

# TEORÍA CLÁSICA DE LA CONDUCTIBILIDAD ELÉCTRICA DE LOS METALES

## § 77. Naturaleza de los portadores de corriente en los metales

Para esclarecer la naturaleza de los portadores de corriente en los metales se hicieron una serie de experimentos. Ante todo citaremos el experimento de C. Riecke efectuado en 1901. Este tomó tres cilindros, dos de cobre y uno de aluminio, cuidadosamente rectificadas por sus extremos. Después de pesados, estos cilindros se acoplaron sucesivamente así: uno de cobre, el de aluminio, y el otro de cobre. A través de este conductor compuesto se hizo pasar continuamente, durante un año, corriente en una misma dirección. Durante todo este tiempo pasó a través de los cilindros una carga igual a  $3,5 \cdot 10^6$  C. Una nueva pesada demostró que el paso de la corriente no había ejercido influencia alguna sobre el peso de los cilindros. Al analizar los extremos que habían estado en contacto, observándolos al microscopio, no se descubrió penetración de un metal en otro. Los resultados de este experimento evidenciaron que el transporte de carga en los metales no lo efectúan los átomos, sino ciertas partículas que entran en la composición de todos los metales. Estas partículas podían ser los electrones, descubiertos por Thomson en 1897.

Para identificar los portadores de corriente en los metales con los electrones había que determinar el signo y el valor numérico de la carga específica de los portadores. Los experimentos hechos con este fin se basaron en los razonamientos siguientes. Si en los metales existen partículas cargadas capaces de desplazarse, al frenar el conductor eléctrico estas partículas deberán seguir moviéndose por inercia durante cierto tiempo, lo que hará que en el conductor surja un impulso de corriente y que sea transportada cierta carga.

Supongamos que el conductor se mueve inicialmente con la velocidad  $v_0$  (fig. 77.1). Empezamos a frenarlo con la aceleración  $w$ . Al continuar moviéndose por inercia, los portadores de corriente adquieren, con respecto al conductor, la aceleración  $-w$ . Esta misma aceleración se puede comunicar a los portadores en un conductor en reposo creando en él un campo eléctrico de tensión  $E =$

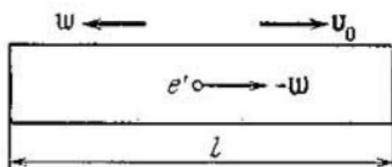


Fig. 77.1.

$= -mw/e'$ , es decir, aplicando a los extremos del conductor una diferencia de potencial

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \, dl = - \int_1^2 \frac{mw}{e'} \, dl = - \frac{mw l}{e'}$$

( $m$  y  $e'$  son la masa y la carga del portador, y  $l$ , la longitud del conductor). En este caso por el conductor pasará la corriente  $I = (\varphi_1 - \varphi_2)/R$ , donde  $R$  es la resistencia del conductor ( $I$  se considera positiva si la corriente pasa en el sentido del movimiento del conductor). Por consiguiente, durante un tiempo  $dt$  pasará a través de cada sección del conductor la carga

$$dq = I \, dt = - \frac{mw l}{e' R} \, dt = - \frac{m l}{e' R} \, dv.$$

La carga que pasa durante todo el tiempo que dura el frenado será

$$q = \int dq = - \int_{v_0}^0 \frac{m l}{e' R} \, dv = \frac{m}{e'} \frac{lv_0}{R} \quad (77.1)$$

(la carga es positiva si se traslada en el sentido del movimiento del conductor). De este modo, midiendo  $l$ ,  $v_0$  y  $R$ , así como la carga  $q$  que pasa por el circuito al frenar el conductor, se puede hallar la carga específica de los portadores. El sentido del impulso de la corriente da el signo de éstos.

El primer experimento con conductores en movimiento acelerado fue hecho en 1913 por L. I. Mandelshtam y N. D. Papalexí. Estos sometieron una bobina de alambre a vibraciones torsionales rápidas alrededor de su eje. A los extremos de la bobina conectaban un teléfono, en el que se oía el sonido condicionado por los impulsos de corriente.

El resultado cuantitativo lo obtuvieron Tolman y Stuart en 1916. Ellos hicieron girar una bobina de alambre de 500 m de longitud de tal modo, que la velocidad lineal de las espiras era de 300 m/s. Luego frenaban bruscamente la bobina y, por medio de un galvanómetro balístico, medían la carga que pasaba por el circuito durante el frenado. El valor obtenido de la carga específica de los portadores, calculado por la fórmula (77.1), era muy próximo a  $e/m$  para los electrones. De esta forma se demostró experimentalmente que los portadores de corriente en los metales son los electrones.

La corriente en los metales puede ser producida por una diferencia de potencial extremadamente pequeña. Esto da motivo para considerar que los portadores de corriente, los electrones, se desplazan por el metal libremente. A esta misma conclusión conducen también los resultados del experimento de Tolman y Stuart.

La existencia de electrones libres en los metales se puede explicar por el hecho de que, al formarse la red cristalina, de los átomos del metal se desprenden los electrones más débilmente ligados (los de

valencia), que se convierten en «propiedad colectiva» de todo el trozo de metal. Si de cada átomo se desprende un electrón, la concentración de electrones libres (es decir, su número  $n$  en la unidad de volumen) será igual a la cantidad de átomos por unidad de volumen. El número de átomos por unidad de volumen es igual a  $(\delta/M)N_A$ , donde  $\delta$  es la densidad del metal;  $M$ , la masa del mol, y  $N_A$ , el número de Avogadro. Para los metales los valores de  $\delta/M$  se encuentran entre los límites de  $2 \cdot 10^4$  mol/m<sup>3</sup> (para el potasio) a  $2 \cdot 10^6$  mol/m<sup>3</sup> (para el berilio). Por lo tanto, para la concentración de electrones libres (o, como se suelen llamar, electrones de conducción) se obtienen valores del orden de

$$n = 10^{28} \dots 10^{29} \text{ m}^{-3} \quad (10^{22} \dots 10^{23} \text{ cm}^{-3}). \quad (77.2)$$

## § 78. Teoría clásica elemental de los metales

Partiendo de las ideas sobre los electrones libres, P. Drude creó la teoría clásica de los metales, que más tarde fue perfeccionada por H. A. Lorentz. Drude supuso que los electrones de conducción se comportan en el metal de un modo semejante a las moléculas de un gas perfecto. En los intervalos entre las colisiones se mueven en completa libertad recorriendo en promedio cierto espacio  $\lambda$ . Es cierto que, a diferencia de las moléculas del gas, cuyo recorrido está determinado por las colisiones entre sí, los electrones chocan principalmente no unos con otros, sino con los iones que forman la red cristalina del metal. Estos choques hacen que se establezca el equilibrio térmico entre el gas electrónico y la red cristalina.

Suponiendo que al gas electrónico se pueden extender los resultados de la teoría cinética de los gases, la valoración de la velocidad media del movimiento térmico de los electrones se puede hacer por la fórmula

$$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/\pi m} \quad (78.1)$$

véase la fórmula (98.26) del tomo 1º). Para la temperatura ambiente ( $\sim 300$  K) el cálculo por esta fórmula conduce al valor siguiente:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{3,14 \cdot 0,91 \cdot 10^{-30}}} \approx 10^5 \text{ m/s.}$$

Cuando se conecta el campo, al movimiento térmico caótico, que se efectúa con la velocidad  $\langle v \rangle$ , se superpone el movimiento ordenado de los electrones, con cierta velocidad media  $\langle u \rangle$ . La magnitud de esta última velocidad es fácil de valorar partiendo de la fórmula

$$j = ne \langle u \rangle \quad (78.2)$$

(véase (34.4)). La densidad de corriente máxima que permiten las normas técnicas para los conductores de cobre es, aproximadamente, de  $10^7$  A/m<sup>2</sup> ( $10$  A/mm<sup>2</sup>). Tomando para  $n$  el valor  $10^{29}$  m<sup>-3</sup>, obtenemos

$$\langle u \rangle = \frac{j}{en} \approx \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{23}} \approx 10^{-3} \text{ m/s.}$$

De este modo, incluso si las densidades de corriente son muy grandes, la velocidad media del movimiento ordenado de las cargas ( $u$ ) es aproximadamente  $10^8$  veces menor que la velocidad media del movimiento térmico ( $v$ ). Por eso, al hacer los cálculos, el módulo de la velocidad resultante  $|v + u|$  se puede sustituir por el módulo de la velocidad del movimiento térmico  $|v|$ .

Hallemos la variación del valor medio de la energía cinética de los electrones producida por el campo. El cuadrado medio de la velocidad resultante es

$$\langle (v + u)^2 \rangle = \langle v^2 + 2vu + u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + 2\langle vu \rangle + \langle u^2 \rangle. \quad (78.3)$$

Dos sucesos, consistentes en que la velocidad del movimiento térmico del electrón toma el valor  $v$  y la velocidad del movimiento ordenado, el valor  $u$ , son independientes estadísticamente. Por lo tanto, de acuerdo con el teorema de la multiplicación de probabilidades (véase la fórmula (93.4) del tomo 1º),  $\langle vu \rangle = \langle v \rangle \langle u \rangle$ . Pero  $\langle v \rangle$  es igual a cero, de manera que en (78.3) el segundo sumando desaparece y la fórmula toma la forma

$$\langle (v + u)^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle u^2 \rangle.$$

De aquí se infiere que el movimiento ordenado aumenta la energía cinética de los electrones en un valor medio de

$$\langle \Delta \varepsilon_k \rangle = \frac{m \langle u^2 \rangle}{2}. \quad (78.4)$$

**Ley de Ohm.** Drude consideró que al chocar un electrón con un ion de la red cristalina, la energía adicional (78.4) adquirida por el electrón se transmite al ion y, por consiguiente, la velocidad  $u$  se anula a consecuencia del choque. Supongamos que el campo que acelera los electrones es homogéneo. Entonces, bajo la acción de este campo, el electrón recibe una aceleración constante igual a  $eE/m$ , y al final del recorrido la velocidad del movimiento ordenado alcanza en promedio el valor

$$u_{\text{máx}} = \frac{eE}{m} \tau, \quad (78.5)$$

donde  $\tau$  es el tiempo medio entre dos choques consecutivos del electrón con los iones de la red.

Drude no tenía en cuenta la distribución de los electrones por velocidades y atribuía a todos ellos un mismo valor  $v$  de la velocidad. En esta aproximación

$$\tau = \lambda/v$$

(recordamos que  $|v + u|$  es prácticamente igual a  $|v|$ ). Sustituyendo este valor de  $\tau$  en la fórmula (78.5), obtenemos

$$u_{\text{máx}} = \frac{eE\lambda}{mv}. \quad (78.6)$$

La velocidad  $u$  varía linealmente durante el tiempo que dura el recorrido. Por eso su valor medio durante el recorrido es igual a la mitad del máximo:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} u_{\text{máx}} = \frac{eE\lambda}{2mv}.$$

La sustitución de esta expresión en la fórmula (78.2), da

$$j = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E.$$

La densidad de la corriente resulta ser proporcional a la intensidad del campo. Por lo tanto, hemos llegado a la ley de Ohm. Según (34.3) el coeficiente de proporcionalidad entre  $j$  y  $E$  es la conductividad

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2mv}. \quad (78.7)$$

Si los electrones no chocaran con los iones de la red, la longitud del recorrido libre y, por consiguiente, la conductividad, serían magnitudes infinitas. De este modo, de acuerdo con las ideas clásicas, la resistencia eléctrica de los metales se debe a las colisiones de los electrones libres con los iones que se encuentran en los nudos de la red cristalina del metal.

**Ley de Joule—Lenz.** Al final del recorrido libre el electrón adquiere una energía cinética adicional, cuyo valor medio es

$$\langle \Delta \epsilon_n \rangle = \frac{mu_{\text{máx}}^2}{2} = \frac{e^2\lambda^2}{2mv^2} E^2, \quad (78.8)$$

(véanse las fórmulas (78.4) y (78.6)). Al chocar con un ion, el electrón, por la suposición hecha, transmite toda la energía adicional que ha adquirido a la red cristalina. Esta energía se invierte en aumentar la energía interna del metal y se manifiesta en su calentamiento. Cada electrón sufre en promedio cada segundo  $1/\tau = v/\lambda$  colisiones y cada vez comunica a la red la energía (78.8). Por lo tanto, en la unidad de volumen deberá desprenderse, por unidad de tiempo, el calor

$$Q_{\text{esp}} = n \frac{1}{\tau} \langle \Delta \epsilon_n \rangle = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E^2$$

( $n$  es el número de electrones de conducción que hay en la unidad de volumen).

La magnitud  $Q_{\text{esp}}$  no es más que la potencia térmica específica (véase el § 38). El factor de  $E^2$  coincidió con el valor (78.7) de  $\sigma$ . Pasando en la expresión  $\sigma E^2$  de  $\sigma$  y  $E$  a  $\rho$  y  $j$ , llegamos a la fórmula  $Q_{\text{esp}} = \rho j^2$ , que expresa la ley de Joule—Lenz (véase la fórmula (38.4)).

**Ley de Wiedemann—Franz.** Por experiencia sabemos que, además

de por su alta conductibilidad eléctrica, los metales se distinguen por su gran conductibilidad térmica. G. Wiedemann y R. Franz establecieron en 1853 una ley empírica según la cual la razón del coeficiente de conductibilidad térmica  $\kappa$  al coeficiente de conductibilidad eléctrica  $\sigma$  es aproximadamente igual para todos los metales y varía proporcionalmente a la temperatura absoluta. Por ejemplo, para el aluminio a la temperatura ambiente esta razón es igual a  $5,8 \cdot 10^{-6}$ , para el cobre,  $6,4 \cdot 10^{-6}$  y para el plomo  $7,0 \cdot 10^{-6} \text{ J} \cdot \Omega / (\text{s} \cdot \text{K})$ .

También tienen capacidad para conducir el calor los cristales no metálicos. Pero la conductibilidad térmica de los metales es mucho mayor que la de los dieléctricos. De esto se sigue que la transmisión del calor en los metales la efectúan, principalmente, no la red cristalina, sino los electrones libres. Considerando estos electrones como un gas monoatómico se puede tomar para el coeficiente de conductibilidad la expresión de la energía cinética de los gases:

$$\kappa = \frac{1}{3} nmv\lambda c_V$$

(véase la fórmula (131.7) del tomo 1º;  $\rho$  se ha sustituido por el producto  $nm$ , y en vez de  $\langle v \rangle$  se ha tomado  $v$ ). El calor específico de un gas monoatómico es  $c_V = \frac{3}{2} (R/M) = \frac{3}{2} (k/m)$ . Sustituyendo este valor en la expresión de  $\kappa$ , obtenemos

$$\kappa = \frac{1}{2} nk v \lambda.$$

Dividiendo  $\kappa$  por la expresión (78.7) de  $\sigma$  y sustituyendo luego  $\frac{1}{2}mv^2$  por  $\frac{3}{2}kT$ , llegamos a la relación

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{kmv^2}{e^2} = 3 \left( \frac{k}{e} \right)^2 T, \quad (78.9)$$

que expresa la ley de Wiedemann—Franz.

La sustitución en (78.9) de los valores numéricos de  $k$  y  $e$ , da

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 2,23 \cdot 10^{-8} T.$$

Con  $T = 300 \text{ K}$  se obtiene para  $\kappa/\sigma$  el valor  $6,7 \cdot 10^{-6} \text{ J} \cdot \Omega \cdot (\text{s} \cdot \text{K})$ , que concuerda bien con los datos experimentales (véanse los valores de  $\kappa/\sigma$  citados anteriormente para el Al, Cu y Pb). Sin embargo, más tarde se aclaró que esta coincidencia tan buena fue casual, ya que cuando Lorentz precisó los cálculos, tomando en consideración la distribución de los electrones por velocidades, para la relación  $\kappa/\sigma$  se obtuvo el valor  $2 (k/e)^2 T$ , que concuerda peor con los datos de la experiencia.

Así, la teoría clásica pudo explicar las leyes de Ohm y de Joule—Lenz y dio una explicación cualitativa de la ley de Wiedemann—Franz. Pero, al mismo tiempo esta teoría tropezó con dificultades importantes. De ellas, las principales son dos. De la fórmula (78.7) se infiere que la resistencia de los metales (es decir, la magnitud

recíproca de  $\sigma$ ) debe aumentar como la raíz cuadrada de  $T$ . En realidad no existe ningún fundamento para suponer que las magnitudes  $n$  y  $\lambda$  dependan de la temperatura. En cambio, la velocidad del movimiento térmico es proporcional a la raíz de  $T$ . Esta conclusión de la teoría contradice los datos experimentales, según los cuales la resistencia eléctrica de los metales aumenta proporcionalmente a la primera potencia de  $T$ , o sea, más de prisa que  $\sqrt{T}$  (véase la fórmula (34.5)).

La segunda dificultad de la teoría clásica consiste en que el gas electrónico debe tener una capacidad calorífica molar igual a  $\frac{3}{2}R$ . Añadiendo esta magnitud a la capacidad calorífica de la red, que es  $3R$  (véase la fórmula (114.1) del tomo 1º), se obtiene para la capacidad calorífica molar del metal el valor  $\frac{5}{2}R$ . De este modo, según la teoría electrónica clásica, la capacidad calorífica molar de los metales debe ser 1,5 veces mayor que la de los dieléctricos. En realidad, la capacidad calorífica de los metales no se diferencia apreciablemente de la de los cristales no metálicos. La explicación de este desacuerdo sólo pudo darla la teoría cuántica de los metales.

## § 79. Efecto Hall

Si una placa metálica, a lo largo de la cual pasa una corriente eléctrica continua, se sitúa en un campo magnético perpendicular a ella, entre las caras paralelas a las direcciones de la corriente y del campo surge una diferencia de potencial  $U_H = \varphi_1 - \varphi_2$  (fig. 79.1). Este fenómeno fue descubierto por E. H. Hall en 1879 y se denomina *efecto Hall* o *fenómeno galvanomagnético*.

La diferencia de potencial de Hall se determina por la expresión

$$U_H = RbjB. \quad (79.1)$$

Aquí  $b$  es la anchura de la placa;  $j$ , la densidad de la corriente;  $B$ , la inducción magnética del campo, y  $R$ , un coeficiente de proporcionalidad que recibe el nombre de *constante de Hall*.

El efecto Hall se explica fácilmente por la teoría electrónica. En ausencia del campo magnético la corriente en la placa está condicionada por el campo eléctrico  $E_0$  (fig. 79.2). Las superficies equipotenciales de este campo forman un sistema de planos paralelos perpendiculares al vector  $E_0$ . Dos de ellos se representan en la figura por medio de líneas rectas continuas. En todos los puntos de cada una de estas superficies, y, por consiguiente, en los puntos 1 y 2, el potencial es el mismo. Los portadores de corriente, es decir, electrones, tienen carga negativa, por lo que la velocidad de su movimiento ordenado  $u$  tiene sentido contrario al del vector densidad de la corriente  $j$ . Cuando se conecta el campo magnético, cada portador resulta sometido a la acción de una fuerza magnética  $F$ , dirigida a lo largo del lado  $b$  de la placa y cuyo módulo es

$$F = euB. \quad (79.2)$$

Como resultado surge una componente de la velocidad de los electrones dirigida hacia la cara superior (en la figura) de la placa. Junto

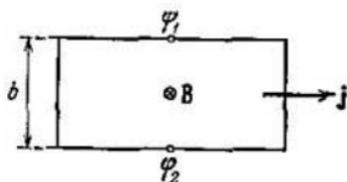


Fig. 79.1.

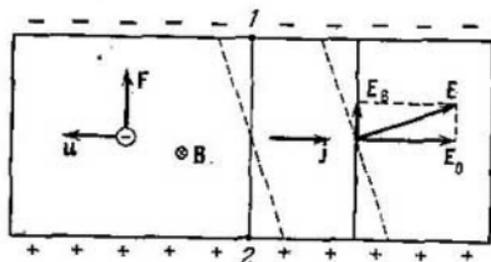


Fig. 79.2.

a esta cara se produce un exceso de cargas negativas y, respectivamente, junto a la cara inferior, un exceso de cargas positivas. Por consiguiente, aparece un campo eléctrico transversal  $E_B$  adicional. Cuando la intensidad de este campo alcanza un valor tal que su acción sobre las cargas equilibra la fuerza (79.2), se establece una distribución estacionaria de las cargas en dirección transversal. El valor correspondiente de  $E_B$  viene determinado por la condición  $eE_B = euB$ . De aquí

$$E_B = uB.$$

El campo  $E_B$  se suma al  $E_0$  en el campo resultante  $E$ . Las superficies equipotenciales son perpendiculares al vector intensidad del campo. Por lo tanto, giran y ocupan la posición representada con línea de trazos en la fig. 79.2. Los puntos 1 y 2, que antes se encontraban en una misma superficie equipotencial, tienen ahora potenciales distintos. Para hallar la tensión que surge entre estos puntos hay que multiplicar la distancia  $b$  entre ellos por la intensidad  $E_B$ :

$$U_H = bE_B = buB.$$

Expresamos  $u$  por medio de  $j$ ,  $n$  y  $e$ , de acuerdo con la fórmula  $j = neu$ . Como resultado obtenemos

$$U_H = \frac{1}{ne} bjB. \quad (79.3)$$

Esta última expresión coincide con (79.1) si se supone

$$R = \frac{1}{ne}. \quad (79.4)$$

De (79.4) se sigue que, midiendo la constante de Hall, se puede hallar la concentración de portadores de corriente en un metal dado (es decir, el número de portadores por unidad de volumen).

Una característica importante de la substancia es la movilidad que tienen en ella los portadores de corriente. Se llama movilidad de los portadores de corriente la velocidad media que éstos adquieren cuando la intensidad del campo eléctrico es igual a la unidad. Si en

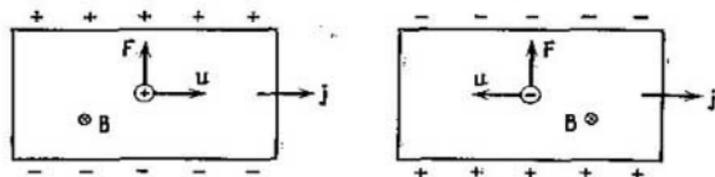


Fig. 79.3.

un campo de intensidad  $E$  adquieren los portadores la velocidad  $u$ , su movilidad  $u_0$  será

$$u_0 = \frac{u}{E}. \quad (79.5)$$

La movilidad se puede relacionar con la conductividad  $\sigma$  y con la concentración de portadores  $n$ . Para esto se divide la relación  $j = neu$  por la intensidad del campo  $E$ . Tomando en consideración que la razón de  $j$  a  $E$  da  $\sigma$ , y la de  $u$  a  $E$ , la movilidad, obtenemos

$$\sigma = neu_0. \quad (79.6)$$

Midiendo la constante de Hall  $R$  y la conductividad  $\sigma$ , con las fórmulas (79.4) y (79.6) se puede hallar la concentración y la movilidad de los portadores de corriente en la muestra correspondiente.

El efecto Hall se observa no sólo en los metales, sino también en los semiconductores, pudiéndose deducir por el signo del efecto la pertenencia del semiconductor al tipo  $n$  o  $p$ <sup>1)</sup>. En la fig. 79.3 se compara el efecto Hall de muestras con portadores positivos y con portadores negativos. El sentido de la fuerza magnética se invierte tanto cuando varía el sentido del movimiento de la carga como cuando cambia su signo. Por consiguiente, si la corriente y el campo tienen el mismo sentido, la fuerza magnética que actúa sobre los portadores positivos y negativos tiene también el mismo sentido. Por eso, en el caso de portadores positivos, el potencial de la cara superior (en la figura) es mayor que el de la inferior, y en el caso de portadores negativos, menor. De este modo, al determinar el signo de la diferencia de potencial de Hall se puede establecer el signo de los portadores de corriente.

Es curioso que en algunos metales el signo de  $U_H$  corresponde al de los portadores de corriente positivos. La explicación de esta anomalía la da la teoría cuántica.

<sup>1)</sup> En los semiconductores del tipo  $n$  el signo de los portadores de corriente es negativo, y en los del tipo  $p$ , positivo (véase el tomo 3º).

## CAPÍTULO XII

# CORRIENTE ELÉCTRICA EN LOS GASES

### § 80. Conductibilidad no autónoma y autónoma

El paso de la corriente eléctrica a través de los gases se llama *descarga en el gas*. Los gases en estado normal son aisladores, en ellos no hay portadores de corriente. Sólo cuando se crean unas condiciones especiales pueden aparecer en los gases dichos portadores (iones, electrones) y producirse la descarga eléctrica.

Los portadores de corriente pueden surgir en los gases como resultado de acciones exteriores no relacionadas con la existencia del campo eléctrico. En este caso se dice que la conductibilidad del gas *no es autónoma* o que es *mantenida*. La descarga mantenida puede producirse por calentamiento del gas (ionización térmica), por la acción de rayos ultravioletas o X y por la de radiaciones de sustancias radiactivas.

Si los portadores de carga aparecen como resultado de procesos condicionados por la creación de un campo eléctrico en el gas, la conductibilidad se llama *autónoma* o *automantenida*.

El carácter de la descarga en un gas depende de muchos factores: de la naturaleza química del gas y de los electrodos, de la temperatura y presión del gas, de la forma, dimensiones y disposición mutua de los electrodos, de la tensión que se les aplica, de la densidad y potencia de la corriente, etc. Por eso la descarga en un gas puede tomar formas muy diversas. Algunos tipos de descarga van acompañados de luminosidad y de efectos sonoros: chisporroteo, susurros o chasquido.

### § 81. Descarga en un gas no autónoma

Sea un gas que, encontrándose entre los electrodos (fig. 81.1), está sometido a la acción continua, y constante por su intensidad, de cualquier agente ionizante (por ejemplo, de los rayos X). La acción del ionizador hace que de ciertas moléculas del gas se desprenda uno o varios electrones y, a causa de esto, estas moléculas se convierten en iones cargados positivamente. A presiones no muy bajas, los electrones desprendidos son capturados generalmente por las moléculas neutras, que de este modo se transforman en iones cargados negativamente. El número de pares de iones producidos bajo la acción del ionizador en la unidad de volumen por unidad de tiempo lo designaremos por  $\Delta n_t$ .

Al mismo tiempo que el proceso de ionización, en el gas tiene lugar la *recombinación* de los iones, es decir, la neutralización de

los iones de signos distintos al encontrarse o la reunificación de un ion positivo y un electrón en una molécula neutra. La probabilidad de que se encuentren dos iones de signos distintos es proporcional tanto al número de iones positivos como al de iones negativos. Por lo tanto, la cantidad de pares de iones  $\Delta n_r$  que se recombinan por segundo en la unidad de volumen es proporcional al cuadrado del número de pares de iones  $n$  que hay en dicha unidad de volumen:

$$\Delta n_r = rn^2 \quad (81.1)$$

( $r$  es un coeficiente de proporcionalidad).

En estado de equilibrio el número de iones que surgen es igual al número de los que se recombinan, por consiguiente,

$$n_i = rn^2. \quad (81.2)$$

De aquí, para la concentración de iones (número de pares de iones por unidad de volumen), en equilibrio, se obtiene la expresión siguiente:

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}. \quad (81.3)$$

Bajo la acción de la radiación cósmica y de las trazas de substancias radiactivas que hay en la corteza terrestre, en  $1 \text{ cm}^3$  del aire atmosférico surgen por término medio varios pares de iones por segundo. El coeficiente  $r$  para el aire es igual a  $1,6 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^3/\text{s}$ . La sustitución de estos valores en la fórmula (81.3) da para la concentración en equilibrio de iones en el aire un valor del orden de  $10^3 \text{ cm}^{-3}$ . Esta concentración es insuficiente para condicionar una conductibilidad apreciable. El aire puro seco es muy buen aislador.

