

CAPÍTULO VI

CAMPO MAGNÉTICO EN EL VACÍO

§ 39. Interacción de las corrientes

La experiencia demuestra que las corrientes eléctricas interactúan entre sí. Por ejemplo, dos conductores rectilíneos paralelos delgados por los cuales pasan corrientes (que llamaremos corrientes directas) se atraen entre sí, cuando éstas tienen en ellos el mismo sentido, y se repelen, si tienen sentidos opuestos. La fuerza de interacción correspondiente a la unidad de longitud de cada uno de los conductores paralelos es proporcional a las magnitudes de las corrientes que pasan por ellos I_1 e I_2 e inversamente proporcional a la distancia b que los separa:

$$F_{\text{unidad}} = k \frac{2I_1 I_2}{b}. \quad (39.1)$$

Por razones que quedarán claras más adelante, el coeficiente de proporcionalidad lo designaremos por $2k$.

La ley de la interacción de las corrientes fue establecida en 1820 por A. M. Ampere. La expresión general de esta ley, válida para conductores de forma cualquiera, se dará en el § 44.

Basándose en la relación (39.1) se establece la unidad de intensidad de la corriente en el SI y en el sistema electromagnético absoluto de unidades (sistema CGSM). La unidad de intensidad de corriente en el SI, el *amperio*, se define como la intensidad de la corriente invariable que, al pasar por dos conductores rectilíneos paralelos de longitud infinita y sección circular despreciable por su pequeñez, situados a 1 m de distancia uno de otro en el vacío, produce entre ellos una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ N por cada metro de longitud.

La unidad de carga, llamada *culombio*, se define como la carga que pasa en 1 s a través de la sección transversal de un conductor por el cual fluye una corriente continua de 1 A de intensidad. De acuerdo con esto, el culombio se llama también *amperio-segundo* (A·s).

En forma racionalizada la fórmula (39.1) se escribe como sigue:

$$F_{\text{unidad}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}, \quad (39.2)$$

donde μ_0 es la denominada *constante magnética* (compárese con la fórmula (4.1)). Para hallar el valor numérico de μ_0 nos valemos de que, según la definición del amperio, si $I_1 = I_2 = 1$ A y $b = 1$ m, la fuerza F_{unidad} es igual a $2 \cdot 10^{-7}$ N/m. Sustituyendo estos valores

en la fórmula (39.2), resulta:

$$2 \cdot 10^{-7} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{1}.$$

De aquí

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}^1. \quad (39.3)$$

El coeficiente k de la fórmula (39.1) se puede hacer igual a la unidad a expensas de la elección de la unidad de intensidad de corriente. Así se establece la unidad electromagnética absoluta de intensidad de corriente (unid. CGSM de intensidad de corriente), que se define como la intensidad de una corriente tal que, al pasar por un conductor rectilíneo fino de longitud infinita, actúa sobre una corriente directa igual y paralela a ella, distanciada 1 cm, con la fuerza de 2 dinas por cada centímetro de longitud.

En el sistema CGSE k resulta ser distinta de la unidad de magnitud dimensional. De acuerdo con la fórmula (39.1) la dimensión de k se determina por la expresión siguiente:

$$[k] = \frac{[F_{\text{unid}} b]}{[I]^2} = \frac{[F]}{[I]^2}. \quad (39.4)$$

Hemos tenido en cuenta que la dimensión de F_{unid} es la dimensión de una fuerza dividida por la dimensión de una longitud; por eso la dimensión del producto $F_{\text{unid}} b$ es igual a la dimensión de una fuerza. Según las fórmulas (3.2) y (31.7)

$$[F] = \frac{[q]^2}{L^2}; \quad [I] = \frac{[q]}{T}.$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (39.4), hallamos que

$$[k] = \frac{T^2}{L^2}.$$

Por consiguiente, en el sistema CGSE se puede representar k en la forma

$$k = \frac{1}{c^2}, \quad (39.5)$$

donde c es una magnitud con dimensión de velocidad, llamada *constante electrodinámica*. Para hallar su valor numérico nos valemos de la relación (3.3) entre el culombio y la unid. CGSE de carga, que fue establecida experimentalmente. La fuerza de $2 \cdot 10^{-7}$ N/m equivale a $2 \cdot 10^{-4}$ din/cm. De acuerdo con la fórmula (39.1), con esta fuerza interaccionan dos corrientes de $3 \cdot 10^9$ unid. CGSE (o sea, de 1 A) cada una, cuando $b = 100$ cm. Por lo tanto,

$$2 \cdot 10^{-1} = \frac{1}{c^2} \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9}{100},$$

de donde

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (39.6)$$

El valor de la constante electrodinámica coincide con la magnitud de la velocidad de la luz en el vacío. De la teoría de Maxwell se infiere la existencia de las ondas electromagnéticas, cuya velocidad en el vacío es igual a la constante electrodinámica c . La coincidencia de c con la velocidad de la luz en el vacío dio a Maxwell base para suponer que la luz es una onda electromagnética.

El valor de k en la fórmula (39.1) es igual a 1 en el sistema CGSM y a $1/c^2 = 1/(3 \cdot 10^{10})^2$ s²/cm² en el sistema CGSE. De aquí se sigue que una corriente de

¹⁾ Henrio por metro (véase el § 64).

1 unid. CGSM de intensidad equivale a una corriente de $3 \cdot 10^{10}$ unid. CGSE de intensidad:

1 unid. CGSM de intensidad de corriente = $3 \cdot 10^{10}$ unid. CGSE de intensidad de corriente = 10 A. (39.7)

Multiplicando esta relación por 1 s, obtenemos que

1 unid. CGSM de carga = $3 \cdot 10^{10}$ unid. CGSE de carga = 10 C. (39.8)

De este modo

$$I_{\text{CGSM}} = \frac{1}{c} I_{\text{CGSE}}. \quad (39.9)$$

Respectivamente,

$$q_{\text{CGSM}} = \frac{1}{c} q_{\text{CGSE}}. \quad (39.10)$$

Entre las constantes ϵ_0 , μ_0 y c existe relación. Para establecer esta relación hallamos la dimensión y el valor numérico del producto $\epsilon_0 \mu_0$. De acuerdo con la fórmula (4.1) la dimensión de ϵ_0 es

$$[\epsilon_0] = \frac{[q]^2}{L^2 [F]}. \quad (39.11)$$

Según (39.2)

$$[\mu_0] = \frac{[F_{\text{unidad}}]}{[I]^2} = \frac{[F] T^2}{[I]^2}. \quad (39.12)$$

Multiplicando entre sí las expresiones (39.11) y (39.12) se obtiene

$$[\epsilon_0 \mu_0] = \frac{T^2}{L^2} = \frac{1}{[v]^2} \quad (39.13)$$

(v es la velocidad).

Teniendo en cuenta (4.2) y (39.3), el valor numérico del producto $\epsilon_0 \mu_0$ es

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} 4\pi \cdot 10^{-7} = \frac{1}{(3 \cdot 10^8)^2} \frac{s^2}{m^2}. \quad (39.14)$$

Finalmente, tomando en consideración (39.6), (39.13) y (39.14), obtenemos la relación que nos interesa:

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (39.15)$$

§ 40. Campo magnético

La interacción de las corrientes se efectúa por medio de un campo llamado *magnético*. Esta denominación procede de que, como descubrió en 1820 H. Ch. Oersted, el campo excitado por la corriente ejerce una acción orientadora sobre la aguja magnética. En el experimento de Oersted, un alambre, por el cual pasaba la corriente, estaba tendido sobre una aguja magnética, dispuesta en un soporte terminado en punta sobre el cual podía girar. Cuando se conectaba la corriente, la aguja se situaba en dirección perpendicular al alambre.

Si se cambiaba el sentido de la corriente, la aguja se volvía hacia el lado opuesto.

De la experiencia de Oersted se deduce que el campo magnético tiene carácter dirigido y se puede caracterizar por una magnitud vectorial. Esta magnitud se designa por medio de la letra B . Sería lógico que, por analogía con la intensidad del campo eléctrico E , se llamara B intensidad del campo magnético. Pero por razones históricas, a la característica fundamental de la intensidad del campo magnético se le dio el nombre de *inducción magnética*. En cambio, la denominación de «intensidad del campo magnético» resultó atribuida a una magnitud auxiliar H , análoga a la característica auxiliar D del campo eléctrico.

El campo magnético, a diferencia del eléctrico, no ejerce influencia sobre una carga en reposo. La fuerza se manifiesta únicamente cuando la carga se mueve.

Un conductor con corriente es un sistema neutro de cargas eléctricas, en el cual las cargas de un signo se mueven en un sentido y las cargas del otro signo, en el sentido contrario (o están en reposo). De aquí se sigue que el campo magnético es generado por las cargas en movimiento.

Así, las cargas en movimiento (corrientes) hacen que varíen las propiedades del espacio que las rodea, es decir, crean en él un campo magnético. Este campo se manifiesta en que sobre las cargas (corrientes) que se mueven en él actúan fuerzas.

La experiencia da, que para que el campo magnético, lo mismo que para el eléctrico, es justo el principio de superposición: *el campo B , creado por varias cargas en movimiento (corrientes) es igual a la suma vectorial de los campos B_i que engendran las cargas (corrientes) por separado:*

$$B = \sum B_i \quad (40.1)$$

(compárese con (5.7)).

§ 41. Campo de una carga en movimiento

El espacio es isótropo, por eso, si la carga está en reposo, todas las direcciones resultan ser equivalentes. Esto condiciona el hecho de que el campo electrostático que crea una carga puntual sea simétrico esférico.

En el caso en que la carga se mueve con la velocidad v , en el espacio aparece una dirección privilegiada (la del vector v). Por eso es de esperar que el campo magnético creado por una carga en movimiento tenga simetría axial. Advertimos que se trata del movimiento libre de la carga, es decir, de su movimiento con velocidad constante. Para que se produzca la aceleración es necesario que sobre la carga actúe un campo cualquiera (eléctrico o magnético). Este campo alteraría de por sí la isotropía del espacio.

Consideremos el campo magnético que crea en cierto punto P una carga puntual q que se mueve con la velocidad constante v (fig. 41.1). La excitación del campo se transmite de un punto a otro con la velocidad finita c . Por eso la inducción \mathbf{B} en el punto P en el instante t no se determina por la posición de la carga en el mismo instante t , sino por su posición en cierto instante anterior $t - \tau$:

$$\mathbf{B}(P, t) = f\{q, v, r(t - \tau)\}.$$

Aquí P significa el conjunto de las coordenadas del punto P determinadas en cierto sistema de referencia en reposo, y $r(t - \tau)$ es el radio vector trazado al punto P desde el punto en que se encuentra la carga en el instante $t - \tau$.

Si la velocidad del movimiento de la carga v es mucho menor que c ($v \ll c$), el tiempo de retraso τ será despreciable por su pequeñez. En este caso se puede considerar que el valor de \mathbf{B} en el instante t se determina por la posición de la carga en el mismo instante t . Con esta condición

$$\mathbf{B}(P, t) = f\{q, v, r(t)\} \quad (41.1)$$

(recordamos que $v = \text{const}$, por lo que $v(t - \tau) = v(t)$).

La forma de la función (41.1) sólo se puede establecer experimentalmente. No obstante, antes de dar el resultado del experimento, intentemos comprender qué dependencia puede ser ésta.

La suposición más simple consiste en que la magnitud del vector \mathbf{B} es proporcional a la carga q y a la velocidad v (cuando $v = 0$ el campo magnético está ausente). Hay que «construir» con el escalar q y los dos vectores dados v y r el vector \mathbf{B} que nos interesa. Esto se puede hacer multiplicando vectorialmente entre sí los vectores dados y multiplicando luego el resultado obtenido por el escalar. En definitiva se obtiene la expresión

$$q[\mathbf{vr}]. \quad (41.2)$$

Con el alejamiento de la carga (al aumentar r) el módulo de esta expresión crece. Es inverosímil que se comporte así la característica del campo, porque en los casos de otros campos que conocemos (electrostático y gravitacional) al alejarse de la fuente el campo no se intensifica, sino al contrario, se debilita, variando como $1/r^2$. Supongamos que el campo magnético de la carga en movimiento se comporta, al variar r , del mismo modo. La proporcionalidad inversa al cuadrado de r se puede obtener dividiendo la expresión (41.2) por r^3 . Como resultado se obtiene la expresión

$$\frac{q[\mathbf{vr}]}{r^3}. \quad (41.3)$$

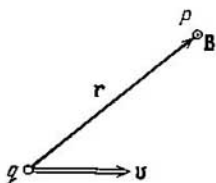


Fig. 41.1.

La experiencia da que, en el caso en que $v \ll c$, la inducción magnética del campo de la carga en movimiento viene determinada por la fórmula

$$\mathbf{B} = k' \frac{q [\mathbf{vr}]}{r^3}, \quad (41.4)$$

en la que k' es un coeficiente de proporcionalidad.

Conviene subrayar una vez más que los razonamientos que nos han conducido a la expresión (41.3) no se pueden considerar de ninguna manera como deducción de la fórmula (41.4). Estos razonamientos carecen de fuerza demostrativa. Su fin consiste en ayudar a comprender y recordar la fórmula (41.4). Pero esta fórmula sólo se puede obtener experimentalmente.

De la relación (41.4) se infiere que el vector \mathbf{B} en cada punto P tiene dirección perpendicular al plano que pasa por la dirección del vector \mathbf{v} y por el punto P , de manera que el giro en el sentido \mathbf{B} forma con la dirección \mathbf{v} un sistema dextrógiro (véase el círculo con punto en la fig. 41.4). Advertimos que \mathbf{B} es un pseudovector.

El valor del coeficiente de proporcionalidad k' depende de la elección de las unidades de las magnitudes que figuran en la fórmula (41.4). En forma racionalizada la relación (41.4) se escribe del modo siguiente:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q [\mathbf{vr}]}{4\pi r^3}. \quad (41.5)$$

A esta fórmula se le puede dar la forma

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q [\mathbf{vcr}]}{4\pi r^2} \quad (41.6)$$

(compárese con (5.3)). Es conveniente indicar que en las fórmulas análogas, en aquellos casos en que ϵ_0 está en el denominador, μ_0 está en el numerador, y al contrario.

La unidad de inducción magnética en el SI se llama *tesla* (T).

En los sistemas CGSE y CGSM la unidad de inducción magnética B se elige de manera que el coeficiente k' de la fórmula (41.4) sea igual a la unidad. Por consiguiente, entre las unidades B en estos sistemas existe la misma relación que entre las unidades de carga:

$$1 \text{ unid. } B \text{ CGSM} = 3 \cdot 10^{10} \text{ unid. } B \text{ CGSE} \quad (41.7)$$

(véase (39.8)). La unidad CGSM de inducción magnética tiene el nombre especial de *gaussio* (Gs).

El científico alemán K. F. Gauss propuso un sistema de unidades en el cual todas las magnitudes eléctricas (carga, intensidad de la corriente, intensidad del campo eléctrico, etc.) se miden en las unidades del sistema CGSE, mientras que las magnitudes magnéticas (inducción magnética, momento magnético, etc.), en las unidades del sistema CGSM. Este sistema de unidades se denomina *sistema de Gauss*.

En el sistema de Gauss, a consecuencia de las relaciones (39.9) y (39.10), en todas las fórmulas que contienen, además de magnitudes magnéticas, la inten-

sidad de la corriente o la carga, figura un factor $1/c$ por cada magnitud I o q que hay en ellas. Este factor transforma el valor de la magnitud correspondiente (I o q) expresado en unidades CGSE, en su valor expresado en unidades CGSM (sistema de unidades CGSM está construido de tal modo, que los coeficientes de proporcionalidad de todas las fórmulas son iguales a 1). Por ejemplo, en el sistema de Gauss la fórmula (41.4) tiene la forma

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{q [\mathbf{vr}]}{r^3}. \quad (41.8)$$

Señalaremos que la aparición de una dirección privilegiada en el espacio (la del vector \mathbf{v}) al moverse la carga, hace que el campo eléctrico de la carga en movimiento pierda su simetría esférica y adquiera simetría axial. El cálculo correspondiente da que las líneas \mathbf{E} del campo de la carga en movimiento libre tienen la forma que muestra la fig. 41.2. El vector \mathbf{E} en el punto P está dirigido

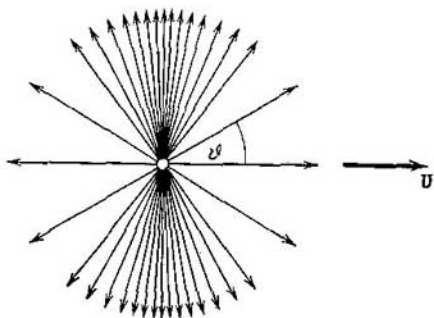


Fig. 41.2.

a lo largo del radio vector \mathbf{r} trazado desde el punto en que se encuentra la carga en el instante dado, al punto P . La magnitud misma de la intensidad del campo se determina por la fórmula

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{1 - v^2/c^2}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \vartheta]^{3/2}}, \quad (41.9)$$

en la que ϑ es el ángulo entre la dirección de la velocidad \mathbf{v} y la del radio vector \mathbf{r} .

Cuando $v \ll c$, el campo eléctrico de la carga en movimiento libre en cada instante no se diferencia prácticamente del campo electrostático que crearía una carga en reposo que se encontrara en el mismo punto en que en el instante dado se encuentra la carga en movimiento. Pero hay que recordar que este campo «electrostá-

tico» se traslada junto con la carga, a consecuencia de lo cual el campo en cada punto del espacio varía con el tiempo.

Para velocidades v comparables con c , el campo, en las direcciones perpendiculares a v resulta sensiblemente más intenso que en la dirección del movimiento a la misma distancia de la carga (véase la fig. 41.2, dibujada para $v/c = 0,8$). El campo se «achata» en la dirección del movimiento, concentrándose principalmente en las proximidades del plano que pasa por la carga y es perpendicular al vector v .

§ 42. Ley de Biot—Savart

Vamos a aclarar el carácter del campo magnético que crea un conductor delgado arbitrario por el cual pasa corriente. Consideremos un elemento pequeño del conductor cuya longitud sea dl . Este elemento contendrá $nS dl$ portadores de corriente (n es el número de portadores por unidad de volumen, y S , el área de la sección transversal del conductor en el sitio en que se ha tomado el elemento dl). En un punto cuya posición respecto del elemento dl esté determinada por el radio vector r (fig. 42.1), un portador de corriente e aislado creará un campo de inducción

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e [(\mathbf{v} + \mathbf{u}), \mathbf{r}]}{r^3}$$

(véase la fórmula (41.5)). Aquí \mathbf{v} es la velocidad del movimiento caótico y \mathbf{u} , la velocidad del movimiento ordenado.

El valor de la inducción magnética, promediado por los portadores de corriente contenidos en el elemento dl , es

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e [(\langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle), \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e \langle \mathbf{u} \rangle, \mathbf{r}}{r^3}$$

($\langle \mathbf{v} \rangle = 0$). Multiplicando esta expresión por el número de portadores que hay en el elemento de conductor (igual a $nS dl$), obtenemos la aportación al campo que hace el elemento dl :

$$d\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle nS dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{S [n e \langle \mathbf{u} \rangle], \mathbf{r}}{r^3} dl$$

(hemos introducido los factores escalares n y e bajo el signo del producto vectorial). Tomando en consideración que $ne \langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{j}$, se

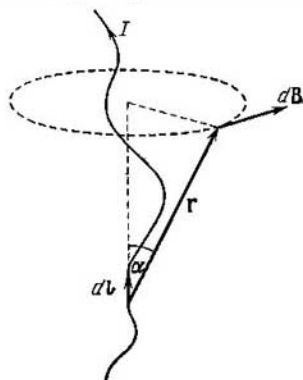


Fig. 42.1.

puede escribir

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{S |j, r| dl}{r^3}. \quad (42.1)$$

Introducimos el vector dl dirigido a lo largo de un elemento de corriente de longitud dl , en el sentido en que pasa la corriente. El módulo de este vector es dl . Como los sentidos de los vectores j y dl coinciden, existe la igualdad

$$j dl = j dl. \quad (42.2)$$

Haciendo esta sustitución en la fórmula (42.1), obtenemos

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{S j [dl, r]}{r^3}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que el producto Sj da la intensidad de la corriente I en el conductor, llegamos a la expresión definitiva que determina la inducción magnética del campo que crea un elemento de corriente de longitud dl :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [dl, r]}{r^3}. \quad (42.3)$$

Hemos deducido la fórmula (42.3) de la (41.5). En realidad la fórmula (42.3) fue establecida experimentalmente antes de conocerse la relación (41.5). Es más, esta relación fue deducida de la fórmula (42.3).

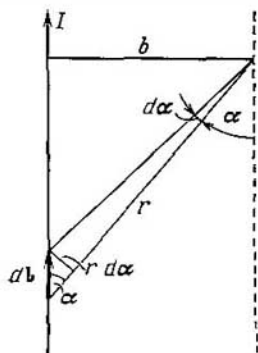
J. B. Biot y F. Savart estudiaron en 1820 los campos magnéticos que pasan por conductores delgados de forma diversa. P.-S. Laplace analizó los datos experimentales obtenidos por Biot y Savart y halló que el campo magnético de cualquier corriente puede ser calculado

como la suma vectorial (superposición) de los campos que crean las distintas porciones elementales de corriente. Para la inducción magnética del campo que crea un elemento de corriente de longitud dl , Laplace obtuvo la fórmula (42.3). Por eso esta relación lleva el nombre de *ley de Biot-Savart-Laplace* o sólo de *Biot-Savart*.

En la fig 42.1 se ve que el vector dB es perpendicular al plano que pasa por dl y por el punto en el cual se calcula el campo, de tal modo que el giro alrededor de dl en el sentido de dB está ligado con dl por la regla del sacacorchos. El módulo de dB se determina por la expresión

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \operatorname{sen} \alpha}{r^2}, \quad (42.4)$$

en la que α se el ángulo entre los vectores dl y r .



Aplicamos la fórmula (42.3) para calcular el campo de la corriente directa, es decir, el campo que crea la corriente que pasa por un conductor recto y fino de longitud infinita (fig. 42.2). Todos los vectores $d\mathbf{B}$ en un punto dado tienen el mismo sentido (en nuestro caso hacia detrás de la figura). Por esto, la suma de los vectores $d\mathbf{B}$ se puede sustituir por la suma de sus módulos. El punto en el cual calculamos la inducción magnética se halla a la distancia b del conductor.

Por la fig. 42.2 se ve que

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{b d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Sustituimos estos valores en la fórmula (42.4):

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I b d\alpha \sin \alpha \sin^2 \alpha}{b^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \sin \alpha d\alpha. \end{aligned}$$

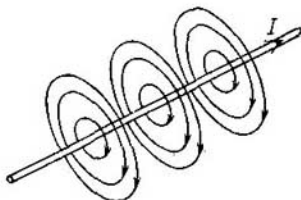


Fig. 42.3.

El ángulo α , para todos los elementos de la corriente directa infinita, varía entre los límites de 0 a π . Por consiguiente,

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}.$$

De este modo, la inducción magnética del campo de la corriente directa se determina por la fórmula

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}. \quad (42.5)$$

Las líneas de inducción magnética del campo de la corriente directa forman un sistema de circunferencias concéntricas que rodean el conductor (fig. 42.3).

§ 43. Fuerza de Lorentz

Sobre una carga que se mueve en un campo magnético actúa una fuerza que llamaremos *magnética*. Esta fuerza viene determinada por la carga q , la velocidad de su movimiento \mathbf{v} y la inducción magnética \mathbf{B} en el punto en que se encuentra la carga en el instante que se considera. La suposición más simple consiste en que el módulo de la fuerza F es proporcional a cada una de las tres magnitudes q , v y B . Además puede esperarse que F dependa de la orientación mutua de los vectores \mathbf{v} y \mathbf{B} . La dirección y el sentido del vector \mathbf{F} debe depender de las direcciones y sentidos de los vectores \mathbf{v} y \mathbf{B} .

Para «construir» el vector \mathbf{F} con el escalar q y los vectores \mathbf{v} y \mathbf{B} , multiplicamos entre sí vectorialmente \mathbf{v} y \mathbf{B} y luego multiplicamos el producto obtenido por el escalar q . Como resultado se obtiene la expresión

$$q [\mathbf{vB}]. \quad (43.1)$$

Empíricamente se ha establecido que la fuerza \mathbf{F} que actúa sobre una carga que se mueve en un campo magnético está determinada por la fórmula

$$\mathbf{F} = kq [\mathbf{vB}], \quad (43.2)$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad que depende de las unidades que se elijan de las magnitudes que figuran en la fórmula.

Debe tenerse en cuenta que los razonamientos que nos han conducido a la expresión (43.1) no pueden ser considerados como demostración de la fórmula (43.2). Estos razonamientos no tienen fuerza demostrativa. Su fin es facilitar el recuerdo de la fórmula (43.2). La validez de dicha fórmula sólo se puede establecer experimentalmente.

Conviene indicar que la relación (43.2) puede considerarse como determinación de la inducción magnética \mathbf{B} .

La unidad de inducción magnética \mathbf{B} , la tesla, se determina de tal modo, que el coeficiente de proporcionalidad k de la fórmula (43.2) sea igual a la unidad. Por lo tanto, en el SI esta fórmula tiene la forma

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{vB}]. \quad (43.3)$$

El módulo de la fuerza magnética es

$$F = qvB \operatorname{sen} \alpha, \quad (43.4)$$

donde α es el ángulo entre los vectores \mathbf{v} y \mathbf{B} . De (43.4) se infiere que una carga que se mueva a lo largo de las líneas del campo magnético no experimentará la acción de la fuerza magnética.

La fuerza magnética es perpendicular al plano en que se encuentran los vectores \mathbf{v} y \mathbf{B} . Si la carga q es positiva, el sentido de la fuerza coincide con el del vector $[\mathbf{vB}]$. En caso de que q sea negativa, los sentidos de los vectores \mathbf{F} y $[\mathbf{vB}]$ serán opuestos (fig. 43.1).

Como la fuerza magnética es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula cargada, ésta no realiza trabajo sobre ella. Por consiguiente, actuando sobre una partícula cargada con un campo magnético constante, no se puede cambiar su energía.

Si se tienen a la vez los campos eléctrico y magnético, la fuerza que actúa sobre la partícula cargada será

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q [\mathbf{vB}]. \quad (43.5)$$

Esta expresión fue obtenida empíricamente por H. A. Lorentz y se llama *fuerza de Lorentz*.

Sea una carga q que se mueve con la velocidad v paralelamente a un conductor recto infinito por el cual pasa una corriente de intensidad I (fig. 43.2). De acuerdo con las fórmulas (42.5) y (43.4), sobre la carga actúa en este caso una fuerza magnética cuyo módulo es

$$F = qvB = qv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}, \quad (43.6)$$

donde b es la distancia desde la carga hasta el conductor. En el caso de una carga positiva, la fuerza está dirigida hacia el con-

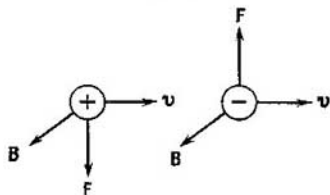


Fig. 43.1.

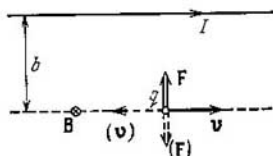


Fig. 43.2.

ductor, si los sentidos de la corriente y los del movimiento de la carga son los mismos, y tendrá que alejarse del conductor si los sentidos de la corriente y los del movimiento de la carga son opuestos (véase la fig. 43.2). En el caso de una carga negativa, el sentido de la fuerza, a igualdad de las demás condiciones, se invierte.

Consideremos dos cargas puntuales del mismo signo q_1 y q_2 que se muevan a lo largo de dos rectas paralelas con la misma velocidad v , mucho menor que c (fig. 43.3). Cuando $v \ll c$ el campo eléctrico no se diferencia prácticamente del campo de las cargas en reposo (véase el § 41). Por eso la magnitud de la fuerza eléctrica F_e que actúa sobre las cargas se puede suponer que es

$$F_{e1} = F_{e2} = F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (43.7)$$

De acuerdo con las fórmulas (41.5) y (43.3), para la fuerza magnética F_m que actúa sobre las cargas se obtiene la expresión

$$F_{m1} = F_{m2} = F_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v^2}{r^2} \quad (43.8)$$

(el radio vector r es perpendicular a v).

Hallamos la razón de la fuerza magnética a la eléctrica. De (43.7) y (43.8) se sigue que

$$\frac{F_m}{F_e} = \epsilon_0 \mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} \quad (43.9)$$

(véase (39.15)). Hemos obtenido la relación (43.9) suponiendo que $v \ll c$. No obstante, esta relación resulta ser válida para cualesquiera valores de v .

Las fuerzas F_e y F_m tienen sentidos opuestos. La fig. 43.3 ha sido dibujada para cargas de igual signo positivas. Para las cargas de igual signo negativas los sentidos de las fuerzas siguen siendo los mismos, pero los de los vectores \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 se invierten. Para cargas de signos distintos los sentidos de las fuerzas eléctricas y magnéticas serán contrarios a los que se indican en la figura.

De (43.9) se deduce que la fuerza magnética es más débil que la de Coulomb en un factor igual al cuadrado de la razón de la velocidad de la carga a la velocidad de la luz. Esto se explica porque la interacción magnética entre las cargas en movimiento es un efecto relativista (véase el § 45). El magnetismo desaparecería si la velocidad de la luz fuera infinitamente grande

§ 44. Ley de Ampere

Si un conductor, por el que pasa corriente, se encuentra en un campo magnético, sobre cada uno de los portadores de corriente actúa la fuerza

$$\mathbf{F} = e [(\mathbf{v} + \mathbf{u}), \mathbf{B}] \quad (44.1)$$

(véase (43.3)). Aquí \mathbf{v} es la velocidad del movimiento caótico de los portadores y \mathbf{u} , la velocidad de su movimiento ordenado. Del portador de corriente la acción de esta fuerza se transmite al conductor, por el cual se traslada. Como resultado, sobre el conductor con corriente que se halla en el campo magnético actúa una fuerza.

Hallemos la magnitud de la fuerza dF que actúa sobre un elemento de longitud dl del conductor. Para esto promediamos la expresión (44.1) por los portadores de corriente contenidos en el elemento dl :

$$\langle \mathbf{F} \rangle = e [(\langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle), \mathbf{B}] = e [\langle \mathbf{u} \rangle, \mathbf{B}] \quad (44.2)$$

(\mathbf{B} es la inducción magnética en el sitio en que se encuentra el elemento dl). El elemento del conductor contiene un número de portadores igual a $nS dl$ (n es el número de portadores que hay en la unidad de volumen, y S , el área de la sección transversal del conductor en el sitio dado). Multiplicando la expresión (44.2) por el número de portadores, hallamos la fuerza que nos interesa:

$$dF = \langle \mathbf{F} \rangle nS dl = [(ne \langle \mathbf{u} \rangle), \mathbf{B}] S dl.$$

Tomando en consideración que $ne \langle u \rangle$ es la densidad de la corriente j y que $S dl$ da el volumen dV del elemento del conductor, se puede escribir que

$$dF = [jB] dV. \quad (44.3)$$

De aquí se puede obtener la expresión de la densidad de la fuerza, es decir, la fuerza que actúa sobre la unidad de volumen del conductor:

$$F_{\text{untd. vol.}} = [jB]. \quad (44.4)$$

Escribimos la fórmula (44.3) en la forma

$$dF = [jB] S dl.$$

Sustituyendo, de acuerdo con (42.2), $jS dl$ por $jS dl = I dl$, llegamos a la fórmula

$$dF = I [dl, B]. \quad (44.5)$$

Esta fórmula determina la fuerza que actúa sobre un elemento de

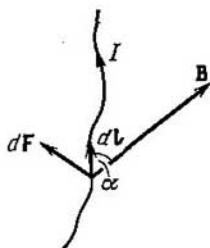


Fig. 44.1.

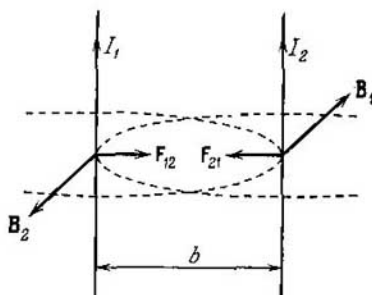


Fig. 44.2.

corriente dl en un campo magnético. La relación (44.5) fue establecida experimentalmente por A. M. Ampere y se denomina *ley de Ampere*.

Hemos obtenido la ley de Ampere partiendo de la expresión (43.3) para la fuerza magnética. En realidad la expresión para la fuerza magnética fue deducida de la expresión (44.5) establecida experimentalmente.

El módulo de la fuerza (44.5) se calcula por la fórmula

$$dF = IB dl \sin \alpha, \quad (44.6)$$

en la que α es el ángulo entre los vectores dl y B (fig. 44.1). La fuerza es perpendicular al plano en que descansan los vectores dl y B .

La ley de Ampere es aplicable al cálculo de la fuerza de interacción de dos corrientes directas, paralelas, de longitud infinita, situadas

en el vacío. Si la distancia entre estas corrientes es b (fig. 44.2), cada elemento de la corriente I_2 se encontrará en un campo magnético cuya inducción será $B_1 = (\mu_0/4\pi) (2I_1/b)$ (véase la fórmula (42.5)). El ángulo α entre los elementos de la corriente I_2 y el vector B_1 es recto. Por lo tanto, de acuerdo con (44.6), sobre la unidad de longitud de la corriente I_2 actúa la fuerza

$$F_{21 \text{ unid}} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}. \quad (44.7)$$

La expresión (44.7) coincide con la fórmula (39.2).

Para la fuerza $F_{12 \text{ unid}}$ que actúa sobre la unidad de longitud de la corriente I_1 se obtiene una expresión análoga. Es fácil convencerse de que si las corrientes tienen el mismo sentido, se atraerán entre sí, y si tienen sentidos distintos, se repelerán.

§ 45. El magnetismo como efecto relativista

Entre la electricidad y el magnetismo existe una profunda ligazón. Basándose en los postulados de la teoría de la relatividad y en la invariancia de la carga eléctrica se puede demostrar que la interacción magnética entre las cargas y las corrientes es la consecuencia

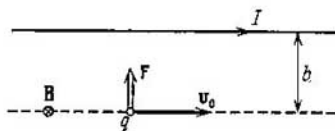


Fig. 45.1.

de la ley de Coulomb. Vamos a mostrar esto sobre el ejemplo de una carga que se mueve, paralelamente a una corriente directa infinita, con la velocidad v_0 ¹⁾ (fig. 45.1).

