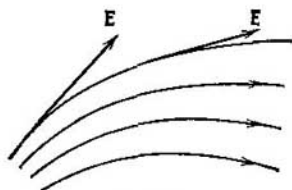


Fig. 5.2.

la dirección (sentido) y la magnitud del vector E en los distintos puntos del espacio (fig. 5.2).

Las líneas E del campo de una carga puntual son un conjunto de rectas radiales que parten de la carga, si ésta es positiva, y que inciden en ella si es negativa (fig. 5.3). Las líneas se apoyan por un extremo en la carga y por el otro se alejan hacia el infinito. En reali-

dad el número total de líneas que atraviesa una superficie esférica de radio arbitrario r , será igual al producto de la densidad de líneas por el área de la esfera $4\pi r^2$. La densidad de líneas, como hemos con-

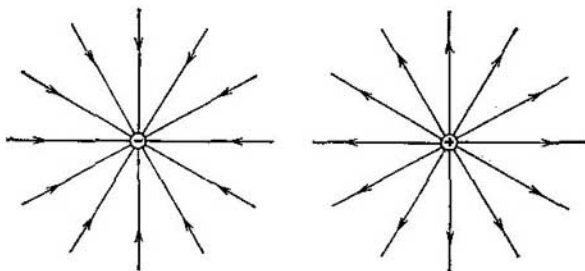


Fig. 5.3.

venido, es numéricamente igual a $E = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot (q/r^2)$. Por consiguiente, la cantidad de líneas será numéricamente igual a $(1/4\pi\epsilon_0) \cdot (q/r^2) \cdot 4\pi r^2 = q/\epsilon_0$. Este resultado significa que el número de líneas a cualquier distancia de la carga será el mismo. De aquí se infiere que, excepto en la carga, las líneas ni empiezan ni terminan en ninguna parte; comenzando en la carga parten hacia el infinito (si la carga es positiva), o viniendo del infinito terminan en la carga (si ésta es negativa). Esta propiedad de las líneas E es general para todos los campos eléctricos, o sea, para los campos creados por cualquier sistema de cargas en reposo: las líneas de campo eléctrico pueden empezar o terminar solamente en las cargas o partir hacia el infinito.

§ 6. Potencial

Consideremos el campo creado por una carga puntual en reposo q . En cualquier punto de este campo sobre una carga puntual q' actúa la fuerza

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \mathbf{e}_r = F(r) \mathbf{e}_r. \quad (6.1)$$

Aquí $F(r)$ es el módulo de la fuerza \mathbf{F} , y \mathbf{e}_r , el versor del radio vector \mathbf{r} , que determina la posición de la carga q' , respecto de la carga q .

La fuerza (6.1) es central (véase t. 1, § 24). El campo central de fuerzas es conservativo. Por lo tanto, el trabajo que realizan las fuerzas del campo sobre la carga q' al trasladarla de un punto a otro, no depende del camino recorrido. Este trabajo es

$$A_{12} = \int_1^2 F(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{l}, \quad (6.2)$$

donde $d\mathbf{l}$ es el desplazamiento elemental de la carga q' . En la fig. 6.1 se ve que el producto escalar $\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{l}$ es igual al incremento del módulo del radio vector \mathbf{r} , es decir, dr . Por eso la fórmula (6.2) se puede representar de la forma

$$A_{12} = \int_1^2 F(r) dr$$

(compárese con la fórmula (21.3) del t. 1). La sustitución de la expresión para $F(r)$ da:

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2} \right). \quad (6.3)$$

El trabajo de las fuerzas del campo conservativo se puede representar como una pérdida de energía potencial:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2}. \quad (6.4)$$

La comparación de las fórmulas (6.3) y (6.4) conduce a la siguiente expresión de la energía potencial de la carga q' en el campo de la carga q :

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + \text{const.}$$

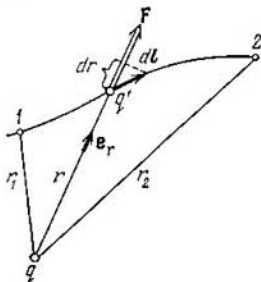


Fig. 6.1.

El valor de la constante en la expresión de la energía potencial se elige por lo general de tal forma, que cuando la carga se aleje hasta el infinito (o sea, cuando $r = \infty$), la energía potencial se anule. Con esta condición se obtiene que

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}. \quad (6.5)$$

Vamos a valernos de la carga q' como carga de ensayo para estudiar el campo. De acuerdo con (6.5), la energía potencial que posee la carga de ensayo no sólo depende de su magnitud q' , sino también de las magnitudes q y r que determinan el campo. Por consiguiente, esta energía puede utilizarse para definir el campo, análogamente a como se empleó para este fin la fuerza que actúa sobre la carga de ensayo.

Distintas cargas de ensayo q'_{ens} , \bar{q}'_{ens} , etc., tendrán en un mismo punto del campo diferentes energías W_p , \bar{W}_p , etc. Pero la relación W_p/q_{ens} será igual para todas las cargas (véase la fórmula (6.5)). La magnitud

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{\text{ens}}} \quad (6.6)$$

se llama *potencial del campo* en el punto dado y se utiliza, junto con la intensidad del campo E , para definir los campos eléctricos.

De (6.6) se deduce que el potencial es numéricamente igual a la energía potencial que tendría en el punto dado del campo una carga unitaria positiva. Sustituyendo en (6.6) el valor de la energía potencial (6.5), obtenemos para el potencial de la carga puntual la siguiente expresión:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (6.7)$$

En el sistema de Gauss el potencial de una carga puntual en el vacío se determina por la fórmula

$$\varphi = \frac{q}{r}.$$

Examinemos el campo creado por un sistema de N cargas puntuales q_1, q_2, \dots, q_N . Las distancias desde cada una de las cargas hasta un punto dado del campo las designaremos por r_1, r_2, \dots, r_N . El trabajo que realizan las fuerzas de este campo sobre una carga q' será igual a la suma algebraica de los trabajos de las fuerzas debidas a cada una de las cargas por separado:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^N A_i.$$

Según (6.3), cada uno de los trabajos

$$A_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{q_i q'}{r_{i2}} \right),$$

donde r_{i1} es la distancia desde la carga q_i hasta la posición inicial de la carga q' , y r_{i2} , la distancia desde q_i hasta la posición final de la carga q' . Por consiguiente,

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{r_{i2}}.$$

Comparando esta expresión con la relación (6.4), obtenemos para la energía potencial de la carga q' en el campo del sistema de cargas la expresión

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{r_i},$$

de la cual se sigue que

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}. \quad (6.8)$$

La comparación de la fórmula obtenida con la expresión (6.7) conduce a la conclusión de que *el potencial del campo creado por un sistema de cargas es igual a la suma algebraica de los potenciales creados por cada una de las cargas por separado*. Mientras las intensidades de los campos, cuando éstos se superponen, se suman vectorialmente, los potenciales se suman algebraicamente. Por esta causa el cálculo de los potenciales resulta generalmente mucho más fácil que el de las intensidades del campo eléctrico.

De la fórmula (6.6) se infiere que la carga q que se encuentra en el punto del campo de potencial φ , posee la energía potencial

$$W_p = q\varphi. \quad (6.9)$$

Por lo tanto, el trabajo de las fuerzas del campo sobre la carga q puede expresarse mediante la diferencia de potencial:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (6.10)$$

De este modo, el trabajo que sobre la carga realizan las fuerzas del campo es igual al producto de la magnitud de la carga por la diferencia de potencial entre los puntos inicial y final (o sea, por la disminución del potencial).

Si la carga q del punto con potencial φ se aleja hacia el infinito (donde, según la condición, el potencial es nulo), el trabajo de las fuerzas del campo será

$$A_{\infty} = q\varphi. \quad (6.11)$$

De aquí se sigue que *el potencial es numéricamente igual al trabajo que realizan las fuerzas del campo sobre la carga unitaria positiva al alejar ésta desde el punto dado hasta el infinito*. Un trabajo de igual

magnitud hay que realizar contra las fuerzas del campo eléctrico para trasladar una carga unitaria positiva desde el infinito hasta el punto dado del campo.

La fórmula (6.11) se puede utilizar para establecer las unidades de potencial. Como unidad de potencial se toma el potencial de un punto tal del campo, que para trasladar desde el infinito hasta él una carga unitaria positiva hay que realizar un trabajo igual a la unidad. Como en el SI se toma como unidad de potencial, llamada voltio (cuyo símbolo es V), el potencial de un punto tal, que para trasladar hasta él desde el infinito una carga de un culombio hay que realizar un trabajo igual a un julio:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ C} \cdot 1 \text{ V},$$

de donde

$$1 \text{ V} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ C}}. \quad (6.12)$$

Como unidad electrostática absoluta de potencial (unidad de potencial CGSE) se toma el potencial de un punto tal, que para trasladar desde el infinito hasta él una carga igual a +1 unidad CGSE hay que realizar el trabajo de 1 erg. Expresando en (6.12) 1 J y 1 C mediante unidades CGSE, hallamos la relación entre el voltio y la unidad de potencial CGSE:

$$1 \text{ V} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ C}} = \frac{10^7 \text{ erg}}{3 \cdot 10^9 \text{ unid. CGSE}} = \frac{1}{300} \text{ unid. de potencial CGSE}. \quad (6.13)$$

De este modo, una unidad de potencial CGSE es igual a 300 V.

En física suele emplearse una unidad de energía y trabajo denominada electrón-voltio (eV). Se entiende por electrón-voltio el trabajo que realizan las fuerzas del campo sobre una carga igual a la del electrón (es decir, sobre la carga elemental e), al recorrer ésta una diferencia de potencial de 1 V:

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ erg}. \quad (6.14)$$

También se utilizan las unidades múltiples del electrón-voltio:

$$1 \text{ keV (kilo electrón-voltio)} = 10^3 \text{ eV},$$

$$1 \text{ MeV (megaelectrón-voltio)} = 10^6 \text{ eV},$$

$$1 \text{ GeV (gigaelectrón-voltio)} = 10^9 \text{ eV}.$$

§ 7. Energía de interacción del sistema de cargas

La expresión (6.5) se puede considerar como la energía potencial mutua de las cargas q y q' . Designando las cargas por q_1 y q_2 , obtenemos para sus energías de interacción la fórmula

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \quad (7.1)$$

El símbolo r_{12} representa la distancia entre las cargas.

Analicemos un sistema formado por N cargas puntuales q_1, q_2, \dots, q_N . En el § 23 del t. 1 se demostró que la energía de interacción de un sistema de este tipo es igual a la suma de las energías de interacción de las cargas tomadas dos a dos:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq k)} W_{pik}(r_{ik}) \quad (7.2)$$

(véase la fórmula (23.20) del t. 1). De acuerdo con (7.1)

$$W_{pik} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}.$$

La sustitución de esta expresión en la fórmula (7.2) da que

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq k)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}. \quad (7.3)$$

En el sistema de Gauss no figura en esta fórmula el factor $1/4 \pi \epsilon_0$.

La suma que hay en la fórmula (7.3) se efectúa respecto de los índices i y k . Ambos índices recorren, independientemente el uno del otro, todos los valores desde 1 hasta N . Los sumandos en los cuales coinciden los valores del índice i con los del k , no se toman en consideración. Damos a la fórmula (7.3) la forma siguiente:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{\substack{h=1 \\ (h \neq i)}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_h}{r_{ih}}. \quad (7.4)$$

La expresión

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{h=1 \\ (h \neq i)}}^N \frac{q_h}{r_{ih}}$$

representa de por sí el potencial creado por todas las cargas, excepto q_i , en el punto en que se encuentra esta última. Teniendo esto en cuenta, obtenemos para la energía de interacción la fórmula siguiente:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i. \quad (7.5)$$

§ 8. Relación entre la intensidad del campo eléctrico y el potencial

El campo eléctrico puede definirse valiéndose de la magnitud vectorial \mathbf{E} o de la magnitud escalar φ . Es evidente que entre estas dos magnitudes debe existir una relación determinada. Si se toma

en consideración que \mathbf{E} es proporcional a la fuerza que actúa sobre la carga y que φ es la energía potencial de dicha carga, es fácil comprender que esta relación debe ser análoga a la que hay entre la energía potencial y la fuerza.

La fuerza \mathbf{F} está ligada con la energía potencial por la relación

$$\mathbf{F} = -\nabla W_p \quad (8.1)$$

(véase la fórmula (22.7) del t. 1). Para una partícula cargada que se encuentra en un campo electrostático, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ y $W_p = q\varphi$. Sustituyendo estos valores en la relación (8.1), obtenemos que

$$q\mathbf{E} = -\nabla (q\varphi).$$

La constante q se puede sacar del signo de gradiente. Haciendo esto y simplificando después por q , llegamos a la fórmula

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (8.2)$$

que establece la relación entre la intensidad del campo y el potencial.

Recordando la definición del gradiente (véase la fórmula (22.6) del t. 1), se puede escribir que

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z. \quad (8.3)$$

Por consiguiente, en proyecciones sobre los ejes de coordenadas, la relación (8.2) tiene la forma

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (8.4)$$

Análogamente, la proyección del vector \mathbf{E} sobre una dirección arbitraria l es igual a la derivada de φ respecto de l tomada con signo contrario, es decir, a la velocidad de disminución del potencial durante la traslación a lo largo de la dirección l :

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}. \quad (8.5)$$

De que la fórmula (8.5) es correcta podemos cerciorarnos fácilmente tomando la dirección l como uno de los ejes de coordenadas y teniendo en cuenta la relación (8.4).

Vamos a explicar la relación (8.2) valiéndonos del ejemplo del campo de una carga puntual. El potencial de este campo se expresa por la fórmula (6.7). Pasando a las coordenadas cartesianas obtenemos la expresión:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

La derivada parcial de esta función respecto de x es igual a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}.$$

Análogamente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3}.$$

Sustituyendo estos valores de las derivadas en la fórmula (8.3), llegamos a la expresión

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{xe_x + ye_y + ze_z}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

que coincide con (5.3).

La fórmula (8.2) permite hallar la intensidad del campo en cada punto por los valores conocidos de φ . También puede resolverse el problema inverso, o sea, dados los valores de \mathbf{E} en cada punto, hallar la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera del campo. Para esto nos valemos de que el trabajo que realizan las fuerzas del campo sobre una carga q al trasladarla desde un punto 1 a un punto 2 se puede calcular como

$$A_{12} = \int_1^2 q\mathbf{E} \, dl.$$

Al mismo tiempo, según (6.10), este mismo trabajo se puede representar de la forma

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Igualando entre sí estas dos expresiones y simplificando por q , llegamos a la relación

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \, dl. \quad (8.6)$$

Esta integral puede tomarse a lo largo de cualquier línea que una los puntos 1 y 2, ya que el trabajo de las fuerzas del campo no depende del camino recorrido. Para el recorrido por un contorno cerrado $\varphi_1 = \varphi_2$ y la fórmula (8.6) se transforma en la relación

$$\oint \mathbf{E} \, dl = 0 \quad (8.7)$$

(la circunferencia en el signo de integral indica que la integración se efectúa a lo largo de un camino cerrado). Advertimos que esta relación sólo es válida para el campo electrostático. Más adelante explicaremos que el campo de las cargas en movimiento (es decir, el campo variable con el tiempo) no es de potencial y, por lo tanto, no cumple la condición (8.7) para éste.

Una superficie imaginaria cuyos puntos tienen todos el mismo potencial, se llama superficie equipotencial o superficie de nivel.

Su ecuación tiene la forma

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

Durante la traslación en un segmento dl por un plano equipotencial, el potencial no varía ($d\varphi = 0$). Por consiguiente, según la fórmula (8.5), el componente del vector E , tangente a la superficie es nulo. De esto concluimos que el vector E tiene en cada punto la dirección de la normal a la superficie equipotencial que pasa por dicho punto. Teniendo en cuenta que la dirección del vector E es tangente a la línea E , se comprende fácilmente que las líneas de intensidad son en cada punto ortogonales a las superficies equipotenciales.

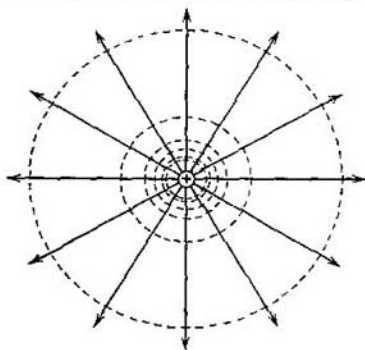


Fig. 8.1.

Una superficie equipotencial se puede hacer pasar por cualquier punto del campo. Por lo tanto, se puede construir una cantidad infinita de estas superficies. Conviene trazarlas de tal modo, que la diferencia de potencial entre dos superficies vecinas sea igual en todas partes. Entonces, por la densidad de superficies equipotenciales se puede deducir la magnitud de la intensidad del campo. Efectivamente, cuanto más densamente se encuentren las superficies equipotenciales, con

tanta mayor rapidez variará el potencial al trasladarse a lo largo de una normal a la superficie. Por consiguiente, tanto mayor será en este sitio $\nabla\varphi$, y también E .

En la fig. 8.1 se muestran las superficies equipotenciales (o, más exactamente, sus intersecciones con el plano del dibujo) para el campo de una carga puntual. De acuerdo con el carácter de la dependencia de E respecto de r , la densidad de superficies equipotenciales aumenta a medida que se aproximan a la carga.

Para un campo homogéneo, las superficies equipotenciales forman un sistema de planos equidistantes entre sí, perpendiculares a la dirección del campo.

§ 9. Dipolo

Se llama *dipolo eléctrico* un sistema de dos cargas puntuales $+q$ y $-q$, iguales en magnitud, la distancia l entre las cuales es mucho menor que las distancias hasta aquellos puntos en que se determina

el campo del sistema. La recta que pasa por ambas cargas recibe el nombre de *eje del dipolo*.

Primero vamos a calcular el potencial y luego la intensidad del campo del dipolo. Este campo tiene simetría axial. Por eso la figura del campo en cualquier plano que pase por el eje del dipolo será la misma y el vector E se encuentra en dicho plano. La posición de un punto respecto del dipolo la caracterizaremos por medio de un radio vector r o valiéndonos de las coordenadas polares r y ϑ (fig. 9.1). Introducimos el vector l , trazado desde la carga negativa a la positiva. La posición de la carga $+q$ respecto del centro del dipolo se determina por el vector a , la de la carga $-q$, por el vector $-a$. Es evidente que $l = 2a$.

Las distancias hasta un punto dado desde las cargas $+q$ y $-q$ las designaremos respectivamente por r_+ y r_- . En virtud de la pequeñez de a en comparación con r , se puede suponer aproximadamente que

$$r_+ = r - a \cos \vartheta = r - ae_r, \quad (9.1)$$

$$r_- = r + a \cos \vartheta = r + ae_r.$$

El potencial en el punto determinado por el radio vector r , es

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_- - r_+)}{r_+ r_-}. \end{aligned}$$

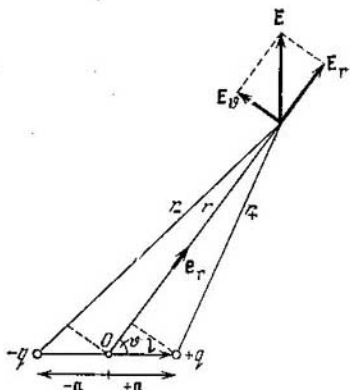


Fig. 9.1.

El producto $r_+ r_-$ se puede sustituir por r^2 . La diferencia $r_- - r_+$, de acuerdo con las fórmulas (9.1), es igual a $2ae_r = le_r$. Por consiguiente,

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql e_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pe_r}{r^2}, \quad (9.2)$$

donde

$$p = ql \quad (9.3)$$

es la característica del dipolo llamada su *momento eléctrico*. El vector p está dirigido a lo largo del eje del dipolo desde la carga negativa a la positiva (fig. 9.2).

De la fórmula (9.2) se infiere que el campo del dipolo está determinado por su momento eléctrico p . Más adelante veremos que también el comportamiento del dipolo en un campo eléctrico exterior

está determinado por su momento eléctrico \mathbf{p} . La comparación con la expresión (6.7) muestra que el potencial del campo del dipolo disminuye con la distancia más rápidamente (como $1/r^2$) que el potencial de una carga puntual (que varía según la ley $1/r$).

En la fig. 9.1 se ve que $p_r = p \cos \vartheta$. Por eso la expresión (9.2) se puede escribir en la forma siguiente:

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^2}. \quad (9.4)$$

Para hallar la intensidad del campo del dipolo calculamos por la fórmula (8.5) la proyección del vector \mathbf{E} sobre dos direcciones mutuamente perpendiculares. Una de ellas se determina por el movimiento del punto debido a la variación de la distancia r (permaneciendo fijo ϑ), y la segunda, por el movimiento del punto condicio-

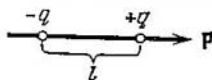


Fig. 9.2.

nado por la variación del ángulo ϑ (permaneciendo fijo r ; véase la fig. 9.1). La primera proyección se obtiene derivando la expresión (9.4) respecto de r :

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \vartheta}{r^3}. \quad (9.5)$$

La segunda proyección (que designaremos por E_ϑ) la obtenemos tomando la razón del incremento del potencial φ que se obtiene al aumentar el ángulo ϑ en $d\vartheta$, a la distancia $r d\vartheta$ a que se desplaza entonces el extremo del segmento r (en este caso el dl que figura en la fórmula (8.5) es igual a $r d\vartheta$). De este modo,

$$E_\vartheta = -\frac{\partial\varphi}{r \partial\vartheta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}.$$

Sustituyendo el valor de la derivada de la función (9.4) respecto de ϑ , obtenemos:

$$E_\vartheta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \operatorname{sen} \vartheta}{r^3}. \quad (9.6)$$

La suma de los cuadrados de las expresiones (9.5) y (9.6) da el cuadrado del vector \mathbf{E} (véase la fig. 9.1):

$$\begin{aligned} E^2 &= E_r^2 + E_\vartheta^2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{p}{r^3}\right)^2 (4 \cos^2 \vartheta + \operatorname{sen}^2 \vartheta) \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{p}{r^3}\right)^2 (1 + 3 \cos^2 \vartheta). \end{aligned}$$

De aquí

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}. \quad (9.7)$$

Suponiendo en (9.7) $\vartheta = 0$, obtenemos la intensidad sobre el eje del dipolo:

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}. \quad (9.8)$$

El vector E_{\parallel} está dirigido según el eje del dipolo. Esto está de acuerdo con la simetría axial del problema. De la fórmula (9.5) se sigue que $E_r > 0$ cuando $\vartheta = 0$ y $E_r < 0$ cuando $\vartheta = \pi$. Esto significa que en cualquier caso la dirección del vector E_{\parallel} coincide con la dirección de $-q$ a $+q$ (es decir, con la dirección de \mathbf{p}). Por eso la fórmula (9.8) puede escribirse en forma vectorial:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mathbf{p}}{r^3}. \quad (9.9)$$

Suponiendo en (9.7) $\vartheta = \pi/2$, obtenemos la intensidad en la recta que pasa por el centro del dipolo y es perpendicular a su eje:

$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}. \quad (9.10)$$

De acuerdo con la fórmula (9.5), cuando $\vartheta = \pi/2$ la proyección E_r es nula. Por consiguiente, el vector E_{\perp} es paralelo al eje del dipolo. De la fórmula (9.6) se deduce que si $\vartheta = \pi/2$ la proyección E_{ϑ} es

positiva. Esto significa que el vector E_{\perp} está dirigido en el sentido del crecimiento del ángulo ϑ , o sea, antiparalelo al vector \mathbf{p} .

Para la intensidad del campo del dipolo es característica la circunstancia de que aquella disminuye con la distancia desde el dipolo como $1/r^3$, es decir, con más rapidez que la intensidad del campo de una carga puntual (que disminuye como $1/r^2$).

En la fig. 9.3 se muestran las líneas \mathbf{E} del campo de un dipolo. Según la fórmula (9.4), cuando $\vartheta = \pi/2$ el potencial se anula para todos los r . De este modo, todos los puntos del plano perpendicular al eje del dipolo que pasa por su punto medio tienen potencial nulo. Esto era previsible, puesto que las distancias desde las cargas $+q$ y $-q$ hasta cualquier punto de este plano son iguales.

Estudiamos ahora el comportamiento del dipolo en un campo eléctrico exterior. Si el dipolo se sitúa en un campo eléctrico homogéneo, las cargas $+q$ y $-q$ que forman el dipolo se encuentran bajo

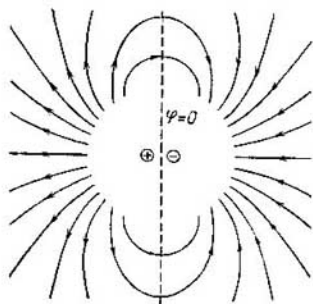


Fig. 9.3.

la acción de las fuerzas, iguales en magnitud pero de sentidos opuestos, F_1 y F_2 (fig. 9.4.). Estas fuerzas forman un par cuyo brazo es igual a $l \sin \alpha$, o sea, depende de la orientación del dipolo respecto del campo. El módulo de cada una de las fuerzas es igual a qE . Multiplicándolo por el brazo, obtenemos la magnitud del momento

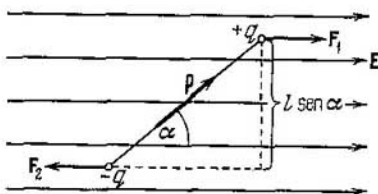


Fig. 9.4.

del par de fuerzas que actúa sobre el dipolo:

$$N = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha \quad (9.11)$$

(p es el momento eléctrico dipolar). Se comprende fácilmente que la fórmula (9.11) puede escribirse en forma vectorial:

$$N = [pE]. \quad (9.12)$$

El momento de fuerzas (9.12) tiende a hacer girar el dipolo de tal forma que su momento eléctrico p tome la dirección del campo.

Hallemos la energía potencial que posee el dipolo en el campo eléctrico exterior. De acuerdo con la fórmula (6.9) esta energía es

$$W_p = q\varphi_+ - q\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-). \quad (9.13)$$

Aquí φ_+ y φ_- son los valores del potencial del campo exterior en los puntos en que se sitúan las cargas $+q$ y $-q$.

El potencial del campo homogéneo disminuye linealmente en el sentido del vector E . Tomando esta dirección como eje x (fig. 9.5), se puede escribir que $E = E_x = -d\varphi/dx$. En la fig. 9.5 se ve que la diferencia $\varphi_+ - \varphi_-$ es igual al incremento del potencial en el segmento $\Delta x = l \cos \alpha$:

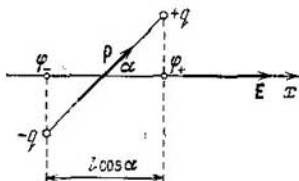


Fig. 9.5.

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{d\varphi}{dx} l \cos \alpha = -El \cos \alpha.$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (9.13), obtenemos que

$$W_p = -qEl \cos \alpha = -pE \cos \alpha. \quad (9.14)$$

En esta fórmula α es el ángulo entre los vectores p y E , por lo que aquella puede ser escrita en la forma

$$W_p = -pE \cos \alpha. \quad (9.15)$$

Advertimos que esta expresión no tiene en cuenta la energía de interacción de las cargas $+q$ y $-q$ que forman el dipolo.

La fórmula (9.15) la hemos obtenido suponiendo, para simplificar, que el campo era homogéneo. No obstante, esta fórmula es válida también para un campo no homogéneo.