Si se hace llegar tensión a los electrodos, la disminución del número de iones se efectúa no sólo a causa de la recombinación, sino también a expensas de la absorción de los iones por el campo a los electrodos. Supongamos que de la unidad de volumen son absorbidos  $\Delta n_j$  pares de iones por segundo. Si la carga de cada ion es  $e'$ , la neutralización en los electrodos de un par de iones va acompañada del transporte por el circuito de una carga  $e'$ . Cada segundo llegan a los electrodos  $\Delta n_j Sl$  pares de iones ( $S$  es el área de los electrodos;  $l$ , la distancia entre ellos y el producto  $Sl$  es igual al volumen del espacio entre los electrodos). Por consiguiente, la intensidad de la corriente en el circuito será

$$I = e' \Delta n_j Sl.$$

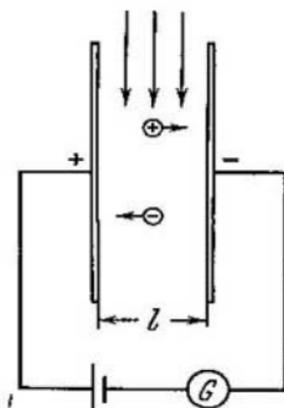


Fig. 81.1

De aquí

$$\Delta n_j = \frac{I}{e'lS} = \frac{j}{e'l}, \quad (81.4)$$

donde  $j$  es la densidad de la corriente.

Cuando hay corriente la condición de equilibrio tiene la forma siguiente:

$$\Delta n_i = \Delta n_r + \Delta n_j.$$

Sustituyendo aquí las expresiones (81.1) y (81.4) de  $\Delta n_r$  y  $\Delta n_j$ , llegamos a la relación

$$\Delta n_i = rn^2 + \frac{j}{e'l}. \quad (81.5)$$

La densidad de la corriente se determina por la expresión

$$j = e'n(u_0^+ + u_0^-)E, \quad (81.6)$$

en la que  $u_0^+$  y  $u_0^-$  son las movilidades de los iones positivos y negativos (véase la fórmula (79.5)).

Consideremos los dos casos extremos: el de los campos débiles y el de los campos intensos.

En el caso de los campos débiles la densidad de la corriente será muy pequeña y el sumando  $j/e'l$  en la relación (81.5) se puede despreciar en comparación con  $rn^2$  (esto significa que la disminución del número de iones en el espacio entre los electrodos se produce principalmente a expensas de la recombinación). Entonces (81.5) se transforma en (81.2) y para la concentración en equilibrio de iones se obtiene la expresión (81.3). La sustitución de este valor de  $n$  en la fórmula (81.6), da

$$j = e' \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}} (u_0^+ + u_0^-) E. \quad (81.7)$$

El factor de  $E$  en la fórmula obtenida no depende de la intensidad del campo. Por lo tanto, en el caso de los campos débiles la descarga en el gas no autónoma se subordina a la ley de Ohm.

La movilidad de los iones en los gases tiene el valor  $\sim 10^{-4}$  ( $\text{m} \times \text{s}^{-1}/(\text{V} \cdot \text{m}^{-1})$ ) ( $1(\text{cm} \cdot \text{s}^{-1})/(\text{V} \cdot \text{cm}^{-1})$ ). Por consiguiente, si en estado de equilibrio la concentración  $n = 10^3 \text{ cm}^{-3} = 10^9 \text{ m}^{-3}$  y la intensidad del campo  $E = 1 \text{ V/m}$ , la densidad de la corriente será

$$j = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^9 (10^{-4} + 10^{-4}) \cdot 1 \sim 10^{-14} \text{ A/m}^2 = 10^{-18} \text{ A/cm}^2$$

(véase la fórmula (81.6); se supone que los iones son de carga única).

En el caso de los campos intensos, en la fórmula (81.5) se puede despreciar el sumando  $rn^2$  en comparación con el  $j/e'l$ . Esto significa que, prácticamente, todos los iones que surgen llegan a los electrodos sin tener tiempo de recombinarse. Con esta condición, la relación

(81.5) toma la forma

$$\Delta n_l = j e' l.$$

De aquí

$$j = e' \Delta n_l l. \quad (81.8)$$

Esta densidad de corriente la crean todos los iones generados por el ionizador en una columna de gas, de sección transversal igual a la unidad, comprendida entre los electrodos. Por lo tanto, esta densidad de corriente es la máxima para una intensidad dada del ionizador y una distancia  $l$ , también dada, entre los electrodos. Por esta razón se le da el nombre de densidad de la corriente de saturación  $j_{\text{sat}}$ .

Calculemos  $j_{\text{sat}}$  siendo las condiciones siguientes:  $\Delta n_l = 10 \text{ cm}^{-3} \times \times \text{s}^{-1} = 10^7 \text{ m}^{-3} \text{s}^{-1}$  (aproximadamente ésta es la velocidad con que se forman los iones en el aire atmosférico en condiciones ordinarias),  $l = 0,1 \text{ m}$ . La sustitución de estos datos en la fórmula (81.8), da

$$\begin{aligned} j_{\text{sat}} &= 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^7 \cdot 10^{-1} \sim \\ &\sim 10^{-13} \text{ A/m}^2 = 10^{-17} \text{ A/cm}^2. \end{aligned}$$

Este cálculo demuestra que la conductibilidad del aire en condiciones ordinarias es insignificante.

Con valores intermedios de  $E$  se produce una transición suave de la dependencia lineal de  $j$  respecto de  $E$  a la saturación, alcanzada la cual  $j$  deja de depender de  $E$  (véase la curva continua de la fig. 81.2). Más allá de la región de saturación se encuentra una región en que la corriente aumenta bruscamente (véase la parte de la curva indicada con línea de trazos). Este aumento se explica porque, a partir de cierto valor de  $E$ , los electrones generados por el ionizador exterior<sup>1)</sup> tienen tiempo durante el recorrido libre de adquirir la energía necesaria para, al chocar con una molécula, producir su ionización. Los electrones libres surgidos de la ionización y acelerados excitan a su vez la ionización. De este modo tiene lugar la multiplicación en avalancha de los iones primarios creados por el ionizador exterior y la intensificación de la corriente de descarga. Pero, el proceso no pierde el carácter de descarga no autónoma, ya que si cesa la acción del ionizador exterior, la descarga prosigue solamente hasta que todos los electrones (primarios y secundarios) llegan al ánodo (el límite posterior del espacio en que hay partículas ionizantes —electrones— se desplaza hacia el ánodo). Para que la descarga se haga autónoma o automantenida es necesario que existan dos avalanchas de iones contrapuestas, lo que únicamente es posible si los portado-

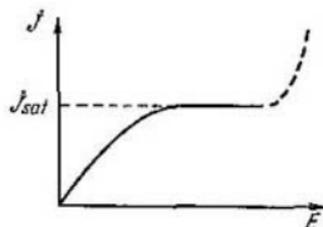


Fig. 81.2.

<sup>1)</sup> En virtud de que su recorrido libre es mayor, los electrones adquieren antes que los iones de gas la capacidad de ionizar por choque.

res de ambos signos son capaces de producir la ionización por choque.

Tiene gran importancia el que las corrientes de descarga no autónomas, intensificadas a expensas de la multiplicación de los portadores, sean proporcionales al número de iones primarios creados por el ionizador exterior. Esta propiedad de la descarga se aprovecha en los detectores o contadores proporcionales (véase el párrafo siguiente).

## § 82. Cámaras de ionización y contadores de partículas

Las cámaras de ionización y los contadores o detectores de partículas se utilizan para detectar y contar las partículas elementales y para medir la intensidad de los rayos X y gamma. La acción de estos instrumentos se basa en la aplicación de la descarga no autónoma en un gas.

Los esquemas teóricos de la cámara de ionización y del contador de partículas son iguales (fig. 82.1). Sólo difieren en el régimen de

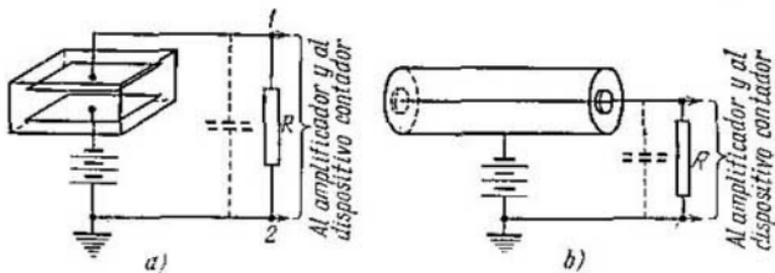


Fig. 82.1.

funcionamiento y en particularidades estructurales. El contador (fig. 82.1, b) consta de un cuerpo cilíndrico, a lo largo de cuyo eje hay un hilo delgado tenso y sujeto sobre aisladores (ánodo). De cátodo sirve el cuerpo del contador. Para que entren las partículas ionizantes, en una de las bases del cilindro se hace una ventanilla de mica u hoja de aluminio. Algunas partículas, y los rayos X y gamma, penetran en el contador o en la cámara de ionización directamente, a través de sus paredes. La cámara de ionización (fig. 82.1, a) puede tener electrodos de distinta forma. En particular, pueden ser los mismos que los del contador o tener la forma de placas planas paralelas u otras.

Supongamos que en el espacio entre los electrodos penetra una partícula cargada rápida que crea  $N_0$  pares de iones primarios (electrones e iones positivos). Los iones surgidos son arrastrados por el campo hacia los electrodos, a causa de lo cual, a través de la resistencia  $R$ , pasa cierta carga  $q$  que llamaremos impulso de corriente.

En la fig. 82.2 se da la dependencia del impulso de corriente  $q$  respecto de la tensión  $U$  entre los electrodos, para dos cantidades diferentes  $N_0$  de iones primarios, una de las cuales es tres veces mayor que la otra ( $N_{02} = 3N_{01}$ ). En la gráfica se pueden distinguir seis regiones. Las regiones I y II fueron estudiadas en el párrafo anterior. En particular, la II región es la de la *corriente de saturación*, en que todos los iones creados por las partículas ionizantes llegan a los electrodos sin tener tiempo de recombinarse. Es natural que en estas condiciones el impulso de corriente no dependa de la tensión.

A partir del valor  $U_p$ , la intensidad del campo es suficiente para que los electrones puedan ionizar las moléculas por choque. Por eso la cantidad de electrones e iones positivos crece en avalancha. Como resultado, en cada uno de los electrodos inciden  $AN_0$  iones. La magnitud  $A$  se llama *coeficiente de amplificación del gas*. En la III región este

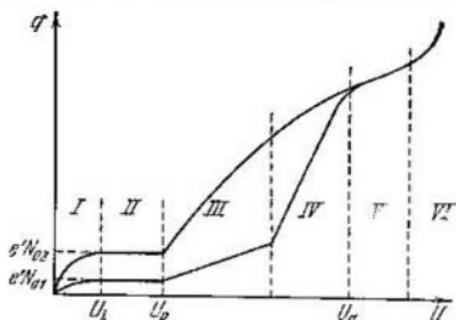


Fig. 82.2.

coeficiente no depende de la cantidad de iones primarios (pero sí de la tensión). Por eso, si la tensión se mantiene constante, el impulso de corriente será proporcional a la cantidad de iones primarios. La III región se denomina *región de proporcionalidad*, y la tensión  $U_p$  *umbral de la región de proporcionalidad*. El coeficiente de amplificación del gas varía en esta región desde 1, al principio, hasta  $10^3 \dots 10^4$ , al final (la fig. 82.2 se ha hecho sin respetar la escala sobre el eje  $q$ : sólo se ha mantenido la relación 1 : 3 entre las ordenadas de las curvas en las regiones II y III).

En la IV región, llamada *región de proporcionalidad parcial*, el coeficiente de amplificación del gas  $A$  depende cada vez más de  $N_0$ , en virtud de lo cual la diferencia entre los impulsos de corriente generados por una cantidad distinta de iones primarios, se hace cada vez más suave.

Con las tensiones correspondientes a la región V (a la que se da el nombre de *región de Geiger*, así como a la tensión  $U_g$  el de *umbral* de dicha región), el proceso adquiere carácter de descarga autónoma. Los iones primarios solamente estimulan su surgimiento. El impulso de corriente en esta región no depende en absoluto de la cantidad de iones primarios.

En la VI región la tensión es tan grande que la descarga, una vez iniciada, no se interrumpe. Por esta razón se llama *región de descarga continua*.

**Cámaras de ionización.** Se denominan cámaras de ionización los aparatos que funcionan sin amplificación del gas, es decir, a las tensiones correspondientes a la II región. Existen dos tipos de cámaras de ionización. Las de un tipo se utilizan para registrar los impulsos generados por partículas aisladas (cámaras de impulsos). La partícula que penetra en esta cámara crea en ella cierta cantidad de iones, y a causa de esto comienza a pasar a través de la resistencia  $r$  la corriente  $I$ . Esto hace que el potencial del punto 1 (véase la fig. 82.1, a) se eleve y se haga igual a  $IR$  (inicialmente el potencial de este punto era el mismo que el del punto 2 puesto a tierra). Este potencial entra en el amplificador y, una vez reforzado, pone en acción un dispositivo contador. Después que todas las cargas llegadas al electrodo interior

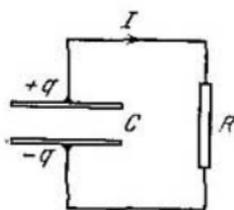


Fig. 82.3.

pasan por la resistencia  $R$ , la corriente se interrumpe y el potencial del punto 1 vuelve a ser nulo. El carácter del funcionamiento de la cámara depende de la duración del impulso de corriente producido por una partícula ionizante.

Para esclarecer de qué depende la duración del impulso, consideremos un circuito formado por un condensador  $C$  y una resistencia  $R$  (fig. 82.3). Si a las armaduras del condensador se les comunican cargas de signos distintos,  $+q_0$  y  $-q_0$ , a través de la resistencia  $R$  pasará corriente, por lo que las cargas que hay en las armaduras disminuirán. El valor instantáneo de la tensión aplicada a la resistencia es  $U = q/C$ . Por consiguiente, para la intensidad de la corriente se obtiene la expresión

$$I = \frac{U}{R} = \frac{q}{RC}. \quad (82.1)$$

Sustituimos la intensidad de la corriente por  $-dq/dt$ , siendo  $-dq$  la disminución de la carga en las armaduras en el tiempo  $dt$ . Como resultado se obtiene la ecuación diferencial

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{q}{RC} \quad \text{o} \quad \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt.$$

Según (82.1)  $dq/q = dI/I$ , por lo que se puede escribir

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt.$$

La integración de esta ecuación da

$$\ln I = -\frac{1}{RC} t + \ln I_0$$

(mediante  $\ln I_0$  se ha designado la constante de integración). Finalmente, potenciando la expresión obtenida, llegamos a la fórmula

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (82.2)$$

Se comprende fácilmente que  $I_0$  es el valor inicial de la intensidad de la corriente.

De la ecuación (82.2) se sigue que en el tiempo

$$\tau = RC \quad (82.3)$$

la intensidad de la corriente disminuye  $e$  veces. De acuerdo con esto, la magnitud (82.3) lleva el nombre de *constante de tiempo* del circuito. Cuanto mayor sea esta constante, tanto más lentamente disminuirá la corriente en el circuito.

El esquema de la cámara de ionización (véase la fig. 82.1, a) es semejante al representado en la fig. 82.3. El papel de  $C$  lo desempeña el volumen comprendido entre los electrodos, que en el esquema de la cámara se indica con línea de trazos. Con el aumento de la resistencia  $R$  crece la tensión entre los puntos 1 y 2 para una intensidad de corriente dada y, por lo tanto, se hace más fácil el registro de los impulsos. Esta circunstancia incita a utilizar  $R$  de magnitud todo lo mayor posible. Al mismo tiempo, para que la cámara pueda registrar separadamente los impulsos de corriente, generados rápidamente uno detrás de otro por las partículas, la constante de tiempo no debe ser grande. Por eso, al elegir la magnitud de  $R$  para las cámaras de impulsos hay que llegar a un compromiso. Por lo general se toma  $R$  del orden de  $10^8 \Omega$ . Entonces, si  $C \sim 10^{-11}$  F, la constante de tiempo constituye  $10^{-3}$  s.

El otro tipo de cámaras de ionización es el de las llamadas cámaras integradoras. En ellas se toma  $R$  del orden de  $10^{15} \Omega$ . Si  $C \sim 10^{-11}$  F, la constante de tiempo será igual a  $10^4$  s. En este caso los impulsos de corriente que generan las partículas ionizantes por segundo, se juntan y por la resistencia pasa una corriente continua, cuya magnitud caracteriza la carga total de los iones que surgen en la cámara por unidad de tiempo. De este modo, los dos tipos de cámaras de ionización se diferencian únicamente en el valor de la constante de tiempo  $RC$ .

**Contadores proporcionales.** Los impulsos producidos por las partículas independientes se pueden amplificar mucho (hasta  $10^3 \dots \dots 10^4$  veces) si la tensión entre los electrodos se encuentra en la III región (véase la fig. 82.2). El instrumento que funciona en este régimen se llama *detector* o *contador proporcional*. El ánodo del contador se hace en forma de hilo de varias centésimas de milímetro de diámetro. La intensidad del campo, en las proximidades del hilo

es especialmente grande. Si la tensión entre los electrodos es suficientemente grande, los electrones que surgen cerca del hilo adquieren bajo la acción del campo la energía suficiente para ionizar las moléculas por choque. Como resultado tiene lugar la multiplicación de los iones. Las dimensiones del volumen, dentro de cuyos límites se produce esta multiplicación, aumenta a medida que crece la tensión. De acuerdo con esto aumenta también el coeficiente de amplificación del gas.

La cantidad de iones primarios depende de la naturaleza y energía de la partícula que provoca el impulso. Por eso, por la magnitud de los impulsos a la salida del contador proporcional se pueden diferenciar las partículas de distinta naturaleza y clasificarlas de una misma naturaleza de acuerdo con sus energías.

**Contadores de Geiger—Müller.** Una amplificación todavía mayor del impulso (hasta  $10^8$ ) se puede conseguir haciendo que el contador funcione en la región de Geiger (*V* región en la fig. 82.2). Un contador que funcione en este régimen se llama *detector* o *contador de Geiger—Müller* (o bien, abreviadamente, *contador de Geiger*). La descarga en la región de Geiger, una vez «iniciada» por la partícula ionizante, se transforma después en autónoma. Por eso la magnitud del impulso no depende de la ionización inicial. Para poder obtener de las partículas aisladas impulsos separados es necesario interrumpir (extinguir) rápidamente la descarga surgida. Esto se consigue por medio de una resistencia exterior  $R$  (en los detectores no *autoextintores*) o a expensas de los procesos que se desarrollan en el contador mismo. En este último caso el detector se llama *autoextintor*.

La extinción de la descarga por medio de una resistencia exterior está condicionada por el hecho de que, al pasar por la resistencia la corriente de descarga, surge en ella una gran caída de tensión. Por esto al espacio entre los electrodos sólo le corresponde una parte de la tensión aplicada, la cual es insuficiente para mantener la descarga.

La interrupción de la descarga en los contadores autoextintores se produce por las causas siguientes. Los electrones tienen una movilidad aproximadamente 1000 veces mayor que la de los iones positivos. Por esta razón, en el tiempo durante el cual los electrones llegan al hilo, los iones positivos casi no se mueven de sus sitios. Estos iones crean una carga espacial positiva que debilita el campo en las proximidades del hilo y la descarga cesa. En este caso la extinción de la descarga la obstaculizan unos procesos adicionales que no vamos a estudiar. Para evitarlos se añade al gas que llena el contador (generalmente argón) una pequeña cantidad de gas orgánico monoatómico (por ejemplo, vapores de alcohol). Este contador separa los impulsos de partículas que se suceden unas a otras con intervalos del orden de  $10^{-4}$  s.

### § 83. Procesos que conducen a la aparición de los portadores de corriente en la descarga autónoma

Antes de empezar a describir los diversos tipos de descarga autónoma en gas, vamos a estudiar los principales procesos que acarrearán la aparición de los portadores de corriente (electrones e iones) en estas descargas.

**Colisiones de los electrones con las moléculas.** Los choques de los electrones (y de los iones) con las moléculas pueden tener carácter elástico o inelástico. La energía de la molécula (lo mismo que la del átomo) se cuantiza. Esto significa que dicha energía sólo puede tener valores discretos (es decir, separados por intervalos finitos), llamados niveles de energía. El estado de energía mínima se denomina *fundamental*. Para hacer que la molécula pase del estado fundamental a los distintos estados excitados se necesitan determinados valores  $W_1, W_2$ , etc. de la energía. Comunicándole a la molécula una energía suficientemente grande  $W_i$  se puede producir su ionización.

Cuando una molécula pasa a un estado excitado, por lo general permanece en él solamente  $\sim 10^{-8}$  s, después de lo cual retorna al estado fundamental emitiendo el exceso de energía en forma de un cuanto de luz o *fotón*. En algunos estados excitados, llamados *metastables*, las moléculas pueden permanecer mucho más tiempo (aproximadamente  $10^{-3}$  s).

En las colisiones de partículas deben cumplirse las leyes de conservación de la energía y del impulso. Por eso a la transmisión de la energía durante el choque se le imponen determinadas limitaciones, es decir, no toda la energía que posee la partícula incidente puede ser transmitida a la otra partícula.

Si durante el choque no puede serle transferida a la molécula la energía suficiente para que se excite, la energía cinética total de las partículas permanece invariable y el choque será *elástico*. Hallemos la energía que se le comunica a la partícula que recibe el choque cuando éste es elástico.

Supongamos que una partícula de masa  $m_1$ , cuya velocidad sea  $v_{10}$ , choca con una partícula en reposo ( $v_{20} = 0$ ) de masa  $m_2$ . Si el choque es central deben cumplirse las condiciones

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

en las que  $v_1$  y  $v_2$  son las velocidades de las partículas después del choque. De estas ecuaciones se obtiene para la velocidad de la segunda partícula el valor

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10}$$

(véase el § 28 del tomo 1º). La energía que se transfiere a la segunda partícula durante el choque elástico se determina por la expresión

$$\Delta W_{el} = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Si  $m_1 \ll m_2$ , esta expresión se simplifica del modo siguiente:

$$\Delta W_{el} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} \frac{4m_1}{m_2} = W_{10} \frac{4m_1}{m_2}, \quad (83.1)$$

donde  $W_{10}$  es la energía inicial de la partícula incidente

De (83.1) se infiere que una partícula ligera (electrón) al chocar elásticamente con una partícula pesada (molécula) sólo le transmite una pequeña parte de su reserva de energía. La partícula ligera «rebota» en la pesada lo mismo que una pelota en la pared, sin que varíe prácticamente la magnitud de su velocidad. El cálculo correspondiente da que, cuando el choque es central, la parte de la energía que se transfiere es aún menor.

Si la energía de la partícula incidente (electrón o ion) es suficientemente grande, la molécula se puede excitar o ionizar. En este caso la energía cinética total de las partículas no se conserva, porque una parte de ella se gasta en la excitación o ionización, es decir, en aumentar la energía interna de las partículas que chocan o en dividir en dos una de ellas.

Las colisiones que producen excitación de las partículas son choques inelásticos de primer género. Una molécula en estado excitado, al chocar con otra partícula (electrón, ion o molécula neutra), puede pasar a su estado fundamental no radiando el exceso de energía, sino transmitiéndoselo a dicha partícula. Como resultado la energía cinética total de las partículas después de la colisión es mayor que antes del choque. Estas colisiones se conocen con el nombre de *choques inelásticos de segundo género*. La transición de las moléculas de un estado metastable al fundamental se efectúa a costa de los choques de segundo género.

En una colisión inelástica de primer género las ecuaciones de conservación de la energía y el impulso tienen la forma

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \Delta W_{int}, \quad m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (83.2)$$

en las que  $\Delta W_{int}$  es el incremento de la energía interna de la molécula correspondiente a su transición al estado excitado. Eliminando  $v_1$  en estas ecuaciones, obtenemos

$$\Delta W_{int} = m_2 v_{10} v_2 - \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (83.3)$$

Para una velocidad dada de la partícula incidente ( $v_{10}$ ) el incremento de la energía interna  $\Delta W_{int}$  depende de la velocidad  $v_2$  con

que la molécula se mueve después del choque. Hallemos el valor máximo posible de  $\Delta W_{\text{Int}}$ . Para esto tomamos la diferencial de la función (83.3) respecto de  $v_2$  e igualamos la derivada a cero:

$$\frac{d(\Delta W_{\text{Int}})}{dv_2} = m_2 v_{10} - \frac{m_1 + m_2}{m_1} m_2 v_2 = 0.$$

De aquí  $v_2 = m_1 v_{10} / (m_1 + m_2)$ . La sustitución de este valor de  $v_2$  en la fórmula (83.3) da

$$\Delta W_{\text{Int. máx}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_{10}^2}{2}. \quad (83.4)$$

Si la partícula incidente es mucho más ligera que la que recibe el choque ( $m_1 \ll m_2$ ), el factor  $m_2 / (m_1 + m_2)$  en la expresión (83.4) se aproxima a la unidad. De este modo en la colisión de una partícula ligera (electrón) y una pesada (molécula) casi toda la energía de la partícula incidente se puede gastar en excitar o ionizar la molécula<sup>1</sup>).

No obstante, incluso si la energía de la partícula incidente (electrón) es suficientemente grande, la colisión no conduce necesariamente a la excitación o ionización de la molécula. Existen determinadas probabilidades de estos procesos que dependen de la energía

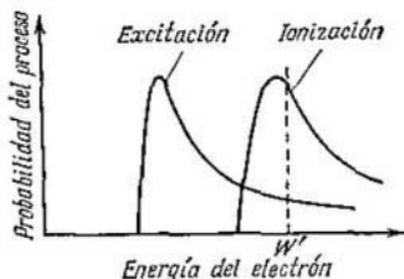


Fig. 83.1.

(y, por consiguiente, de la velocidad) del electrón. En la fig. 83.1 se muestra la marcha aproximada de estas probabilidades. Cuanto más rápido es el electrón, tanto menor es el intervalo de tiempo que dura su interacción con la molécula al pasar cerca de ella. Por eso ambas probabilidades alcanzan rápidamente el máximo y luego disminuyen al aumentar la energía del electrón. En la figura se ve que un electrón que posea, por ejemplo, la energía  $W'$ , es más probable que produzca la ionización de la molécula que su excitación.

**Fotoionización.** La radiación electromagnética está constituida por partículas elementales llamadas fotones. La energía del fotón es igual a  $\hbar\omega$ , donde  $\hbar$  es la constante de Planck dividida por  $2\pi$  (véase (56.5)), y  $\omega$ , la frecuencia angular de la radiación. El fotón puede ser absorbido por una molécula, yendo su energía a excitarla

<sup>1</sup> En el caso de la ionización, las ecuaciones (83.2) se complican, ya que después de la colisión no habrá dos partículas, sino tres. Pero la conclusión de que es posible que casi toda la energía del electrón se gaste en la ionización es correcta.

o ionizarla. En este caso la ionización de la molécula se llama *fotoionización*. La fotoionización directa es capaz de producir radiación ultravioleta. La energía de un fotón de luz visible es insuficiente para arrancar un electrón de la molécula. Por lo tanto, la radiación visible es incapaz de producir la fotoionización directa. No obstante, puede condicionar la denominada *fotoionización escalonada*. Este proceso se efectúa en dos etapas. En la primera el fotón hace que la molécula pase a un estado excitado. En la segunda se produce la ionización de la molécula excitada a expensas del choque de ésta con otra molécula.

En la descarga en gas se puede producir una radiación de onda corta capaz de provocar la fotoionización directa. Un electrón suficientemente rápido, al chocar, no sólo puede ionizar la molécula, sino también hacer pasar el ion recién formado a un estado excitado. La transición de este ion al estado fundamental va acompañada de la emisión de una radiación de más frecuencia que la que tiene la radiación de la molécula neutra. La energía de un fotón de esta radiación resulta ser suficiente para la fotoionización directa.

**Emisión de electrones por la superficie de los electrodos.** En el volumen (espacio) de la descarga en gas pueden entrar electrones procedentes de la *emisión* de la superficie de los electrodos. Tipos de emisión tales como la termoiónica, la de electrones secundarios y la autoemisión o emisión fría desempeñan en algunos tipos de descarga el papel fundamental.

Se llama *emisión termoiónica* la emisión de electrones por los sólidos y líquidos calientes. En virtud de la distribución por velocidades, en un metal siempre existe cierta cantidad de electrones libres, cuya energía es suficiente para vencer la barrera de potencial y salir de los límites de aquél. A la temperatura ambiente la cantidad de estos electrones es insignificante. Pero al aumentar la temperatura, el número de electrones capaces de abandonar el metal crece muy rápidamente y a una temperatura del orden de  $10^3$  K se hace completamente perceptible.