Según la fórmula (43.6), la fuerza magnética que actúa sobre la carga en el caso que analizamos es

$$F = qv_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} \quad (45.1)$$

(el significado de las letras que figuran en esta expresión se ve claramente en la fig. 45.1). Esta fuerza está dirigida hacia el conductor con corriente ($q > 0$).

Antes de empezar a deducir la fórmula de la fuerza (45.1) partiendo de la ley de Coulomb y de las relaciones relativistas, vamos a considerar el efecto siguiente. Supongamos que existe una cadena lineal

¹⁾ Para que las designaciones sean análogas a las del cap. VIII del tomo 1^o, designamos la velocidad de la carga con v_0 .

infinita de cargas puntuales de igual magnitud e , separadas unas de otras por un espacio muy pequeño l_0 (fig. 45.2). En virtud de la pequeñez de l_0 podemos hablar de la densidad lineal de cargas λ_0 que, evidentemente, será

$$\lambda_0 = e/l_0. \quad (45.2)$$

Hagamos que las cargas se muevan a lo largo de la cadena con la misma velocidad u . Entonces la distancia entre las cargas disminuye y se hace igual a

$$l = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

(véase la fórmula (64.1) del tomo 1º). La magnitud de las cargas, debido a su invariancia, sigue siendo la misma. Como resultado,

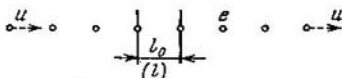


Fig. 45.2.

la densidad lineal de cargas que se observa en el sistema de referencia con respecto al cual se mueven las cargas, varía y se hace igual a

$$\lambda = e/l = \lambda_0 / \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (45.3)$$

Ahora consideremos en un sistema de referencia K dos cadenas infinitas, prácticamente coincidentes una con otra, formadas por cargas de igual magnitud, pero de signos distintos, que se mueven en sentidos opuestos con la misma velocidad u (fig. 45.3, a). El conjunto de estas dos cadenas equivale a una corriente directa infinita de intensidad

$$I = 2\lambda u = 2\lambda_0 u / \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (45.4)$$

en la que λ es la magnitud determinada por la fórmula (45.3). La densidad lineal total de cargas de las cadenas es nula, por lo que el campo eléctrico está ausente. Sobre la carga q actúa una fuerza magnética cuya magnitud, de acuerdo con (45.1) y (45.4), es

$$F = qv_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4\lambda_0 u}{b \sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (45.5)$$

Pasamos al sistema de referencia K' con respecto al cual la carga q está en reposo (fig. 45.3, b) En este sistema sobre la carga q también actúa una fuerza (que designaremos por F'). Pero esta fuerza no puede ser de origen magnético, ya que la carga q está en reposo. La fuerza F' tiene origen puramente eléctrico. Se produce porque la densidad lineal de cargas positivas y negativas en las

cadena ahora no es la misma (más adelante se verá que la densidad de cargas negativas es mayor). El exceso de carga negativa distribuido por la cadena crea un campo eléctrico que actúa sobre la carga positiva q con la fuerza F' dirigida hacia la cadena (véase la fig. 45.3, b).

Calculamos la fuerza F' y nos convencemos de que es «igual» a la fuerza F determinada por la fórmula (45.5). Hemos puesto «igual» entre comillas porque la fuerza no es una magnitud invariante. Al pasar de un sistema inercial de referencia a otro, la fuerza

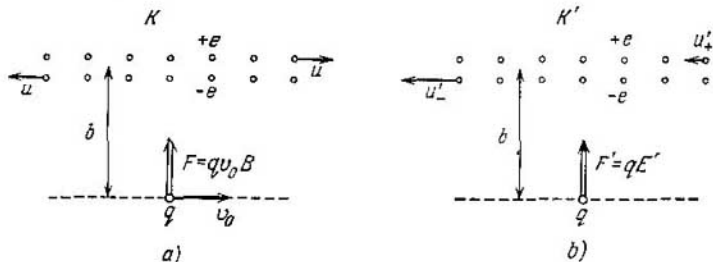


Fig. 45.3.

se transforma según una ley bastante compleja. En el caso particular en que la fuerza F' es perpendicular a la velocidad relativa de los sistemas K y K' ($F' \perp v_0$), la transformación tiene la forma

$$F = \frac{F' \sqrt{1 - v_0^2/c^2} + v_0 (F' v')/c^2}{1 + v_0 v'/c^2}$$

(v' es la velocidad, medida en el sistema K' , de la partícula sobre la cual actúa la fuerza F'). Si $v' = 0$ (como ocurre en el problema que analizamos), la fórmula de transformación de la fuerza tiene la forma siguiente:

$$F = F' \sqrt{1 - v_0^2/c^2}.$$

De esta fórmula se infiere que la fuerza, perpendicular a v_0 , que actúa sobre la partícula que está en reposo en el sistema K' , resulta ser también en el sistema K perpendicular al vector v_0 . El módulo de la fuerza en este caso se transforma según la fórmula

$$F = F' \sqrt{1 - v_0^2/c^2}. \quad (45.6)$$

Las densidades de cargas en las cadenas positiva y negativa medidas en el sistema K' tienen las magnitudes (véase (45.3))

$$\lambda'_+ = \lambda_0 / \sqrt{1 - u'^2/c^2}, \quad \lambda'_- = -\lambda_0 / \sqrt{1 - u'^2/c^2}, \quad (45.7)$$

donde u'_+ y u'_- son las velocidades de las cargas $+e$ y $-e$ medidas en el sistema K' . Al pasar del sistema K al K' , la proyección de la velocidad de las partículas sobre la dirección x , que coincide con la de v_0 , se transforma según la fórmula

$$u'_x = \frac{u_x - v_0}{1 - u_x v_0 / c^2}$$

(véase la fórmula (66.2) del tomo 1º; hemos sustituido v y v' por u y u'). Para las cargas $+e$ la componente u_x es igual a u y para las cargas $-e$, igual a $-u$ (véase la fig. 45.3, a). Por lo tanto,

$$(u'_x)_+ = \frac{u - v_0}{1 - uv_0/c^2}, \quad (u'_x)_- = \frac{-u - v_0}{1 + uv_0/c^2}.$$

Como las demás proyecciones son nulas, obtenemos

$$u'_+ = \frac{|u - v_0|}{1 - uv_0/c^2}, \quad u'_- = \frac{u + v_0}{1 + uv_0/c^2}. \quad (45.8)$$

Para simplificar los cálculos pasamos a las velocidades relativas.

$$\beta_0 = v_0/c, \quad \beta = u/c, \quad \beta'_+ = u'_+/c, \quad \beta'_- = u'_-/c.$$

Entonces las fórmulas (45.7) y (45.8) toman la forma

$$\lambda'_+ = \lambda_0 / \sqrt{1 - \beta_+^2}, \quad \lambda'_- = -\lambda_0 / \sqrt{1 - \beta_-^2}, \quad (45.9)$$

$$\beta'_+ = \frac{|\beta - \beta_0|}{1 - \beta\beta_0}, \quad \beta'_- = \frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta\beta_0}. \quad (45.10)$$

Teniendo en cuenta estas fórmulas obtenemos para la densidad total de cargas la expresión

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda'_+ + \lambda'_- = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta - \beta_0}{1 - \beta\beta_0}\right)^2}} - \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta\beta_0}\right)^2}} = \\ &= \frac{\lambda_0(1 - \beta\beta_0)}{\sqrt{(1 - \beta\beta_0)^2 - (\beta - \beta_0)^2}} - \frac{\lambda_0(1 + \beta\beta_0)}{\sqrt{(1 + \beta\beta_0)^2 - (\beta + \beta_0)^2}}. \end{aligned}$$

Es fácil convencerse de que

$$\begin{aligned} (1 - \beta\beta_0)^2 - (\beta - \beta_0)^2 &= (1 + \beta\beta_0)^2 - (\beta + \beta_0)^2 = \\ &= (1 - \beta_0^2) \times (1 - \beta^2). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\lambda' = \frac{-2\lambda_0\beta\beta_0}{\sqrt{(1 - \beta_0^2)(1 - \beta^2)}} = \frac{-2\lambda_0\beta\beta_0}{c^2 \sqrt{1 - v_0^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (45.11)$$

De acuerdo con la fórmula (14.5), un hilo de longitud infinita, portador de una carga de densidad λ' , crea un campo cuya intensidad a la distancia b del hilo es

$$E' = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda'}{b}.$$

En este campo sobre la carga q actúa la fuerza

$$F' = q\vec{E}' = \frac{q\lambda'}{2\pi\epsilon_0 b}.$$

La sustitución de λ' por su valor (45.11) da (omitiendo el signo menos)

$$F' = \frac{q\lambda_0 u v_0}{\pi\epsilon_0 b c^2 \sqrt{1-v_0^2/c^2} \sqrt{1-u^2/c^2}} = qv_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4\lambda_0 u}{b \sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} \quad (45.12)$$

(recordamos que $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$; véase (39.15)).

La expresión obtenida se diferencia de la (45.5) únicamente en el factor $1/\sqrt{1-v_0^2/c^2}$. Por consiguiente, se puede escribir que

$$F = F' \sqrt{1-v_0^2/c^2},$$

donde F es la fuerza determinada por la expresión (45.5) y F' , la fuerza definida por la expresión (45.12). La comparación con (45.6) muestra que F y F' son en esencia los valores de una misma fuerza determinados en los sistemas K y K' .

Señalaremos que en el sistema K'' que se moviera con respecto a K con una velocidad distinta de la velocidad v_0 de la carga, la fuerza que actuaría sobre esta última se compondría de las fuerzas eléctrica y magnética.

Los resultados que hemos obtenido significan que los campos eléctrico y magnético están ligados inseparablemente el uno con el otro y forman un campo electromagnético único. Eligiendo especialmente el sistema de referencia, el campo puede resultar puramente eléctrico o puramente magnético. Pero con respecto a otros sistemas de referencia, este mismo campo será el conjunto de los campos eléctrico y magnético.

En diferentes sistemas inerciales de referencia los campos eléctrico y magnético de un mismo conjunto de cargas resultan ser distintos. La deducción, que rebasa los marcos del curso de física general, conduce a las siguientes fórmulas de transformación de los campos al pasar del sistema de referencia K al sistema de referencia K' que se mueve con respecto a él con la velocidad v_0 :

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \frac{E_y - v_0 B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, & E'_z &= \frac{E_z + v_0 B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \frac{B_y + v_0 E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, & B'_z &= \frac{B_z - v_0 E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (45.13)$$

Aquí $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ son los componentes de los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} que caracterizan el campo electromagnético en el sistema K ; los símbolos análogos con apóstrofes son los componentes de los

vectores \mathbf{E}' y \mathbf{B}' , que caracterizan el campo en el sistema K' ; con la letra β se designa la relación v_0/c .

Descomponiendo los vectores \mathbf{E} , \mathbf{B} y \mathbf{E}' , \mathbf{B}' en sus componentes paralelos al vector \mathbf{v}_0 (y, por lo tanto, a los ejes x y x') y perpendiculares a él mismo (es decir, representando \mathbf{E} en la forma $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$ y así sucesivamente), se pueden escribir las fórmulas (45.13) en forma vectorial:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{B}_{\perp} - (1/c^2) [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (45.14)$$

En el sistema de unidades de Gauss las fórmulas (45.14) tienen la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{E}_{\perp} + (1/c) [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{B}_{\perp} - (1/c) [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (45.15)$$

En el caso en que $\beta \ll 1$ (es decir, $v_0 \ll c$), las fórmulas (45.14) se simplifican del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}]; \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\perp}]. \end{aligned}$$

Sumando dos a dos estas expresiones se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}] = \mathbf{E} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}], \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\perp}] = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\perp}]. \end{aligned} \quad (45.16)$$

Como los vectores \mathbf{v}_0 y \mathbf{B}_{\parallel} son colineales, su producto vectorial es nulo. Por eso $[\mathbf{v}_0 \mathbf{B}] = [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\parallel}] + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}] = [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_{\perp}]$. Análogamente, $[\mathbf{v}_0 \mathbf{E}] = [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_{\perp}]$. Teniendo esto en cuenta, a las fórmulas (45.16) se les puede dar la forma

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}], \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}]. \quad (45.17)$$

Según estas fórmulas se transforman los campos si la velocidad relativa v_0 del sistema de referencia es mucho menor que la velocidad de la luz en el vacío c ($v_0 \ll c$).

En el sistema de Gauss las fórmulas (45.17) tienen la forma:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}], \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}]. \quad (45.18)$$

En el ejemplo considerado al principio de este párrafo, en el sistema K , en que la carga q se movía paralelamente al conductor

con corriente a la velocidad v_0 , sólo existía el campo magnético \mathbf{B}_\perp perpendicular a v_0 ; los componentes \mathbf{B}_\parallel , \mathbf{E}_\perp y \mathbf{E}_\parallel eran nulos. De acuerdo con las fórmulas (45.14), en el sistema K' , en que la carga q estaba en reposo (este sistema se mueve con respecto a K a la velocidad v_0), se observa el componente \mathbf{B}'_\perp , igual a $\mathbf{B}_\perp/\sqrt{1-\beta^2}$, y, además, el componente perpendicular del campo eléctrico $\mathbf{E}'_\perp = [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_\perp]/\sqrt{1-\beta^2}$.

En el sistema K sobre la carga actúa la fuerza

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_\perp]. \quad (45.19)$$

Como la carga q está en reposo en el sistema K' , sobre ella sólo actúa en este sistema la fuerza eléctrica

$$\mathbf{F}' = q \mathbf{E}'_\perp = \frac{q [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (45.20)$$

La comparación de las fórmulas (45.19) y (45.20) da $\mathbf{F} = \mathbf{F}' \sqrt{1-\beta^2}$, que coincide con (45.6).

§ 46. Circuito con corriente en un campo magnético

Veamos cómo se comporta un circuito con corriente en un campo magnético. Empecemos por el caso de un campo homogéneo ($\mathbf{B} = \text{const}$). De acuerdo con (44.5) sobre cada elemento $d\mathbf{l}$ del circuito actúa una fuerza

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (46.1)$$

La resultante de estas fuerzas será

$$\mathbf{F} = \oint I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (46.2)$$

Sacando fuerza del signo de integral las magnitudes constantes I y \mathbf{B} , obtenemos

$$\mathbf{F} = I \left[\left(\oint d\mathbf{l} \right), \mathbf{B} \right].$$

La integral $\oint d\mathbf{l}$ es nula, por lo tanto, $\mathbf{F} = 0$. De este modo, la fuerza resultante que actúa sobre el circuito con corriente en el campo magnético homogéneo es nula. Esto es justo para circuitos de cualquier forma (incluso no planos) situados arbitrariamente con respecto a la dirección del campo. Para que la fuerza resultante sea nula sólo importa que el campo sea homogéneo.

En adelante nos limitaremos a estudiar los circuitos planos. Calculemos el momento de rotación resultante que crean las fuerzas (46.1) aplicadas al circuito. Como en un campo homogéneo la suma de estas fuerzas es nula, el momento resultante con relación a cualquier punto será el mismo. En efecto, el momento resultante con

respecto a cierto punto O se determina por la expresión

$$N = \int [\mathbf{r}, d\mathbf{F}],$$

en la que \mathbf{r} es el radio vector trazado desde el punto O hasta el punto de aplicación de la fuerza $d\mathbf{F}$. Tomemos otro punto O' desplazado con respecto al O un segmento \mathbf{b} . Entonces $\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{r}'$, y, respectivamente, $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{b}$. Por eso el momento resultante con relación al punto O' será

$$\begin{aligned} N' &= \int [\mathbf{r}', d\mathbf{F}] = \int [(\mathbf{r} - \mathbf{b}), d\mathbf{F}] = \\ &= \int [\mathbf{r}, d\mathbf{F}] - \int [\mathbf{b}, d\mathbf{F}] = N - [\mathbf{b}, d\mathbf{F}] = N \end{aligned}$$

($\int d\mathbf{F} = 0$). Los momentos calculados con respecto a dos puntos O y O' tomados arbitrariamente han resultado coincidentes. De aquí concluimos que el momento no depende de la elección del punto con respecto al cual se toma (compárese con un par de fuerzas).

Consideremos un circuito plano arbitrario, con corriente, que se halle en un campo magnético homogéneo \mathbf{B} . Supongamos que el circuito está orientado de tal modo que la normal positiva \mathbf{n} a él es perpendicular al vector \mathbf{B} (fig. 46.1). Se llama positiva la normal, cuyo sentido está relacionado con el de la corriente en el circuito mediante la regla del sacacorchos.

Dividamos el área abarcada por el circuito en franjas estrechas, paralelas a la dirección del vector \mathbf{B} , de anchura dy (véase la fig. 46.1, *a*; en la fig. 46.1, *b* una de estas franjas se representa aumentada).

Sobre el elemento de circuito dl_1 , que limita la franja por la izquierda, actúa la fuerza $d\mathbf{F}_1$, dirigida hacia detrás de la figura. El módulo de esta fuerza es $dF_1 = IB dl_1 \sin \alpha_1 = IB dy$ (véase la fig. 46.1, *b*). Sobre el elemento del circuito dl_2 , que limita la franja por la derecha, actúa la fuerza $d\mathbf{F}_2$, dirigida hacia nosotros. El módulo de esta fuerza es $dF_2 = IB dl_2 \sin \alpha_2 = IB dy$. El resultado obtenido significa que las fuerzas aplicadas a los elementos opuestos del circuito dl_1 y dl_2 forman un par, cuyo momento es

$$dN = IBx dy = IB dS$$

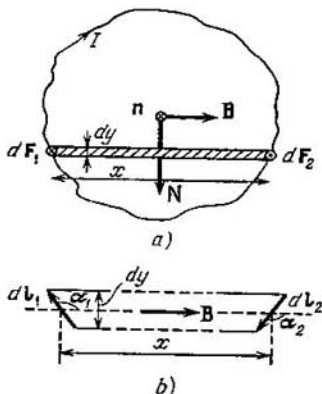


Fig. 46.1.

(dS es el área de la franja). En la fig. 46.1 se ve que el vector dN es perpendicular a los vectores \mathbf{n} y \mathbf{B} y, por consiguiente, se puede escribir en la forma

$$dN = I [\mathbf{nB}] dS.$$

Efectuando la suma de esta expresión extendida a todas las franjas, obtenemos el momento de rotación que actúa sobre el circuito:

$$\mathbf{N} = \int I [\mathbf{nB}] dS = I [\mathbf{nB}] \int dS = I [\mathbf{nB}] S \quad (46.3)$$

(el campo se supone homogéneo, por lo que el producto $[\mathbf{nB}]$ es igual para todas las franjas y puede sacarse fuera del signo integral). La magnitud S que figura en la expresión (46.3) es el área abarcada por el circuito.

La expresión (46.3) se puede representar en la forma

$$\mathbf{N} = \{IS\mathbf{n}, \mathbf{B}\}. \quad (46.4)$$

Esta fórmula es semejante a la (9.12), que determina el momento de rotación que actúa sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico.

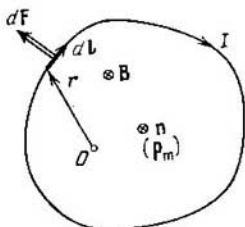


Fig. 46.2.

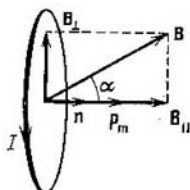


Fig. 46.3.

De análogo de \mathbf{E} hace las veces en (46.4) el vector \mathbf{B} , y de análogo del momento eléctrico dipolar \mathbf{p} , la expresión $IS\mathbf{n}$. Esto ha servido de base para llamar la magnitud

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n} \quad (46.5)$$

momento magnético dipolar del circuito con corriente. El sentido del vector \mathbf{p}_m coincide con el de la normal positiva al circuito.

Utilizando la designación (46.5), la fórmula (46.4) se puede escribir como sigue:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}] \quad (\mathbf{p}_m \perp \mathbf{B}). \quad (46.6)$$

Supongamos ahora que el sentido del vector \mathbf{B} coincide con el de la normal positiva \mathbf{n} al circuito y, por lo tanto, con el del vector \mathbf{p}_m (fig. 46.2). En este caso las fuerzas que actúan sobre los

distintos elementos del circuito se encuentran en un plano, en el del circuito. La fuerza que actúa sobre el elemento $d\mathbf{l}$ del circuito se determina por la expresión (46.1). Calculemos el momento resultante de todas estas fuerzas con respecto a un punto O que se encuentre en el plano del circuito:

$$\mathbf{N} = \int d\mathbf{N} = \int [\mathbf{r}, d\mathbf{F}] = I \oint [\mathbf{r}, [d\mathbf{l} \mathbf{B}]]$$

(\mathbf{r} es el radio vector trazado desde el punto O hacia el elemento $d\mathbf{l}$). Transformamos la expresión subintegral según la fórmula «bac menos cab» (véase la fórmula (2.35) del tomo 1°). Como resultado obtenemos

$$\mathbf{N} = I \left\{ \oint (\mathbf{r}\mathbf{B}) d\mathbf{l} - \oint \mathbf{B} (\mathbf{r}, d\mathbf{l}) \right\}.$$

La primera integral es nula debido a que los vectores \mathbf{r} y \mathbf{B} son perpendiculares entre sí. El producto escalar bajo el signo de la segunda integral es igual a $r dr = \frac{1}{2}d(r^2)$. Por eso la segunda integral se puede representar en la forma

$$\frac{1}{2} \mathbf{B} \oint d(r^2).$$

Bajo el signo de integral se encuentra la diferencial total de la función r^2 . La suma de los incrementos de una función sobre un camino cerrado es nula. Por lo tanto, el segundo sumando de la expresión de \mathbf{N} también es nulo. De este modo, hemos demostrado que el momento resultante \mathbf{N} con respecto a un punto cualquiera O que se encuentre en el plano del circuito, es nulo. Este mismo valor tiene el momento resultante con respecto a todos los otros puntos (véase más atrás).

Así, en el caso en que los vectores \mathbf{p}_m y \mathbf{B} tienen el mismo sentido, las fuerzas magnéticas que actúan sobre las distintas partes del circuito no tienden a hacerlo girar ni a moverlo de su sitio; estas fuerzas sólo tienden a extender el circuito en su plano. Si los vectores \mathbf{p}_m y \mathbf{B} tienen sentidos opuestos, las fuerzas magnéticas tienden a contraer el circuito.

Supongamos que las direcciones de los vectores \mathbf{p}_m y \mathbf{B} forman un ángulo arbitrario α (fig. 46.3). Descomponemos la inducción magnética \mathbf{B} en dos componentes: \mathbf{B}_{\parallel} , paralela al vector \mathbf{p}_m , y \mathbf{B}_{\perp} , perpendicular a él, y analizamos la acción de cada componente por separado. La componente \mathbf{B}_{\parallel} condicionará las fuerzas que extienden o comprimen el circuito. La componente \mathbf{B}_{\perp} , cuya magnitud es igual a $B \sin \alpha$, hace que aparezca un momento de rotación que puede calcularse por la fórmula (46.6):

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}_{\perp}].$$

En la fig. 46.3 se ve que

$$[\mathbf{p}_m, \mathbf{B}_\perp] = \{p_m, \mathbf{B}\}.$$

Por consiguiente, en el caso más general, el momento de rotación que actúa sobre un circuito plano con corriente en un campo magnético homogéneo se determina por la fórmula

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]. \quad (46.7)$$

El módulo del vector \mathbf{N} es

$$N = p_m B \sin \alpha. \quad (46.8)$$

Para aumentar el ángulo α entre los vectores \mathbf{p}_m y \mathbf{B} en $d\alpha$ hay que realizar, contra las fuerzas que actúan sobre el circuito en el campo magnético, el trabajo

$$dA = N d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha. \quad (46.9)$$

Al retornar a su posición inicial, el circuito puede devolver el trabajo gastado en hacerlo girar, realizándolo sobre un cuerpo cualquiera. Por lo tanto, el trabajo (46.9) se invierte en aumentar la energía potencial $W_{p \text{ mec}}$ que posee el circuito con corriente en el campo magnético.

$$dW_{p \text{ mec}} = p_m B \sin \alpha d\alpha.$$

Integrando, hallamos que

$$W_{p \text{ mec}} = -p_m B \cos \alpha + \text{const.}$$

Suponiendo $\text{const} = 0$, la fórmula toma la forma

$$W_{p \text{ mec}} = -p_m B \cos \alpha - \mathbf{p}_m \mathbf{B} \quad (46.10)$$

(compárese con la fórmula (9.15)).

La orientación paralela de los vectores \mathbf{p}_m y \mathbf{B} corresponde al mínimo de energía (46.10) y, por consiguiente, a la posición de equilibrio estable del circuito.

La magnitud (46.10) no es la energía potencial total del circuito con corriente, sino únicamente la parte de ella que debe su existencia al momento de rotación (46.7). Para subrayar eso hemos puesto al símbolo de la magnitud (46.10) el subíndice «mec». La energía potencial total del circuito incluye, además de (46.10), otros sumandos.

Ahora vamos a estudiar un circuito plano con corriente en un campo magnético no homogéneo. Para simplificar consideraremos primeramente que el circuito es circular. Supongamos que el campo varía más rápidamente en la dirección x , que coincide con el sentido de \mathbf{B} en el punto en que se encuentra el centro del circuito, y que el momento magnético de dicho circuito está orientado según el campo (fig. 46.4, a).

En este caso $\mathbf{B} \neq \text{const}$ y la expresión (46.2) no tiene que ser necesariamente nula. La fuerza $d\mathbf{F}$ que actúa sobre un elemento del circuito es perpendicular a \mathbf{B} , es decir, a la línea de inducción magnética en el punto de su intersección con $d\mathbf{l}$. Por eso las fuerzas aplicadas a los distintos elementos del circuito forman un abanico cónico simétrico (fig. 46.4. b). Su resultante \mathbf{F} está dirigida en el sentido del aumento de B y, por lo tanto, arrastra el circuito hacia la región en que el campo es más intenso. Es evidente que cuanto más intenso sea el campo (cuanto mayor sea $\partial B/\partial x$), tanto menor será el ángulo de abertura del abanico y tanto mayor, a igualdad de las demás condiciones, la fuerza resultante \mathbf{F} . Si el sentido de la corriente se invierte (en cuyo caso \mathbf{p}_m tendrá sentido contrario a \mathbf{B}), los sentidos

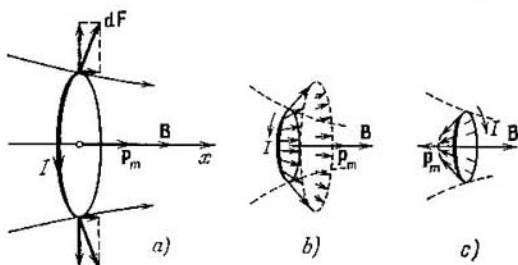


Fig. 46.4.

de todas las fuerzas $d\mathbf{F}$ y de su resultante \mathbf{F} se invierten también (fig. 46.4. c). Por consiguiente, con esta orientación mutua de los vectores \mathbf{p}_m y \mathbf{B} , el circuito será repelido por el campo.

Valiéndose de la expresión (46.10) de la energía del circuito en el campo magnético es fácil hallar la expresión cuantitativa de la fuerza \mathbf{F} . Si la orientación del momento magnético con respecto al campo permanece invariable ($\alpha = \text{const}$), $W_{p \text{ mec}}$ dependerá solamente de x (por medio de B). Tomando la diferencial de $W_{p \text{ mec}}$ respecto de x y cambiando el signo del resultado, obtenemos la proyección de la fuerza sobre el eje x :

$$F_x = -\frac{\partial W_{p \text{ mec}}}{\partial x} = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha.$$

En virtud de la suposición hecha, en otras direcciones el campo varía débilmente, por lo que las proyecciones de la fuerza sobre los otros ejes se puede despreciar y considerar que $F = F_x$. Así,

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha. \quad (46.11)$$

De acuerdo con la fórmula que hemos obtenido, la fuerza que actúa sobre el circuito con corriente en el campo magnético no homogéneo depende de la orientación del momento magnético del circuito con respecto a la dirección del campo. Si los sentidos de los vectores \mathbf{p}_m y \mathbf{B} coinciden ($\alpha = 0$), la fuerza es positiva, o sea, está dirigida en el sentido en que aumenta \mathbf{B} ($\partial B/\partial x$ se supone positivo; en el caso contrario el signo y el sentido de la fuerza se invierten, pero la fuerza arrastrará como antes el circuito hacia la región en que el campo es más intenso). Cuando \mathbf{p}_m y \mathbf{B} son antiparalelas ($\alpha = \pi$), la fuerza será negativa, es decir, estará dirigida en el sentido en que disminuye \mathbf{B} . Este resultado ya lo habíamos obtenido cualitativamente por medio de la fig. 46.4.

Está claro que, además de la fuerza (46.11), sobre el circuito con corriente en el campo magnético no homogéneo actuará el momento de rotación (46.7).

§ 47. Campo magnético de un circuito con corriente

Consideremos el campo creado por la corriente que pasa por un conductor delgado en forma de circunferencia de radio R (corriente circular). Determinemos la inducción magnética en el centro de la corriente circular (fig. 47.1). Cada elemento de la corriente crea en

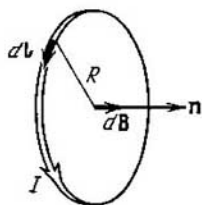


Fig. 47.1.

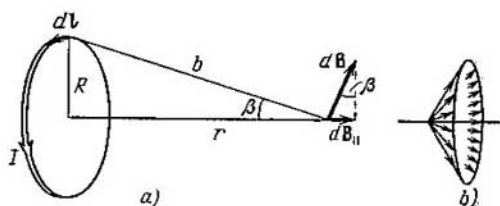


Fig. 47.2.

el centro una inducción dirigida a lo largo de la normal positiva al circuito. Por eso la suma vectorial de los $d\mathbf{B}$ se reduce a la suma de sus módulos. Según la fórmula (42.4)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{R^2}$$

($\alpha = \pi/2$). Integramos esta expresión a lo largo de todo el circuito:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(I\pi R^2)}{R^3}.$$

La expresión entre paréntesis es igual al módulo del momento magnético dipolar p_m (véase 46.5)). Por consiguiente, la inducción magné-

tica en el centro de la corriente circular tiene la magnitud

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{R^3}. \quad (47.1)$$

En la fig. 47.1 se ve que el sentido del vector \mathbf{B} coincide con el de la normal positiva al circuito, o sea, con el sentido del vector \mathbf{p}_m . Por eso la fórmula (47.1) se puede escribir en forma vectorial:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{R^3}. \quad (47.2)$$

Ahora hallamos \mathbf{B} sobre el eje de la corriente circular a una distancia r del centro del circuito (fig. 47.2). Los vectores $d\mathbf{B}$ son perpendiculares a los planos que pasan por los respectivos elementos $d\mathbf{l}$ y por el punto en que buscamos el campo. Por lo tanto, forman un abanico cónico simétrico (fig. 47.2, b). Por las razones de simetría se puede deducir que el vector \mathbf{B} resultante está dirigido a lo largo del eje del circuito. Cada uno de los componentes de los vectores $d\mathbf{B}$ hace al vector resultante la aportación dB_{\parallel} , igual en módulo a $dB \sin \beta = dB (R/b)$. El ángulo α entre $d\mathbf{l}$ y \mathbf{b} es recto, por lo que

$$dB_{\parallel} = dB \frac{R}{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{b^2} \frac{R}{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR dl}{b^3}.$$

Integrando a lo largo de todo el circuito y sustituyendo b por $\sqrt{R^2 + r^2}$, obtenemos

$$\begin{aligned} B &= \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{b^3} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{b^3} 2\pi R = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(I\pi R^2)}{(R^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (47.3)$$

Esta fórmula determina la magnitud de la inducción magnética sobre el eje de la corriente circular. Tomando en consideración que los vectores \mathbf{B} y \mathbf{p}_m tienen el mismo sentido, se puede escribir la fórmula (47.3) en forma vectorial:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (47.4)$$

Esta expresión no depende del signo de r . Por consiguiente, en los puntos del eje simétricos respecto del centro de la corriente, \mathbf{B} tiene la misma magnitud y dirección.

Cuando $r = 0$ la fórmula (47.4) se transforma, como debe ser, en la (47.2) de la inducción magnética en el centro de la corriente circular.

A grandes distancias del circuito, en el denominador se puede desprestigiar R^2 en comparación con r^2 . Entonces la fórmula (47.4) toma la forma

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{r^3} \quad (\text{sobre el eje de la corriente}) \quad (47.5)$$

análoga a la expresión (9.9) de la intensidad del campo eléctrico sobre el eje de un dipolo.

Un cálculo, que rebasa los marcos de este libro, da, que a todo sistema de corrientes o de cargas en movimiento localizado en una parte limitada del espacio se le puede atribuir un momento magnético dipolar \mathbf{p}_m (compárese con el momento eléctrico dipolar de un sistema de cargas). El campo magnético de este sistema a distancias grandes, en comparación con sus dimensiones, se determina mediante \mathbf{p}_m por las mismas fórmulas que sirven para determinar el momento eléctrico dipolar del campo de un sistema de cargas a grandes distancias (véase el § 10). En particular el, campo de un circuito plano de forma cualquiera a grandes distancias tiene la forma

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}, \quad (47.6)$$

donde r es la distancia desde el circuito al punto dado, y ϑ , el ángulo entre la dirección del vector \mathbf{p}_m y dirección desde el circuito al punto dado del campo (compárese con la fórmula (9.7)). Cuando $\vartheta = 0$, la fórmula (47.6) da para el módulo del vector \mathbf{B} el mismo valor que la fórmula (47.5).

En la fig. 47.3 se representan las líneas de inducción magnética de una corriente circular. Se muestran solamente las líneas que se encuentran en uno de los planos que pasan por el eje de la corriente. Una figura semejante tiene lugar en cualquiera de estos planos.

De todo lo dicho en el párrafo anterior y en éste se infiere que el momento magnético dipolar es una característica muy importante de un circuito con corriente. Esta característica se determina tanto por el campo creado por el circuito como por el comportamiento del circuito en un campo magnético exterior.

§ 48. Trabajo realizado al desplazar una corriente en un campo magnético

Examinemos un circuito con corriente formado por dos conductores fijos y un puente móvil de longitud l que se desliza por ellos (fig. 48.1). Supongamos que este circuito se halla en un campo magnético exterior que consideraremos homogéneo y perpendicular al

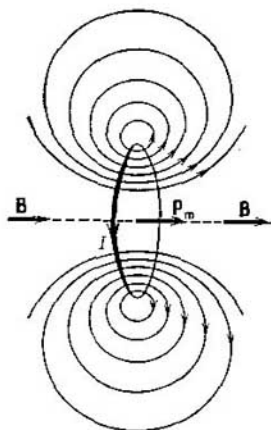


Fig. 47.3.

plano del circuito. Si el sentido de la corriente y el del campo son los que se indican en la fig. 48.1. *a*, la fuerza F que actúa sobre el puente estará dirigida hacia la derecha y será

$$F = IBl.$$

Cuando el puente se traslada hacia la derecha a una distancia dh , esta fuerza realiza el trabajo positivo

$$dA = F dh = I Bl dh = IB dS, \quad (48.1)$$

donde dS es el área rayada (véase la fig. 48.1. *a*).