Consideremos un dipolo que se encuentra en un campo no homogéneo que posea simetría respecto del eje x^1). Supongamos que el centro del dipolo se encuentra en dicho eje y que el momento eléctrico del dipolo forma con este último un ángulo α , distinto de $\pi/2$

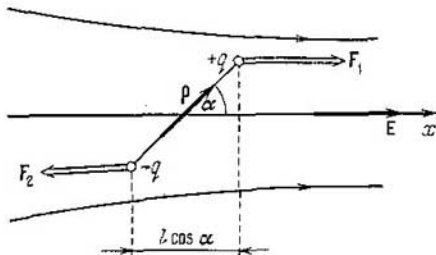


Fig. 9.6.

(fig. 9.6). En este caso las fuerzas que actúan sobre las cargas del dipolo no son iguales en magnitud. Por eso, además del momento de rotación, sobre el dipolo actuará una fuerza tendente a desplazarlo en el sentido del eje x . Para obtener el valor de esta fuerza aplicamos la fórmula (8.1), según la cual

$$F_x = -\partial W_p / \partial x, \quad F_y = -\partial W_p / \partial y, \quad F_z = -\partial W_p / \partial z.$$

De acuerdo con (9.14)

$$W_p(x, y, z) = -pE(x, y, z) \cos \alpha$$

(la orientación del dipolo con respecto al vector E la consideramos invariable: $\alpha = \text{const}$).

Para los puntos del eje x las derivadas de E respecto de y y z son nulas. Respectivamente $\partial W_p / \partial y = \partial W_p / \partial z = 0$. Por lo tanto sólo es distinta de cero la componente F_x de la fuerza. Esta componente

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha. \quad (9.16)$$

Este resultado puede obtenerse tomando en consideración que la intensidad del campo en los puntos en que se encuentran las cargas

¹⁾ Un caso particular del campo de este tipo es el campo de una carga puntual, si como eje x se toma una recta que pase por la carga.

$+q$ y $-q$ (véase la fig. 9.6) difiere en la magnitud $(\partial E/\partial x) l \cos \alpha$. Respectivamente, la diferencia entre las fuerzas que actúan sobre las cargas es igual a $q (\partial E/\partial x) \cdot l \cos \alpha$, lo que coincide con (9.16).

Cuando $\alpha < \pi/2$, la magnitud F_x determinada por la fórmula (9.16) es positiva. Esto significa que por la acción de la fuerza el dipolo es atraído hacia la región en que el campo es más intenso (véase la fig. 9.6). Si $\alpha > \pi/2$, el dipolo es empujado hacia fuera del campo.

En el caso representado en la fig. 9.7, para los puntos que hay sobre el eje y sólo es distinta de cero la derivada $\partial E/\partial y$. Por eso la fuerza que actúa sobre el dipolo viene determinada por la componente

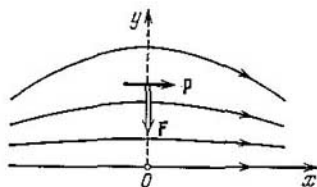


Fig. 9.7.

$$F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y} = p \frac{\partial E}{\partial y} (\cos \alpha = 1).$$

La derivada $\partial E/\partial y$ es negativa. Por consiguiente, la fuerza tiene la dirección indicada en la figura. En este caso el dipolo es atraído hacia el campo.

Advertimos que de un modo semejante a como $-\partial W_p/\partial x$ da la proyección sobre el eje x de la fuerza que actúa sobre el sistema, la derivada de la expresión (9.14) respecto de α , tomada con signo contrario, da la proyección del momento de rotación sobre el «eje» α : $N_\alpha = -pE \sin \alpha$. El signo menos se obtiene porque el «eje» α y el momento N tienen sentidos opuestos (véase la fig. 9.4).

§ 10. Campo de un sistema de cargas a grandes distancias

Tomemos un sistema de N cargas q_1, q_2, \dots, q_N , situadas en un volumen de dimensiones lineales del orden l , y estudiemos el campo creado por este sistema a distancias r grandes en comparación con l ($r \gg l$). Elegimos el origen de coordenadas O dentro del volumen ocupado por el sistema y determinamos la posición de las cargas por medio de los radios vectores r_i (fig. 10.1; para no recargar la figura sólo se muestra el radio vector de la i -ésima carga).

El potencial en el punto determinado por el radio vector r es

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (10.1)$$

En virtud de la pequeñez de r_i comparado con r , se puede suponer que

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = r - \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{e}_r = r(1 - \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{e}_r / r)$$

(compárese con (9.1)). La sustitución de esta expresión en la fórmula (10.1) da

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r} \frac{1}{1 - \mathbf{r}_i \mathbf{e}_r / r}. \quad (10.2)$$

Aplicando la fórmula

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x,$$

válida cuando $x \ll 1$, transformamos la expresión (10.2) del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r}_i \mathbf{e}_r}{r} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_i q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\sum_i q_i \mathbf{r}_i) \mathbf{e}_r}{r^2}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

El primer término de la expresión obtenida es el potencial del campo de una carga puntual de magnitud $q = \sum q_i$ (compárese con (6.7)).

El segundo término tiene la misma forma que la expresión que determina el potencial del campo de un dipolo, desempeñando el papel del momento eléctrico dipolar la magnitud

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i. \quad (10.4)$$

Esta magnitud recibe el nombre de *momento eléctrico dipolar* del sistema de cargas. Es fácil comprobar que en el caso de un dipolo la fórmula (10.4)

se transforma en la conocida expresión $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$.

Si la carga sumaria del sistema es nula ($\sum q_i = 0$), el valor del momento dipolar no depende del origen de coordenadas que se elija. Para cerciorarnos de esto tomemos dos orígenes de coordenadas arbitrarios O y O' (fig. 10.2). Entre los radios vectores de la i -ésima carga trazados desde estos puntos existe la relación

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{b} + \mathbf{r}_i \quad (10.5)$$

(lo que es el vector \mathbf{b} se ve claramente en la figura). Teniendo en cuenta (10.5), el momento dipolar en el sistema de origen O' es

$$\mathbf{p}' = \sum q_i \mathbf{r}'_i = \sum q_i (\mathbf{b} + \mathbf{r}_i) = \mathbf{b} \sum q_i + \sum q_i \mathbf{r}_i.$$

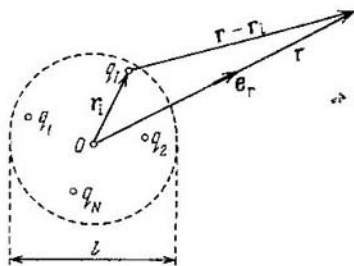


Fig. 10.1.

El primer sumando es igual a cero (puesto que $\sum q_i = 0$), y el segundo es igual a \mathbf{p} , momento dipolar en el sistema de coordenadas de origen en el punto O . De este modo obtenemos que $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$.

La expresión (10.3) representa esencialmente los primeros términos del desarrollo de la función (10.1) en serie de potencias de las magnitudes r_i/r . Si $\sum q_i \neq 0$, la aportación fundamental al potencial la hace el primer término de la fórmula (10.3) (el segundo término decrece como $1/r^2$ y por eso es mucho menor que el primero). Para un sistema eléctricamente neutro ($\sum q_i = 0$) el primer término es

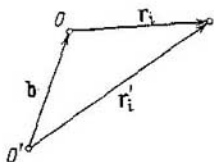


Fig. 10.2.

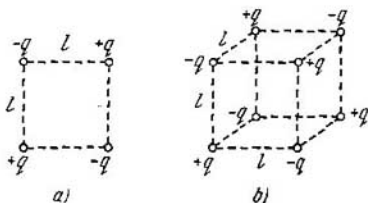


Fig. 10.3.

nulo y el potencial está determinado principalmente por el segundo término de la fórmula (10.3). Así, en particular, ocurre en el caso del campo de un dipolo.

Para el sistema de cargas representado en la fig. 10.3, a, llamado *cuadrupolo*, tanto $\sum q_i$ como \mathbf{p} son nulos, de modo que la fórmula (10.3) da un valor nulo del potencial. En realidad el campo de un cuadrupolo, aunque mucho más débil que el del dipolo (con las mismas q y l), es distinto de cero. El potencial del campo creado por un cuadrupolo se determina principalmente por el tercer término del desarrollo, el cual es proporcional a $1/r^3$. Para obtener este término hay que tener en cuenta las magnitudes del orden $(r_i/r)^2$, que despreciamos al deducir la fórmula (10.3). Para el sistema de cargas que representa la fig. 10.3, b, llamado *octopolo*, también es nulo el tercer término del desarrollo. El potencial del campo de tal sistema se determina por el cuarto término del desarrollo, que es proporcional a $1/r^4$.

Advertimos que la magnitud, igual a $\sum q_i$, que figura en el numerador del primer término de la fórmula (10.3), se llama *monopolo* o *multipolo de orden nulo*; el dipolo se denomina *multipolo de primer orden*; el cuadrupolo, *multipolo de segundo orden* y así sucesivamente.

De esta forma, en el caso general, el campo de un sistema de cargas a grandes distancias podemos figurárnoslo como la superposición de los campos creados por los multipolos de los distintos órdenes, o sea, del monopolo, dipolo, cuadrupolo, octopolo, etc.

§ 11. Descripción de las propiedades de los campos vectoriales

Para poder proseguir el estudio del campo eléctrico es necesario conocer el formalismo matemático que se utiliza para describir las propiedades de los campos vectoriales. Este formalismo se llama *análisis vectorial*. En este párrafo vamos a estudiar los conceptos fundamentales y algunas fórmulas del análisis vectorial, así como la demostración de los principales teoremas de dicho análisis: el de Ostrogradski—Gauss y el de Stokes.

Las magnitudes que se emplean en el análisis vectorial son más comprensibles en el caso del campo del vector velocidad de una corriente de líquido. Por eso vamos a introducir estas magnitudes considerando una corriente de líquido ideal incompresible y luego extenderemos los resultados obtenidos a los campos vectoriales de cualquier naturaleza.

Uno de los conceptos del análisis vectorial ya lo conocemos. Este es el de *gradiente*, que se utiliza para caracterizar los campos escalares. Si a cada punto P de coordenadas x, y, z , se equipara el valor de una magnitud escalar $\varphi = \varphi(x, y, z)$, se dice que está dado el campo escalar φ . Se llama *gradiente* de la magnitud φ el vector

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (11.1)$$

El incremento de la función φ para un desplazamiento en el segmento $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$ es

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

que se puede representar en la forma

$$d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l}. \quad (11.2)$$

Ahora pasamos a establecer las características de los campos vectoriales.

Flujo de un vector. Supongamos que una corriente de líquido se caracteriza por el campo del vector velocidad. El volumen del líquido que pasa en la unidad de tiempo a través de cierta superficie imaginaria S , se llama *flujo del líquido* a través de dicha superficie. Para hallar el flujo dividimos la superficie en elementos de superficie de magnitud ΔS . En la fig. 11.1 se ve que durante el tiempo Δt a través de un elemento ΔS pasa un volumen de líquido

$$\Delta V = \Delta S \cdot \cos \alpha \cdot v \Delta t.$$

Dividiendo este volumen por el intervalo de tiempo Δt , hallamos el flujo a través de la superficie ΔS :

$$\Delta \Phi = \Delta V / \Delta t = \Delta S v \cos \alpha.$$

Pasando a las diferenciales obtenemos que

$$d\Phi = v \cos \alpha \cdot dS. \quad (11.3)$$

La fórmula (11.3) se puede escribir también por otros dos procedimientos. Primero, si se tiene en cuenta que $v \cos \alpha$ da la proyección del vector velocidad sobre la normal \mathbf{n} a la superficie dS , puede representarse (11.3) en la forma

$$d\Phi = v_n dS. \quad (11.4)$$

Segundo, se puede introducir el vector $d\mathbf{S}$, cuyo módulo es igual a la magnitud de la superficie dS y su dirección coincide con la de la normal \mathbf{n} a dicha superficie:

$$d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}.$$

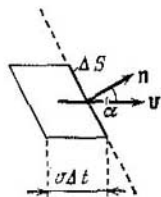


Fig. 11.1.

Como quiera que la elección del sentido del vector \mathbf{n} es convencional (puede dirigirse tanto hacia un lado de la superficie como hacia el otro), $d\mathbf{S}$ no es un vector verdadero, sino un pseudovector. El ángulo α en la fórmula (11.3) es el formado por los vectores \mathbf{v} y $d\mathbf{S}$. Por consiguiente, esta fórmula se puede escribir en la forma

$$d\Phi = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (11.5)$$

Sumando los flujos a través de todos los elementos de superficie en que dividimos la superficie S , obtenemos el flujo del líquido a través de S :

$$\Phi_v = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_S v_n dS. \quad (11.6)$$

La expresión análoga, escrita para un campo vectorial arbitrario \mathbf{a} , es decir, la magnitud

$$\Phi_a = \int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_S a_n dS, \quad (11.7)$$

se llama *flujo del vector a a través de la superficie S*. De acuerdo con esta definición, el flujo del líquido puede denominarse flujo del vector \mathbf{v} a través de la correspondiente superficie (véase (11.6)).

El flujo de un vector es una magnitud algebraica y su signo depende de cómo se elija el sentido de las normales a los elementos de superficie en que se divide la superficie S al calcular el flujo. La inversión de los sentidos de las normales hace que varíe el signo de a_n y, por lo tanto, el de la magnitud (11.7). En el caso de superficies cerradas se acostumbra calcular el flujo que «sale» hacia fuera de la región abarcada por la superficie. Respectivamente, en calidad

de \mathbf{n} supondremos siempre en lo sucesivo una normal dirigida hacia fuera (es decir, exterior).

Al flujo de un vector se le puede dar una interpretación geométrica clara. Para esto se representa el campo vectorial por un sistema de líneas a construídas de tal modo que la densidad de líneas en cada lugar sea numéricamente igual al módulo del vector \mathbf{a} en este punto del campo (compárese con la regla para la construcción de las líneas del vector \mathbf{E} , expuesta al final del § 5). Se halla el número ΔN de intersecciones de las líneas del campo con la superficie imaginaria ΔS . En la fig. 11.2 se ve que este número es igual a la densidad de líneas (o sea, a) multiplicada por $\Delta S_{\perp} = \Delta S \cos \alpha$,

$$\Delta N (=) a \Delta S \cos \alpha = a_n \Delta S.$$

Se trata únicamente de la igualdad numérica entre ΔN y $a_n \Delta S$. Por eso el signo igual se pone entre paréntesis. De acuerdo con (11.7), la expresión $a_n \Delta S$ representa de por sí $\Delta \Phi_a$, es decir, el flujo del vector \mathbf{a} a través de la superficie ΔS . De este modo,

$$\Delta N (=) \Delta \Phi_a. \quad (11.8)$$

Para que el signo de ΔN coincida con el de $\Delta \Phi_a$ hay que considerar positivas las intersecciones en las cuales el ángulo α entre el sentido positivo de las líneas del campo y la normal a la superficie es agudo. Si el ángulo α es obtuso la intersección debe considerarse negativa. Para la superficie representada en la fig. 11.2, las tres intersecciones son positivas: $\Delta N = +3$ ($\Delta \Phi_a$ también es positivo en este caso, puesto que $a_n > 0$). Si el sentido de la normal se invierte en la fig. 11.2, las intersecciones serán negativas ($\Delta N = -3$) y el flujo $\Delta \Phi_a$ también será negativo.

Efectuando la suma de la expresión (11.8) sobre la superficie imaginaria finita S , obtenemos la relación

$$\Phi_a (=) \sum \Delta N = N_+ - N_-, \quad (11.9)$$

donde se entiende por N_+ el número total de intersecciones positivas de las líneas del campo con la superficie S , y por N_- , el número total de intersecciones negativas.

Puede causar confusión la circunstancia de que como el flujo, por lo general, se expresa por un número no entero, el número de intersecciones de las líneas del campo con la superficie, que se equipara al campo, tampoco será entero. Pero esto no debe desconcertar. Las líneas del campo son una imagen puramente convencional y no tiene ningún sentido físico.

Tomemos una superficie imaginaria en forma de tira de papel, cuya parte inferior esté torcida respecto de la superior un ángulo π

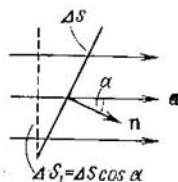


Fig. 11.2.

(fig. 11.3). El sentido de las normales debe elegirse del mismo modo para toda la superficie. Por eso si en la parte superior de la tira la normal positiva se dirige hacia la derecha, en la parte inferior estará dirigida la normal hacia la izquierda. Respectivamente, las intersecciones representadas en la fig. 11.3 de las líneas del campo con la mitad superior de la superficie deberán considerarse positivas, y con la mitad inferior, negativas.

Para una superficie cerrada (fig. 11.4) se considera positiva la normal exterior. Por eso las intersecciones correspondientes a la

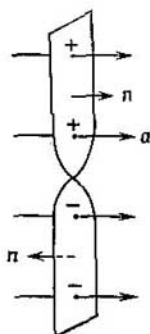


Fig. 11.3.

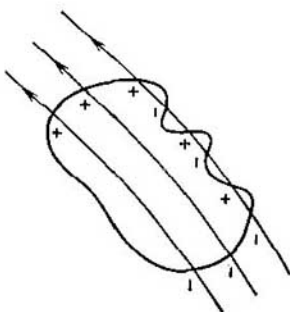


Fig. 11.4.

salida hacia fuera de las líneas (en este caso el ángulo α es agudo), deben tomarse con signo más, y las intersecciones que se producen cuando las líneas entran dentro (en este caso el ángulo α es obtuso), hay que tomarlas con signo menos.

Por la fig. 11.4 se ve que en el caso en que las líneas pasan de un modo continuo por dentro de una superficie cerrada, cada línea, atravesando la superficie, entra dentro y sale fuera del recinto abarcado por ella un número de veces igual. Como resultado, el flujo del vector correspondiente a través de la superficie es nulo. Se comprende fácilmente que en el caso en que las líneas del campo se interrumpen dentro del recinto limitado por la superficie, el flujo del vector a través de la superficie cerrada será numéricamente igual a la diferencia entre el número de líneas que se inician dentro de dicho recinto (N_{intc}) y el número de líneas que finalizan dentro de él (N_{fin}):

$$\Phi_a (=) N_{\text{intc}} - N_{\text{fin}}. \quad (11.10)$$

El signo del flujo depende de cuál de estos números es mayor. Si $N_{\text{intc}} = N_{\text{fin}}$ el flujo es nulo.

Divergencia. Supongamos dado el campo del vector velocidad de un líquido continuo incompresible. Tomemos en el entorno del punto P una superficie cerrada imaginaria S (fig. 11.5). Si en el volumen V limitado por esta superficie no mana ni desaparece líquido, el flujo que sale fuera a través de la superficie será, evidentemente, nulo. Si el flujo de líquido Φ_v no es nulo, esto significará que dentro del volumen limitado por la superficie hay *manantiales* o *sumideros* de líquido, es decir, puntos por los cuales el líquido entra en el volumen (manantiales) o sale de él (sumideros). La magnitud del flujo determina la potencia algebraica total de los manantiales y sumideros¹⁾. Si los manantiales predominan sobre los sumideros, el flujo será positivo, y si el predominio es de los sumideros, negativo.

La razón del flujo Φ_v al volumen V del cual sale,

$$\Phi_v/V, \quad (11.11)$$

da la potencia específica media de los manantiales comprendidos en el volumen V . En el límite, cuando V tiende a cero, o sea, cuando el volumen V se contrae hacia el punto P , la expresión (11.11) da la potencia específica de los manantiales que hay en el punto P , la cual se llama *divergencia* del vector v (y se designa por $\text{div } v$). Así,

$$\text{div } v = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_v}{V}.$$

De un modo análogo se determina la divergencia de cualquier vector a :

$$\text{div } a = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_a}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint a \, dS. \quad (11.12)$$

La integral se toma sobre la superficie cerrada S que rodea el punto P ²⁾; V es el volumen limitado por esta superficie. Como se efectúa el paso $V \rightarrow P$, en el cual S tiende a cero, es de suponer que la expresión (11.12) no pueda depender de la forma de la superficie. Esta suposición se confirma por medio del cálculo riguroso.

Rodeemos el punto P de una superficie esférica de radio r extremadamente pequeño (fig. 11.6). En virtud de la pequeñez de r , el volumen V limitado por la superficie esférica también será muy pequeño. Por eso, con alto grado de exactitud se puede considerar

¹⁾ Se entiende por potencia de un manantial (sumidero) el volumen de líquido que mana (es absorbido) en la unidad de tiempo. El sumidero se puede considerar como un manantial de potencia negativa.

²⁾ La circunferencia que lleva el signo integral indica que la integración se efectúa sobre una superficie cerrada.

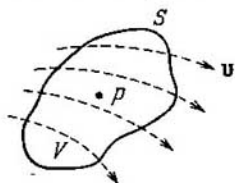


Fig. 11.5

que el valor de $\text{div } \mathbf{a}$ dentro de los límites del volumen V es constante²). En este caso, de acuerdo con (11.12), se puede escribir que

$$\text{div } \mathbf{a} \approx \frac{\Phi_a}{V},$$

donde Φ_a es el flujo del vector \mathbf{a} a través de la superficie que limita el volumen V . Según (11.10), Φ_a es igual a N_{inic} , es decir, al número de líneas del vector \mathbf{a} que se inician dentro de V , si $\text{div } \mathbf{a}$ en el punto P es positiva, o a N_{fin} , número de líneas \mathbf{a} que finalizan dentro de V , tomado con signo menos, si la $\text{div } \mathbf{a}$ en el punto P es negativa.

Teniendo esto en cuenta puede escribirse que

$$\text{div } \mathbf{a} \approx \frac{N_{\text{inic}}}{V} \quad \text{o} \quad \text{div } \mathbf{a} = \frac{-N_{\text{fin}}}{V}.$$

La relación N_{inic}/V (o $-N_{\text{fin}}/V$) da el número de puntos por unidad de volumen en los cuales comienzan (o finalizan) las líneas del vector \mathbf{a} .

De este modo, $\text{div } \mathbf{a}$ es numéricamente igual a la densidad de puntos

en que se inician las líneas del vector \mathbf{a} (si $\text{div } \mathbf{a} > 0$) o a la densidad de puntos, tomada con signo menos, en que finalizan las líneas \mathbf{a} (si $\text{div } \mathbf{a} < 0$).

De lo dicho se infiere que en el entorno más próximo de un punto de divergencia positiva comienzan las líneas del vector \mathbf{a} . Desde este punto «divergen» las líneas del campo; este punto es un «manantial» de campo (fig. 11.6, *a*). En el entorno de un punto de divergencia negativa finalizan las líneas del vector \mathbf{a} . Hacia este punto «convergen» las líneas del campo; este punto es un «sumidero» de campo (fig. 11.6, *b*). Cuanto mayor sea el valor de $\text{div } \mathbf{a}$, tanto mayor será el número de líneas que se inicien o finalicen en el entorno del punto dado.

De la definición (11.12) se sigue que la divergencia es una función escalar de las coordenadas que determinan las posiciones de los puntos en el espacio (concretamente, una función del punto). La definición (11.12) es la más general, independiente del tipo del sistema de coordenadas.

Hallemos la expresión de la divergencia en un sistema de coordenadas cartesianas. Consideremos en el entorno del punto $P(x, y, z)$ un pequeño volumen en forma de paralelepípedo con las aristas perpendiculares a los ejes de coordenadas (fig. 11.7). El flujo del vector \mathbf{a} a través de la superficie del paralelepípedo está formado por los que fluyen a través de cada una de sus caras por separado.

²) Se supone que el valor de $\text{div } \mathbf{a}$ varía, al pasar de un punto a otro, de un modo continuo, sin saltos.

Calculemos el flujo a través del par de caras perpendiculares al eje x (en la fig. 11.7 estas caras se indican con rayado oblicuo y se señalan con las cifras 1 y 2). La normal exterior n_2 a la cara 2 tiene el mismo sentido que el eje x . Por consiguiente, para los puntos de esta cara $a_{n_2} = a_x$. La normal exterior n_1 a la cara 1 tiene sentido contrario al del eje x . Por eso, para los puntos de esta cara $a_{n_1} = -a_x$. El flujo a través de la cara 2 se puede escribir en la forma

$$a_{x_2} \Delta y \Delta z,$$

donde a_{x_2} es el valor de a_x promediado por la superficie 2. El flujo a través de la cara 1 será igual a

$$-a_{x_1} \Delta y \Delta z,$$

siendo a_{x_1} el valor medio de a_x para la cara 1. El flujo total a través de las caras 1 y 2 se determina por la expresión

$$(a_{x_2} - a_{x_1}) \Delta y \Delta z. \quad (11.13)$$

La diferencia $a_{x_2} - a_{x_1}$ es el incremento del valor medio (por cara) de a_x al desplazarse a lo largo del eje x en Δx . En virtud de la pequeñez del paralelepípedo (recordemos que vamos a hacer que sus dimensiones tiendan a cero), este incremento podemos representarlo en la forma $(\partial a_x / \partial x) \Delta x$, donde el valor de $\partial a_x / \partial x$ se toma en el punto P ¹⁾. Entonces (11.13) se transforma en

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta V.$$

Mediante razonamientos análogos pueden obtenerse para los flujos a través de los pares de caras perpendiculares a los ejes y y z las expresiones

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} \Delta V \quad \text{y} \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} \Delta V.$$

De este modo el flujo total a través de toda la superficie cerrada se determina por la expresión

$$\Phi_a = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \Delta V.$$

¹⁾ La inexactitud que admitimos aquí desaparece al contraer el volumen hacia el punto P como se hace al pasar al límite.

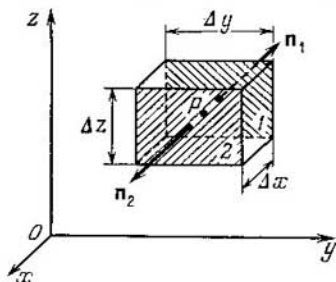


Fig. 11.7.

Dividiendo esta expresión por ΔV , hallamos la divergencia del vector \mathbf{a} en el punto $P(x, y, z)$:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (11.14)$$

Teorema de Ostrogradski—Gauss. Conociendo la divergencia de un vector \mathbf{a} en cada punto del espacio se puede calcular el flujo de este vector \mathbf{a} a través de cualquier superficie cerrada de dimensiones

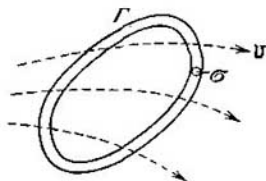


Fig. 11.8.

finitas. Primeramente vamos a hacer esto para el flujo del vector \mathbf{v} (flujo de líquido). El producto de $\operatorname{div} \mathbf{v}$ por dV da la potencia de los manantiales de líquido comprendidos en el volumen dV . La suma de estos productos, o sea, $\int \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot dV$ de la potencia algebraica total de los manantiales comprendidos en el volumen V , sobre el cual se efectúa la integración.

Como consecuencia de la incompresibilidad del líquido, la potencia total de los manantiales debe ser igual al flujo de líquido que sale fuera a través de la superficie S que limita el volumen V . Así, llegamos a la relación

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot dV$$

Una relación análoga se cumple para un campo vectorial de cualquier naturaleza:

$$\oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot dV. \quad (11.15)$$

Esta relación lleva el nombre de *teorema de Ostrogradski—Gauss*. La integral de la parte izquierda de la relación se calcula sobre una superficie cerrada S arbitraria, y la integral de la parte derecha se extiende al volumen V limitado por dicha superficie.