Se da el nombre de *emisión de electrones secundarios* a la emisión de electrones por la superficie de un sólido o líquido al ser bombardeada con electrones o iones. La razón del número de electrones (secundarios) emitidos al número de partículas que incitan la emisión se denomina *coeficiente de emisión secundaria*. En el caso del bombardeo de la superficie de un metal con electrones, el valor de este coeficiente se encuentra entre los límites de 0,5 (para el berilio) a 1,8 (para el platino).

*Autoemisión o emisión fría* es la emisión de electrones por la superficie de un metal que tiene lugar cuando en las proximidades de su superficie se crea un campo eléctrico de intensidad muy grande ( $\sim 10^8$  V/m). Este fenómeno también se llama a veces *desprendimiento* o *arranque* de electrones por un campo eléctrico.

### § 84. Plasma de descarga gaseosa

Algunos tipos de descarga autónoma se caracterizan por un grado muy alto de ionización del gas. Un gas en estado de intensa ionización, a condición de que la carga total de los electrones e iones en cada volumen elemental sea igual (o casi igual) a cero, se llama *plasma*. El plasma es un estado especial de la substancia. En dicho estado se encuentra la substancia en las entrañas del Sol y de otras estrellas, cuya temperatura es de decenas de millones de grados. El plasma que se produce a causa de la alta temperatura de la substancia se dice que es *de alta temperatura* o *isotérmico*. El que se origina en la descarga en gas se llama *plasma de descarga gaseosa*.

Para que el plasma se encuentre en estado estacionario es necesario que existan procesos que compensen la disminución de iones debida a la recombinación. En el plasma de alta temperatura esto se efectúa a expensas de la ionización térmica, y en el de descarga gaseosa, a costa de la ionización por choque de los electrones

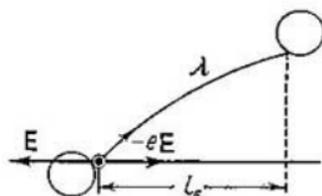


Fig. 84.1.

acelerados por el campo eléctrico. Una modalidad particular de plasma es la *ionosfera* (una de las capas de la atmósfera). El alto grado de ionización de las moléculas ( $\sim 1\%$ ) se mantiene en la ionosfera a costa de la fotoionización debida a la radiación de onda corta del Sol.

En el plasma de descarga gaseosa los electrones participan en dos movimientos, uno caótico, con cierta velocidad media  $\langle v \rangle$  y otro ordenado, en sentido opuesto a  $E$ , con la velocidad media  $\langle u \rangle$ , mucho menor que  $\langle v \rangle$ .

Vamos a demostrar que el campo eléctrico no sólo condiciona el movimiento ordenado de los electrones en el plasma, sino que también aumenta la velocidad  $\langle v \rangle$  de su movimiento caótico. Supongamos que, en el instante en que se conecta el campo, hay en el gas cierta cantidad de electrones, cuya velocidad corresponde a la temperatura del gas  $T_g$  ( $\frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT_g$ ). En el tiempo entre dos colisiones consecutivas con las moléculas, el electrón recorre, en promedio, un espacio  $\lambda$  (fig. 84.1; la trayectoria del electrón está ligeramente curvada por la acción de la fuerza  $-eE$ ). Al mismo tiempo el campo realiza sobre éste el trabajo

$$A = eEl_F, \tag{84.1}$$

en el que  $l_F$  es la proyección del desplazamiento del electrón sobre la dirección de la fuerza que actúa sobre él. A causa de las colisiones con las moléculas, la dirección del movimiento del electrón cambia todo el tiempo de un modo casual. Respectivamente, cambia la mag-

nitud y el signo de  $l_F$ . Por eso el trabajo (84.1) tiene magnitud distinta y signo diferente en trozos aislados de la trayectoria. En unos el campo aumenta la energía de los electrones, en otros la disminuye. Si el movimiento ordenado de los electrones no existiera, el valor medio de  $l_F$ , y, por consiguiente, también el trabajo (84.1), sería nulo. Pero la existencia de dicho movimiento hace que el valor medio del trabajo  $A$  sea distinto de cero y al mismo tiempo positivo. Este valor es

$$\langle A \rangle = eE \langle u \rangle \tau = eE \langle u \rangle \frac{\lambda}{\langle v \rangle}, \quad (84.2)$$

donde  $\tau$  es la duración media del recorrido libre de los electrones ( $\langle u \rangle \ll \langle v \rangle$ ).

De este modo, el campo, en promedio, aumenta la energía de los electrones. Es cierto que el electrón al chocar con una molécula le transmite a ésta parte de su energía. Pero como se aclaró en el párrafo anterior, la parte relativa  $\delta$  de la energía que se transfiere durante el choque elástico, es muy pequeña. En promedio<sup>1)</sup>  $\langle \delta \rangle = 2 (m/M)$  ( $m$  es la masa del electrón y  $M$ , la masa de la molécula).

En un gas enrarecido (en el cual  $\lambda$  es mayor) y con intensidad del campo  $E$  suficientemente grande, el trabajo (84.2) puede ser mayor que la energía  $\frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle \cdot \langle \delta \rangle$  transferida, en promedio, a la molécula en cada colisión. Como resultado de esto la energía del movimiento caótico de los electrones crecerá. Por último alcanza un valor máximo suficiente para excitar o ionizar la molécula. A partir de este instante una parte de las colisiones deja de ser elástica, lo que va acompañado de una gran pérdida de energía. Por eso la parte, en promedio, de energía que se transmite ( $\delta$ ), aumenta.

Así, la energía necesaria para la ionización no la adquieren los electrones en un solo recorrido libre, sino que la acumulan poco a poco durante una serie de recorridos. La ionización acarrea el surgimiento de una gran cantidad de electrones y iones positivos y se produce el plasma.

La energía de los electrones del plasma está definida por la condición de que el valor medio del trabajo que realiza el campo sobre un electrón durante un recorrido libre es igual al valor medio de la energía que cede el electrón en el choque con una molécula:

$$eE \langle u \rangle \frac{\lambda}{\langle v \rangle} = \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} \langle \delta \rangle.$$

Aquí  $\langle \delta \rangle$  es una función compleja de la velocidad  $\langle v \rangle$ .

La experiencia da que para los electrones rige en el plasma de descarga gaseosa la distribución de Maxwell por velocidades. A causa

<sup>1)</sup> De acuerdo con la fórmula (83.1), si el choque es central,  $\delta = 4 (m/M)$ . En el caso de que el electrón y la molécula se «rocen» débilmente,  $\delta \approx 0$ .

de la débil interacción de los electrones con las moléculas (en el choque elástico  $\delta$  es muy pequeña y la cantidad relativa de colisiones inelásticas es insignificante), la velocidad media del movimiento caótico de los electrones resulta ser muchas veces mayor que la velocidad correspondiente a la temperatura del gas  $T_g$ . Si se introduce la temperatura de los electrones  $T_e$  y se determina partiendo de la relación

$$\frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT_e,$$

se obtiene para  $T_e$  un valor del orden de varias decenas de millares de Kelvin. La no coincidencia de las temperaturas  $T_g$  y  $T_e$  evidencia que entre los electrones y las moléculas no existe equilibrio termodinámico en el plasma de descarga gaseosa<sup>1)</sup>.

La concentración de portadores de corriente en el plasma es muy grande. Por eso el plasma es buen conductor. La movilidad de los electrones es aproximadamente tres órdenes mayor que la de los iones, en virtud de lo cual la corriente en el plasma la crean principalmente los electrones.

## § 85. Descarga luminiscente

La descarga luminiscente se produce a presiones bajas. Se puede observarla en un tubo de vidrio de 0,5 m de longitud aproximadamente, en cuyos extremos estén soldados unos electrodos metálicos planos (fig. 85.1). A estos electrodos se les suministra una tensión del orden de 1000 V. A la presión atmosférica en el tubo no existe prácticamente corriente. Si la presión se hace descender, cuando llega aproximadamente a 50 mm Hg se produce una descarga en forma de delgado cordón luminoso ondulado que une el ánodo con el cátodo. A medida que disminuye la presión se va haciendo más grueso el cordón y, aproximadamente, cuando aquélla es de 5 mm Hg llena toda la sección del tubo y se establece la descarga luminiscente. Sus partes fundamentales se muestran en la fig. 85.1. En las proximidades del cátodo se encuentra una capa luminosa delgada que se denomina *película luminosa del cátodo*. Entre el cátodo y esta película se encuentra el *espacio oscuro de Aston*. Por la otra parte de la película hay una capa débilmente luminosa, que por contraste parece oscura, llamada *espacio oscuro del cátodo* (o de Crookes). De esta capa se pasa a una región luminosa que recibe el nombre de *luminiscencia negativa*. Todas las capas citadas forman la parte catódica de la descarga luminiscente.

Con la luminiscencia negativa limita un intervalo oscuro, el *espacio oscuro de Faraday*. Éste es un límite borroso. El resto del tubo está lleno de gas luminiscente; esta parte se llama *columna posi-*

<sup>1)</sup> En el plasma de alta temperatura la energía media de las moléculas, electrones y iones es la misma. Esto explica su denominación de plasma isotérmico

*tiva*. Al descender la presión la parte catódica de la descarga y el espacio oscuro de Faraday se ensanchan y la columna positiva se acorta. Con una presión del orden de 1 mm Hg la columna positiva se descompone en una serie de capas (*estratos*) curvadas, oscuras y brillantes, que se suceden alternativamente.

Las mediciones efectuadas por medio de sondas (alambritos delgados soldados en diversos puntos a lo largo del tubo) y por otros métodos han demostrado que el potencial varía a lo largo del tubo irregularmente (véase la gráfica de la fig. 85.1). Casi toda la caída de potencial corresponde a las primeras tres partes de la descarga, hasta el espacio oscuro del cátodo inclusive. A esta parte de la tensión aplicada al tubo se le da el nombre de *caída de potencial catódica*. En la región de la luminiscencia negativa el potencial no varía,



Fig. 85.1.

en ella la intensidad del campo es nula. Finalmente, en el espacio oscuro de Faraday y en la columna positiva el potencial crece lentamente. Esta distribución del potencial se debe a que en la región del espacio oscuro del cátodo se forma una carga espacial positiva condicionada por la alta concentración de iones positivos.

Los procesos fundamentales necesarios para el mantenimiento de la descarga luminiscente se producen en la parte catódica. Las demás partes de la descarga no tienen importancia e incluso pueden no existir (si la distancia entre los electrodos es pequeña o si la presión es baja). Los procesos fundamentales son dos: la emisión secundaria de electrones por el cátodo, provocada por su bombardeo por los iones positivos, y la ionización de las moléculas del gas por choque con los electrones.

Los iones positivos, acelerados por la caída de potencial catódica, bombardean el cátodo y arrancan de él electrones. En el espacio oscuro de Aston estos electrones son acelerados por el campo eléc-

trico. Una vez que adquieren la energía suficiente comienzan a excitar las moléculas del gas, como resultado de lo cual surge la película luminosa del cátodo. Los electrones penetran sin chocar en la región del espacio oscuro del cátodo y tienen una gran energía, por lo que es más frecuente que produzcan la ionización de las moléculas que su excitación (véanse las gráficas de la fig. 83.1). De este modo la intensidad luminosa del gas disminuye, pero se forman muchos electrones y iones positivos. Los iones generados tienen al principio una velocidad muy pequeña. Por esta razón en el espacio oscuro del cátodo se crea la carga espacial positiva, que hace que el potencial se redistribuya a lo largo de tubo y que se produzca la caída de potencial cótodica.

Los electrones que surgen en el espacio oscuro del cátodo penetran en la región de la luminiscencia negativa, que se caracteriza por tener una alta concentración de electrones y iones positivos y una carga espacial total próxima a cero (plasma). Por eso aquí la intensidad del campo es muy pequeña. En virtud de la alta concentración de electrones y iones, en la región de la luminiscencia negativa se desarrolla un intenso proceso de recombinación, acompañado de la radiación de la energía que se desprende. De este modo, la luminiscencia negativa es fundamentalmente una luminosidad de recombinación.

Los electrones y iones de la región de la luminiscencia negativa penetran en el espacio oscuro de Faraday a costa de la difusión (en el límite entre estas regiones no hay campo, pero, en cambio, existe un gran gradiente de concentración de electrones y iones). A causa de la menor concentración de partículas cargadas, la probabilidad de la recombinación en el espacio oscuro de Faraday desciende mucho. Por esta razón dicho espacio parece oscuro.

En el espacio oscuro de Faraday ya existe campo. Arrastrados por él, los electrones acumulan poco a poco energía y por fin se crean las condiciones necesarias para la existencia del plasma. La columna positiva es plasma de descarga gaseosa. Este plasma hace las veces de conductor que une el ánodo con las partes catódicas de la descarga. La luminiscencia de la columna positiva se debe principalmente a las transiciones de las moléculas excitadas al estado fundamental. Las moléculas de gases diferentes emiten en estas transiciones radiación de distinta longitud de onda. Por eso la luminiscencia de la columna positiva tiene el color característico de cada gas. Esta circunstancia se aprovecha en los tubos de gas que se emplean en los letreros y anuncios luminosos. Los trazos de dichos letreros no son más que columnas positivas de descarga luminiscente. Los tubos de neón dan luz roja; los de argón, luz azulino-verdosa, etc.

Si la distancia entre los electrodos se acorta paulatinamente, la parte catódica de la descarga permanece invariable, pero la longitud de la columna positiva disminuye hasta que desaparece por completo

Después desaparece el espacio oscuro de Faraday y empieza a acortarse el espacio de la luminiscencia negativa, permaneciendo invariable la posición del límite de esta luminiscencia con el espacio oscuro del cátodo. Cuando la distancia del ánodo a este límite es muy pequeña, la descarga cesa.

Si se disminuye paulatinamente la presión, la parte catódica de la descarga se extiende a una porción cada vez mayor del espacio entre los electrodos y al final el espacio oscuro del cátodo se extiende a casi todo el tubo. En este caso deja de apreciarse la luminosidad del gas, pero las paredes del tubo comienzan a emitir luz verdosa. La energía de los electrones desprendidos del cátodo y acelerados por la caída de potencial catódica llegan, sin chocar con las moléculas del gas, hasta las paredes del tubo y, al chocar con ellas, producen la luminiscencia. Por razones históricas, al flujo de electrones emitido por el cátodo de un tubo de descarga en gas a presiones muy bajas, se le dio el nombre de *rayos catódicos*. La luminosidad producida por el bombardeo con electrones rápidos se llama *catodoluminiscencia* o *luminiscencia catódica*.

Si en el cátodo de un tubo de descarga en gas se practica un canal estrecho, parte de los iones positivos penetra en el espacio que hay detrás del cátodo y forma un haz bruscamente limitado de iones que se denomina de *rayos canales* (o *positivos*). Precisamente por este procedimiento se obtuvieron los primeros haces de iones positivos.

## § 86. Descarga en arco

En 1802 descubrió el científico ruso V. V. Petrov que al separar unos electrodos de carbón, inicialmente en contacto, conectados a una gran batería de pilas, entre ellos se encendía una luz cegadora. Si los electrodos estaban dispuestos horizontalmente, el gas luminiscente calentado se curvaba en forma de arco, por lo que el fenómeno descubierto por Petrov se llamó *arco eléctrico*. La intensidad de la corriente en el arco puede alcanzar valores enormes ( $10^3 \dots \dots 10$  A) con tensiones de varias decenas de voltios.

La descarga en arco se puede producir tanto a baja presión (del orden de varios milímetros de la columna de mercurio) como a presión alta (de hasta 1000 atm). Los procesos fundamentales que mantienen la descarga son, la emisión termoiónica de la superficie del cátodo incandescente, y la ionización térmica de las moléculas, debida a la alta temperatura del gas en el espacio entre los electrodos. Casi todo este espacio está lleno de plasma de alta temperatura. Este sirve de conductor por el cual los electrones emitidos por el cátodo llegan al ánodo. La temperatura del plasma es de cerca de 6000 K. En un arco a presión ultraalta la temperatura del plasma puede llegar a los 10 000 K (se recordará que la temperatura de la superficie solar es de 5800 K). A causa del bombardeo por los iones positivos, el cátodo

se calienta aproximadamente hasta 3500 K. El ánodo, bombardeado por el potente flujo de electrones, se caldea aún más. Esto conduce a una intensa vaporización del ánodo y en su superficie se forma un hueco o cráter. El cráter es el sitio más brillante del arco.

La descarga en arco posee característica tensión-corriente decreciente (fig. 86.1). Esto se explica porque al aumentar la intensidad de la corriente crecen la emisión termoiónica del cátodo y el grado de ionización del espacio de descarga en el gas. Como resultado, la disminución de la resistencia de este espacio es mayor que el aumento de la corriente.

Además del arco termoelectrónico que hemos descrito (es decir, de la descarga condicionada por la omisión termoiónica de la superficie incandescente del cátodo), existe el *arco de cátodo frío*. Como cátodo de este arco sirve de ordinario el mercurio líquido contenido en una ampolla, de la cual se ha extraído el aire. La descarga se efectúa en el vapor de mercurio. Los electrones se desprenden del cátodo por autoemisión. El intenso campo que para esto es necesario que exista junto a la superficie del cátodo, lo crea la carga espacial positiva formada por los iones. Los electrones no son emitidos por toda la superficie del cátodo, sino por una mancha o foco catódico pequeño y brillante que se traslada continuamente. La temperatura del gas en este caso no es alta. La ionización de las moléculas en el plasma se produce, lo mismo que en la descarga luminiscente, a costa de los choques electrónicos.

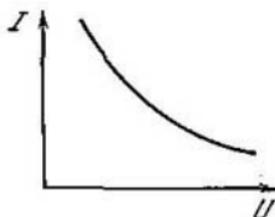


Fig. 86.1.

## § 87. Descargas por chispas y corona

La descarga por chispas se produce en aquellos casos en que la intensidad del campo eléctrico alcanza el valor de disrupción  $E_{dtsr}$  para el gas dado. El valor  $E_{dtsr}$  depende de la presión del gas; para el aire a la presión atmosférica es de cerca de 3MV/m (30 kV/cm). Al aumentar la presión,  $E_{dtsr}$  crece. Según la *ley empírica de Paschen*, la razón de la tensión disruptiva del campo a la presión es aproximadamente constante:

$$\frac{E_{dtsr}}{p} \approx \text{const.}$$

La descarga por chispas va acompañada de la formación de un sinuoso canal, brillante y ramificado, por el cual pasa un breve impulso de corriente de gran intensidad. De ejemplo puede servir un rayo; su longitud suele ser de hasta 10 km; el diámetro del canal, de hasta 40 cm; la intensidad de la corriente puede alcanzar 100 000 y

más amperios, y la duración del impulso es de cerca de  $10^{-4}$  s. Cada rayo consta de varios impulsos (hasta 50) que siguen el mismo canal; su duración total (junto con los intervalos entre los impulsos) puede llegar a ser de varios segundos. La temperatura del gas en el canal de la chispa puede ser de hasta 10 000 K. El calentamiento rápido e intenso del gas hace que aumente bruscamente la presión y que se originen ondas de choque y sonoras. Por eso la descarga por chispas va acompañada de fenómenos acústicos, desde un chasquido leve, cuando la chispa es poco potente, hasta el fragor de los truenos que siguen al rayo.

El surgimiento de la chispa va precedido de la formación en el gas de un canal fuertemente ionizado que recibe el nombre de «streamer»<sup>1)</sup>.

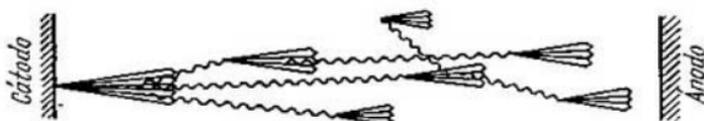


Fig. 87.1.

Este canal se forma por recubrimiento de las avalanchas electrónicas aisladas que surgen en el camino de la chispa. De precursor de cada avalancha sirve un electrón generado por fotoionización. El esquema del desarrollo del «streamer» se muestra en la fig. 87.1. Supongamos que la intensidad del campo es tal, que un electrón desprendido del cátodo a expensas de un proceso cualquiera, adquiere en la longitud del recorrido libre la energía suficiente para la ionización. Por eso se produce la multiplicación de los electrones y se origina la avalancha (los iones positivos que se forman al mismo tiempo, no desempeñan papel importante porque su movilidad es mucho menor; ellos sólo condicionan la carga espacial que ocasiona la redistribución del potencial). La radiación de onda corta que emite el átomo al cual le fue arrancado uno de los electrones internos durante la ionización (esta radiación se indica en el esquema por medio de líneas onduladas), excita la fotoionización de las moléculas, y los electrones que se desprenden generan cada vez nuevas avalanchas. Una vez que estas avalanchas se recubren, se forma el canal («streamer») buen conductor, por el cual se lanza del cátodo al ánodo un potente flujo de electrones y se produce la descarga disruptiva.

Si los electrodos tienen una forma, con la cual el campo es aproximadamente homogéneo, en el espacio entre ellos (por ejemplo, si

<sup>1)</sup> Según la palabra inglesa que significa descarga irregular. (Nota del Redactor.)

son esferas de diámetro suficientemente grande), la disrupción se produce a una tensión  $U_{\text{disr}}$  totalmente determinada, cuyo valor depende de la distancia  $l$  entre las esferas ( $U_{\text{disr}} = E_{\text{disr}} l$ ). En esto se basa el voltímetro de chispas, con el cual se mide la alta tensión ( $10^3 \dots 10^5$  V). (En las mediciones se determina la distancia máxima  $l_{\text{máx}}$ , con la cual se produce la chispa. Multiplicando luego  $E_{\text{máx}}$  por  $l_{\text{máx}}$  se obtiene el valor de la tensión medida.

Si uno de los electrodos (o ambos) tiene curvatura muy grande (por ejemplo, si sirve de electrodo un alambre delgado o una punta), con una tensión no desmesurada se produce la llamada *descarga corona*. Si la tensión aumenta, la descarga toma la forma de chispas o de arco.

En la descarga corona la ionización y la excitación de las moléculas tienen lugar no en todo el espacio entre los electrodos, sino únicamente en las proximidades del electrodo con radio de curvatura pequeño, donde la tensión del campo alcanza valores iguales o mayores que  $E_{\text{disr}}$ . En esta parte de la descarga el gas desprende luz. Esta luminiscencia tiene forma de corona que rodea al electrodo, a lo que se debe la denominación de este tipo de descarga. La descarga corona de una punta tiene forma de escobilla, por lo que a veces se le da el nombre de *descarga de escobilla*. En dependencia del signo del electrodo de corona, se dice que la corona es positiva o negativa. Entre la capa de corona y el electrodo no coronado se encuentra la *región exterior de la corona*. El régimen de disrupción ( $E \geq E_{\text{disr}}$ ) sólo existe dentro de los límites de la capa de corona. Por eso se puede decir que el efecto corona es la disrupción incompleta del espacio gaseoso.

En el caso de la corona negativa los fenómenos que ocurren en el cátodo son semejantes a los que tienen lugar en el cátodo de la descarga luminiscente. Los iones positivos acelerados por el campo arrancan del cátodo electrones, los cuales producen la ionización y excitación de las moléculas en la capa de corona. En la región exterior de la corona el campo es insuficiente para comunicar a los electrones la energía necesaria para la ionización o excitación de las moléculas. Por eso los electrones que penetran en esta región derivan hacia el ánodo bajo la acción del campo. Una parte de ellos es capturada por las moléculas, por lo que se forman iones negativos. De este modo, la corriente en la región exterior está condicionada únicamente por los portadores negativos (electrones e iones negativos). En esta región la descarga tiene carácter no autónomo.

En la corona positiva las avalanchas electrónicas se generan en el límite exterior de la corona y se dirigen hacia el electrodo coronado, es decir, al ánodo. El surgimiento de los electrones que generan las avalanchas se debe a la fotoionización producida por la radiación de la capa de corona. De portadores de corriente en la región exterior sirven los iones positivos, los cuales derivan hacia el cátodo bajo la acción del campo.

Si ambos electrodos tienen gran curvatura (los dos electrodos son de corona), en las proximidades de cada uno de ellos transcurren los procesos propios del electrodo de corona del sirno dado. Ambas capas de corona están separadas entre sí por una región exterior, en la cual se mueven uno al encuentro del otro los flujos de portadores de corriente positivos y negativos. Esta corona se llama bipolar.

La descarga en gas autónoma citada en el § 82 al estudiar los contadores de partículas, es una descarga corona.

El espesor de la capa de corona y la intensidad de la corriente de descarga crecen cuando aumenta la tensión. Si la tensión es pequeña las dimensiones de la corona son también pequeñas y su luminosidad es inapreciable. Esta corona microscópica surge cerca de la punta, de la cual fluye el viento eléctrico (véase el § 24).

La corona que aparece por la acción de la electricidad atmosférica en los extremos de los mástiles de los barcos, en las cimas de los árboles, etc., se llamó antiguamente fuego de San Telmo.

En los dispositivos de alto voltaje, en particular en las líneas de transporte de alta tensión, la descarga corona hace que se produzcan fugas de corriente perniciosas. Por eso hay que tomar medidas para evitarlas. Con este fin, por ejemplo, los conductores de las líneas de alta tensión se hacen de un diámetro suficientemente grande, y tanto mayor cuanto más elevada sea la tensión de la línea.

La descarga corona ha encontrado en la técnica una aplicación útil en los filtros eléctricos. En ellos el gas que se depura se mueve por un tubo, a lo largo de cuyo eje hay un electrodo de corona negativo. Los iones negativos, que existen en gran cantidad en la región exterior de la corona, se adhieren a las partículas o gotitas que impurifican el gas y las arrastran consigo hacia el electrodo exterior sin corona. Al llegar a dicho electrodo se neutralizan las partículas y precipitan en él. Luego se golpea el tubo y el precipitado que forman las partículas va a caer a un colector.

## OSCILACIONES ELÉCTRICAS

## § 88. Corrientes casi estacionarias

Al estudiar las oscilaciones eléctricas tenemos que encontrarnos con corrientes que varían con el tiempo. La ley de Ohm y las reglas (leyes) de Kirchhoff que de ella se deducen fueron establecidas para la corriente continua. No obstante, siguen siendo válidas para los valores instantáneos de la corriente y tensión variables, si sus variaciones no se producen con demasiada rapidez. Las excitaciones electromagnéticas se propagan por el circuito a una velocidad enorme, igual a la velocidad  $c$  de la luz. Sea  $l$  la longitud del circuito. Si durante el tiempo  $\tau = l/c$ , necesario para transmitir la excitación al punto más lejano del circuito, la intensidad de la corriente varía de un modo insignificante, los valores instantáneos de dicha intensidad en todas las secciones del circuito serán prácticamente iguales. Las corrientes que satisfacen esta condición se llaman *casi estacionarias*. Para las corrientes variables periódicamente la condición de casi estacionaridad tiene la forma

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T,$$

donde  $T$  es el período de variación.

Para un circuito de 3 m de largo, el retraso  $\tau = 10^{-8}$  s. Por lo tanto, hasta  $T$  del orden de  $10^{-8}$  s (que corresponde a una frecuencia de  $10^6$  Hz) las corrientes se pueden considerar casi estacionarias en este circuito. La corriente de frecuencia industrial ( $\nu = 50$  Hz) es casi estacionaria para los circuitos de hasta  $\sim 100$  km de longitud.

Los valores instantáneos de las corrientes casi estacionarias se subordinan a la ley de Ohm. Por consiguiente, para ellos son válidas también las leyes de Kirchhoff.

En adelante, al estudiar las oscilaciones eléctricas, supondremos siempre que las corrientes consideradas son casi estacionarias.

## § 89. Oscilaciones libres en un circuito sin resistencia óhmica

En un circuito que contenga una inductancia y una capacidad pueden producirse oscilaciones eléctricas. Por eso dicho circuito se denomina *oscilante*. La fig. 89.1, *a* representa las sucesivas etapas de un proceso oscilatorio en un circuito idealizado, sin resistencia óhmica.