Veamos cómo varía, al trasladar el puente, el flujo de inducción magnética Φ a través del área del circuito con corriente. Convenga-

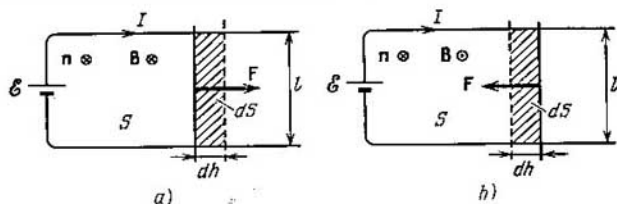


Fig. 48.1.

mos que al hacer el cálculo de dicho flujo siempre se tomará como n en la expresión

$$\Phi = \int \mathbf{B}n dS$$

la normal positiva, es decir, la normal que forma con el sentido de la corriente en el circuito un sistema dextrógiro (véase el § 46). Entonces, en el caso representado en la fig. 48.1. *a*, el flujo será positivo e igual a BS (S es el área del circuito). Cuando el puente se traslada hacia la derecha, el área del circuito adquiere un incremento positivo dS . Como resultado el flujo también recibe un incremento positivo $d\Phi = B dS$. Por eso la expresión (48.1) se puede representar en la forma

$$dA = I d\Phi. \quad (48.2)$$

Si la dirección del campo es hacia nosotros (fig. 48.1. *b*), la fuerza que actúa sobre el puente estará dirigida hacia la izquierda. Por eso, cuando el puente se traslada hacia la derecha a una distancia dh , la fuerza magnética realiza un trabajo negativo

$$dA = -I Bl dh = -IB dS. \quad (48.3)$$

En este caso el flujo a través del circuito es $-BS$. Al aumentar el área del circuito en dS , el flujo recibe el incremento $d\Phi = -B dS$.

Por consiguiente, la expresión (48.3) también se puede escribir en la forma (48.2).

La magnitud $d\Phi$ en la expresión (48.2) se puede interpretar como el flujo a través de la superficie que describe el puente durante su movimiento. Respectivamente, se puede decir que el trabajo que realiza la fuerza magnética sobre un trozo de circuito con corriente es igual al producto de la intensidad de la corriente por la magnitud del flujo magnético a través de la superficie que describe dicho trozo al moverse.

Las fórmulas (48.1) y (48.3) se pueden unificar en una expresión vectorial. Para esto equiparamos el puente con un vector \mathbf{l} que tiene

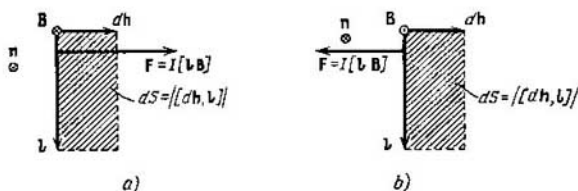


Fig. 48.2.

el sentido de la corriente (fig. 48.2). Independientemente del sentido que tenga el vector \mathbf{B} (de nosotros hacia la figura o de ésta hacia nosotros), la fuerza que actúa sobre el puente se puede representar en la forma

$$\mathbf{F} = I [\mathbf{lB}].$$

Al trasladarse el puente una distancia $d\mathbf{h}$, la fuerza realiza el trabajo

$$dA = \mathbf{F} d\mathbf{h} = I [\mathbf{lB}] d\mathbf{h}.$$

Efectuamos en el producto mixto de vectores la permutación cíclica de los factores (véase la fórmula (2.34) del tomo 1°). Como resultado obtenemos

$$dA = I \mathbf{B} [d\mathbf{h}, \mathbf{l}]. \quad (48.4)$$

En la fig. 48.2 se ve que el producto vectorial $[d\mathbf{h}, \mathbf{l}]$ es igual en magnitud al área dS que describe el puente al moverse y tiene el sentido de la normal positiva \mathbf{n} . Por lo tanto,

$$dA = I \mathbf{Bn} dS. \quad (48.5)$$

En el caso representado en la fig. 48.2, a , $\mathbf{Bn} = B$ y llegamos a la fórmula (48.1). Y en el caso que muestra la fig. 48.2, b , $\mathbf{Bn} = -B$ y se llega a la fórmula (48.3).

La expresión $\mathbf{Bn} dS$ determina el incremento del flujo magnético a través del circuito, condicionado por la traslación del puente. De

este modo, la fórmula (48.5) se puede escribir en la forma (48.2). Pero la fórmula (48.5) tiene ventaja frente a la (48.2) porque de ella se obtiene «automáticamente» el signo de $d\Phi$ y, por consiguiente, el signo de dA .

Consideremos un circuito rígido o deformable que, estando en un campo magnético, se traslada de cierta posición inicial a otra final que se diferencia infinitamente poco de la primera. La intensidad de la corriente I en el circuito admitiremos que es constante durante la traslación. Supongamos que un elemento dl del circuito sufre una traslación arbitraria que podemos figurárnosla como un desplazamiento paralelo a sí mismo en un espacio dh , seguido del giro en un ángulo $d\varphi$ (fig. 48.3). En este caso el elemento dl describe un área igual a

$$|[dh, dl]| + \frac{1}{2} dl^2 d\varphi.$$

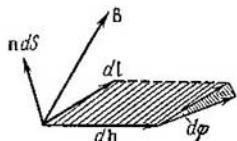


Fig. 48.3.

El segundo sumando es de orden de pequeñez más alto que el primero. El trabajo realizado sobre dl es proporcional al flujo magnético a través de la superficie descrita por dl (véase más atrás). Por eso el trabajo de giro del elemento dl es de un orden de pequeñez más alto que el trabajo de desplazamiento de avance, por lo que se puede despreciar.

De este modo, al calcular el trabajo se puede despreciar el giro del elemento dl en el ángulo $d\varphi$ y considerar que el trabajo realizado por la fuerza magnética sobre el elemento de circuito es

$$dA_{el} = I [dl, B] dh \quad (48.6)$$

Aquí B es la inducción magnética en el sitio en que se encuentra el elemento de circuito dl .

Realizando en (48.6) la permutación cíclica de los factores, obtenemos

$$dA_{el} = IB [dh, dl]. \quad (48.7)$$

El módulo del producto vectorial $[dh, dl]$ es igual al área del paralelogramo construido sobre los vectores dh y dl , es decir, al área dS que describe el elemento dl al desplazarse. El sentido del producto vectorial coincide con el de la normal positiva a la superficie dS . Por consiguiente,

$$B [dh, dl] = Bn dS = d\Phi_{el}, \quad (48.8)$$

donde $d\Phi_{el}$ es el incremento del flujo magnético a través del circuito, debido al desplazamiento del elemento dl .

Teniendo en cuenta la igualdad (48.8), escribimos (48.7) en la forma

$$dA_{el} = I d\Phi_{el}. \quad (48.9)$$

Efectuando la suma de la expresión (48.9) extendida a todos los elementos del circuito, obtenemos la expresión del trabajo de las fuerzas magnéticas en una traslación arbitraria infinitesimal del circuito:

$$dA = \int dA_{e1} = \int I d\Phi_{e1} = I \int d\Phi_{e1} = I d\Phi \quad (48.10)$$

($d\Phi$ es el incremento total del flujo a través del circuito).

Para hallar el trabajo realizado en una traslación arbitraria, finita, del circuito, efectuamos la suma de la expresión (48.10) extendida a todos los desplazamientos elementales:

$$A_{12} = \int dA = I \int d\Phi = I (\Phi_2 - \Phi_1). \quad (48.11)$$

Aquí Φ_1 y Φ_2 son los valores del flujo magnético a través del circuito en las posiciones inicial y final. Así, el trabajo que realizan las fuerzas magnéticas sobre el circuito es igual al producto de la intensidad de la corriente por el incremento del flujo magnético a través de dicho circuito.

En particular, al girar un circuito plano en un campo homogéneo desde la posición en que los vectores \mathbf{p}_m y \mathbf{B} tienen sentidos opuestos (en esta posición $\Phi = -BS$), hasta la posición en la cual estos vectores tienen el mismo sentido (en ella $\Phi = BS$), las fuerzas magnéticas realizan sobre el circuito el trabajo

$$A = I \{BS - (-BS)\} = 2IBS.$$

Este mismo resultado se obtiene valiéndose de la expresión (46.10) de la energía potencial del circuito en el campo magnético:

$$A = W_{\text{fin}} - W_{\text{inc}} = p_m B - (-p_m B) = 2p_m B = 2ISB$$

($p_m = IS$).

Advertimos que el trabajo (48.11) se realiza no a expensas de la energía del campo magnético exterior, sino a expensas de la fuente que mantiene invariable la corriente en el circuito. En el § 61 se demostrará que si se producen variaciones del flujo magnético que atraviesa el circuito, en este último surge una f.e.m. de inducción $\mathcal{E}_i = -(d\Phi/dt)$. Por consiguiente, la fuente, además del trabajo que se gasta en el desprendimiento del calor de Lentz-Joule, debe realizar un trabajo adicional contra la f.e.m. de inducción, el cual se determina por la expresión

$$A = \int dA = - \int \mathcal{E}_i I dt = \int \frac{d\Phi}{dt} I dt = \int I d\Phi = I (\Phi_2 - \Phi_1),$$

que coincide con (48.11).

§ 49. Divergencia y rotor de un campo magnético

La ausencia en la naturaleza de cargas magnéticas¹⁾ conduce a que las líneas del vector \mathbf{B} no tengan principio ni fin. Por eso, de acuerdo con la fórmula (11.10), el flujo del vector \mathbf{B} a través de una superficie cerrada debe ser nulo. De este modo, cualquiera que sea el campo magnético y la superficie cerrada arbitraria S , tiene lugar la condición

$$\Phi_B = \oint_S \mathbf{B} \, dS = 0. \quad (49.1)$$

Esta fórmula expresa el *teorema de Gauss* para el vector \mathbf{B} : *el flujo del vector inducción magnética a través de cualquier superficie cerrada es nulo.*

Sustituyendo, de acuerdo con (11.41), la integral de superficie de (49.1) por la de volumen, se obtiene que

$$\int_V \nabla \mathbf{B} \, dV = 0.$$

La condición a que hemos llegado debe cumplirse cualquiera que sea el volumen V elegido arbitrariamente. Esto sólo es posible en el caso en que la función subintegral sea nula en cada punto del campo. Por lo tanto, el campo magnético tiene la propiedad de que su divergencia es nula en todas partes:

$$\nabla \mathbf{B} = 0. \quad (49.2)$$

Ahora recurrimos a la circulación del vector \mathbf{B} . Por definición, la circulación es igual a la integral

$$\oint \mathbf{B} \, dl. \quad (49.3)$$

Lo más fácil es calcular esta integral en el caso del campo de una corriente directa. Supongamos que un circuito cerrado se encuentra en un plano perpendicular a la corriente (fig. 49.1); la corriente es perpendicular al plano de la figura y está dirigida hacia detrás del dibujo). En cada punto del circuito el vector \mathbf{B} es tangencial a la circunferencia que pasa por este punto. Sustituimos en la expresión de la inducción $\mathbf{B} \, dl$ por $B \, dl_B$ (dl_B es la proyección del elemento de circuito sobre la dirección del vector \mathbf{B}). En la figura se ve que dl_B es igual a $b \, d\alpha$, siendo b la distancia desde el conductor con corriente hasta dl , y $d\alpha$, el ángulo en que gira la recta radial al desplazarse a lo largo del circuito la distancia dl . De este modo, y sustituyendo

¹⁾ P. Dirac expuso la hipótesis de que en la naturaleza deben existir cargas magnéticas (llamadas *monopolos de Dirac*). Las búsquedas de estas cargas aún no han dado ningún resultado, de modo que el problema de la existencia de los monopolos de Dirac sigue sin resolver.

B por su valor según la expresión (42.5), obtenemos

$$B' dl = B dl_B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} b d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha. \quad (49.4)$$

Teniendo en cuenta la igualdad (49.4), tenemos que

$$\oint B dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\alpha. \quad (49.5)$$

Al recorrer el circuito que abarca la corriente, la recta radial gira todo el tiempo en un sentido, por eso $\oint d\alpha = 2\pi$. De otro modo se plantea la cuestión si la corriente no es abarcada por el circuito

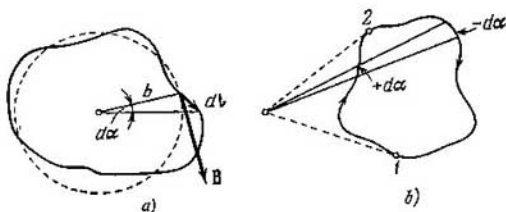


Fig. 49.1.

(fig. 49.1, *b*). En este caso al recorrer el circuito, la recta radial gira primero en un sentido (trozo 1—2) y luego en el opuesto (trozo 2—1), debido a lo cual $\oint d\alpha$ es nula. Teniendo en cuenta este resultado se puede escribir

$$\oint B dl = \mu_0 I, \quad (49.6)$$

donde por I debe entenderse la corriente abarcada por el circuito. Si el circuito no abarca la corriente, la circulación del vector B es nula.

El signo de la expresión (49.6) depende del sentido en que sea recorrido el circuito (en este mismo sentido se mide el ángulo α). Si el sentido del recorrido forma con el de la corriente un sistema dextrógiro, la magnitud (49.6) es positiva; en el caso contrario, negativa. El signo puede tenerse en cuenta suponiendo que I es una magnitud algebraica, en esto deberá considerarse positiva la corriente cuya dirección esté relacionada con el sentido en que sea recorrido el circuito por medio de la regla del sacacorchos; la corriente de sentido contrario será negativa.

Valiéndose de la relación (49.6) es fácil recordar la fórmula (42.5) para B del campo de la corriente directa. Figurémonos un circuito plano en forma de una circunferencia del radio b (fig. 49.2). En cada

punto de este circuito el vector \mathbf{B} tiene la misma magnitud y su dirección es tangencial a la circunferencia. Por consiguiente, la circulación es igual al producto de \mathbf{B} por la longitud de la circunferencia $2\pi b$, y la relación (49.6) tiene la forma

$$B \cdot 2\pi b = \mu_0 I.$$

De aquí, $B = \mu_0 I / 2\pi b$ (compárese con (42.5)).

El caso de un circuito no plano (fig. 49.3) se diferencia del estudiado más arriba de circuito plano en que, al trasladarse a lo largo del circuito, la recta radial no sólo gira alrededor del conductor, sino que también se desplaza a lo largo de él.

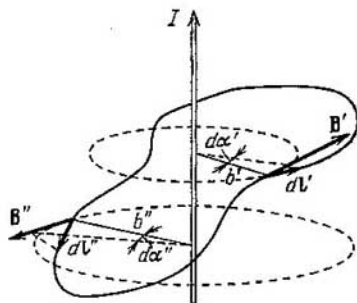


Fig. 49.3.

Los cálculos que nos condujeron a la fórmula (49.6) siguen siendo válidos si por $d\alpha$ se entiende el ángulo en que gira la proyección de la recta radial sobre un plano perpendicular a la corriente. El ángulo total de giro de esta proyección es igual a 2π , si el circuito abarca la corriente, y a cero en el caso contrario. Por lo tanto volvemos a la fórmula (49.6).

La fórmula (49.6) la hemos obtenido para el caso de una corriente directa. Se puede demostrar que es también válida para una corriente que pase por un conductor de forma arbitraria, por ejemplo, para una corriente circular.

Supongamos que cierto circuito abarca varios conductores con corriente. En virtud del principio de superposición (véase (40.1))

$$\oint \mathbf{B} \, dl = \oint \left(\sum_k \mathbf{B}_k \right) \, dl = \sum_k \oint \mathbf{B}_k \, dl.$$

Cada una de las integrales de esta suma es igual a $\mu_0 I_k$. Por lo tanto,

$$\oint \mathbf{B} \, dl = \mu_0 \sum_k I_k \quad (49.7)$$

(recordamos que I_k es una magnitud algebraica).

Si las corrientes pasan por todo el espacio en que se encuentra el circuito, la suma algebraica de las corrientes abarcadas por el

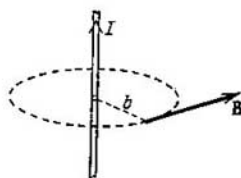


Fig. 49.2.

circuito se puede representar en la forma

$$\sum_h I_h = \int_S \mathbf{j} dS = \int_S \mathbf{j} \mathbf{n} dS. \quad (49.8)$$

La integral se toma sobre una superficie arbitraria S extendida sobre el circuito. El vector \mathbf{j} es la densidad de la corriente en el punto en que se encuentra la superficie dS , y \mathbf{n} , la normal positiva a esta superficie (es decir, la normal que forma con el sentido en que se recorre el circuito al calcular la circulación un sistema dextrógiro).

Sustituyendo en (49.7) la suma de las corrientes por la expresión (49.8), obtenemos

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} dS.$$

Transformando el primer miembro según el teorema de Stokes, llegamos a la igualdad

$$\int_S [\nabla \mathbf{B}] dS = \mu_0 \int_S \mathbf{j} dS.$$

La igualdad obtenida debe cumplirse cualquiera que sea la superficie S elegida sobre la cual se toma la integral. Esto sólo es posible si las funciones subintegrales tienen en cada punto los mismos valores. De este modo, llegamos a la conclusión de que el rotor del vector de inducción magnética es proporcional al vector de intensidad de corriente en el punto dado:

$$[\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (49.9)$$

El coeficiente de proporcionalidad en el SI es igual a μ_0 .

Advertimos que las fórmulas (49.7) y (49.9) son válidas únicamente para un campo en el vacío en ausencia de campos eléctricos que varíen con el tiempo.

Así, pues, hemos hallado la divergencia y el rotor de un campo magnético en el vacío. Comparemos las fórmulas obtenidas con las análogas del campo electrostático en el vacío. Según (13.5), (12.3), (49.2) y (49.9)

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

(la divergencia de \mathbf{E} es igual a ρ dividido por ϵ_0)

$$\nabla \mathbf{B} = 0$$

(la divergencia de \mathbf{B} es nula)

$$[\nabla \mathbf{E}] = 0$$

(el rotor de \mathbf{E} es nulo)

$$[\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j}$$

(el rotor de \mathbf{B} es igual a \mathbf{j} multiplicada por μ_0).

La comparación de estas fórmulas muestra que los campos electrostático y magnético tienen caracteres esencialmente distintos.

El rotor del campo electrostático es nulo; por lo tanto el campo electrostático es irrotacional o de potencial y puede ser caracterizado por el potencial escalar φ . El rotor del campo magnético en aquellos puntos donde hay corriente es distinto de cero. Respectivamente, la circulación del vector \mathbf{B} es proporcional a la corriente abarcada por el circuito. Por eso al campo magnético no puede atribuírsele un potencial escalar que esté ligado con \mathbf{B} por medio de una relación análoga a (8.2). Este potencial no sería unívoco, a cada recorrido del circuito y retorno al punto de partida recibiría un incremento igual a $\mu_0 I$. Un campo cuyo rotor es distinto de cero se llama *rotacional* o *solenoidal*.

Como la divergencia del vector \mathbf{B} es en todas partes nula, este vector puede representarse en forma de rotor de cierta función \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}] \quad (49.10)$$

(la divergencia de un rotor es siempre nula; véase (11.39)). La función \mathbf{A} se denomina *potencial vectorial* o *potencial vector* del campo magnético. El estudio del potencial vectorial rebasa los límites de este libro.

§ 50. Campo de un solenoide y de un toroide

Un solenoide es un conductor arrollado a un armazón cilíndrico redondo. Las líneas \mathbf{B} del campo del solenoide tienen aproximadamente el aspecto que muestra la fig. 50.1. Dentro del solenoide el sentido de las líneas forma con el de la corriente en las espiras un sistema dextrógiro.

En un solenoide real existe una componente de la corriente a lo largo del eje. Además, la densidad lineal de la corriente j_{lin} (igual a la razón de la intensidad de la corriente dI al elemento de longitud del solenoide dl) varía periódicamente al desplazarse a lo largo del solenoide. El valor medio de esta densidad es

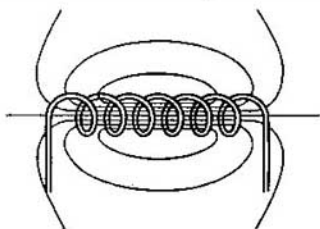


Fig. 50.1.

$$\langle j_{lin} \rangle = \left\langle \frac{dI}{dl} \right\rangle = nI, \quad (50.1)$$

donde n es el número de espiras del solenoide correspondientes a su unidad de longitud, e I , la intensidad de la corriente en el solenoide.

En el estudio del electromagnetismo desempeña un gran papel el solenoide imaginario de longitud infinita, en el cual no existe componente axial de la corriente y en el que, además, la densidad lineal

de la corriente j_{lin} es constante en toda su longitud. La causa de esto consiste en que el campo de dicho solenoide es homogéneo y está limitado por el volumen de éste (análogamente a como el campo eléctrico de un condensador plano infinito es homogéneo y está limitado por el volumen del condensador).

De acuerdo con lo dicho representamos el solenoide en forma de un cilindro infinito de paredes delgadas, alrededor de las cuales fluye una corriente de densidad lineal constante

$$j_{lin} = nI. \quad (50.2)$$

Dividimos el cilindro en corrientes circulares iguales, «espiras». En la fig. 50.2 se ve que cada par de espiras, situadas simétricamente

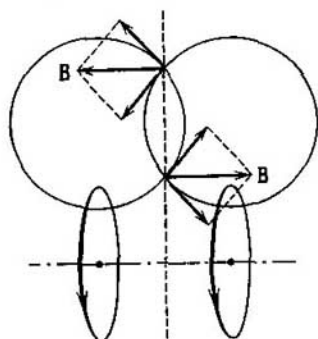


Fig. 50.2.

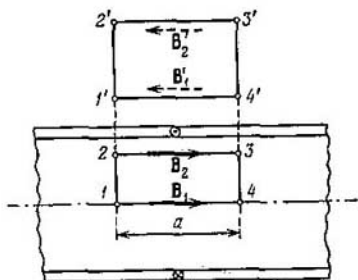


Fig. 50.3.

respecto de cierto plano perpendicular al eje del solenoide, crea en cualquier punto de dicho plano una inducción magnética paralela al eje. Por consiguiente, también el campo resultante en cualquier punto dentro o fuera del solenoide infinito puede tener solamente dirección paralela al eje.

De la fig. 50.1 se infiere que los sentidos del campo dentro y fuera del solenoide infinito son opuestos. Cuando aumenta la longitud del solenoide, los sentidos de los campos no varían y en el límite, cuando $l \rightarrow \infty$, siguen siendo opuestos. En el solenoide infinito, lo mismo que en el finito, el sentido del campo dentro de éste forma con el sentido en que fluye la corriente alrededor del cilindro un sistema dextrógiro.

Del paralelismo del vector \mathbf{B} al eje se deduce que el campo, tanto dentro como fuera del solenoide infinito, debe ser homogéneo. Para demostrar esto, tomamos dentro del solenoide un contorno rectangular imaginario 1-2-3-4 (fig. 50.3; el trozo 4-1 va por el eje del

solenoides). Recorriendo el contorno en el sentido de las agujas del reloj, obtenemos que la circulación del vector \mathbf{B} tiene el valor $(B_2 - B_1) a$. El contorno no abarca corrientes, por lo que la circulación debe ser nula (véase (49.7)). De aquí se sigue que $B_1 = B_2$. Situando la parte 2-3 del contorno a cualquier distancia del eje, cada vez obtenemos que la inducción magnética B_2 a esta distancia es igual a la inducción B_1 sobre el eje del solenoide. De este modo, la homogeneidad del campo dentro del solenoide está demostrada.

Recurramos ahora al contorno $1'-2'-3'-4'$. Hemos representado los vectores B'_1 y B'_2 con línea de trazos porque, como se aclarará más adelante, el campo fuera de un solenoide infinito es nulo. Por ahora sólo sabemos que el posible sentido del campo fuera del solenoide es contrario al del campo dentro de éste. El contorno $1'-2'-3'-4'$ no abarca corrientes; por lo tanto la circulación del vector \mathbf{B}' a lo largo de este contorno es igual a $(B'_1 - B'_2) a$ y debe ser nula. De aquí se infiere que $B'_1 = B'_2$. Las distancias desde el eje del solenoide hasta los trozos $1'-4'$ y $2'-3'$ fueron tomadas arbitrariamente. Por lo tanto, el valor de \mathbf{B}' a cualquier distancia del eje será, fuera del solenoide, el mismo. De esta forma resulta demostrada también la homogeneidad del campo fuera del solenoide.

La circulación a lo largo del contorno representado en la fig. 50.4 es igual a $a(B + B')$ (para el recorrido en sentido horario). Este contorno abarca una corriente positiva de magnitud $j_{lin}a$. De acuerdo con (49.7) debe cumplirse la igualdad

$$a(B + B') = \mu_0 j_{lin} a$$

o, después de simplificar por a y de sustituir j_{lin} por nI (véase (50.2)),

$$B + B' = \mu_0 nI. \quad (50.3)$$

De esta igualdad se deduce que el campo, tanto dentro como fuera del solenoide infinito, es finito.

Tomemos un plano perpendicular al eje del solenoide (fig. 50.5). Debido a que las líneas \mathbf{B} son cerradas, los flujos magnéticos a través de la parte interior S de este plano y a través de su parte exterior S' deben ser iguales. Como los campos son homogéneos y perpendiculares al plano, cada uno de los flujos es igual al producto del correspondiente valor de la inducción magnética por el área atravesada por el flujo. De este modo se obtiene la relación

$$BS = B'S'.$$

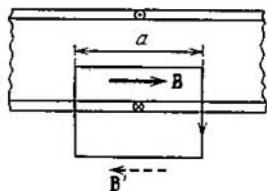


Fig. 50.4.

El primer miembro de esta igualdad es finito; el factor S' del segundo miembro es infinito. De aquí se sigue que $B' = 0$.

Así, hemos demostrado que, fuera de un solenoide infinitamente largo, la inducción magnética es nula. Dentro del solenoide el campo es homogéneo. Suponiendo en (50.3) $B' = 0$, llegamos a la fórmula de la inducción magnética dentro del solenoide:

$$B = \mu_0 n I. \quad (50.4)$$

El producto nI se llama número de amperio-vueltas por metro. Si $n = 1000$ vueltas por metro y la intensidad de la corriente es de

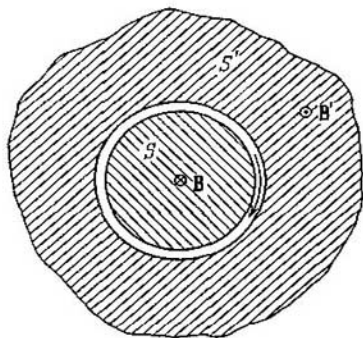


Fig. 50.5.

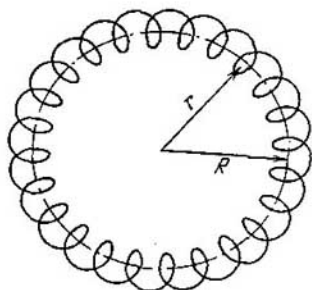


Fig. 50.6.

1 A, la inducción magnética dentro del solenoide es igual a $4\pi \times 10^{-4} \text{ T} = 4\pi \text{Gs}$.

A la inducción magnética sobre el eje del solenoide hacen la misma aportación las espiras dispuestas simétricamente (véase la fórmula (47.4)). Por eso, en el extremo de un solenoide semiinfinito, la inducción magnética sobre su eje es igual a la mitad del valor (50.4):

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I. \quad (50.5)$$

Prácticamente, si la longitud del solenoide es mucho mayor que su diámetro, la fórmula (50.4) será válida para los puntos de su parte media, y la (50.5), para los puntos sobre el eje próximos a sus extremos.

Un toroide es un conductor arrollado a un armazón en forma de toro (fig. 50.6). Tomemos un contorno en forma de circunferencia de radio r cuyo centro coincida con el del toroide. En virtud de la simetría, el vector \mathbf{B} debe tener en cada punto dirección tangencial al

contorno. Por consiguiente, la circulación de \mathbf{B} es igual a

$$\oint \mathbf{B} \, dl = B \cdot 2\pi r$$

(\mathbf{B} es la inducción magnética en aquellos puntos por donde pasa el contorno).

Si el contorno pasa por dentro del toroide, abarca una corriente $2\pi RnI$ (R es el radio del toroide y n , el número de espiras por unidad de longitud de él). En este caso

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 2\pi RnI,$$

de donde

$$B = \mu_0 n I \frac{R}{r}. \quad (50.6)$$

Un contorno que pasa fuera del toroide no abarca corrientes, por lo que para éste $B \cdot 2\pi r = 0$. De este modo, fuera del toroide la inducción magnética es nula.

Para un toroide cuyo radio R sea mucho mayor que el radio de la espira, la relación R/r en todos los puntos del toroide diferirá poco de la unidad y en vez de (50.6) se obtiene una fórmula que coincide con la (50.4) del solenoide de longitud infinita. En este caso el campo se puede considerar homogéneo en cada una de las secciones del toroide. En distintas secciones el campo tiene diferente sentido, por lo que hablar de homogeneidad del campo dentro de los límites de todo el toroide sólo puede hacerse convencionalmente, teniendo en cuenta la igualdad del módulo de \mathbf{B} .

En un toroide real existe una componente de la corriente a lo largo del eje. Esta componente crea, adicionalmente al campo (50.6), un campo análogo al de una corriente circular.

CAPÍTULO VII

CAMPO MAGNÉTICO EN UNA SUBSTANCIA

§ 51. Imanación de un material magnético

En el capítulo anterior se supuso que los conductores por los cuales pasaba la corriente que creaba el campo magnético se encontraban en el vacío. Si el conductor por el cual fluye la corriente se encuentra en un medio cualquiera, el campo magnético varía. Esto se explica porque toda substancia es un *material magnético*, es decir, capaz de, bajo la acción de un campo magnético, adquirir un momento magnético (imanarse). La substancia imanada crea un campo magnético B' que se superpone al campo B_0 condicionado por las corrientes. Ambos campos sumados dan el campo resultante

$$B = B_0 + B' \quad (51.1)$$

(compárese con (17.2)).

El campo verdadero (microscópico) en un material magnético varía mucho dentro de los límites de las distancias intermoleculares. Se entiende por B el campo promediado (macroscópico) (véase el § 17).

Para explicar la imanación de los cuerpos supuso A.-M. Ampere que por las moléculas de la substancia circulan corrientes circulares (corrientes moleculares). Cada una de estas corrientes posee un momento magnético y crea en el espacio que la rodea un campo magnético. En ausencia de campo exterior, las corrientes moleculares están orientadas desordenadamente, por lo que el campo resultante que ellas condicionan es nulo. En virtud de la orientación caótica de los momentos magnéticos de las moléculas aisladas, el momento magnético total del cuerpo también es nulo. Bajo la acción de un campo, los momentos magnéticos de las moléculas adquieren una orientación predominante en una dirección, a consecuencia de lo cual el material magnético se imana, es decir, su momento magnético total se hace distinto de cero. Los campos magnéticos de las corrientes moleculares aisladas no se compensan ya unos a otros en este caso y surge el campo B' .

La imanación de un material magnético es natural que se caracterice por el momento magnético de la unidad de volumen. Esta magnitud se llama *imanación* y se representa con la letra J . Si un material magnético está imanado no homogéneamente, la imanación en un punto dado se determina por la expresión siguiente:

$$J = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} p_m, \quad (51.2)$$

en la que ΔV es un volumen físicamente infinitesimal tomado en el entorno del punto considerado, y \mathbf{p}_m es el momento magnético de una molécula aislada. La suma se extiende a todas las moléculas contenidas en el volumen ΔV (compárese con la fórmula 16.1)).

El campo \mathbf{B}' , lo mismo que el \mathbf{B}_0 , no tiene manantiales. Por eso la divergencia del campo resultante (51.1) es nula:

$$\nabla \mathbf{B} = \nabla \mathbf{B}_0 + \nabla \mathbf{B}' = 0. \quad (51.3)$$

De este modo la fórmula (49.2), y por lo tanto la (49.1), son válidas no sólo un campo en el vacío, sino también para el campo en una substancia.

§ 52. Intensidad del campo magnético

Escribamos la expresión del rotor del campo resultante (51.1):

$$[\nabla \mathbf{B}] = [\nabla \mathbf{B}_0] + [\nabla \mathbf{B}'].$$

De acuerdo con (49.9), $[\nabla \mathbf{B}_0] = \mu_0 \mathbf{j}$, siendo \mathbf{j} la densidad de la corriente macroscópica. Análogamente, el rotor del vector \mathbf{B}' debe ser proporcional a la densidad de las corrientes moleculares:

$$[\nabla \mathbf{B}'] = \mu_0 \mathbf{j}_{mol}.$$

Por consiguiente, el rotor del campo resultante se determina por la fórmula

$$[\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{mol}). \quad (52.1)$$

De (52.1) se infiere que al calcular el rotor del campo en los materiales magnéticos tropezamos con una dificultad análoga a la que encontramos al estudiar el campo eléctrico en los dieléctricos (véase la fórmula (19.1)): para determinar el rotor \mathbf{B} hay que conocer la densidad, no sólo de las corrientes macroscópicas, sino también de las moleculares. Pero la densidad de las corrientes moleculares depende a su vez del valor del vector \mathbf{B} . El camino para salvar esta dificultad también es análogo al que utilizamos en el § 19. Resulta que se puede hallar una magnitud auxiliar tal, que su rotor esté determinado únicamente por la densidad de las corrientes macroscópicas.

Para establecer la forma de esta magnitud auxiliar vamos a intentar expresar la densidad de las corrientes moleculares \mathbf{j}_{mol} por medio de la imanación \mathbf{J} del material magnético¹⁾. Con este fin calculamos la suma algebraica de las corrientes moleculares abarcadas por cierto contorno Γ . Esta suma es igual a

$$\int_S \mathbf{j}_{mol} dS, \quad (52.2)$$

donde S es la superficie extendida sobre el contorno.

¹⁾ En el § 19 expresamos la densidad de cargas ligadas por medio de la polarización del dieléctrico \mathbf{P} .