Circulación. Recurramos otra vez a la corriente de un líquido incompresible ideal. Imaginémosnos una línea cerrada o contorno Γ . Supongamos que por un procedimiento cualquiera congelamos instantáneamente el líquido en todo el volumen a excepción de un canal cerrado muy fino, de sección constante, que contiene el contorno Γ (fig. 11.8). En dependencia del carácter del campo del vector velocidad, el líquido que hay en el canal así formado estará en reposo o se moverá a lo largo del contorno (circulará) en uno de los dos sentidos posibles. Como medida de este movimiento tomamos una magnitud igual al producto de la velocidad del líquido en el canal por la longi-

tud del contorno l . Esta magnitud recibió el nombre de *circulación* del vector v por el contorno Γ . Así,

$$\text{circulación } v \text{ por } \Gamma = \nu l$$

(como el canal, por suposición, tiene sección constante, el módulo de la velocidad $v = \text{const}$).

En el instante de la solidificación de las paredes, en cada una de las partículas de líquido que hay en el canal se anulará la componente de la velocidad perpendicular a la pared y quedará únicamente la componente de la velocidad tangencial al contorno, es decir, v_t . Con esta componente está ligado el impulso dp_t cuyo módulo, para una partícula del líquido contenido en un trozo de canal de longitud dl , tiene la magnitud $\rho \sigma v_t dl$ (ρ es la densidad del líquido, y σ , el área de la sección transversal del canal). Como el líquido es ideal, la acción de las paredes sólo puede hacer que varíe la dirección del vector dp_t , pero no su magnitud. La interacción entre las partículas del líquido origina una redistribución del impulso entre ellas tal, que iguala las velocidades de todas las partículas. Con esto la suma algebraica de las componentes tangenciales de los impulsos no puede variar: el impulso adquirido por una de las partículas que interaccionan es igual al impulso que pierde otra. Esto significa que

$$\rho \sigma \nu l = \int_{\Gamma} \rho \sigma v_t dl,$$

donde ν es la velocidad de la circulación, y v_t , la componente tangencial de la velocidad del líquido en el volumen σdl en el instante anterior a la solidificación de las paredes del canal¹⁾. Simplificando por $\rho \sigma$, obtenemos que

$$\text{circulación } v \text{ por } \Gamma = \nu l = \oint_{\Gamma} v_t dl.$$

De un modo análogo se determina la circulación de cualquier vector a por un contorno cerrado Γ arbitrario:

$$\text{circulación } a \text{ por } \Gamma = \oint_{\Gamma} a dl = \oint_{\Gamma} a_t dl. \quad (11.16)$$

Puede parecer que, para que la circulación sea distinta de cero, las líneas vectoriales deben ser cerradas o por lo menos curvadas en la dirección del rídeo del contorno. De lo erróneo de esta suposición es fácil convencerse. Consideremos una corriente laminar del líquido de un río. La velocidad del líquido es nula junto al fondo y va aumen-

¹⁾ Recordaremos que la circunferencia que lleva el signo integral indica que la integración se efectúa a lo largo del contorno cerrado.

tando a medida que se aproxima a la superficie del agua (fig. 11.9). Las líneas de corriente (líneas del vector \mathbf{v}) son rectas. A pesar de esto, la circulación del vector \mathbf{v} por el contorno representado con línea de trazos es, evidentemente, distinta de cero. Al mismo tiempo, en un campo con las líneas curvadas la circulación puede ser nula.

La circulación tiene la propiedad de la aditividad. Esto quiere decir que la suma de las circulaciones por los contornos Γ_1 y Γ_2 , que limitan las superficies contiguas S_1 y S_2 (fig. 11.10) es igual a la circulación por el contorno Γ que limita la superficie S , que es

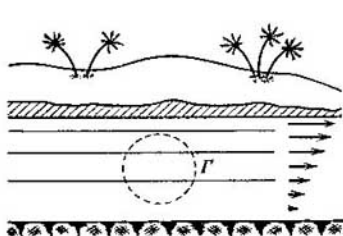


Fig. 11.9.

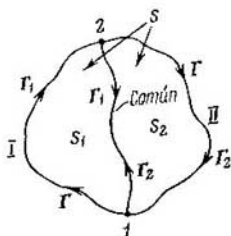


Fig. 11.10.

la suma de las superficies S_1 y S_2 . En efecto, la circulación C_1 por el contorno que limita la superficie S_1 se puede representar como una suma de integrales:

$$C_1 = \oint_{\Gamma_1} \mathbf{a} \, dl = \int_{1}^{2} \mathbf{a} \, dl + \int_{2}^{1} \mathbf{a} \, dl. \quad (11.17)$$

(Común)

La primera integral se toma siguiendo la parte I del contorno exterior, y la segunda, siguiendo el límite entre las superficies S_1 y S_2 en el sentido 2—1.

Análogamente, la circulación C_2 por el contorno que limita la superficie S_2 es

$$C_2 = \oint_{\Gamma_2} \mathbf{a} \, dl = \int_{2}^{1} \mathbf{a} \, dl + \int_{1}^{2} \mathbf{a} \, dl. \quad (11.18)$$

(II) (Común)

La primera igualdad se toma siguiendo la parte II del contorno exterior, y la segunda, siguiendo el límite entre las superficies S_1 y S_2 en el sentido 1—2.

La circulación por el contorno que limita la superficie sumaria S puede representarse en la forma

$$C = \oint_{\Gamma} \mathbf{a} \, d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{a} \, d\mathbf{l} + \int_2^1 \mathbf{a} \, d\mathbf{l}. \quad (11.19)$$

Los segundos sumandos de las expresiones (11.17) y (11.18) difieren únicamente en el signo. Por eso la suma de estas expresiones resulta ser igual a la (11.19). De este modo

$$C = C_1 + C_2. \quad (11.20)$$

La relación demostrada no depende de la forma de las superficies y es válida para cualquier número de sumandos. Por consiguiente, si una superficie no cerrada arbitraria S se divide en un gran número de superficies elementales ΔS^i (fig. 11.11), la circulación por el contorno que limita S puede representarse como la suma de las circulaciones elementales ΔC por los contornos que limitan los ΔS :

$$C = \sum \Delta C_i. \quad (11.21)$$

Rotor. La aditividad de la circulación permite introducir el concepto de circulación específica, es decir, considerar la razón de la circulación C a la magnitud de la superficie S «contorneada» por la circulación. Siendo finitas las dimensiones de la superficie S , la relación C/S da el valor medio de la circulación específica. Este valor caracteriza las propiedades del campo promediadas por la superficie S . Para obtener la característica del campo en un punto P hay que disminuir las dimensiones de la superficie contrayéndola hacia el punto P . Con esto la relación C/S tiende a cierto límite que caracteriza las propiedades del campo en el punto P .

Así, tomemos un contorno imaginario Γ que se encuentre en un plano que pase por el punto P y estudiemos la expresión

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{C_a}{S}, \quad (11.22)$$

en la que C_a es la circulación del vector \mathbf{a} por el contorno Γ ; y S es el área abarcada por el contorno. El cálculo del límite para un plano orientado arbitrariamente (11.22) no puede servir de característica

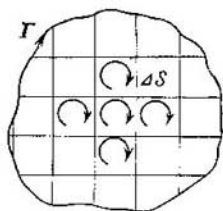


Fig. 11.11.

¹⁾ Para la simplicidad las superficies elementales se muestran en la figura en la forma de rectángulos. En realidad su forma puede ser absolutamente arbitraria.

completa del campo en el punto P , ya que la magnitud de este límite depende no sólo de las propiedades del campo en el punto P , sino también de la orientación del contorno en el espacio. Esta orientación puede ser dada por el sentido positivo de la normal \mathbf{n} al plano del contorno (se considera positiva la normal relacionada con el sentido del recorrido del contorno al efectuar la integración siguiendo la regla del sacacorchos). Determinando el límite (11.22) en un mismo punto P para distintas direcciones de \mathbf{n} obtenemos valores diferentes, los cuales sólo diferirán en el signo cuando los sentidos sean opuestos (la inversión del sentido de \mathbf{n} equivale al cambio del sentido en que

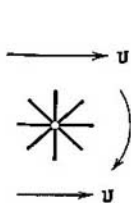


Fig. 11.12.

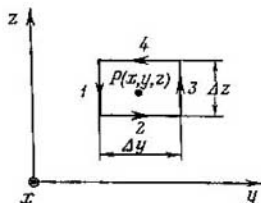


Fig. 11.13.

se recorre el contorno al efectuar la integración, lo que sólo hace que varíe el signo de la circulación). Para cierta dirección de la normal, la magnitud (11.22) en el punto dado resulta ser máxima.

De este modo, la magnitud (11.22) se comporta como la proyección de cierto vector sobre la dirección de la normal al plano del contorno a lo largo del cual se toma la circulación. El valor máximo de la magnitud (11.22) determina el módulo de este vector y la dirección de la normal positiva \mathbf{n} , con la cual se alcanza el máximo, da la dirección del vector. Este vector se llama *rotor* (o *rotación*) del vector \mathbf{a} . Se designa con el símbolo $\text{rot } \mathbf{a}$. Utilizando esta notación se puede escribir la expresión (11.22) en la forma

$$(\text{rot } \mathbf{a})_n = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{C_a}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}. \quad (11.23)$$

Una idea clara del rotor de un vector \mathbf{v} se puede obtener figurándose una pequeña y ligera rueda de paletas situada en un punto dado de un líquido que corre (fig. 11.12). En aquellos sitios en que el rotor no es nulo, la rueda de paletas girará con tanta más velocidad cuanto mayor sea la magnitud de la proyección del rotor sobre el eje de dicha rueda.

La expresión (11.23) determina el vector $\text{rot } \mathbf{a}$. Esta definición es la más general y no depende del tipo de sistema de coordenadas. Para hallar la expresión de la proyección del vector $\text{rot } \mathbf{a}$ sobre los

ejes de un sistema de coordenadas cartesianas hay que determinar los valores de la magnitud (11.23) para las orientaciones de la superficie S en que la normal n a ella coincide con uno de los ejes x , y , z . Si, por ejemplo, n se dirige a lo largo del eje x , entonces (11.23) se transforma en $(\text{rot } \mathbf{a})_x$. El contorno Γ se encuentra en este caso en un plano paralelo al plano coordenado yz . Tomemos este contorno en forma de rectángulo de lados Δy y Δz (fig. 11.13); en esta figura el eje x está dirigido hacia nosotros; el sentido del recorrido que se indica en la figura está ligado con el sentido del eje x por medio de la regla del sacacorchos). El trozo I del contorno tiene sentido contrario al del eje z . Por eso a_l coincide en esta parte con $-a_z$. Razonando análogamente hallamos que a_l en los trozos 2, 3 y 4 es igual respectivamente a a_y , a_z y $-a_y$. Por lo tanto, la circulación se puede representar en la forma

$$(a_{z3} - a_{z1}) \Delta z - (a_{y4} - a_{y2}) \Delta y, \quad (11.24)$$

donde a_{z3} y a_{z1} son los valores medios de a_z en los trozos 3 y 1 respectivamente, a_{y4} y a_{y2} , los valores medios de a_y en los trozos 4 y 2.

La diferencia $a_{z3} - a_{z1}$ es el incremento del valor medio de a_z en el trozo Δz , al desplazarse este trozo en el sentido del eje y en Δy . En virtud de la pequeñez de Δy y Δz , este incremento se puede representar en la forma $(\partial a_z / \partial y) \Delta y$, en la que el valor de $\partial a_z / \partial y$ se toma en el punto P^1). Análogamente, la diferencia $a_{y4} - a_{y2}$ se puede representar en la forma $(\partial a_y / \partial z) \Delta z$. Sustituyendo estas expresiones en (11.24) y sacando fuera de paréntesis el factor común, obtenemos la expresión de la circulación

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \Delta S,$$

en la que ΔS es el área del contorno. Dividiendo la circulación por ΔS hallamos la expresión de la proyección de rot \mathbf{a} sobre el eje x :

$$(\text{rot } \mathbf{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}. \quad (11.25)$$

Mediante razonamientos análogos se puede hallar que

$$(\text{rot } \mathbf{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad (11.26)$$

$$(\text{rot } \mathbf{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \quad (11.27)$$

Es fácil comprobar que cualquiera de las expresiones (11.25)–(11.27) se puede obtener de la anterior (para la (11.25) debe considerarse anterior la (11.27)) por medio de la llamada permutación

¹⁾ La inexactitud que admitimos aquí desaparece durante la contracción del contorno hacia el punto P que se realiza al pasar al límite.

cíclica de las coordenadas, es decir, de la sustitución de las coordenadas efectuada según el esquema



Así, el rotor del vector \mathbf{a} se determina en el sistema de coordenadas cartesianas por la expresión siguiente:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right). \quad (11.28)$$

Luego indicaremos un procedimiento más elegante de escritura de esta expresión.

Teorema de Stokes. Conociendo el rotor del vector \mathbf{a} en cada punto de cierta superficie S (que no es necesario que sea plana), se puede calcular la circulación de este vector \mathbf{a} a lo largo del contorno Γ que limita S (el contorno también puede no ser plano). Para esto se divide la superficie en elementos muy pequeños ΔS . En virtud de su pequeñez, estos elementos se pueden considerar planos. Por eso, de acuerdo con (11.23), la circulación del vector \mathbf{a} a lo largo del contorno que limita ΔS se puede representar en la forma

$$\Delta C \approx (\text{rot } \mathbf{a})_n \Delta S = \text{rot } \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{S}, \quad (11.29)$$

donde \mathbf{n} es la normal positiva al elemento de superficie ΔS .

De acuerdo con la fórmula (11.21), efectuando la suma de la expresión (11.29) extendida a todos los elementos ΔS , obtenemos la circulación del vector \mathbf{a} a lo largo del contorno Γ que limita S :

$$C = \sum \Delta C \approx \sum \text{rot } \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{S}.$$

Realizando el paso al límite, con el cual todos los elementos ΔS tienden a cero (y su número aumenta indefinidamente), llegamos a la fórmula

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \text{rot } \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}. \quad (11.30)$$

La relación (11.30) se conoce con el nombre de *teorema de Stokes*. Su sentido consiste en que *la circulación del vector \mathbf{a} a lo largo de un contorno arbitrario Γ , es igual al flujo del vector $\text{rot } \mathbf{a}$ a través de la superficie arbitraria S limitada por dicho contorno.*

Operador nabla. La escritura de las fórmulas del análisis vectorial se simplifica y facilita mucho introduciendo el operador vectorial diferencial que se representa con el símbolo ∇ (nabla) y se llama

operador nabla u operador de Hamilton. Se entiende por este operador un vector cuyos componentes son $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$. Por consiguiente,

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (11.31)$$

Este vector no tiene sentido de por sí. Lo adquiere en combinación con una función escalar o vectorial a la cual multiplica simbólicamente. Así, si el vector ∇ se multiplica por un escalar φ , se obtiene el vector

$$\nabla\varphi = e_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + e_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + e_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad (11.32)$$

que es el gradiente de la función φ (véase (11.1)).

Del producto escalar del vector ∇ por un vector \mathbf{a} , resulta el escalar

$$\nabla\mathbf{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (11.33)$$

que no es más que la divergencia del vector \mathbf{a} (véase (11.14)).

Finalmente, si se efectúa el producto vectorial de ∇ por \mathbf{a} , se obtiene un vector cuyos componentes: $[\nabla\mathbf{a}]_x = \nabla_y a_z - \nabla_z a_y = \partial a_z/\partial y - \partial a_y/\partial z$, etc., coinciden con los componentes del rot \mathbf{a} (véase (11.25)–(11.27)). Por lo tanto, con ayuda del determinante, el producto vectorial se puede escribir así

$$\text{rot } \mathbf{a} = [\nabla\mathbf{a}] = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (11.34)$$

De este modo existen dos procedimientos para representar el gradiente, la divergencia y el rotor:

$$\nabla\varphi \equiv \text{grad } \varphi, \quad \nabla\mathbf{a} \equiv \text{div } \mathbf{a}, \quad [\nabla\mathbf{a}] \equiv \text{rot } \mathbf{a}.$$

Las representaciones por medio de ∇ tienen una serie de ventajas, por eso las utilizaremos en adelante. Conviene acostumbrarse a identificar el símbolo $\nabla\varphi$ con las palabras «gradiente fi» (es decir, no «nabla fi», sino «gradiente fi»), el símbolo $\nabla\mathbf{a}$ con «divergencia a», y, finalmente, el símbolo $[\nabla\mathbf{a}]$ con «rotor a».

Cuando se utiliza el vector ∇ hay que recordar que es un operador diferencial que actúa sobre todas las funciones que están a su derecha. Por esto, al transformar las expresiones en que figura ∇ deben tenerse en cuenta tanto las reglas del álgebra vectorial como las reglas del cálculo diferencial. Por ejemplo, la derivada del producto de las funciones φ y ψ es

$$(\varphi\psi)' = \varphi'\psi + \varphi\psi'.$$

De acuerdo con esto

$$\text{grad} (\varphi\psi) = \nabla (\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \psi \text{ grad } \varphi + \varphi \text{ grad } \psi. \quad (11.35)$$

Análogamente,

$$\text{div} (\varphi\mathbf{a}) = \nabla (\varphi\mathbf{a}) = \mathbf{a}\nabla\varphi + \varphi\nabla\mathbf{a} = \mathbf{a} \text{ grad } \varphi + \varphi \text{ div } \mathbf{a}. \quad (11.36)$$

El gradiente de cierta función φ es una función vectorial. Por lo tanto, se le pueden aplicar las operaciones de divergencia y rotor:

$$\begin{aligned} \text{div grad } \varphi = \nabla (\nabla\varphi) = (\nabla\nabla)\varphi &= (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2)\varphi \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi \end{aligned} \quad (11.37)$$

(Δ es el operador de Laplace);

$$\text{rot grad } \varphi = [\nabla, \nabla\varphi] = [\nabla\nabla]\varphi = 0 \quad (11.38)$$

(se recordará que el producto vectorial de un vector por sí mismo es nulo).

Apliquemos las operaciones divergencia y rotor a la función rot \mathbf{a} :

$$\text{div rot } \mathbf{a} = \nabla [\nabla\mathbf{a}] = 0 \quad (11.39)$$

(el producto mixto de vectores es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores que se multiplican¹); si dos de estos vectores coinciden, el volumen del paralelepípedo es nulo):

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla\mathbf{a}]] &= \nabla (\nabla\mathbf{a}) - (\nabla\nabla)\mathbf{a} = \\ &= \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta\mathbf{a} \end{aligned} \quad (11.40)$$

(hemos utilizado la fórmula $[\mathbf{a}(\mathbf{bc})] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$).

La relación (11.39) significa que el campo del rotor no tiene manantiales. Por consiguiente, las líneas del vector $[\nabla\mathbf{a}]$ no tienen principio ni fin. Precisamente por esta causa el flujo del vector \mathbf{a} a través de cualquier superficie S que se apoye en un contorno dado Γ resulta ser el mismo (véase la fórmula (11.30)).

En conclusión señalaremos que utilizando el operador ∇ , a las fórmulas (11.15) y (11.30) se les puede dar la forma

$$\oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\mathbf{a} \cdot dV \quad (\text{teorema de Ostrogradski—Gauss}), \quad (11.41)$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \int_S [\nabla\mathbf{a}] \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{teorema de Stokes}). \quad (11.42)$$

¹) Véase el § 2 del tomo 1.

§ 12. Circulación y rotor de un campo electrostático

En el § 6 explicamos que las fuerzas que actúan sobre una carga q en un campo electrostático son conservativas. Por consiguiente, el trabajo de estas fuerzas en cualquier camino cerrado Γ es nulo:

$$A = \oint_{\Gamma} qE \, dl = 0.$$

Simplificando por q , obtenemos la relación

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \, dl = 0 \quad (12.1)$$

(compárese con (8.7)).

La integral de la parte izquierda de la fórmula (12.1) representa la circulación del vector \mathbf{E} a lo largo del contorno Γ (véase (11.16)). De este modo, es característica del campo electrostático la circuns-



Fig. 12.1.

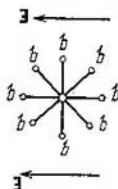


Fig. 12.2.

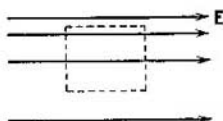


Fig. 12.3.

tancia de que la circulación del vector intensidad de este campo a lo largo de cualquier contorno cerrado sea nula.

Tomemos una superficie arbitraria S que se apoye en el contorno Γ , para el cual se calcula la circulación (fig. 12.1). De acuerdo con el teorema de Stokes (véase (11.42)), la integral del rotor \mathbf{E} tomada sobre esta superficie es igual a la circulación del vector \mathbf{E} a lo largo del contorno Γ :

$$\oint_S [\nabla \mathbf{E}] \, dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \, dl. \quad (12.2)$$

Como la circulación es igual a cero, llegamos a la conclusión de que

$$\oint_S [\nabla \mathbf{E}] \, dS = 0.$$

La condición obtenida debe cumplirse cualquiera que sea la superficie S que se apoye en el contorno arbitrario Γ . Esto sólo es posible si el rotor del vector \mathbf{E} es nulo en cada punto del campo:

$$[\nabla \mathbf{E}] = 0. \quad (12.3)$$

Por analogía con la rueda de paletas representada en la fig. 11.12, imaginémosnos una «rueda de paletas» eléctrica formada por un casquillo ligero con rayos en cuyos extremos se encuentren cargas positivas q de igual magnitud (fig. 12.2; todo el aparato debe tener dimensiones pequeñas). En aquellos lugares del campo eléctrico en que el rotor E sea distinto de cero, esta rueda de paletas girará con tanta más aceleración, cuanto mayor sea la proyección del rotor sobre el eje de la misma. En el caso de un campo electrostático, este dispositivo imaginario no giraría cualquiera que fuese la orientación de su eje.

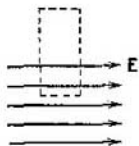


Fig. 12.4.

Así, la peculiaridad característica del campo electrostático es la de ser irrotacional. En el párrafo anterior explicamos que el rotor del gradiente de una función escalar es nulo (véase la fórmula (11.38)). Por eso la igualdad a cero del rotor E en cada punto, hace posible representar E en forma de gradiente de la función escalar φ llamada potencial. Esta representación se estudió ya en el § 8 (véase la fórmula

(8.2); en esta fórmula el signo menos se tomó por razones físicas).

De la necesidad de observar la condición (12.1) se puede concluir de inmediato que la existencia de un campo electrostático de la forma representada en la fig. 12.3, es imposible. En efecto, para este campo la circulación a lo largo del contorno representado con línea de trazos sería distinta de cero, lo que contradice la condición (12.1). Tampoco es posible que un campo distinto de cero en un volumen limitado sea homogéneo en todo este volumen (fig. 12.4). En este caso la circulación a lo largo del contorno que se indica con línea de trazos sería distinta de cero.

§ 13. Teorema de Gauss

En el párrafo precedente se explicó a qué es igual el rotor de un campo electrostático. Ahora vamos a hallar la divergencia del campo. Con este fin consideraremos el campo de una carga puntual q y calcularemos el flujo del vector E a través de la superficie cerrada S que contiene dicha carga (fig. 13.1). En el § 5 demostramos que la cantidad de líneas del vector E que comienzan en una carga puntual $+q$ o que terminan en una carga $-q$ es numéricamente igual a q/ϵ_0 .

De acuerdo con la fórmula (11.10), el flujo del vector E a través de cualquier superficie cerrada es igual al número de líneas que salen al exterior, es decir, que empiezan en la carga si ésta es positiva, y al número de líneas que penetran en el interior, o sea, que terminan en la carga, si ésta es negativa. Teniendo en cuenta que la cantidad de líneas que comienzan o terminan en una carga puntual

es numéricamente igual a q/ϵ_0 , se puede escribir que

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (13.1)$$

El signo del flujo coincide con el de la carga q . La dimensión de los dos miembros de la igualdad (13.1) es la misma.

Supongamos ahora que dentro del recinto limitado por la superficie cerrada se encuentran N cargas puntuales q_1, q_2, \dots, q_N . En virtud del principio de superposición, la intensidad \mathbf{E} del campo creado por todas las cargas será igual a la suma de las intensidades \mathbf{E}_i creadas por cada carga por separado: $\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$. Por eso

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \oint_S \left(\sum_i \mathbf{E}_i \right) d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i \, d\mathbf{S}.$$

Cada una de las integrales que se encuentran bajo el signo de suma-ción es igual a q_i/ϵ_0 . Por lo tanto,

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (13.2)$$

La afirmación que acabamos de demostrar se llama *teorema de Gauss*. Este teorema dice que el flujo del vector intensidad de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la suma algebraica de las cargas encerradas por esta superficie, dividida por ϵ_0 .

Cuando se estudian los campos creados por cargas macroscópicas (o sea, por cargas formadas por un número enorme de cargas elementales) se prescinde de la estructura discreta (discontinua) de estas cargas y se supone que están distribuidas en el espacio de un modo continuo, con densidad finita en todas partes. La densidad volumétrica ρ de la carga se determina, por analogía con la densidad de la masa, como la razón de la carga dq al volumen físicamente infinitesimal dV en que se encuentra confinada dicha carga:

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (13.3)$$

En este caso, por volumen físicamente infinitesimal se debe entender un volumen tal que, por una parte, sea suficientemente pequeño para que a densidad dentro de sus límites se pueda considerar igual, y por otra, sea suficientemente grande para que no pueda manifestarse el carácter discreto de la carga.

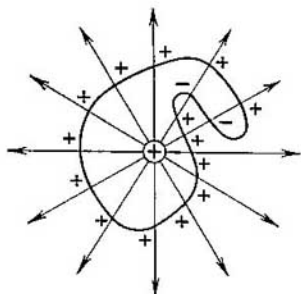


Fig. 13.1.

Conociendo la densidad de la carga en cada punto del espacio se puede hallar la carga total comprendida dentro de la superficie cerrada S . Para esto hay que calcular la integral de ρ extendida al volumen limitado por la superficie:

$$\sum q_i = \int_V \rho \, dV.$$

De esta forma, a la fórmula (13.2) puede dársele la forma

$$\oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV. \quad (13.4)$$

Sustituyendo, de acuerdo con (11.41), la integral de superficie por la de volumen, obtenemos

$$\int_V \nabla \mathbf{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV.$$

La relación a que hemos llegado debe cumplirse para cualquier volumen V elegido arbitrariamente. Esto sólo es posible si los valores de las funciones subintegrales son iguales en cada punto del espacio. Por consiguiente, la divergencia del vector \mathbf{E} está relacionada con la densidad de carga en el mismo punto por la igualdad

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (13.5)$$

Esta igualdad expresa el teorema de Gauss en forma diferencial.

En el caso de un líquido en movimiento Δv da la potencia específica de los manantiales de líquido en el punto dado. Por analogía, se dice que las cargas son manantiales del campo eléctrico.

§ 14. Cálculo de los campos valiéndose del teorema de Gauss

El teorema de Gauss permite en una serie de casos hallar la intensidad del campo por medios mucho más simples que aplicando la fórmula (5.3) para la intensidad del campo de una carga puntual y el principio de superposición de los campos. Vamos a demostrar las posibilidades del teorema de Gauss basándonos en varios ejemplos útiles en el futuro. Antes de empezar el análisis de estos ejemplos introduciremos los conceptos de densidad superficial y lineal de carga.