En este circuito se pueden excitar oscilaciones comunicando a las armaduras del condensador cierta carga inicial o excitando corriente en la inductancia (desconectando, por ejemplo, el campo magnético exterior que atraviesa las espiras de la bobina). Vamos a utilizar el primer procedimiento. El condensador, desconectado de la inductancia, lo unimos a una fuente de tensión. Esto hace que aparezcan en las armaduras cargas de signos distintos,  $+q$  y  $-q$  (etapa 1). Entre las armaduras surge un campo eléctrico, cuya energía es igual a  $\frac{1}{2}(q^2/C)$  (véase la fórmula (29.2)). Si después se desconecta la fuente de tensión y se cierra el circuito del condensador con la inductancia, la capacidad comienza a descargarse y por el circuito

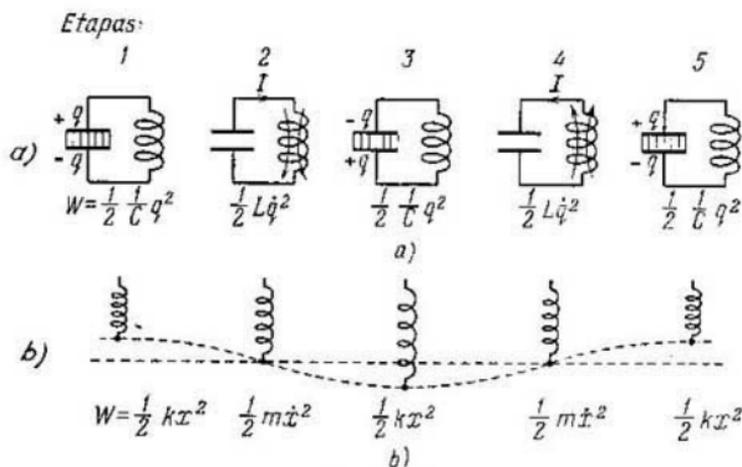


Fig. 89.1.

pasa corriente. Como resultado, la energía del campo eléctrico disminuye, pero, en cambio, surge una energía cada vez mayor del campo magnético debido a la corriente que pasa por la inductancia. Esta energía es igual a  $\frac{1}{2} LI^2$  (véase la fórmula (67.4)).

Como la resistencia óhmica del circuito es nula, la energía total, compuesta de las energías de los campos eléctrico y magnético, no se gasta en calentar los conductores y permanecerá constante<sup>4)</sup>. Por eso en el instante en que la tensión en el condensador y, por consiguiente, la energía del campo eléctrico se anulan, la energía del campo magnético y, por lo tanto, la corriente, alcanzan el valor máximo (etapa 2; a partir de este instante la corriente pasa a expensas de la f.e.m. autoinducida). En adelante la corriente disminuye y,

<sup>4)</sup> En rigor, en este circuito idealizado se produciría una pérdida de energía en radiación de ondas electromagnéticas. Esta pérdida sería tanto mayor cuanto mayor fuera la frecuencia de las oscilaciones y más «abierto» el circuito.

cuando las cargas alcanzan en las armaduras el valor inicial  $q$ , la intensidad de la corriente se anula (etapa 3). Luego estos mismos procesos se desarrollan en sentido inverso (etapas 4 y 5), después de lo cual el sistema retorna al estado inicial (etapa 5) y todo el ciclo se repite una y otra vez. Durante el proceso varían periódicamente (es decir, oscilan) la carga de las armaduras, la tensión en el condensador y la intensidad de la corriente que pasa por la inductancia. Las oscilaciones van acompañadas de las transformaciones mutuas de las energías de los campos eléctrico y magnético.

En la fig. 89.1, *b* las oscilaciones en el circuito se comparan con las de un péndulo de resorte. A la comunicación de las cargas a las armaduras del condensador corresponde la separación del péndulo de su posición de equilibrio por una fuerza exterior y la comunicación al mismo de la elongación inicial  $x$ . Al mismo tiempo surge la energía potencial de la deformación elástica del muelle, igual a  $\frac{1}{2}kx^2$ . La etapa 2 corresponde al paso del péndulo por la posición de equilibrio. En este instante la fuerza casi elástica es nula y el péndulo se sigue moviendo por inercia. Entonces su energía se transforma totalmente en cinética y se determina por la expresión  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ . La comparación de las etapas siguientes se la encomendamos al lector.

De la comparación de las oscilaciones eléctricas y mecánicas se sigue que la energía del campo eléctrico  $\frac{1}{2}(q^2/C)$  es análoga a la energía potencial de la deformación elástica, y la energía del campo magnético  $\frac{1}{2}LI^2$  es análoga a la energía cinética. La inductancia  $L$  desempeña el papel de la masa  $m$ , y la magnitud recíproca de la capacidad ( $1/C$ ), el papel de la rigidez  $k$ . Finalmente, a la carga  $q$  corresponde la elongación de la posición de equilibrio  $x$  del péndulo, y a la intensidad de la corriente  $I = \dot{q}$ , la velocidad  $\dot{x}$ . A continuación veremos que la analogía entre las oscilaciones eléctricas y mecánicas se extiende a las ecuaciones matemáticas que las describen.

Hallemos la ecuación de las oscilaciones en el circuito sin resistencia óhmica. Convencionalmente vamos a considerar positiva la corriente que carga el condensador<sup>1)</sup> (fig. 89.2). Entonces

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}. \quad (89.1)$$

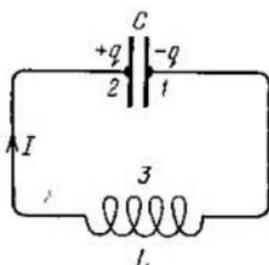


Fig. 89.2.

<sup>1)</sup> Con esta elección de sentido de la corriente la analogía entre las oscilaciones eléctricas y mecánicas resulta más completa, porque a la velocidad  $\dot{x}$  corresponde  $\dot{q}$  (con la elección contraria, a la velocidad  $\dot{x}$  correspondería  $-\dot{q}$ ).

Escribimos la expresión de la ley de Ohm para el circuito 1-3-2:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12} \quad (89.2)$$

(véase (35.3)). En nuestro caso  $R = 0$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2 = -q/C$  y  $\mathcal{E}_{12} = -\dot{\mathcal{E}}_s = -L(dI/dt)$ . La sustitución de estos valores en (89.2), da

$$0 = -q/C - L(dI/dt). \quad (89.3)$$

Finalmente, sustituyendo  $dI/dt$  por  $\ddot{q}$  (véase (89.1)), obtenemos la ecuación

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (89.4)$$

Si se introduce la designación

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (89.5)$$

la ecuación (89.4) toma la forma

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (89.6)$$

bien conocida por nosotros desde que estudiamos las oscilaciones mecánicas (véase la fórmula (53.4) del tomo 1<sup>o</sup>). La solución de esta ecuación es la función

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (89.7)$$

De este modo, la carga en las armaduras del condensador varía según la ley armónica con la frecuencia que determina la expresión (89.5). Esta frecuencia se llama *frecuencia propia del circuito* (que corresponde a la frecuencia propia del oscilador armónico). Para el período de las oscilaciones se obtiene la llamada *fórmula de Thomson*:

$$T = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (89.8)$$

La tensión en el condensador difiere de la carga en el factor  $1/C$ :

$$U = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (89.9)$$

Tomando la diferencial de la función (89.7) respecto del tiempo, se obtiene la expresión de la intensidad de la corriente

$$I = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (89.10)$$

Por lo tanto, la intensidad de la corriente adelanta en fase a la tensión en el condensador en  $\pi/2$ .

La comparación de las fórmulas (89.7) y (89.9) con la fórmula (89.10) muestra que en el instante en que la corriente alcanza el valor máximo, la carga y la tensión se anulan, y viceversa. Esta

relación entre la carga y la corriente ya fue establecida por nosotros con anterioridad, basándonos en razonamientos energéticos.

De las fórmulas (89.9) y (89.10) se deduce que

$$U_m = \frac{q_m}{C} \quad \text{e} \quad I_m = \omega_0 q_m.$$

Tomando la relación de estas amplitudes y sustituyendo  $\omega_0$  de acuerdo con la fórmula (89.5), obtenemos

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m. \quad (89.11)$$

Esta fórmula se puede obtener también partiendo de que el valor máximo de la energía del campo eléctrico  $\frac{1}{2} C U_m^2$  debe ser igual al valor máximo de la energía del campo magnético  $\frac{1}{2} L I_m^2$ .

### § 90. Oscilaciones libres amortiguadas

Todo circuito real tiene resistencia óhmica. La energía acumulada en el circuito se gasta en calentar esta resistencia, a causa de lo cual se amortiguan las oscilaciones libres. La ecuación (89.2), escrita para el circuito  $I-3-2$  representada en la fig. 90.1, tiene la forma

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} \quad (90.1)$$

(compárese con (89.3)). Dividiendo esta ecuación por  $L$  y sustituyendo  $I$  por  $\dot{q}$  y  $dI/dt$  por  $\ddot{q}$ , obtenemos

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (90.2)$$

Tomando en consideración que la magnitud recíproca de  $LC$  es igual al cuadrado de la frecuencia propia  $\omega_0$  del circuito (véase la fórmula (89.5)), e introduciendo la designación

$$\beta = R/2L, \quad (90.3)$$

a la ecuación (90.2) se le puede dar la forma

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (90.4)$$

Esta última ecuación coincide con la ecuación diferencial de las oscilaciones mecánicas amortiguadas (véase la fórmula (58.1) del tomo 1°).

A condición de que  $\beta^2 < \omega_0^2$ , es decir,  $R^2/4L^2 < 1/LC$ , la solución de la ecuación (90.4) tiene la forma

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (90.5)$$

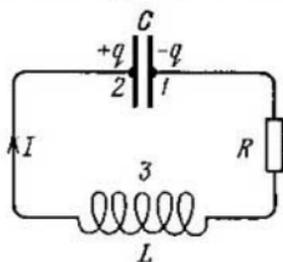


Fig. 90.1.

donde  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . Sustituyendo el valor (89.5) de  $\omega_0$  y (90.3) de  $\beta$ , hallamos que

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (90.6)$$

De este modo, la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas  $\omega$  es menor que la frecuencia propia  $\omega_0$ . Cuando  $R = 0$  la expresión (90.6) se transforma en la (89.5).

Dividiendo la función (90.5) por la capacidad  $C$ , obtenemos la tensión en el condensador:

$$U = \frac{q_{m0}}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) = U_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (90.7)$$

Para hallar la intensidad de la corriente tomamos la diferencial de (90.5) respecto del tiempo:

$$I = \dot{q} = q_{m0} e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)].$$

Multiplicando el segundo miembro de esta fórmula por la expresión, igual a la unidad,  $\omega_0 / \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$ , obtenemos

$$I = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} \left[ -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \right].$$

Introduciendo el ángulo  $\psi$ , determinado por las condiciones

$$\cos \psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0}, \quad \operatorname{sen} \psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0},$$

se puede escribir

$$I = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi). \quad (90.8)$$

Como  $\cos \psi < 0$  y  $\operatorname{sen} \psi > 0$ , el valor de  $\psi$  está comprendido entre los límites de  $\pi/2$  a  $\pi$  ( $\pi/2 < \psi < \pi$ ). Así, pues, si el circuito tiene resistencia óhmica, la intensidad de la corriente adelanta en fase la tensión en el condensador en más de  $\pi/2$  (si  $R = 0$  el avance es de  $\pi/2$ ).

La gráfica de la función (90.5) se representa en la fig. 90.2. Las gráficas de la tensión y de la intensidad de la corriente tienen forma análoga.

El amortiguamiento de las oscilaciones se suele caracterizar por el *decremento logarítmico de amortiguamiento*

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T \quad (90.9)$$

(véase la fórmula (58.9) del tomo 1<sup>o</sup>). Aquí  $a(t)$  es la amplitud de la magnitud correspondiente ( $q$ ,  $U$  ó  $I$ ). Se recordará que el decremento logarítmico del amortiguamiento es recíproco del número de oscila-

ciones  $N_e$  que se realizan durante el tiempo en que la amplitud disminuye  $e$  veces:

$$\lambda = 1/N_e.$$

Sustituyendo en (90.9)  $\beta$  por su valor (90.3) y  $T$  por  $2\pi/\omega$ , obtenemos para  $\lambda$  la expresión siguiente:

$$\lambda = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega}. \quad (90.10)$$

La frecuencia  $\omega$ , y, por lo tanto,  $\lambda$ , se determinan por los parámetros del circuito  $L$ ,  $C$  y  $R$ . De este modo, el decremento logarítmico del amortiguamiento es una característica del circuito.

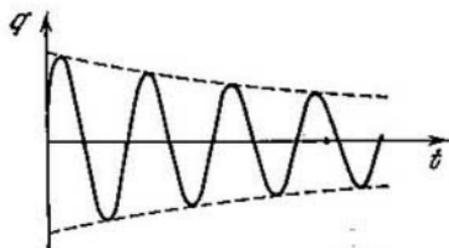


Fig. 90.1.

Si el amortiguamiento es pequeño ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) se puede suponer en (90.10)  $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Entonces

$$\lambda \approx \frac{\pi R \sqrt{LC}}{L} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (90.11)$$

El circuito oscilante se suele caracterizar por su *factor de calidad*  $Q$ , que se define como magnitud inversamente proporcional al decremento logarítmico del amortiguamiento:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \quad (90.12)$$

De (90.12) se sigue que el factor de calidad del circuito es tanto mayor cuanto mayor número de oscilaciones tienen tiempo de efectuarse antes de que la amplitud disminuya  $e$  veces.

En el caso de un amortiguamiento débil

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (90.13)$$

(véase (90.11)).

En el § 58 del tomo 1º se demostró que, si el amortiguamiento es débil, el factor de calidad de un sistema mecánico oscilante es igual, salvo un factor  $2\pi$ , a la razón de la energía acumulada por el sistema en el instante dado, a la disminución de esta energía en un período

de las oscilaciones. La amplitud de la intensidad de la corriente en el circuito decrece según la ley  $e^{-\beta t}$ . La energía  $W$ , acumulada en el circuito, es proporcional al cuadrado de la amplitud de la intensidad de la corriente (o al cuadrado de la amplitud de la tensión en el condensador); por consiguiente,  $W$  decrece de acuerdo con la ley  $e^{-2\beta t}$ . La disminución relativa de la energía en un período es

$$\frac{-\Delta W}{W} = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} = \frac{1 - e^{-2\beta T}}{1} = 1 - e^{-2\lambda}.$$

Si el amortiguamiento es insignificante (es decir, a condición de que  $\lambda \ll 1$ ) se puede suponer que, aproximadamente,  $e^{-2\lambda}$  es igual a  $1 - 2\lambda$ :

$$\frac{-\Delta W}{W} = 1 - (1 - 2\lambda) = 2\lambda.$$

Finalmente, sustituyendo en esta expresión  $\lambda$  por medio del factor  $Q$ , de acuerdo con la fórmula (90.12), y resolviendo respecto de  $Q$  la ecuación que se obtiene, resulta

$$Q = 2\pi \frac{W}{-\Delta W}. \quad (90.14)$$

Para terminar indicaremos que cuando  $R^2/4L^2 \geq 1/LC$ , es decir, cuando  $\beta^2 \geq \omega_0^2$ , en vez de las oscilaciones se produce la descarga aperiódica del condensador. La resistencia del circuito, con la cual el proceso oscilatorio se transforma en aperiódico, se llama crítica. El valor de la resistencia crítica  $R_c$  se determina por la condición  $R_c^2/4L^2 = 1/LC$ , de donde

$$R_c = 2\sqrt{L/C}. \quad (90.15)$$

## § 91. Oscilaciones eléctricas forzadas

Para excitar oscilaciones forzadas hay que ejercer sobre el sistema una acción exterior variable periódicamente. En el caso de las oscilaciones eléctricas esto se puede conseguir intercalando en serie con los elementos del circuito una f.e.m. alterna o, rompiendo el circuito y suministrando a los contactos formados una tensión alterna

$$U = U_m \cos \omega t \quad (91.1)$$

(fig. 91.1). Esta tensión hay que añadirla a la f.e.m. de autoinducción. Como resultado la fórmula (90.1) toma la forma

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} + U_m \cos \omega t. \quad (91.2)$$

Haciendo transformaciones obtenemos la ecuación

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (91.3)$$

Aquí  $\omega_0^2$  y  $\beta$  se determinan por las fórmulas (89.5) y (90.3).

La ecuación (91.3) coincide con la ecuación diferencial de las oscilaciones mecánicas forzadas (véase la fórmula (60.1) del tomo 1º). La solución particular de esta ecuación tiene la forma

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (91.4)$$

donde

$$q_m = \frac{U_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad \text{y} \quad \text{tg } \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(véase la fórmula (60.9) del tomo 1º). La sustitución de los valores de  $\omega_0^2$  y  $\beta$ , da

$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad (91.5)$$

$$\text{tg } \psi = \frac{R}{1/\omega C - \omega L}. \quad (91.6)$$

La solución general se obtiene si a la particular (91.4) se le añade la solución general de la correspondiente ecuación homogénea. Esta

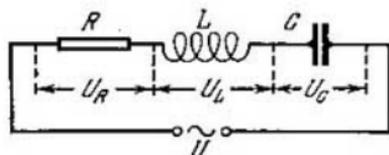


Fig. 91.1.

solución se obtuvo en el párrafo anterior (véase la fórmula (90.5)) ella contiene el factor exponencial  $e^{-\beta t}$ , por lo que pasado un tiempo suficiente se hace muy pequeña y puede despreciarse. Por consiguiente, las oscilaciones forzadas estables se describen por la función (91.4).

Tomando la diferencial respecto de  $t$  de la expresión (91.4), hallamos la intensidad de la corriente en el circuito para las oscilaciones estables:

$$I = -\omega q_m \text{sen}(\omega t - \psi) = I_m \cos(\omega t - \psi + \pi/2)$$

( $I_m = \omega q_m$ ). Escribimos esta expresión en la forma <sup>1)</sup>

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (91.7)$$

donde  $\varphi = \psi - \pi/2$  es el desfase entre la corriente y la tensión aplicada (véase (91.1)). De acuerdo con (91.6)

$$\text{tg } \varphi = \text{tg} \left( \psi - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\text{tg } \psi} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (91.8)$$

<sup>1)</sup> Hasta el final de este capítulo no nos encontraremos con el concepto de potencial. Por lo tanto, el designar con la letra  $\sigma$  el ángulo de fase no puede ocasionar confusiones.

De esta fórmula se deduce que la corriente se retarda en fase respecto de la tensión ( $\varphi > 0$ ) cuando  $\omega L > 1/\omega C$ , y adelanta a la tensión ( $\varphi < 0$ ) a condición de que  $\omega L < 1/\omega C$ . Según (91.5)

$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (91.9)$$

Representamos la relación (91.2) en la forma

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t. \quad (91.10)$$

El producto  $IR$  es igual a la tensión  $U_R$  en la resistencia óhmica;  $q/C$ , la tensión en el condensador  $U_C$ , y la expresión  $L (dI/dt)$  determina la tensión en la inductancia  $U_L$ . Teniendo esto en cuenta se puede escribir

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos \omega t. \quad (91.11)$$

De este modo, la suma de las tensiones en los distintos elementos del circuito es igual en cada instante a la tensión aplicada desde fuera (véase la fig. 91.1).

De acuerdo con (91.7)

$$U_R = RI_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (91.12)$$

Dividiendo la expresión (91.4) por la capacidad, obtenemos la tensión en el condensador

$$U_C = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \varphi) = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (91.13)$$

Aquí

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{I_m}{\omega C} \quad (91.14)$$

(véase (91.9)). Multiplicando la derivada de la función (91.7) por  $L$ , conseguimos la tensión en la inductancia:

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega LI_m \sin(\omega t - \varphi) = U_{Lm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (91.15)$$

Aquí

$$U_{Lm} = \omega LI_m. \quad (91.16)$$

La comparación de las fórmulas (91.7), (91.12), (91.13) y (91.15) muestra que la tensión en la capacidad tiene un retraso de fase de  $\pi/2$  respecto de la intensidad de la corriente y la tensión en la inductancia adelanta la corriente en  $\pi/2$ . La tensión en la resistencia óhmica cambia en fase con la corriente. Las relaciones entre las fases se pueden representar de un modo muy intuitivo valiéndose del diagrama vectorial (véase el § 55 del tomo 1<sup>o</sup>). Se recordará que una oscilación armónica (o una función armónica) se puede dar por medio de un vector, cuya longitud sea igual a la amplitud de la

oscilación y cuya dirección forma con cierto eje un ángulo igual a la fase inicial de las oscilaciones. Tomemos como recta, a partir de la cual se cuenta la fase inicial, el eje de las corrientes. Entonces se obtiene el diagrama que representa la fig. 91.2. Según (91.11), las tres funciones  $U_R$ ,  $U_C$  y  $U_L$  sumadas deben ser iguales a la tensión  $U$  aplicada. De acuerdo con esto la tensión  $U$  se representa en el diagrama por un vector igual a la suma de los vectores  $U_R$ ,  $U_C$  y  $U_L$ .

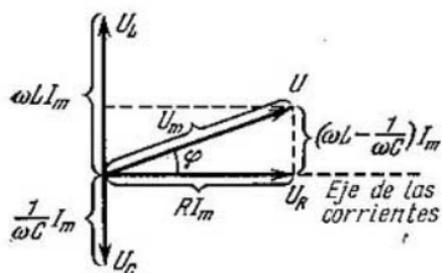


Fig. 91.2.

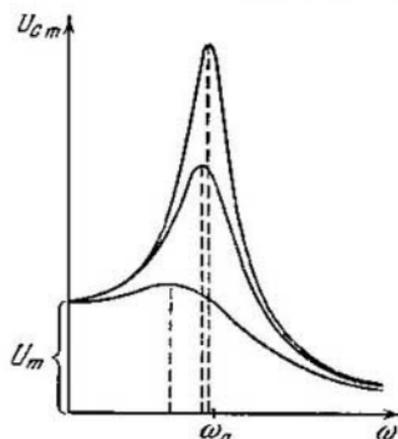


Fig. 91.3.

Advertimos que del triángulo rectángulo formado en el diagrama por los vectores  $U$ ,  $U_R$  y la diferencia  $U_L - U_C$ , es fácil obtener la fórmula (91.9).

La frecuencia de resonancia para la carga  $q$  y la tensión en el condensador  $U_C$  es

$$\omega_{q \text{ res}} = \omega_{U \text{ res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0 \quad (91.17)$$

(véase la fórmula (60.17) del tomo 1°).

Las curvas de resonancia para  $U_C$  se representan en la fig. 91.3 (las curvas de resonancia para  $q$  tienen la misma forma). Estas curvas son semejantes a las de resonancia obtenidas para las oscilaciones mecánicas (véase la fig. 60.3 del tomo 1°). Si  $\omega \rightarrow 0$  las curvas de resonancia convergen en un punto de ordenada  $U_{Cm} = U_m$ , que es la tensión que se produce en el condensador al conectarlo a la fuente de tensión continua  $U_m$ . El máximo (pico) de resonancia es tanto más alto y agudo cuanto menor es  $\beta = R/2L$ , es decir, cuanto menor es la resistencia óhmica y mayor la inductancia del circuito.

Las curvas de resonancia para la intensidad de la corriente se muestran en la fig. 91.4. Estas curvas corresponden con las de resonancia para la velocidad de las oscilaciones mecánicas. La amplitud de

la intensidad de la corriente tiene su valor máximo cuando  $\omega L - 1/\omega C = 0$  (véase (91.9)). Por consiguiente, la frecuencia de resonancia para la intensidad de la corriente coincide con la frecuencia propia del circuito  $\omega_0$ :

$$\omega_{I \text{ res}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (91.18)$$

El segmento que cortan las curvas de resonancia sobre el eje  $I_m$  es igual a cero; a tensión constante la corriente estable no puede pasar por un circuito con condensador.

Si el amortiguamiento es pequeño ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) la frecuencia de resonancia para la tensión se puede suponer igual a  $\omega_0$  (véase (91.17)).

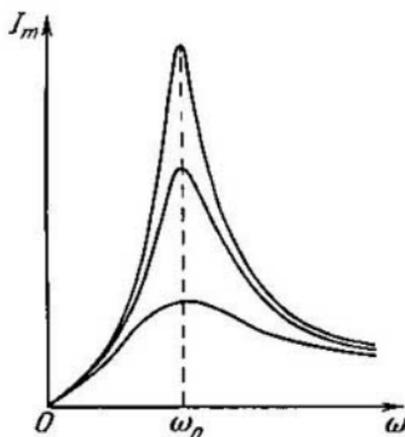


Fig. 91.4.

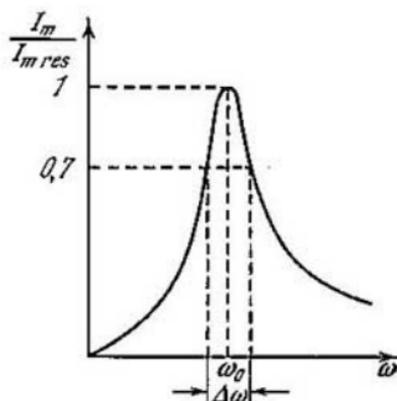


Fig. 91.5.

Respectivamente puede considerarse que  $\omega_{\text{res}} L - 1/\omega_{\text{res}} C \approx 0$ . Según la fórmula (91.14), la razón de la amplitud de la tensión en el condensador durante la resonancia  $U_{Cm \text{ res}}$ , a la amplitud de la tensión exterior  $U_m$  será en este caso

$$\frac{U_{Cm \text{ res}}}{U_m} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \quad (91.19)$$

(hemos supuesto en (91.14)  $\omega = \omega_{\text{res}} = \omega_0$ ). Aquí  $Q$  es el factor de calidad del circuito (véase (90.13)). De este modo, el factor de calidad del circuito indica cuántas veces mayor puede ser la tensión en el condensador que la tensión aplicada.

El factor de calidad determina también la agudeza de las curvas de resonancia. En la fig. 91.5 se muestra una de las curvas de resonancia para la intensidad de la corriente en el circuito. Sobre el eje vertical no se han tomado los valores de  $I_m$  correspondientes a la

frecuencia dada, sino la razón de  $I_m$  a  $I_{mres}$  (es decir, a  $I_m$  de resonancia). Consideremos la anchura de la curva  $\Delta\omega$  tomada a la altura 0,7 (a la relación de las amplitudes igual a 0,7 corresponde una relación de las potencias igual a  $0,7^2 \approx 0,5$ ). Se puede demostrar que la razón de esta anchura a la frecuencia de resonancia es igual a la magnitud recíproca del factor de calidad del circuito:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (91.20)$$

Recordaremos que las fórmulas (91.19) y (91.20) son correctas únicamente para valores grandes de  $Q$ , es decir, cuando el amortiguamiento de las oscilaciones libres en el circuito es pequeño.

El fenómeno de la resonancia se utiliza para separar de una tensión compleja la componente necesaria. Sea la tensión aplicada al circuito

$$U = U_{m1} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots$$

Ajustando el circuito a una de las frecuencias  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , etc., (o sea, eligiendo convenientemente sus parámetros  $C$  y  $L$ ), se puede obtener en el condensador una tensión  $Q$  veces mayor que el valor de la componente dada, mientras que la tensión que crean en dicho condensador las otras componentes será débil. Este proceso se efectúa, por ejemplo, cuando se sintoniza un receptor de radio con la longitud de onda necesaria.

## § 92. Corriente alterna

Las oscilaciones forzadas estables descritas en el párrafo precedente se pueden considerar como una corriente alterna, que pasa por un circuito con capacidad, inductancia y resistencia óhmica, condicionada por una tensión alterna

$$U = U_m \cos \omega t. \quad (92.1)$$

Según las fórmulas (91.7), (91.8) y (91.9) esta corriente varía de acuerdo con la ley

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (92.2)$$

La amplitud de la corriente se determina por la amplitud de la tensión  $U_m$ , los parámetros  $C$ ,  $L$ ,  $R$  y la frecuencia  $\omega$ :

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (92.3)$$

La corriente tiene un retraso de fase, respecto de la tensión, igual al ángulo  $\varphi$ , que depende de los parámetros del circuito y de la fre-

cuencia:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (92.4)$$

En el caso en que  $\varphi < 0$ , la corriente adelanta de hecho la tensión. La expresión que figura en el denominador de la fórmula (92.3)

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (92.5)$$

recibe el nombre de *resistencia eléctrica aparente* o *impedancia*.