En la suma algebraica de las corrientes moleculares entran solamente aquellas corrientes moleculares que están «ensartadas» en el contorno (véase la corriente I'_{mol} en la fig. 52.1). Las corrientes no «ensartadas» en el contorno o no atraviesan la superficie extendida sobre dicho contorno, o la atraviesan dos veces, una en un sentido y otra en otro (véase la corriente I''_{mol} en la fig. 52.1). Como resultado, su aportación a la suma algebraica de las corrientes abarcadas por el contorno es nula.

En la fig. 52.2 se ve que el elemento de contorno dl , que forma con la dirección de la imanación \mathbf{J} el ángulo α , ensarta aquellas corrientes moleculares, cuyos centros se encuentran dentro de un cilindro inclinado de volumen $S_{mol} \cos \alpha dl$ (S_{mol} es el área abarcada

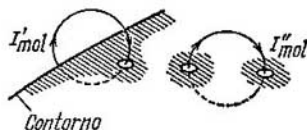


Fig. 52.1.

por una corriente molecular aislada). Si n es el número de moléculas que hay en la unidad de volumen, la corriente total abarcada por el elemento dl es igual a $I_{mol} n S_{mol} \cos \alpha dl$. El producto $I_{mol} S_{mol}$ es igual al momento magnético p_m de una corriente molecular aislada. Por consiguiente, la expresión $I_{mol} S_{mol} n$ es el momento magnético de la unidad de volumen, es decir, da el módulo del vector \mathbf{J} e $I_{mol} S_{mol} n \cos \alpha$, la proyección del vector \mathbf{J} sobre la dirección del elemento dl . De este modo, la corriente molecular total abarcada por el elemento dl es igual a $\mathbf{J} dl$, mientras que la suma de las corrientes moleculares abarcadas por todo el contorno (véase (52.2)), es igual a

$$\int_S \mathbf{j}_{mol} dS = \oint \mathbf{J} dl.$$

Después de transformar el segundo miembro según el teorema de Stokes, obtenemos

$$\int_S \mathbf{j}_{mol} dS = \int_S [\nabla \mathbf{J}] dS.$$

La igualdad a que hemos llegado debe cumplirse cualquiera que sea la superficie S que se elija. Esto sólo es posible si las expresiones subintegrales son iguales en cada punto del material magnético:

$$\mathbf{j}_{mol} = [\nabla \mathbf{J}]. \quad (52.3)$$

De este modo la densidad de las corrientes moleculares se determina conociendo el rotor de la imanación. En el caso en que $[\nabla J] = 0$, las corrientes moleculares de las moléculas aisladas están orientadas de tal modo que su suma, en promedio, es nula.

La fórmula (52.3) permite la siguiente interpretación intuitiva. En la fig. 52.3 se representan los vectores de imanación J_1 y J_2 en la proximidad inmediata a cierto punto P . El punto P y ambos vectores se encuentran en el plano de la figura. El contorno Γ , representado con línea de trazos, también se halla en el plano de la figura.

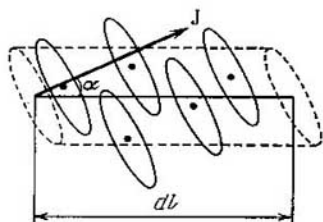


Fig. 52.2.

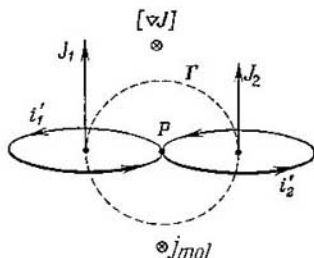


Fig. 52.3.

Si el carácter de la imanación es tal que los vectores J_1 y J_2 tienen iguales los módulos, la circulación de J a lo largo del contorno Γ será nula. Respectivamente, $[\nabla J]$ en el punto P también será nulo.

A las imanaciones J_1 y J_2 se pueden equiparar las corrientes moleculares i'_1 e i'_2 que fluyen por los contornos representados en la fig. 52.3 con línea continua. Estos contornos se encuentran en un plano perpendicular al de la figura. Si los vectores J_1 y J_2 tienen el mismo sentido, las corrientes i'_1 e i'_2 serán opuestas entre sí en el punto P . En virtud de que $J_1 = J_2$, las corrientes i'_1 e i'_2 son iguales en magnitud, a causa de lo cual la corriente molecular resultante en el punto P es, lo mismo que $[\nabla J]$, igual a cero: $j_{mol} = 0$.

Supongamos ahora que $J_1 > J_2$. Entonces la circulación de J a lo largo del contorno Γ resulta ser distinta de cero. Respectivamente, el campo del vector J en el punto P se caracteriza por un vector $[\nabla J]$ dirigido hacia detrás de la figura. A una imanación mayor corresponde una corriente molecular también mayor, por eso $i'_1 > i'_2$. En conclusión, en el punto P se observará una corriente resultante distinta de cero, caracterizada por la densidad j_{mol} , dirigida en el mismo sentido que $[\nabla J]$, es decir, hacia detrás de la figura. En el caso en que $J_1 < J_2$, los vectores $[\nabla J]$ y j_{mol} no estarán dirigidos hacia detrás de la figura, sino hacia nosotros.

Así, pues, en los puntos en que el rotor de imanación es distinto de cero, también es distinta de cero la densidad de corrientes moleculares, y los vectores $[\nabla \mathbf{J}]$ y \mathbf{j}_{mol} tienen el mismo sentido (véase (52.3)).

Sustituamos la expresión (52.3) de la densidad de corrientes moleculares en la fórmula (52.1):

$$[\nabla \mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 [\nabla \mathbf{J}].$$

Dividiendo esta relación por μ_0 y juntando los rotores, obtenemos

$$\left[\nabla, \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) \right] = \mathbf{j}. \quad (52.4)$$

De aquí se sigue que

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \quad (52.5)$$

es la magnitud que buscábamos, cuyo rotor está determinado únicamente por las corrientes macroscópicas. Esta magnitud se llama *intensidad del campo magnético*.

De acuerdo con (52.4)

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} \quad (52.6)$$

(el rotor del vector \mathbf{H} es igual al vector de densidad de corrientes macroscópicas).

Tomamos un contorno arbitrario Γ con una superficie S extendida sobre él y formamos la expresión

$$\int_S [\nabla \mathbf{H}] d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Según el teorema de Stokes, el primer miembro de esta igualdad equivale a la circulación del vector \mathbf{H} a lo largo del contorno Γ . Por consiguiente,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (52.7)$$

Si las corrientes macroscópicas pasan por conductores abarcados por el contorno, la relación (52.7) se puede escribir en la forma

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum_k I_k. \quad (52.8)$$

Las fórmulas (52.7) y (52.8) expresan *el teorema de la circulación del vector \mathbf{H} : la circulación del vector de intensidad del campo magnético a lo largo de un contorno es igual a la suma algebraica de las corrientes macroscópicas abarcadas por dicho contorno*.

La intensidad del campo magnético \mathbf{H} es el análogo del desplazamiento eléctrico \mathbf{D} . Al principio se supuso que en la naturaleza exis-

tían masas magnéticas semejantes a las cargas eléctricas y el estudio del magnetismo se desarrolló por analogía con el de la electricidad. En aquel tiempo fueron introducidas las denominaciones de «inducción magnética» para \mathbf{B} e «intensidad del campo» para \mathbf{H} . Después se aclaró que en la naturaleza no existen tales masas magnéticas y que la magnitud llamada inducción magnética es en realidad análoga no al desplazamiento eléctrico \mathbf{D} , sino a la intensidad del campo eléctrico \mathbf{E} (y, respectivamente, \mathbf{H} no es análoga a \mathbf{E} , sino a \mathbf{D}). Pero la terminología ya establecida no se cambió, porque, además, a causa de la distinta naturaleza de los campos eléctrico y magnético (el campo eléctrico es de potencial y el magnético solenooidal¹⁾), las magnitudes \mathbf{B} y \mathbf{D} ponen de manifiesto mucha semejanza en su comportamiento (por ejemplo, las líneas \mathbf{B} , lo mismo que las \mathbf{D} , no sufren interrupción en el límite entre dos medios).

En el vacío $\mathbf{J} = 0$, por lo que \mathbf{H} se convierte en \mathbf{B}/μ_0 y las fórmulas (52.6) y (52.8) se transforman en las (49.9) y (49.7).

De acuerdo con (42.5), la intensidad del campo de una corriente directa en el vacío se determina por la expresión

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{b}, \quad (52.9)$$

de la cual se deduce que la dimensión de la intensidad del campo magnético es igual a la dimensión de la intensidad de la corriente dividida por la dimensión de la longitud. Por eso la unidad de intensidad del campo magnético en el SI recibe el nombre de *amperio por metro* (A/m).

En el sistema de Gauss se denomina intensidad del campo magnético la magnitud

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}. \quad (52.10)$$

De esta definición se sigue que, en el vacío, \mathbf{H} coincide con \mathbf{B} . De acuerdo con esto la unidad de \mathbf{H} en el sistema de Gauss, llamada *oerstedio* u *oersted* (Oe), tiene la misma magnitud y dimensión que la unidad de inducción magnética, *gaussio* (Gs). En realidad oerstedio y gaussio son dos denominaciones distintas de una misma unidad. Si con esta unidad se mide \mathbf{H} , se llama oerstedio, y si se mide \mathbf{B} , gaussio.

Se admite ligar la imanación no con la inducción magnética, sino con la intensidad del campo. Se supone que en cada punto de un material magnético

$$\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}, \quad (52.11)$$

donde χ es una magnitud característica del material magnético dado, denominada *susceptibilidad magnética*²⁾. La experiencia demuestra

¹⁾ Se llama solenooidal el campo que no tiene manantiales. En cada punto de este campo la divergencia es nula.

²⁾ En los medios anisótropos los sentidos de los vectores \mathbf{J} y \mathbf{H} , en general, no coinciden. En estos medios la relación entre los vectores \mathbf{J} y \mathbf{H} se efectúa por medio del *tensor de susceptibilidad magnética* (véase la observación que hay al pie de la pág. 67).

que para las sustancias débilmente magnéticas (no ferromagnéticas) en campos no demasiado intensos, χ no depende de \mathbf{H} . Según (52.5), la dimensión de \mathbf{H} coincide con la de \mathbf{J} . Por consiguiente, χ es una magnitud adimensional. Sustituyendo en la fórmula (52.5) \mathbf{J} por su expresión (52.11), obtenemos

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi \mathbf{H},$$

de donde

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 (1 + \chi)}. \quad (52.12)$$

La magnitud adimensional

$$\mu = 1 + \chi \quad (52.13)$$

se llama *permeabilidad magnética relativa* o simplemente *permeabilidad magnética* de la substancia¹⁾.

A diferencia de la susceptibilidad dieléctrica κ , que sólo puede tener valores positivos (la polarización \mathbf{P} en un dieléctrico isótropo está siempre dirigida en el sentido del campo \mathbf{E}), la susceptibilidad magnética χ puede ser tanto positiva como negativa. Por eso la permeabilidad magnética μ puede ser tanto mayor como menor que la unidad.

Teniendo en cuenta (52.13), a la fórmula (52.12) se le puede dar la forma

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu}. \quad (52.14)$$

De este modo la intensidad del campo magnético \mathbf{H} es un vector que tiene el mismo sentido que el \mathbf{B} , pero cuyo módulo es $\mu_0 \mu$ veces menor (en los medios anisótropos los vectores \mathbf{H} y \mathbf{B} , en general, no tienen el mismo sentido).

La relación (52.11) que liga los vectores \mathbf{J} y \mathbf{H} tiene exactamente la misma forma en el sistema de Gauss. Sustituyendo esta expresión en la fórmula (52.10), se obtiene

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\chi\mathbf{H},$$

de donde

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{1 + 4\pi\chi}. \quad (52.15)$$

La magnitud adimensional

$$\mu = 1 + 4\pi\chi \quad (52.16)$$

se llama *permeabilidad magnética* de la substancia. Introduciendo esta magnitud en la fórmula (52.15), obtenemos

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}. \quad (52.17)$$

¹⁾ En electrotecnia se introduce la llamada permeabilidad magnética absoluta $\mu_a = \mu_0 \mu$. Pero esta magnitud carece de sentido físico y nosotros no la utilizaremos.

El valor de μ en el sistema de Gauss coincide con el valor de μ en el SI. La comparación de las fórmulas (52.13) y (52.16) muestra que el valor de la susceptibilidad magnética en el SI es 4π veces mayor que el valor de χ en el sistema de Gauss:

$$\chi_{SI} = 4\pi\chi_{SG}. \quad (52.18)$$

§ 53. Cálculo del campo en los materiales magnéticos

Examinemos el campo que crea una varilla redonda infinitamente larga. La imanación J la consideraremos igual en todas partes y dirigida a lo largo del eje de la varilla. Dividimos mentalmente la varilla en capas de espesor dl perpendiculares al eje. Cada capa la

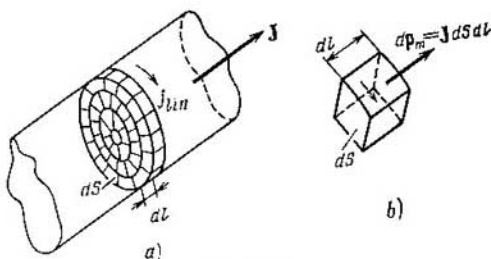


Fig. 53.1.

dividimos a su vez en pequeños elementos de cilindro, cuyas bases sean arbitrarias (fig. 53.1, a). Cada uno de estos elementos posee un momento magnético

$$dp_m = J dS dl, \quad (53.1)$$

donde dS es el área de la base.

El campo dB' que crea un elemento a distancias grandes en comparación con sus dimensiones es equivalente al campo que crearía una corriente de intensidad $I = J dl$ que pasara rodeando el elemento por su superficie lateral (véase la fig. 53.1, b). En efecto, el momento magnético de esta corriente es $dp_m = I dS = J dl dS$ (compárese con 53.1)), y el campo magnético a grandes distancias viene determinado únicamente por la magnitud y la dirección del momento magnético (véase el § 47).

Las corrientes imaginarias que fluyen por la parte de superficie común a dos elementos contiguos son iguales en magnitud y tienen sentidos opuestos, por lo que su suma será nula. De este modo, al sumar las corrientes que pasan rodeando las superficies laterales de los elementos de una capa, resultan no compensadas únicamente las corrientes que fluyen por la superficie lateral de la capa.

De lo dicho se infiere que una capa de espesor dl de la varilla crea un campo equivalente al que crearía una corriente de intensidad $J dl$ que pasara rodeando la capa por su superficie lateral (la densidad lineal de esta corriente es $j_{lin} = J$). Toda la varilla infinita imanada crea un campo equivalente al de un cilindro rodeado por una corriente de densidad lineal $j_{lin} = J$. En el § 50 explicamos que fuera de este cilindro el campo es nulo, y dentro de él es homogéneo y su magnitud igual a $\mu_0 j_{lin}$.

Así, hemos aclarado el carácter del campo \mathbf{B}' que crea una varilla redonda, de longitud infinita, imanada. Fuera de la varilla este campo es nulo. Dentro de ella el campo es homogéneo e igual a

$$\mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (53.2)$$

Supongamos que existe un campo homogéneo \mathbf{B}_0 creado por macrocorrientes en el vacío. Según (52.14), la intensidad de este campo será

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}. \quad (53.3)$$

Introduzcamos en este campo (que llamaremos exterior) una varilla redonda infinitamente larga, de material magnético homogéneo e isótropo, situándola a lo largo de la dirección de \mathbf{B}_0 . De las razones de simetría se sigue que la imanación \mathbf{J} que se produce en la varilla es colineal con el vector \mathbf{B}_0 .

La varilla imanada crea dentro de ella el campo \mathbf{B}' , determinado por la fórmula (53.2). Como resultado, el campo dentro de la varilla será

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{J}. \quad (53.4)$$

Sustituyendo este valor de \mathbf{B} en la fórmula (52.5) obtenemos la intensidad del campo dentro de la varilla

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mathbf{H}_0$$

(véase (53.3)). De este modo, la intensidad del campo dentro de la varilla resulta que coincide con la intensidad del campo exterior.

Multiplicando \mathbf{H} por $\mu_0 \mu$, obtenemos la inducción magnética dentro de la varilla:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mu \mathbf{B}_0. \quad (53.5)$$

De aquí se deduce que la permeabilidad magnética μ indica las veces que se intensifica el campo en el material magnético (compárese con (20.2)).

Advertimos que, como el campo \mathbf{B}' sólo es distinto de cero dentro de la varilla, el campo magnético fuera de ésta permanece invariable.

El resultado obtenido es válido en aquellos casos en que un material magnético homogéneo e isótropo llena el volumen limitado por las superficies que forman las líneas de intensidad del campo exterior ¹⁾. En el caso contrario la intensidad del campo, determinada por la fórmula (52.5), no coincide con $H_0 = B_0/\mu_0$.

Convencionalmente se supone que la intensidad del campo en el material magnético es

$$H = H_0 - H_\infty, \quad (53.6)$$

donde H_0 es el campo exterior, y H_∞ , el llamado *campo desimanante* o *desmagnetizante*, que se considera proporcional a la imanación:

$$H_\infty = NJ. \quad (53.7)$$

El coeficiente de proporcionalidad N se denomina *factor de desimación*. Este factor depende de la forma del material magnético. Para un cuerpo cuya superficie no corte las líneas de intensidad del campo exterior, como hemos visto, $H = H_0$, es decir, el factor de desimación es nulo. Para un disco delgado perpendicular al campo exterior, $N = 1$, y para una esfera, $N = 1/3$.

El cálculo correspondiente da que, en el caso de un cuerpo magnético homogéneo e isótropo, de forma elipsoidal, situado en un campo exterior homogéneo e isótropo, el campo magnético dentro de él, aunque sea distinto del campo exterior, será también homogéneo. Esto mismo es válido para la esfera, como caso particular del elipsoide, y para una varilla larga o un disco delgado, que se pueden considerar como casos extremos del elipsoide.

Para terminar vamos a hallar la intensidad del campo de un solenoide infinitamente largo, lleno de material magnético homogéneo e isótropo (o sumergido en un material magnético homogéneo e isótropo imitado). Aplicando al contorno representado en la fig. 50.4 el teorema de la circulación (véase (52.8)), se obtiene la relación $Ha = nI$. De aquí que

$$H = nI. \quad (53.8)$$

Así, pues, la intensidad del campo dentro de un solenoide infinitamente largo es igual al producto de la intensidad de la corriente por el número de espiras que hay en la unidad de longitud. Fuera del solenoide la intensidad del campo es nula.

¹⁾ Recordamos que en el caso de un campo eléctrico $D = D_0$ a condición de que un dieléctrico homogéneo e isótropo llene el volumen limitado por las superficies equipotenciales, es decir, las superficies ortogonales a las líneas de intensidad del campo exterior.

§ 54. Condiciones en el límite entre dos materiales magnéticos

En las proximidades de la superficie de separación de dos materiales magnéticos, los vectores \mathbf{B} y \mathbf{H} deben satisfacer determinadas condiciones de frontera que se infieren de las relaciones

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad [\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} \quad (54.1)$$

(véanse las fórmulas (51.3) y (52.6)). Consideramos campos estacionarios, o sea, campos que no varían con el tiempo.

Tomemos en el límite entre dos materiales magnéticos, de permeabilidades μ_1 y μ_2 , una superficie cilíndrica imaginaria de altura

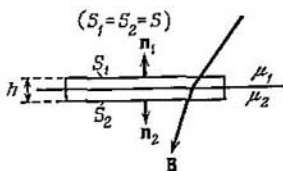


Fig. 54.1.

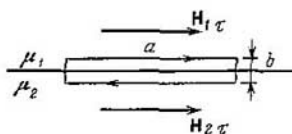


Fig. 54.2.

h y bases S_1 y S_2 situadas por ambos lados de la superficie de separación (fig. 54.1). El flujo del vector \mathbf{B} a través de esta superficie es

$$\Phi_B = B_{1n}S + B_{2n}S + \langle B_n \rangle S_{1n}t \quad (54.2)$$

(compárese con (21.6)).

De acuerdo con que $\nabla \mathbf{B} = 0$, el flujo del vector \mathbf{B} a través de cualquier superficie cerrada es nulo. Igualando a cero la expresión (54.2) y efectuando el paso $h \rightarrow 0$, llegamos a la relación $B_{1n} = -B_{2n}$. Si \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 se proyectan sobre una misma normal, se obtiene la condición

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (54.3)$$

(compárese con (21.7)).

Sustituyendo, de acuerdo con (52.14), los componentes de \mathbf{B} por los respectivos componentes del vector \mathbf{H} multiplicados por $\mu_0\mu$, obtenemos la relación

$$\mu_0\mu_1 H_{1n} = \mu_0\mu_2 H_{2n},$$

de la que se sigue que

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (54.4)$$

Tomemos ahora en el límite entre los materiales magnéticos un contorno rectangular (fig. 54.2) y calculemos para él la circulación \mathbf{H} .

Si las dimensiones del contorno son pequeñas, la circulación se puede representar en la forma

$$\oint H_1 dl = H_{1\tau} a - H_{2\tau} a + \langle H_1 \rangle 2b, \quad (54.5)$$

donde $\langle H_1 \rangle$ es el valor medio de H_1 en los trozos de contorno perpendiculares al límite. Si por la superficie de separación no fluyen corrientes macroscópicas, $[\nabla \mathbf{H}]$ será nulo dentro de los límites del contorno. Por eso la circulación también será nula. Suponiendo la expresión (54.5) igual a cero y efectuando el paso al límite $b \rightarrow 0$, se llega a la relación

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \quad (54.6)$$

(compárese con (21.4)).

Sustituyendo los componentes de \mathbf{H} por los respectivos componentes del vector \mathbf{B} divididos por $\mu_0 \mu$, obtenemos la relación

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_0 \mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_0 \mu_2},$$

de la cual se deduce que

$$\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (54.7)$$

Resumiendo se puede decir que al pasar a través del límite de separación de dos medios magnéticos, el componente normal del vector \mathbf{B} y el componente tangencial del vector \mathbf{H} varían de un modo continuo. En cambio, el componente tangencial del vector \mathbf{B} y el componente normal del vector \mathbf{H} , al pasar a través del límite de separación sufren una discontinuidad. Por lo tanto, al atravesar el límite de separación de los dos medios, el vector \mathbf{B} se comporta de un modo análogo al vector \mathbf{D} , y el vector \mathbf{H} , de un modo análogo al vector \mathbf{E} .

En la fig. 54.3 se muestra el comportamiento de las líneas \mathbf{B} al cruzar el límite de separación entre dos materiales magnéticos. Designemos los ángulos entre las líneas \mathbf{B} y la normal a la superficie de separación respectivamente por α_1 y α_2 . La relación entre las tangentes de estos ángulos es

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{B_{1\tau}/B_{1n}}{B_{2\tau}/B_{2n}},$$

de aquí, teniendo en cuenta (54.3) y (54.7), se obtiene una ley análoga a la (21.9) de refracción de las líneas de inducción magnética:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (54.8)$$

Al pasar al material magnético de mayor μ , las líneas de inducción magnética se desvían de la normal hacia la superficie. Esto hace que dichas líneas se condensen. La condensación de las líneas \mathbf{B}

en la substancia de mayor permeabilidad magnética de la posibilidad de formar haces magnéticos, es decir, de darles la forma y dirección necesarias. En particular, para efectuar la protección magnética de un volumen determinado, se rodea éste con una pantalla de hierro.

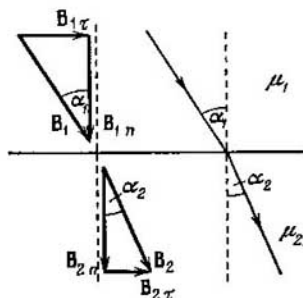


Fig. 54.3.

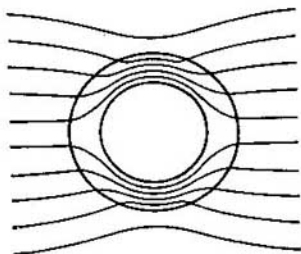


Fig. 54.4.

En la fig. 54.4 se ve que la condensación de las líneas de inducción magnética en el espesor de la pantalla hace que el campo se debilite dentro.

En la fig. 54.5 se da el esquema de un electroimán de laboratorio. Consta de un núcleo de hierro, sobre el cual asientan las bobinas alimentadas por la corriente. Las líneas de inducción magnética resultan concentradas fundamentalmente dentro del núcleo. Sólo en el estrecho espacio de aire pasan por un medio de μ pequeña. El vector B cruza el límite entre el espacio de aire y el núcleo siguiendo la normal a la superficie de separación. De aquí, según (54.3), se deduce que la inducción magnética en el espacio de aire y en el núcleo tiene la misma magnitud. Apliquemos el teorema de la circulación de H al contorno que pasa por el eje del núcleo. La intensidad del campo se puede considerar que es la misma en todos los puntos del hierro e igual a $H_{\text{hier}} = B/\mu_0\mu_{\text{hier}}$. En el aire $H_{\text{aire}} = B/\mu_0\mu_{\text{aire}}$. Designemos la longitud de la parte del contorno que se encuentra en el hierro por l_{hier} y la del espacio de aire por l_{aire} . Entonces la circulación se puede representar en la forma $H_{\text{hier}}l_{\text{hier}} + H_{\text{aire}}l_{\text{aire}}$. Según (52.8) esta circulación debe ser igual a NI ,

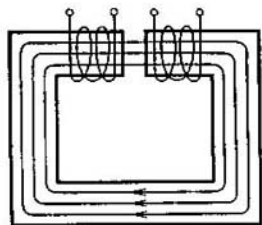


Fig. 54.5.

Según (52.8) esta circulación debe ser igual a NI ,

donde N es el número total de espiras de las bobinas del electroimán, e I , la intensidad de la corriente. De este modo,

$$\frac{B}{\mu_0 \mu_{\text{hier}}} l_{\text{hier}} + \frac{B}{\mu_0 \mu_{\text{aire}}} l_{\text{aire}} = NI.$$

De aquí

$$B = \mu_0 I \frac{N}{\frac{l_{\text{aire}}}{\mu_{\text{aire}}} + \frac{l_{\text{hier}}}{\mu_{\text{hier}}}} \approx \mu_0 I \frac{N}{l_{\text{aire}} + \frac{l_{\text{hier}}}{\mu_{\text{hier}}}}$$

(μ_{aire} sólo difiere de la unidad en la quinta cifra después de la coma).

De ordinario l_{hier} suele ser del orden de 0,1 m; l_{hier} , del orden de 1 m y μ_{hier} alcanza un valor del orden de varios millares. Por eso el segundo sumando del denominador se puede despreciar y escribir que

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l_{\text{aire}}} \quad (54.9)$$

Por consiguiente, la inducción magnética en el espacio de aire del electroimán tiene la magnitud que tendría dentro de un toroide sin núcleo, en el cual se hubiera arrollado un número de espiras igual a N/l_{aire} por unidad de longitud (véase (50.6)). Aumentando el número total de espiras y disminuyendo el espacio de aire se pueden obtener campos con valor de B grande. En la práctica, valiéndose de electroimanes con núcleo de hierro se consiguen campos con B del orden de varias teslas (o varias decenas de millares de gaussios).

§ 55. Tipos de materiales magnéticos

La fórmula (52.11) determina la susceptibilidad magnética χ de la unidad de volumen de la substancia. Frecuentemente, en vez de esta susceptibilidad se utiliza la referida a un mol de substancia, llamada susceptibilidad molar (o atómica, para los cuerpos químicos simples) χ_m (χ_{at}). Es evidente que $\chi_m = \chi V_m$, donde V_m es el volumen de un mol de la substancia. Mientras que χ es una magnitud adimensional, χ_m se mide en m^3/mol .

En dependencia del signo y de la magnitud de la susceptibilidad magnética, todos los materiales magnéticos se subdividen en tres grupos:

- 1) diamagnéticos, cuya χ es negativa y pequeña en valor absoluto ($|\chi_m| \sim 10^{-11} \dots 10^{-10} \text{ m}^3/\text{mol}$);
- 2) paramagnéticos, cuya χ es también pequeña, pero positiva ($\chi_m \sim 10^{-10} \dots 10^{-9} \text{ m}^3/\text{mol}$);
- 3) ferromagnéticos, cuya χ es positiva y alcanza valores muy grandes ($\chi_m \sim 1 \text{ m}^3/\text{mol}$). Además, a diferencia de los diamagnéticos y paramagnéticos, en los que χ no depende de H , la susceptibilidad

de los ferromagnéticos es función de la intensidad del campo magnético.

Así, en las sustancias isotrópicas, la imanación \mathbf{J} puede coincidir en dirección con \mathbf{H} (en los para y ferromagnéticos) o tener sentido contrario a ella (en los diamagnéticos). Recordamos que en los dieléctricos isotrópicas la polarización tiene siempre el mismo sentido que \mathbf{E} .

§ 56. Fenómenos magnetomecánicos

La naturaleza de las corrientes moleculares se hizo comprensible después de que con los experimentos de E. Rutherford quedó establecido que los átomos de todas las sustancias están constituidos por un núcleo con carga positiva y electrones con carga negativa que se mueven alrededor de él.

El movimiento de los electrones en los átomos se subordina a las leyes cuánticas; en particular, el concepto de trayectoria es inaplicable a los electrones que se mueven en el átomo. No obstante, el diamagnetismo de las sustancias se consigue explicar utilizando el simple modelo de Bohr, según el cual los electrones se mueven en los átomos siguiendo órbitas circulares estacionarias.

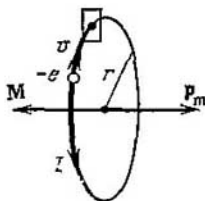


Fig. 56.1.

Supongamos que un electrón se mueve, con la velocidad v , por una órbita de radio r (fig. 56.1). A través de una superficie situada en cualquier punto del camino del electrón, se transportará en la unidad de tiempo la carga ev , siendo e la carga del electrón y v el número

de revoluciones por segundo. Por consiguiente, el electrón que se mueve por la órbita origina una corriente circular de intensidad $I = ev$. Como la carga del electrón es negativa, el sentido del movimiento del electrón será opuesto al de la corriente. El momento magnético de la corriente que crea el electrón será

$$p_m = IS = ev\pi r^2.$$

El producto $2\pi r v$ da la velocidad v del movimiento del electrón, por lo que se puede escribir que

$$p_m = \frac{evr}{2}. \quad (56.1)$$

El momento (56.1) está condicionado por el movimiento del electrón por la órbita, a esto debe el nombre de *momento magnético orbital* del electrón. El sentido del vector p_m forma con el de la corriente un sistema dextrógiro, y con el del movimiento del electrón, un sistema levógiro (véase la fig. 56.1).

El electrón que se mueve por una órbita tiene el momento de impulso (cinético o angular)

$$M = mvr \quad (56.2)$$

(m es la masa del electrón). El vector M se llama *momento mecánico orbital* del electrón. Este vector forma con el sentido del movimiento del electrón un sistema dextrógiro. Por lo tanto, los vectores p_m y M tienen sentidos opuestos.

La razón del momento magnético de una partícula elemental a su momento mecánico se llama *relación magnetomecánica o giromagnética*. Para el electrón esta razón es

$$\frac{p_m}{M} = -\frac{e}{2m} \quad (56.3)$$

(m es la masa del electrón; el signo menos indica que los momentos tienen sentidos opuestos).

A consecuencia de la rotación alrededor del núcleo, el electrón resulta ser semejante a un trompo o peonza. Esta circunstancia sirve de base a los denominados *fenómenos magnetomecánicos*, que consisten en que la imanación de un material magnético hace que éste gire y, viceversa, la rotación de un material magnético ocasiona su imanación. La existencia del primer fenómeno fue demostrada experimentalmente por A. Einstein y W. de Haas; la del segundo, por S. Barnett.

El experimento de Einstein y de Haas se basa en los razonamientos siguientes. Si se imana una varilla de material magnético, los momentos magnéticos de los electrones se orientan en la dirección del campo y sus momentos mecánicos, en sentido contrario al de éste. Como resultado, el momento mecánico total de los electrones $\sum M_i$ se hace distinto de cero (inicialmente, debido a la orientación caótica de los momentos aislados, era nulo). El momento de impulso del sistema varilla + electrones debe permanecer invariable. Por eso la varilla adquiere un momento de impulso igual a $-\sum_i M_i$ y, por lo tanto, entra en rotación. El cambio del sentido de la imanación hace que varíe el sentido de la rotación de la varilla.

Un modelo mecánico de este experimento se puede hacer sentando a una persona en una silla giratoria y poniendo en sus manos una rueda de gran masa en rotación. Si el eje de la rueda se pone hacia arriba, la persona empezará a girar en sentido contrario al de la rotación de la rueda. Cuando el eje de la rueda se pone hacia abajo, la persona comienza a girar en sentido opuesto al de antes.

La experiencia de Einstein y de Haas se efectuó del modo siguiente (fig. 56.2). Una varilla delgada de hierro se suspendió de un hilo elástico y se introdujo dentro de un solenoide. La torsión del hilo al imanarse la varilla por la acción del campo magnético continuo fue muy pequeña. Para reforzar el efecto se aplicó el método de la resonancia: el solenoide se alimentó con corriente alterna, cuya

frecuencia se eligió igual a la frecuencia propia de las oscilaciones mecánicas del sistema. En estas condiciones la amplitud de las oscilaciones alcanzó un valor que podía medirse observando los desplazamientos de un punto luminoso reflejado en un espejo sujeto al hilo. Con los datos del experimento se calculó la relación magnetomecánica, que resultó ser igual a $-(e/m)$. De este modo, el signo de la carga de los portadores que crean la corriente molecular coincidió con el signo de la carga del electrón. Pero el resultado obtenido fue dos veces mayor que el valor esperado de la relación magnetomecánica (56.3).

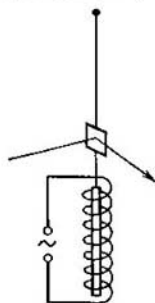


Fig. 56.2.

Para que pueda comprenderse la experiencia de Barnett recordaremos que si se quiere hacer que un giróscopo gire alrededor de una dirección determinada, el eje de dicho giróscopo girará de tal modo que los sentidos de sus rotaciones propia y forzada coincidan (véase el § 44 del tomo 1°). Si un giróscopo, montado en una suspensión cardánica, se coloca sobre el disco de una máquina centrífuga y se hace que éste gire, el eje del giróscopo tomará la posición vertical, de tal modo que el sentido de su rotación coincida con el de la rotación del disco. Si se cambia el sentido en que gira la máquina centrífuga, el eje del giróscopo efectuará un giro de 180° , es decir, tal, que

el sentido de ambas rotaciones vuelva a coincidir.