Si la carga está concentrada en una delgada capa superficial portadora de la carga del cuerpo, la distribución de la carga en el espacio se puede caracterizar por medio de la *densidad superficial* σ ,

que se determina por la expresión

$$\sigma = \frac{dq}{dS}. \quad (14.1)$$

Aquí dq es la carga comprendida en una capa de área dS . Se entiende por dS un trozo de superficie físicamente infinitesimal.

Si la carga está distribuida por el volumen o la superficie de un cuerpo cilíndrico (uniformemente en cada sección), se utiliza la *densidad lineal de carga*

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad (14.2)$$

(dl es la longitud de un trozo de cilindro físicamente infinitesimal, y dq , la carga concentrada en dicho trozo).

Campo de un plano infinito cargado homogéneamente. Supongamos que la densidad superficial de carga es equivalente en todos los puntos del plano e igual a σ ; para concretar, consideraremos que

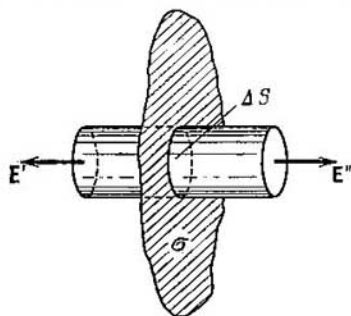


Fig. 13.2.

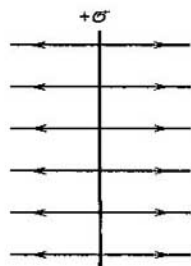


Fig. 14.2.

la carga es positiva. De las razones de simetría se infiere que la intensidad del campo en cualquier punto tiene dirección perpendicular al plano. En efecto, como el plano es infinito y está cargado homogéneamente, no hay motivo para que el vector \mathbf{E} se desvíe a cualquier lado de la normal al plano. Es evidente también que en los puntos simétricos respecto al plano, la intensidad del campo será igual en magnitud y de sentido opuesto.

Figurémonos una superficie cilíndrica, con las generatrices perpendiculares y las bases, de magnitud ΔS , dispuestas simétricamente con respecto a dicho plano (fig. 14.1). En virtud de la simetría $E' = E'' = E$. Apliquemos a esta superficie el teorema de Gauss. El flujo a través de la parte lateral de la superficie estará ausente,

puesto que E_n es nula en cada uno de sus puntos. Para las bases E_n coincide con E . Por consiguiente, el flujo total a través de la superficie será $2E \Delta S$. Dentro del recinto limitado por la superficie se encuentra la carga $\sigma \Delta S$. De acuerdo con el teorema de Gauss debe cumplirse la condición

$$2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0},$$

de la cual

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (14.3)$$

El resultado que hemos obtenido no depende de la longitud del cilindro. Esto significa que a cualquier distancia del plano, la intensidad del campo es igual en magnitud. La forma de las líneas

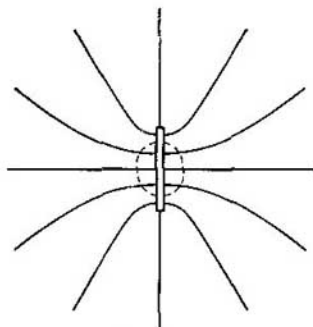


Fig. 14.3.

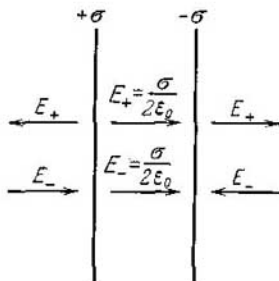


Fig. 14.4.

de intensidad se muestra en la fig. 14.2. Para un plano cargado negativamente el resultado es el mismo, con una sola diferencia de que el sentido del vector E y de las líneas de intensidad se invierte.

Si se toma un plano de dimensiones finitas, por ejemplo, una placa delgada con carga¹⁾, el resultado antes obtenido será válido para los puntos, cuya distancia a los bordes de la placa sea mucho mayor que la distancia a ella misma (en la fig. 14.3 la región de estos puntos está cercada por la curva de trazos). A medida que se aleja del plano o que se aproxima a sus bordes, este campo diferirá

¹⁾ En el caso de una placa, en la fórmula (14.3) debe entenderse por σ la carga concentrada en 1 m^2 de la misma en todo su espesor. En los cuerpos metálicos la carga se distribuye por la superficie externa. Por eso debe entenderse por σ la magnitud específica de la densidad de carga de las superficies que limitan la placa metálica.

cada vez más del campo del plano infinito cargado. El carácter del campo a grandes distancias es fácil figurárselo si se tiene en cuenta que a distancias que superen considerablemente las dimensiones de la placa, el campo creado por ella se puede considerar como el de una carga puntual.

Campo de dos planos con cargas de signos contrarios. El campo de dos planos infinitos, paralelos, con cargas de signos contrarios, de densidad superficial σ constante e igual en magnitud, se puede hallar como la superposición de los campos creados por cada uno de los planos por separado (fig. 14.4). En la región que hay entre los planos, los campos que se suman tienen el mismo sentido, de modo que la intensidad resultante es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (14.4)$$

Fuera del volumen limitado por los planos, los campos que se suman tienen sentidos opuestos, por lo que la intensidad resultante es nula.

De esta manera, resulta que el campo está concentrado entre los planos. La intensidad del campo en todos los puntos de esta región es igual en magnitud y sentido; por lo tanto, el campo es homogéneo. Las líneas de intensidad son un conjunto de rectas paralelas equidistantes.

Este resultado es también válido aproximadamente para planos de dimensiones finitas, si la distancia entre ellos es mucho menor que sus dimensiones lineales (condensador plano). En este caso sólo se observan desviaciones apreciables de la homogeneidad del campo en las proximidades de los bordes de las placas (fig. 14.5).

Campo de un cilindro de longitud infinita cargado. Supongamos que el campo lo crea una superficie cilíndrica infinita de radio R , cargada con la densidad superficial constante σ . De las razones de simetría se sigue que la intensidad del campo en cualquier punto debe estar dirigida a lo largo de una recta radial, perpendicular al eje del cilindro, y su magnitud puede depender únicamente de la distancia r a dicho eje. Figurémonos una superficie cilíndrica cerrada, de radio r y altura h (fig. 14.6), coaxial a la superficie cerrada. Para las bases del cilindro $E_n = 0$ y para la superficie lateral $E_n = E(r)$ (la carga se supone positiva). Por consiguiente, el flujo del vector E a través de la superficie considerada será igual a $E(r) \times 2\pi r h$. Si $r > R$, dentro de la superficie se encontrará la carga $q = \lambda h$ (λ es la densidad lineal de carga). Aplicando el teorema de Gauss obtenemos

$$E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}.$$

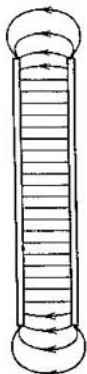


Fig. 14.5.

De donde

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad (r \geq R). \quad (14.5)$$

Si $r < R$, la superficie cerrada que se considera no contiene cargas, por lo que $E(r) = 0$.

De este modo, dentro de una superficie cilíndrica de longitud infinita cargada no existe campo. La intensidad del campo fuera de la superficie se determina por la densidad lineal de carga λ y la distancia r al eje del cilindro.

El campo de un cilindro cargado negativamente sólo se diferencia del campo del cilindro cargado positivamente en el sentido del vector \mathbf{E} .

De la fórmula (14.5) se deduce que, disminuyendo el radio R del cilindro (si permanece invariable la densidad lineal de carga λ),

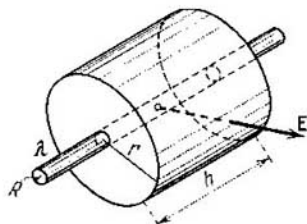


Fig. 14.6.

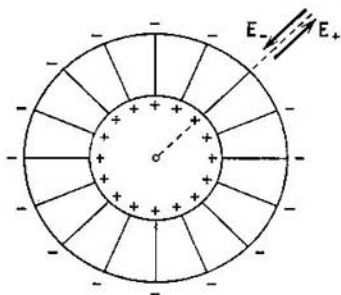


Fig. 14.7.

se puede obtener cerca de la superficie del cilindro un campo de intensidad muy grande.

Sustituyendo en (14.5) $\lambda = 2\pi R\sigma$ y suponiendo $r = R$, se obtiene para la intensidad del campo en la inmediación de la superficie del cilindro el valor

$$E(R) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (14.6)$$

Valiéndose del principio de superposición es fácil hallar el campo de dos superficies cilíndricas coaxiales con cargas de igual magnitud, pero de signos distintos, de densidad lineal λ (fig. 14.7). Dentro del cilindro menor y fuera del mayor, el campo está ausente. En el hueco entre los dos cilindros la magnitud de la intensidad del campo se determina por la fórmula (14.5). Esto es también válido para las superficies cilíndricas de longitud finita, si el hueco entre ellas es mucho menor que su longitud (condensador cilíndrico).

Sólo se observarán desviaciones sensibles respecto del campo de las superficies de longitud infinita en las proximidades de los extremos de los cilindros.

Campo de una superficie esférica cargada. El campo creado por una superficie esférica de radio R , cargada, con densidad superficial constante σ , será, evidentemente, central simétrico. Esto significa que la dirección del vector \mathbf{E} en cualquier punto pasa por el centro de la esfera y la magnitud de la intensidad es función de la distancia r del centro de la esfera. Imaginemos una superficie de radio r concéntrica con la esfera cargada. Para todos los puntos de esta esfera $E_n = E(r)$. Si $r > R$, dentro de esta superficie se encuentra toda la carga q distribuida por la esfera. Por consiguiente,

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

de donde
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R). \quad (14.7)$$

Una superficie esférica de radio r menor que R no contendrá cargas, por lo que para $r < R$ se obtiene $E(r) = 0$.

De este modo, dentro de una superficie esférica cargada, con densidad superficial constante σ , no existe campo. Fuera de esta superficie el campo es idéntico al de una carga puntual de la misma magnitud, situada en el centro de la esfera.

Aplicando el principio de superposición es fácil demostrar que el campo de dos superficies esféricas concéntricas (condensador esférico), que porten cargas de igual magnitud y de signos contrarios $+q$ y $-q$, está concentrado en el hueco entre ambas superficies y la magnitud de su intensidad se determina por la fórmula (14.7).

Campo de una esfera cargada volumétricamente. Sea una esfera de radio R cargada con la densidad volumétrica constante ρ . El campo, en este caso, tiene simetría central. Es fácil comprender que para el campo fuera de la esfera se obtiene el mismo resultado (véase la fórmula (14.7)) que en el caso de la esfera cargada superficialmente. Sin embargo, para los puntos que están dentro de la esfera el resultado será otro. Una superficie esférica de radio r ($r < R$) contendrá una carga igual a $\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$. Por eso el teorema de Gauss para dicha superficie se escribe como sigue:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3.$$

De aquí, sustituyendo ρ por $q/(\frac{4}{3}\pi R^3)$, obtenemos

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r \quad (r \leq R). \quad (14.8)$$

Por lo tanto, dentro de la esfera la intensidad del campo crece linealmente con la distancia r del centro de la esfera. Fuera de la esfera la intensidad decrece según la misma ley que en el campo de una carga puntual.

CAMPO ELÉCTRICO EN LOS
DIELÉCTRICOS

§ 15. Moléculas polares y no polares

Se llaman *dieléctricos* (o aisladores) los cuerpos incapaces de conducir la corriente eléctrica. En la naturaleza no existen aisladores perfectos. Todos los cuerpos, aunque sea en grado insignificante, conducen dicha corriente. Pero los cuerpos llamados dieléctricos la conducen 10^{15} — 10^{20} veces peor que los denominados conductores.

Si un dieléctrico se introduce en un campo eléctrico, tanto el campo como el dieléctrico sufren variaciones importantes. Para comprender por qué ocurre esto debe tenerse en cuenta que en la composición de los átomos y moléculas entran núcleos con carga positiva y electrones con carga negativa.

Toda molécula es un sistema, cuya carga total es nula. Las dimensiones lineales de este sistema son muy pequeñas (del orden de varios angström¹). En el § 10 establecimos que el campo creado por un sistema se determina por la magnitud y la orientación del momento dipolar eléctrico

$$\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}_i \quad (16.1)$$

(la suma se extiende tanto a los electrones como a los núcleos). Es verdad que en la molécula los electrones se mueven, de manera que este momento varía durante todo el tiempo. Pero las velocidades de los electrones son tan grandes, que prácticamente se manifiesta el valor medio del momento (15.1). Por eso, en adelante entenderemos por momento dipolar de una molécula la magnitud

$$\mathbf{p} = \sum q_i \langle \mathbf{r}_i \rangle \quad (16.2)$$

(para los núcleos, en esta suma se toma, en vez de $\langle \mathbf{r}_i \rangle$, simplemente \mathbf{r}_i). En otras palabras, consideraremos que los electrones se encuentran, con relación a los núcleos, en reposo en ciertos puntos obtenidos tomando el valor medio de las posiciones de los electrones respecto del tiempo.

El comportamiento de una molécula en un campo eléctrico exterior también se determina por su momento dipolar. De esto podemos cerciorarnos calculando la energía potencial de la molécula en el campo exterior. Eligiendo el origen de coordenadas dentro de la molécula y aprovechando la pequeñez de $\langle \mathbf{r}_i \rangle$, representamos el

¹) El angström (\AA) es una unidad de longitud, muy conveniente en la física atómica, igual a 10^{-10} m.

potencial en el punto en que se halla la carga i -ésima en la forma

$$\varphi_i = \varphi + \nabla\varphi \cdot \langle \mathbf{r}_i \rangle,$$

donde φ es el potencial en el origen de coordenadas (véase la fórmula (11.2)). Entonces

$$W_p = \sum q_i \varphi_i = \sum q_i (\varphi + \nabla\varphi \cdot \langle \mathbf{r}_i \rangle) = \varphi \sum q_i + \nabla\varphi \sum q_i \langle \mathbf{r}_i \rangle.$$

Teniendo en cuenta que $\sum q_i = 0$, y sustituyendo $\nabla\varphi$ por $-\mathbf{E}$, obtenemos

$$W_p = -\mathbf{E} \sum q_i \langle \mathbf{r}_i \rangle = -p\mathbf{E} = -pE \cos \alpha.$$

Tomando la diferencial de esta expresión respecto de α , obtenemos para el momento de rotación la expresión (9.11), y derivando respecto de x llegamos a la fuerza (9.16).

De este modo, la molécula, tanto en relación con el campo creado por ella como con respecto a las fuerzas que experimenta en el campo exterior, es equivalente a un dipolo. La carga positiva de este dipolo es igual a la carga total de los núcleos y se encuentra en el «centro de gravedad» de las cargas positivas; la carga negativa es igual a la carga total de los electrones y se halla en el «centro de gravedad» de las cargas negativas.

En las moléculas simétricas (tales como H_2 , O_2 , N_2) en ausencia de campo eléctrico exterior, los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas coinciden. Estas moléculas no tienen momento dipolar intrínseco y se denominan *no polares*. En las moléculas no simétricas (como, por ejemplo, CO , NH , HCl , etc.) los centros de gravedad de las cargas de signos distintos están separados entre sí. En este caso las moléculas poseen momento dipolar intrínseco y se llaman *polares*.

Bajo la acción de un campo eléctrico exterior las cargas de la molécula no polar se desplazan unas con relación a otras: las positivas en el sentido del campo y las negativas en el opuesto a éste. Como resultado la molécula adquiere un momento dipolar cuya magnitud, como demuestra la experiencia, es proporcional a la intensidad del campo. En el sistema racionalizado, el coeficiente de proporcionalidad se escribe en la forma $\varepsilon_0\beta$, donde ε_0 es la constante eléctrica y una magnitud llamada *polarizabilidad molecular*. Tomando en consideración que los sentidos de \mathbf{p} y \mathbf{E} coinciden, se puede escribir

$$\mathbf{p} = \beta \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (15.3)$$

El momento dipolar tiene la dimensión $[q] \text{L}$. Según la fórmula (5.3) la dimensión de $\varepsilon_0 \mathbf{E}$ es $[q] \text{L}^{-2}$. Por lo tanto, la dimensión de la polarizabilidad molecular β tiene la dimensión L^3 .

El proceso de polarización de la molécula no polar transcurre como si sus cargas positivas y negativas estuvieran ligadas entre sí por fuerzas elásticas. Por eso se dice que la molécula no polar se comporta en un campo exterior como un dipolo elástico.

La acción de un campo exterior sobre una molécula polar se reduce principalmente a la tendencia a volverla de tal modo que su momento dipolar se establezca según la dirección del campo. El campo exterior no influye prácticamente en la magnitud del momento dipolar. Por consiguiente, la molécula polar se comporta en el campo exterior como un dipolo rígido.

§ 16. Polarización de los dieléctricos

Por lo general, en ausencia del campo eléctrico exterior, los momentos dipolares de las moléculas de un dieléctrico son nulos (moléculas polares) o están distribuidos direccionalmente en el espacio de un modo caótico (moléculas apolares). En ambos casos el momento dipolar total del dieléctrico es nulo¹.

Bajo la acción del campo exterior, el dieléctrico se polariza. Esto significa que el momento dipolar resultante del dieléctrico se hace distinto de cero. Como magnitud característica del grado de polarización del dieléctrico es natural que se tome el momento dipolar de la unidad de volumen. Si el campo o el dieléctrico (o ambos) no son homogéneos, el grado de polarización en distintos puntos del dieléctrico será diferente. Para caracterizar la polarización en un punto dado hay que separar un volumen físicamente infinitesimal ΔV que contenga dicho punto, hallar la suma $\sum_{\Delta V} \mathbf{p}$ de los momentos de las moléculas comprendidas en este volumen y tomar la relación

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}. \quad (16.1)$$

La magnitud vectorial \mathbf{P} , determinada por la fórmula (16.1), se llama *polarización del dieléctrico*.

El momento dipolar \mathbf{p} tiene la dimensión $[q] \text{L}$. Por consiguiente, la dimensión de \mathbf{P} será $[q] \text{L}^{-2}$, es decir, coincide con la dimensión de $\epsilon_0 \mathbf{E}$ (véase la fórmula (5.3)).

En los dieléctricos isótropos de cualquier tipo la polarización está ligada con la intensidad del campo en el mismo punto por la simple relación:

$$\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (16.2)$$

¹) En el § 23 conoceremos cuerpos que pueden poseer momento dipolar en ausencia del campo exterior.

en la que κ es una magnitud independiente de E llamada *susceptibilidad dieléctrica del dieléctrico*¹⁾. Ya se ha dicho antes que \mathbf{P} y $\epsilon_0 \mathbf{P}$ tienen la misma dimensión. Por consiguiente, κ es una magnitud adimensional.

En el sistema de Gauss la fórmula (16.2) tiene la forma

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}. \quad (16.3)$$

Para los dieléctricos constituidos por moléculas no polares la fórmula (16.2) se deduce de los simples razonamientos siguientes. Dentro de los límites del volumen ΔV se encuentra una cantidad de moléculas igual a $n \Delta V$, donde n es el número de moléculas que hay en la unidad de volumen. Cada uno de los momentos \mathbf{p} se determina en este caso por la fórmula (15.3). Por lo tanto,

$$\sum_{\Delta V} \mathbf{p} = n \Delta V \beta \epsilon_0 \mathbf{E}.$$

Dividiendo esta expresión por ΔV , obtenemos la polarización $\mathbf{P} = n \beta \epsilon_0 \mathbf{E}$. Finalmente, introduciendo la designación $\kappa = n \beta$, llegamos a la fórmula (16.2).

En el caso de los dieléctricos construidos con moléculas polares, a la acción orientadora del campo exterior se opone el movimiento térmico de las moléculas, que tiende a dispersar sus momentos dipolares en todas las direcciones. Como resultado se establece cierta orientación predominante de los momentos dipolares de las moléculas en la dirección del campo. El cálculo estadístico correspondiente demuestra, de acuerdo con la experiencia, que la polarización es proporcional a la intensidad del campo, es decir, conduce a la fórmula (16.2). La susceptibilidad dieléctrica de estos dieléctricos es inversamente proporcional a la temperatura absoluta.

En los cristales iónicos las moléculas aisladas pierden su aislamiento. El cristal es como una molécula gigante. La red de un cristal iónico se puede considerar como dos redes insertas entre sí, una de las cuales está formada por los iones positivos y la otra por los negativos. Cuando sobre los iones del cristal actúa un campo exterior, ambas redes se desplazan la una respecto de la otra, lo que hace que se polarice el dieléctrico. En este caso la polarización

¹⁾ En los dieléctricos anisótropos los sentidos de \mathbf{P} y \mathbf{E} no coinciden en general. En este caso la relación entre \mathbf{P} y \mathbf{E} se define por las fórmulas

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 (\kappa_{xx} E_x + \kappa_{xy} E_y + \kappa_{xz} E_z), \\ P_y &= \epsilon_0 (\kappa_{yx} E_x + \kappa_{yy} E_y + \kappa_{yz} E_z), \\ P_z &= \epsilon_0 (\kappa_{zx} E_x + \kappa_{zy} E_y + \kappa_{zz} E_z). \end{aligned}$$

El conjunto de las nueve magnitudes κ_{ih} forma un tensor simétrico de 2º rango llamado *tensor de susceptibilidad dieléctrica* (compárese con la fórmula (40.3) del tomo 1º). Este tensor caracteriza las propiedades eléctricas del dieléctrico anisótropo.

está ligada con la intensidad del campo por medio de la relación (16.2). Hay que advertir que la dependencia lineal entre \mathbf{E} y \mathbf{P} que describe la fórmula (16.2) sólo tiene lugar en los campos no demasiado intensos (una observación análoga se refiere a la fórmula (15.3)).

§ 17. Campo dentro de un dieléctrico

Las cargas que entran en la composición de las moléculas de un dieléctrico se llaman *ligadas*. Bajo la acción de un campo, las cargas ligadas sólo pueden desplazarse un poco de sus posiciones de equilibrio: estas cargas no pueden abandonar los límites de la molécula de cuya composición forman parte.

A las cargas que, aunque se encuentran dentro de los límites del dieléctrico, no entran en la composición de sus moléculas, así como las cargas situadas fuera de aquellos límites, las llamaremos, siguiendo a los razonamientos de los físicos soviéticos L. D. Landáu y E. M. Lifshits¹⁾, *extrañas*²⁾.

El campo que hay dentro del dieléctrico es la superposición del campo \mathbf{E}_{ext} creado por las cargas extrañas, y el campo \mathbf{E}_{lig} de las cargas ligadas. El campo resultante se llama *microscópico* (o *verdadero*):

$$\mathbf{E}_{\text{micro}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{lig}}. \quad (17.1)$$

El campo microscópico varía mucho dentro de los límites de las distancias intermoleculares. A causa del movimiento de las cargas ligadas el campo $\mathbf{E}_{\text{micro}}$ también varía con el tiempo. En el estudio macroscópico no se descubren estas variaciones. Por eso, como característica del campo se utiliza el valor de la magnitud (17.1) promediado por un volumen físicamente infinitesimal:

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}_{\text{micro}} \rangle = \langle \mathbf{E}_{\text{ext}} \rangle + \langle \mathbf{E}_{\text{lig}} \rangle.$$

En adelante el campo promediado de las cargas extrañas lo designaremos por \mathbf{E}_0 , y el campo promediado de las cargas ligadas, por \mathbf{E}' . Respectivamente, llamaremos *campo macroscópico* la magnitud

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'. \quad (17.2)$$

La polarización \mathbf{P} es una magnitud macroscópica. Por consiguiente, en la relación (16.2) debe entenderse por \mathbf{E} la intensidad determinada por la fórmula (17.2)

¹⁾ Véase L. D. Landáu, E. M. Lifshits, «Electrodinámica de los medios continuos», Editorial «Gostejizdat», 1957, pág. 57, (en ruso).

²⁾ Estas cargas se suelen llamar libres. Pero esta denominación es extremadamente desafortunada, ya que en una serie de casos las cargas extrañas no son, ni mucho menos, libres.

En ausencia de dieléctricos (es decir, en el «vacío») el campo macroscópico es

$$E = E_0 = \langle E_{\text{ext}} \rangle.$$

Precisamente esta magnitud es la que debe entenderse por E en la fórmula (13.5).

Si las cargas extrañas están en reposo, el campo definido por la expresión (17.2) tiene las mismas propiedades que el campo electrostático en el vacío. En particular, este campo se puede caracterizar por medio del potencial φ , ligado con la intensidad (17.2) por las relaciones (8.2) y (8.6).

§ 18. Cargas volumétricas y superficiales ligadas

Cuando un dieléctrico no está polarizado, las densidades volumétrica ρ' y superficial σ' de cargas ligadas son nulas. Como resultado de la polarización la densidad superficial, y en algunos casos también la volumétrica, de cargas ligadas se hace distinta de cero.

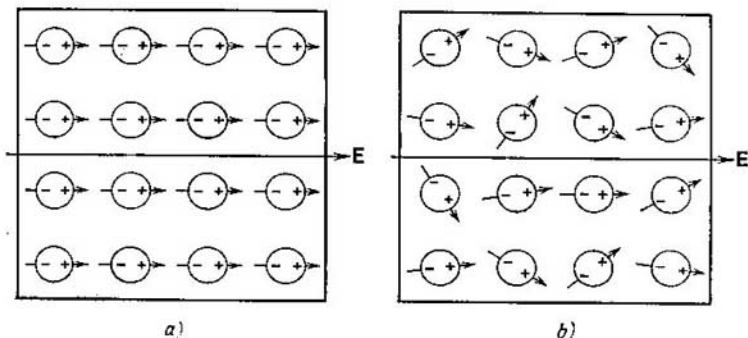


Fig. 18.1.

La fig. 18.1 representa esquemáticamente un dieléctrico polarizado de moléculas no polares (a) y polares (b). Por la figura se ve, que la polarización va acompañada de la aparición en una delgada capa superficial del dieléctrico de un exceso de cargas ligadas de un signo. Si la componente normal de la intensidad del campo E para una porción dada de superficie es distinta de cero, bajo la acción del campo, las cargas de un signo se alejan hacia dentro y las de otro signo salen afuera.

Entre la polarización P y la densidad superficial de cargas ligadas σ' existe una relación simple. Para hallarla consideremos una

lámina planoparalela infinita, de dieléctrico homogéneo, situada en un campo eléctrico uniforme (fig. 18.2). Separemos mentalmente en la lámina un elemento de volumen en forma de cilindro muy delgado con las generatrices paralelas a \mathbf{E} en el dieléctrico y con las bases, de área ΔS , coincidentes con las superficies de la lámina.

La magnitud de este volumen será

$$\Delta V = l \Delta S \cos \alpha,$$

donde l es la distancia entre las bases del cilindro, y α , el ángulo entre el vector \mathbf{E} y la normal exterior a la superficie del dieléctrico cargada positivamente. El volumen ΔV tiene un momento dipolar eléctrico cuya magnitud es

$$P \Delta V = Pl \Delta S \cos \alpha$$

(P es el módulo de polarización).