Si el circuito sólo tiene resistencia óhmica  $R$ , la ecuación de la ley de Ohm tiene la forma

$$IR = U_m \cos \omega t.$$

De aquí se sigue que, en este caso, la corriente cambia en fase con la tensión, y la amplitud de la intensidad de la corriente es

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

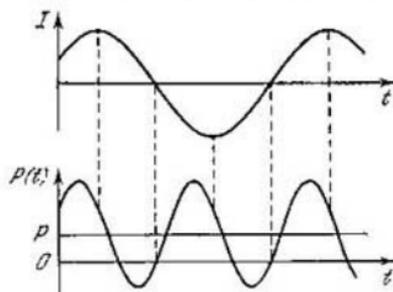


Fig. 92.1.

La comparación de esta expresión con (92.3) muestra que la sustitución del condensador por un trozo cortacircuitado no significa el paso a  $C = 0$ , sino a  $C = \infty$ .

Todo circuito real tiene valores finitos de  $R$ ,  $L$  y  $C$ . En casos aislados algunos de estos parámetros son tales que su influencia sobre

la corriente se puede despreciar. Supongamos que en el circuito se puede considerar  $R$  igual a cero y  $C$  igual a infinito. Entonces, de las fórmulas (92.3) y (92.4) se sigue que

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}, \quad (92.6)$$

y  $\operatorname{tg} \varphi = \infty$  (respectivamente  $\varphi = \pi/2$ ). La magnitud

$$X_L = \omega L \quad (92.7)$$

se llama *reactancia inductiva* o simplemente *inductancia del circuito*. Si  $L$  se expresa en henrios y  $\omega$  en  $s^{-1}$ ,  $X_L$  vendrá expresada en ohmios. De (92.7) se deduce que la inductancia crece con la frecuencia  $\omega$ . A la corriente continua ( $\omega = 0$ ) la inductancia no le opone resistencia.

En la inductancia la corriente se retarda respecto de la tensión en  $\pi/2$ . Respectivamente, en la inductancia, la tensión adelanta la corriente en  $\pi/2$  (véase la fig. 91.2).

Supongamos ahora que  $R$  y  $L$  pueden considerarse nulas. Entonces, según las fórmulas (92.3) y (92.4)

$$I_m = \frac{U_m}{1/\omega C}, \quad (92.8)$$

$\operatorname{tg} \varphi = -\infty$  (es decir,  $\varphi = -\pi/2$ ) La magnitud

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (92.9)$$

se llama *reactancia capacitiva* o simplemente *capacitancia*. Si  $C$  se expresa en faradios y  $\omega$  en  $s^{-1}$ ,  $X_C$  vendrá expresada en ohmios. De (92.9) se sigue que la capacitancia disminuye con la frecuencia. Para la corriente continua  $X_C = \infty$ ; esta corriente no puede pasar a través del condensador. Como  $\varphi = -\pi/2$ , la corriente que pasa por el condensador adelanta la tensión en  $\pi/2$ . Respectivamente, en el condensador la tensión se retarda respecto de la corriente en  $\pi/2$  (véase la fig. 91.2).

Finalmente, supongamos que  $R$  puede considerarse nula. En este caso la fórmula (92.3) se transforma en

$$I_m = \frac{U_m}{|\omega L - 1/\omega C|}. \quad (92.10)$$

La magnitud

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L - X_C \quad (92.11)$$

recibe el nombre de *reactancia*.

Las fórmulas (92.4) y (92.5) se pueden representar en la forma

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

De este modo, si los valores de las resistencias  $R$  y  $X$  se toman a lo largo de los catetos de un triángulo, la longitud de la hipotenusa será numéricamente igual a  $Z$  (véase la fig. 91.2).

Hallemos la potencia que se desprende en el circuito de corriente alterna. El valor instantáneo de la potencia es igual al producto de los valores instantáneos de la tensión y de la intensidad de la corriente:

$$P(t) = U(t) I(t) = U_m \cos \omega t \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (92.12)$$

Aplicando la fórmula

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta),$$

puede dársele a la expresión (92.12) la forma

$$P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi). \quad (92.13)$$

Tiene interés práctico el valor medio respecto del tiempo de  $P(t)$ , que designaremos simplemente por  $P$ . Como el valor medio de  $\cos(2\omega t - \varphi)$  es nulo,

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi. \quad (92.14)$$

De (92.13) se deduce que la potencia instantánea oscila alrededor del valor medio con una frecuencia dos veces mayor que la frecuencia de la corriente (fig. 92.1).

De acuerdo con la fórmula (92.4)

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{R}{Z}. \quad (92.15)$$

Sustituyendo este valor de  $\cos \varphi$  en la fórmula (92.14) y teniendo en cuenta que  $U_m/Z = I_m$ , obtenemos

$$P = \frac{R I_m^2}{2}. \quad (92.16)$$

Esta misma potencia desarrolla una corriente continua, cuya intensidad sea

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (92.17)$$

La magnitud (92.17) se denomina *valor eficaz de la intensidad de la corriente*. De un modo análogo, a la magnitud

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (92.18)$$

se le da el nombre de *valor eficaz de la tensión*.

La expresión de la potencia media valiéndose de los valores eficaces de la intensidad de la corriente y de la tensión, tiene la forma

$$P = UI \cos \varphi. \quad (92.19)$$

El factor  $\cos \varphi$  que figura en esta expresión se llama *factor de potencia*. En la técnica se tiende a que  $\cos \varphi$  sea lo mayor posible. Si  $\cos \varphi$  es pequeño, para que en el circuito se desprenda la potencia necesaria hay que hacer pasar por él una corriente de mayor intensidad, lo que acarrea un aumento de las pérdidas en los conductores de alimentación.

## SEGUNDA PARTE

# ONDAS

### CAPÍTULO XIV

## ONDAS ELÁSTICAS

### § 93. Propagación de las ondas en un medio elástico

Si en un lugar cualquiera de un medio elástico (sólido, líquido o gaseoso) se excitan oscilaciones de sus partículas, como resultado de la interacción entre ellas esta oscilación se propaga en el medio, de partícula en partícula, con cierta velocidad  $v$ . El proceso de propagación de las ondas en el espacio se llama *onda*.

Las partículas del medio en que se propaga la onda no son arrastradas por ésta a un movimiento de traslación, sino que solamente oscilan en torno a sus posiciones de equilibrio. En dependencia de la dirección de las oscilaciones de las partículas respecto de la dirección en que se propaga la onda, se distinguen dos tipos de ondas: *longitudinales* y *transversales*. En una onda longitudinal las partículas del medio oscilan a lo largo de la dirección en que se propaga la onda. En una onda transversal las partículas del medio oscilan en direcciones perpendiculares a la dirección en que se propaga la onda. Las ondas elásticas transversales sólo se pueden producir en un medio que posea resistencia al cizallamiento. Por eso en los medios líquidos y gaseosos sólo se pueden producir ondas longitudinales. En un medio sólido se pueden producir tanto ondas longitudinales como transversales.

En la fig. 93.1 se muestra el movimiento de las partículas cuando por el medio se propaga una onda transversal. Con los números 1, 2, etc., se designan las partículas que se encuentran entre sí a una distancia igual a  $\frac{1}{4} vT$ , o sea, a la distancia que recorre la onda en un cuarto de período de las oscilaciones que efectúan las partículas. En el instante tomado como cero, la onda, al propagarse a lo largo del eje de izquierda a derecha, alcanza a la partícula 1, por lo que ésta empieza a desplazarse de la posición de equilibrio hacia arriba, arrastrando tras sí a las partículas siguientes. Al cabo de un cuarto de período la partícula 1 llega a la posición límite superior y al mismo tiempo comienza a desplazarse de la posición de equilibrio la partícula 2. Un cuarto de período después, la primera partícula pasará por la posición de equilibrio, moviéndose hacia abajo; la

segunda partícula llegará a la posición límite superior, y la tercera partícula iniciará su desplazamiento hacia arriba desde la posición de equilibrio. En el instante igual a  $T$ , la primera partícula termina un ciclo completo de oscilaciones y se encuentra en el mismo estado

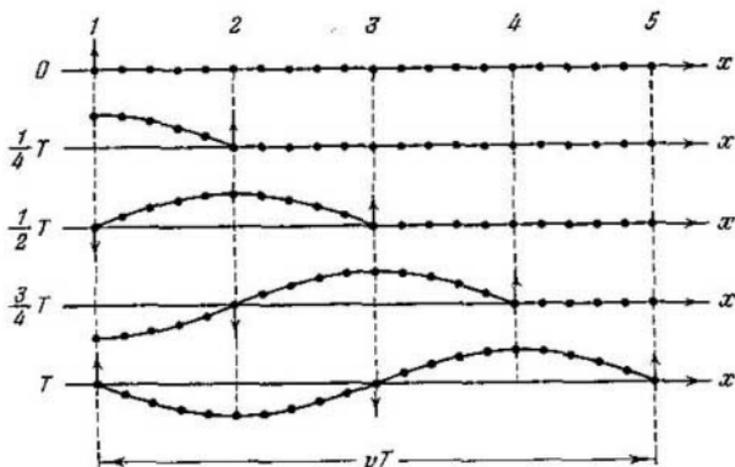


Fig. 93.1.

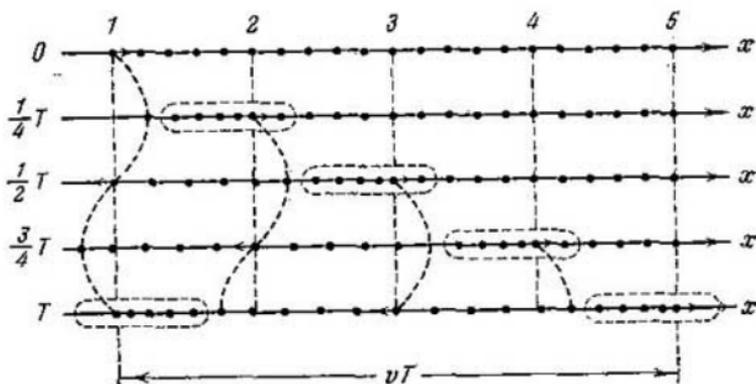


Fig. 93.2.

de movimiento en que estaba en el instante inicial. La onda, en el instante  $T$ , después de haber recorrido el espacio  $vT$ , alcanza a la partícula 5.

La fig. 93.2 representa el movimiento de las partículas cuando por el medio se propaga una onda longitudinal. Todos los razonamientos tocantes al comportamiento de las partículas en la onda trans-

versal se refieren también a este caso, sustituyendo los desplazamientos hacia arriba y hacia abajo por desplazamientos hacia la derecha y hacia la izquierda. Por la figura se ve que, al propagarse la onda longitudinal, se crean en el medio condensaciones y enrarecimientos alternativos de las partículas (los lugares en que se condensan las partículas están cercados con línea de trazos en la figura) que se trasladan en el sentido de la propagación de la onda con la velocidad  $v$ .

En las figs. 93.1 y 93.2 se muestran las oscilaciones de las partículas, cuyas posiciones de equilibrio se encuentran en el eje  $x$ . En realidad oscilan no sólo estas partículas, sino el conjunto de todas

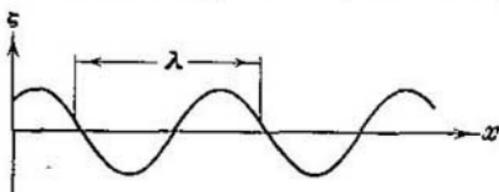


Fig. 93.3.

las comprendidas en un volumen determinado. Al propagarse desde la fuente de las oscilaciones, el proceso ondulatorio abarca cada vez nuevas partes del espacio. El lugar geométrico de los puntos hasta los cuales llegan las oscilaciones en un instante  $t$  se llama *frente de onda*. El frente de onda es la superficie que separa la parte del espacio ya incorporada al proceso ondulatorio, de la región, en la cual aún no se han producido oscilaciones.

El lugar geométrico de los puntos que oscilan en la misma fase se llama *superficie de onda*. Una superficie de onda se puede trazar por cualquier punto del espacio abarcado por el proceso ondulatorio. Por consiguiente, existe un conjunto infinito de superficies de onda, mientras que en cada instante sólo hay un frente de onda. Las superficies de onda permanecen en reposo (pasan por las posiciones de equilibrio de las partículas que oscilan en la misma fase). El frente de onda se traslada continuamente.

Las superficies de onda pueden tener cualquier forma. En los casos más simples tienen la forma de un plano o de una esfera. Respectivamente, en estos casos se dice que la onda es *plana* o *esférica*. En una onda plana las superficies de onda son un conjunto de planos paralelos entre sí; en la onda esférica, un conjunto de esferas concéntricas.

Supongamos que una onda plana se propaga a lo largo del eje  $x$ . Entonces todos los puntos del medio, cuyas posiciones de equilibrio tengan la misma coordenada  $x$  (pero distintos valores de las coordenadas  $y$  y  $z$ ), oscilarán en la misma fase. La fig. 93.3 representa la curva

que da el desplazamiento]  $\xi$  de la posición de equilibrio de los puntos con distintas  $x$  en cierto instante. Esta figura no debe interpretarse como la representación visible de la onda. En ella se representa la gráfica de la función  $\xi(x, t)$  para cierto instante  $t$  determinado. Una gráfica como ésta se puede construir tanto para una onda longitudinal como para una onda transversal.

La distancia  $\lambda$  a que se propaga la onda en un tiempo igual al período de las oscilaciones de las partículas del medio se denomina *longitud de onda*. Es evidente que

$$\lambda = vT, \quad (93.1)$$

donde  $v$  es la velocidad de la onda, y  $T$ , el período de las oscilaciones. La longitud de onda se puede definir también como la distancia entre los puntos más próximos del medio que oscilan con una diferencia de fase igual a  $2\pi$  (véase la fig. 93.3).

Sustituyendo en la relación (93.1)  $T$  por  $1/\nu$  ( $\nu$  es la frecuencia de las oscilaciones), obtenemos

$$\lambda\nu = v. \quad (93.2)$$

A esta fórmula se puede llegar también por medio de los razonamientos siguientes. En un segundo la fuente de ondas realiza  $\nu$  oscilaciones, originando en el medio una «cresta» y un «valle» de onda en cada oscilación. En el instante en que la fuente vaya a efectuar la  $\nu$ -ésima oscilación, la primera «cresta» habrá recorrido el espacio  $v$ . Por consiguiente, las  $\nu$  «crestas» y «valles» de la onda deben caber en la longitud  $v$ .

## § 94. Ecuaciones de las ondas plana y esférica

Se llama ecuación de onda la expresión que da la elongación de la partícula que oscila como función de sus coordenadas  $x, y, z$  y del tiempo  $t$ :

$$\xi = \xi(x, y, z; t) \quad (94.1)$$

(se tiene en cuenta que son las coordenadas de la posición en equilibrio de la partícula). Esta función debe ser periódica tanto respecto del tiempo  $t$  como respecto de las coordenadas  $x, y, z$ . La periodicidad respecto del tiempo se infiere de que  $\xi$  describe las oscilaciones de una partícula, cuyas coordenadas son  $x, y, z$ . La periodicidad respecto de las coordenadas se sigue de que los puntos que se encuentran uno de otro a la distancia  $\lambda$  oscilan del mismo modo.

Hallemos la forma de la función  $\xi$  en el caso de una onda plana, suponiendo que las oscilaciones tienen carácter armónico. Para simplificar dirigiremos los ejes de coordenadas de tal modo que el eje  $x$  coincida con la dirección en que se propaga la onda. Entonces las superficies de onda serán perpendiculares al eje  $x$  y, como todos

los puntos de una superficie de onda oscilan lo mismo, la elongación  $\xi$  dependerá únicamente de  $x$  y de  $t$ :  $\xi = \xi(x, t)$ . Supongamos que las oscilaciones de los puntos que se encuentran en el plano  $x = 0$  (fig. 94.1) tienen la forma

$$\xi(0, t) = a \cos(\omega t + \alpha).$$

Hallemos la forma de las oscilaciones de los puntos de un plano correspondiente a un valor arbitrario de  $x$ . Para recorrer el camino desde el plano  $x = 0$  hasta este plano necesitará la onda el tiempo  $\tau = x/v$  ( $v$  es la velocidad de propagación de la onda). Por lo tanto, las oscilaciones de las partículas que se encuentran en el plano  $x$  tendrán un retraso de tiempo  $\tau$  respecto de las oscilaciones de las partículas del plano  $x = 0$ , es decir, tendrán la forma

$$\xi(x, t) = a \cos[\omega(t - \tau) + \alpha] = a \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right].$$

Así, la ecuación de una onda plana (tanto longitudinal como transversal) que se propaga en la dirección del eje  $x$  tiene la forma siguiente:

$$\xi = a \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right]. \quad (94.2)$$

La magnitud  $a$  es la amplitud de la onda. La fase inicial  $\alpha$  de la onda se determina por la elección de los puntos de referencia  $x$  y  $t$ . Si sólo se considera una onda, los puntos de referencia de tiempo y de las coordenadas se suelen elegir de tal modo que sea igual a cero. Cuando se consideran simultáneamente varias ondas, por lo general no se consigue hacer que para todas ellas las fases iniciales sean iguales a cero.

Fijemos un valor cualquiera de la fase, que figura en la ecuación (94.2), suponiendo que

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha = \text{const.} \quad (94.3)$$

Esta expresión determina la relación entre el tiempo  $t$  y el punto  $x$ , en el cual la fase tiene el valor fijado. El valor de  $dx/dt$  que se infiere de ella da la velocidad con que se traslada el valor dado de la fase. Tomando la diferencial de la expresión (94.3), obtenemos

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0,$$

de donde

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (94.4)$$

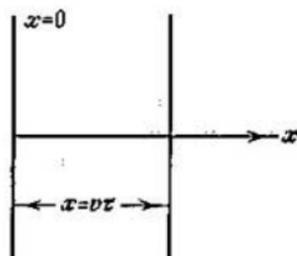


Fig. 94.1.

De este modo, la velocidad  $v$  de propagación de la onda en la ecuación (94.2) es la velocidad con que se traslada la fase, por lo que se le da el nombre de *velocidad de fase*.

Según (94.4),  $dx/dt > 0$ , por consiguiente, la ecuación (94.2) describe una onda que se propaga en el sentido en que  $x$  aumenta. La onda que se propaga en el sentido opuesto se describe por la ecuación

$$\xi = a \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) + \alpha \right]. \quad (94.5)$$

Efectivamente, igualando a una constante la fase de la onda (94.5) y tomando la diferencial de la igualdad obtenida, llegamos a la relación

$$\frac{dx}{dt} = -v,$$

de la que se sigue que la onda (94.5) se propaga en el sentido en que  $x$  disminuye.

A la ecuación de la onda plana se le puede dar una forma simétrica respecto de  $x$  y  $t$ . Para esto se introduce la magnitud

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (94.6)$$

que se denomina *número de onda*. Multiplicando el numerador y el denominador de la expresión (94.6) por la frecuencia  $\nu$ , se puede representar el número de onda en la forma

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (94.7)$$

(véase la fórmula (93.2)). Abriendo paréntesis en (94.2) y teniendo en cuenta (94.7), se llega a la siguiente ecuación de la onda plana que se propaga en el sentido del eje  $x$ :

$$\xi = a \cos (\omega t - kx + \alpha). \quad (94.8)$$

La ecuación de la onda que se propaga en el sentido en que  $x$  disminuye se diferencia de la (94.8) únicamente en el signo del término  $kx$ .

Al deducir la fórmula (94.8) hemos supuesto que la amplitud de las oscilaciones no depende de  $x$ . Para la onda plana esto se observa en el caso en que la energía de la onda no es absorbida por el medio. Cuando la onda se propaga en un medio que absorbe la energía, su intensidad disminuye paulatinamente a medida que dicha onda se aleja de la fuente de las oscilaciones, es decir, se observa un amortiguamiento de la onda. La experiencia demuestra que en un medio homogéneo este amortiguamiento transcurre según la ley exponencial  $a = a_0 e^{-\gamma x}$  (compárese con la disminución con el tiempo de la amplitud de las oscilaciones amortiguadas; véase la fórmula (58.7) del tomo 1º). Respectivamente, la ecuación de la onda plana tiene

la forma siguiente:

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (94.9)$$

( $a_0$  es la amplitud en los puntos del plano  $x = 0$ ).

Hallemos ahora la ecuación de la onda esférica. Toda fuente real de ondas tiene cierta extensión. Pero, si nos limitamos a considerar las ondas a distancias de la fuente mucho mayores que las dimensiones de ésta, la fuente puede considerarse *puntual*. En un medio isótropo y homogéneo, la onda engendrada por una fuente puntual será esférica. Supongamos que la fase de las oscilaciones de la fuente es igual a  $(\omega t + \alpha)$ . Entonces los puntos que se encuentran en una superficie de onda de radio  $r$  oscilarán en la fase

$$\omega(t - r/v) + \alpha = \omega t - kr + \alpha$$

(para recorrer el espacio  $r$  la onda necesita el tiempo  $\tau = r/v$ ). La amplitud de las oscilaciones en este caso, incluso si la energía de la onda no es absorbida por el medio, no permanece constante, sino que disminuye con la distancia a la fuente según la ley  $1/r$  (véase el § 98). Por lo tanto, la ecuación de la onda esférica tiene la forma

$$\xi = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (94.10)$$

donde  $a$  es una magnitud constante numéricamente igual a la amplitud a una distancia de la fuente igual a la unidad. La dimensión de  $a$  es igual a la de una magnitud oscilante multiplicada por la dimensión de la longitud. Para un medio absorbente a la fórmula (94.10) hay que añadirle el factor  $e^{-\gamma r}$ .

Recordaremos que, en virtud de las suposiciones hechas, la ecuación (94.10) sólo es correcta para valores de  $r$  mucho mayores que las dimensiones de la fuente. Si  $r$  tiende a cero, la expresión de la amplitud se transforma en infinito. Este resultado absurdo se explica por la inaplicabilidad de esta ecuación cuando los valores de  $r$  son pequeños.

## § 95. Ecuación de la onda plana que se propaga en una dirección arbitraria

Vamos a hallar la ecuación de una onda plana que se propaga en una dirección que forme con los ejes de coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Supongamos que las oscilaciones en el plano que pasa por el origen de coordenadas (fig. 95.1) tienen la forma

$$\xi_0 = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (95.1)$$

Tomemos una superficie de onda (un plano) que se encuentre del origen de coordenadas a la distancia  $l$ . Las oscilaciones en este plano se retrasarán respecto a las oscilaciones (95.1) en el tiempo

$$\tau = l/v:$$

$$\xi = a \cos \left[ \omega \left( t - \frac{l}{v} \right) + \alpha \right] = a \cos (\omega t - kl + \alpha) \quad (95.2)$$

( $k = \omega/v$ ; véase la fórmula (94.7)).

Expresemos  $l$  por medio del radio vector de los puntos de la superficie considerada. Para esto introducimos el vector unitario  $n$  normal a la superficie de onda. En la fig. 95.1 se ve que el producto escalar de  $n$  por el radio vector  $r$  de cualquiera de los puntos de la superficie es igual a  $l$ :

$$nr = r \cos \varphi = l.$$

Sustituimos en (95.2)  $l$  por  $nr$ :

$$\xi = a \cos (\omega t - knr + \alpha). \quad (95.3)$$

El vector

$$k = kn, \quad (95.4)$$

cuyo módulo es igual al número de onda  $k = 2\pi/\lambda$ , tiene la dirección de la normal a la superficie de onda y se llama *vector de onda*.

De este modo, la ecuación (95.3) se puede representar en la forma

$$\xi(r, t) = a \cos (\omega t - kr + \alpha). \quad (95.5)$$

Hemos obtenido la ecuación de la onda plana no amortiguada que se propaga en el sentido determinado por el vector de onda  $k$ . Si la onda es amortiguada hay que añadirle a esta ecuación el factor  $e^{-\gamma t} = e^{-\gamma nr}$ .

La función (95.5) da la elongación de un punto de radio vector  $r$  en el instante  $t$  (se recordará que  $r$  determina la posición de equilibrio del punto). Para pasar del

radio vector del punto a sus coordenadas  $x, y, z$ , el producto escalar  $kr$  se expresa mediante los componentes del vector que siguen los ejes de coordenadas:

$$kr = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Entonces la ecuación de la onda plana toma la forma

$$\xi(x, y, z; t) = a \cos (\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \quad (95.6)$$

Aquí

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma. \quad (95.7)$$

La función (95.6) da la elongación de un punto de coordenadas  $x, y, z$  en el instante  $t$ . Cuando  $n$  coincide con  $e_x$ ,  $k_x = k$ ,  $k_y = k_z =$

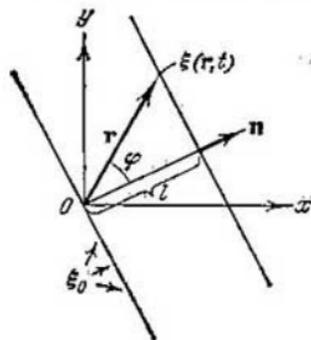


Fig. 95.1.

= 0 y la ecuación (95.6) se transforma en la (94.8). Es muy conveniente escribir la ecuación de la onda plana en la forma

$$\xi = \text{Re } ae^{i(\omega t - kr + \alpha)}. \quad (95.8)$$

El signo  $\text{Re}$  se omite de ordinario, sobreentendiéndose que sólo se toma la parte real de la expresión correspondiente. Además, se introduce el número complejo

$$\hat{a} = ae^{i\alpha} \quad (95.9)$$

llamado *amplitud compleja*. El módulo de este número da la amplitud, y el argumento, la fase inicial de la onda.

Así, la ecuación de la onda plana no amortiguada se puede representar en la forma

$$\xi = \hat{a}e^{i(\omega t - kr)}. \quad (95.10)$$

La ventaja de esta escritura se explica más adelante.

## § 96. Ecuación de onda

La ecuación de una onda cualquiera es solución de la ecuación diferencial llamada *ecuación de onda*. Para establecer la forma de la ecuación de onda comparamos las segundas derivadas parciales, respecto de las coordenadas y del tiempo, de la función (95.6) que describe la onda plana. Tomando dos veces la diferencial de esta función respecto de cada una de las variables, obtenemos

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 a \cos(\omega t - kr + \alpha) = -\omega^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 a \cos(\omega t - kr + \alpha) = -k_x^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 a \cos(\omega t - kr + \alpha) = -k_y^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 a \cos(\omega t - kr + \alpha) = -k_z^2 \xi.$$

La suma de las coordenadas respecto de las coordenadas da

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \xi = -k^2 \xi. \quad (96.1)$$

Comparando esta suma con la derivada respecto del tiempo y sustituyendo  $k^2/\omega^2$  por  $1/v^2$  (véase la fórmula (94.7)), se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (96.2)$$

Esta es la ecuación de onda. Se puede escribir también en la forma

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (96.3)$$

donde  $\Delta$  es el operador de Laplace (véase la fórmula (11.37)).

Es fácil convencerse de que la ecuación de onda la satisface no sólo la función (95.6), sino cualquier función de la forma

$$f(x, y, z; t) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \quad (96.4)$$

En efecto, designando por  $\zeta$  la expresión que figura entre paréntesis en el segundo miembro de (96.4), tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = f' \omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \omega \frac{df'}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \omega^2 f''. \quad (96.5)$$

Análogamente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k_x^2 f'', \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k_y^2 f'', \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = k_z^2 f''. \quad (96.6)$$

La sustitución de las expresiones (96.5) y (96.6) en la ecuación (96.2) conduce a la conclusión de que la función (96.4) satisface la ecuación de onda si se supone  $v = \omega/k$ .

Toda función que satisfaga a una ecuación de la forma (96.2) describe cierta onda, y la raíz cuadrada de la magnitud recíproca del coeficiente de  $\partial^2 \xi / \partial t^2$  da la velocidad de fase de dicha onda.