Barnett hizo que una varilla de hierro girara muy rápidamente alrededor de su eje y midió la imanación que se producía en ella. De los resultados de este experimento, Barnett también obtuvo para la relación magnetomecánica una magnitud dos veces mayor que el valor (56.3).

Más tarde se aclaró que el electrón, además de los momentos orbitales (56.1) y (56.2), posee sus momentos mecánico M_s y magnético p_{ms} intrínsecos, para los cuales la relación magnetomecánica es

$$\frac{p_{ms}}{M_s} = -\frac{e}{m}, \quad (56.4)$$

o sea, coincide con el valor obtenido en las experiencias de Einstein y de Haas y de Barnett. De aquí se sigue que las propiedades magnéticas del hierro no se deben al momento orbital de los electrones, sino a su momento magnético intrínseco.

La existencia de los momentos intrínsecos del electrón se intentó explicar inicialmente considerando esta partícula como una esferita cargada que gira sobre su eje. De acuerdo con esto, el momento mecánico intrínseco del electrón recibió el nombre de *espín* (del inglés *spin*, girar). Pero pronto se descubrió que esta representación conduce a una serie de contradicciones y hubo que renunciar a la

hipótesis del electrón «giratorio». En la actualidad se admite que el momento mecánico intrínseco (espín) y el momento magnético intrínseco (de espín) son propiedades tan inseparables del electrón como su masa y su carga.

El espín posee no sólo el electrón, sino también otras partículas elementales. El espín ¹⁾ de las partículas elementales resulta ser múltiplo entero o semientero de la magnitud \hbar , que es igual a la constante de Planck h dividida por 2π :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 1,05 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s} \quad (56.5)$$

En particular, para el electrón $M_s = 1/2 \hbar$, por lo que se dice que el espín del electrón es igual a $1/2$. De este modo, h es la unidad natural del momento de impulso, de un modo semejante a como la carga elemental e es la unidad natural de carga.

De acuerdo con (56.4) el momento magnético intrínseco del electrón es

$$p_m = -\frac{e}{m} M_s = -\frac{e}{m} \frac{\hbar}{2} = -\frac{e\hbar}{2m}. \quad (56.6)$$

La magnitud

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ J/T} = 0,927 \cdot 10^{-20} \text{ erg/Gs} \quad (56.7)$$

se denomina *magnetón de Bohr*. Por consiguiente, el momento magnético intrínseco del electrón es igual a un magnetón de Bohr.

El momento magnético del átomo se compone de los momentos orbitales e intrínsecos de los electrones que entran en su composición y del momento magnético del núcleo (condicionado por los momentos magnéticos de las partículas elementales que lo forman, es decir, de los protones y neutrones). El momento magnético del núcleo es mucho menor que los momentos de los electrones, por lo que al resolver muchos problemas se puede despreciar aquél y considerar que el momento magnético del átomo es igual a la suma vectorial de los momentos magnéticos de los electrones. El momento magnético de las moléculas también se puede considerar igual a la suma de los momentos magnéticos de los electrones que entran en su composición.

La determinación experimental de los momentos magnéticos de los átomos fue efectuada por O. Stern y W. Gerlach. En sus experiencias un haz de átomos se hacía pasar a través de un campo magnético fuertemente no homogéneo. La no homogeneidad del campo se conseguía de la forma especial de las piezas polares del electroimán

¹⁾ Más exactamente, el valor máximo de la proyección del espín sobre una dirección elegida del espacio, por ejemplo sobre la dirección del campo exterior.

²⁾ Según la fórmula $W = -\mathbf{p}_m \mathbf{B}$, la dimensión del momento magnético es igual a la dimensión de la energía (julio o ergio) dividida por la dimensión de la inducción magnética (tesla o gaussio).

(fig. 56.3). Según la fórmula (46.11), sobre los átomos del haz debe actuar la fuerza

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha,$$

cuya magnitud y signo dependen del ángulo α que forma el vector p_m con la dirección del campo. Siendo caótica la distribución de los momentos de los átomos por las direcciones, en el haz hay partículas para las cuales los valores de α varían entre los límites de 0 a π . De acuerdo con esto se supuso que el estrecho haz de átomos, después de pasar por entre los polos, formaría en la pantalla una extensa huella continua, cuyos bordes corresponderían a los átomos

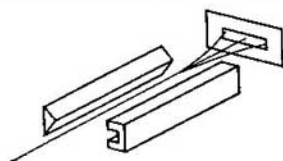


Fig. 56.3.

orientados bajo los ángulos $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$ (fig. 56.4). Pero el experimento dio unos resultados inesperados. En vez de la extensa huella continua se obtuvieron rayas aisladas situadas simétricamente con respecto a la traza del haz obtenida en ausencia del campo.

La experiencia de Stern y Gerlach demostró, que los ángulos bajo los cuales se orientan los momentos magnéticos de los átomos con respecto al campo magnético, sólo pueden tener valores discretos, es decir, que la proyección del momento magnético sobre la dirección del campo se cuantiza.

El número de valores posibles de la proyección del momento magnético sobre la

dirección del campo magnético es distinto para átomos diferentes. Para los átomos de plata, aluminio, cobre y de los metales alcalinos es igual a dos; para los de vanadio, nitrógeno y de los halógenos, a cuatro; para el oxígeno, a cinco; para el manganeso, a seis; para el hierro, a nueve; para el cobalto, a diez, y así sucesivamente.

Las mediciones de los momentos magnéticos de los átomos dieron valores del orden de varios magnetones de Bohr. Ciertos átomos no manifestaron desviación (véanse, por ejemplo, las trazas de los átomos de mercurio y de magnesio en la fig. 56.4), lo que indica la ausencia de momento magnético en ellos.

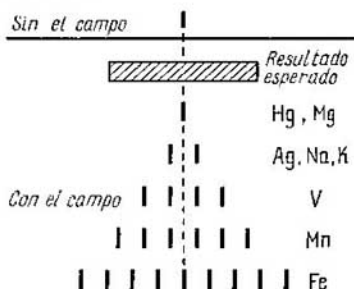


Fig. 56.4.

§ 57. Diamagnetismo

El electrón que se mueve por una órbita se asemeja a un trompo. Por lo tanto deben serle propias todas las peculiaridades del comportamiento de los giróscopos bajo la acción de fuerzas exteriores; en particular, si se dan las condiciones correspondientes se debe producir la precesión de la órbita electrónica. Las condiciones necesarias para la precesión se dan si el átomo se encuentra en un campo magnético exterior B (fig. 57.1). En este caso sobre la órbita actúa el momento de rotación $N = |p_m B|$, que tiende a hacer que el momento magnético orbital del electrón p_m se oriente en el sentido del campo (al mismo tiempo su momento mecánico M se orienta en el sentido contrario a dicho campo). Bajo la acción del momento N los vectores p_m y M realizan una precesión, alrededor de la dirección del vector de inducción magnética B , cuya velocidad es fácil de hallar (véase el § 44 del tomo 1).

En el tiempo dt el vector M recibe el incremento dM

$$dM = N dt.$$

El vector dM lo mismo que el N , es perpendicular al plano que pasa por los vectores B y M ; su módulo es

$$|dM| = p_m B \operatorname{sen} \alpha dt,$$

donde α es el ángulo entre p_m y B .

En el tiempo dt el plano en que se encuentra el vector M gira alrededor de la dirección de B un ángulo

$$d\phi = \frac{|dM|}{M \operatorname{sen} \alpha} = \frac{p_m B \operatorname{sen} \alpha dt}{M \operatorname{sen} \alpha} = \frac{p_m}{M} B dt.$$

Dividiendo este ángulo por el tiempo dt hallamos la velocidad angular de la precesión:

$$\omega_L = \frac{d\phi}{dt} = \frac{p_m}{M} B.$$

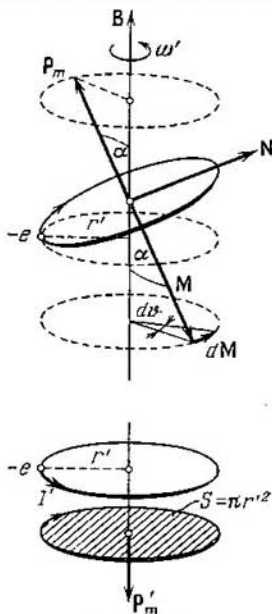


Fig. 57.1.

Sustituyendo la relación entre los momentos magnético y mecánico del electrón por su valor (56.3), se obtiene

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}. \quad (57.1)$$

La frecuencia (57.1) se llama *frecuencia de precesión de Larmor* o simplemente *frecuencia de Larmor*. Esta frecuencia no depende del ángulo de inclinación de la órbita con respecto a la dirección del campo magnético, ni del radio de la órbita o de la velocidad del electrón y, por lo tanto, es la misma para todos los electrones que entran en la composición del átomo.

La precesión de la órbita condiciona un movimiento adicional del electrón alrededor de la dirección del campo. Si la distancia r' del electrón al eje paralelo a \mathbf{B} que pasa por el centro de la órbita no variase, este movimiento adicional del electrón se efectuaría siguiendo una circunferencia de radio r' (véase la circunferencia superior de la parte baja de la fig. 57.1). A este movimiento le correspondería una corriente circular (véase la circunferencia inferior, que limita el área rayada) $I' = e(\omega_L/2\pi)$, cuyo momento magnético

$$p'_m = I'S' = e \frac{\omega_L}{2\pi} \pi r'^2 = \frac{e\omega_L}{2} r'^2 \quad (57.2)$$

está dirigido en sentido opuesto a \mathbf{B} (véase la figura). Este momento se denomina *momento magnético inducido*.

En realidad, debido al movimiento del electrón por la órbita, la distancia r' varía constantemente. Por eso en la fórmula (57.2) hay que tomar, en vez de r'^2 , su valor medio con respecto al tiempo $\langle r'^2 \rangle$. Este valor medio depende del ángulo α que caracteriza la orientación del plano de la órbita con respecto a \mathbf{B} . En particular, para una órbita perpendicular al vector \mathbf{B} , r' sería constante e igual al radio r de la órbita. Para una órbita, cuyo plano pasara por la dirección \mathbf{B} , r' variaría de acuerdo con la ley $r' = r \sin \omega t$, en la que ω es la velocidad angular de rotación del electrón siguiendo la órbita (fig. 57.2; el vector \mathbf{B} y la órbita se encuentran en el plano de la figura). Por consiguiente, $\langle r'^2 \rangle = \langle r^2 \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} r^2 \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} r^2$. Si se hace el promedio tomando todos los valores posibles de α , y considerándolos igualmente probables, se obtiene

$$\langle r'^2 \rangle = \frac{2}{3} r^2. \quad (57.3)$$

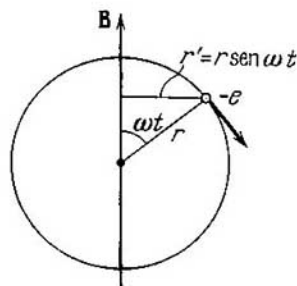


Fig. 57.2.

Sustituyendo en (57.2) ω_L por su valor (57.1) y $\langle r'^2 \rangle$ por el suyo (57.3), obtenemos para el valor medio del momento magnético inducido de un electrón la expresión siguiente:

$$\langle p'_m \rangle = -\frac{e^2}{6m} r^2 B \quad (57.4)$$

(el signo menos refleja la circunstancia de que los vectores $\langle p'_m \rangle$ y B tienen sentidos opuestos). Hasta ahora hemos supuesto que la órbita era circular. En el caso general (por ejemplo, para una órbita elíptica), en vez de r^2 debe tomarse $\langle r^2 \rangle$, es decir, el cuadrado medio de la distancia del electrón al núcleo.

Haciendo la suma, extendida a todos los electrones, de la expresión (57.4), hallamos el momento magnético inducido del átomo:

$$p'_{mat} = \sum \langle p'_m \rangle = -\frac{e^2 B}{6m} \sum_{h=1}^Z \langle r_h^2 \rangle \quad (57.5)$$

Z es el número atómico del elemento químico, igual al número de electrones que tiene el átomo).

Así, bajo la acción del campo magnético exterior se produce la precesión de las órbitas electrónicas con la misma velocidad angular (57.1) para todos los electrones. El movimiento adicional de los electrones condicionado por la precesión hace que se origine el momento magnético inducido del átomo (57.5), dirigido en sentido opuesto al del campo. La precesión de Larmor se produce en todas las substancias sin excepción. Pero en aquellos casos en que los átomos poseen de por sí el momento magnético, el campo magnético no sólo induce el momento (57.5), sino que también ejerce sobre los momentos magnéticos de los átomos una acción orientadora, que hace que se dispongan según la dirección del campo. El momento magnético positivo (es decir, dirigido en el sentido del campo) que surge en este caso es mucho mayor que el momento magnético inducido negativo. Por eso el momento resultante es positivo y la substancia se comporta como paramagnética.

El diamagnetismo sólo se manifiesta en aquellas substancias en las cuales los átomos no poseen momento magnético (la suma vectorial de los momentos magnéticos orbitales y de espín de los electrones del átomo es nula). Si para una de estas substancias se multiplica la igualdad (57.5) por el número de Avogadro N_A , se obtiene el momento magnético de un mol de dicha substancia. Dividiendo éste por la intensidad del campo H , se halla la susceptibilidad magnética molar χ_m . La permeabilidad magnética de las substancias diamagnéticas es prácticamente igual a la unidad. Por eso se puede suponer que $B/H = \mu_0$. De este modo,

$$\chi_m = \frac{N_A p'_{mat}}{H} = -\frac{\mu_0 N_A e^2}{6m} \sum_{h=1}^Z \langle r_h^2 \rangle. \quad (57.6)$$

Advertimos que la teoría mecanocuántica rigurosa conduce a una expresión exactamente igual a ésta.

La sustitución en (57.6) de μ_0 , N_A , e y m por sus valores numéricos da que

$$\chi_m = -3,55 \cdot 10^9 \sum_{k=1}^Z \langle r_k^2 \rangle.$$

Los radios de las órbitas electrónicas tienen una magnitud del orden de 10^{-10} m. Por consiguiente, la susceptibilidad magnética molar que se obtiene es del orden de 10^{-11} . . . 10^{-10} , lo que concuerda bien con los datos experimentales.

§ 58. Paramagnetismo

Si el momento magnético p_m de los átomos es distinto de cero, la substancia es paramagnética. El campo magnético tiende a disponer los momentos magnéticos de los átomos a lo largo de \mathbf{B} , y el movimiento térmico tiende a dispersarlos uniformemente en todas las direcciones. Como resultado se establece cierta orientación predominante de los momentos a lo largo del campo, tanto mayor cuanto mayor sea B y tanto menor cuanto más alta sea la temperatura.

P. Curie estableció experimentalmente la ley según la cual la susceptibilidad de una substancia paramagnética es

$$\chi_m = \frac{C}{T}, \quad (58.1)$$

donde C es la *constante de Curie*, que depende del tipo de substancia, y T , la temperatura absoluta.

La teoría clásica del paramagnetismo fue desarrollada por P. Langevin en 1905. Nosotros nos limitaremos a exponer esta teoría para el caso en que los campos no son demasiado intensos y las temperaturas no son muy bajas.

De acuerdo con la fórmula (46.10), el átomo posee en el campo magnético la energía potencial $W = -p_m B \cos \vartheta$, que depende del ángulo ϑ entre los vectores p_m y B . Por eso la distribución en equilibrio de los momentos entre las direcciones debe subordinarse a la ley de Boltzmann (véase el § 100 del tomo 1^o). Según esta ley, la probabilidad de que el momento magnético del átomo forme con la dirección del vector \mathbf{B} un ángulo comprendido entre los límites de ϑ a $\vartheta + d\vartheta$, es proporcional a

$$e^{-\frac{W}{kT}} = e^{-\frac{p_m B \cos \vartheta}{kT}}.$$

Introduciendo la designación

$$a = \frac{p_m B}{kT}, \quad (58.2)$$

la expresión que determina la probabilidad se puede escribir en la forma

$$e^{a \cos \vartheta}. \quad (58.3)$$

En ausencia del campo todas las direcciones de los momentos magnéticos son igualmente probables. Por lo tanto, la probabilidad de que la dirección del momento forme con cierta dirección z un ángulo entre los límites de ϑ a $\vartheta + d\vartheta$ es

$$(dP_{\vartheta})_{B=0} = \frac{d\Omega_{\vartheta}}{4\pi} = \frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{4\pi} = \frac{1}{2} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (58.4)$$

Aquí $d\Omega_{\vartheta} = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ es el ángulo sólido comprendido entre los conos con ángulos de apertura ϑ y $\vartheta + d\vartheta$ (fig. 58.1).

En presencia del campo en la expresión de la probabilidad aparece el factor (58.3):

$$dP_{\vartheta} = A e^{a \cos \vartheta} \frac{1}{2} \sin \vartheta d\vartheta \quad (58.5)$$

(A es un factor de proporcionalidad desconocido por ahora).

El momento magnético del átomo tiene una magnitud del orden de un magnetón de Bohr, es decir, de $\sim 10^{-23}$ J/T (véase (56.7)). Con los campos que se alcanzan de ordinario, la inducción magnética suele ser del orden de 1 T (10^4 Gs). Por consiguiente, $p_m B$ es del orden de 10^{-23} J. La magnitud kT a la temperatura ambiente es aproximadamente igual a $4 \cdot 10^{-21}$ J. De este modo, $a = \frac{p_m B}{kT} \ll 1$ y $e^{a \cos \vartheta}$ se puede sustituir aproximadamente por $1 + a \cos \vartheta$. En esta aproximación la igualdad (58.5) toma la forma

$$dP_{\vartheta} = A (1 + a \cos \vartheta) \frac{1}{2} \sin \vartheta d\vartheta.$$

El coeficiente A se puede hallar partiendo de que la suma de las probabilidades de todos los valores posibles del ángulo ϑ debe ser igual a la unidad:

$$1 = \int_0^{\pi} A (1 + a \cos \vartheta) \frac{1}{2} \sin \vartheta d\vartheta = A.$$

De aquí $A = 1$, de manera que

$$dP_{\vartheta} = \frac{1}{2} (1 + a \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

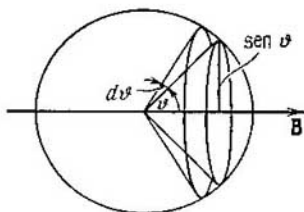


Fig. 58.1.

Supongamos que en la unidad de volumen de la substancia paramagnética hay n átomos. Entonces el número de átomos, cuyos momentos magnéticos forman con la dirección del campo ángulos desde ϑ hasta $\vartheta + d\vartheta$, será

$$dn_{\vartheta} = n dP_{\vartheta} = \frac{1}{2} n (1 + a \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Cada uno de estos átomos hace al momento magnético resultante una aportación igual a $p_m \cos \vartheta$. Por lo tanto, para el momento magnético de la unidad de volumen (es decir, para la imanación) se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi} p_m \cos \vartheta dn_{\vartheta} = \frac{1}{2} n p_m \int_0^{\pi} (1 + a \cos \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2} n p_m \frac{2a}{3} = \frac{n p_m a}{3}. \end{aligned}$$

La sustitución de a por su valor (58.2) da

$$J = \frac{n p_m^2 B}{3kT}.$$

Finalmente, dividiendo J por H y suponiendo que $B/H = \mu_0$ (para los materiales diamagnéticos μ es prácticamente igual a la unidad), hallamos la susceptibilidad:

$$\chi = \frac{\mu_0 n p_m^2}{3kT}. \quad (58.6)$$

Sustituyendo n por el número de Avogadro N_A , se halla la expresión de la susceptibilidad molar:

$$\chi_m = \frac{\mu_0 N_A p_m^2}{3kT}. \quad (58.7)$$

Hemos llegado a la ley de Curie. La comparación de las fórmulas (58.4) y (58.7) da para la constante de Curie la expresión siguiente:

$$C = \frac{\mu_0 N_A p_m^2}{3k}. \quad (58.9)$$

Recordamos que la fórmula (58.7) se ha obtenido suponiendo que $p_m B \ll kT$. En campos muy intensos y a temperaturas bajas se observa una desviación de la proporcionalidad entre la imanación J del material paramagnético y la intensidad del campo H ; en particular, puede llegar el estado de saturación magnética, en el cual todos los p_m se alinean a lo largo del campo y el aumento ulterior de H no hace que crezca J .

Los valores de χ_m calculados por la fórmula (58.7) concuerdan bien en una serie de casos con los valores obtenidos en la experiencia.

La teoría cuántica del paramagnetismo tiene en cuenta el hecho de que sólo son posibles las orientaciones discretas del momento magnético del átomo con respecto al campo. Esta teoría llega a una expresión de χ_m análoga a la (58.7).

§ 59. Ferromagnetismo

Una clase especial de materiales magnéticos la forman las sustancias capaces de tener imanación en ausencia de un campo magnético exterior. Como su representante más extendido es el hierro, estos materiales recibieron el nombre de *ferromagnéticos*. A esta clase, además del hierro, pertenecen el níquel, cobalto, gadolinio, sus aleaciones y combinaciones así como ciertas aleaciones y combinacio-

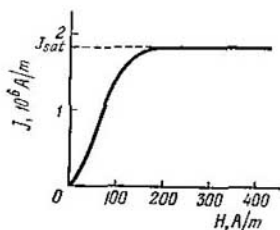


Fig. 59.1.

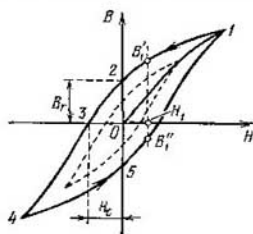


Fig. 59.2.

nes del manganeso y del cromo con elementos no ferromagnéticos. El ferromagnetismo es propio de todas estas sustancias únicamente cuando están en estado cristalino.

Los ferromagnéticos son sustancias fuertemente magnéticas. Su imanación es un enorme número de veces mayor (hasta 10^{10}) que la de los dia y paramagnéticos, que pertenecen a la categoría de las sustancias débilmente magnéticas.

La imanación de las sustancias débilmente magnéticas varía linealmente con la intensidad del campo. La imanación de los ferromagnéticos depende de H de un modo complejo. En la fig. 59.1 se da la curva de imanación de un material ferromagnético, cuyo momento magnético era inicialmente nulo (es la llamada *curva de primera imanación* o *virgen*). Ya en los campos del orden de varios oersteds (~ 100 A/m) la imanación J alcanza la saturación. La curva de primera imanación en el diagrama $B - H$ se da en la fig. 59.2 (curva $O - 1$). Se recordará que $B = \mu_0 (H + J)$. Por eso, al llegar a la saturación, B sigue creciendo con H según la ley lineal $B = \mu_0 H + \text{const}$, en la que $\text{const} = \mu_0 J_{\text{sat}}$.

La curva de imanación del hierro la obtuvo y estudió detalladamente por vez primera el científico ruso A. G. Stoliétov. El método balístico de medición de la inducción magnética elaborado por él se sigue aplicando extensamente hasta hoy (véase el § 62).

Además de por la dependencia no lineal entre H y J (o entre H y B), los ferromagnéticos se caracterizan por tener *histéresis*. Si la imanación se hace llegar hasta la saturación (punto 1 en la fig. 59.2) y después se disminuye la intensidad al del campo magnético, la inducción B sigue no la curva inicial 0—1, sino que varía de acuerdo con la 1—2. Como resultado, cuando la intensidad del campo exterior se hace igual a cero (punto 2), la imanación no desaparece y se caracteriza por la magnitud B_r , llamada *inducción remanente*. La imanación tiene entonces el valor J_r , denominado *imanación remanente*.

La inducción B se anula únicamente bajo la acción de un campo H_c , cuyo sentido es inverso al del campo que produjo la imanación. La intensidad H_c recibe el nombre de *fuerza coercitiva*.

La existencia de la imanación remanente hace posible la fabricación de imanes permanentes, es decir, de cuerpos que, sin gastar energía en el mantenimiento de las corrientes macroscópicas, poseen momento magnético y crean en el espacio que las rodea un campo magnético. Un imán permanente conserva tanto mejor sus propiedades cuanto mayor sea la fuerza coercitiva del material de que está hecho.

Si sobre el material ferromagnético actúa un campo magnético alternativo, la inducción varía de acuerdo con la curva 1—2—3—4—5—1 (fig. 59.2), llamada *ciclo, lazo o bucle de histéresis* (un bucle semejante se obtiene también en el diagrama $J - H$). Si los valores máximos de H son tales que la imanación llega a la saturación, se obtiene el denominado *ciclo de histéresis máximo* (lazo continuo en la fig. 59.2). Si en los valores de amplitud de H no se llega a la saturación, se obtiene el bucle llamado *ciclo parcial* (lazo de trazos en la figura). Existe una infinidad de ciclos parciales y todos ellos están dentro del bucle de histéresis máximo.

La histéresis hace que la imanación del material ferromagnético no sea una función uniforme de H ; esta imanación depende en gran medida de la «prehistoria» de la muestra, es decir, de los campos en que se ha encontrado anteriormente. Por ejemplo, en un campo de intensidad H_1 (fig. 59.2), la inducción puede tener cualquier valor entre los límites de B'_1 a B''_1 .

De todo lo dicho acerca de los materiales ferromagnéticos se sigue que, por sus propiedades, se parecen mucho a los ferroeléctricos (véase el § 23).

Debido a la no uniformidad de la dependencia de B respecto de H , el concepto de permeabilidad magnética sólo se aplica a la curva de primera imanación. La permeabilidad magnética de los materiales

ferromagnéticos μ (y, por consiguiente, la susceptibilidad magnética χ) es función de la intensidad del campo. En la fig. 59.2, *a* se representa una curva de primera imanación. Tracemos, desde el origen de coordenadas, una recta que pase por un punto cualquiera de la curva. La tangente del ángulo de inclinación de esta recta será proporcional a la relación B/H , es decir, a la permeabilidad magnética μ para el valor correspondiente de la intensidad del campo. Cuando H aumenta desde cero, el ángulo de inclinación (y, por lo tanto, μ) crece al principio. En el punto 2 llega al máximo (la recta 0-2 es tangente a la curva) y después decrece. En la fig. 59.3, *b* se da la gráfica de la dependencia de μ respecto de H . En esta figura se ve que el valor máximo de la permeabilidad se alcanza un poco antes que el de saturación. Si H aumenta indefinidamente, la permeabilidad se aproxima asintóticamente a la unidad. Esto se deduce de que en la expresión $\mu = 1 + J/H$, J no puede superar el valor J_{sat} .

Las magnitudes B_r (o J_r), H_c y $\mu_{\text{máx}}$ son las características fundamentales de un material ferromagnético. Si la fuerza coercitiva H_c es grande, se dice que el material ferromagnético es *duro*. Para este material es característico un ciclo de histéresis ancho. El material ferromagnético, cuya H_c es pequeña (y, respectivamente, tiene el lazo de histéresis estrecho), se llama *blando*. En dependencia del uso a que se quiere destinar, se toma un material magnético de una u otra característica. Así, para los imanes permanentes se utilizan materiales ferromagnéticos duros, y para los núcleos de los transformadores, materiales ferromagnéticos blandos. En la tabla 59.1 se dan las características de varios materiales ferromagnéticos típicos.

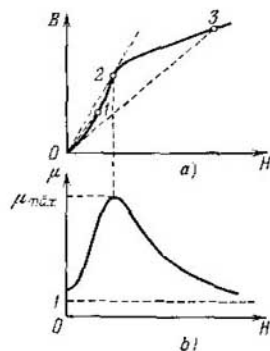


Fig. 59.3.

Tabla 59.1

Material	Composición	$\mu_{\text{máx}}$	B_r , T	H_c , A/m
Hierro	99,9% Fe	5 000	—	80
Superalloy	79% Ni, 5% Mo, 16% Fe	800 000	—	0,3
Alnico	40% Al, 19% Ni, 18% Co, 53% Fe	—	0,9	52 000

Los fundamentos de la teoría del ferromagnetismo fueron sentados por Ya. I. Frénkel y K. Heisenberg en 1928. De los experimentos para el estudio de los fenómenos magnetomecánicos (véase el § 56) se deduce que los responsables de las propiedades magnéticas de los materiales ferromagnéticos son los momentos magnéticos intrínsecos (de espín) de los electrones. En determinadas condiciones, en los cristales pueden surgir fuerzas ¹⁾ que hacen que los momentos magnéticos de los electrones se alineen paralelamente unos a otros. Como resultado aparecen *zonas de imanación espontánea* denominadas también *dominios*. Dentro de los límites de cada dominio el material

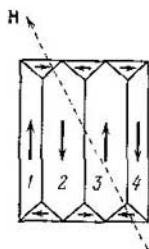


Fig. 59.4.

ferromagnético está imanado espontáneamente hasta la saturación y posee un momento magnético determinado. Las orientaciones de estos momentos son diferentes en distintos dominios (fig. 59.4), de manera que, en ausencia de un campo magnético exterior, el momento total de todo el cuerpo es nulo. Las dimensiones de los dominios son del orden de 1. . . 10 μm .

La acción del campo sobre los dominios resulta ser distinta en las diferentes etapas del proceso de imanación. Al principio, cuando los campos son débiles, se observa un desplazamiento de los límites de los dominios, del que resulta que aumentan aquellos dominios, cuyos momentos forman con \mathbf{H} un ángulo menor, a expensas de los dominios en los cuales el ángulo ϑ entre los vectores \mathbf{p}_m y \mathbf{H} es mayor. Por ejemplo, los dominios 1 y 3 (fig. 59.4) aumentan a expensas de los dominios 2 y 4. Al ir aumentando la intensidad del campo este proceso continúa hasta que los dominios con menor ϑ (que tienen menor energía en el campo magnético) absorben totalmente los dominios energéticamente menos convenientes. En la etapa siguiente se produce el giro de los momentos magnéticos de los dominios hacia la dirección del campo. Al mismo tiempo los momentos de los electrones dentro de los límites del dominio también giran sin alterar su riguroso paralelismo entre sí. Estos procesos (excepto los desplazamientos pequeños de los límites entre los dominios en campos muy débiles son irreversibles, lo cual es causa de la histéresis.

Para cada material ferromagnético existe una temperatura determinada T_C a la cual las zonas de imanación espontánea se disgregan y la substancia pierde sus propiedades ferromagnéticas. Esta temperatura se denomina *punto o temperatura de Curie*. Para el hierro es igual a 768 °C; para el níquel, 365 °C. A temperatura más alta que el punto de Curie el material ferromagnético se transforma en para-

¹⁾ Estas fuerzas se llaman *de intercambio* o *canje*. Su explicación sólo se da en la mecánica cuántica.

magnético ordinario, cuya susceptibilidad magnética se subordina a la *ley de Curie — Weiss*

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C} \quad (59.4)$$

(compárese con la fórmula (58.1)). Cuando el material ferromagnético se enfría hasta más abajo de la temperatura de Curie, en él aparecen de nuevo los dominios.

En ciertos casos las fuerzas de intercambio hacen que aparezcan los materiales llamados *antiferromagnéticos* (cromo, manganeso y otros). La existencia de los antiferromagnéticos fue predicha por L. D. Landáu en 1933. En estos materiales los momentos magnéticos de los electrones están orientados antiparalelamente entre sí de un modo espontáneo. Esta orientación abarca de dos en dos los átomos vecinos. Como resultado de esto, los materiales antiferromagnéticos poseen susceptibilidad magnética extremadamente pequeña y se comportan como paramagnéticos muy débiles. Para los antiferromagnéticos también existe una temperatura T_N , a la cual desaparece la orientación antiparalela de los espines. Esta temperatura se denomina *punto o temperatura antiferromagnética de Curie* y *punto o temperatura de Néel*. Ciertos antiferromagnéticos (por ejemplo, el erbio, el disprosio, las aleaciones de manganeso y cobre) tienen dos de estas temperaturas (puntos superior e inferior de Néel), en cuyo caso las propiedades antiferromagnéticas sólo se observan a las temperaturas intermedias. Por encima del punto superior la substancia se comporta como paramagnética, y a temperaturas menores que el punto inferior de Néel se convierte en ferromagnética.

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

§ 60. Fenómeno de la inducción electromagnética

En 1831 descubrió M. Faraday que en un circuito conductor cerrado, si varía el flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por él, se produce corriente eléctrica. Este fenómeno se llama *inducción electromagnética* y la corriente que se produce, *corriente inducida*.

El fenómeno de la inducción electromagnética evidencia que, cuando varía el campo magnético en el circuito, surge una *fuerza electromotriz inducida* \mathcal{E}_i . La magnitud \mathcal{E}_i no depende del procedimiento, por el cual se efectúa la variación del flujo magnético Φ , y se determina únicamente por la velocidad con que varía Φ , es decir, por el valor de $d\Phi/dt$. Si varía el signo de $d\Phi/dt$ cambia también el sentido de \mathcal{E}_i .

Consideremos el ejemplo siguiente. En la fig. 60.1 se representa un circuito I_1 , en el cual la intensidad de la corriente I_1 se puede variar por medio de un reóstato. Esta corriente crea un campo magnético que atraviesa el circuito 2. Si aumenta la corriente I_1 , el flujo de inducción

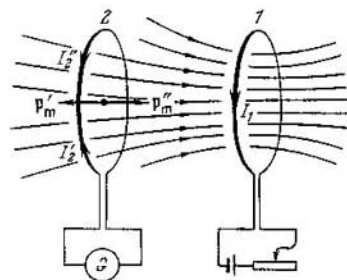


Fig. 60.1.

magnética Φ a través del circuito 2 crecerá. Esto hace que aparezca en este último circuito una corriente inducida I_2 que registra el galvanómetro. La disminución de la corriente I_1 condiciona el decrecimiento del flujo magnético a través del segundo circuito, lo que hace que aparezca en él una corriente inducida de sentido contrario al que tenía en el primer caso. La corriente inducida I_2 puede excitarse también acercando el circuito 2 al 1 o alejando el segundo circuito del primero. En ambos casos la corriente tiene sentidos opuestos. Finalmente, la inducción electromagnética puede excitarse, sin trasladar el circuito 2, haciendo que éste gire de manera que varíe el ángulo entre la normal al circuito y la dirección del campo.