Desde el punto de vista macroscópico, el volumen que examinamos es equivalente a un dipolo formado por las cargas $+\sigma' \Delta S$ y $-\sigma' \Delta S$ que se

encuentran a la distancia l una de otra. Por eso su momento eléctrico se puede representar en la forma $\sigma' \Delta S l$. Igualando entre sí las dos expresiones del momento eléctrico, obtenemos

$$Pl \Delta S \cos \alpha = \sigma' \Delta S l.$$

De aquí se deduce la relación buscada entre σ' y \mathbf{P} :

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n, \quad (18.1)$$

en la que P_n es la proyección de la polarización sobre la normal exterior a la superficie correspondiente. Para la superficie derecha, en la fig. 18.2, $P_n > 0$ y, respectivamente, σ' es positiva para ella; en el caso de la superficie izquierda, $P_n < 0$ y, respectivamente, σ' es negativa para ella.

Expresando, de acuerdo con (16.2), \mathbf{P} por medio de χ y \mathbf{E} , llegamos a la fórmula

$$\sigma' = \chi \epsilon_0 E_n, \quad (18.2)$$

en la que E_n es la componente normal de la intensidad del campo dentro del dieléctrico. Según (18.2), en aquellos sitios donde las líneas de intensidad salen del dieléctrico ($E_n > 0$), en la superficie aparecen cargas ligadas positivas, y allí donde las líneas de intensidad entran en el dieléctrico ($E_n < 0$), se manifiestan cargas superficiales negativas.

Las fórmulas (18.1) y (18.2) son también válidas en el caso más

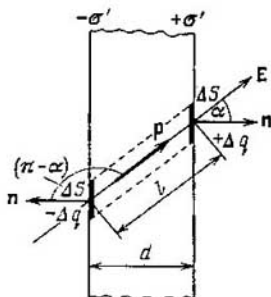


Fig. 18.2.

general de un dieléctrico no homogéneo de forma arbitraria que se encuentra en un campo eléctrico no uniforme. Por P_n y E_n debe entenderse en este caso la componente normal del vector correspondiente tomada en una inmediata proximidad al elemento de superficie para el cual se determina σ' .

Pasemos ahora a hallar la densidad de las cargas ligadas que surgen en el interior de un dieléctrico no homogéneo. Consideremos en un dieléctrico isótropo no homogéneo, de moléculas no polares, una pequeña superficie imaginaria ΔS (fig. 18.3). Supongamos que en la unidad de volumen del dieléctrico hay n partículas iguales de carga $+e$ y n partículas iguales de carga $-e$. En el pequeño entorno de la superficie ΔS el campo eléctrico y el dieléctrico se pueden considerar homogéneos. Por eso todas las cargas positivas que se encuentran cerca de ΔS , al conectar el campo se desplazarán, en el sentido de E , una distancia igual a l_1 , y todas las cargas negativas se desplazarán, en el sentido contrario, una distancia igual a l_2 (véase la fig. 18.3). Con esto, a través de la superficie ΔS pasa, en el sentido de la normal a ella, cierta cantidad de cargas de un signo

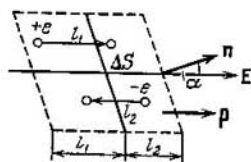


Fig. 18.3.

(positivas si $\alpha < \pi/2$ o negativas si $\alpha > \pi/2$) y, en el sentido opuesto a n , cierta cantidad de cargas del otro signo (negativas si $\alpha < \pi/2$ o positivas si $\alpha > \pi/2$). La superficie ΔS la cruzan todas las cargas $+e$ que antes de conectar el campo se encontraban de ella a una distancia no mayor que $l_1 \cos \alpha$, es decir, todas las cargas $+e$ contenidas en un cilindro oblicuo de volumen $l_1 \Delta S \cos \alpha$. El número de estas cargas es igual a $nl_1 \Delta S \cos \alpha$, y la carga transportada por ellas en el sentido de la normal a la superficie es igual a $enl_1 \Delta S \cos \alpha$ (si $\alpha > \pi/2$, la carga transportada en el sentido de la normal a expensas del desplazamiento de las cargas $+e$, será negativa). Análogamente, la superficie ΔS la atravesarán todas las cargas $-e$ comprendidas en el volumen $l_2 \Delta S \cos \alpha$. Estas cargas transportan en el sentido de la normal a la superficie una carga igual a $enl_2 \Delta S \cos \alpha$ (por la fig. 18.3 se ve que si $\alpha < \pi/2$, las cargas $-e$ transportarán a través de ΔS , en el sentido opuesto a n , una carga $-enl_2 \Delta S \cos \alpha$, equivalente al transporte de carga $enl_2 \Delta S \cos \alpha$ en el sentido de n).

Así, al conectar el campo, a través de la superficie ΔS es transportada en el sentido de la normal a ella la carga

$$\Delta q' = enl_1 \Delta S \cos \alpha + enl_2 \Delta S \cos \alpha = en(l_1 + l_2) \Delta S \cos \alpha.$$

La suma $l_1 + l_2$ es la distancia l en la cual se desplazan una respecto de otra las cargas ligadas positivas y negativas que hay en el die-

léctrico. Como resultado de este desplazamiento cada par de cargas adquiere el momento dipolar $p = el = e(l_1 + l_2)$. El número de estos pares en la unidad de volumen es igual a n . Por consiguiente, el producto $e(l_1 + l_2)n = eln = pn$ da el módulo de polarización P . De este modo, la carga que, cuando se conecta el campo, pasa a través de la superficie ΔS en el sentido de la normal a ella es

$$\Delta q' = P \Delta S \cos \alpha.$$

Como el dieléctrico es isótropo, los sentidos de los vectores \mathbf{E} y \mathbf{P} coinciden (véase la fig. 18.3). Por lo tanto, α es el ángulo entre los vectores \mathbf{P} y \mathbf{n} , en virtud de lo cual se puede escribir que

$$\Delta q' = Pn \Delta S.$$

Pasando de las deltas a las diferenciales, obtenemos

$$dq' = Pn dS = \mathbf{P} d\mathbf{S}.$$

Hemos hallado la carga ligada dq' que, al conectar el campo, pasa a través del elemento de superficie dS en el sentido de la normal a ella; \mathbf{P} es la polarización que se produce bajo la acción del campo en el sitio en que se encuentra la superficie dS .

Imaginemos dentro del dieléctrico una superficie cerrada S . Al conectar el campo esta superficie será atravesada por la carga ligada q' que sale al exterior,

$$q'_{\text{sal}} = \oint_S dq' = \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}$$

(en el caso de superficies cerradas convinimos tomar la normal exterior a las superficies dS). Como resultado, en el volumen limitado por la superficie S se produce una carga ligada excesiva

$$q'_{\text{exc}} = -q'_{\text{sal}} = -\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = -\Phi_P \quad (18.3)$$

(Φ_P es el flujo del vector \mathbf{P} a través de la superficie S).

Introduciendo la densidad volumétrica de cargas ligadas ρ' , se puede escribir

$$q'_{\text{exc}} = \int_V \rho' dV$$

(la integral se toma sobre el volumen limitado por la superficie S). De este modo llegamos a la fórmula

$$\int_V \rho' dV = -\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}.$$

Transformamos la integral de superficie según el teorema de Ostrogradski—Gauss (véase (11.41)). Como resultado se obtiene la relación

$$\int_V \rho' dV = - \int_V \nabla P dV.$$

Esta relación debe cumplirse para cualquiera que sea el volumen V que se elija arbitrariamente, lo que sólo es posible si en cada punto dieléctrico se cumple la igualdad

$$\rho' = -\nabla P. \tag{18.4}$$

Por consiguiente, la densidad de cargas ligadas es igual a la divergencia de la polarización \mathbf{P} tomada con signo contrario.

Hemos obtenido (18.4) considerando un dieléctrico de moléculas no polares. Pero esta fórmula es también válida para los dieléctricos de moléculas polares.

A la fórmula (18.4) se le puede dar una interpretación gráfica. Los puntos con ∇P positiva sirven de manantiales de campo del

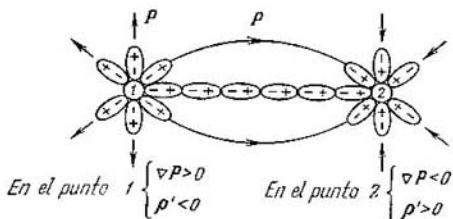


Fig. 18.4.

vector \mathbf{P} ; las líneas \mathbf{P} divergen desde estos puntos (fig. 18.4). Los puntos con ∇P negativa sirven de sumideros de campo del vector \mathbf{P} y las líneas \mathbf{P} convergen hacia estos puntos. Al polarizarse el dieléctrico las cargas positivas ligadas se desplazan en el sentido del vector \mathbf{P} , es decir, en el de las líneas \mathbf{P} , y las cargas negativas ligadas se desplazan en el sentido contrario (en la figura, las cargas ligadas pertenecientes a moléculas aisladas están rodeadas por óvalos). Como resultado, en los sitios con ∇P positiva se origina un exceso de cargas negativas ligadas, y en los lugares con ∇P negativa, un exceso de cargas positivas ligadas.

Las cargas ligadas se diferencian de las extrañas únicamente en que no pueden abandonar los límites de las moléculas, en cuya composición entran. En lo demás sus propiedades son las mismas que tienen todas las cargas restantes. En particular, hacen las

veces de manantiales de campo eléctrico. Por eso, en el caso en que la densidad de cargas ligadas ρ' es distinta de cero, la fórmula (13.5) se puede escribir en la forma

$$\nabla E = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho'). \quad (18.5)$$

Aquí ρ es la densidad de cargas extrañas.

Sustituyendo en (18.4) la expresión (16.2) para \mathbf{P} y aplicando la fórmula (11.36), obtenemos el resultado

$$\rho' = -\nabla(\kappa\epsilon_0 E) = -\epsilon_0 \nabla(\kappa E) = -\epsilon_0 (E\nabla\kappa + \kappa\nabla E).$$

Sustituyendo ∇E de acuerdo con (18.5), llegamos a la ecuación

$$\rho' = -\epsilon_0 E \nabla\kappa - \kappa\rho - \kappa\rho'.$$

De aquí

$$\rho' = -\frac{1}{1+\kappa} (\epsilon_0 E \nabla\kappa + \kappa\rho). \quad (18.6)$$

De la fórmula (18.6) se infiere que la densidad volumétrica de cargas ligadas puede ser distinta de cero en dos casos: 1) si el dieléctrico no es homogéneo ($\nabla\kappa \neq 0$), 2) si en el sitio dado del dieléctrico la densidad de cargas extrañas es distinta de cero ($\rho \neq 0$).

En caso de que dentro del dieléctrico no haya cargas extrañas, la densidad volumétrica de cargas ligadas será

$$\rho' = -\frac{\epsilon_0}{1+\kappa} E \nabla\kappa. \quad (18.7)$$

§ 19. Vector de desplazamiento eléctrico

En el párrafo anterior hemos indicado que de manantiales de campo sirven no sólo las cargas extrañas, sino también las ligadas. De acuerdo con esto

$$\nabla E = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho'). \quad (19.1)$$

(véase (18.5)). La fórmula (19.1) es poco apta para hallar el vector \mathbf{E} , ya que expresa las propiedades de la incógnita \mathbf{E} por medio de las cargas ligadas, las cuales, a su vez, vienen determinadas por la incógnita \mathbf{E} (véanse (18.2) y (18.6)).

El cálculo de los campos se simplifica en muchos casos si se introduce una magnitud auxiliar, cuyos manantiales sólo son cargas extrañas ρ . Para establecer la forma de esta magnitud se sustituye en (19.1) la expresión de ρ' (18.4):

$$\nabla E = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \nabla \mathbf{P}).$$

De aquí se sigue que

$$\nabla(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \quad (19.2)$$

(hemos introducido ϵ_0 bajo el signo ∇). La expresión que en (19.2) figura entre paréntesis es la magnitud buscada. Esta magnitud se designa por \mathbf{D} y recibe el nombre de desplazamiento eléctrico (o inducción eléctrica).

Así, pues, se llama *desplazamiento eléctrico* (o *inducción eléctrica*) la magnitud determinada por la relación

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (19.3)$$

Sustituyendo aquí la expresión de \mathbf{P} (16.2), obtenemos

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \kappa \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \kappa) \mathbf{E}. \quad (19.4)$$

La magnitud adimensional

$$\epsilon = 1 + \kappa \quad (19.5)$$

se denomina *permitividad relativa* o simplemente *permitividad del medio*¹⁾. De este modo, la relación (19.4) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}. \quad (19.6)$$

Según (19.6) el vector \mathbf{D} es proporcional al \mathbf{E} . Recordaremos que estamos estudiando dieléctricos isótropos. En los dieléctricos anisótropos los vectores \mathbf{E} y \mathbf{D} , en general, no son colineales.

De acuerdo con las fórmulas (5.3) y (19.6) el desplazamiento eléctrico del campo de una carga puntual en el vacío es

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (19.7)$$

De unidad de desplazamiento eléctrico sirve el culombio por metro cuadrado (C/m²).

Según (19.2)

$$\nabla \mathbf{D} = \rho. \quad (19.8)$$

Integrando esta relación respecto del volumen arbitrario V obtenemos:

$$\int_V \nabla \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Transformamos el primer miembro según el teorema de Ostrogradski — Gauss (véase (11.4)):

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV. \quad (19.9)$$

A la izquierda figura $\Phi_{\mathbf{D}}$, o sea, el flujo del vector \mathbf{D} a través de la superficie cerrada S , y a la derecha, la suma de las cargas extrañas $\sum q_i$ confinadas dentro de esta superficie. Por eso la igualdad (19.9)

¹⁾ En electrotecnia se introduce la llamada permitividad absoluta $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon$. Pero esta magnitud carece de sentido físico y nosotros no la utilizaremos.

se puede representar en la forma

$$\Phi_D = \sum q_i. \quad (18.10)$$

Las fórmulas (19.9) y (19.10) expresan el teorema de Gauss para el vector \mathbf{D} : *el flujo de desplazamiento eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la suma algebraica de las cargas extrañas comprendidas dentro de dicha superficie.*

En el vacío $\mathbf{P} = 0$, de manera que la magnitud \mathbf{D} determinada por la expresión (19.3) se convierte en $\epsilon_0 \mathbf{E}$ y las fórmulas (19.9) y (19.10) se transforman en las (13.4) y (13.2).

La unidad de flujo del vector de desplazamiento eléctrico es el culombio. Según (19.10), una carga de 1 C crea a través de la superficie que la abarca un flujo de desplazamiento de 1 C.

El campo del vector \mathbf{D} se puede representar valiéndose de las líneas de desplazamiento eléctrico (que para abreviar llamaremos líneas de desplazamiento), cuyo sentido y densidad se determinan exactamente lo mismo que los de las líneas del vector \mathbf{E} (véase el § 5). Las líneas del vector \mathbf{E} pueden empezar y terminar tanto en las cargas extrañas como en las ligadas. De manantial de campo del vector \mathbf{D} sólo sirven las cargas extrañas. Por eso, las líneas de desplazamiento pueden empezar o terminar únicamente en las cargas extrañas. Por los puntos en que se encuentran las cargas ligadas, las líneas de desplazamiento pasan sin interrumpirse.

La inducción eléctrica ¹⁾ se determina en el sistema de Gauss por la relación

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \quad (19.11)$$

La sustitución en ella del valor de \mathbf{P} (16.3), da

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\kappa) \mathbf{E}. \quad (19.12)$$

La magnitud

$$\epsilon = 1 + 4\pi\kappa \quad (19.13)$$

se denomina *permitividad*. Introduciendo esta magnitud en la fórmula (19.12), se obtiene

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (19.14)$$

En el sistema de Gauss la inducción eléctrica en el vacío coincide con la intensidad del campo \mathbf{E} . Por consiguiente, la inducción eléctrica del campo de una carga puntual en el vacío se determina por la fórmula (5.4).

De acuerdo con la fórmula (19.7), el desplazamiento eléctrico originado por una carga de 1 C a la distancia de 1 m es $D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 1^2} = \frac{1}{4\pi} \text{ C/m}^2$.

En el sistema de Gauss la inducción eléctrica en este caso es

$$D = \frac{q}{r^2} = \frac{3 \cdot 10^9}{10^4} = 3 \cdot 10^5 \text{ unid. CGSE.}$$

Por lo tanto, 1 C/m^2 corresponde a $4\pi \cdot 3 \cdot 10^5$ unid. CGSE de inducción eléctrica.

¹⁾ El término «desplazamiento eléctrico» no se aplica a la magnitud (19.12).

En este mismo sistema las expresiones del teorema de Gauss tienen la forma

$$\oint_S \mathbf{D} \, dS = 4\pi \int_V \rho \, dV, \quad (19.15)$$

$$\Phi_D = 4\pi \sum q_i. \quad (19.16)$$

Según (19.16) la carga de 1 C crea un flujo del vector de inducción eléctrica igual a $4\pi q = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9$ unid. CGSE. Por consiguiente, entre las unidades de flujo del vector \mathbf{D} existe la relación

$$1 \text{ C} = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ unid. CGSE de flujo.}$$

§ 20. Ejemplos de cálculo del campo en los dieléctricos

Para aclarar el sentido de las magnitudes \mathbf{D} y ϵ , vamos a examinar varios ejemplos de campos en los dieléctricos.

Campo dentro de una placa plana. Consideremos dos planos paralelos infinitos con cargas de signos contrarios. Supongamos que el vacío que estos planos crean en el campo se caracteriza por la intensidad \mathbf{E}_0 y el desplazamiento $\mathbf{D}_0 = = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$. En este campo se introduce una placa de material dieléctrico homogéneo e isótropo y se coloca como muestra la fig. 20.1. Bajo la acción del campo se polariza el dieléctrico y en sus superficies aparecen cargas ligadas, cuya densidad es σ' . Dichas cargas crean dentro de la placa un campo homogéneo de intensidad, según la fórmula (14.4), $E' = \sigma'/\epsilon_0$. Fuera del dieléctrico, en este caso, $E' = 0$. La intensidad del campo E_0 es igual a σ/ϵ_0 . Estos dos campos tienen sentidos contrapuestos entre sí, por consiguiente, dentro del dieléctrico

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma - \sigma'). \quad (20.1)$$

Fuera del dieléctrico $E = E_0$.

La polarización del dieléctrico está condicionada por el campo (20.1). Este campo es perpendicular a las superficies de la placa. Por eso, $E_n = E$ y, de acuerdo con (18.2), $\sigma' = \kappa \epsilon_0 E$. Sustituyendo este valor en la fórmula (20.1), obtenemos

$$E = E_0 - \kappa E,$$

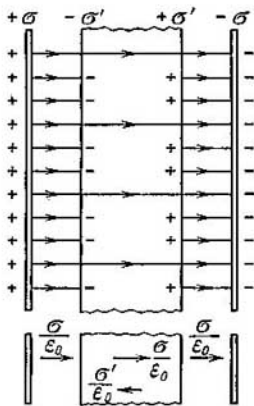


Fig. 20.1.

de donde

$$E = \frac{E_0}{1 + \kappa} = \frac{E_0}{\epsilon}. \quad (20.2)$$

Así, en el caso considerado, la permitividad ϵ indica en cuántas veces se debilita el campo dentro del dieléctrico.

Multiplicando (20.2) por $\epsilon_0 \epsilon$ se obtiene el desplazamiento eléctrico dentro de la placa

$$D = \epsilon_0 \epsilon E = \epsilon_0 E_0 = D_0. \quad (20.3)$$

De este modo, el desplazamiento eléctrico dentro de la placa coincide con el desplazamiento eléctrico del campo exterior D_0 . Sustituyendo en (20.3) E_0 por σ/ϵ_0 , obtenemos que

$$D = \sigma. \quad (20.4)$$

Para hallar σ' expresamos en (20.2) E y E_0 por medio de las densidades de cargas

$$\frac{1}{\epsilon_0} (\sigma - \sigma') = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

De aquí

$$\sigma' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma. \quad (20.5)$$

La fig. 20.1 se ha dibujado suponiendo que $\epsilon = 3$. De acuerdo con esto, la densidad de líneas E dentro del dieléctrico es tres veces menor que fuera de la placa. Las líneas están trazadas a iguales distancias una de otra, puesto que el campo es homogéneo. En este caso σ' se puede hallar sin recurrir a la fórmula (20.5). En efecto, como la intensidad del campo dentro de la placa es tres veces menor que fuera de ella, de las tres líneas de intensidad que empiezan (o terminan) en cargas extrañas, dos deben terminar (o, respectivamente, empezar) en cargas ligadas. De aquí se infiere que la densidad de cargas ligadas debe ser igual a $2/3$ de la densidad de cargas extrañas.

En el sistema de Gauss la intensidad E' que crean las cargas ligadas σ' , es igual a $4\pi\sigma'$. Por eso la relación (20.1) tiene la forma

$$E = E_0 - E' = E_0 - 4\pi\sigma'.$$

La densidad superficial σ' está ligada con la intensidad E por medio de la relación $\sigma' = \kappa E_n$. Por lo tanto, se puede escribir que

$$E = E_0 - 4\pi\kappa E.$$

De aquí

$$E = \frac{E_0}{1 + 4\pi\kappa} = \frac{E_0}{\epsilon}.$$

Por lo tanto, la permitividad ϵ , lo mismo que la ϵ en el SI, indica en cuántas veces se debilita el campo dentro del dieléctrico. Por consiguiente, los valores

de ϵ en el SI y en el sistema de Gauss coinciden. De aquí, tomando en consideración (19.5) y (19.13), concluimos que la susceptibilidad dieléctrica en el sistema de Gauss (κ_{SG}) y en el SI (κ_{SI}) se diferencian entre sí por el factor 4π :

$$\kappa_{SI} = 4\pi\kappa_{SG}. \quad (20.6)$$

Campo dentro de una capa esférica. Rodeemos una esfera cargada, de radio R , con una capa esférica concéntrica de material dieléctrico homogéneo e isotropo (fig. 20.2). En la superficie interna de la capa aparecerá la carga ligada q'_1 distribuida con la densidad σ'_1 ($q'_1 = 4\pi R_1^2 \sigma'_1$), y en la exterior, la carga q'_2 distribuida con la densidad σ'_2 ($q'_2 = 4\pi R_2^2 \sigma'_2$). El signo de la carga q'_2 coincidirá con el de la carga q de la esfera y el signo de q'_1 será el contrario a aquél. Las cargas q'_1 y q'_2 crean a la distancia r , mayor respectivamente que

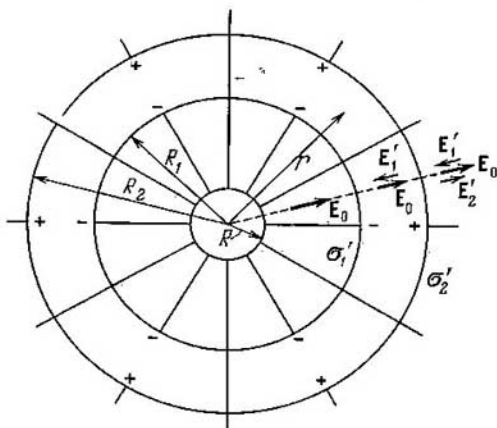


Fig. 20.2.

R_1 y R_2 , un campo que coincide con el de una carga puntual de la misma magnitud (véase la fórmula (14.7)). Dentro de las superficies por las cuales se hallan distribuidas, las cargas q'_1 y q'_2 no crean campo. Por consiguiente, la intensidad del campo E' dentro del dieléctrico es

$$E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R_1^2 \sigma'_1}{r^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R_1^2 \sigma'_1}{r^2}$$

y su sentido es opuesto al de la intensidad del campo E_0 . El campo resultante dentro del dieléctrico

$$E(r) = E_0 - E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R_1^2 \sigma'_1}{r^2} \quad (20.7)$$

decrece según la ley $1/r^2$. Por eso se puede afirmar que

$$\frac{E(R_1)}{E(r)} = \frac{r^2}{R_1^2}, \text{ es decir, } E(R_1) = E(r) \frac{r^2}{R_1^2},$$

donde $E(R_1)$ es la intensidad del campo, dentro del dieléctrico, en la inmediación de la superficie interior de la capa. Precisamente esta intensidad determina la magnitud σ'_1 :

$$\sigma'_1 = \kappa \epsilon_0 E(R_1) = \kappa \epsilon_0 E(r) \frac{r^2}{R_1^2} \quad (20.8)$$

(en cada punto de la superficie $|E_n| = E$).

Sustituyendo la expresión (20.8) en la fórmula (20.7), obtenemos

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R_1^2 \kappa \epsilon_0 E(r) r^2}{r^2 R_1^2} = E_0(r) - \kappa E(r).$$

De aquí hallamos que dentro del dieléctrico $E = E_0/\epsilon$ y, por consiguiente, $D = \epsilon_0 E_0$ (compárese con las fórmulas (20.2) y (20.3)).

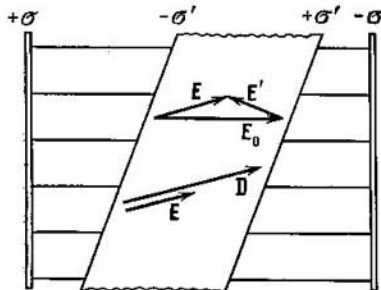


Fig. 20.3.

El campo dentro del dieléctrico varía según la ley $1/r^2$. Por eso tiene lugar la relación $\sigma'_1 : \sigma'_2 = R_2^2 : R_1^2$. De aquí se deduce que $q'_1 = q'_2$. Por lo tanto, los campos que crean estas cargas a distancias mayores que R_2 se destruyen mutuamente, ya que fuera de la capa esférica $E' = 0$ y $E = E_0$.

Suponiendo R_1 igual a R , mientras que $R_2 = \infty$, llegamos al caso de una esfera

cargada sumergida en un dieléctrico homogéneo isótropo infinito. La intensidad del campo fuera de esta esfera será

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{er^2} \quad (20.9)$$

Así será también la intensidad del campo creado en un dieléctrico infinito por una carga puntual.

Los dos ejemplos analizados se caracterizan porque el dieléctrico es homogéneo e isótropo y las superficies que lo limitan coinciden con las superficies equipotenciales del campo de las cargas extrañas. El resultado que hemos obtenido en estas condiciones es general. Si el dieléctrico homogéneo e isótropo llena totalmente el volumen limitado por las superficies equipotenciales del campo de las cargas extrañas, el vector de desplazamiento eléctrico coincide con el vector

intensidad del campo de las cargas extrañas multiplicado por ϵ_0 , y, por consiguiente, la intensidad del campo dentro del dieléctrico es v veces menor que la intensidad del campo de las cargas extrañas.

Si las condiciones citadas no se cumplen, los vectores \mathbf{D} y $\epsilon_0\mathbf{E}$ no coinciden. En la fig. 20.3 se muestra el campo de una placa de material dieléctrico inclinada respecto de los planos portadores de cargas extrañas. El vector \mathbf{E}' es perpendicular a las caras de la placa, por eso \mathbf{E} y \mathbf{E}_0 no son colineales. El vector \mathbf{D} tiene la misma direc-

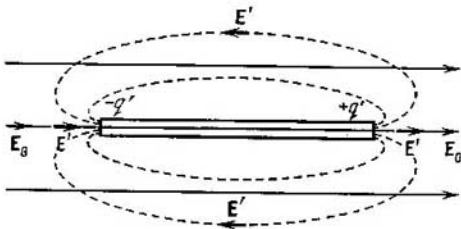


Fig. 20.4.

ción que el \mathbf{E} , por lo tanto, \mathbf{D} y $\epsilon_0\mathbf{E}_0$ no coinciden en dirección. Se puede demostrar que tampoco coinciden en magnitud.