Para una onda plana que se propague a lo largo del eje  $x$  la ecuación de onda tiene la forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (96.7)$$

## § 97. Velocidad de las ondas elásticas en un medio sólido

Supongamos que en el sentido del eje  $x$  se propaga una onda plana longitudinal. Separemos en el medio un volumen cilíndrico, cuya base tenga el área  $S$  y cuya altura sea  $\Delta x$  (fig. 97.1). Las elongaciones  $\xi$  de las partículas que tienen distinta  $x$  resultan ser diferentes en cada instante (véase la fig. 93.3, en la cual se representa  $\xi$  en función de  $x$ ). Si la base del cilindro de coordenada  $x$  tiene en cierto instante una elongación  $\xi$ , la elongación de la base de coordenada  $x + \Delta x$  será  $\xi + \Delta \xi$ . Por eso el volumen considerado se deforma, recibiendo un alargamiento  $\Delta \xi$  ( $\Delta \xi$  es una magnitud algebraica;  $\Delta \xi < 0$  corresponde a la compresión del cilindro) o un alargamiento relativo  $\Delta \xi / \Delta x$ . La magnitud  $\Delta \xi / \Delta x$  da la deformación media del cilindro. En virtud de que  $\xi$  varía al variar  $x$  no según una ley lineal, la deformación verdadera en distintas secciones del cilindro será diferente. Para obtener la deformación  $\epsilon$  en la sección  $x$  hay que hacer

que  $\Delta x$  tienda a cero. Así

$$\epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (97.1)$$

(se ha tomado el símbolo de derivada parcial porque  $\xi$  no sólo depende de  $x$ , sino también de  $t$ ).

La existencia de la deformación por tracción evidencia que hay una tensión normal  $\sigma$ , que en las deformaciones pequeñas es proporcional a la magnitud de la deformación. Según la fórmula (14.6) del tomo 1º

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (97.2)$$

( $E$  es el módulo de Young del medio). Advertimos que la deformación relativa  $\partial \xi / \partial x$  y, por consiguiente, el esfuerzo  $\sigma$  en el instante fijado, dependen de  $x$  (fig. 97.2). Allí donde las elongaciones de las partículas son máximas, la deformación y el esfuerzo son nulos. En los sitios donde las partículas pasan por la posición de equilibrio, la deformación y el esfuerzo alcanzan sus valores máximos, alternándose unas con otras las deformaciones positivas y negativas (es decir, por tracción y compresión). De acuerdo con esto, como ya se indicó en el § 93, la onda longitudinal

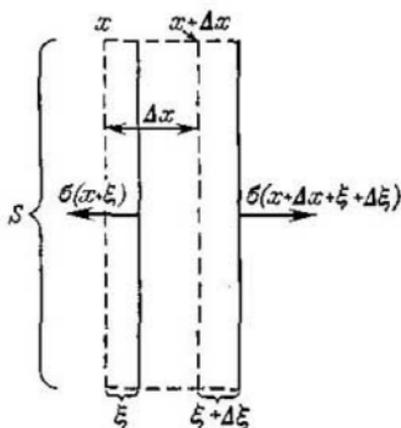


Fig. 97.4.

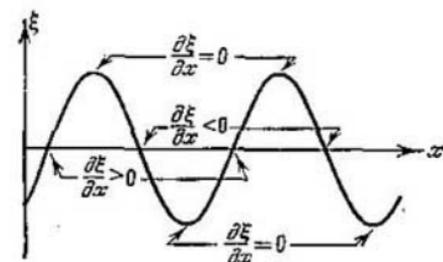


Fig. 97.2.

consta de enrarecimientos y condensaciones alternativas del medio.

Recurramos otra vez al volumen cilíndrico representado en la fig. 97.1 y escribamos para él la ecuación del movimiento. Suponiendo que  $\Delta x$  es muy pequeño, la proyección de la aceleración sobre el eje  $x$  puede considerarse que tiene el mismo valor para todos los puntos del cilindro

y que es igual a  $d^2\xi/dt^2$ . La masa del cilindro es  $\rho S \Delta x$ , siendo  $\rho$  la densidad del medio no deformado. La proyección sobre el eje  $x$  de la fuerza que actúa sobre el cilindro es igual al producto del área  $S$  de la base del cilindro por la diferencia entre los esfuerzos

normales en las secciones  $(x + \Delta x + \xi + \Delta\xi)$  y  $(x + \xi)$ :

$$F_x = SE \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x+\xi+\Delta\xi} - \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\xi} \right]. \quad (97.3)$$

El valor de la derivada  $\partial \xi / \partial x$  en la sección  $x + \delta$  cuando los  $\delta$  son pequeños se puede representar con gran exactitud en la forma

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\delta} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right]_x \delta = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta, \quad (97.4)$$

donde por  $\partial^2 \xi / \partial x^2$  se entiende el valor de la segunda derivada parcial de  $\xi$  respecto de  $x$  en la sección  $x$ .

En vista de la pequeñez de las magnitudes  $\Delta x$ ,  $\xi$  y  $\Delta \xi$ , hacemos en la expresión (97.3) la transformación (97.4):

$$\begin{aligned} F_x &= SE \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} (\Delta x + \xi + \Delta \xi) \right] - \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \xi \right] \right\} = \\ &= SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} (\Delta x + \Delta \xi) \approx SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x \quad (97.5) \end{aligned}$$

(el alargamiento relativo  $\partial \xi / \partial x$  en las deformaciones elásticas suele ser mucho menor que la unidad. Por eso  $\Delta \xi \ll \Delta x$ , de manera que el sumando  $\Delta \xi$  se puede despreciar en la suma  $(\Delta x + \Delta \xi)$ ).

Sustituyendo los valores hallados de la masa, de la aceleración y de la fuerza en la ecuación de la segunda ley de Newton, obtenemos

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x.$$

Finalmente simplificando por  $S \Delta x$ , llegamos a la ecuación

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (97.6)$$

que es la ecuación de onda escrita para el caso en que  $\xi$  no depende de  $y$  ni de  $z$ . La comparación de las ecuaciones (9.67) y (97.6) da que

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (97.7)$$

De este modo la velocidad de fase de las ondas elásticas longitudinales es igual a la raíz cuadrada del módulo de Young dividido por la densidad del medio.

Un cálculo análogo para las ondas transversales lleva a la expresión

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (97.8)$$

donde  $G$  es el módulo de cizallamiento.

### § 98. Energía de una onda elástica

Sea un medio en el cual se propaga, en el sentido del eje  $x$ , una onda longitudinal plana

$$\xi = a \cos (\omega t - kx + \alpha). \quad (98.1)$$

Separemos en este medio un volumen elemental  $\Delta V$  tan pequeño que en todos sus puntos se puedan considerar la velocidad del movimiento y la deformación respectivamente iguales entre sí y a  $\partial \xi / \partial t$  y  $\partial \xi / \partial x$ .

El volumen separado por nosotros tiene la energía cinética

$$\Delta W_c = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V \quad (98.2)$$

( $\rho \Delta V$  es la masa de dicho volumen y  $\partial \xi / \partial t$ , su velocidad).

Según la fórmula (25.4) del tomo 1<sup>o</sup>, el volumen que consideramos posee también la energía potencial de deformación elástica

$$\Delta W_p = \frac{E \epsilon^2}{2} \Delta V = \frac{E}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V$$

( $\epsilon = \partial \xi / \partial x$  es el alargamiento relativo del cilindro, y  $E$ , el módulo de Young del medio). De acuerdo con (97.7) sustituimos el módulo de Young por  $\rho v^2$  ( $\rho$  es la densidad del medio, y  $v$ , la velocidad de fase de la onda). Entonces la expresión de la energía potencial del volumen  $\Delta V$  toma la forma

$$\Delta W_p = \frac{\rho v^2}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V. \quad (98.3)$$

La suma de las expresiones (98.2) y (98.3) da la energía total

$$\Delta W = \Delta W_c + \Delta W_p = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V.$$

Dividiendo esta energía por el volumen  $\Delta V$ , en el cual está contenida, se obtiene la densidad de la energía

$$w = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (98.4)$$

La derivación de la ecuación (98.1) una vez respecto de  $t$  y otra respecto de  $x$ , da

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -a\omega \sin (\omega t - kx + \alpha), \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = ka \sin (\omega t - kx + \alpha).$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (98.4) y tomando en consideración que  $k^2 v^2 = \omega^2$ , obtenemos<sup>11</sup>

$$w = \rho a^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t - kx + \alpha). \quad (98.5)$$

En el caso de una onda transversal se obtiene para la densidad de la energía esta misma expresión.

De (98.5) se sigue que la densidad de la energía en cada instante es distinta en diferentes puntos. En un mismo punto la densidad de la energía varía con el tiempo según la ley del cuadrado del seno. El valor medio del cuadrado del seno es igual a 1/2. Respectivamente, el valor medio, respecto del tiempo, de la densidad de la energía en cada punto del medio es

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2. \quad (98.6)$$

La densidad de la energía (98.5) y su valor medio (98.6) son proporcionales a la densidad del medio  $\rho$ , al cuadrado de la frecuencia  $\omega$  y al cuadrado de la amplitud de la onda  $a$ . Semejante dependencia tiene lugar no sólo en la onda plana no amortiguada, sino también en otros tipos de onda (plana amortiguada, esférica, etc.).

Así, el medio en que se propaga una onda tiene una reserva adicional de energía. Esta energía es llevada desde la fuente de las oscilaciones a los distintos puntos del medio por la onda misma; por consiguiente, la onda transporta consigo energía. La cantidad de energía que transporta la onda a través de cierta superficie en la unidad de tiempo, se llama *flujo de energía* a través de dicha superficie. Si a través de la superficie dada se transporta durante el tiempo  $dt$  la energía  $dW$ , el flujo de energía  $\Phi$  es

$$\Phi = \frac{dW}{dt}. \quad (98.7)$$

El flujo de energía es una magnitud escalar, cuya dimensión es igual a la de la energía dividida por la dimensión del tiempo, es decir, coincide con la dimensión de la potencia. De acuerdo con esto  $\Phi$  se mide en vatios, erg/s, etc.

El flujo de energía puede tener distinta intensidad en diferentes puntos del medio. Para caracterizar la corriente de energía en distintos puntos del espacio se introduce una magnitud vectorial llamada *densidad del flujo de energía*. Esta magnitud es numéricamente igual al flujo de energía a través de una superficie unidad, situada en el punto dado perpendicularmente a la dirección en que es transportada la energía. El sentido del vector densidad del flujo de energía coincide con el del transporte de la energía.

Supongamos que a través de la superficie  $\Delta S_{\perp}$ , perpendicular a la dirección en que se propaga la onda, es transportada en el tiempo  $\Delta t$  la energía  $\Delta W$ . Entonces la densidad del flujo de energía será

$$j = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_{\perp}} = \frac{\Delta W}{\Delta S_{\perp} \Delta t} \quad (98.8)$$

(véase (98.7)). A través de la superficie  $\Delta S_{\perp}$  (fig. 98.1) será transportada en el tiempo  $\Delta t$  la energía  $\Delta W$  contenida en el volumen del cilindro de base  $\Delta S_{\perp}$  y altura  $v \Delta t$  ( $v$  es la velocidad de fase de la onda).

Si las dimensiones de este cilindro son suficientemente pequeñas (a expensas de la pequeñez de  $\Delta S_{\perp}$  y  $\Delta t$ ) para que la densidad de la energía se pueda considerar igual en todos los puntos del cilindro,  $\Delta W$  se puede hallar como el producto de la densidad de la energía  $w$  por el volumen del cilindro, igual a  $\Delta S_{\perp} v \Delta t$ :

$$\Delta W = w \Delta S_{\perp} v \Delta t.$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (98.8), obtenemos para la densidad del flujo de energía

$$j = wv. \quad (98.9)$$

Finalmente, introduciendo el vector  $\mathbf{v}$ , cuyo módulo es igual a la velocidad de fase de la onda y cuyo sentido coincide con el de propagación de la onda (y con el de transporte de la energía), se puede escribir

$$\mathbf{j} = w\mathbf{v}. \quad (98.10)$$

Hemos obtenido la expresión del vector densidad del flujo de energía. Este vector lo introdujo por vez primera el eminente físico

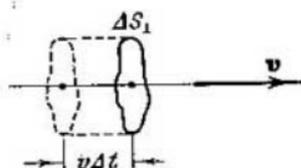


Fig. 98.1.

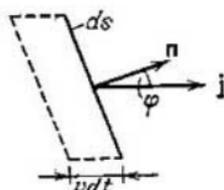


Fig. 98.2.

ruso N.A. Úmov y se llama *vector de Úmov*. El vector (98.10), lo mismo que la densidad de la energía  $w$ , es distinto en diferentes puntos del espacio y en un punto dado varía con el tiempo según la ley del cuadrado del seno. Su valor medio es

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \langle w \rangle \mathbf{v} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 \mathbf{v} \quad (98.11)$$

(véase (98.6)). La expresión (98.11), lo mismo que la (98.6), es correcta para cualquier tipo de onda (esférica, amortiguada, etc.).

Advertimos que cuando se habla de *intensidad de la onda* en un punto dado se entiende por ello el valor medio, respecto del tiempo, de la densidad del flujo de energía transportado por ella.

Conociendo  $\mathbf{j}$  en todos los puntos de una superficie arbitraria  $S$ , se puede calcular el flujo de energía a través de esta superficie. Con este fin se divide dicha superficie en partes elementales  $dS$ . En el tiempo  $dt$  a través de una superficie  $dS$  pasa la energía  $dW$  contenida en el cilindro inclinado que representa la fig. 98.2. El volumen de

este cilindro es  $dV = v dt dS \cos \varphi$ . En él está contenida la energía  $dW = w dV = wv dt dS \cos \varphi$  ( $w$  es el valor instantáneo de la densidad de la energía en el sitio en que se encuentra la superficie  $dS$ ). Teniendo en cuenta que

$$wv dS \cos \varphi = j dS \cos \varphi = j dS$$

( $dS = n dS$ ; véase la fig. 98.2) se puede escribir:  $dW = j dS dt$ . De aquí se obtiene para el flujo de energía  $d\Phi$  a través de la superficie  $dS$  la fórmula

$$d\Phi = \frac{dW}{dt} = j dS \quad (98.12)$$

(compárese con la fórmula (11.5)). El flujo de energía a través de la superficie es igual a la suma de los flujos elementales (98.12):

$$\Phi = \int_S j dS. \quad (98.13)$$

De acuerdo con (11.7) se puede decir que el flujo de energía es igual al flujo del vector  $j$  a través de la superficie  $S$ .

Sustituyendo en la fórmula (98.13) el vector  $j$  por su valor medio respecto del tiempo, obtenemos el valor medio de  $\Phi$ :

$$\langle \Phi \rangle = \int_S \langle j \rangle dS. \quad (98.14)$$

Calculemos el valor medio del flujo de energía, a través de una superficie de onda arbitraria, de una onda esférica no amortiguada. En cada punto de esta superficie los vectores  $j$  y  $dS$  coinciden en dirección. Además, el módulo del vector  $j$  es igual para todos los puntos de la superficie. Por lo tanto,

$$\langle \Phi \rangle = \int_S \langle j \rangle dS = \langle j \rangle S = \langle j \rangle 4\pi r^2$$

( $r$  es el radio de la superficie de onda). Según (98.11),  $\langle j \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v$ . De este modo,

$$\langle \Phi \rangle = 2\pi \rho \omega^2 v a_r^2 r^2$$

( $a_r$  es la amplitud de la onda a la distancia  $r$  de la fuente). Como la energía de la onda no es absorbida por el medio, el flujo de energía medio a través de una esfera de radio cualquiera debe tener el mismo valor, es decir, debe cumplirse la condición

$$a_r^2 r^2 = \text{const.}$$

De aquí se deduce que la amplitud  $a_r$  de una onda esférica no amortiguada es inversamente proporcional a la distancia  $r$  hasta la fuente de la onda (véase la fórmula (94.10)). Respectivamente, la densidad

media del flujo de energía  $\langle j \rangle$  es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia hasta la fuente.

En el caso de una onda plana amortiguada, la amplitud disminuye con la distancia según la ley  $a = a_0 e^{-\gamma x}$  (véase la fórmula (94.9)). Respectivamente, la densidad media del flujo de energía (es decir, la intensidad de la onda) disminuye según la ley

$$j = j_0 e^{-\kappa x}. \quad (98.15)$$

Aquí  $\kappa = 2\gamma$  es la magnitud denominada *coeficiente de absorción de la onda*. Este coeficiente tiene dimensión recíproca a la de la longitud. Es fácil comprender que la magnitud recíproca de  $\kappa$  es igual a la distancia, a la cual la intensidad de la onda disminuye  $e$  veces.

## § 99. Ondas estacionarias

Si en un medio se propagan simultáneamente varias ondas, las oscilaciones de las partículas del medio resultan ser la suma geométrica de las oscilaciones que efectuarían dichas partículas si cada una de las ondas se propagara separadamente. Por lo tanto, las ondas simplemente se superponen unas a otras sin perturbarse entre sí. Esta afirmación se conoce con el nombre de *principio de superposición de las ondas*.

En el caso en que las oscilaciones condicionadas por las ondas aisladas tienen en cada uno de los puntos del medio una diferencia de fase constante, las ondas se llaman *coherentes* (una definición más rigurosa de la coherencia se dará en el § 120). Cuando se componen ondas coherentes se produce el fenómeno de la *interferencia*, que consiste en que las oscilaciones se refuerzan entre sí en unos puntos y se debilitan en otros.

Un caso muy importante de interferencia se observa cuando se superponen dos ondas planas de igual amplitud que avanzan la una al encuentro de la otra. El proceso ondulatorio que se produce como resultado de esto recibe el nombre de *onda estacionaria*. En la práctica las ondas estacionarias se producen cuando las ondas se reflejan en un obstáculo. La onda que incide sobre el obstáculo y la onda reflejada que corre a su encuentro se superponen una a otra y dan una onda estacionaria.

Escribamos las ecuaciones de dos ondas planas que se propaguen a lo largo del eje  $x$  en sentidos contrarios:

$$\xi_1 = a \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \quad \xi_2 = a \cos(\omega t + kx + \alpha_2).$$

Sumando estas ecuaciones y transformando el resultado según la fórmula para la suma de cosenos, se obtiene

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2a \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right). \quad (99.1)$$

La ecuación (99.1) es la ecuación de la onda estacionaria. Para simplificarla elegimos el punto de referencia de  $x$  de tal modo que la diferencia  $\alpha_2 - \alpha_1$  sea igual a cero y el punto de referencia de  $t$ , de manera que resulte igual a cero la suma  $\alpha_1 + \alpha_2$ . Además, sustituimos el número de onda  $k$  por el valor  $2\pi/\lambda$ . Entonces la ecuación (99.1) toma la forma

$$\xi = \left( 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \cos \omega t. \quad (99.2)$$

Por (99.2) se ve que en cada punto de la onda estacionaria se producen oscilaciones de la misma frecuencia que la de las ondas que se encuentran, y cuya amplitud depende de  $x$ :

$$\text{amplitud} = \left| 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|.$$

En los puntos, cuyas coordenadas satisfacen la condición

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (99.3)$$

la amplitud de las oscilaciones alcanza su valor máximo. Estos puntos se llaman *vientres* de la onda estacionaria. De (99.3) se obtienen los valores de las coordenadas de los vientres:

$$x_{\text{vient}} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (99.4)$$

Debe tenerse en cuenta que un vientre no es un punto único, sino un plano, cuyos puntos tienen el valor de la coordenada  $x$  determinado por la fórmula (99.4).

En los puntos, cuyas coordenadas satisfacen la condición

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

la amplitud de las oscilaciones es nula. Estos puntos se denominan *nodos* de la onda estacionaria. Los puntos del medio que se encuentran en los nodos no oscilan. Las coordenadas de los nodos tienen los valores

$$x_{\text{nod}} = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (99.5)$$

Un nodo, lo mismo que un vientre, no es un punto, sino un plano cuyos puntos tienen el valor de la coordenada  $x$  definida por la fórmula (99.5).

De las fórmulas (99.4) y (99.5) se sigue que la distancia entre los vientres contiguos, lo mismo que la distancia entre los nodos vecinos, es igual a  $\lambda/2$ . Los vientres y los nodos están desplazados entre sí en un cuarto de longitud de onda.

Volvamos de nuevo a la ecuación (99.2). El factor  $(i2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda})$  al pasar por el valor nulo cambia de signo. De acuerdo con esto las fases de las oscilaciones a lados distintos de un nodo se diferencian en  $\pi$ . Esto significa que los puntos que se encuentran a lados distintos de un nodo oscilan en oposición de fase. Todos los puntos comprendidos entre dos nodos contiguos oscilan cofásicamente (es decir, en la fase idéntica). En la fig. 99.1 se da una serie de «fotografías instantáneas» de las elongaciones o desviaciones de los puntos de las posiciones de equilibrio. La primera «foto» corresponde al instante en que las elongaciones alcanzan el valor absoluto máximo. Las «fotos» siguientes se han hecho con intervalos de un cuarto de período.

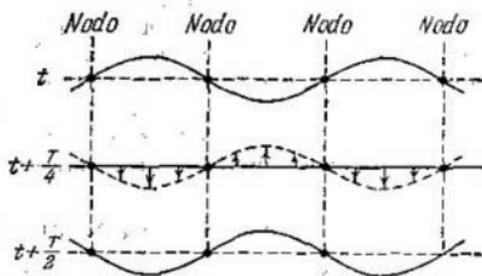


Fig. 99.1.

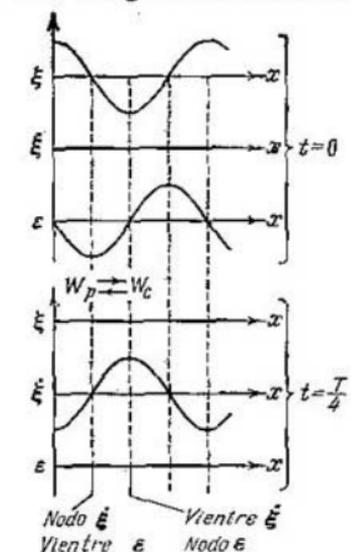


Fig. 99.2.

Las flechas indican las velocidades de las partículas.

Derivando la ecuación (99.2) una vez respecto de  $t$  y otra respecto de  $x$ , hallamos las expresiones de la velocidad de las partículas  $\dot{\xi}$  y de la deformación del medio  $\epsilon$ :

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\omega a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \omega t, \tag{99.6}$$

$$\epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2 \frac{2\pi}{\lambda} a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t. \tag{99.7}$$

La ecuación (99.6) describe la onda estacionaria de la velocidad, y la (99.7), la onda estacionaria de la deformación.

En la fig. 99.2 se comparan las «fotografías instantáneas» de la elongación, de la velocidad y de la deformación en los instantes 0 y  $T/4$ . Por estas gráficas se ve que los nodos y los vientres de la velocidad coinciden con los nodos y vientres de la elongación; en cambio, los nodos y los vientres de la deformación coinciden respectivamente con los vientres y nodos de la elongación.

En el instante en que  $\xi$

y  $\varepsilon$  alcanzan los valores máximos,  $\xi$  se anula, y viceversa. Respectivamente, dos veces por período se produce la transformación de la energía de la onda estacionaria ya totalmente en potencial, concentrada principalmente en las proximidades de los nodos de la onda (donde se encuentran los vientres de la deformación), ya totalmente en cinética, concentrada fundamentalmente en las proximidades de los vientres de la onda (donde se hallan los vientres de la velocidad). Como resultado, se produce el paso de la energía de cada nodo a los vientres contiguos a él, y viceversa. El flujo de energía medio respecto del tiempo en cualquier sección de la onda es nulo.

## § 100. Oscilaciones de una cuerda

En una cuerda tensa sujeta por ambos extremos, cuando se excitan en ella oscilaciones (vibraciones) transversales, se establecen ondas estacionarias, con la particularidad de que en los puntos de sujeción de la cuerda deben encontrarse nodos. Por eso en la cuerda sólo se excitan con intensidad apreciable aquellas oscilaciones, cuyas semilongitudes de onda caben en la longitud de la cuerda un número entero de veces (fig. 100.1). De aquí se infiere la condición

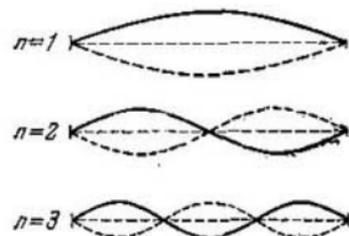


Fig. 100.1.

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{ó} \quad \lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (100.1)$$

( $l$  es la longitud de la cuerda). A las longitudes de ondas (100.1) corresponden las frecuencias

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (100.2)$$

( $v$  es la velocidad de fase de la onda, determinada por la fuerza de tensión de la cuerda y por la masa de la unidad de longitud, o sea, la densidad lineal de dicha cuerda).

Las frecuencias  $\nu_n$  se llaman *frecuencias propias* (naturales) de la cuerda. Las frecuencias propias son múltiplos de la frecuencia

$$\nu_1 = v/2l,$$

que se denomina *frecuencia fundamental*.

Las oscilaciones armónicas, cuyas frecuencias son las (100.2), reciben el nombre de *oscilaciones propias* o *normales*. También se llaman *armónicas*. En el caso general, la oscilación de una cuerda es una superposición de diversas armónicas.

Las oscilaciones de la cuerda son notables en el sentido de que para ellas, según las representaciones clásicas, se obtienen valores

discretos de una de las magnitudes que caracterizan las oscilaciones (frecuencias). En la física clásica esta discontinuidad es una excepción. En los procesos cuánticos la discontinuidad es más bien una regla que una excepción.

## § 101. Sonido

Si las ondas elásticas que se propagan en el aire tienen la frecuencia entre los límites de 16 a 20 000 Hz, cuando llegan al oído humano producen la sensación de sonido. De acuerdo con esto, las ondas elásticas que en cualquier medio tienen la frecuencia comprendida en los límites indicados, se llaman *ondas acústicas* o simplemente *sonido*. Las ondas elásticas de frecuencias menores que 16 Hz se denominan *infrasonido* y las de frecuencias mayores que 20 000 Hz, *ultrasonido*. El oído humano no percibe los infra y ultrasonidos.

Los sonidos audibles se distinguen por su *tono* o *altura*, *timbre* e *intensidad*. A cada una de estas valoraciones subjetivas corresponde una característica física determinada de la onda sonora.

Todo sonido real es no una oscilación armónica simple, sino una superposición de oscilaciones armónicas con un conjunto determinado de las frecuencias. El conjunto de las frecuencias de las oscilaciones presentes en un sonido dado forman el *espectro acústico* de dicho sonido. Si en el sonido están presentes oscilaciones de todas las frecuencias en cierto intervalo de  $\nu'$  a  $\nu''$ , el espectro se dice que es *continuo*. Si el sonido consta de oscilaciones de frecuencias discretas  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ , etc., el espectro es *de rayas*. Tienen espectro acústico continuo los ruidos. Las oscilaciones con espectro de rayas producen sensación de sonido de altura más o menos determinada. Este sonido se denomina *tonal*.

La altura de un sonido tonal se determina por la frecuencia fundamental (menor). La intensidad relativa de los *sobretonos* (es decir, las oscilaciones con las frecuencias  $\nu_2, \nu_3$ , etc.) determina el matiz o timbre del sonido. La distinta composición espectral de los sonidos emitidos por diferentes instrumentos musicales permite distinguir de oído, por ejemplo, una flauta de un violín o de un piano.

Por intensidad del sonido se entiende el valor medio, respecto del tiempo, de la densidad del flujo de energía que lleva consigo la onda sonora. Para producir la sensación de sonido la onda debe poseer cierta intensidad mínima llamada *umbral de audición*. El umbral de audición es algo distinto para diferentes personas y depende mucho de la frecuencia del sonido. La sensibilidad máxima del oído humano corresponde a las frecuencias de 1000 a 4000 Hz. En esta región de frecuencias el umbral de audición constituye, por término medio, cerca de  $10^{-12}$  W/m<sup>2</sup>. En otras frecuencias el umbral

de audición se encuentra más alto (véase la curva inferior de la fig. 101.1).

Con intensidades del orden de 1 a 10 W/m<sup>2</sup> la onda deja de percibirse como sonido y sólo produce en el oído sensación de dolor y presión. El valor de la intensidad, con el cual ocurre esto, se llama *umbral doloroso*. Este umbral, lo mismo que el de audición, depende de la frecuencia (véase la curva superior de la fig. 101.1; los datos que se dan en esta figura se refieren a un oído normal medio).

La intensidad del sonido apreciada subjetivamente crece mucho más despacio que la intensidad de las ondas acústicas. Cuando la intensidad de las ondas aumenta en progresión geométrica, la del sonido lo hace, aproximadamente, en progresión aritmética, es decir, linealmente. Sobre esta base el *nivel de intensidad del sonido*  $L$  se determina como el logaritmo de la razón de la intensidad  $I$  del sonido dado, a la intensidad  $I_0$  que se toma como referencia:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (101.1)$$

La intensidad de referencia  $I_0$  se toma igual a 10<sup>-12</sup> W/m<sup>2</sup>, porque el umbral de audición para la frecuencia del orden de 1000 Hz se encuentra en el nivel nulo ( $L = 0$ ).