E. Lenz estableció la regla que permite hallar el sentido de la corriente inducida. *La regla o ley de Lenz dice que la corriente inducida tiene siempre un sentido tal, que se opone a la causa que la produce.* Si,

por ejemplo, la variación de Φ se debe a la traslación del circuito 2, el sentido de la corriente inducida que se produce es tal, que la fuerza de interacción con el primer circuito se opone a que el circuito se mueva. Cuando el circuito 2 se acerca al 1 (fig. 60.1) se produce la corriente I'_2 , cuyo momento magnético está dirigido en sentido contrario al del campo de la corriente I_1 (el ángulo α entre los vectores \mathbf{p}'_m y \mathbf{B} es igual a π). Por consiguiente, sobre el circuito 2 actuará una fuerza que lo repelerá del 1 (véase la fórmula (46.11)). Si el circuito 2 se aleja del 1, surge una corriente I''_2 , cuyo momento \mathbf{p}''_m tiene el mismo sentido que el campo de la fuerza I_1 ($\alpha = 0$), de manera que la fuerza que actúa sobre el circuito 2 estará dirigida hacia el circuito 1.

Supongamos que ambos circuitos están en reposo y que la corriente se induce en el circuito 2 variando la corriente I_1 en el circuito 1. En este caso se produce una corriente I_2 de tal sentido, que el flujo magnético propio que ella crea tenderá a debilitar la variación del flujo exterior que hace que aparezca la corriente inducida. Cuando aumenta I_1 , es decir, cuando crece el flujo magnético exterior dirigido hacia la derecha, se produce la corriente I'_2 , que crea un flujo dirigido hacia la izquierda. Si disminuye I_1 , surge la corriente I''_2 , cuyo flujo magnético propio tiene el mismo sentido que el flujo exterior, y, por lo tanto, tiende a mantener invariable el flujo exterior.

§ 61. Fuerza electromotriz de inducción

En el párrafo anterior hemos explicado que la variación del flujo magnético Φ a través de un circuito hace que se produzca en éste una fuerza electromotriz inducida \mathcal{E}_i . Para hallar la relación

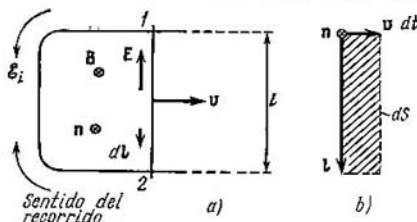


Fig. 61.1.

que existe entre \mathcal{E}_i y la velocidad con que varía Φ , vamos a analizar el ejemplo siguiente.

Tomamos un circuito con un puente móvil de longitud l (fig. 61.1. a). Lo colocamos en un campo magnético homogéneo perpendicular al plano del circuito y dirigido hacia detrás de la figura.

Movemos el puente con la velocidad v . Con esta misma velocidad empezarán a trasladarse con respecto al campo los portadores de corriente (electrones) que hay en el puente. Como resultado, sobre cada electrón comienza a actuar la fuerza magnética, dirigida a lo largo del puente,

$$F_{||} = -e [vB] \quad (61.1)$$

(véase (43.3); la carga del electrón es igual a $-e$). La acción de esta fuerza equivale a la acción que sobre el electrón ejercería un campo eléctrico de intensidad

$$E = [vB].$$

Este campo es de procedencia no electrostática. Su circulación por el circuito da la magnitud de la f.e.m. que se induce en él:

$$\mathcal{E}_i = \oint E dl = \oint [vB] dl = \int_1^2 [vB] dl \quad (61.2)$$

(la función subintegral sólo es distinta de cero en el trozo 1-2 formado por el puente).

Para que por el signo de \mathcal{E}_i sea posible juzgar el sentido en que actúa la f.e.m., supondremos que \mathcal{E}_i es positiva en el caso en que su sentido forma con el de la normal al circuito un sistema dextrógiro.

La normal la elegimos como se indica en la fig. 61.1. Entonces, al calcular la inducción, hay que recorrer el circuito en sentido horario y, respectivamente, elegir el sentido de los vectores dl . Si en (61.2) se saca fuera del signo de integral el vector constante $[vB]$, obtenemos

$$\mathcal{E}_i = [vB] \int_1^2 dl = [vB] l,$$

donde l es el vector que se muestra en la fig. 61.1, *b*. Efectuamos en la expresión obtenida la permutación cíclica de los factores y luego la multiplicamos y dividimos por dt

$$\mathcal{E}_i = B [lv] = \frac{B [l, v dt]}{dt} \quad (61.3)$$

En la fig. 61.1, *b* se ve que

$$[l, v dt] = -n dS,$$

donde dS es el incremento del área del circuito en el tiempo dt . Por la definición de flujo, la expresión $B dS = Bn dS$ es el flujo a través de la superficie dS , es decir, el incremento del flujo $d\Phi$ a través del circuito. De este modo,

$$B [l, v dt] = -Bn dS = -d\Phi.$$

Teniendo esto en cuenta, a la expresión (61.3) se le puede dar la forma

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (61.4)$$

Hemos obtenido que $d\Phi/dt$ y \mathcal{E}_i tienen signos opuestos. El signo del flujo y el de \mathcal{E}_i están ligados con la elección del sentido de la normal al plano del circuito. Con la elección de la normal que hemos hecho (véase la fig. 61.1), el signo de $d\Phi/dt$ es positivo y el de \mathcal{E}_i , negativo. Si hubiéramos elegido la normal dirigida no hacia detrás de la figura, sino hacia nosotros, el signo de $d\Phi/dt$ sería negativo y el de \mathcal{E}_i , positivo.

La unidad de flujo de inducción magnética en el SI es el *weber* (Wb), que se define como el flujo a través de una superficie de 1 m^2 , atravesada por las líneas normales a ella de un campo magnético con B igual a 1 T . Si la velocidad con que varía el flujo es igual a 1 Wb/s , en el circuito se induce una f.e.m. igual a 1 V .

En el sistema de Gauss la fórmula (61.4) tiene la forma

$$\mathcal{E}_i = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (61.5)$$

La unidad de Φ en este sistema es el *maxwellio* (Mx), igual al flujo a través de una superficie de 1 cm^2 cuando $B = 1 \text{ Gs}$. La fórmula (61.5) de \mathcal{E}_i en unid. CGSE de potencial. Para obtener \mathcal{E}_i en voltios hay que multiplicar el resultado obtenido por 300. Como $300/c = 10^{-8}$,

$$\mathcal{E}_i (\text{V}) = -10^{-8} \frac{d\Phi}{dt} \frac{(\text{Mx})}{(\text{s})}. \quad (61.6)$$

En los razonamientos que nos han conducido a la fórmula (61.4) el papel de las fuerzas exteriores que mantienen la corriente en el circuito, lo desempeñan las fuerzas magnéticas. El trabajo de estas fuerzas sobre una carga positiva unitaria, igual por definición a la f.e.m., resulta ser distinto de cero. Esta circunstancia está en aparente contradicción con la afirmación hecha en el § 43 acerca de que la fuerza magnética no puede efectuar trabajo sobre la carga. La contradicción se elimina si se tiene en cuenta que la fuerza (61.1) no es la fuerza magnética total que actúa sobre el electrón, sino únicamente la componente paralela al conductor de esta fuerza debida a la velocidad v (véase la fuerza $F_{||}$ en la fig. 61.2). Bajo la acción de esta componente el electrón se pone en movimiento a lo largo del conductor con la velocidad u y como resultado de esto aparece la componente de la fuerza magnética perpendicular al conductor

$$F_{\perp} = -e [\mathbf{uB}]$$

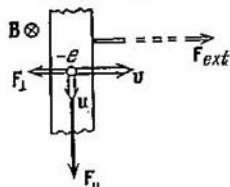


Fig. 61.2.

(esta componente no hace aportación a la circulación porque es perpendicular a $d\mathbf{l}$).

La fuerza magnética total que actúa sobre el electrón es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp},$$

y el trabajo de esta fuerza sobre el electrón en el tiempo dt es

$$dA = \mathbf{F}_{\parallel} \mathbf{u} dt + \mathbf{F}_{\perp} \mathbf{v} dt = F_{\parallel} u dt - F_{\perp} v dt$$

(los vectores \mathbf{F}_{\parallel} y \mathbf{u} tienen el mismo sentido, y los \mathbf{F}_{\perp} y \mathbf{v} , sentidos opuestos; véase la fig. 61.2). Sustituyendo las fuerzas por los valores de sus módulos: $F_{\parallel} = evB$ y $F_{\perp} = euB$, obtenemos que el trabajo de la fuerza magnética total es nulo.

La fuerza \mathbf{F}_{\perp} está dirigida en sentido contrario al de la velocidad \mathbf{v} del puente. Por eso, para que el puente se traslade con la velocidad \mathbf{v} constante, hay que aplicarle una fuerza exterior \mathbf{F}_{ext} que equilibre la suma de las fuerzas \mathbf{F}_{\perp} aplicadas a todos los electrones que hay en él. A expensas del trabajo de esta fuerza se produce la energía que se libera en el circuito por la corriente inducida.

La explicación que hemos estudiado de la aparición de la f.e.m. inducida se refiere al caso en que el campo magnético es constante y varía la geometría del circuito. Pero el flujo magnético a través del circuito puede variar también a expensas de la variación de \mathbf{B} . En este caso la explicación del surgimiento de la f.e.m. es otra en esencia. El campo magnético que varía con el tiempo genera un campo eléctrico rotacional \mathbf{E} (de esto se trata más detalladamente en el § 69). Bajo la acción del campo \mathbf{E} se ponen en movimiento los portadores de corriente en el conductor y se produce la corriente inducida. La relación entre la f.e.m. inducida y las variaciones del campo magnético también la describe en este caso la fórmula (61.4).

Supongamos que el circuito en que se induce la f.e.m. consta no de una espira, sino de N espiras, por ejemplo, es un solenoide. Como las espiras están conectadas en serie, \mathcal{E}_t será igual a la suma de las f.e.m. inducidas en cada una de las espiras por separado:

$$\mathcal{E}_t = - \sum \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \left(\sum \Phi \right).$$

La magnitud

$$\Psi = \sum \Phi \tag{61.7}$$

se llama *flujo enlazado* o *flujo magnético total* y se mide en las mismas unidades que Φ . Si el flujo que atraviesa cada espira es el mismo,

$$\Psi = N\Phi. \tag{61.8}$$

La f.e.m. inducida en un circuito complejo se determina por la fórmula

$$\mathcal{E}_t = - \frac{d\Psi}{dt} \tag{61.9}$$

§ 62. Métodos para medir la inducción magnética

Supongamos que el flujo magnético total enlazado a cierto circuito varía desde el valor Ψ_1 hasta el Ψ_2 . Hallemos la carga q que pasa entonces a través de cada sección del circuito. El valor instantáneo de la intensidad de la corriente en el circuito será

$$I = \frac{\mathcal{E}_1}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt}.$$

De aquí

$$dq = I dt = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt} dt = -\frac{1}{R} d\Psi.$$

Integrando esta expresión hallamos la carga total:

$$q = \int dq = -\frac{1}{R} \int_1^2 d\Psi = \frac{1}{R} (\Psi_1 - \Psi_2). \quad (62.1)$$

La relación (62.1) sirve de base al procedimiento balístico elaborado por A.G. Stoliétov para medir la inducción magnética, que

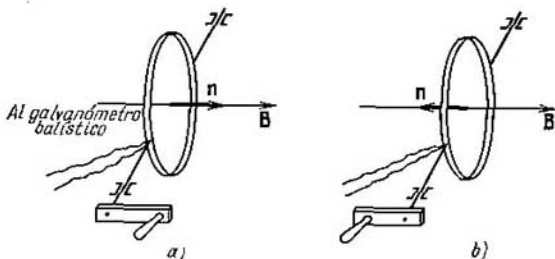


Fig. 62.1.

consiste en lo siguiente. En el campo que se investiga se coloca una bobina pequeña de N espiras. Esta bobina se sitúa de tal forma que el vector \mathbf{B} resulte perpendicular al plano de las espiras (fig. 62.1, a). Entonces el flujo magnético total enlazado a la bobina será

$$\Psi_1 = NBS,$$

donde S es el área de una espira, que deberá ser tan pequeña que dentro de sus límites el campo se pueda considerar homogéneo.

Si la bobina gira 180° (fig. 62.1, b), el flujo enlazado se hace igual a $\Psi_2 = -NBS$ (n y \mathbf{B} tienen sentidos opuestos). Por consiguiente, la variación del flujo total que se produce al girar la bobina es $\Psi_1 - \Psi_2 = 2NBS$. Si el giro se efectúa con suficiente rapidez, en el

sistema se produce un impulso de corriente con el cual pasa la carga

$$q = \frac{1}{R} 2NBS \quad (62.2)$$

(véase la fórmula (62.1)).

La carga que pasa por un circuito con un breve impulso de corriente se puede medir valiéndose del llamado galvanómetro balístico, que es un galvanómetro con gran período de oscilaciones propias. Midiendo q y conociendo R , N y S , por la fórmula (62.2) se puede hallar B .

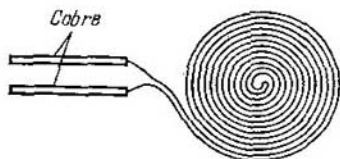


Fig. 62.2.

En este caso se entiende por R la impedancia del circuito, en la que se incluye la resistencia de la bobina, la de los conductores de conexión y la del galvanómetro.

En vez de girar la bobina se puede conectar (o desconectar) el campo magnético que se estudia o invertir su sentido.

Para medir B se utiliza también la circunstancia de que la re-

sistencia eléctrica del bismuto aumenta mucho bajo la acción del campo magnético (aproximadamente en un 5% por cada décima de tesla o por cada 1000 Gs). Por eso, colocando en el campo magnético una espiral de bismuto previamente graduada (fig. 62.2) y midiendo la variación relativa de su resistencia, se puede determinar la inducción magnética del campo.

La resistencia eléctrica de otros metales también aumenta en el campo magnético, pero en mucho menor grado. En el cobre, por ejemplo, el aumento de la resistencia es aproximadamente 10^4 veces menor que en el bismuto.

§ 63. Corrientes de Foucault

Las corrientes inducidas se pueden excitar también en conductores macizos. En este caso reciben el nombre de *corrientes de Foucault* o *corrientes en torbellino*. La resistencia eléctrica de un conductor macizo es pequeña, por lo que las corrientes de Foucault pueden alcanzar una intensidad muy grande.

De acuerdo con la ley de Lenz, las corrientes de Foucault siguen dentro del conductor los caminos y direcciones más convenientes para que con su acción oponerse lo más intensamente posible a la causa que las produce. Por eso los buenos conductores que se mueven en un campo magnético intenso experimentan un fuerte frenado, debido a la interacción de las corrientes de Foucault con el campo magnético. Esto se utiliza para amortiguar las partes móviles de los galvanómetros, sismógrafos y otros aparatos. En la parte móvil del

aparato se sujeta una lámina conductora (por ejemplo, de aluminio) en forma de sector (fig. 63.1) que se introduce en el espacio entre los polos de un imán permanente de gran fuerza. Al moverse la lámina surgen en ella fuerzas de Foucault que frenan el sistema. La ventaja de este dispositivo consiste en que el frenado sólo se produce cuando la lámina se mueve, y desaparece cuando la lámina está en reposo. Por eso el amortiguador electromagnético no dificulta en absoluto que el sistema entre exactamente en la posición de equilibrio.

La acción térmica de las corrientes de Foucault se aprovecha en los hornos de inducción. Un horno de este tipo consiste en una bobina alimentada por corriente de alta frecuencia y gran intensidad. Si dentro de la bobina se coloca un cuerpo conductor, se producen en él intensas corrientes en torbellino que pueden calentarlo hasta la fusión. Así se hace para fundir los metales en el vacío, lo que permite obtener materiales de pureza extraordinariamente alta.

Valiéndose de las corrientes de Foucault se realiza también el calentamiento de las partes metálicas internas de las instalaciones de vacío para desgasificarlas.

En muchos casos las corrientes de Foucault son indeseables y hay que tomar medidas especiales para combatirlas. Así, por ejemplo, para evitar las pérdidas de energía en el calentamiento de los núcleos de los transformadores por las corrientes de Foucault, éstos se hacen de láminas delgadas separadas por capas aislantes. Las láminas se sitúan de tal modo que las posibles direcciones de las corrientes de Foucault sean perpendiculares a ellas. La aparición de las ferritas (materiales magnéticos semiconductores de gran resistencia eléctrica) ha hecho posible la fabricación de núcleos macizos.

Las corrientes de Foucault que se producen en los conductores por los cuales pasan corrientes alternas están dirigidas de manera que debilitan la corriente dentro del conductor y la intensifican cerca de la superficie. Resultado de esto es que la corriente de alternancia rápida no está distribuida uniformemente por la sección del conductor, sino que parece empujada hacia su superficie. Este fenómeno se denomina *efecto pelicular*. A este efecto se debe que la parte interna de los conductores de los circuitos de alta frecuencia sea inútil. Por eso en dichos circuitos se utilizan conductores en forma de tubos.

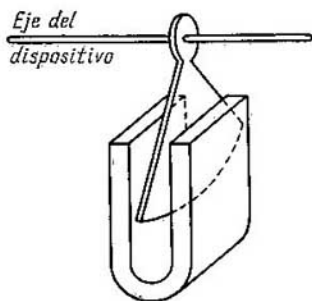


Fig. 63.1.

§ 64. Fenómeno de la autoinducción

La corriente eléctrica que fluye por cualquier circuito crea un flujo magnético Ψ que lo atraviesa. Las variaciones de I hacen que también varíe Ψ , a consecuencia de lo cual en el circuito se induce una f.e.m. Este fenómeno recibe el nombre de *autoinducción*.

De acuerdo con la ley de Biot—Savart, la inducción magnética B es proporcional a la intensidad de la corriente que excita el campo. De aquí se infiere que la corriente I que pasa por el circuito y el flujo magnético total Ψ a través de él que ella crea son proporcionales entre sí:

$$\Psi = LI. \quad (64.1)$$

El coeficiente de proporcionalidad L entre la intensidad de la corriente y el flujo magnético total se llama *inductancia* del circuito.

La dependencia lineal de Ψ respecto de I sólo se observa en el caso en que la permeabilidad magnética μ del medio que rodea el conductor no depende de la intensidad del campo H , es decir, en ausencia de materiales ferromagnéticos. En el caso contrario μ es una función compleja de I (mediante H ; véase la fig. 59.3, b) y, como $B = \mu_0\mu H$, la dependencia de Ψ respecto de I también será bastante compleja. No obstante, la relación (64.1) se extiende a este caso considerando que la inductancia L es función de I . Si la intensidad de la corriente I permanece invariable, el flujo total Ψ puede variar a expensas de la variación de la forma y dimensiones del circuito.

De lo expuesto se deduce que la inductancia L depende de la geometría del circuito (o sea, de su forma y dimensiones) y de las propiedades magnéticas (μ) del medio que lo rodea. Si el circuito es rígido y cerca de él no hay materiales ferromagnéticos, la inductancia L es una magnitud constante.

Como unidad de inductancia del SI se toma la inductancia de un conductor en el cual, si la intensidad de la corriente es de 1 A, se produce un flujo total Ψ enlazado a él igual a 1 Wb. Esta magnitud se denomina *henrio* (H).

En el sistema de Gauss la inductancia tiene dimensión de longitud. De acuerdo con esto la unidad de inductancia de este sistema se llama *centímetro*. La inductancia de 1 cm la tiene un conductor con el cual, cuando la intensidad de la corriente es de 1 unid. CGSM (o sea, 10 A), enlaza un flujo igual a 1 μ s (10⁻⁸ Wb).

Calculemos la inductancia de un solenoide. Sea un solenoide de tal longitud que, prácticamente, se pueda considerar infinito. Al pasar por él la corriente I , dentro del solenoide se excita un campo homogéneo, cuya inducción es $B = \mu_0\mu nI$ (véanse las fórmulas (50.4) y (53.5)). El flujo a través de cada una de las espiras es $\Phi =$

= BS , y el flujo magnético total, enlazado con el solenoide,

$$\Psi = N\Phi = nlBS = \mu_0\mu n^2lSI, \quad (64.2)$$

donde l es la longitud del solenoide (que hemos supuesto muy grande), S , el área de la sección transversal, y n , el número de espiras por unidad de longitud (el producto nl da el número total de espiras N).

La comparación de las fórmulas (64.1) y (64.2) da para la inductancia de un solenoide muy largo la expresión

$$L = \mu_0\mu n^2lS = \mu_0\mu n^2V, \quad (64.3)$$

en la que $V = lS$ es el volumen del solenoide.

De (64.3) se sigue que la dimensión de μ_0 es igual a la de la inductancia dividida por la dimensión de la longitud. De acuerdo con esto, μ_0 se mide en henrios por metro (véase (39.3)).

Cuando la intensidad de la corriente varía, en el circuito surge la f.e.m. de inducción

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right). \quad (64.4)$$

Si durante las variaciones de la intensidad de la corriente permanece constante la inductancia (lo que sólo es posible en ausencia de materiales ferromagnéticos), la expresión de la f.e.m. autoinducida tiene la forma

$$\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt}. \quad (64.5)$$

El signo menos en esta fórmula está condicionado por la ley de Lenz, según la cual la corriente inducida tiene siempre un sentido tal, que la opone a la causa que la produce. En el caso que estudiamos la causa que produce la \mathcal{E}_s es la variación de la intensidad de la corriente en el circuito. Tomamos como positivo el recorrido en el sentido horario. Con esta condición la intensidad de la corriente será positiva si la corriente pasa por el circuito en el sentido horario, y negativo si la corriente fluye en el sentido antihorario. Análogamente, \mathcal{E}_s será positiva si actúa en el sentido horario, y negativa si lo hace en el sentido inverso.

La derivada dI/dt es positiva en dos casos: si crece la corriente positiva o si decrece el módulo de la corriente negativa. De (64.5) se deduce que en estos casos $\mathcal{E}_s < 0$. Esto significa que la f.e.m. inducida está dirigida en el sentido antihorario y, por lo tanto, se opone a las variaciones indicadas de la corriente (es decir, al crecimiento de la corriente positiva o a la disminución de la negativa).

La derivada dI/dt es negativa también en dos casos: cuando decrece la corriente positiva o cuando crece el módulo de la negativa. En estos casos $\mathcal{E}_s > 0$ y, por consiguiente, se opone a las variaciones de la corriente (o sea, al decrecimiento de la corriente positiva o al crecimiento del módulo de la negativa).

La relación (64.5) da la posibilidad de determinar la inductancia como el factor de proporcionalidad entre la velocidad con que varía la intensidad de la corriente y la f.e.m. autoinducida que se produce como consecuencia de esto. Sin embargo, esta definición sólo es válida en el caso en que $L = \text{const.}$ En presencia de materiales ferromagnéticos la inductancia L de un circuito indeformable será función de I (mediante H); por lo tanto, dL/dt se puede escribir como $(dL/dI)(dI/dt)$. Haciendo esta sustitución en la fórmula (64.4), obtenemos que

$$\mathcal{E}_s = - \left(L + I \frac{dL}{dI} \right) \frac{dI}{dt}. \quad (64.6)$$

De aquí queda claro que, en presencia de materiales ferromagnéticos, el factor de proporcionalidad entre dI/dt y \mathcal{E}_s no es, ni mucho menos, igual a L .

§ 65. Corriente al abrir y cerrar un circuito

Por la ley de Lenz, las corrientes adicionales que se producen a consecuencia de la autoinducción tienen siempre un sentido tal, que se oponen a las variaciones de la corriente en el circuito. Esto conduce a que el establecimiento de la corriente al cerrar un circuito y su disminución al abrirlo no se produzcan instantáneamente, sino poco a poco.

Hallemos primero el carácter que tiene la variación de la corriente cuando se abre el circuito. Supongamos que en un circuito, en el cual

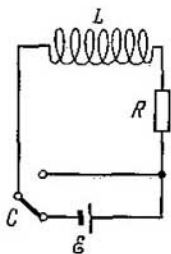


Fig. 65.1.

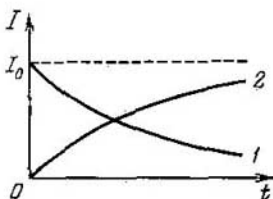


Fig. 65.2.

la inductancia L y la resistencia R sean independientes de I , está intercalada una fuente de f.e.m. \mathcal{E} (fig. 65.1). Por el circuito pasará la corriente continua

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (65.1)$$

(consideramos que la resistencia de la fuente de corriente es despreciable por su pequeñez). En un instante $t = 0$, desconectamos la

fuentes y, al mismo tiempo, cortacircuitamos con el conmutador C . En cuanto la intensidad de la corriente empieza a decrecer se produce una f.e.m. autoinducida que se opone a este decrecimiento. La intensidad de la corriente en el circuito satisfará la ecuación

$$IR = \mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt},$$

o bien

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0. \quad (65.2)$$

La expresión (65.2) es una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden. Separando las variables, obtenemos

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt.$$

De donde

$$\ln I = -\frac{R}{L} t + \ln \text{const}$$

(teniendo en cuenta las transformaciones ulteriores, hemos escrito la constante de integración en la forma $\ln \text{const}$). La potenciación de esta relación da

$$I = \text{const} \cdot e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (65.3)$$

La expresión (65.3) es la solución general de la ecuación (65.2). El valor de const lo hallamos partiendo de las condiciones iniciales. Para $t = 0$ la intensidad de la corriente tenía el valor de (65.1). Por consiguiente, $\text{const} = I_0$. Sustituyendo este valor en (65.3) llegamos a la expresión

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (65.4)$$

Así, pues, una vez desconectada la fuente de f.e.m., la intensidad de la corriente en el circuito no se anula instantáneamente, sino que disminuye según la ley exponencial (65.4). La gráfica del decrecimiento de I se da en la fig. 65.2 (curva I). La velocidad de disminución viene determinada por la magnitud, con dimensión de tiempo,

$$\tau = \frac{L}{R}, \quad (65.5)$$

denominada *constante de tiempo* del circuito. Sustituyendo en (65.4) R/L por $1/\tau$, se obtiene

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (65.6)$$

De acuerdo con esta fórmula, τ es el tiempo durante el cual la intensidad de la corriente disminuye e veces. Por (65.5) puede verse que

cuanto mayor sea la inductancia L del circuito y menor su resistencia R , tanto mayor será la constante de tiempo τ y tanto más lentamente disminuirá la corriente en el circuito.

Para simplificar los cálculos hemos supuesto que el circuito, en el instante de ser desconectada la fuente, se cortocircuitaba. Si simplemente se rompe un circuito de gran inductancia, la alta tensión inducida que se origina produce una chispa o un arco en el punto de ruptura.

Consideremos ahora el caso del cierre del circuito. Después de desconectar la fuente de f.e.m. y hasta que la intensidad de la corriente alcance su valor establecido (65.1), en el circuito, además de la f.e.m. \mathcal{E} actuará una f.e.m. autoinducida. Por lo tanto, de acuerdo con la ley de Ohm,

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt},$$

o bien

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (65.7)$$

Hemos llegado a una ecuación diferencial lineal no homogénea que sólo difiere de la (65.2) en que, en su segundo miembro, en vez de cero figura en ella la magnitud constante \mathcal{E}/L . Por la teoría de las ecuaciones diferenciales sabemos que la solución general de una ecuación lineal no homogénea se puede obtener añadiendo cualquier solución parcial suya a la solución general de la ecuación homogénea correspondiente (véase el § 52 del tomo 1^o). La solución general de la ecuación homogénea tiene la forma (65.3). Es fácil cerciorarse de que $I = \mathcal{E}/R = I_0$ es una solución parcial de la ecuación (65.7). Por consiguiente, la solución general de la ecuación (65.7) será la función

$$I = I_0 + \text{const} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

En el instante inicial la intensidad de la corriente I es nula. De aquí, $\text{const} = -I_0$. De este modo,

$$I = I_0 (1 - e^{-\frac{R}{L}t}). \quad (65.8)$$

Esta función describe el aumento de la corriente en el circuito después de conectarle la fuente de f.e.m. La gráfica de la función (65.8) se da en la fig. 65.2 (curva 2).

§ 66. Inducción mutua

Tomemos dos circuitos 1 y 2 próximos entre sí (fig. 66.1). Si por el circuito 1 pasa una corriente de intensidad I_1 , ésta crea a través del circuito 2 el flujo magnético total, proporcional a I_1 ,

$$\Psi_2 = L_{21} I_1 \quad (66.1)$$

(el campo que crea este flujo se representa en la figura por medio de líneas continuas). Si varía la corriente I_1 , en el circuito 2 se induce la f.e.m.

$$\mathcal{E}_{12} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (66.2)$$

(suponemos que cerca del circuito no hay materiales ferromagnéticos).

Análogamente, si por el circuito 2 pasa una corriente de intensidad I_2 , se producirá el flujo enlazado con el circuito 1,

$$\Psi_1 = L_{12} I_2 \quad (66.3)$$

(el campo que crea este flujo se representa con líneas de trazos). Durante las variaciones de la corriente I_2 , en el circuito 1 se induce la f.e.m.

$$\mathcal{E}_{11} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (66.4)$$

Los circuitos 1 y 2 se llaman *acoplados* y el fenómeno de la aparición de la f.e.m. en uno de ellos durante las variaciones de la intensidad de la corriente en el otro, se denomina *inducción mutua*.

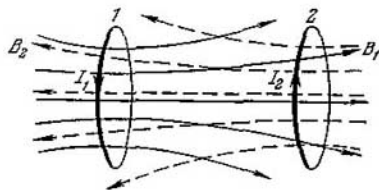


Fig. 66.1.

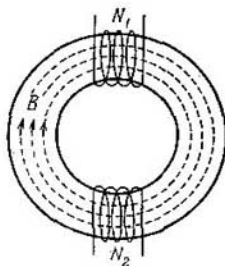


Fig. 66.2.

Los factores de proporcionalidad L_{12} y L_{21} reciben el nombre de *inductancia mutua* de los circuitos. El cálculo correspondiente da que, en ausencia de materiales ferromagnéticos, estos factores son siempre iguales entre sí:

$$L_{12} = L_{21}. \quad (66.5)$$

Su aumento depende de la forma, dimensiones y disposición mutua de los circuitos, así como de la permeabilidad magnética del medio que los rodea. L_{12} se mide en las mismas unidades que la inductancia L .

Hallemos la inducción mutua de dos bobinas arrolladas sobre un núcleo toroidal común de hierro (fig. 66.2). Las líneas de inducción

magnética se concentran dentro del núcleo (véase el texto que sigue a la fórmula (54.8)), por lo que se puede considerar que el campo magnético excitado por cualquiera de las bobinas tendrá en todas partes dentro del núcleo la misma intensidad. Si la primera bobina tiene N_1 espiras y por ella pasa una corriente de intensidad I_1 , de acuerdo con el teorema de la circulación (véase (52.8))

$$Hl = N_1 I_1 \quad (66.6)$$

(l es la longitud del núcleo).

El flujo magnético a través de la sección transversal del núcleo $\Phi = BS = \mu_0 \mu HS$, donde S es el área de la sección transversal del núcleo. Sustituyendo aquí el valor de H , deducido de (66.6), y multiplicando por N_2 la expresión obtenida, resulta el flujo magnético total enlazado con el segundo devanado:

$$\Psi_2 = \frac{S}{l} \mu_0 \mu N_1 N_2 I_1.$$

La comparación de esta expresión con la fórmula (66.1) da que

$$L_{21} = \frac{S}{l} \mu_0 \mu N_1 N_2. \quad (66.7)$$

El cálculo del flujo Ψ_1 enlazado con el primer devanado en el caso en que por el segundo pasa una corriente de intensidad I_2 , conduce a la expresión

$$L_{12} = \frac{S}{l} \mu_0 \mu N_1 N_2. \quad (66.8)$$

que por su forma coincide con L_{21} (véase (66.7)). Pero en este caso no se puede afirmar que $L_{12} = L_{21}$. El factor μ , que figura en las expresiones de estos coeficientes, depende de la intensidad del campo H en el núcleo. Si $N_1 \neq N_2$, una misma corriente pasando una vez por el primer devanado y otra vez por el segundo, crea en el núcleo campos de distinta intensidad H . Respectivamente, los valores de μ en ambos casos serán diferentes, de manera que cuando $I_1 = I_2$ los valores numéricos de L_{12} y L_{21} no coinciden.

§ 67. Energía de un campo magnético

Sea el circuito representado en la fig. 67.1. Cuando el conmutador está cerrado, en el solenoide se establece la corriente I que condiciona un campo magnético enlazado con las espiras del solenoide. Si se abre el conmutador, a través de la resistencia R pasará durante cierto tiempo la corriente decreciente mantenida por la f.e.m. autoinducida que surge en el solenoide. El trabajo que realiza esta corriente

en el tiempo dt es

$$dA = \mathcal{E}_s I dt = - \frac{d\Psi}{dt} I dt = - I d\Psi. \quad (67.1)$$

Si la inductancia del solenoide no depende de I ($L = \text{const}$), $d\Psi = L dI$ y la expresión (67.1) toma la forma

$$dA = -LI dI. \quad (67.2)$$

Integrando esta expresión respecto de I entre los límites desde el valor inicial I hasta cero, obtenemos el trabajo realizado en el circuito durante todo el tiempo que tarda en desaparecer el campo magnético,

$$A = - \int_I^0 LI dI = \frac{LI^2}{2}. \quad (67.3)$$

El trabajo (67.3) se gasta en incrementar la energía interna de la resistencia R , del solenoide y de los conductores de conexión (es decir, en su calentamiento). La realización de este trabajo va acompañada de la desaparición del campo magnético que existía inicialmente en el espacio entorno al solenoide. Como en los cuerpos que rodean el circuito eléctrico no se producen ningunas otras variaciones, llegamos a la conclusión de que el campo magnético es el portador de la energía, a cuyas expensas se realiza el trabajo (67.3). De este modo deducimos que un conductor, con inductancia L , por el cual pasa una corriente de intensidad I , posee la energía

$$W = \frac{LI^2}{2}, \quad (67.4)$$

que está localizada en el campo magnético excitado por la corriente (compárese esta fórmula con la expresión $CU^2/2$ de la energía de un condensador cargado; véase (29.2)).

La expresión (67.3) se puede interpretar como el trabajo que es necesario realizar contra la f.e.m. autoinducida durante el proceso de incremento de la corriente desde 0 hasta I y que se gasta en crear el campo magnético poseedor de la energía (67.4). En efecto, el trabajo realizado contra la f.e.m. autoinducida es

$$A' = \int_0^I (-\mathcal{E}_s) I dt.$$

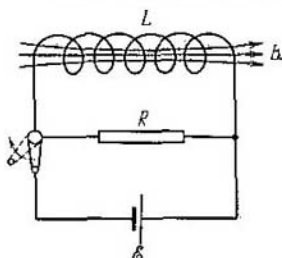


Fig. 67.1.