En los ejemplos antes citados, debido a la forma especialmente elegida del dieléctrico, el campo \mathbf{E}' sólo era distinto de cero dentro del dieléctrico. En el caso general \mathbf{E}' puede ser distinto de cero y más allá de los límites del dieléctrico. Coloquemos en el campo homogéneo inicial una barra de material dieléctrico (fig. 20.4). A causa de la polarización, en los extremos de la barra se forman cargas ligadas de signos opuestos. Su campo fuera de la barra es equivalente al campo de un dipolo (las líneas \mathbf{E}' se indican en la figura con línea de trazos). Es fácil comprender que el campo resultante \mathbf{E} en las proximidades de los extremos de la barra es mayor que el campo \mathbf{E}_0 .

§ 21. Condiciones en el límite entre dos dieléctricos

En las proximidades de la superficie de separación de dos dieléctricos los vectores \mathbf{E} y \mathbf{D} deben satisfacer determinadas condiciones de frontera que se desprenden de las relaciones

$$[\nabla\mathbf{E}] = 0, \quad \nabla\mathbf{D} = \rho \quad (21.1)$$

(véanse (12.3) y (19.8)).

Consideremos el límite entre dos dieléctricos de permitividades ϵ_1 y ϵ_2 (fig. 21.1). En esta superficie elegimos un eje x dirigido

arbitrariamente. Tomamos un pequeño circuito rectangular de longitud a y anchura b que pase parcialmente por el primer dieléctrico y parcialmente por el segundo. El eje x pasa por el centro de los lados b .

Supongamos que en los dieléctricos se ha creado un campo, cuya intensidad en el primer dieléctrico es E_1 y en el segundo, E_2 . Debido a que $[\nabla E] = 0$, la circulación del (vector E por el circuito que hemos elegido debe ser nula (véase la fórmula (12.1)). Si las



Fig. 21.1.

dimensiones del circuito son pequeñas y el sentido del rodeo es el que indica la fig. 21.1, la circulación del vector E se puede representar en la forma

$$\oint E_l dl = E_{1x}a - E_{2x}a + \langle E_b \rangle 2b, \quad (21.2)$$

donde $\langle E_b \rangle$ es el valor medio de E_l en los tramos del circuito perpendiculares al límite de separación. Igualando esta expresión a cero, llegamos a la relación

$$(E_{2x} - E_{1x}) a = \langle E_b \rangle 2b.$$

En el límite, cuando la anchura b del circuito tiende a cero, se obtiene la igualdad

$$E_{1x} = E_{2x}. \quad (21.3)$$

Los valores de las proyecciones de los vectores E_1 y E_2 sobre el eje x se toman en la inmediación del límite entre los dieléctricos.

La relación (21.3) se cumple si el eje x se elige arbitrariamente, pero hace falta que dicho eje se encuentre en el plano de separación de los dieléctricos. De (21.3) se sigue que cuando el eje x se elige de tal modo que $E_{1x} = 0$, la proyección E_{2x} también será igual a cero. Esto significa que los vectores E_1 y E_2 en dos puntos próximos, tomados por lados distintos del límite de separación, se encuentran en un plano con la normal a la superficie de separación. Representemos cada uno de los vectores E_1 y E_2 en forma de suma de los componentes normal y tangencial:

$$E_1 = E_{1n} + E_{1\tau}; \quad E_2 = E_{2n} + E_{2\tau}.$$

De acuerdo con (21.3)

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (21.4)$$

Aquí $E_{i\tau}$ es la proyección del vector E_i sobre el versor τ dirigido a lo largo de la línea de intersección del plano de separación de los dieléctricos con el plano en que se encuentran los vectores E_1 y E_2 .

Sustituyendo, de acuerdo con (19.6), las proyecciones del vector \mathbf{E} por las proyecciones del vector \mathbf{D} divididas por $\epsilon_0\epsilon$, obtenemos la relación

$$\frac{D_{1\tau}}{\epsilon_0\epsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\epsilon_0\epsilon_2},$$

de la cual se sigue que

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (21.5)$$

Tomemos ahora en el límite entre los dieléctricos una superficie cilíndrica imaginaria de altura h (fig. 21.2). Su base S_1 se encuentra en el primer dieléctrico y su base S_2 , en el segundo. Ambas bases tienen la misma magnitud ($S_1 = S_2 = S$) y son tan pequeñas que,

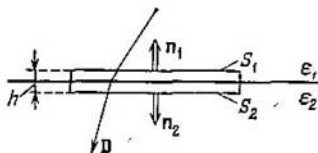


Fig. 21.2.

dentro de los límites de cada una de ellas, el campo se puede considerar uniforme. A esta superficie le aplicamos el teorema de Gauss (véase (19.10)). Si en el límite entre los dieléctricos no hay cargas extrañas, el segundo miembro de (19.10) es nulo. Por consiguiente, $\Phi_D = 0$.

El flujo a través de la base S_1 es igual a $D_{1n}S$, donde D_{1n} es la proyección del vector \mathbf{D} en el primer dieléctrico sobre la normal \mathbf{n}_1 . Análogamente, el flujo a través de la base S_2 es igual a $D_{2n}S$, siendo D_{2n} la proyección del vector \mathbf{D} en el segundo dieléctrico sobre la normal \mathbf{n}_2 . El flujo a través de la superficie lateral se puede representar en la forma $\langle D_n \rangle S_{lat}$, donde $\langle D_n \rangle$ es el valor de D_n promediado por toda la superficie lateral, y S_{lat} , la magnitud de dicha superficie. De este modo, se puede escribir

$$\Phi_D = D_{1n}S + D_{2n}S + \langle D_n \rangle S_{lat} = 0. \quad (21.6)$$

Si se hace que la altura h del cilindro tienda a cero, S_{lat} también tenderá a cero. Por eso, en el límite se obtiene la relación

$$D_{1n} = -D_{2n}.$$

Aquí D_{in} son las proyecciones sobre \mathbf{n}_i del vector \mathbf{D} en el i -ésimo dieléctrico en la inmediación de su límite con otro dieléctrico. Los signos de las proyecciones resultaron ser distintos debido a que las normales \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 a las bases del cilindro tienen sentidos opuestos.

Si D_1 y D_2 se proyectan sobre una misma normal, se obtiene la condición

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (21.7)$$

Sustituyendo, de acuerdo con (19.6), las proyecciones de D por las correspondientes proyecciones del vector E multiplicadas por $\epsilon_0\epsilon$, obtenemos la relación

$$\epsilon_0\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_0\epsilon_2 E_{2n},$$

de la cual se deduce que

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (21.8)$$

Los resultados que hemos obtenido significan que, al pasar a través del límite de separación entre los dieléctricos, la componente normal del vector D y la componente tangencial del vector E varían de un modo continuo. En cambio, la componente tangencial del vector D y la componente normal del vector E , al pasar a través del límite de separación sufren una discontinuidad.

Las relaciones (21.4), (21.5), (21.7) y (21.8) determinan las condiciones que deben satisfacer los vectores E y D en el límite entre dos dieléctricos (si en dicho límite no hay cargas extrañas). Hemos obtenido estas relaciones para un campo electrostático. No obstante, son también válidas para los campos que varían con el tiempo (véase el § 112).

Las condiciones halladas son correctas también para el límite entre un dieléctrico y el vacío. En este caso una de las permitividades debe suponerse igual a la unidad.

Advertimos que la condición (21.7) se puede obtener partiendo del hecho de que las líneas de desplazamiento pasan a través del límite de separación entre los dos dieléctricos sin interrumpirse (fig. 21.3). De acuerdo con la regla para trazar las líneas, el número de éstas que llegan a la superficie ΔS del primer dieléctrico es igual a $D_1 \Delta S_1 = D_1 \Delta S \cos \alpha_1$. Análogamente, el número de líneas que salen de la superficie ΔS al segundo dieléctrico es igual a $D_2 \Delta S_2 = D_2 \Delta S \cos \alpha_2$. Si las líneas no sufren discontinuidades en el límite de separación, estos dos números deben ser iguales:

$$D_1 \Delta S \cos \alpha_1 = D_2 \Delta S \cos \alpha_2.$$

Simplificando por ΔS y teniendo en cuenta que el producto $D \cos \alpha$ da la magnitud del componente normal del vector D , llegamos a la condición (21.7).

En el límite de separación de los dieléctricos las líneas de desplazamiento sufren una desviación (se quiebran), a consecuencia de lo cual el ángulo α entre la normal a dicha superficie y las líneas D

varía. De la fig. 21.4 se deduce que

$$\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} : \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}},$$

de donde, tomando en consideración las fórmulas (21.5) y (21.7), se obtiene la ley de la refracción de las líneas de desplazamiento eléctrico:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (21.9)$$

Al pasar al dieléctrico de menor ε el ángulo que forman las líneas de desplazamiento con la normal, disminuye y, por consiguiente,

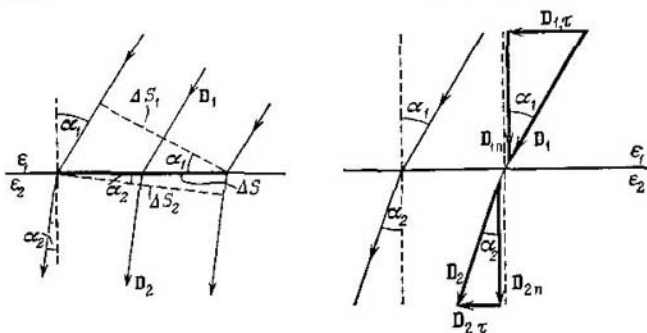


Fig. 21.3.

Fig. 21.4.

la disposición de dichas líneas se hace más espaciada; cuando pasan al dieléctrico de mayor ε , las líneas de desplazamiento, al contrario, se aproximan entre sí.

§ 22. Fuerzas que actúan sobre una carga en un dieléctrico

Si en un campo eléctrico en el vacío se introduce un cuerpo cargado, de dimensiones tan pequeñas que dentro de sus límites se puede considerar uniforme el campo exterior, sobre dicho cuerpo actuará la fuerza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (22.1)$$

Para colocar un cuerpo cargado en el campo creado en un dieléctrico hay que hacer en este último un hueco. Si el dieléctrico es líquido o gaseoso, el hueco lo hace el mismo cuerpo desplazando el dieléctrico del volumen que él ocupa. El campo dentro de esta cavidad E_{cav} será diferente del campo E en el dieléctrico continuo. Por lo tanto,

la fuerza que actúa sobre el cuerpo cargado que ocupa el hueco no se puede calcular como el producto de la carga q por la intensidad del campo E que existía en el dieléctrico antes de introducir el cuerpo en él.

Al calcular la fuerza que actúa sobre un cuerpo cargado que se encuentra en un dieléctrico líquido o gaseoso hay que tener en cuenta también otra circunstancia. En el límite con el cuerpo se producen en el dieléctrico tensiones mecánicas que conducen a la aparición de una fuerza mecánica adicional F_{tens} que actúa sobre el cuerpo.

Así, pues, la fuerza que actúa sobre un cuerpo cargado que se encuentra en un dieléctrico, en general, no se puede determinar por la fórmula (22.1) y el problema de su cálculo suele ser bastante complicado. Para un dieléctrico líquido o gaseoso los cálculos dan un resultado curioso. La resultante de la fuerza eléctrica qE_{cav} y de la fuerza mecánica F_{tens} es igual exactamente a qE , donde E es la intensidad del campo en el dieléctrico continuo:

$$F = qE_{\text{cav}} + F_{\text{tens}} = qE. \quad (22.2)$$

La intensidad del campo creado en un dieléctrico homogéneo infinito por una carga puntual, se determina por la fórmula (20.9). Por consiguiente, para la fuerza de interacción de dos cargas puntuales sumergidas en un dieléctrico homogéneo infinito, se obtiene la expresión

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{\epsilon r^2}. \quad (22.3)$$

Esta fórmula expresa la ley de Coulomb para las cargas que se encuentran en un dieléctrico. Su validez se limita a los dieléctricos líquidos y gaseosos.

En algunos libros la fórmula (22.3) se da como «la expresión más general de la ley de Coulomb». En relación con esto nos remitimos a las siguientes palabras de R. Feynman: «En muchos libros anticuados de electricidad se comienza la exposición por la ley «fundamental», según la cual la fuerza que actúa entre las cargas es ... (se da la fórmula (22.3))... , pero este punto de vista es absolutamente inaceptable. En primer lugar, esto no es siempre exacto; esto sólo es justo en un mundo lleno de líquido; en segundo lugar, así resulta únicamente cuando el valor de ϵ es constante, lo que para la mayoría de los materiales reales sólo se cumple aproximadamente» («Conferencias de física de Feynman», fascículo 5, Editorial «Mir», 1966, pág. 208 (en ruso)).

De los problemas concernientes a las fuerzas que actúan sobre una carga que se encuentra dentro de una cavidad practicada en un dieléctrico sólido, no nos ocuparemos.

§ 23. Ferroeléctricos

Existe un grupo de cuerpos, llamados *ferroeléctricos*, que pueden tener polarización espontánea en ausencia del campo exterior. Este fenómeno se observó por primera vez en la sal de Seignette o de Rochelle. La primera investigación detallada de las propiedades de esta sal fue realizada por los físicos soviéticos I. V. Kurchátov y P. P. Kobeko.

Los ferroeléctricos se diferencian de los demás dieléctricos en una serie de particularidades características:

1. Mientras que en los dieléctricos ordinarios ϵ constituye varias unidades, alcanzando en casos excepcionales varias decenas (en el agua, por ejemplo, $\epsilon = 81$), la permitividad de los ferroeléctricos suele ser del orden de varios millares.

2. P no depende de E linealmente (véase la rama 1 de la curva representada en la fig. 23.1). Por lo tanto, la permitividad resulta ser función de la intensidad del campo.

3. En las variaciones del campo, los valores de la polarización P (y, por consiguiente, del desplazamiento D) se retrazan respecto de la intensidad del campo E y, como resultado de esto, P y D se determinan no sólo por la magnitud de E en el instante dado, sino también por los valores anteriores de E , es decir, dependen de la «prehistoria» del dieléctrico. Este fenómeno se llama *histéresis* (del griego «hysteresis», retraso). En las variaciones cíclicas del campo la dependencia de P respecto de E sigue la curva, representada en la fig. 23.1, denominada *lazo* o *ciclo de histéresis*. Cuando el campo se conecta por primera vez, la polarización crece con E de acuerdo con la rama 1 de la curva. La disminución de P se efectúa por la rama 2. Cuando E se reduce a cero, el cuerpo conserva el valor de la polarización P_r , llamado *polarización remanente*. Sólo bajo la acción de un campo de sentido contrario e intensidad E_c , la polarización se anula. Este valor de la intensidad se denomina *fuerza coercitiva*. Si E sigue variando, se obtiene la rama 3 del lazo de histéresis y así sucesivamente.

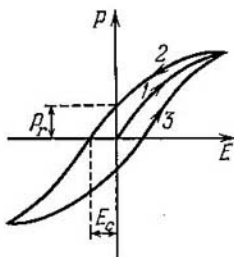


Fig. 23.1.

El comportamiento de la polarización de los ferroeléctricos es análogo al de la imanación de los ferromagnéticos (véase el § 59). Por eso precisamente se les dio el nombre de *ferroeléctricos*.

Los ferroeléctricos sólo pueden ser cuerpos cristalinos sin centro de simetría. Así, por ejemplo, los cristales de sal de Seignette pertenecen al sistema rómbico (véase el § 111 del tomo 1º). La interacción

de las partículas en el cristal del ferroeléctrico hace que sus momentos dipolares se sitúen espontáneamente paralelos unos a otros. En casos excepcionales la igual orientación de los momentos dipolares se extiende a todo el cristal. De ordinario surgen en el cristal regiones dentro de los límites de cada una de las cuales los momentos dipolares son paralelos entre sí, pero la dirección de polarización en las distintas regiones suele ser diferente, de manera que el momento resultante de todo el cristal puede ser nulo. Las regiones de polarización espontánea se llaman también *dominios*. Bajo la acción de un campo exterior, los momentos de los dominios giran como un conjunto y se orientan en el sentido del campo.

Para cada ferroeléctrico existe una temperatura, a la cual el cuerpo pierde sus propiedades extraordinarias y se convierte en dieléctrico normal. Esta temperatura se llama *punto de Curie*. La sal de Seignette tiene dos puntos de Curie: -15°C y $+22,5^{\circ}\text{C}$, con la particularidad de que esta sal se comporta como ferroeléctrico únicamente en el intervalo de temperaturas limitado por dichos valores. A temperatura inferior a -15°C y superior a $+22,5^{\circ}\text{C}$, las propiedades eléctricas de la sal de Seignette son las ordinarias.

CONDUCTORES EN UN CAMPO ELÉCTRICO

§ 24. Equilibrio de cargas en un conductor

Los conductores de carga que hay en un conductor son capaces de trasladarse bajo la acción de una fuerza tan pequeña como se quiera. Por eso, para el equilibrio de las cargas en un conductor es necesario que se cumplan las condiciones siguientes:

1. La intensidad del campo en todas partes dentro del conductor debe ser nula,

$$\mathbf{E} = 0. \quad (24.1)$$

De acuerdo con (8.2), esto significa que el potencial dentro del conductor debe ser constante ($\psi = \text{const}$).

2. La intensidad del campo en la superficie del conductor debe estar en cada punto dirigida según la normal a la superficie:

$$\mathbf{E} = E_n. \quad (24.2)$$

Por consiguiente, en el caso del equilibrio de las cargas, la superficie del conductor será equipotencial.

Si a un cuerpo conductor se le comunica cierta carga q , ésta se distribuye de modo que las condiciones de equilibrio se conserven. Figurémonos una superficie cerrada arbitraria comprendida totalmente dentro de los límites del cuerpo. Si las cargas están en equilibrio, el campo está ausente en cada punto dentro del conductor, por lo que el flujo del vector de desplazamiento eléctrico a través de la superficie será nulo. De acuerdo con el teorema de Gauss, la suma de las cargas que hay dentro del recinto abarcado por la superficie también será nula. Esto es justo para una superficie de cualesquiera dimensiones extendida dentro del conductor arbitrariamente. Por consiguiente, en equilibrio, en ningún sitio dentro del conductor puede haber cargas excesivas; todas ellas se distribuyen por la superficie del conductor con cierta densidad σ .

Como en estado de equilibrio no hay cargas excesivas dentro del conductor, la extracción de substancia de cierto espacio dentro de éste no se reflejará en la disposición de equilibrio de las cargas. Por lo tanto, la carga excesiva se distribuye en un conductor hueco lo mismo que en otro macizo, es decir, por su superficie externa. En la superficie del hueco, en estado de equilibrio, no pueden situarse las cargas elementales del mismo signo que forman la carga q se repelen entre sí y, por lo tanto, tienden a situarse a las mayores distancias unas de otras.

Imaginemos una superficie cilíndrica pequeña formada por normales a la superficie del conductor, cuyas bases, de magnitud dS , se encuentren una dentro del conductor y otra fuera de él (fig. 24.1.)

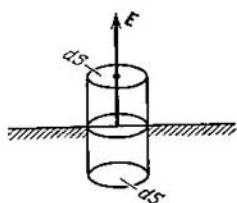


Fig. 24.1.

El flujo del vector de desplazamiento eléctrico a través de la parte interna de la superficie es nulo E , y, por lo tanto, también D . Fuera del conductor, en la inmediación a él, la intensidad del campo E está dirigida según la normal a la superficie. Por eso, para la superficie lateral del cilindro que sobresale del conductor, $D_n = 0$, y para la base exterior $D_n = D$ (esta base se supone situada muy cerca de la superficie del conductor). Por consiguiente, el flujo de desplazamiento a través de la superficie considerada es igual a $D dS$, donde

D es la magnitud del desplazamiento en la inmediación de la superficie del conductor. Dentro del cilindro hay una carga extraña σdS

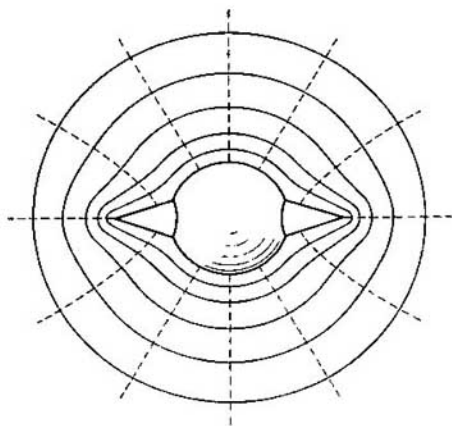


Fig. 24.2.

(σ es la densidad de carga en el sitio dado de la superficie del conductor). Aplicando el teorema de Gauss, obtenemos: $D dS = \sigma dS$, es decir, $D = \sigma$. De aquí se sigue que la intensidad del campo en

las proximidades de la superficie del conductor es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad (24.3)$$

donde ϵ es la permitividad del medio que rodea al conductor (compárese con la fórmula (14.6) obtenida para el caso en que $\epsilon = 1$).

Estudieemos el campo que crea el conductor cargado que representa la fig. 24.2. A distancias grandes del conductor, las superficies equipotenciales tienen la forma de esfera característica de una carga puntual (en la figura, por falta de espacio, la superficie esférica se representa a una distancia pequeña del conductor; con líneas que trazos se indican las líneas de intensidad del campo). A medida que se aproximan al conductor, las superficies equipotenciales se hacen más semejantes a la superficie de éste, que es equipotencial. Cerca de los salientes las superficies equipotenciales se sitúan más densamente, lo que significa que la intensidad del campo aquí es mayor. De esto se deduce que la densidad de cargas en los salientes es particularmente grande (véase 24.3). A esta misma conclusión se puede llegar teniendo en cuenta que, a causa de la repulsión mutua, las cargas tienden a situarse lo más lejos posible unas de otras.

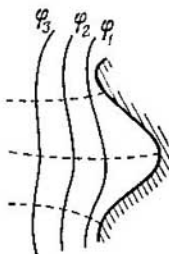


Fig. 24.3.

En las proximidades de los entrantes del conductor, las superficies equipotenciales se encuentran más separadas entre sí (véase la fig. 24.3). Respectivamente, la intensidad del campo y la densidad de cargas en estos sitios será menor. En general, la densidad de cargas para un potencial dado del conductor se determina por la curvatura de las superficies; aquélla aumenta cuando crece la curvatura positiva (convexidad) y disminuye cuando crece la curvatura negativa (concavidad). Especialmente grande suele ser la densidad de cargas en las puntas. Por eso la intensidad del campo en las proximidades de éstas puede ser tan grande que produce la ionización de las moléculas del gas que rodea el conductor. Los iones de signo contrario a q son atraídos por el conductor y neutralizan su carga. Los iones del mismo signo que q empiezan a moverse, alejándose del conductor, y arrastran consigo las moléculas neutras del gas. Como resultado se produce un movimiento apreciable del gas, llamado viento eléctrico. La carga del conductor disminuye como si se escapara por la punta y fuera arrastrada por el viento. Por eso este fenómeno se denomina escape de la carga por la punta.

§ 25. Conductor en un campo eléctrico externo

Cuando un conductor sin carga se introduce en un campo eléctrico, los portadores de carga se ponen en movimiento: los positivos en el sentido del vector E y los negativos en el sentido contrario. Como resultado, en los extremos del conductor surgen cargas de signos contrarios llamadas *cargas inducidas* (fig. 25.1; las líneas de intensidad del campo exterior se representan por medio de líneas de trazos). El campo de estas cargas tiene sentido contrario al del campo exterior. Por consiguiente, la acumulación de cargas en los

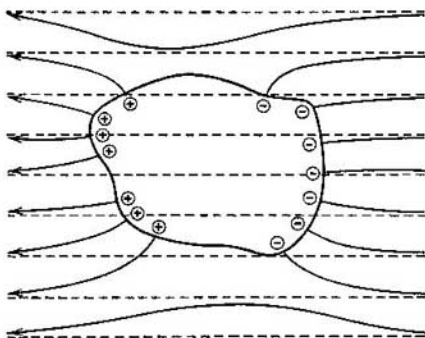


Fig. 25.1.

extremos del conductor hace que el campo se debilite en él. La redistribución de los portadores de carga continúa mientras no se cumplen las condiciones (24.1) y (24.2), es decir, hasta que la intensidad del campo dentro del conductor se anula y las líneas de intensidad fuera de este último son perpendiculares a su superficie (véase la fig. 25.1). De este modo, un conductor neutro introducido en un campo eléctrico interrumpe parte de las líneas de intensidad, las cuales terminan en las cargas inducidas negativas y empiezan de nuevo en las positivas.

Las cargas inducidas se distribuyen por la superficie externa del conductor. Si dentro del conductor existe una cavidad, con la distribución de equilibrio de las cargas inducidas el campo dentro de ella es nulo. En esto se basa la protección electrostática. Cuando un aparato cualquiera se quiere proteger de la acción de los campos exteriores se rodea de una pantalla conductora. El campo exterior

se compensa dentro de la pantalla con las cargas inducidas que surgen en su superficie. La acción de la pantalla también es buena si no se hace continua, sino en forma de red densa.

§ 26. Capacidad eléctrica

La carga q que se le comunica a un conductor se distribuye por su superficie de tal modo que la intensidad del campo dentro de él sea nula. Esta distribución es única. Por eso, si a un conductor, que tenga ya una carga q , se le comunica otra carga de la misma magnitud, esta segunda carga debe distribuirse por el conductor exactamente de la misma forma que la primera, de lo contrario crearía en el conductor un campo distinto de cero. Conviene advertir que esto es justo solamente para un conductor que esté lejos de otros cuerpos (aislado). Si cerca del conductor dado hay otros cuerpos, la comunicación al conductor de una nueva porción de carga hace que varíe la polarización de dichos cuerpos o que varíen las cargas inducidas en ellos. Como resultado se altera la semejanza en la distribución de las distintas porciones de carga.

Así, las cargas de magnitud distinta se distribuyen análogamente en un conductor aislado (la relación de las densidades de carga en dos puntos arbitrarios de la superficie del conductor, cualquiera que sea la magnitud de la carga, será la misma). De aquí se infiere que el potencial de un conductor aislado es proporcional a la carga que hay en él. En efecto, el aumento en cierto número de veces de la carga conduce al crecimiento en el mismo número de veces de la intensidad del campo en cada punto del espacio que rodea el conductor. Respectivamente, el mismo número de veces aumenta el trabajo de traslación de una carga unitaria desde el infinito hasta la superficie del conductor, es decir, el potencial del conductor. Por lo tanto, para un conductor aislado

$$q = C\varphi. \quad (26.1)$$

El coeficiente de proporcionalidad C entre el potencial y la carga se llama *capacidad eléctrica* (o abreviado, simplemente *capacidad*) del conductor. De (26.1) se sigue que

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (26.2)$$

De acuerdo con (26.2), la capacidad es numéricamente igual a la carga que comunicada al conductor eleva su potencial en una unidad.

Calculemos el potencial de una esfera de radio R cargada. Entre la diferencia de potencial y la intensidad del campo existe la relación (8.6). Por eso el potencial de la esfera se puede hallar integrando la expresión (20.9) respecto de r desde R hasta ∞ (el potencial en el

infinito se supone igual a cero):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{q}{\epsilon r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R}. \quad (26.3)$$

Comparando (26.3) con (26.2) hallamos que la capacidad de una esfera aislada de radio R , sumergida en un dieléctrico homogéneo infinito de permitividad ϵ es

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (26.4)$$

Como unidad de capacidad se toma la de un conductor, cuyo potencial varía en 1 V cuando se le comunica la carga de 1 C. Esta unidad de capacidad se llama *faradio* (F).