La unidad de nivel de intensidad del sonido  $L$  determinada por la fórmula (101.1), se llama *belio*

(B). De ordinario se utiliza una unidad 10 veces menor, el *decibelio* (dB). El valor de  $L$  en decibelios se determina por la fórmula

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (101.2)$$

La relación entre dos intensidades  $I_1$  e  $I_2$  también se puede expresar en decibelios:

$$L_{12} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \quad (101.3)$$

Por medio de esta fórmula se puede expresar en decibelios la disminución de la intensidad (amortiguamiento) de una onda en cierto espacio. Así, por ejemplo, un amortiguamiento de 20 dB significa que la intensidad disminuye 100 veces.

Toda la gama de intensidades, con las cuales una onda produce en el oído humano sensación de sonido (de 10<sup>-12</sup> a 10 W/m<sup>2</sup>), corresponde a los valores de nivel de sonido de 0 a 130 dB. En la tabla 101.1

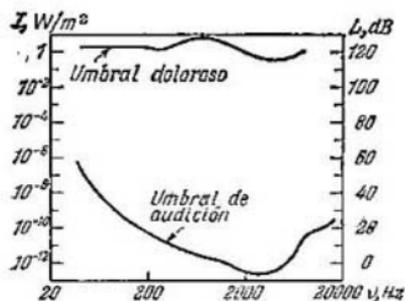


Fig. 101.1

se dan los valores aproximados de los niveles de la intensidad de algunos sonidos.

La energía que llevan consigo las ondas acústicas es extremadamente pequeña. Suponiendo, por ejemplo, que un vaso de agua absorbiera totalmente toda la energía de una onda sonora de 70 dB

Tabla 101.1

Sonido	Nivel de intensidad, dB
Tictac de un reloj	20
Murmullo a 1 m de distancia	30
Conversación en voz baja	40
Conversación a media voz	60
Conversación en alta voz	70
Grito	80
Ruido de motor de avión: a 5 m de distancia	120
a 3 m de distancia	130

de nivel de intensidad que incidiera sobre él (en este caso la cantidad de energía absorbida por segundo sería aproximadamente de  $2 \cdot 10^{-7} \text{W}$ ), para calentar el agua desde la temperatura ambiente hasta la de ebullición, se necesitarían decenas de millares de años.

Las ondas ultrasonoras pueden obtenerse en forma de haces dirigidos, semejantes a los luminosos. Los haces ultrasónicos dirigidos se utilizan mucho en la localización (detección de objetos y determinación de la distancia hasta ellos) en el agua. La idea de la localización ultrasónica la expuso por primera vez el eminente físico francés P. Langevin, que la desarrolló durante la primera guerra mundial para detectar los submarinos. En la actualidad los localizadores ultrasónicos se utilizan para detectar iceberg, bancos de peces, etc.

Sabemos que dando un grito y determinando el tiempo que transcurre hasta que llega el eco, es decir, el sonido reflejado en obstáculos como peñas, bosques, la superficie del agua en un pozo, etc., se puede, multiplicando la mitad de este tiempo por la velocidad del sonido, hallar la distancia hasta dichos obstáculos. En este principio se basa el localizador antes citado y el sondador ultrasónico, que se emplea para medir la profundidad del mar y levantar planos del relieve de su fondo.

El método de la localización ultrasónica permite a los murciélagos orientarse bien cuando vuelan en la oscuridad. El murciélago emite periódicamente impulsos de frecuencia ultrasónica y, por las señales reflejadas que percibe con el órgano del oído, juzga con gran exactitud las distancias hasta los objetos que lo rodean.

## § 102. Velocidad del sonido en los gases

Una onda sonora en un gas es una sucesión de regiones alternantes de compresión y enrarecimiento del gas que se propagan en el espacio. Por consiguiente, la presión en cada punto del espacio experimenta desviaciones  $\Delta p$ , variables periódicamente, del valor medio de  $p$  que coincide con la presión que existe en el gas en ausencia de las ondas. De este modo, el valor instantáneo de la presión en un punto determinado del espacio se puede representar en la forma

$$p' = p + \Delta p.$$

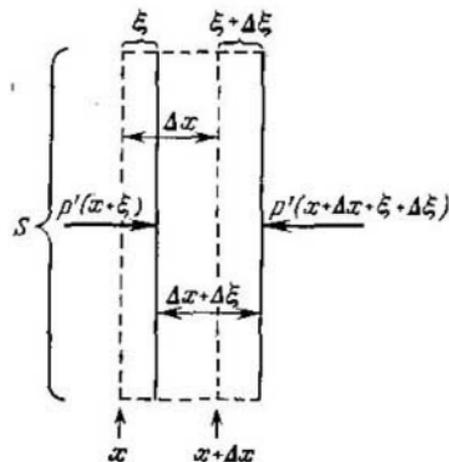


Fig. 102.1

Supongamos que la onda se propaga a lo largo del eje  $x$ . De un modo semejante a como procedimos en el § 97 para hallar la velocidad de las ondas elásticas en un medio sólido, consideremos un volumen de gas en forma de cilindro, cuya base tenga el área  $S$  y cuya altura sea  $\Delta x$  (fig. 102.1). La masa del gas contenida en este volumen será  $\rho S \Delta x$ , siendo  $\rho$  la densidad del gas no perturbado por la onda. En virtud de la pequeñez de  $\Delta x$ , la proyección de la aceleración sobre

el eje  $x$  se puede considerar que tiene el mismo valor para todos los puntos del cilindro y que es igual a  $\partial^2 \xi / \partial t^2$ .

Para hallar la proyección sobre el eje  $x$  de la fuerza que actúa sobre el volumen que nos interesa, hay que tomar el producto del área de la base del cilindro  $S$  por la diferencia de presión en las secciones  $(x + \xi)$  y  $(x + \Delta x + \xi + \Delta \xi)$ . Repitiendo los razonamientos que nos condujeron a la fórmula (97.5), obtenemos

$$F_x = - \frac{\partial p'}{\partial x} S \Delta x$$

(se recordará que al deducir la fórmula (97.5) se supuso que  $\Delta \xi \ll \Delta x$ ).

Así, hemos hallado la masa del volumen de gas separado por nosotros, su aceleración y la fuerza que actúa sobre él. Ahora vamos a escribir, para este volumen de gas, la ecuación de la segunda ley de Newton:

$$(\rho S \Delta x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p'}{\partial x} S \Delta x.$$

Después de simplificar por  $S \Delta x$  se obtiene

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p'}{\partial x}. \quad (102.1)$$

En la ecuación diferencial que hemos obtenido hay dos funciones incógnitas:  $\xi$  y  $p'$ . Expresemos una de estas funciones por medio de la otra. Para esto hay que hallar la relación entre la presión del gas  $p'$  y la variación relativa de su volumen  $\partial \xi / \partial x$ . Esta relación depende del carácter que tenga el proceso de compresión (o expansión) del gas. En la onda acústica las compresiones y expansiones del gas se suceden unas a otras con tanta frecuencia que las partes adyacentes del medio no tienen tiempo de intercambiar calor, por lo que el proceso puede considerarse adiabático. En un proceso adiabático la relación entre la presión y el volumen de una masa de gas dada se determina por la ecuación

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (102.2)$$

en la que  $\gamma$  es la razón entre la capacidad calorífica del gas a presión constante y su capacidad calorífica a volumen constante (véase la ecuación (88.5) del tomo 1°). De acuerdo con (102.2)

$$\begin{aligned} p(S\Delta x)^\gamma &= p' [S(\Delta x + \Delta \xi)]^\gamma = \\ &= p' \left[ S \left( \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \right) \right]^\gamma = p' (S\Delta x)^\gamma \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^\gamma. \end{aligned}$$

La simplificación por  $(S\Delta x)^\gamma$ , da

$$p = p' \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^\gamma.$$

Aprovechando el que por la suposición hecha ( $\partial \xi / \partial x \ll 1$ ), desarrollamos la expresión  $(1 + \partial \xi / \partial x)^\gamma$  en serie de potencias de  $\partial \xi / \partial x$  y despreciamos los términos de órdenes de pequeñez superiores. Como resultado se obtiene la fórmula

$$p = p' \left( 1 + \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \right).$$

Resolvemos esta ecuación respecto de  $p'$ :

$$p' = \frac{p}{1 + \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x}} \approx p \left( 1 - \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad (102.3)$$

(hemos aplicado la fórmula  $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ , válida cuando  $x \ll 1$ ). De la relación hallada es fácil obtener la expresión de  $\Delta p$ :

$$\Delta p = p' - p = -\gamma p \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (102.4)$$

Como  $\gamma$  es una magnitud del orden de la unidad, de (102.4) se infiere que  $|\partial\xi/\partial x| \approx |\Delta p/p|$ . Por lo tanto, la condición  $\partial\xi/\partial x \ll 1$  significa que la desviación de la presión del valor medio es mucho menor que la presión misma. En realidad esto es así: para los sonidos más intensos la amplitud de las oscilaciones de la presión del aire no supera 1 mm Hg, mientras que la presión atmosférica  $p$  tiene una magnitud del orden de  $10^3$  mm Hg.

Derivando la expresión (102.3) respecto de  $x$ , hallamos que

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\gamma p \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Finalmente, sustituyendo este valor de  $\partial p'/\partial x$  en la fórmula (102.1) obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\gamma p} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Su comparación con la ecuación de onda (96.7) da para la velocidad de las ondas acústicas en un gas la expresión

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (102.5)$$

(se recordará que  $p$  y  $\rho$  son la presión y la densidad del gas no perturbado por la onda).

A la presión atmosférica y las temperaturas ordinarias, las propiedades de la mayoría de los gases se aproximan a las del gas perfecto. Por eso la relación  $p/\rho$  puede suponerse que para ellos es igual a  $RT/M$ , donde  $R$  es la constante de los gases;  $T$ , la temperatura absoluta, y  $M$ , la masa de un mol de gas (véase la fórmula (86.8) del tomo 1º). Sustituyendo este valor en (102.5), se obtiene para la velocidad del sonido en el gas la fórmula

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}. \quad (102.6)$$

De esta fórmula se sigue que la velocidad del sonido es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura y no depende de la presión.

La velocidad media del movimiento térmico de las moléculas del gas se determina por la fórmula

$$\langle v_{\text{mol}} \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

(véase la fórmula (98.31) del tomo 1º). La comparación de esta expresión con la (102.6) da que entre la velocidad del sonido en el gas y la velocidad media del movimiento térmico de las moléculas existe la relación

$$v = \langle v_{\text{mol}} \rangle \sqrt{\frac{\gamma \pi}{8}}. \quad (102.7)$$

La sustitución de  $\gamma$  por su valor para el aire, igual a 1,4, conduce a la relación  $v \approx \frac{3}{4} \langle v_{\text{mol}} \rangle$ . El valor máximo posible de  $\gamma$  es  $\frac{5}{3}$ . En este caso  $v \approx \frac{4}{5} \langle v_{\text{mol}} \rangle$ . De este modo, la velocidad del sonido en el gas resulta ser del mismo orden que la velocidad media del movimiento térmico de las moléculas, pero siempre es un poco menor que  $\langle v_{\text{mol}} \rangle$ .

Calculemos el valor de la velocidad del sonido en el aire a la temperatura de 290 K (temperatura ambiente). Para el aire  $\gamma = 1,40$  y  $M = 29 \cdot 10^{-3}$  kg/mol. La constante de los gases es igual a 8,31 J/(mol·K). Sustituyendo estos valores en la fórmula (102.6), obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1,40 \cdot 8,31 \cdot 290}{29 \cdot 10^{-3}}} = 340 \text{ m/s.}$$

El valor de la velocidad del sonido en el aire que hemos hallado concuerda bien con el valor obtenido experimentalmente.

Hallemos la relación entre la intensidad de la onda sonora  $I$  y la amplitud de las oscilaciones de la presión  $(\Delta p)_m$ . En el § 101 se indicó que por intensidad del sonido se entiende el valor medio de la densidad del flujo de energía. Por consiguiente,

$$I = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v \quad (102.8)$$

(véase la fórmula (98.11)). Aquí  $\rho$  es la densidad del gas no perturbado;  $a$ , la amplitud de las oscilaciones de las partículas del medio, es decir, la amplitud de las oscilaciones de la elongación  $\xi$ ;  $\omega$ , la frecuencia, y  $v$ , la velocidad de fase de la onda. Advertimos que, en este caso, por partículas del medio se entienden no las moléculas, sino volúmenes macroscópicos (es decir, que contienen una gran cantidad de moléculas), cuyas dimensiones lineales son mucho mayores que la longitud de la onda.

Supongamos que  $\xi$  varía según la ley  $\xi = a \cos(\omega t - kx + \alpha)$ . Entonces

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = ak \sin(\omega t - kx + \alpha) = a \frac{\omega}{v} \sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (102.4), obtenemos

$$\Delta p = -\gamma p a \frac{\omega}{v} \sin(\omega t - kx + \alpha) = -(\Delta p)_m \sin(\omega t - kx + \alpha).$$

De aquí

$$a = \frac{(\Delta p)_m v}{\gamma p \omega}. \quad (102.9)$$

La sustitución de esta expresión en (102.8), da

$$I = \frac{1}{2} \rho \frac{(\Delta p)_m^2 v^3}{\gamma^2 p^2 \omega^2} \omega^2 v = \frac{(\Delta p)_m^2}{2 \gamma^2 \rho v} \left( \frac{\rho}{p} \right)^2 v^4.$$

Tomando en consideración que  $v^4 = (\gamma RT/M)^2$ , y  $(p/\rho)^2 = (RT/M)^2$  (véase la fórmula (102.6) y el texto que la precede), se puede escribir

$$I = \frac{(\Delta p)_m^2}{2\rho v}. \quad (102.10)$$

Valiéndose de esta fórmula se puede calcular que a la gama de niveles de intensidad del sonido de 0 a 130 dB corresponden los valores aproximados de las amplitudes de las oscilaciones de la presión del aire de  $3 \cdot 10^{-5}$  Pa (es decir,  $2 \cdot 10^{-7}$  mm Hg) a 100 Pa ( $\sim 1$  mm Hg).

Calculemos el valor de la amplitud  $a$  de las oscilaciones de las partículas y de la amplitud de la velocidad de las mismas  $(\dot{\xi})_m$ . Empecemos por el valor de la magnitud  $a$  determinado por la fórmula (102.9). Teniendo en cuenta que  $v/\omega = \lambda/2\pi$ , obtenemos la relación

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{(\Delta p)_m}{p} \approx 0,1 \frac{(\Delta p)_m}{p} \quad (102.11)$$

( $\gamma \approx 1,5$ , por lo tanto,  $2\pi\gamma \approx 10$ ). Si la intensidad del sonido es de 130 dB, la relación  $(\Delta p)_m/p$  tiene una magnitud del orden de  $10^{-3}$ , y si dicha intensidad es de 60 dB esta relación es igual aproximadamente a  $2 \cdot 10^{-7}$ . Las longitudes de las ondas sonoras en el aire se encuentran entre los límites de 21 m (para  $v = 16$  Hz) a 17 mm (para  $v = 20\,000$  Hz). Sustituyendo estos datos en la fórmula (102.11), hallamos que cuando la intensidad del sonido es de 60 dB, la amplitud de las oscilaciones de las partículas es de  $\sim 4 \cdot 10^{-4}$  mm en las ondas más largas, y de  $\sim 3 \cdot 10^{-7}$  mm en las más cortas. Cuando la intensidad del sonido es de 130 dB, la amplitud de las oscilaciones en las ondas más largas llega a  $\sim 2$  mm.

En las oscilaciones armónicas la amplitud de la velocidad  $(\dot{\xi})_m$  es igual a la amplitud de las oscilaciones de las partículas  $a$  multiplicada por la frecuencia angular  $\omega$ :  $(\dot{\xi})_m = a\omega$ . Multiplicando la expresión (102.11) por  $\omega$ , se obtiene

$$\frac{(\dot{\xi})_m}{v} = \frac{1}{\gamma} \frac{(\Delta p)_m}{p} \approx \frac{(\Delta p)_m}{p}. \quad (102.12)$$

Por consiguiente, cuando la intensidad del sonido es de 130 dB, la amplitud de la velocidad es, aproximadamente, de  $340 \text{ m/s} \cdot 10^{-3} = 0,34 \text{ m/s}$ . Si la intensidad del sonido es de 60 dB, la amplitud de la velocidad será del orden de 0,1 mm/s. Advertimos que, a diferencia de la amplitud de las oscilaciones de las partículas, la amplitud de la velocidad no depende de la longitud de la onda.

### § 103. Efecto Doppler acústico

Sea un gas, o un líquido, en el cual, a cierta distancia de una fuente de ondas, se encuentra un dispositivo receptor de las oscilaciones del medio que llamaremos receptor. Si la fuente y el receptor

de ondas están en reposo respecto del medio en que se propaga la onda, la frecuencia de las oscilaciones que percibe el receptor será igual a la frecuencia  $\nu_0$  de las oscilaciones de la fuente. Pero si esta última o el receptor, o ambos a la vez, se mueven con respecto al medio, la frecuencia  $\nu$  que percibe el receptor puede resultar distinta de  $\nu_0$ . Este fenómeno se llama *efecto Doppler*.

Supongamos que la fuente y el receptor se mueven a lo largo de la recta que los une. La velocidad de la fuente  $\nu_f$  la consideraremos positiva si ésta se mueve en dirección hacia el receptor, y negativa,

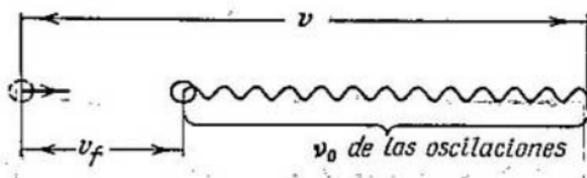


Fig. 103.1.

si se mueve en sentido contrario. Análogamente, la velocidad del receptor  $\nu_r$  se considerará positiva si éste se mueve en dirección hacia la fuente, y negativa si lo hace en sentido opuesto.

Si la fuente está en reposo y oscila con la frecuencia  $\nu_0$ , en el instante en que va a efectuar la  $\nu_0$ -ésima oscilación, la «cresta» generada por la primera oscilación habrá tenido tiempo de recorrer un espacio  $\nu$  ( $\nu$  es la velocidad de propagación de la onda respecto del medio). Por consiguiente, las  $\nu_0$  «crestas» y «valles» de onda que genera la fuente por segundo caben en la longitud  $\nu$ . Pero si la fuente se mueve respecto de medio con la velocidad  $\nu_f$ , en el instante en que vaya a efectuar la  $\nu_0$ -ésima oscilación, la «cresta» generada por la primera se encontrará de la fuente a la distancia  $\nu - \nu_f$  (fig. 103.1). Por lo tanto,  $\nu_0$  «crestas» y «valles» de la onda cabrán en la longitud  $\nu - \nu_f$ , de manera que la longitud de la onda será igual a

$$\lambda = \frac{\nu - \nu_f}{\nu_0}. \quad (103.1)$$

Junto al receptor en reposo pasan por segundo las «crestas» y los «valles» que caben en la longitud  $\nu$ . Si el receptor se mueve con la velocidad  $\nu_r$ , al cabo de un intervalo de tiempo igual a 1 s percibirá la «cresta» que al principio de dicho intervalo se encontraba de su posición actual a una distancia numéricamente igual a  $\nu$ . De este modo, el receptor percibe por segundo las oscilaciones correspondientes a las «crestas» y «valles» que caben en una longitud numéricamente igual a  $\nu + \nu_r$  (fig. 103.2) y oscila con la frecuencia

$$\nu = \frac{\nu + \nu_r}{\lambda}.$$

Sustituyendo en esta fórmula el valor de  $\lambda$  que da la expresión (103.1), obtenemos

$$v = v_0 \frac{v + v_r}{v - v_f}. \quad (103.2)$$

De la fórmula (103.2) se infiere que si la fuente y el receptor se mueven de modo que la distancia entre ellos disminuye, la frecuencia  $v$  que percibe el receptor será mayor que la frecuencia  $v_0$  de la fuente. Y si la distancia entre la fuente y el receptor aumenta,  $v$  será menor que  $v_0$ .

Si las direcciones de las velocidades  $v_f$  y  $v_r$  no coinciden con la recta que pasa por la fuente y el receptor, en la fórmula (103.2) hay

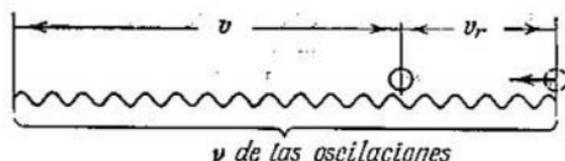


Fig. 103.2.

que tomar, en vez de  $v_f$  y  $v_r$ , las proyecciones de los vectores  $v_f$  y  $v_r$  sobre la dirección de dicha recta.

De la fórmula (103.2) se sigue que el efecto Doppler para las ondas acústicas está determinado por las velocidades con que se mueven la fuente y el receptor respecto del medio en que se propagó el sonido. El efecto Doppler se observa también en las ondas luminosas, pero la fórmula de la variación de su frecuencia tiene otra forma, distinta de la (103.2). Esto se debe a que para las ondas luminosas no existe medio material, cuyas oscilaciones sean «luz». Por eso, la velocidad de la fuente y del receptor de la luz respecto del «medio» carece de sentido. En el caso de la luz sólo se puede hablar de la velocidad relativa de la fuente y el receptor. El efecto Doppler de las ondas luminosas depende de la magnitud y dirección de esta velocidad. Este efecto se estudia en el § 151.

## ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

## § 104. Ecuación de onda para el campo electromagnético

En el capítulo IX se explicó que un campo eléctrico alternativo genera otro, magnético, que, en general, también es alternativo. Este campo magnético alternativo genera a su vez un campo eléctrico y así sucesivamente. De este modo, si por medio de cargas oscilantes se excita un campo electromagnético alternativo, en el espacio que rodea las cargas se produce una sucesión de transformaciones mutuas de los campos eléctrico y magnético que se propagan de punto en punto. Este proceso será periódico en el tiempo y en el espacio y, por lo tanto, será una onda.

Vamos a demostrar que la existencia de las ondas electromagnéticas se infiere de las ecuaciones de Maxwell. En el caso de un medio homogéneo, neutro ( $\rho = 0$ ), no conductor ( $\mathbf{j} = 0$ ), de permitividad  $\epsilon$  y permeabilidad magnética  $\mu$  constantes

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\nabla \mathbf{B} = \mu\mu_0 \nabla \mathbf{H}, \quad \nabla \mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0 \nabla \mathbf{E}.$$

Por eso las ecuaciones (71.1)–(71.4) se pueden escribir de la forma siguiente:

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (104.1)$$

$$\nabla \mathbf{H} = 0, \quad (104.2)$$

$$[\nabla \mathbf{H}] = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (104.3)$$

$$\nabla \mathbf{E} = 0. \quad (104.4)$$

Tomemos el rotor de los dos miembros de la ecuación (104.1)

$$[\nabla, [\nabla \mathbf{E}]] = -\mu\mu_0 \left[ \nabla, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right]. \quad (104.5)$$

El símbolo  $\nabla$  significa la derivación respecto de las coordenadas. La variación del orden de derivación respecto de las coordenadas y del tiempo conduce a la igualdad

$$\left[ \nabla, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \mathbf{H}].$$

Haciendo en (104.5) esta sustitución y poniendo en la ecuación que se obtiene el valor (104.3) del rotor  $\mathbf{H}$ , resulta

$$[\nabla, [\nabla\mathbf{E}]] = -\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (104.6)$$

Según (11.40),  $[\nabla, [\nabla\mathbf{E}]] = \nabla(\nabla\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E}$ . En virtud de (104.4), el primer miembro de esta expresión es nulo. Por eso, el primer miembro de la fórmula (104.6) será igual a  $-\Delta\mathbf{E}$ . De este modo, omitiendo en ambos miembros el signo menos, llegamos a la ecuación

$$\Delta\mathbf{E} = \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

De acuerdo con (39.15),  $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ . Por consiguiente, a esta ecuación se le puede dar la forma

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (104.7)$$

Abriendo el operador de Laplace, obtenemos

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (104.8)$$

Tomando el rotor de ambos miembros de la ecuación (104.3) y haciendo análogas transformaciones, se llega a la ecuación

$$\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial z^2} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (104.9)$$

Las ecuaciones (104.8) y (104.9) están relacionadas entre sí inseparablemente, ya que han sido obtenidas de las (104.1) y (104.3) en cada una de las cuales figura tanto  $\mathbf{E}$  como  $\mathbf{H}$ .

Las ecuaciones (104.8) y (104.9) son ecuaciones de onda típicas (véase 96.2). Toda función que satisfaga una ecuación de este tipo describe cierta onda, y la raíz cuadrada de la magnitud recíproca del coeficiente de la derivada respecto del tiempo da la velocidad de fase de dicha onda. Por consiguiente, las ecuaciones (104.8) y (104.9) indican que los campos electromagnéticos pueden existir en forma de ondas electromagnéticas, cuya velocidad de fase es

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (104.10)$$

En el vacío (es decir, cuando  $\epsilon = \mu = 1$ ) la velocidad de las ondas electromagnéticas coincide con la velocidad de la luz  $c$ .

## § 105. Onda electromagnética plana

Investiguemos una onda electromagnética plana que se propague en un medio neutro, no conductor, de permitividad  $\epsilon$  y permeabilidad magnética  $\mu$  constantes ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$ ,  $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ).

Dirigimos el eje  $x$  perpendicularmente a las superficies de onda. Entonces  $E$  y  $H$ , y por lo tanto sus componentes a lo largo de los ejes de coordenadas, no dependerán de las coordenadas  $y$  y  $z$ . Por eso las ecuaciones (71.5) — (71.8) se simplifican del modo siguiente:

$$0 = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (105.1)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \quad (105.2)$$

$$0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (105.3)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (105.4)$$

La ecuación (105.4) y la primera de las ecuaciones (105.3) indican que  $E_x$  no puede depender de  $x$  ni de  $t$ . La ecuación (105.2) y la primera de las ecuaciones (105.1) dan ese mismo resultado para  $H_x$ . Por consiguiente, las diferencias de cero de  $E_x$  y  $H_x$  sólo pueden ser debidas a los campos homogéneos continuos que se superponen al campo electromagnético de la onda. El campo de la onda mismo no tiene componentes a lo largo del eje  $x$ . De aquí se infiere que los vectores  $E$  y  $H$  son perpendiculares a la dirección en que se propaga la onda, es decir, que las ondas electromagnéticas son transversales. En adelante vamos a suponer que los campos continuos están ausentes y que  $E_x = H_x = 0$ .

Las dos últimas ecuaciones (105.1) y las dos últimas ecuaciones (105.3) se pueden reunir en dos grupos independientes:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (105.5)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (105.6)$$

El primer grupo de ecuaciones relaciona los componentes  $E_y$  y  $H_z$ , el segundo, los componentes  $E_z$  y  $H_y$ . Supongamos que inicialmente se creó el campo eléctrico alternativo  $E_y$  dirigido a lo largo del eje  $y$ . Según la segunda de las ecuaciones (105.5), este campo crea un campo magnético  $H_z$  dirigido a lo largo del eje  $z$ . De acuerdo con la primera ecuación (105.5), el campo  $H_z$  origina un campo eléctrico  $E_y$  y así sucesivamente. Al ocurrir esto no aparece un campo  $E_z$  ni un campo  $H_y$ . Análogamente, si al principio se crea el campo  $E_z$ , según las ecuaciones (105.6) surge el campo  $H_y$ , el cual excita el  $E_z$  y así sucesivamente. En este caso no se producen los campos  $E_y$  y  $H_z$ . De este modo, para definir una onda electromagnética plana basta tomar uno de los sistemas de ecuaciones (105.5) ó (105.6) y suponer los componentes que figuran en el otro sistema iguales a cero.