Haciendo transformaciones análogas a las que nos condujeron a la expresión (67.2), obtenemos.

$$A' = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}, \quad (67.5)$$

lo que coincide con (67.3). El trabajo (67.5) se efectúa al establecerse la corriente a expensas de la fuente de f.e.m. y se gasta totalmente en crear el campo magnético enlazado con las espiras del solenoide. La expresión (67.5) no tiene en cuenta el trabajo que la fuente de f.e.m. gasta, durante el proceso de establecimiento de la corriente, en calentar los conductores.

Expresemos la energía del campo magnético (67.4) por medio de las magnitudes que caracterizan el campo mismo. En el caso de un solenoide muy largo (prácticamente infinito)

$$L = \mu_0 \mu n^2 V; \quad H = nI \quad \text{o} \quad I = \frac{H}{n}$$

(véanse las fórmulas (64.3) y (53.8)). Sustituyendo estos valores de L e I en la expresión (67.4) y haciendo transformaciones, se obtiene

$$W = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V. \quad (67.6)$$

En el § 50 se demostró que el campo magnético de un solenoide infinitamente largo es homogéneo y distinto de cero solamente dentro del solenoide. Por lo tanto, la energía (67.6) está localizada dentro del solenoide y distribuida por su volumen con la densidad constante w , que puede hallarse dividiendo W por V . Haciendo esta división, obtenemos

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (67.7)$$

Utilizando la relación (52.14), a la fórmula de la densidad de la energía del campo magnético se le puede dar la forma

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} \quad (67.8)$$

Las expresiones que hemos obtenido para la densidad de la energía del campo magnético sólo difieren de la expresión (30.3) de la densidad de la energía del campo eléctrico en que en ellas las magnitudes eléctricas han sido sustituidas por las correspondientes magnéticas.

Conociendo la densidad de la energía del campo en cada punto, se puede hallar la energía del campo comprendido en cualquier volumen V . Para esto hay que calcular la integral

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} dV. \quad (67.9)$$

Se puede demostrar que en el caso de circuitos acoplados (en ausencia de materiales ferromagnéticos) la energía del campo se determina por la fórmula

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{L_{12} I_1 I_2}{2} + \frac{L_{21} I_2 I_1}{2}. \quad (67.10)$$

Para la energía de N circuitos acoplados entre sí se obtiene la expresión análoga

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i, h=1}^N L_{ih} I_i I_h, \quad (67.11)$$

en la que $L_{ih} = L_{hi}$ es la inductancia mutua de los circuitos i -ésimo y h -ésimo, y $L_{ii} = L_i$ es la inductancia del circuito i -ésimo.

§ 68. Trabajo de inversión del magnetismo de un material ferromagnético

La variación de la corriente en un circuito va acompañada de la realización, contra la f.e.m. autoinducida, del trabajo

$$dA' = (-\mathcal{E}_a) I dt = \frac{d\Psi}{dt} I dt = I_d d\Psi. \quad (68.1)$$

Si la inductancia L del circuito permanece constante (lo que sólo es posible en ausencia de materiales ferromagnéticos), este trabajo se gasta totalmente en crear la energía del campo magnético: $dA' = dW$. En presencia de materiales ferromagnéticos, como ahora veremos, la cuestión es distinta.

En el caso de un solenoide muy largo («infinito») $H = nI$ y $\Psi = n l B S$. Respectivamente,

$$I = \frac{H}{n} \quad \text{y} \quad d\Psi = n l S dB.$$

Sustituyendo estas expresiones en (68.1), obtenemos que

$$dA' = H dB \cdot V, \quad (68.2)$$

donde $V = lS$ es el volumen del solenoide, es decir, el volumen en el cual se ha creado el campo magnético homogéneo.

Aclaremos si se puede identificar la expresión (68.2) con el incremento de la energía del campo magnético. Se recordará que la energía es una función de estado. Por lo tanto, la suma de sus incrementos para un ciclo es nula:

$$\oint dW = 0.$$

Si el solenoide se llena con un material ferromagnético, la relación entre B y H se representa por la curva que muestra la fig. 68.1. La

expresión $H dB$ da el área de la zona rayada. Por consiguiente, la integral $\oint H dB$ calculada a lo largo del bucle de histéresis es igual al área S_b abarcada por el bucle. De este modo, la integral de la expresión (68.2), o sea, $\oint dA'$, es distinta de cero. De aquí se sigue que, en presencia de materiales ferromagnéticos, el trabajo (68.2) no se puede igualar al incremento de la energía del campo magnético.

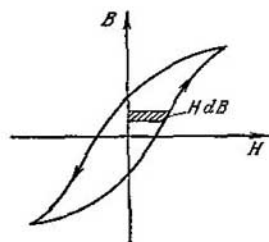


Fig. 68.1.

Una vez que termina el ciclo de inversión del magnetismo, H y B y, por lo tanto también la energía magnética, tendrán la magnitud inicial. Por consiguiente, el trabajo $\oint dA'$ no se gasta en crear la energía del campo magnético. La experiencia demuestra que este trabajo se gasta en aumentar la energía interna del material ferromagnético, es decir, en su calentamiento.

Así, al efectuar un ciclo de inversión del magnetismo de un material ferromagnético se gasta un trabajo, referido a la unidad de volumen, numéricamente igual al área del bucle de histéresis:

$$A'_{\text{unid. vol}} = \oint H dB = S_b. \quad (68.3)$$

Este trabajo se gasta en calentar el material ferromagnético.

En ausencia de materiales ferromagnéticos B es una función unívoca de H ($B = \mu_0 \mu H$, donde $\mu = \text{const}$). Por eso la expresión $H dB = \mu_0 \mu H dH$ es la diferencial total

$$dw = H dB, \quad (68.4)$$

que determina el incremento de la energía del campo magnético. La integración de la expresión (68.4) entre los límites de 0 a H conduce a la fórmula (67.7) de la densidad de la energía del campo (antes de efectuar la integración hay que transformar $H dB$ sustituyendo dB por $\mu_0 \mu dH$).

ECUACIONES DE MAXWELL

§ 69. Campo rotacional eléctrico

Estudiemos el caso de la inducción electromagnética cuando el circuito alámbrico en que se induce la corriente está en reposo y las variaciones del flujo magnético están condicionadas por las del campo magnético. La aparición de la corriente inducida evidencia que las variaciones del campo magnético hacen que se produzcan en el circuito fuerzas extrañas que actúan sobre los portadores de corriente. Estas fuerzas no están relacionadas con los procesos químicos ni térmicos que tienen lugar en el conductor; tampoco pueden ser fuerzas magnéticas, ya que estas últimas no efectúan trabajo sobre las cargas. Queda llegar a la conclusión de que la corriente inducida se debe al surgimiento de un campo eléctrico en el conductor. Designemos por E_B la intensidad de este campo (esta designación, lo mismo que la E_q que utilizaremos a continuación, es auxiliar y más tarde prescindiremos de los subíndices B y q). La fuerza electromotriz es igual a la circulación del vector E_B a lo largo del circuito dado:

$$\mathcal{E}_I = \oint E_B dl. \quad (69.1)$$

La sustitución en la fórmula $\mathcal{E}_I = -d\Phi/dt$ de la expresión (69.1) para \mathcal{E}_I y de la expresión $\int B dS$ para Φ , conduce a la relación

$$\oint E_B dl = -\frac{d}{dt} \int_S B dS,$$

(la integral del segundo miembro de esta igualdad se toma sobre una superficie arbitraria que se apoye en el circuito). Como el circuito y la superficie están en reposo, la operación de derivación respecto del tiempo y la integración sobre la superficie pueden permutarse:

$$\oint E_B dl = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} dS. \quad (69.2)$$

Y como el vector B depende, en términos generales, tanto del tiempo como de las coordenadas, bajo el signo de integral hemos escrito el símbolo de derivada parcial respecto del tiempo (la integral $\int B dS$ es función del tiempo solamente).

El primer miembro de la igualdad (69.2) lo transformamos de acuerdo con el teorema de Stokes y obtenemos el resultado

$$\int_S [\nabla \mathbf{E}_B] dS = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dS.$$

En virtud de que la superficie de integración se elige arbitrariamente, debe cumplirse la igualdad

$$[\nabla \mathbf{E}_B] = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (69.3)$$

El rotor del campo \mathbf{E}_B en cada punto del espacio es igual a la derivada del vector \mathbf{B} respecto del tiempo tomada con signo contrario.

J.C. Maxwell supuso que el campo magnético variable con el tiempo condiciona la aparición del campo \mathbf{E}_B en el espacio, independientemente de la presencia en dicho espacio del circuito alámbrico. La existencia de este circuito sólo permite descubrir, por la aparición en él de la corriente inducida, la existencia del campo eléctrico en los puntos correspondientes del espacio.

Así, según la idea de Maxwell, el campo magnético variable con el tiempo origina un campo eléctrico. Este campo \mathbf{E}_B se diferencia substancialmente del campo electrostático \mathbf{E}_q que generan las cargas en reposo. El campo electrostático es de potencial y sus líneas de intensidad comienzan y finalizan en cargas. El rotor del vector \mathbf{E}_q es nulo en cualquier punto:

$$[\nabla \mathbf{E}_q] = 0 \quad (69.4)$$

(véase la fórmula (12.3)). De acuerdo con (69.3), el rotor del vector \mathbf{E}_B es distinto de cero. Por consiguiente, el campo \mathbf{E}_B , lo mismo que el campo magnético, es rotacional. Sus líneas de intensidad son cerradas.

De este modo, un campo eléctrico puede ser tanto de potencial (\mathbf{E}_q) como rotacional (\mathbf{E}_B). En el caso general el campo eléctrico puede estar compuesto del campo \mathbf{E}_q , creado por las cargas, y del campo \mathbf{E}_B , debido al campo magnético variable con el tiempo. Sumando las relaciones (69.4) y (69.3) obtenemos para el rotor de intensidad del campo total $\mathbf{E} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_B$ la ecuación siguiente:

$$[\nabla \mathbf{E}] = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (69.5)$$

Esta ecuación es una de las fundamentales en la teoría electromagnética de Maxwell.

La existencia de la relación mutua entre los campos eléctrico y magnético (expresada, en particular, por la relación (69.5)) es causa de que el estudio separado de los campos eléctrico y magnético tenga solamente un sentido relativo. En efecto, un campo eléctrico es creado por un sistema de cargas en reposo. Pero si estas cargas están en reposo con respecto a cierto sistema inercial de referencia, con

respecto a otros sistemas inerciales estarán en movimiento y, por lo tanto, crearán no sólo el campo eléctrico, sino también un campo magnético. Un conductor en reposo con corriente continua crea en cada punto del espacio un campo magnético continuo. Pero con respecto a otros sistemas inerciales este conductor está en movimiento. Por eso el campo magnético creado por él en cualquier punto de coordenadas x, y, z dadas variará y, por consiguiente, generará un campo eléctrico rotacional. Así, un campo que con relación a cierto sistema de referencia es «puramente» eléctrico o «puramente» magnético, con respecto a otros sistemas de referencia será el conjunto de los campos eléctrico y magnético que forman el campo electromagnético único.

§ 70. Corriente de desplazamiento

En el caso de un campo electromagnético estacionario (es decir, que no varía con el tiempo), el rotor del vector \mathbf{H} es igual en cada punto a la densidad de la corriente de conducción:

$$[\nabla\mathbf{H}] = \mathbf{j} \quad (70.1)$$

(véase (52.6)). El vector \mathbf{j} está ligado con la densidad de carga en un mismo punto por la ecuación de continuidad (32.3):

$$\nabla\mathbf{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (70.2)$$

El campo magnético sólo puede ser estacionario a condición de que la densidad de carga ρ y la densidad de corriente \mathbf{j} no dependan del tiempo. En este caso, según (70.2), la divergencia de \mathbf{j} es nula. Por eso las líneas de corriente (líneas del vector \mathbf{j}) no tienen manantiales y son cerradas.

Veamos si la ecuación (70.1) es válida en el caso de campos que varíen con el tiempo. Consideremos el campo magnético creado por la corriente que fluye, al cargar un condensador, de una fuente de tensión continua U (fig. 70.1). Esta corriente no es continua con el tiempo (en el instante en que la tensión en el condensador se hace igual a U , la corriente cesa). Las líneas de corriente de conducción sufren una interrupción en el espacio entre las armaduras del condensador (en la figura las líneas de corriente dentro de las armaduras se muestran con rayas de trazos).

Tomemos un contorno circular Γ que abarque el conductor por el cual pasa la corriente al condensador, e integremos la relación (70.1) sobre la superficie S_1 , que corta al conductor, limitada por el contorno:

$$\int_{S_1} [\nabla\mathbf{H}] dS = \int_{S_1} \mathbf{j} dS.$$

Después de transformar el primer miembro según el teorema de Stokes, obtenemos la circulación del vector \mathbf{H} a lo largo del contorno Γ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{j} d\mathbf{S} = I \quad (70.3)$$

(I es la intensidad de la corriente que carga el conductor). Haciendo los mismos cálculos para la superficie S_2 , que no corta el conductor con corriente (véase la fig. 70.1), llegamos a la relación claramente falsa

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0. \quad (70.4)$$

El resultado obtenido indica que en el caso de campos que varían con el tiempo, la relación (70.1) deja de ser válida. Se impone la

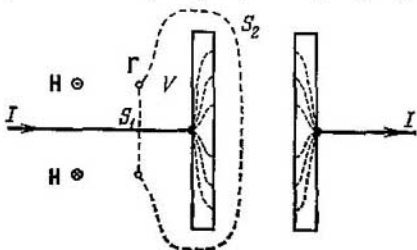


Fig. 70.1.

conclusión de que en esta ecuación falta un sumando dependiente de los campos derivados respecto del tiempo. Para los campos estacionarios este sumando se anula.

La invalidez de la ecuación (70.1) en el caso de campos no estacionarios se infiere también de los siguientes razonamientos. Tomemos la divergencia de los dos miembros de la relación (70.1):

$$\nabla [\nabla \mathbf{H}] = \nabla \mathbf{j}.$$

La divergencia de un rotor tiene que ser necesariamente igual a cero (véase (11.39)). Por lo tanto llegamos a la conclusión de que la divergencia del vector \mathbf{j} también debe ser siempre nula. Pero esta conclusión contradice la ecuación de continuidad (70.2). Efectivamente, en los procesos no estacionarios ρ puede variar con el tiempo (esto, en particular, ocurre con la densidad de carga en las armaduras de un condensador cargado). En este caso, según (70.2), la divergencia de \mathbf{j} es distinta de cero.

Para poner de acuerdo las ecuaciones (70.1) y (70.2), Maxwell introdujo en el segundo miembro de la ecuación (70.1) un sumando

adicional. Como es natural, este sumando debía tener la dimensión de corriente. Maxwell le dio el nombre de densidad de *corriente de desplazamiento*. De este modo, según Maxwell, la ecuación (70.1) debe tener la forma

$$[\nabla H] = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{despl}}. \quad (70.5)$$

La suma de la corriente de conducción y de la corriente de desplazamiento se denomina *corriente total*. La densidad de la corriente total es

$$\mathbf{j}_{\text{total}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{despl}}. \quad (70.6)$$

Suponiendo que la divergencia de la corriente de desplazamiento es igual a la divergencia de la corriente de conducción tomada con signo contrario,

$$\nabla \mathbf{j}_{\text{despl}} = -\nabla \mathbf{j}, \quad (70.7)$$

la divergencia del segundo miembro de la ecuación (70.5), lo mismo que la divergencia de su primer miembro, será siempre igual a cero.

Sustituyendo en (70.7) $\nabla \mathbf{j}$, según (70.2), por $\partial \rho / \partial t$, obtenemos la siguiente expresión de la divergencia de la corriente de desplazamiento:

$$\nabla \mathbf{j}_{\text{despl}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (70.8)$$

Para tomar la corriente de desplazamiento con las magnitudes que caracterizan la variación del campo eléctrico con el tiempo, utilizamos la relación (19.8), según la cual la divergencia del vector de desplazamiento eléctrico es igual a la densidad de cargas extrañas:

$$\nabla D = \rho.$$

Tomando la diferencial de esta relación respecto del tiempo, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla D) = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Ahora cambiamos en el segundo miembro el orden de diferenciación respecto del tiempo y de las coordenadas. Como resultado llegamos a la siguiente expresión de la derivada de ρ respecto de t :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right).$$

La sustitución de esta expresión en la fórmula (70.8), da

$$\nabla \mathbf{j}_{\text{despl}} = \nabla \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right).$$

De aquí

$$\mathbf{j}_{\text{despl}} = \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (70.9)$$

Sustituyendo la expresión (70.9) en la fórmula (70.5), se llega a la ecuación

$$[\nabla H] = j + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (70.10)$$

que, lo mismo que la ecuación (69.5), es una de las fundamentales de la teoría de Maxwell.

Subrayamos que el término «corriente de desplazamiento» es puramente convencional. En esencia una corriente de desplazamiento es un campo eléctrico variable con el tiempo. Como base para llamar «corriente» a la magnitud (70.9) sirve únicamente el hecho de que la dimensión de esta magnitud coincide con la dimensión de la densidad de corriente. De todas las propiedades físicas propias de una corriente real, la corriente de desplazamiento sólo posee una, es decir, la capacidad de crear un campo magnético.

La introducción de la corriente de desplazamiento, definida por la expresión (70.9), establecía la «igualdad de derechos» de los campos eléctrico y magnético. Del fenómeno de la inducción electromagnética se infiere que un campo magnético variable origina un campo eléctrico. De la ecuación (70.10) se sigue que un campo eléctrico variable genera un campo magnético.

La corriente de desplazamiento existe en todas las partes en que hay un campo eléctrico variable con el tiempo. En particular, existe dentro de los conductores por los cuales pasa corriente eléctrica alterna. Pero dentro de los conductores la corriente de desplazamiento suele ser despreciable por su pequeñez en comparación con la corriente de conducción.

Advertimos que la igualdad (70.3) es aproximada. Para hacerla completamente rigurosa hay que añadir a su segundo miembro un sumando que tenga en cuenta la corriente de desplazamiento debida al campo eléctrico débilmente disperso que existe en los alrededores de la superficie S_1 .

Cerciorémonos de que la integral de superficie del segundo miembro de la ecuación (70.5) tiene el mismo valor para las superficies S_1 y S_2 (véase la fig. 70.1). A través de la superficie S_1 «fluye» tanto la corriente de conducción como la de desplazamiento condicionada por el campo eléctrico que existe fuera del condensador. Por consiguiente, para la primera superficie tenemos que

$$\text{Int}_1 = \int_{S_1} j \, dS + \frac{d}{dt} \int_{S_1} D \, dS = I + \frac{d}{dt} \Phi_{1 \text{ entr}}$$

(en el segundo sumando se ha cambiado el orden de las operaciones de diferenciación respecto del tiempo y de integración respecto de las coordenadas). La magnitud designada por la letra I es la intensidad de la corriente que pasa por el conductor a la armadura izquierda del condensador, y $\Phi_{1 \text{ entr}}$ es el flujo del vector D que entra en el

volumen V limitado por las superficies S_1 y S_2 (véase la fig. 70.1).
Para la superficie segunda $j = 0$, por lo tanto,

$$\text{Int}_2 = \frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \Phi_{2 \text{ sal}},$$

donde $\Phi_{2 \text{ sal}}$ es el flujo del vector \mathbf{D} que sale del volumen V a través de la superficie S_2 .

La diferencia de integrales

$$\text{Int}_2 - \text{Int}_1 = \frac{d}{dt} \Phi_{2 \text{ sal}} - \frac{d}{dt} \Phi_{1 \text{ entr}} - I.$$

La intensidad de la corriente I se puede representar como dq/dt , donde q es la carga que hay en la armadura del condensador. El flujo que entra a través de la superficie S_1 es igual al flujo, tomado con signo contrario, que sale a través de esta misma superficie. Sustituyendo $\Phi_{1 \text{ entr}}$ por $-\Phi_{1 \text{ sal}}$, mientras que I por dq/dt , obtenemos

$$\text{Int}_2 - \text{Int}_1 = \frac{d}{dt} (\Phi_{2 \text{ sal}} + \Phi_{1 \text{ sal}}) - \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} (\Phi_D - q), \quad (70.11)$$

donde Φ_D es el flujo del vector \mathbf{D} a través de la superficie cerrada que forman las superficies S_1 y S_2 . Según (19.10), este flujo debe ser igual a la carga comprendida dentro de dicha superficie cerrada. En nuestro caso ésta será la carga q que hay en la armadura del condensador. De este modo, el segundo miembro de la relación (70.11) es nulo. De aquí se deduce que la magnitud de la integral de superficie del vector densidad de la corriente total no depende de la superficie que se elija para calcular la integral.

Para la corriente de desplazamiento, lo mismo que para la de conducción, se pueden construir las líneas de corriente. Según la fórmula (20.4), el desplazamiento eléctrico en el espacio entre las armaduras del condensador es igual a la densidad superficial de carga en la armadura: $D = \sigma$. De aquí

$$\dot{D} = \dot{\sigma}.$$

El primer miembro da la densidad de la corriente de desplazamiento en el espacio entre las armaduras del condensador, y el segundo, la densidad de la corriente de conducción dentro de las armaduras. La igualdad de estas densidades significa que en el límite de las armaduras las líneas de corriente de conducción se transforman ininterrumpidamente en líneas de corriente de desplazamiento. Por lo tanto, las líneas de corriente total resultan cerradas.

§ 71. Ecuaciones de Maxwell

El descubrimiento de la corriente de desplazamiento permitió a Maxwell crear un teoría unificada de los fenómenos eléctricos y magnéticos. Esta teoría explicó todos los hechos experimentales conocidos hasta entonces y predijo una serie de nuevos fenómenos, cuya existencia se confirmó después. La consecuencia más importante de la teoría de Maxwell fue la conclusión acerca de la existencia de las ondas electromagnéticas, que se propagan con la velocidad de la luz. El análisis teórico de las propiedades de estas ondas condujo a Maxwell a la creación de la teoría electromagnética de la luz.

La base de esta teoría la forman las *ecuaciones de Maxwell*. En el estudio del electromagnetismo estas ecuaciones desempeñan un papel semejante al de las leyes de Newton en la mecánica o los principios (leyes) fundamentales en la termodinámica.

El primer par de ecuaciones de Maxwell lo forman las ecuaciones (69.5) y (51.3):

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (71.1)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0. \quad (71.2)$$

La primera de estas ecuaciones relaciona los valores de \mathbf{E} con las variaciones del vector \mathbf{B} con el tiempo y es en esencia la expresión de la ley de la inducción electromagnética. La segunda ecuación indica la ausencia de fuentes del campo magnético, es decir, de cargas magnéticas.

El segundo par de ecuaciones de Maxwell lo constituyen las ecuaciones (70.10) y (49.8):

$$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (71.3)$$

$$\nabla \mathbf{D} = \rho. \quad (71.4)$$

La primera de ellas establece la relación entre las corrientes de conducción y de desplazamiento y el campo magnético que ellas generan. La segunda indica que de fuentes del vector \mathbf{D} sirven las cargas extrañas.

Las ecuaciones (71.1)—(71.4) son las *ecuaciones de Maxwell en forma diferencial*. Advertimos que en el primer par de ecuaciones intervienen solamente las características fundamentales del campo: \mathbf{E} y \mathbf{B} . En el segundo figuran únicamente las magnitudes auxiliares \mathbf{D} y \mathbf{H} .

Cada una de las ecuaciones vectoriales (71.1) y (71.3) equivale a las tres ecuaciones escalares que relacionan las componentes de los vectores que se encuentran en los miembros primero y segundo de estas igualdades. Aplicando las fórmulas (11.14) y (11.25)—(11.27),

podemos representar las ecuaciones de Maxwell en forma escalar:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (71.5)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (71.6)$$

(primer par de ecuaciones),

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}, \quad (71.7)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (71.8)$$

(segundo par de ecuaciones).

En total se obtienen 8 ecuaciones en las que figuran 12 funciones (tres componentes de los vectores \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} y \mathbf{H} en cada una). Como el número de ecuaciones es menor que el de funciones incógnitas, las ecuaciones (71.1)–(71.4) son insuficientes para hallar los campos a partir de las distribuciones de las cargas y de las corrientes dadas. Para poder calcular los campos hay que completar las ecuaciones de Maxwell con las ecuaciones que relacionan \mathbf{D} y \mathbf{j} con \mathbf{E} y también \mathbf{H} con \mathbf{B} . Estas ecuaciones tienen la forma

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \quad (71.9)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (71.10)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (71.11)$$

(véanse (19.6), (52.14) y (34.3)).

El conjunto de las ecuaciones (71.1)–(71.4) y (71.9)–(71.11) constituye la base de la electrodinámica de los medios en reposo.

Las ecuaciones

$$\oint_{\mathcal{R}} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \, d\mathbf{S}, \quad (71.12)$$

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0 \quad (71.13)$$

(primer par) y

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \, dl = \int_S \mathbf{j} \, dS + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \, dS, \quad (71.14)$$

$$\int_S \mathbf{D} \, dS = \int_V \rho \, dV \quad (71.15)$$

(segundo par) son las *ecuaciones de Maxwell en forma integral*.

La ecuación (71.12) se obtiene integrando la relación (71.1) sobre una superficie arbitraria S y transformando después su primer miembro, según el teorema de Stokes, en la integral a lo largo del contorno Γ que limita la superficie S . La ecuación (71.14) se obtiene, del mismo modo, de la relación (71.3). Las (71.13) y (71.15) se consiguen integrando las relaciones (71.2) y (71.4) sobre un volumen arbitrario V y transformando luego su primer miembro, según el teorema de Ostrogradski—Gauss, en la integral sobre la superficie cerrada S que limita el volumen V .

MOVIMIENTO DE LAS PARTÍCULAS CARGADAS EN LOS CAMPOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS

§ 72. Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético homogéneo

Imaginémonos una carga e' que se mueva en un campo magnético homogéneo con la velocidad v , perpendicular a B . La fuerza magnética le comunicará a la carga la aceleración, perpendicular a la velocidad

$$w_n = \frac{F}{m} = \frac{e'}{m} vB \quad (72.1)$$

(véase la fórmula (43.3); el ángulo entre v y B es recto). Esta aceleración varía solamente la dirección de la velocidad, cuya magnitud

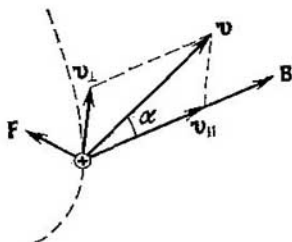


Fig. 72.2.

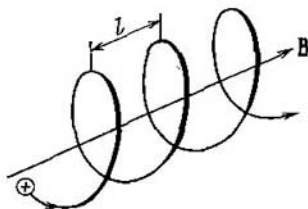


Fig. 72.1.

permanece invariable. Por consiguiente, la aceleración (72.1) también será constante por su magnitud. En estas condiciones la partícula cargada se mueve uniformemente siguiendo una circunferencia, cuyo radio está determinado por la relación $w_n = v^2/R$. Sustituyendo aquí el valor de (72.1) para w_n y despejando R en la ecuación resultante, obtenemos

$$R = \frac{m}{e'} \frac{v}{B}. \quad (72.2)$$

Así, en el caso de una partícula cargada que se mueve en un campo magnético homogéneo perpendicular al plano en que tiene lugar el movimiento, la trayectoria de la partícula es una circunferencia. El radio de esta circunferencia depende de la velocidad de la partícula, de la inducción magnética del campo y de la razón de la carga e' de la partícula a su masa m . La relación e'/m se llama *carga específica*.

Hallemos el tiempo T que tarda la partícula en dar una vuelta. Para esto dividimos la longitud de la circunferencia $2\pi R$ por la velocidad de la partícula v . Como resultado obtenemos

$$T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{1}{B}. \quad (72.3)$$

De (72.3) se sigue que el período de revolución de la partícula no depende de su velocidad, sino que está determinado únicamente por la carga específica de la partícula y por la inducción magnética del campo.

Veamos el carácter que tiene el movimiento de la partícula cargada en el caso en que su velocidad forma con la dirección del campo magnético homogéneo un ángulo α distinto del recto. Descomponemos el vector v en dos componentes: v_{\perp} , perpendicular a B , y v_{\parallel} , paralelo a B (fig. 72.1). Los módulos de estos componentes son:

$$v_{\perp} = v \sin \alpha, \quad v_{\parallel} = v \cos \alpha.$$

La fuerza magnética tiene el módulo

$$F = e'vB \sin \alpha = e'v_{\perp}B$$

y se encuentra en un plano perpendicular a B . La aceleración creada por esta fuerza es normal al componente v_{\perp} . La componente de la fuerza magnética en la dirección B es nula; por lo tanto, esta fuerza no puede influir en la magnitud v_{\parallel} . De este modo el movimiento de la partícula se puede representar como la superposición de dos movimientos: uno, de traslación a lo largo de la dirección B con la velocidad constante $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ y otro, uniforme, siguiendo una circunferencia en un plano perpendicular al vector B . El radio de esta circunferencia se determina por la fórmula (72.2) sustituyendo v por $v_{\perp} = v \sin \alpha$. La trayectoria del movimiento es una línea helicoidal, cuyo eje coincide con la dirección B (fig. 72.2). El paso l de la línea helicoidal se puede hallar multiplicando v_{\parallel} por el período de revolución T , determinado por la fórmula (72.3):

$$l = v_{\parallel}T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{1}{B} v \cos \alpha. \quad (72.4)$$

El sentido en que se arrolla la trayectoria depende del signo de la carga de la partícula. Si la carga es positiva, la trayectoria se arrolla en sentido antihorario. La trayectoria que sigue una partícula con carga negativa se arrolla en el sentido horario (suponiendo que miramos la trayectoria a lo largo de la dirección B ; la partícula se aleja de nosotros cuando $\alpha < \pi/2$ y se acerca a nosotros cuando $\alpha > \pi/2$).

§ 73. Desviación de las partículas con carga en movimiento por los campos eléctricos y magnéticos

Consideremos un haz estrecho de partículas cargadas iguales (por ejemplo, de electrones) que, en ausencia de los campos, incide sobre una pantalla perpendicular a él en el punto O (fig. 73.1). Determinemos el desplazamiento de la traza del haz producido por un campo eléctrico homogéneo perpendicular a dicho haz que actúa en un espacio de longitud l_1 . Sea la velocidad inicial de las partículas igual a v_0 . Al entrar en la región del campo cada partícula se moverá con la aceleración $w_{\perp} = (e'/m) E$ (e'/m es la carga específica de una partícula), de magnitud y dirección constante, perpendicular

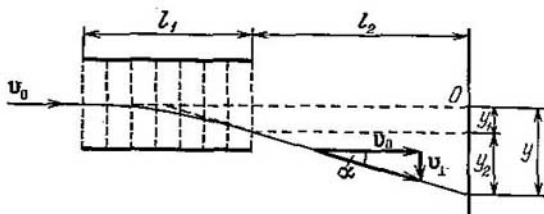


Fig. 73.1.

a v_0 . El movimiento bajo la acción del campo dura el tiempo $t = l_1/v_0$. En este tiempo las partículas se desplazan la distancia

$$y_1 = \frac{1}{2} w_{\perp} t^2 = \frac{1}{2} \frac{e'}{m} E \frac{l_1^2}{v_0^2} \quad (73.1)$$

y adquieren la velocidad componente, perpendicular a v_0 ,

$$v_{\perp} = w_{\perp} t = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0}.$$

Luego las partículas siguen una trayectoria rectilínea, cuya dirección que forma con el vector v_0 el ángulo α , se determina por la correlación

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_0} = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0^2}. \quad (73.2)$$

Como resultado, además del desplazamiento (73.1), el haz recibe el desplazamiento

$$y_2 = l_2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{e'}{m} E \frac{l_1 l_2}{v_0^2},$$

donde l_2 es la distancia desde el límite de la región en que existe el campo, hasta la pantalla.

De este modo, el desplazamiento de la traza del haz respecto del punto O será

$$y = y_1 + y_2 = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0^2} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right). \quad (73.3)$$

Tomando en consideración la fórmula (73.2), a la expresión del desplazamiento se le puede dar la forma

$$y = \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right) \operatorname{tg} \alpha.$$

De aquí se infiere que las partículas, al salir del campo, lo hacen como si partieran del centro del condensador que crea dicho campo, bajo el ángulo α que determina la fórmula (73.2).

Supongamos ahora que en un espacio de longitud l_1 del camino recorrido por las partículas se inserta un campo magnético homogéneo perpendicular a la velocidad v_0 (fig. 73.2; el campo es perpendicular al plano del dibujo y la región abarcada por él está rodeada

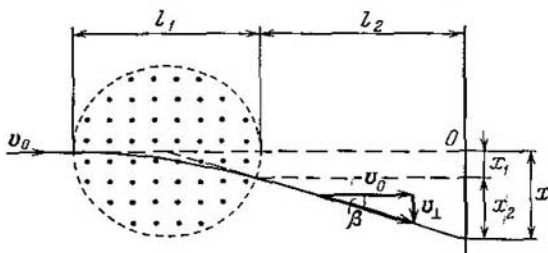


Fig. 73.2.

por la circunferencia de trazos). Bajo la acción del campo cada partícula recibe la aceleración $w_{\perp} = (e'/m) v_0 B$, de magnitud constante. Limitándonos al caso en que la desviación del haz por el campo es pequeña, se puede considerar que la aceleración w_{\perp} tiene dirección constante y es perpendicular a v_0 . Entonces, para calcular el desplazamiento se pueden aplicar las fórmulas antes obtenidas, sustituyendo en ellas la aceleración $w_{\perp} = (e'/m) E$ por el valor $w_{\perp} = (e'/m) v_0 B$. Como resultado, para el desplazamiento, que ahora designaremos con la letra x , se obtiene la expresión

$$x = \frac{e'}{m} B \frac{l_1}{v_0} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right). \quad (73.4)$$

El ángulo en que el haz es desviado por el campo magnético se determina por la relación

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{e'}{m} B \frac{l_1}{v_0}. \quad (73.5)$$

Teniendo en cuenta (73.5), la fórmula (73.4) se puede representar en la forma

$$x = \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right) \operatorname{tg} \beta.$$

Por consiguiente, cuando las desviaciones son pequeñas, las partículas, al salir del campo, lo hacen como si partieran del centro de la región en que existe el campo desviador, bajo un ángulo β , cuya magnitud se determina por la expresión (73.5).

Por las fórmulas (73.3) y (73.4) se ve que tanto la desviación producida por el campo eléctrico como la debida al campo magnético es proporcional a la carga específica de las partículas.