En el sistema de Gauss la fórmula de la capacidad de una esfera aislada tiene la forma $C = \epsilon R$. Como ϵ es una magnitud adimensional, la capacidad tiene dimensión de longitud. Por unidad de capacidad se toma la de una esfera aislada de 1 cm de radio que se encuentra en el vacío. Esta unidad de capacidad se denomina *centímetro*. De acuerdo con (26.2)

$$1\text{F} = \frac{1\text{ C}}{1\text{ V}} = \frac{3 \cdot 10^9}{1/300} \text{ unid. CGSE de capacidad} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm.}$$

La capacidad de 1 F la tendría una esfera aislada de $9 \cdot 10^9$ m de radio, o sea, 1500 veces mayor que el radio de la Tierra. Por consiguiente, el faradio es una magnitud muy grande. Por eso en la práctica se utilizan las unidades fraccionarias del faradio: milifaradio (mF), microfaradio (μF), nanofaradio (nF) y picofaradio (pF) (véase el § 20, tabla 20.1 del tomo 1°).

§ 27. Condensadores

Los conductores aislados tienen poca capacidad. Incluso una esfera de las dimensiones de la Tierra tiene solamente 700 μF de capacidad. Sin embargo, en la práctica se suelen necesitar dispositivos que, con un potencial pequeño respecto de los cuerpos circundantes, acumulen («condensen») cargas de magnitud apreciable. Sirve de base a estos dispositivos, denominados *condensadores*, el hecho de que la capacidad eléctrica de un conductor aumenta al aproximar a él otros cuerpos. Esto se debe a que, bajo la acción del campo creado por el conductor cargado, en el cuerpo que se le acerca surgen cargas inducidas (si es conductor) o ligadas (si es dieléctrico). Las cargas de signo contrario a la q del conductor se sitúan más cerca de éste que las del mismo signo que q y, por lo tanto, ejercen más influencia en su potencial. Por eso, cuando se acerca al conductor cargado un cuerpo cualquiera, el potencial del conductor disminuye en magnitud absoluta. Según la fórmula (26.2), esto significa un aumento de la capacidad del conductor.

Los condensadores se hacen en forma de dos conductores situados cerca el uno del otro. Los conductores que forman un condensador se llaman armaduras. Para que los cuerpos exteriores no ejerzan influencia sobre la capacidad del condensador, a las armaduras se les da tal forma y se disponen de tal modo una con respecto de la otra, que el campo que crean las cargas que en ellas se acumulan se concentre dentro del condensador. Esta condición la cumplen (véase el § 14) dos láminas próximas entre sí, dos cilindros coaxiales y dos esferas concéntricas. Respectivamente existen condensadores planos, cilíndricos y esféricos. Como el campo está encerrado dentro del condensador, las líneas de desplazamiento eléctrico comienzan en una armadura y terminan en la otra. Por consiguiente, las cargas extrañas que surgen en las armaduras tienen la misma magnitud y signos distintos.

La principal característica de un condensador es su capacidad, entendiéndose por ella la magnitud proporcional a la carga q e inversamente proporcional a la diferencia de potencial entre las armaduras:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (27.1)$$

La diferencia de potencial $\varphi_1 - \varphi_2$ llámase tensión entre los puntos correspondientes¹⁾. Nosotros designaremos la tensión por la letra U .

Valiéndonos de esta designación, a la fórmula (27.1) se le puede dar la forma

$$C = \frac{q}{U}. \quad (27.2)$$

Aquí U es la tensión entre las armaduras.

La capacidad de los condensadores se mide en las mismas unidades que la de los conductores aislados (véase el párrafo precedente).

La magnitud de la capacidad se determina por la geometría del condensador (forma y dimensiones de las armaduras y magnitud del espacio entre ellas) y por las propiedades dieléctricas del medio que llena el espacio entre las armaduras. Hallemos la fórmula de la capacidad de un condensador plano. Si el área de la armadura es S y la carga que hay en ella es q , la intensidad del campo entre las armaduras será

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S}$$

(véanse las fórmulas (14.4) y (20.2); ϵ es la permitividad del medio que llena el espacio entre las armaduras.

¹⁾ Una definición más general de la magnitud llamada tensión se dará en el § 33 (véase la fórmula (33.6)).

De acuerdo con (8.6), la diferencia de potencial entre las armaduras es

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\epsilon_0 \epsilon S}.$$

De aquí se obtiene la fórmula de la capacidad del condensador plano

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}, \quad (27.3)$$

en la que S es el área de la armadura; d , la magnitud del espacio entre las armaduras, y ϵ , la permitividad de substancia que llena dicho espacio.

Advertimos que la capacidad de un conductor plano real se determina por la fórmula (27.3) con tanta mayor exactitud cuanto menor sea el espacio d en comparación con las dimensiones lineales de las armaduras.

De la fórmula (27.3) se deduce que la dimensión de la constante eléctrica ϵ_0 es igual a la dimensión de la capacidad dividida por la dimensión de una longitud. De acuerdo con esto, ϵ_0 se mide en faradios por metro (véase (4.2)).

Si se desprecia la dispersión del campo en las proximidades de los bordes de las armaduras, no es difícil obtener la fórmula de la capacidad del condensador cilíndrico

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln(R_2/R_1)}, \quad (27.4)$$

en la que l es la longitud del condensador y R_1 y R_2 son los radios de las armaduras interna y externa. Esta fórmula determina la capacidad de un condensador real con tanta mayor exactitud cuanto menor sea el espacio entre las armaduras $d = R_2 - R_1$ en comparación con l y R_1 .

La capacidad del condensador esférico es

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (27.5)$$

donde R_1 y R_2 son los radios de las armaduras interna y externa.

Además de por su capacidad, cada condensador se caracteriza por la tensión máxima $U_{\text{máx}}$ que se puede aplicar a las armaduras sin temer su perforación. Si esta tensión se supera, entre las armaduras salta una chispa, con lo que se destruye el dieléctrico y el condensador se inutiliza.

ENERGÍA DEL CAMPO ELÉCTRICO

§ 28. Energía de un conductor cargado

La carga q que hay en un conductor se puede considerar como un sistema de cargas puntuales Δq . En el § 7 obtuvimos para la energía de interacción de un sistema de cargas la expresión (véase la fórmula (7.5))

$$W_p = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i. \quad (28.1)$$

Aquí φ_i es el potencial que crean todas las cargas, excepto q_i , en el punto en que se encuentra la carga q_i .

La superficie del conductor es equipotencial. Por eso, los potenciales de los puntos, en los cuales se hallan las cargas puntuales Δq , son iguales entre sí y al potencial φ del conductor. Aplicando la fórmula (28.1) obtenemos la expresión de la energía del conductor cargado

$$W_p = \frac{1}{2} \sum \varphi \Delta q = \frac{1}{2} \varphi \sum \Delta q = \frac{1}{2} \varphi q. \quad (28.2)$$

Tomando en consideración la relación (26.2) se puede escribir

$$W_p = \frac{\varphi q}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (28.3)$$

Cualquiera de estas expresiones da la energía del conductor cargado.

§ 29. Energía de un condensador cargado

Sea el potencial de la armadura del condensador en que se encuentra la carga $+q$, igual a φ_1 , y el potencial de la armadura en que se halla la carga $-q$, igual a φ_2 . Entonces cada una de las cargas elementales Δq en que puede dividirse la carga $+q$ se encuentra en un punto de potencial φ_1 , y cada una de las cargas en que se puede dividir la carga $-q$, en un punto de potencial φ_2 . De acuerdo con la fórmula (28.1), la energía de este sistema de cargas será

$$W_p = \frac{1}{2} [(+q) \varphi_1 + (-q) \varphi_2] = \frac{1}{2} q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} qU. \quad (29.1)$$

Utilizando la relación (27.2) se pueden escribir las tres expresiones de la energía del condensador cargado:

$$W_p = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \quad (29.2)$$

Las fórmulas (29.2) sólo se diferencian de las (28.3) en que φ ha sido sustituida por U .

Valiéndose de la expresión de la energía potencial se puede hallar la fuerza con que las placas de un condensador plano se atraen entre sí. Supongamos que la distancia entre las placas puede variarse. Liguemos el origen del eje x con la placa izquierda (fig. 29.1). Entonces la coordenada x de la segunda placa determinará el espacio d entre las armaduras. De acuerdo con las fórmulas (27.3) y (29.2)

$$W_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \epsilon S} x.$$

Tomamos la diferencial de esta expresión respecto de x , suponiendo que la carga es invariable en las armaduras (el condensador está desconectado de la fuente de tensión). Como resultado obtenemos la proyección sobre el eje x de la fuerza que actúa sobre la placa derecha:

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 \epsilon S}.$$

El módulo de esta expresión da la magnitud de la fuerza con que las armaduras se atraen entre sí:

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \epsilon S}. \quad (29.3)$$

Fig. 29.1.

Ahora intentaremos calcular la fuerza de atracción entre las armaduras de un condensador plano como el producto de la intensidad del campo que crea una de ellas por la carga concentrada en la otra. Según la fórmula (14.3), la intensidad del campo creado por una de las armaduras es

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon_0 S}. \quad (29.4)$$

El dieléctrico debilita el campo ϵ veces en el espacio entre las placas, pero esto sólo ocurre dentro del dieléctrico (véase la fórmula (20.2) y el texto relacionado con ella). Las cargas que hay en las armaduras se encuentran fuera del dieléctrico y, por lo tanto, se hallan bajo la acción del campo de intensidad (29.4). Multiplicando la carga q de la armadura por esta intensidad, obtenemos la expresión de la fuerza

$$F' = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}. \quad (29.5)$$

Las fórmulas (29.3) y (29.5) no coinciden. Con la experiencia está de acuerdo el valor de la fuerza (29.3) que se obtiene de la fórmula de la energía. Esto se explica por el hecho de que, además de la fuerza «eléctrica» (29.5), sobre las armaduras actúan, por parte del dieléctrico, fuerzas mecánicas que tienden a separarlas

(véase el § 22; advertimos que tenemos en cuenta un dieléctrico líquido o gaseoso). En los bordes de las armaduras existe un campo disperso, cuya magnitud disminuye al alejarse de ellos (fig. 29.2). Las moléculas del dieléctrico, como tienen momento dipolar, experimentan la acción de una fuerza que las arrastra hacia la región en que el campo es más intenso (véase la fórmula (9.16)). Como resultado la presión entre las armaduras se eleva y aparece una fuerza que debilita e veces la acción de la fuerza (29.5).

Si un condensador cargado, con espacio de aire, se sumerge parcialmente en un dieléctrico líquido, se observa la introducción del dieléctrico en el espacio entre las placas (fig. 29.3). Este fenómeno se explica del modo siguiente. La permitividad del aire es prácticamente igual a la unidad. Por eso, hasta que las placas se sumergen en el dieléctrico, la capacidad del condensador se puede considerar que es $C_0 = \epsilon_0 S/d$ y la energía, $W_0 = q^2/2C_0$. Cuando el espacio se llena parcialmente de dieléctrico, el condensador se puede considerar como dos condensadores conectados en paralelo, uno de los cuales tiene el área de la armadura igual a xS (x es la parte relativa del espacio lleno de líquido) y está lleno de dieléctrico con $\epsilon > 1$, y el otro, con espacio de aire, tiene el área de la armadura igual a $(1-x)S$. Al conectar en paralelo los condensadores, sus capacidades se suman:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 S(1-x)}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon Sx}{d} = C_0 + \frac{\epsilon_0(\epsilon-1)S}{d} x > C_0.$$

Como $C > C_0$, la energía $W = q^2/2C$ será menor que W_0 (la carga q se supone invariable, es decir, el condensador fue desconectado de la fuente de tensión antes de sumergirlo en el líquido). Por lo tanto, desde el punto de vista energético resulta conveniente que el espacio entre las placas se llene de dieléctrico. Por eso el dieléctrico es arrastrado hacia el condensador y su nivel en dicho espacio se eleva. Esto, a su vez, hace que aumente la energía potencial del dieléctrico en el campo de fuerzas de la gravedad. Al fin de cuentas el nivel del dieléctrico en el espacio entre las placas se establece a cierta altura, correspondiente al mínimo de la energía sumaria (eléctrica y gravitatoria). Este fenómeno se parece al de la elevación capilar de un líquido en el espacio estrecho entre dos placas (véase el § 419 del tomo 1^o).

El arrastre del dieléctrico hacia el espacio entre las placas también se puede explicar desde el punto de vista microscópico. Junto

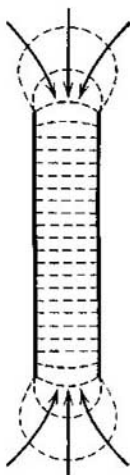


Fig. 29.2.

a los bordes de las placas del condensador hay un campo no homogéneo. Las moléculas del dieléctrico poseen momento dipolar intrínseco o lo adquieren bajo la acción del campo; por eso sobre ellas actúan fuerzas que tienden a trasladarlas a la región del campo intenso, es decir, hacia dentro del condensador. Bajo la acción de estas fuerzas el líquido se introduce en el espacio entre las placas hasta que las fuerzas eléctricas, que actúan sobre aquél en los bordes de las placas, se equilibran con el peso de la columna de líquido.

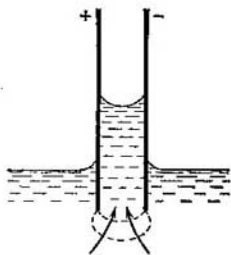


Fig. 29.3.

§ 30. Energía del campo eléctrico

La energía de un condensador cargado se puede expresar por medio de las magnitudes que caracterizan el campo eléctrico en el espacio entre las armaduras. Hacemos esto para un condensador plano. La sustitución en la fórmula $W_p = CU^2/2$ (véase (29.2)) de la expresión (27.3) de la capacidad da

$$W_p = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S U^2}{2d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \left(\frac{U}{d} \right)^2 Sd.$$

El cociente U/d es igual a la intensidad del campo en el espacio entre las dos placas, y el producto Sd es el volumen V que ocupa el campo. Por consiguiente,

$$W_p = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V. \quad (30.1)$$

La fórmula $W_p = q^2/2C$ relaciona la energía del condensador con la carga de sus armaduras; la fórmula (30.1) la relaciona con la intensidad del campo. Es lógico plantearse la pregunta: ¿dónde está localizada (es decir, concentrada) la energía?; ¿quién es portador de la energía, el campo o las cargas? Dentro de los límites de la electrostática, que estudia los campos constantes con el tiempo de las cargas en reposo, es imposible responder a este interrogante. Los campos constantes y las cargas que los condicionan no pueden existir aislados uno de otro. Pero los campos que varían con el tiempo pueden existir independientemente de las cargas que los excitan y propagarse en el espacio en forma de ondas electromagnéticas. La experiencia demuestra que las ondas electromagnéticas transportan energía. En particular, la energía a cuyas expensas existe la vida en la Tierra es transportada desde el Sol por las ondas electromagnéticas; la energía que hace que suene el receptor de radio es transportada desde la estación transmisora por dichas ondas, etc. Estos hechos obligan a reconocer que el portador de la energía es el campo.

Si el campo es homogéneo (como ocurre en el condensador plano), la energía contenida en él se distribuye en el espacio con la densidad constante w , igual a la energía del campo dividida por el volumen que éste ocupa. De la fórmula (30.1) sigue que la densidad de la energía en un campo de intensidad E creado en un medio de permittividad ϵ , es

$$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}. \quad (30.2)$$

Teniendo en cuenta la relación (19.6), la fórmula (30.2) se puede representar en la forma

$$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon}. \quad (30.3)$$

En un dieléctrico isótropo coinciden los sentidos de los vectores E y D . Por eso a la fórmula de la densidad de la energía se le puede dar la forma

$$w = \frac{ED}{2}.$$

Sustituyendo en esta fórmula D por su valor (19.3), obtenemos para w la siguiente expresión:

$$w = \frac{E(\epsilon_0 E + P)}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{EP}{2}. \quad (30.4)$$

El primer sumando de esta expresión coincide con la densidad de la energía del campo E en el vacío. El segundo sumando, como ahora demostraremos, es la energía que se gasta en polarizar el dieléctrico.

La polarización del dieléctrico consiste en que las cargas que entran en la composición de las moléculas se desplazan de sus posiciones de equilibrio bajo la acción del campo eléctrico E . Referido a la unidad de volumen del dieléctrico, el trabajo que se invierte en desplazar las cargas q_i a las magnitudes dr_i , es

$$dA = \sum_{A=1} q_i E dr_i = E d \left(\sum_{V=1} q_i r_i \right)$$

(para simplificar suponemos que el campo es homogéneo). Según la fórmula (15.1), $\sum_{A=1} q_i r_i$ es igual al momento dipolar de la unidad de volumen, es decir, a la polarización P del dieléctrico. Por lo tanto,

$$dA = E dP. \quad (30.5)$$

El vector P se relaciona con el E por medio de la fórmula $P = \kappa \epsilon_0 E$ (véase (16.2)). De aquí $dP = \kappa \epsilon_0 dE$. Sustituyendo este valor de dP en (30.5), obtenemos la expresión

$$dA = \kappa \epsilon_0 E dE = d \left(\frac{\kappa \epsilon_0 E^2}{2} \right) = d \left(\frac{EP}{2} \right).$$

Finalmente, integrando, hallamos la expresión del trabajo que se gasta en polarizar la unidad de volumen del dieléctrico

$$A = \frac{EP}{2}, \quad (30.6)$$

el cual coincide con el segundo sumando de la fórmula (30.4). De este modo, la expresión (30.3) incluye, además de la energía intrínseca del campo $\epsilon_0 E^2/2$, la energía $EP/2$ que se gasta, al crear el campo, en la polarización del dieléctrico.

Conociendo la densidad de la energía del campo en cada punto, se puede hallar la energía del campo comprendido en cualquier volumen V . Para esto hay que calcular la integral

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} dV. \quad (30.7)$$

Como ejemplo calcularemos la energía del campo de una esfera conductora de radio R , situada en un dieléctrico homogéneo infinito. La intensidad del campo en este caso sólo es función de r :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Descomponemos el espacio que rodea la esfera en capas esféricas concéntricas de espesor dr . El volumen de una capa será $dV = 4\pi r^2 dr$. En él se encuentra la energía

$$dW = w dV = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \frac{dr}{r^2}.$$

La energía del campo será

$$W = \int dW = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R} = \frac{q^2}{2C}$$

(de acuerdo con (26.4), $4\pi\epsilon_0 \epsilon R$ es la capacidad de la esfera).

La expresión que hemos obtenido coincide con la de la energía de un conductor de capacidad C que sea portador de una carga q (véase la fórmula (28.3)).

CAPÍTULO V

CORRIENTE ELÉCTRICA CONTINUA

§ 31. Corriente eléctrica

Si a través de una superficie imaginaria se traslada una carga total distinta de cero, se dice que a través de esta superficie pasa *corriente eléctrica*. La corriente puede pasar por los cuerpos sólidos (metales semiconductores), por los líquidos (electrólitos) y por los gases¹).

Para que la corriente eléctrica pase es necesario que en el cuerpo dado (o en el medio dado) hayan partículas con carga que puedan desplazarse dentro de los límites de todo el cuerpo. Estas partículas se llaman *portadoras de carga* y pueden ser electrones, iones o, finalmente, partículas macroscópicas, portadoras de carga excedente (por ejemplo, partículas de polvo o gotitas con carga).

La corriente se produce a condición de que dentro del cuerpo exista un campo eléctrico. Los portadores de carga participan en el movimiento térmico de las moléculas y, por consiguiente, se mueven con cierta velocidad v en ausencia del campo. Pero en este caso a través de una superficie arbitraria trazada mentalmente en el cuerpo, pasa en ambos sentidos, por término medio, la misma cantidad de portadores de carga de cualquier signo, de manera que la corriente es nula. Cuando se conecta el campo, al movimiento caótico de los portadores con velocidad v se superpone el movimiento ordenado con velocidad u ²). De este modo, la velocidad de los portadores será $v + u$. Como el valor medio de v (pero no v) es nulo, la velocidad media de los portadores será $\langle u \rangle$:

$$\langle v + u \rangle = \langle v \rangle + \langle u \rangle = \langle u \rangle.$$

De lo dicho se deduce que la corriente eléctrica se puede definir como un movimiento ordenado de las cargas eléctricas.

De característica cuantitativa de la corriente eléctrica sirve la magnitud de la carga transportada a través de la superficie considerada en la unidad de tiempo. Esta magnitud se llama *intensidad de la corriente*. Advertimos que la intensidad de la corriente es en esencia el flujo de carga a través de la superficie (compárese con el flujo de líquido, el flujo de energía, etc.).

¹) El paso de la corriente eléctrica a través de los gases se llama *descarga en gas*.

²) De un modo semejante a éste, en una corriente de gas, al movimiento térmico caótico de las moléculas se superpone el movimiento ordenado.

Si durante un tiempo dt se transporta a través de la superficie una carga dq , la intensidad de la corriente será

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (31.1)$$

La corriente eléctrica puede ser debida al movimiento tanto de los portadores positivos como de los negativos. El transporte de una carga negativa en un sentido equivale al transporte de una carga positiva de la misma magnitud en sentido contrario. Si la corriente la crean portadores de ambos signos, de tal modo que durante el tiempo dt los portadores positivos transportan a través de la superficie dada la carga dq^+ en un sentido y los portadores negativos la carga dq^- en el sentido opuesto, resultará que

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{|dq^-|}{dt}.$$

Como sentido de la corriente se toma aquel en que se trasladan los portadores positivos.

La corriente eléctrica puede estar distribuida por la superficie, a través de la cual ésta pasa, de un modo no uniforme. Con más detalle se puede caracterizar la corriente por medio del vector densidad de corriente \mathbf{j} . Este vector es numéricamente igual a la intensidad de la corriente dI a través de una superficie dS_{\perp} , situada en el punto dado perpendicularmente a la dirección del movimiento de los portadores, referida a la unidad de dicha superficie:

$$\mathbf{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (31.2)$$

Como sentido de \mathbf{j} se toma el del vector velocidad \mathbf{u}^+ del movimiento ordenado de los portadores positivos (o el sentido contrario al del vector \mathbf{u}^-).

El campo del vector densidad de corriente se puede representar por medio de las líneas de corriente, que se construyen lo mismo que las líneas de corriente de un líquido en movimiento, las líneas del vector \mathbf{E} , etc.

Conociendo el vector densidad de corriente en cada punto del espacio se puede hallar la intensidad de la corriente I a través de cualquier superficie S :

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (31.3)$$

De (31.3) se sigue que la intensidad de la corriente es el flujo del vector densidad de corriente a través de una superficie (véase la fórmula (11.7)).

Supongamos que la unidad de volumen contiene n^+ portadores positivos y n^- negativos. La magnitud algebraica de las cargas

de los portadores es igual respectivamente a e^+ y e^- . Si bajo la acción del campo los portadores adquieren las velocidades medias u^+ y u^- , en la unidad de tiempo pasarán a través de la unidad de superficie n^+u^+ portadores positivos¹⁾ que transportarán la carga $e^+n^+u^+$. Análogamente los portadores negativos transportarán en sentido contrario la carga $e^-n^-u^-$. De este modo, para la densidad de corriente se obtiene la siguiente expresión:

$$j = e^+n^+u^+ + |e^-|n^-u^-. \quad (31.4)$$

A esta expresión puede dársele forma vectorial:

$$j = e^+n^+u^+ + e^-n^-u^-. \quad (31.5)$$

(los dos sumandos tienen el mismo sentido: el vector u^- tiene sentido contrario al j , pero al multiplicarlo por el escalar negativo e^- se obtiene un vector de igual sentido que el j).

El producto e^+n^+ da la densidad de carga de los portadores positivos ρ^+ , y, análogamente, e^-n^- da la densidad de carga de los portadores negativos ρ^- . Por consiguiente, la expresión (31.5) se puede escribir en la forma

$$j = \rho^+u^+ + \rho^-u^-. \quad (31.6)$$

La corriente que no varía con el tiempo se llama *continua*. Para esta corriente es justa la correlación

$$I = \frac{q}{t}, \quad (31.7)$$

en la que q es la carga transportada a través de la superficie que se considera, en el tiempo t .

En el SI la unidad de intensidad de corriente, el *amperio* (A), es fundamental. Su definición se dará más adelante (véase el § 39). La unidad de carga, el *culombio*, se determina como la carga transportada en 1 s a través de la sección transversal de un conductor cuando la intensidad de la corriente es de 1 A.

Como unidad de intensidad de corriente en el sistema CGSE se toma la intensidad de una corriente con la cual, a través de una superficie dada, se transporta en 1 s una unidad CGSE de carga. De las relaciones (31.7) y (3.3) se sigue que

$$1 \text{ A} = 3 \cdot 10^9 \text{ unid. CGSE de intensidad de corriente.} \quad (31.8)$$

¹⁾ La expresión para el número de moléculas que pasan en la unidad de tiempo a través de la superficie contiene además el factor $1/4$, debido a que las moléculas se mueven caóticamente (véase la fórmula (95.6) del tomo 1º). En el caso que estudiamos no figura este factor, ya que los portadores de un signo dado se mueven ordenadamente en un sentido.

§ 32. Ecuación de continuidad

Consideremos en cierto medio, por el cual pasa la corriente, una superficie cerrada imaginaria S (fig. 32.1). La expresión $\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S}$ da la carga que sale en la unidad de tiempo del volumen V limitado por la superficie S . En virtud de la conservación de la carga, esta

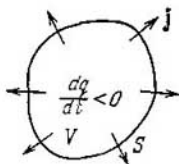


Fig. 32.1.

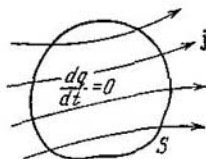


Fig. 32.2.

magnitud debe ser igual a la velocidad con que disminuye la carga q contenida en dicho volumen:

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}.$$

Representando q en la forma $\int_V \rho dV$, obtenemos la relación

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (32.1)$$

Bajo el signo de integral hemos escrito la derivada parcial de ρ respecto de t , ya que la densidad de carga puede depender no sólo del tiempo, sino también de las coordenadas (la integral $\int \rho dV$ es función solamente del tiempo). Transformamos el primer miembro de la igualdad (32.1) según el teorema de Ostrogradski—Gauss. Como resultado obtenemos

$$\int_V \nabla \mathbf{j} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (32.2)$$

La igualdad (32.2) debe cumplirse cualquiera que sea la elección que se haga del volumen V sobre el cual se toman las integrales. Esto sólo es posible si en cada punto del espacio se cumple la condición

$$\nabla \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (32.3)$$

La relación (32.3) se llama *ecuación de continuidad*. Ella (lo mismo que la ecuación (32.1)) expresa la ley de conservación de la carga. De acuerdo con (32.3), en los puntos que son manantiales del vector \mathbf{j} se produce una disminución de carga.

En el caso de una corriente estacionaria, el potencial en distintos puntos, la densidad de carga y otras magnitudes, son invariables. Por lo tanto, para la corriente estacionaria (es decir, continua) la ecuación (32.3) tiene la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (32.4)$$

Así, pues, en el caso de la corriente continua, el vector \mathbf{j} no tiene manantiales. Esto quiere decir que las líneas de corriente no empiezan ni terminan en ninguna parte. Por consiguiente, las líneas de corriente continua son siempre cerradas. Respectivamente $\oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ es igual a cero. Por esto, para la corriente continua la figura análoga a la representada en la fig. 32.1 tiene la forma que se muestra en la fig. 32.2.

§ 33. Fuerza electromotriz

Si en un conductor se crea un campo eléctrico y no se toman medidas para su mantenimiento, la traslación de los portadores de carga hace muy pronto que desaparezca el campo dentro del conductor y que la corriente cese. Para mantener la corriente durante

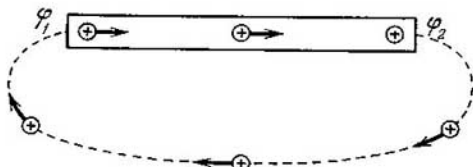


Fig. 33.1.

un tiempo suficientemente largo hay que retirar continuamente del extremo del conductor con menor potencial (se supone que los portadores de corriente son positivos) las cargas que trae a él la corriente, y suministrarlas continuamente al extremo con mayor potencial (fig. 33.1). En otras palabras, es necesario efectuar una circulación de las cargas con la cual éstas se muevan por un camino cerrado. Esto está de acuerdo con el hecho de que las líneas de corriente continua son cerradas (véase el párrafo precedente).

La circulación del vector intensidad del campo electrostático es nula. Por eso, en un circuito cerrado, a la vez que hay trozos en

los cuales los portadores positivos se mueven hacia el lado en que disminuye el potencial φ , debe haber trozos en los cuales el transporte de cargas positivas transcurre en el sentido en que aumenta φ , es decir, en contra de las fuerzas del campo electrostático (véase la parte del circuito representada con línea de trazos en la fig. 33.1). El transporte de los portadores en estos trozos sólo es posible con la ayuda de fuerzas de origen no electrostático, llamadas *fuerzas exteriores*. De este modo, para mantener la corriente se necesitan fuerzas exteriores que actúen a todo lo largo del circuito o en algunos de sus trozos. Estas fuerzas pueden deberse a procesos químicos, a la difusión de portadores de carga en un medio homogéneo o a través del límite entre dos cuerpos heterogéneos, a campos eléctricos (no electrostáticos) engendrados por campos magnéticos variables con el tiempo (véase el § 69), etc.

Las fuerzas exteriores se pueden caracterizar por el trabajo que realizan sobre las cargas que se desplazan por el circuito. La magnitud igual al trabajo de las fuerzas externas sobre una carga positiva unidad se llama *fuerza electromotriz* (f.e.m.) \mathcal{E} , que actúa en el circuito o en uno de sus trozos. Por consiguiente, si el trabajo de las fuerzas exteriores sobre una carga q es igual a A , será

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}. \quad (33.1)$$

De la comparación de las fórmulas (33.1) y (6.11) se infiere que la dimensión de la f.e.m. coincide con la del potencial. Por eso \mathcal{E} se mide en las mismas unidades que φ .

La fuerza exterior F_{ext} que actúa sobre la carga q se puede representar en la forma

$$F_{\text{ext}} = E^* q. \quad (33.2)$$

La magnitud vectorial E^* se denomina *intensidad del campo de las fuerzas externas*. El trabajo de las fuerzas externas sobre la carga q en el trozo del circuito 1-2, es

$$A_{12} = \int_1^2 F_{\text{ext}} dl = q \int_1^2 E^* dl.$$

Dividiendo este trabajo por q , se obtiene la f.e.m. que actúa en el trozo del circuito dado:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 E^* dl. \quad (33.3)$$

Una integral análoga calculada para el circuito cerrado da la f.e.m. que actúa sobre dicho circuito:

$$\mathcal{E} = \oint E^* dl. \quad (33.4)$$

Así, la f.e.m. que actúa sobre un circuito cerrado se puede definir como la circulación del vector intensidad de las fuerzas exteriores.

Además de las fuerzas exteriores, sobre la carga actúan las fuerzas del campo electrostático $F_E = qE$. Por lo tanto, la fuerza resultante que actúa en cada punto del circuito sobre la carga q es

$$F = F_E + F_{\text{ext}} = q(E + E^*).$$

El trabajo que realiza esta fuerza sobre la carga q en el trozo 1—2 del circuito se determina por la expresión

$$A_{12} = q \int_1^2 E \, dl + q \int_1^2 E^* \, d = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathcal{E}_{12}. \quad (33.5)$$

La magnitud numéricamente igual al trabajo realizado por las fuerzas electrostáticas y exteriores al trasladar una carga positiva unidad, recibe el nombre de *caída de tensión* o, simplemente, *tensión* U en el trozo del circuito dado. De acuerdo con la fórmula (33.5)

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (33.6)$$

Un trozo del circuito en el cual no actúan fuerzas exteriores, se dice que es *homogéneo*. Un trozo del circuito en el cual sobre los portadores de corriente actúan fuerzas exteriores, *no es homogéneo*. Para un trozo del circuito homogéneo

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (33.7)$$

es decir, la tensión coincide con la diferencia de potencial en los extremos del trozo.

§ 34. Ley de Ohm. Resistencia de los conductores

G. S. Ohm estableció experimentalmente una ley según la cual *la intensidad de la corriente que pasa por un conductor metálico homogéneo (en el sentido de que no existen fuerzas exteriores) es proporcional a la caída de tensión U en el conductor:*

$$I = \frac{1}{R} U. \quad (34.1)$$

Recordaremos que en el caso de un conductor homogéneo la tensión U coincide con la diferencia de potencial $\varphi_1 - \varphi_2$ (véase (33.6)).

La magnitud designada con la letra R en la fórmula (34.1) se llama *resistencia eléctrica* del conductor. De unidad de resistencia sirve el ohmio, que es igual a la resistencia de un conductor por el cual, cuando la tensión es de 1 V, pasa una corriente de 1 A de intensidad.

La magnitud de la resistencia depende de la forma y de las dimensiones del conductor, así como de las propiedades del material de

que está hecho. Para un conductor cilíndrico homogéneo

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (34.2)$$

donde l es la longitud del conductor; S , el área de su sección transversal, y ρ un coeficiente que depende de las propiedades del material, llamado *resistividad* o *resistencia eléctrica específica* de la sustancia. Si $l = 1$ y $S = 1$, entonces R es numéricamente igual a ρ . En el SI se mide ρ en *ohmios metro* ($\Omega \cdot \text{m}$).

Hallemos la relación entre los vectores \mathbf{j} y \mathbf{E} en un mismo punto del conductor. En un conductor isótropo el movimiento ordenado de los portadores de corriente se efectúa en el sentido del vector \mathbf{E} .

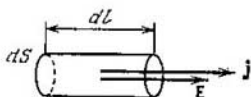


Fig. 34.1.

Por eso los sentidos de los vectores \mathbf{j} y \mathbf{E} coinciden¹⁾. En el entorno de un punto determinado aislemos mentalmente un elemento cilíndrico de volumen con las generatrices paralelas a los vectores \mathbf{j} y \mathbf{E} (fig. 34.1). A través de la sección transversal de este cilindro pasa una corriente de intensidad $j dS$. La tensión aplicada al cilindro es igual a $E dl$, siendo E la intensidad del campo en el punto dado. Finalmente, la resistencia del cilindro, según la fórmula (34.2), es $\rho (dl/dS)$. Sustituyendo estos valores en la fórmula (34.1), llegamos a la relación

$$j dS = \frac{dS}{\rho dl} E dl \quad \text{o} \quad j = \frac{1}{\rho} E.$$

Aprovechando que los vectores \mathbf{j} y \mathbf{E} tienen el mismo sentido se puede escribir

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}. \quad (34.3)$$

Esta fórmula expresa la ley de Ohm en forma diferencial.

La magnitud σ , inversa de ρ , que figura en (34.3) se denomina *conductividad eléctrica específica* del material. La unidad recíproca del ohmio es el *siemenio* (S). Respectivamente, la unidad de σ es el *siemenio por metro* (S/m).

Supongamos para simplificar que en el conductor sólo existen portadores de un signo. De acuerdo con la fórmula (31.5), la den-

¹⁾ En los cuerpos anisótropos los sentidos de los vectores \mathbf{j} y \mathbf{E} , en general, no coinciden. En estos cuerpos la relación entre \mathbf{j} y \mathbf{E} se establece por medio del tensor de conducción.

sidad de corriente en este caso será

$$\mathbf{j} = en\mathbf{u}. \quad (34.4)$$

Comparando esta expresión con la fórmula (34.3) se llega a la conclusión de que la velocidad del movimiento ordenado de los portadores de corriente es proporcional a la intensidad del campo E , es decir, a la fuerza que comunica a los portadores el movimiento ordenado. La proporcionalidad de la velocidad a la fuerza aplicada a un cuerpo se observa en aquellos casos en que, además de la fuerza que produce el movimiento, actúa sobre el cuerpo la fuerza de resistencia del medio. Esta fuerza es debida a la interacción de los portadores de corriente con las partículas de que está constituida la substancia del conductor. La existencia de la fuerza de resistencia al movimiento ordenado de los portadores de corriente condiciona la resistencia eléctrica del conductor.

La capacidad de una substancia para conducir la corriente eléctrica se caracteriza por su resistividad específica ρ o su conductividad específica σ . Su magnitud viene determinada por la naturaleza química de la substancia y por las condiciones, en particular la temperatura, en que se encuentra.

Para la mayoría de los metales a temperaturas próximas a la ambiente, ρ varía proporcionalmente a la temperatura absoluta T :

$$\rho \sim T. \quad (34.5)$$

A bajas temperaturas se observan desviaciones de esta ley (fig. 34.2). En la mayoría de los casos la dependencia de ρ respecto de T sigue la curva 1. La magnitud de la resistencia residual ρ_{res} depende en alto grado de la pureza del material y de la existencia de tensiones mecánicas residuales en la muestra. Por eso después del recido disminuye apreciablemente ρ_{res} . En un metal absolutamente puro, con una red cristalina perfectamente regular, a la temperatura de cero absoluto $\rho = 0$.

En un gran grupo de metales y aleaciones, a una temperatura del orden de varios kelvines la resistencia se anula de golpe (curva 2 de la fig. 34.2). Por primera vez este fenómeno, llamado *superconductividad*, fue descubierto en 1911 por H. Kamerlingh Onnes en el mercurio. Más tarde se descubrió la superconductividad en el plomo, estaño, cinc, aluminio y otros metales, así como en una serie de

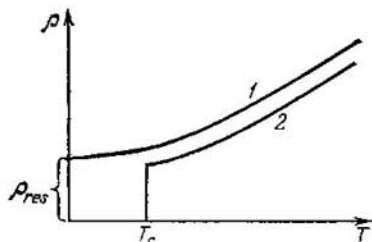


Fig. 34.2.

aleaciones. Cada superconductor tiene su temperatura crítica T_c , a la cual pasa al estado superconductor. Si sobre un superconductor actúa un campo magnético, el estado superconductor se altera. La magnitud del campo crítico B_c^1) que destruye la superconducción, es nula cuando $T = T_c$ y aumenta al disminuir la temperatura.

La explicación teórica completa de la superconductividad fue dada en 1957 por J. Bardeen, L. Cooper y J. Schrieffer (véase el § 56 del tomo 3°).

La dependencia de la resistencia eléctrica respecto de la temperatura sirve de base a los termómetros de resistencia. Un termómetro de este tipo consiste en un alambre metálico (generalmente de platino) arrollado a un armazón de porcelana o de mica. Graduado por puntos de temperatura constante, el termómetro de resistencia permite medir, con exactitud del orden de varias centésimas de grado, temperaturas tanto bajas como altas. Últimamente cada vez se utilizan más los termómetros de resistencia a base de semiconductores.

§ 35. Ley de Ohm para un trozo heterogéneo del circuito

En un trozo heterogéneo del circuito actúan sobre los portadores de corriente, además de las fuerzas electrostáticas eE , las fuerzas exteriores eE^* . Estas últimas son capaces de producir el movimiento ordenado de los portadores de corriente en la misma medida que las fuerzas electrostáticas. En el párrafo anterior se explicó que en un conductor homogéneo la velocidad media del movimiento ordenado de los portadores de corriente es proporcional a la fuerza electrostática eE . Es evidente que allí donde, además de las fuerzas electrostáticas, actúan sobre los portadores fuerzas exteriores, la velocidad media del movimiento ordenado de dichos portadores será proporcional a la fuerza total $eE + eE^*$. Respectivamente, la densidad de corriente en estos puntos resulta ser proporcional a la suma de las intensidades $E + E^*$:

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*). \quad (35.1)$$

La fórmula (35.1) generaliza la (34.3) al caso de un conductor no homogéneo. Ella expresa en forma diferencial la ley de Ohm para un trozo heterogéneo de circuito.

De la ley en forma diferencial se puede pasar a la forma integral de la ley de Ohm. Consideremos un trozo heterogéneo del circuito. Supongamos que dentro de este trozo existe una línea (que llamaremos contorno de corriente) que satisface las condiciones que siguen: 1) en cada sección perpendicular al contorno las magnitudes \mathbf{j} , σ , \mathbf{E} y \mathbf{E}^* tienen, con suficiente precisión, los mismos valores;

¹⁾ Con la letra B se designa la inducción del campo magnético (véase el § 40).

2) los vectores j , E y E^* están dirigidos en cada punto tangencialmente al contorno. La sección transversal del conductor puede no ser constante (fig. 35.1).

Elegimos arbitrariamente el sentido del movimiento por el contorno. Sea el sentido elegido el correspondiente a la traslación del extremo 1 al extremo 2 del trozo de circuito (sentido $1-2$). Proyectemos los vectores que figuran en la relación (35.1) sobre un elemento del contorno dl . Como resultado obtenemos

$$j_l = \sigma (E_l + E_l^*). \quad (35.2)$$

En virtud de las suposiciones hechas, la proyección de cada uno de los vectores es igual al módulo del vector tomado con signo más o menos en dependencia de cómo esté dirigido el vector con respecto a dl . Por ejemplo, $j_l = j$ si la corriente pasa en el sentido $1-2$, y $j_l = -j$ si la corriente pasa en el sentido $2-1$.

A consecuencia de la conservación de la carga, la intensidad de la corriente continua debe ser la misma en cada sección. Por eso la magnitud $I = j_l S$ es constante a lo largo del contorno. La intensidad de la corriente en este caso debe considerarse como una magnitud algebraica. Recordamos que el sentido $1-2$ se eligió arbitrariamente. Por esto, si la corriente pasa en el sentido elegido, deberá considerarse positiva, y si pasa en el sentido contrario (es decir, del extremo 2 al 1), su intensidad se debe considerar negativa.

Sustituimos en (35.2) j_l por la relación I/S y la conductividad σ por la resistividad ρ . Como resultado se obtiene la relación

$$I \frac{\rho}{S} = E_l + E_l^*.$$

Multiplicamos esta relación por dl y la integramos a lo largo del contorno:

$$I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \int_1^2 E_l dl + \int_1^2 E_l^* dl.$$

La expresión $\rho dl/S$ es la resistencia del trozo del contorno de la longitud dl , y su integral es la resistencia R del trozo del circuito. La primera integral del segundo miembro da $\varphi_1 - \varphi_2$, mientras que la segunda, la f.e.m. \mathcal{E}_{12} que actúa sobre el trozo. De este modo llegamos a la fórmula

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (35.3)$$

La f.e.m. \mathcal{E}_{12} , lo mismo que la intensidad de la corriente I , es una magnitud algebraica. En el caso en que la f.e.m. facilita

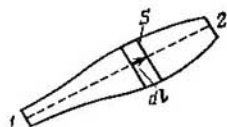


Fig. 35.1.

el movimiento de los portadores de corriente positivos en el sentido elegido (o sea, en el $I-2$), $\mathcal{E}_{12} > 0$. Si la f.e.m. dificulta el movimiento de los portadores positivos en dicho sentido, $\mathcal{E}_{12} < 0$.

Escribimos (35.3) en la forma

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}. \quad (35.4)$$

Esta fórmula expresa la ley de Ohm para un trozo heterogéneo del circuito. Suponiendo $\varphi_1 = \varphi_2$, se obtiene la expresión de la ley de Ohm para un circuito cerrado:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (35.5)$$

Aquí \mathcal{E} es la f.e.m. que actúa en el circuito y R , la resistencia sumaria de todo éste.

§ 36. Circuitos derivados. Reglas de Kirchhoff

El cálculo de los circuitos derivados se simplifica mucho si se utilizan las reglas o leyes enunciadas por Kirchhoff. Estas reglas son dos. La primera de ellas se refiere a los nudos de un circuito. Se llama *nudo* el punto en el cual concurren más de dos conductores

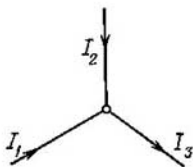


Fig. 36.1.

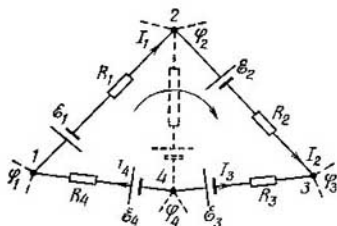


Fig. 36.2.

(fig. 36.1). La corriente que llega al nudo se considera que tiene un signo (más o menos) y la que sale de él, que tiene otro (menos o más).

La primera regla de Kirchhoff dice que *la suma algebraica de las corrientes que llegan a un nudo es nula*:

$$\sum I_k = 0. \quad (36.1)$$

Esta regla se infiere de la ecuación de continuidad, es decir, al fin de cuentas, de la ley de conservación de la carga. Para la corriente continua $\nabla \mathbf{j}$ es en todas partes nulo (véase (32.4)). Por consi-

guiente, el flujo del vector \mathbf{j} (o sea, la suma algebraica de las corrientes que pasan a través de la superficie cerrada imaginaria que rodea el nudo) debe ser nulo.

La ecuación (36.1) se puede escribir para cada uno de los N nudos del circuito. Pero independientes sólo son $N - 1$ ecuaciones; la N -ésima será consecuencia de ellas.

La segunda regla se refiere a cualquier contorno cerrado (malla) escogido en un circuito derivado (véase, por ejemplo, el contorno 1-2-3-4-1 en la fig. 36.2). Establecemos un sentido de recorrido (por ejemplo, en sentido horario como se indica en la figura) y aplicamos a cada una de las partes no ramificadas del contorno la ley de Ohm:

$$I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1,$$

$$I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_2,$$

$$I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 + \mathcal{E}_3,$$

$$I_4 R_4 = \varphi_4 - \varphi_1 + \mathcal{E}_4.$$

Al sumar estas expresiones los potenciales se simplifican y se obtiene la ecuación

$$\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_k, \quad (36.2)$$

que expresa la *segunda regla* de Kirchhoff.

La ecuación (36.2) se puede formar para todos los contornos cerrados (mallas) que pueden aislarse mentalmente en el circuito derivado. Pero independientes sólo serán las ecuaciones de aquellos contornos que no se pueden obtener por superposición de otros contornos. Así, por ejemplo, para el circuito representado en la figura 36.3 se pueden formar tres ecuaciones:

- 1) para el contorno 1-2-3-6-1,
- 2) para el contorno 3-4-5-6-3,
- 3) para el contorno 1-2-3-4-5-6-1.

El último contorno se obtiene por superposición de los dos primeros. Por eso su ecuación no será independiente. Como independientes pueden tomarse dos cualesquiera de las tres ecuaciones.

Al formar las ecuaciones de la segunda regla de Kirchhoff, a las corrientes y fuerzas electromotrices hay que atribuirles signos de acuerdo con el sentido de recorrido elegido. Por ejemplo, la corriente I_1 en la fig. 36.3 debe considerarse negativa, ya que va al encuentro del sentido de recorrido elegido. A la f.e.m. \mathcal{E}_1 también debe atribuírsele el signo menos, puesto que actúa en sentido contrario al de recorrido, y así sucesivamente.

El sentido de recorrido en cada uno de los contornos se puede elegir de un modo absolutamente arbitrario e independientemente del sentido elegido en otros contornos. Con esto puede ocurrir que

una misma corriente y una misma f.e.m. figura en distintas ecuaciones con signos diferentes (así ocurre con la corriente I_2 en la fig. 36.3, cuando los sentidos de recorrido son los que se indican en los contornos). Esto, sin embargo, no tiene ninguna importancia, porque la variación del sentido de recorrido sólo hace que se cambien

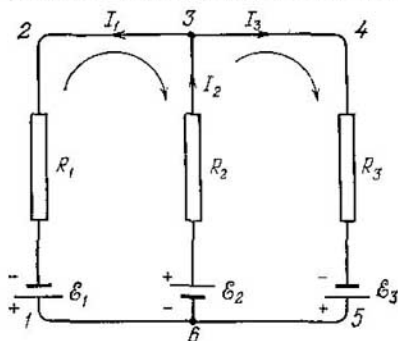


Fig. 36.3.

de distintas corrientes que pasan por el circuito derivado. Por eso, si se dan las fuerzas electromotrices y las resistencias en todos los trozos no ramificados, se pueden calcular todas las corrientes. También se pueden resolver problemas de otro género, por ejemplo, hallar las fuerzas electromotrices que hay que intercalar en cada uno de los trozos del circuito para obtener, con las resistencias dadas, las corrientes necesarias.

§ 37. Potencia de la corriente

Consideremos un trozo arbitrario del circuito de corriente continua a cuyos extremos está aplicada una tensión U . Durante un tiempo t a través de cada sección del conductor pasa la carga $q = It$. Esto equivale a que la carga It se traslada en el tiempo t de un extremo del conductor a otro. Con esto las fuerzas del campo electrostático y las fuerzas exteriores que actúan sobre el trozo del circuito dado, realizan el trabajo

$$A = Uq = UIt \quad (37.1)$$

(recordamos que la tensión U se define como el trabajo que realizan las fuerzas electrostáticas y exteriores durante la traslación de una carga positiva unitaria; véase la fórmula (33.6)).

todos los signos de la ecuación (36.2) por los contrarios.

Al formar las ecuaciones debe recordarse que a través de cualquier sección de un trozo no ramificado del circuito pasa la misma corriente. Por ejemplo, por el trozo desde el punto 6 hasta la fuente de corriente \mathcal{E}_2 pasa la misma corriente I_2 que por el trozo desde la fuente \mathcal{E}_2 hasta el punto 3.

El número de ecuaciones independientes que se forman de acuerdo con las reglas primera y segunda de Kirchhoff resulta ser igual al número

Dividiendo el trabajo A por el tiempo t durante el cual se realiza, obtenemos la potencia que desarrolla la corriente en el trozo del circuito considerado:

$$P = UI = (\varphi_1 - \varphi_2) I + \epsilon_{12} I. \quad (37.2)$$

Esta potencia se puede gastar en que el trozo del circuito que se considera realice trabajo sobre los cuerpos exteriores (para lo cual el trozo del circuito deberá moverse en el espacio), en el transcurso de reacciones químicas y, finalmente, en calentar dicho trozo del circuito.

La razón de la potencia ΔP desarrollada por la corriente en un volumen ΔV del conductor, a la magnitud del dicho volumen, se llama *potencia específica de la corriente* P_{esp} en el punto dado del conductor. Por definición, la potencia específica

$$P_{\text{esp}} = \frac{\Delta P}{\Delta V}. \quad (37.3)$$

Convencionalmente, la potencia específica es la potencia que se desarrolla en la unidad de volumen del conductor.

La expresión de la potencia específica de la corriente se puede obtener partiendo de los razonamientos siguientes. La fuerza e ($\mathbf{E} + \mathbf{E}^*$) desarrolla, al moverse el portador de corriente, la potencia

$$P' = e (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) (\mathbf{v} + \mathbf{u}).$$

Promediamos esta expresión por los portadores contenidos en un volumen ΔV , dentro de cuyos límites \mathbf{E} y \mathbf{E}^* se puedan considerar constantes. Como resultado obtenemos

$$\begin{aligned} \langle P' \rangle &= e (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \langle \mathbf{v} + \mathbf{u} \rangle = \\ &= e (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \langle \mathbf{v} \rangle + e (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \langle \mathbf{u} \rangle = e (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \langle \mathbf{u} \rangle \end{aligned}$$

(recordamos que $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$).

La potencia ΔP desarrollada en el volumen ΔV se puede hallar multiplicando $\langle P' \rangle$ por el número de portadores de corriente que hay en dicho volumen, que es igual a $n\Delta V$ (n es el número de portadores que hay en la unidad de volumen). De este modo

$$\Delta P = \langle P' \rangle n\Delta V = e (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \langle \mathbf{u} \rangle n\Delta V = \mathbf{j} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \Delta V$$

(véase (34.4)). De aquí

$$P_{\text{esp}} = \mathbf{j} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*). \quad (37.4)$$

Esta igualdad es la forma diferencial de la expresión integral (37.2).

§ 38. Ley de Joule—Lenz

En el caso en que el conductor está en reposo y en él no se producen transformaciones químicas, el trabajo de la corriente (37.1) se gasta en aumentar la energía interna del conductor, como resultado de lo cual éste se calienta. Es costumbre decir que cuando la corriente pasa por un conductor se desprende el calor

$$Q = UIt.$$

Sustituyendo, de acuerdo con la ley de Ohm, U por RI , obtenemos la fórmula

$$Q = RI^2t. \quad (38.1)$$

La relación (38.1) fue establecida experimentalmente por J. P. Joule, e independientemente de él, por E. J. Lenz, y lleva el nombre de *ley de Joule—Lenz*.

Si la intensidad de la corriente varía con el tiempo, la cantidad de calor que se desprende durante el tiempo t se calcula por la fórmula

$$Q = \int_0^t RI^2 dt. \quad (38.2)$$

De la fórmula (38.1), que determina el calor que se desprende en todo el conductor, se puede pasar a la expresión que caracteriza el desprendimiento de calor en distintos puntos de éste. Aislemos en el conductor, del mismo modo que lo hicimos al deducir la fórmula (34.3), un elemento de volumen en forma de cilindro (véase la fig. 34.1). De acuerdo con la ley de Joule—Lenz, durante el tiempo dt se desprende en este volumen el calor

$$dQ = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS} (j dS)^2 dt = \rho j^2 dV dt \quad (38.3)$$

($dV = dS dl$ es la magnitud del elemento de volumen).

Dividiendo la expresión (38.3) por dV y dt , hallamos la cantidad de calor que se desprende en la unidad de volumen por unidad de tiempo:

$$Q_{\text{esp}} = \rho j^2. \quad (38.4)$$

Por analogía con el nombre de la magnitud (37.3), la magnitud Q_{esp} se puede llamar *potencia térmica específica de la corriente*.

La fórmula (38.4) es la forma diferencial de la ley de Joule—Lenz. Esta expresión se puede obtener de la relación (37.4). Sustituyendo en (37.4) $\mathbf{E} + \mathbf{E}^*$ por $\mathbf{j}/\sigma = \rho \mathbf{j}$ (véase (35.1)), llegamos

a la expresión

$$P_{\text{esp}} = \rho j^2,$$

que coincide con (38.4).

Advertimos que Joule y Lenz establecieron su ley para un trozo homogéneo del circuito. No obstante, como se deduce de los cálculos expuestos en este párrafo, las fórmulas (38.1) y (38.4) también son válidas para un trozo no homogéneo, a condición de que las fuerzas exteriores que actúan en él no sean de origen químico.