La desviación de un haz de electrones por un campo eléctrico o magnético se utiliza en los tubos catódicos. Dentro del tubo con

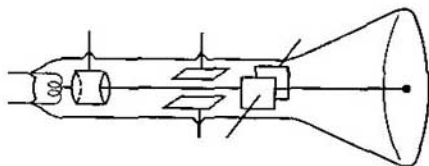


Fig. 73.3.

desviación eléctrica (fig. 73.3), además del llamado proyector de electrones que crea el estrecho haz de electrones rápidos (haz electrónico), se encuentran dos pares de placas de desviación perpendiculares entre sí. Haciendo llegar tensión a cualquiera de los pares de placas se puede suscitar un desplazamiento del haz electrónico, proporcional a ella, en dirección perpendicular a dichas placas. La pantalla del tubo se recubre con un compuesto fluorescente. Por eso en el punto de incidencia del haz electrónico sobre la pantalla surge una macha luminosa.

Los tubos catódicos se emplean en los oscilógrafos, aparatos que permiten estudiar procesos de evolución rápida. A un par de placas de desviación se hace llegar una tensión variable linealmente con el tiempo (tensión de exploración), y al otro par, la tensión que se investiga. En virtud de que la inercia del haz electrónico es insignificante, su desviación sigue prácticamente sin retraso las variaciones de las tensiones en los dos pares de placas de desviación, y el haz traza en la pantalla del oscilógrafo la gráfica de la dependencia de la tensión que se estudia, respecto del tiempo. Muchas magnitudes no eléctricas se pueden transformar, por medio de dispositivos especiales (captadores), en tensiones eléctricas. Por eso, valiéndose de oscilógrafos se estudian los procesos más diversos.

El tubo catódico es parte imprescindible de los aparatos de televisión. En televisión se suelen utilizar tubos con control magnético del haz electrónico. En estos tubos, en vez de las placas de desviación, hay dos sistemas de bobinas, perpendiculares entre sí y colocados fuera del tubo, los cuales crean cada uno un campo magnético perpendicular al haz. Las variaciones de la corriente en las bobinas hacen que se desplace la macha luminosa que crea el haz electrónico en la pantalla.

§ 74. Determinación de la carga y la masa del electrón

La carga específica del electrón (es decir, la relación e/m) la midió por vez primera J. J. Thomson, en 1897, valiéndose del tubo de descarga representado en la fig. 74.1. El haz electrónico que salía por el orificio A del ánodo (rayos catódicos; véase el § 85) pasaba entre las placas de un condensador plano e incidía sobre una pantalla fluorescente, creando en ella una macha luminosa. Haciendo llegar tensión

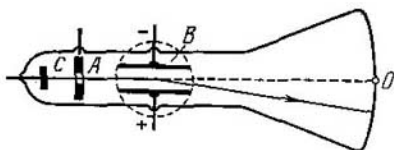


Fig. 74.1.

a las placas del condensador se podía influir sobre el haz con un campo eléctrico prácticamente homogéneo. El tubo se ponía entre los polos de un electroimán, con cuya ayuda se podía crear, en esta misma parte de la trayectoria de los electrones, un campo magnético homogéneo perpendicular al eléctrico (la región de este campo magnético está rodeada en la fig. 74.1 por una circunferencia de trazos). Cuando los campos estaban desconectados, el haz incidía sobre la pantalla en el punto O . Cada uno de los campos por separado producía un desplazamiento del haz en dirección vertical. Las magnitudes de los desplazamientos se determinan por medio de las fórmulas (73.3) y (73.4) obtenidas en el párrafo anterior.

Después de conectar el campo magnético y de medir el desplazamiento de la traza del haz que él producía

$$x = \frac{e}{m} B \frac{l_1}{v_0} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \quad (74.1)$$

Thomson conectaba también el campo eléctrico y elegía su valor de tal modo que el haz volviera a incidir sobre el punto O . En este caso los campos eléctrico y magnético actuaban sobre los electrones

del haz simultáneamente y con fuerzas de igual magnitud, pero de sentidos opuestos. Al ocurrir esto se cumplía la condición

$$eE = ev_0B. \quad (74.2)$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (74.1) y (74.2), Thomson calculó e/m y v_0 .

V. Busch utilizó para determinar la carga específica de los electrones el método del enfoque magnético. La esencia de este método consiste en lo siguiente. Supongamos que a un campo magnético homogéneo llega de cierto punto un haz de electrones de igual velocidad v , ligeramente divergente y simétrico con respecto a la dirección

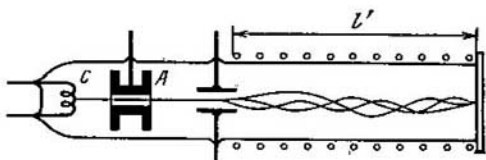


Fig. 74.2.

del campo. Las direcciones que siguen los electrones forman con la dirección B ángulos α pequeños. En el § 72 se explicó que en este caso los electrones se mueven por trayectorias helicoidales efectuando en igual tiempo

$$T = 2\pi \frac{m}{e} \frac{1}{B}$$

una vuelta completa y desplazándose a lo largo de la dirección del campo la distancia l ,

$$l = v \cos \alpha \cdot T. \quad (74.3)$$

En virtud de la pequeñez de los ángulos α , las distancias (74.3) resultan ser prácticamente iguales para los distintos electrones e iguales a vT (para ángulos pequeños $\cos \alpha \approx 1$). Por consiguiente, el haz ligeramente divergente se enfoca en un punto que se encuentra del de salida de los electrones a la distancia

$$l = vT = 2\pi \frac{m}{e} \frac{v}{B}. \quad (74.4)$$

En el experimento de Busch los electrones emitidos por el cátodo incandescente K (fig. 74.2) se aceleran al pasar por la diferencia de potencial U aplicada entre el cátodo y el ánodo A . Como resultado adquieren la velocidad v , cuyo valor se puede hallar valiéndose de la

relación

$$eU = \frac{mv^2}{2}. \quad (74.5)$$

Saliendo después por el orificio que hay en el ánodo, los electrones forman un haz estrecho dirigido a lo largo del eje de un tubo evacuado colocado dentro de un solenoide. A la entrada del solenoide se encuentra un condensador al que se hace llegar una tensión variable. El campo que crea el condensador desvía, del eje del aparato, los electrones del haz ángulos α pequeños variables con el tiempo. Esto hace que el haz se «arremoline» y que los electrones empiecen a moverse por distintas trayectorias helicoidales. A la salida del solenoide se coloca una pantalla fluorescente. Si la inducción magnética B se elige de tal modo que la distancia l' desde el condensador hasta la pantalla satisfaga la condición

$$l' = nl \quad (74.6)$$

(l es el paso de la hélice, y n , n número entero), el punto de intersección de las trayectorias de los electrones caerá sobre la pantalla, el haz electrónico estará enfocado en este punto y producirá una nítida mancha luminosa. Si la condición (74.6) no se cumple, la mancha luminosa sobre la pantalla estará difuminada. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (74.4), (74.5) y (74.6) se pueden hallar e/m y v .

El valor más exacto de la carga específica del electrón, establecido teniendo en cuenta los resultados obtenidos por los distintos métodos, es

$$\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg} = 5,27 \cdot 10^{17} \text{ unid. CGSE/g.} \quad (74.7)$$

La magnitud (74.7) da la razón de la carga del electrón a su masa en reposo m . En los experimentos de Thomson, Busch y otros análogos se determinaba la razón de la carga a la masa relativista

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (74.8)$$

En las experiencias de Thomson la velocidad de los electrones era aproximadamente de 0,1 c . A esta velocidad la masa relativista es un 0,5% mayor que la masa en reposo. En experimentos posteriores la velocidad de los electrones alcanzó valores muy grandes. En todos los casos se puso de manifiesto una disminución de los valores medidos de e/m al crecer v , que se efectúa en completo acuerdo con la fórmula (74.8).

La carga del electrón fue determinada muy exactamente por R. A. Millikan en 1909. En el espacio cerrado entre las dos placas horizontalmente dispuestas de un condensador (fig. 74.3) introducía

Millikan gotas pequeñísimas de aceite. Al ser pulverizadas, las gotitas se electrizaban y se podían mantener suspendidas e inmóviles eligiendo la magnitud y el signo de la tensión en el condensador. El equilibrio se producía con la condición de que

$$P' = e'E; \quad (74.9)$$

aquí e' es la carga de la gotita y P' , la resultante de la fuerza de la gravedad y de la fuerza de Arquímedes,

$$P' = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) g \quad (74.10)$$

(ρ es la densidad de la gotita; r , su radio, y ρ_0 , la densidad del aire).

Por las fórmulas (74.9) y (74.10) y conociendo r , se podía hallar e . Para determinar el radio se medía la velocidad v_0 de la caída libre uniforme de la gotita en ausencia del campo. El movimiento uniforme de la gotita se establece a condición de que la fuerza P' se equilibre con la fuerza de resistencia $F = 6\pi\eta r v$ (véase la fórmula (78.1) del tomo 1°; η es la viscosidad del aire):

$$P' = 6\pi\eta r v_0. \quad (74.11)$$

El movimiento de la gotita se observaba con un microscopio. Para medir v_0 se determinaba el tiempo que tardaba la gotita en recorrer la distancia entre dos hilos distinguibles en el campo visual del microscopio.

Fijar exactamente el equilibrio de la gotita es muy difícil. Por eso, en vez del campo correspondiente a la condición (74.9), se conectaba un campo bajo cuya acción la gotita empezaba a moverse con pequeña velocidad hacia arriba. La velocidad estacionaria de elevación v_E se determinaba partiendo de la condición de que la suma de las fuerzas P' y $6\pi\eta r v$ equilibra la fuerza $e'E$:

$$P' + 6\pi\eta r v_E = e'E. \quad (74.12)$$

Eliminando P' y r en las ecuaciones (74.10), (74.11) y (74.12) obtenemos la expresión de e' :

$$e' = 9\pi \sqrt{\frac{2\eta^3 v_0}{(\rho - \rho_0) g}} \frac{v_0 + v_E}{E}$$

(en esta fórmula introdujo Millikan una corrección que tiene en cuenta que las dimensiones de las gotitas eran comparables con el recorrido libre de las moléculas del aire).

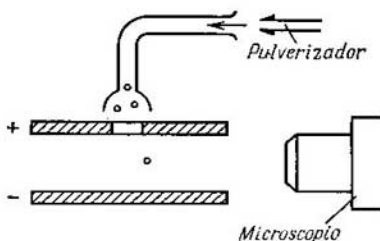


Fig. 74.3.

Así, midiendo la velocidad de caída libre v_0 de la gotita y su velocidad de elevación v_E en un campo eléctrico E conocido, era posible hallar la carga e' de la gotita. Al medir la velocidad v_E para un valor determinado de la carga e' , Millikan ionizaba el aire irradiando el espacio entre las placas con rayos X. Algunos iones se adherían a la gotita y variaban su carga, con lo que la velocidad v_E también cambiaba. Después de medir el nuevo valor de la velocidad, volvía a irradiar el espacio entre las placas y así sucesivamente.

Las variaciones de la carga de la gotita $\Delta e'$ y la misma carga e' resultaban ser cada vez múltiplos enteros de una misma magnitud e . Por lo tanto quedó demostrado experimentalmente el carácter discreto de la carga eléctrica, es decir, el hecho de que toda carga se compone de cargas elementales de igual magnitud.

El valor de la carga elemental establecido teniendo en cuenta las mediciones de Millikan y los datos obtenidos por otros métodos es

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ unid. CGSE.} \quad (74.13)$$

Esta misma magnitud tiene la carga del electrón.

De (74.7) y (74.13) se obtiene para la masa en reposo del electrón el valor

$$m = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg} = 0,91 \cdot 10^{-27} \text{ g,} \quad (74.14)$$

aproximadamente 1840 veces menor que la masa del átomo más ligero, el de hidrógeno.

En el descubrimiento de la naturaleza discreta de la electricidad desempeñaron un gran papel las leyes de la electrólisis, establecidas empíricamente por M. Faraday en 1836. Según estas leyes la masa m de substancia que se desprende al pasar la corriente por el electrólito ¹⁾ es proporcional a la carga q transportada por la corriente:

$$m = \frac{1}{F} \frac{M}{z} q. \quad (74.15)$$

Aquí M es la masa de un mol de la substancia que se desprende; z , la valencia de esta substancia, y F , la constante o número de Faraday,

$$F = 96,5 \cdot 10^3 \text{ C/mol.} \quad (74.16)$$

Dividiendo los dos miembros de la igualdad (74.15) por la masa del ion, obtenemos

$$N = \frac{1}{F} \frac{N_A}{z} q$$

¹⁾ Se llaman electrólitos las soluciones de sales, álcalis o ácidos en agua y algunos otros líquidos, y también las sales fundidas que en estado sólido son cristales iónicos. En los electrólitos, cuando la corriente pasa por ellos, se producen transformaciones químicas. Estas substancias se llaman *conductores de segunda especie*, para diferenciarlas de los *conductores de primera especie*, en los cuales el paso de la corriente no va acompañado de transformaciones químicas.

(N_A es el número de Avogadro, y N , el número de iones que hay en la masa m). De aquí se obtiene para la carga de un ion el valor

$$e' = \frac{q}{N} = \frac{F}{N_A} z.$$

Por consiguiente, la carga del ion resulta ser un múltiplo entero de la magnitud

$$e = \frac{F}{N_A}, \quad (74.17)$$

que es la carga elemental.

De este modo, del análisis de las leyes de la electrólisis se infiere el carácter discreto de las cargas que pueden tener los iones en los electrólitos.

La sustitución en (74.17) del valor de F (74.16) y del valor de N_A hallado en los experimentos de J. B. Perrin (véase el § 101 del tomo 1°) da para e una magnitud que concuerda bien con el valor hallado por Millikan.

Como la exactitud con que se determina la constante de Faraday F y la exactitud del valor de e obtenida por Millikan es mucho mayor que la exactitud de los experimentos de Perrin para hallar N_A , la relación (74.17) se ha utilizado para determinar el número de Avogadro, tomando el valor de F hallado en los experimentos de electrólisis y el valor de e obtenido por Millikan.

§ 75. Determinación de la carga específica de los iones. Espectrógrafos de masa

Los métodos para determinar la carga específica descritos en el párrafo anterior son válidos en el caso de que todas las partículas del haz tengan la misma velocidad. Todos los electrones que forman el haz son acelerados por la misma diferencia de potencial, aplicada entre el cátodo, del cual se desprenden, y el ánodo; por eso la dispersión de los valores de las velocidades de los electrones en el haz es muy pequeña. Si esto no fuera así, el haz electrónico daría en la pantalla una mancha muy difuminada y las mediciones serían imposibles.

Los iones se forman a expensas de la ionización de las moléculas de un gas que tiene lugar en un volumen de extensión apreciable. Apareciendo en distintos puntos de este volumen, los iones pasan después por diferencias de potencial no iguales, por lo que sus velocidades suelen ser distintas. A esto se debe que los métodos con que se determinó la carga específica de los electrones no sean aplicables a los iones. En 1907 ideó Thomson el «método de las parábolas», que permitió eludir las dificultades antes indicadas.

En el experimento de Thomson un haz estrecho de iones posi-

tivos atravesaba una región, en la cual actuaban simultáneamente sobre él un campo eléctrico y otro magnético paralelos entre sí (fig. 75.1). Ambos campos eran prácticamente homogéneos y formaban con la dirección inicial del haz un ángulo recto. Estos campos hacían que se desviasen los iones: el magnético, en la dirección del eje x , y el eléctrico, a lo largo del eje y . Según las fórmulas (73.4) y (73.3) estas desviaciones son:

$$x = \frac{e'}{m} B \frac{l_1}{v} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \quad y = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v^2} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \quad (75.1)$$

donde v es la velocidad de un ion dado, cuya carga específica es e'/m ; l_1 , la extensión de la región, en la cual los campos actúan sobre

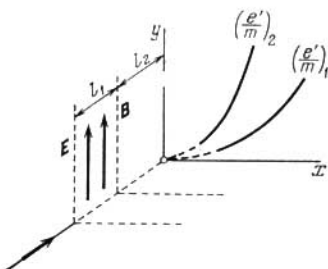


Fig. 75.1.

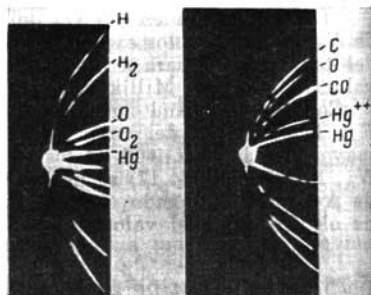


Fig. 75.2.

el haz, y l_2 , la distancia desde el límite de esta región hasta la placa fotográfica que registra los iones que inciden sobre ella.

Las expresiones (75.1) son las coordenadas del punto de la placa en que incide el ion que tiene los valores dados de e'/m y de la velocidad v . Los iones con igual carga específica, pero con velocidades distintas, incidían en puntos diferentes de la placa. Eliminando de las fórmulas (75.1) la velocidad v , obtenemos la ecuación de la curva, a lo largo de la cual se encontraban las huellas de los iones que tenían el mismo valor de e'/m :

$$y = \frac{E}{B^2 l_1 (0,5 l_1 + l_2)} \frac{m}{e'} x^2. \quad (75.2)$$

De (75.2) se sigue que los iones con igual e'/m y distinta v dejaban sobre la placa una traza en forma de parábola. Los iones con distintas e'/m se disponían a lo largo de parábolas diferentes. Conociendo los parámetros del aparato (es decir, E , B , l_1 y l_2) y midiendo los desplazamientos x e y , se podía, valiéndose de la fórmula (75.2),

hallar la carga específica de los iones correspondientes a cada parábola. Cambiando el sentido de uno de los campos, la coordenada correspondiente trocaba su signo por el contrario, de manera que se obtenían parábolas simétricas a las iniciales. Dividiendo por la mitad la distancia entre los puntos análogos de las parábolas simétricas era posible hallar x e y . La traza que dejaba en la placa el haz estando desconectados los campos daba el origen de coordenadas. En la fig. 75.2 se muestran las primeras parábolas obtenidas por Thomson.

Haciendo experimentos con neón químicamente puro, Thomson descubrió que este gas daba dos parábolas, correspondientes a masas

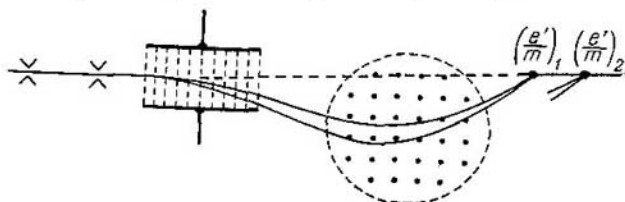


Fig. 75.3.

atómicas relativas iguales a 20 y 22. Este resultado sirvió de base para suponer que existen dos variedades químicamente indistinguibles de átomos de neón (según la terminología moderna, dos *isótopos* del neón). La demostración de la realidad de esta suposición la hizo F. W. Aston, que perfeccionó el método para determinar la carga específica de los iones.

El aparato de Aston, llamado por él *espectrógrafo de masas*, tenía la estructura siguiente (fig. 75.3). Un haz de iones, separado por un sistema de rendijas, se hacía pasar sucesivamente a través de un campo eléctrico y otro magnético dirigidos de tal forma que desviaban los iones en sentidos opuestos. Al pasar por el campo eléctrico, los iones con un valor dado de e'/m se desviaban tanto más fuertemente cuanto menor era la velocidad con que se movían. Por eso los iones salían del campo eléctrico formando un haz divergente. En el campo magnético las trayectorias de los iones también se torcían tanto más cuanto menor era su velocidad. Y como los sentidos en que los campos desviaban los iones eran opuestos, después de salir del campo magnético los iones formaban un haz convergente en un punto.

Los iones con otros valores de la carga específica se enfocaban en otros puntos (en la fig. 75.3 sólo se muestran las trayectorias de los iones para un valor dado de e'/m). El cálculo correspondiente da que los puntos en que convergen los haces formados por los iones

con distintos valores de e'/m se encuentran aproximadamente en una recta (en la figura se representa por una línea de trazos). Colocando a lo largo de esta recta una placa fotográfica, Aston obtenía en ella una serie de rayas, correspondientes cada una a un valor determinado de e'/m . La semejanza de la imagen que se obtenía en esta

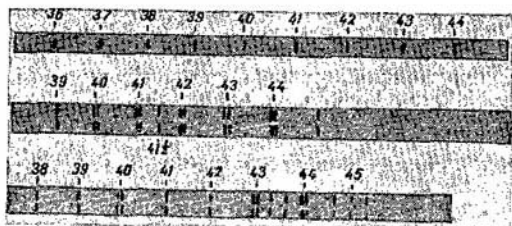


Fig. 75.4.

placa con la fotografía de un espectro de rayas fue la causa de que Aston le diera el nombre de espectrograma de masas, y a su aparato, el de espectrógrafo de masas. En la fig. 75.4 se dan los espectrogramas de masas obtenidos por Aston (frente a las rayas se indican los números másicos de los iones).

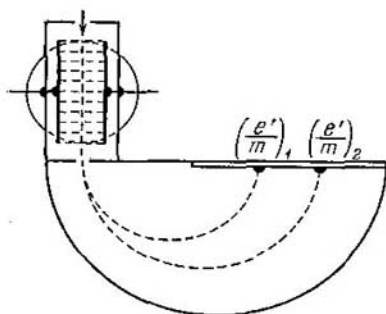


Fig. 75.5.

K. T. Bainbridge creó un aparato de otro tipo. En el espectrógrafo de Bainbridge (fig. 75.5) el haz de iones pasa al principio a través del llamado selector (o filtro) de velocidades, que separa del haz los iones con un valor determinado de la velocidad. En el selector se someten los iones a la acción simultánea de un campo eléctrico y otro magnético perpendiculares entre sí, los cuales desvían los iones

en sentidos opuestos. Por la rendija de salida del selector sólo pasan aquellos iones, para los cuales las acciones de los campos eléctrico y magnético se compensan mutuamente. Esto ocurre a condición de que $e'E = e'vB$. Por consiguiente, las velocidades de los iones salidos del selector, independientemente de su masa y carga, tienen el mismo valor, $v = E/B$.

Al salir del selector los iones entran en la región de un campo magnético homogéneo de inducción B' , perpendicular a su velocidad. En este campo los iones se mueven siguiendo circunferencias, cuyos radios dependen de e'/m :

$$R = \frac{m}{e'} \frac{v}{B'}$$

(véase (72.2)). Después de describir una semicircunferencia, los iones inciden sobre una placa fotográfica a distancias de la rendija iguales a $2R$. Por lo tanto, los iones de cada especie (con un valor determinado de e'/m) dejan en la placa una huella en forma de raya estrecha. Conociendo los parámetros del aparato se pueden calcular las cargas específicas de los iones. Como estas cargas son múltiplos enteros de la carga elemental e , por los valores hallados de e'/m se pueden determinar las masas de los iones.

En la actualidad existen muchos tipos de espectrógrafos de masas perfeccionados. También se han creado aparatos en los que los iones no se registran en una placa fotográfica, sino por medio de un dispositivo eléctrico. Estos últimos se denominan *espectrómetros de masas*.

§ 76. Aceleradores de partículas con carga

En la física del núcleo atómico y de las partículas elementales desempeñan un gran papel los experimentos en que se utilizan haces de partículas cargadas de altas energías. Los dispositivos que se emplean para obtener estos haces se llaman *aceleradores de partículas con carga*. Existen muchos tipos de dispositivos de esta clase. Vamos a estudiar los principios de funcionamiento de algunos de ellos.

Generador de Van de Graaff. En 1929 propuso Van de Graaff la construcción de un generador electrostático basado en que las cargas excesivas se sitúan en la superficie externa del conductor. El esquema de este generador se muestra en la fig. 76.1. Una esfera metálica hueca, llamada conductor, descansa sobre una columna aislada. Dentro de la esfera se introduce una cinta sin fin móvil, de seda o de material cauchotado, que pasa sobre una polea. En la base de la columna, junto a la cinta, hay un peine de agudas puntas de las cuales pasa a la cinta la carga excitada por un generador de tensión (GT) de varias decenas de kilovoltios. Dentro del conductor va montado un segundo peine, a cuyas puntas pasa la carga de la cinta. Este peine está unido con el conductor, de manera que la carga recogida de la cinta pasa inmediatamente a su superficie externa. A medida que aumentan las cargas en el conductor, su potencial aumenta hasta que la fuga de carga se haga igual a la carga que se le suministra. La fuga se produce fundamentalmente a expensas de la

ionización del gas que hay en las proximidades de la superficie del conductor. El paso de la corriente a través del gas debido a este fenómeno se llama **descarga por efecto corona** (véase el § 87). Para disminuir el efecto corona la superficie del conductor se rectifica cuidadosamente.

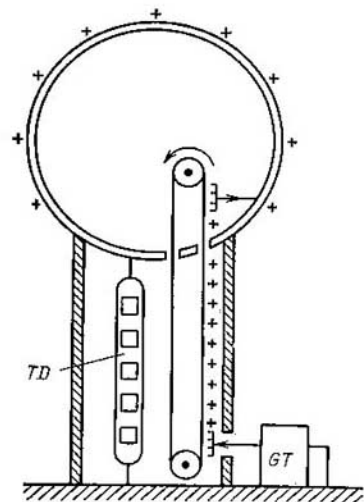


Fig. 76.1.

de descarga (*TD*), a cuyos electrodos se aplica la diferencia de potencial que se obtiene en el generador. A veces el generador de Van de Graaff se construye en forma de dos columnas iguales próximas entre sí, cuyos conductores se cargan con electricidades de signos contrarios. En este caso el tubo de descarga se intercala entre los conductores.

Advertimos que la cinta del generador, el conductor, el tubo de descarga y la tierra forman un circuito cerrado de corriente continua. Dentro del tubo se mueven las cargas bajo la acción del campo electrostático. El transporte de las cargas desde la tierra hasta el conductor lo efectúan las fuerzas exteriores, cuyo papel lo desempeñan las fuerzas mecánicas que mueven la cinta del generador.

Betrón. Se llama así un acelerador de electrones por inducción en el que la aceleración se efectúa por un campo eléctrico rotacional.

El potencial, hasta el cual se puede cargar el conductor, está limitado por el hecho de que cuando la intensidad del campo es de 3MV/m (30 kV/cm), en el aire a la presión atmosférica se produce la descarga. Para una esfera $E = \varphi/r$. Por eso, para obtener grandes diferencias de potencial hay que hacer un conductor de grandes dimensiones (de hasta 10 m de diámetro). La diferencia de potencial límite que se puede lograr prácticamente por medio del generador de Van de Graaff es de alrededor de 10 MV (10^7 V).

La aceleración de las partículas se efectúa en un tubo

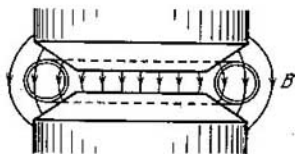


Fig. 76.2.

Este aparato consta de una cámara toroidal, en la cual se practica el vacío, situada entre los polos de un electroimán de forma especial (fig. 76.2). El devanado del electroimán se alimenta con corriente alterna, cuya frecuencia es del orden de 100 Hz. El campo magnético alternativo que se produce en estas condiciones cumple dos funciones: primera, crea el campo eléctrico rotacional que acelera los electrones y, segunda, mantiene los electrones en una órbita que coincide con el eje de la cámara.

Para mantener los electrones en una órbita de radio constante es necesario, a medida que crece su velocidad, aumentar la inducción magnética del campo (según la fórmula (72.2), el radio de la órbita es proporcional a v/B). Por eso, para la aceleración sólo se pueden utilizar los cuartos 2° y 4° de período de la corriente, al comienzo de los cuales es nula la corriente en el devanado del electroimán. De este modo, el betatrón funciona en régimen impulsional. Al principio del impulso se hace llegar a la cámara, procedente de un cañón electrónico, un haz de electrones que es arrastrado por el campo eléctrico rotacional y empieza a moverse por la órbita circular con velocidad cada vez mayor. Durante el tiempo en que aumenta el campo magnético ($\sim 10^{-3}$ s) los electrones dan hasta un millón de vueltas y adquieren una energía que puede alcanzar varios centenares de MeV. Con esta energía la velocidad de los electrones es casi igual a la velocidad de la luz c .

Para que el electrón que se acelera se mueva por una órbita circular de radio r_0 , entre la inducción magnética del campo en la órbita y dentro de ella debe cumplirse la sencilla relación que ahora vamos a deducir. El campo eléctrico rotacional está dirigido tangencialmente a la órbita, por la cual se mueve el electrón. Por lo tanto, la inducción del vector E por esta órbita es igual a $2\pi r_0 E$. Al mismo tiempo, de acuerdo con (71.12), la circulación del vector E es igual a $-(d\Phi/dt)$, donde Φ es el flujo magnético a través de la superficie abarcada por la órbita. El signo menos indica el sentido de E . A nosotros nos va a interesar únicamente el módulo de la intensidad del campo, por lo que omitimos el signo menos. Igualando ambas expresiones de la circulación, hallamos que

$$E = \frac{1}{2\pi r_0} \frac{d\Phi}{dt}.$$

El campo magnético es perpendicular al plano de la órbita. Por eso se puede suponer $\Phi = \pi r_0^2 \langle B \rangle$, siendo $\langle B \rangle$ el valor medio de la inducción magnética respecto del área de la órbita. Entonces tenemos

$$E = \frac{1}{2\pi r_0} \frac{d}{dt} (\pi r_0^2 \langle B \rangle) = \frac{r_0}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle. \quad (76.1)$$

Escribimos la ecuación relativista del movimiento del electrón por la órbita:

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = -e\mathbf{E} - e[\mathbf{v}\mathbf{B}_{\text{orb}}] \quad (76.2)$$

(B_{orb} es la inducción magnética del campo en la órbita).

La velocidad del electrón que se mueve por la circunferencia de radio r_0 se puede representar en la forma $\mathbf{v} = \omega r_0 \boldsymbol{\tau}$, donde ω es la velocidad, con que gira el radio vector del electrón, y $\boldsymbol{\tau}$, el versor tangencial a la órbita en el punto en que se encuentra el electrón. El vector \mathbf{E} se puede representar en la forma

$$\mathbf{E} = E\boldsymbol{\tau} = \frac{r_0}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle \cdot \boldsymbol{\tau}$$

(véase (76.1)). Finalmente, el producto $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ se puede representar en la forma $vB\mathbf{n} = \omega r_0 B\mathbf{n}$, donde \mathbf{n} es el versor normal a la órbita en el punto en que se halla el electrón. Teniendo en cuenta lo dicho, escribimos la ecuación (76.2) del modo siguiente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\omega r_0 \boldsymbol{\tau}}{\sqrt{1-\omega^2 r_0^2/c^2}} \right) = -\frac{er_0}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle \cdot \boldsymbol{\tau} - e\omega r_0 B_{\text{orb}} \cdot \mathbf{n}. \quad (76.3)$$

La derivada respecto del tiempo del versor $\boldsymbol{\tau}$ es $\dot{\boldsymbol{\tau}} = \omega \mathbf{n}$ (véase la fórmula (2.56) del tomo 1°; la velocidad angular de rotación del versor coincide con la velocidad angular del radio vector del electrón). Por consiguiente, tomando la diferencial del primer miembro de la ecuación (76.3), llegamos a la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2 r_0^2/c^2}} \right) \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2 r_0^2/c^2}} \omega \mathbf{n} = \\ = \frac{er_0}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle \cdot \boldsymbol{\tau} - e\omega r_0 B_{\text{orb}} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Igualando los factores de los versores análogos de los miembros primero y segundo, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2 r_0^2/c^2}} \right) = -\frac{er_0}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle, \quad (76.4)$$

$$\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2 r_0^2/c^2}} = -er_0 B_{\text{orb}}. \quad (76.5)$$

De (76.4) se deduce que

$$\frac{m\omega r_0}{\sqrt{1-\omega^2 r_0^2/c^2}} = -\frac{er_0}{2} \langle B \rangle \quad (76.6)$$

(ω y $\langle B \rangle$ al comienzo del impulso son nulas).

La comparación de las expresiones (76.5) y (76.6) conduce a la relación buscada:

$$B_{\text{orb}} = \frac{1}{2} \langle B \rangle.$$

Así, pues, para que el electrón se mueva todo el tiempo por la órbita circular, la inducción magnética en la órbita debe ser igual a la

mitad del valor medio de la inducción magnética dentro de la órbita. Esto se consigue haciendo las piezas polares en forma de conos truncados (véase la fig. 76.2).

Al final del ciclo de aceleración se conecta un campo magnético adicional que desvía los electrones acelerados de la órbita estacionaria y los dirige sobre un blanco especial situado dentro de la cámara. Al incidir en el blanco los electrones emiten una radiación electromagnética dura (rayos γ , rayos X).

Los betatrones se emplean principalmente en las investigaciones nucleares. Aceleradores pequeños, para energía de hasta 50 MeV, se utilizan en la industria como fuentes de rayos X duros para la detección de defectos en piezas de gran masa.

Ciclotrón. Como base del acelerador así llamado sirve la dependencia del período de revolución de una partícula cargada, en un campo magnético homogéneo, respecto de su velocidad (véase (72.3)). Este aparato consta de dos electrodos en forma de las dos mitades

de una caja cilíndrica baja (fig. 76.3) que, por su forma, reciben el nombre de electrodos en D o simplemente «des». Estas «des» se encuentran en una cámara de vacío, entre los polos de un gran electroimán. El campo que crea dicho electroimán es homogéneo y perpendicular al plano de las «des». A éstas se hace llegar la tensión alterna excitada por un generador de alta frecuencia.

En el espacio entre los electrodos en D (apertura aceleradora) se introduce una partícula con carga en el instante en que la tensión alcanza su valor máximo. La partícula es arrastrada por el campo eléctrico y atraída hacia el interior de una de las «des». El espacio dentro de la «de» es equipotencial, por lo que la partícula se encontrará en ella únicamente bajo la acción del campo magnético. En estas condiciones la partícula se mueve por una circunferencia, cuyo radio es proporcional a la velocidad de la partícula (véase (72.2)). La frecuencia con que varía la tensión entre las «des» se elige de tal forma que en el instante en que la partícula, después de recorrer una semicircunferencia, llega a la apertura, la diferencia de potencial entre ellas cambie de signo y alcance su valor de amplitud. Entonces la partícula volverá a acelerarse y penetrará en la segunda «de» con una energía dos veces mayor que aquella con que se movía por la primera «de». Teniendo mayor velocidad, la partícula se moverá en la segunda «de» por una circunferencia de radio mayor ($R \sim v$), pero el tiempo que tarda en recorrer la semicircunferencia

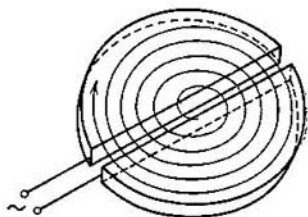


Fig. 76.3