Tomemos para describir la onda las ecuaciones (105.5) suponiendo  $E_x = H_y = 0$ . Derivamos la primera ecuación respecto de  $x$  y hacemos la sustitución:  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_z}{\partial x}$ . Sustituyendo luego el valor de  $\frac{\partial H_z}{\partial x}$  de la segunda ecuación, obtenemos la ecuación de onda para  $E_y$ :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (105.7)$$

(hemos sustituido  $\epsilon_0 \mu_0$  por  $1/c^2$ ). Derivando respecto de  $x$  la segunda de las ecuaciones (105.5) y después de hacer transformaciones análogas, hallamos la ecuación de onda para  $H_z$ :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (105.8)$$

Las ecuaciones obtenidas son un caso particular de las (104.8) y (104.9).

Recordamos que  $E_x = E_z = 0$  y  $H_x = H_y = 0$ , de manera que  $E_y = E$  y  $H_z = H$ . Hemos conservado en las ecuaciones (105.7) y (105.8) los subíndices  $y$  y  $z$  de  $E$  y  $H$  para subrayar la circunstancia de que los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  están dirigidos a lo largo de los ejes perpendiculares entre sí  $y$  y  $z$ .

La solución más simple de la ecuación (105.7) es la función

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1). \quad (105.9)$$

La solución de la ecuación (105.8) tiene forma análoga:

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (105.10)$$

En estas fórmulas  $\omega$  es la frecuencia de la onda;  $k$ , el número de onda, igual a  $\omega/v$ , y  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , las fases iniciales de las oscilaciones en los puntos de coordenada  $x = 0$ .

Sustituimos las funciones (105.9) y (105.10) en las ecuaciones (105.5):

$$kE_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu \mu_0 \omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2),$$

$$kH_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = \epsilon \epsilon_0 \omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1).$$

Para que estas ecuaciones se satisfagan es necesaria la igualdad de las fases  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Además deben cumplirse las relaciones

$$kE_m = \mu \mu_0 \omega H_m, \quad \epsilon \epsilon_0 \omega E_m = kH_m.$$

Multiplicando entre sí estas dos igualdades, hallamos que

$$\epsilon \epsilon_0 E_m^2 = \mu \mu_0 H_m^2. \quad (105.11)$$

Por lo tanto, las oscilaciones de los vectores eléctrico y magnético en el campo electromagnético se efectúan con la misma fase ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ) y las amplitudes de estos vectores están ligadas por la relación

$$E_m \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H_m \sqrt{\mu \mu_0}. \quad (105.12)$$

Para una onda que se propague en el vacío

$$\frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = \sqrt{(4\pi)^2 \cdot 900} = 120\pi \approx 377\Omega. \quad (105.13)$$

En el sistema de Gauss la fórmula (105.12) tiene la forma

$$E_m \sqrt{c} = H_m \sqrt{\mu}.$$

Por lo tanto, en el vacío  $E_m = H_m$  ( $E_m$  se mide en unidades CGSE y  $H_m$ , en unidades CGSM).

Multiplicando la ecuación (105.9) por el versor del eje  $y$  ( $E_y e_y = E$ ), y la ecuación (105.10) por el versor del eje  $z$  ( $H_z e_z = H$ ), obtenemos las ecuaciones de la onda electromagnética plana en forma vectorial:

$$\left. \begin{aligned} E &= E_m \cos(\omega t - kx), \\ H &= H_m \cos(\omega t - kx) \end{aligned} \right\} (105.14)$$

(hemos supuesto  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ).

En la fig. 105.1 se muestra la «fotografía instantánea» de la onda electromagnética plana. Por esta figura se ve que los vectores  $E$  y  $H$  forman con la dirección en que se propaga la onda un sistema dextrógiro. En un punto fijado del espacio los vectores  $E$  y  $H$  varían con el tiempo según la ley armónica. Aumentan simultáneamente desde cero, al cabo de  $1/4$  de período alcanzan el valor máximo, con la particularidad de que si  $E$  está dirigida hacia arriba,  $H$  lo está hacia la derecha (si se mira a lo largo de la dirección en que se propaga la onda). Después de otro  $1/4$  de período ambos vectores se anulan. Luego vuelven a alcanzar el valor máximo, pero esta vez  $E$  estará dirigido hacia abajo y  $H$ , hacia la izquierda. Finalmente, una vez realizado el período de oscilación, los vectores se anulan de nuevo. Estas variaciones de los vectores  $E$  y  $H$  se producen en todos los puntos del espacio, pero con el desfase determinado por la distancia entre los puntos, medida a lo largo del eje  $x$ .

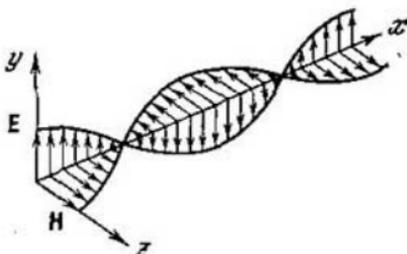


Fig. 105.1.

### § 106. Investigación experimental de las ondas electromagnéticas

Los primeros experimentos con ondas electromagnéticas no luminosas fueron hechos por H. Hertz en 1888. Para obtener las ondas utilizó Hertz un dipolo (oscilador) que él mismo inventó, consistente en dos varillas separadas por un espacio (o distancia) de chispa

(o disruptivo). Cuando hacía llegar al oscilador la alta tensión de una bobina de inducción, en el espacio disruptivo saltaba una chispa. Esta cortocircuitaba dicho espacio y en el oscilador se producían oscilaciones eléctricas amortiguadas (fig. 106.1; las bobinas de choque que se muestran en la figura sirven para evitar que la corriente de alta frecuencia se ramifique en el devanado del inductor). Mientras ardía la chispa tenía tiempo de efectuarse un gran número de oscilaciones que originaban un tren de ondas electromagnéticas, cuya longitud era, aproximadamente, dos veces menor que la longitud del oscilador. Colocando osciladores de distinta longitud en el foco de un espejo parabólico cóncavo, obtenía Hertz ondas planas dirigidas, cuyas longitudes eran de 0,6 a 10 m.

Hertz también estudiaba la onda radiada valiéndose de un dipolo de media onda con espacio disruptor pequeño en el centro. Si este dipolo se colocaba paralelamente al vector intensidad del campo eléctrico, las ondas excitaban en él oscilaciones de la corriente y de la intensidad. Como la longitud de este dipolo se elegía igual a  $\lambda/2$ , en virtud de la resonancia las ondas alcanzaban en él tal intensidad, que hacían que en el espacio disruptivo saltaran pequeñas chispas.

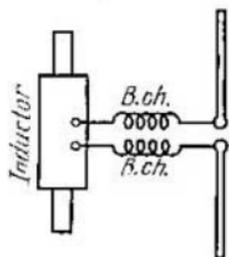


Fig. 106.1.

Con ayuda de unos grandes espejos metálicos y de un prisma de asfalto (de más de un metro de dimensión y 1200 kg de masa) efectuó Hertz la reflexión y la refracción de las ondas electromagnéticas y descubrió que estos dos fenómenos se subordinan a las leyes establecidas en la óptica para las ondas luminosas. Reflejando en sentido contrario una onda plana progresiva en un espejo metálico, obtuvo Hertz una onda estacionaria. La distancia entre los nodos y los vientres de esta onda permitió determinar la longitud  $\lambda$  de la misma. Multiplicando  $\lambda$  por la frecuencia  $\nu$  de las oscilaciones del oscilador se pudo hallar la velocidad de las ondas electromagnéticas, que resultó ser próxima a  $c$ . Interponiendo en el camino de las ondas una red de alambres de cobre paralelos entre sí, descubrió Hertz que, haciendo girar la red alrededor del rayo, la intensidad de las ondas que pasaban a través de la red, sufría una variación intensa. Cuando los alambres que formaban la red eran perpendiculares al vector  $E$ , la onda pasaba a través de dicha red sin perturbaciones. Pero cuando los alambres se colocaban paralelamente a  $E$ , la onda no pasaba a través de la red. De este modo quedó demostrado el carácter transversal de las ondas electromagnéticas.

El físico ruso P. N. Lébedev continuó los experimentos de Hertz y en 1894 obtuvo ondas electromagnéticas de 6 mm de longitud e investigó su paso a través de los cristales. Con esto descubrió la doble refracción de las ondas (véase el § 136).

En 1896 otro físico ruso, A. S. Popov, valiéndose de las ondas electromagnéticas, estableció por primera vez una comunicación a distancia, de cerca de 250 m (en la que transmitió las palabras «Heinrich Hertz»). Así se sentaron las bases de la radiotecnica.

## § 107. Energía de las ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas transportan energía. Según la fórmula (98.9), la densidad del flujo de energía se puede obtener multiplicando la densidad de la energía por la velocidad de la onda.

Vamos a considerar el caso en que la onda electromagnética se propaga en el vacío. En este caso la velocidad de la onda es igual a  $c$ . La densidad de la energía  $w$  del campo electromagnético se compone de la densidad de la energía del campo eléctrico y de la densidad de la energía del campo magnético:

$$w = w_E + w_H = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \quad (107.1)$$

(véanse las fórmulas (30.2) y (67.7); para el vacío  $\epsilon = \mu = 1$ ).

En un punto dado del espacio los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  varían en la misma fase<sup>1)</sup>, por lo que la relación (105.12) entre los valores de las amplitudes de  $E$  y  $H$  es también válida para sus valores instantáneos. Suponiendo en (105.12)  $\epsilon = \mu = 1$ , llegamos a la relación

$$E \sqrt{\epsilon_0} = H \sqrt{\mu_0}. \quad (107.2)$$

De aquí se deduce que las densidades de la energía de los campos eléctrico y magnético de la onda son iguales en cada instante:  $w_E = w_H$ .

Teniendo en cuenta (107.2), a la expresión (107.1) se le puede dar la forma

$$w = \frac{1}{2} (E \sqrt{\epsilon_0}) (E \sqrt{\epsilon_0}) + \frac{1}{2} (H \sqrt{\mu_0}) (H \sqrt{\mu_0}) = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} EH = \frac{1}{c} EH$$

(véase la fórmula (39.15)). Multiplicando la expresión hallada de  $w$  por la velocidad  $c$  de la onda, obtenemos el módulo de la densidad del flujo de energía:

$$S = wc = EH. \quad (107.3)$$

Los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son perpendiculares entre sí y forman con la dirección en que se propaga la onda un sistema dextrógiro. Por eso la dirección del vector  $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$  coincide con la dirección en que es transportada la energía, y el módulo de este vector es igual a  $EH$ . Por consiguiente, el vector densidad del flujo de energía electromagnética se puede representar como el producto vectorial de  $\mathbf{E}$

<sup>1)</sup> Esto es cierto únicamente para el vacío y para un medio no conductor. En un medio conductor las fases  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  no coinciden.

por  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (107.4)$$

El vector  $\mathbf{S}$  se llama *vector de Poynting*.

Se puede demostrar que la fórmula (107.4) es también válida en el caso de una onda electromagnética que se propague en un medio dieléctrico o conductor.

Por analogía con la fórmula (98.13), el flujo  $\Phi$  de energía electromagnética a través de una superficie  $F$  se puede hallar por integración:

$$\Phi = \int_F \mathbf{S} \cdot d\mathbf{F} \quad (107.5)$$

(en la fórmula (98.13) la letra  $S$  significaba la superficie; ahora, como con la letra  $\mathbf{S}$  se designa el vector de Poynting, hemos tenido que utilizar la letra  $F$  para designar la superficie).

De ejemplo de cómo se emplean las fórmulas (107.4) y (107.5) nos va a servir un trozo de conductor cilíndrico homogéneo, por el cual pasa corriente continua (fig. 107.1). Primero vamos a considerar que en este trozo están ausentes las fuerzas exteriores. Entonces, según la fórmula (34.3), en cada punto del conductor se cumple la relación

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}.$$

La corriente continua se distribuye por la sección del conductor con la misma densidad  $\mathbf{j}$ . Por lo tanto, el campo eléctrico dentro de los límites del trozo de conductor representado en la fig. 107.1 será homogéneo. Dentro del conductor separamos mentalmente un volumen cilíndrico de radio  $r$  y longitud  $l$ . En cada punto de la superficie lateral de este cilindro el vector  $\mathbf{H}$  es perpendicular al vector  $\mathbf{E}$  y está dirigido según la tangente a la superficie. El módulo de  $\mathbf{H}$  es igual a  $\frac{1}{2} jr$  (de acuerdo con (52.7)  $2\pi rH = j\pi r^2$ ). De este modo, el vector (107.4), en cada punto de la superficie, está dirigido hacia el eje del conductor y tiene el módulo  $S = EH = \frac{1}{2} Ejr$ . Multiplicando  $S$  por el área de la superficie lateral  $F$  del cilindro, igual a  $2\pi rl$ , hallamos que en el volumen considerado entra un flujo de energía electromagnética

$$\Phi = SF = \frac{1}{2} Ejr \cdot 2\pi rl = Ej \cdot \pi r^2 l = Ej \cdot V, \quad (107.6)$$

donde  $V$  es el volumen del cilindro.

Según (38.4),  $Ej = \rho j^2$  es la cantidad de calor que se desprende por unidad de tiempo en la unidad de volumen del conductor. Por consiguiente, la igualdad (107.6) indica que la energía que se desprende en forma de calor de Lenz—Joule penetra en el conductor, a través de su superficie lateral, en forma de energía del campo electro-

magnético. A medida que penetra más profundamente en el conductor, el flujo de energía se debilita paulatinamente (también disminuye el vector de Poynting y la superficie, a través de la cual pasa el flujo) a expensas de la absorción de la energía y su transformación en calor.

Supongamos ahora que dentro de los límites del trozo de conductor que hemos considerado actúan fuerzas exteriores, cuyo campo es homogéneo ( $E^* = \text{const}$ ). En este caso, según la fórmula (35.1), en cada punto del conductor tiene lugar la relación

$$j = \sigma(E + E^*) = \frac{1}{\rho}(E + E^*),$$

de la que se infiere que

$$E = \rho j - E^*. \quad (107.7)$$

Vamos a suponer que en el trozo considerado las fuerzas exteriores no se oponen, sino que facilitan el paso de la corriente. Esto significa que el sentido de  $E^*$  coincide con el de  $j$ . Admitamos que se cumple la relación  $\rho j = E^*$ . Entonces, según (107.7), la intensidad del campo eléctrico  $E$  en cada punto es nula y el flujo de energía electromagnética a través de la superficie lateral no existe. En este caso el calor se desprende a costa del trabajo de las fuerzas exteriores.

Si se cumple la relación  $E^* > \rho j$ , entonces, como se sigue de (107.7), el vector  $E$  estará dirigido en sentido contrario al del vector  $j$ . En este caso los vectores  $E$  y  $S$  tienen sentidos opuestos a los representados en la fig. 107.1. Por lo tanto, la energía electromagnética no penetra, sino, por el contrario, sale a través de la superficie lateral del conductor al espacio que lo rodea.

Resumiendo, se puede decir que, en un circuito cerrado de corriente continua, la energía de los trozos en que actúan fuerzas exteriores se transmite a los otros trozos del circuito no a lo largo de los conductores, sino a través del espacio que los rodea, en forma de flujo de energía electromagnética caracterizada por el vector  $S$ .

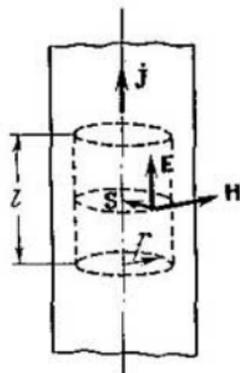


Fig. 107.1.

## § 108. Impulso del campo electromagnético

Al ser absorbida por un cuerpo cualquiera, la onda electromagnética comunica a dicho cuerpo cierto impulso (cantidad de movimiento), es decir, ejerce sobre él una presión. Esto se puede demostrar con el siguiente ejemplo. Sea una onda plana que incide según la normal sobre la superficie plana de un cuerpo débilmente conductor de  $\epsilon$  y  $\mu$  iguales a la unidad (fig. 108.1). El campo eléctrico de la

onda excitará en el cuerpo una corriente de cierta densidad  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . El campo magnético de la onda actuará sobre la corriente con una fuerza, cuya magnitud referida a la unidad de volumen del cuerpo se puede hallar por la fórmula (44.4):

$$F_{\text{unld. vol}} = [\mathbf{jB}] = \mu_0 [\mathbf{jH}].$$

La dirección de esta fuerza, como se ve en la fig. 108.1, coincide con el sentido en que se propaga la onda.

A una capa superficial, de área igual a la unidad y espesor  $dl$ , se le comunica por unidad de tiempo el impulso

$$dK = F_{\text{unld. vol}} dl = \mu_0 \mathbf{jH} dl \quad (108.1)$$

(los vectores  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{H}$  son perpendiculares entre sí). Esta misma capa absorbe en la unidad de tiempo la energía

$$dW = \mathbf{jE} dl, \quad (108.2)$$

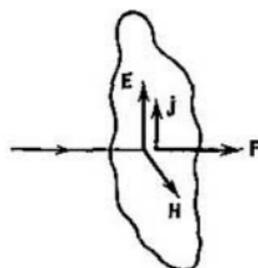


Fig. 108.1.

que se desprende en forma de calor.

El impulso (108.1) y la energía (108.2) son comunicados a la capa por la onda. Tomemos su relación, omitiendo por innecesario el símbolo  $d$ :

$$\frac{K}{W} = \mu_0 \frac{H}{E}.$$

Teniendo en cuenta que  $\mu_0 H^2 = \varepsilon_0 E^2$ , obtenemos

$$\frac{K}{W} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}.$$

De aquí se infiere que la onda electromagnética portadora de la energía  $W$  tiene el impulso

$$K = \frac{1}{c} W. \quad (108.3)$$

Esta misma relación entre la energía y el impulso tiene lugar en las partículas de masa en reposo nula (véase la fórmula (71.1) del tomo 1º). Esto no es extraño, ya que, según las representaciones cuánticas, la onda electromagnética es equivalente a un flujo de fotones, es decir, de partículas, cuya masa es nula (se entiende la masa en reposo).

De (108.3) se sigue que la densidad del impulso (es decir, el impulso por unidad de volumen) del campo electromagnético es

$$K_{\text{unld. vol}} = \frac{1}{c} w. \quad (108.4)$$

Entre la densidad de la energía y el módulo del vector de Poynting existe la relación  $S = wc$ . Sustituyendo en (108.4)  $w$  por  $S/c$  y te-

niendo en cuenta que los sentidos de los vectores  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{S}$  coinciden, se puede escribir

$$\mathbf{K}_{\text{unid. vol}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (108.5)$$

Advertimos que en el transporte de cualquier tipo de energía, la densidad del flujo de energía es igual a la densidad del impulso multiplicada por  $c^2$ . Consideremos, por ejemplo, un conjunto de partículas distribuidas en el espacio con la densidad  $n$  y lanzadas con velocidad  $v$  igual en dirección y magnitud. En este caso la densidad del impulso será

$$\mathbf{K}_{\text{unid. vol}} = n \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (108.6)$$

Las partículas llevan consigo una energía, cuya densidad de flujo  $\mathbf{j}_w$  es igual a la densidad del flujo de partículas multiplicada por la energía de una partícula:

$$\mathbf{j}_w = n\mathbf{v} \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (108.7)$$

De (108.6) y (108.7) se sigue que

$$\mathbf{K}_{\text{unid. vol}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{j}_w. \quad (108.8)$$

Supongamos que la onda electromagnética que incide normalmente sobre cierto cuerpo es absorbida por éste. Entonces a la unidad de superficie del cuerpo se le comunica por unidad de tiempo el impulso de la onda contenido en un cilindro con área de la base igual a la unidad y altura  $c$ . Según (108.4) este impulso es igual a  $(w/c) c = w$ . Al mismo tiempo el impulso que se le comunica a la unidad de superficie por unidad de tiempo es igual a la presión  $p$  sobre dicha superficie. Por consiguiente, en el caso de una superficie absorbente  $p = w$ . Esta magnitud pulsa con gran frecuencia, por lo que en la práctica se puede medir su valor medio respecto del tiempo. De este modo,

$$p = \langle w \rangle. \quad (108.9)$$

Para una superficie perfectamente reflectora la presión será dos veces mayor.

La magnitud de la presión calculada por la fórmula (108.9) resulta ser muy pequeña. Por ejemplo, a 1 m de distancia desde una fuente de luz de un millón de candelas de intensidad, la presión sólo llega, aproximadamente, a  $10^{-7}$  Pa ( $\sim 10^{-9}$  gf/cm<sup>2</sup>). La presión de la luz consiguió medirla P. N. Lébedev. Haciendo experimentos, para los cuales se necesitaban gran ingenio y maestría, Lébedev midió la presión de la luz sobre los sólidos en 1900 y sobre los gases en 1910. Los resultados de estas mediciones estuvieron en completo acuerdo con la teoría de Maxwell.

## § 109. Radiación del dipolo

El sistema más simple radiador de ondas electromagnéticas es el dipolo eléctrico oscilante. De ejemplo de este dipolo puede servir el sistema formado por una carga puntual  $+q$  en reposo y por otra carga puntual  $-q$  que oscile junto a ella (fig. 109.1). El momento eléctrico dipolar de este sistema varía con el tiempo según la ley

$$\mathbf{p} = -q\mathbf{r} = -ql\mathbf{e} \cos \omega t = \mathbf{p}_m \cos \omega t, \quad (109.1)$$

en la que  $r$  es el radio vector de la carga  $-q$ ;  $l$ , la amplitud de las oscilaciones;  $\mathbf{e}$ , el vector unitario dirigido a lo largo del eje del dipolo,  $\mathbf{p}_m = -ql\mathbf{e}$ .

El conocimiento de este sistema radiador tiene especial importancia porque muchos problemas de interacción de la radiación con la

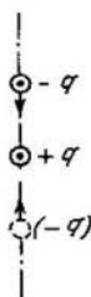


Fig. 109.1.

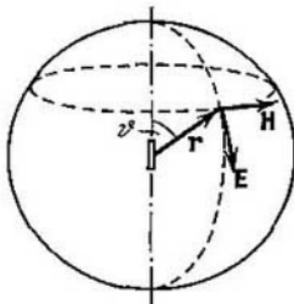


Fig. 109.2.

substancia se pueden explicar clásicamente partiendo de la representación de los átomos como sistemas de cargas que contienen electrones capaces de efectuar oscilaciones armónicas alrededor de las posiciones de equilibrio.

Examinemos la radiación de un dipolo, cuyas dimensiones sean pequeñas en comparación con la longitud de onda ( $l \ll \lambda$ ). Este dipolo se llama *elemental*. En las inmediaciones del dipolo la figura del campo electromagnético es muy compleja. Esta figura se simplifica mucho en la denominada *zona de onda* del dipolo, que comienza a distancias  $r$  mucho mayores que la longitud de onda ( $r \gg \lambda$ ). Si la onda se propaga en un medio isótropo homogéneo, el frente de onda, en la zona de onda, será esférico (fig. 109.2). Los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son en cada punto perpendiculares entre sí y perpendiculares también al rayo, es decir, al radio vector trazado desde el centro del dipolo al punto dado.

Llamemos meridianos a las secciones del frente de onda por planos que pasen por el eje del dipolo, y, paralelos, a los planos perpendiculares a dicho eje. Entonces se puede decir que el vector  $\mathbf{E}$

en cada punto de la zona de onda está dirigido según la tangente al meridiano, y el vector  $\mathbf{H}$ , según la tangente al paralelo. Si se mira a lo largo del rayo  $r$ , la figura instantánea de la onda será la misma que se representó en la fig. 105.1, con la diferencia de que la amplitud disminuye paulatinamente al trasladarse a lo largo del rayo.

En cada punto  $E$  y  $H$  oscilan según la ley  $\cos(\omega t - kr)$ . Las amplitudes  $E_m$  y  $H_m$  dependen de la distancia  $r$  al radiador y del ángulo  $\vartheta$  entre la dirección del radio vector  $r$  y el eje del dipolo (véase la fig. 109.2). Esta dependencia, en el vacío, tiene la forma siguiente:

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r} \sin \vartheta.$$

El valor medio de la densidad del flujo de energía  $\langle S \rangle$  es proporcional al producto  $E_m H_m$ , por lo tanto,

$$\langle S \rangle \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta. \quad (109.2)$$

De esta fórmula se infiere que la intensidad de la onda varía a lo largo del rayo (cuando  $\vartheta = \text{const}$ ) de un modo inversamente pro-

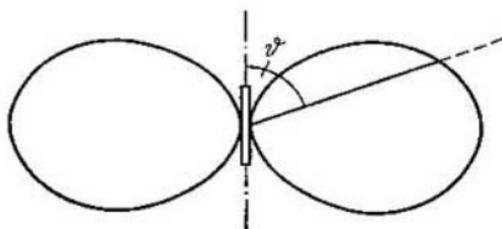


Fig. 109.3.

porcional al cuadrado de la distancia al radiador. Además, depende del ángulo  $\vartheta$ . El dipolo radia con la intensidad máxima en las direcciones perpendiculares a su eje ( $\vartheta = \pi/2$ ). En las direcciones que coinciden con el eje ( $\vartheta = 0$  y  $\pi$ ) el dipolo no radia. La dependencia de la intensidad respecto del ángulo  $\vartheta$  se representa de forma muy comprensible valiéndose del *diagrama direccional del dipolo* (fig. 109.3). Este diagrama se construye de manera que la longitud del segmento que él corta en el rayo trazado desde el centro del dipolo, dé la intensidad de la radiación bajo el ángulo  $\vartheta$ .

El cálculo correspondiente da que la *potencia de la radiación* del dipolo  $P$  (es decir, la energía radiada en todas las direcciones por unidad de tiempo) es proporcional al cuadrado de la segunda derivada del momento dipolar respecto del tiempo:

$$P \sim \ddot{\mathbf{p}}^2. \quad (109.3)$$

Según la fórmula (109.1),  $\ddot{\mathbf{p}}^2 = p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$ . La sustitución de este valor en (109.3) da

$$P \sim p_m^2 \omega^4 \cos^2 \omega t. \quad (109.4)$$

Promediando esta expresión respecto del tiempo, obtenemos

$$\langle P \rangle \sim p_m^2 \omega^4. \quad (109.5)$$

Así, pues, la potencia media de la radiación del dipolo es proporcional al cuadrado de la amplitud del momento eléctrico dipolar y a la cuarta potencia de la frecuencia. Por eso, cuando la frecuencia es pequeña, la radiación de los sistemas eléctricos (por ejemplo, de las líneas de transporte de corriente alterna de frecuencia industrial) suele ser insignificante.

Según (109.1),  $\ddot{\mathbf{p}} = -q\mathbf{r} = -q\mathbf{w}$ , donde  $\mathbf{w}$  es la aceleración de la carga oscilante. La sustitución de esta expresión de  $\ddot{\mathbf{p}}$  en la fórmula (109.3) da que <sup>1)</sup>

$$P \sim q^2 \mathbf{w}^2. \quad (109.6)$$

Esta fórmula determina la potencia de la radiación no sólo cuando la carga oscila, sino también cuando se mueve arbitrariamente. Toda carga que se mueve con aceleración excita ondas electromagnéticas, siendo la potencia de la radiación proporcional al cuadrado de la carga y al de la aceleración. Por ejemplo, los electrones que se aceleran en el betatrón (véase el § 76) pierden energía a expensas de la radiación debida principalmente a la aceleración centrípeta  $w_n = v^2/r$ . Según la fórmula (109.6), la cantidad de energía que pierden los electrones crece mucho al aumentar su velocidad en el betatrón (proporcionalmente a  $v^4$ ). Por eso la posibilidad de acelerar los electrones en el betatrón tiene un límite de  $\sim 500$  MeV (a la velocidad correspondiente a este valor, las pérdidas en radiación se hacen iguales a la energía que comunica a los electrones el campo eléctrico rotacional).

Una carga, oscilando armónicamente, radia una onda monocromática de frecuencia igual a la de las oscilaciones que realiza. Si la aceleración  $\mathbf{w}$  de la carga varía no según la ley armónica, la radiación consta de un conjunto de ondas de frecuencias distintas.

De acuerdo con la fórmula (109.6), la intensidad se anula cuando  $\mathbf{w} = 0$ . Por consiguiente, un electrón moviéndose a velocidad constante no radia ondas electromagnéticas. No obstante, esto es cierto únicamente si la velocidad del electrón  $v_{e1}$  no es mayor que la velocidad de la luz  $v_{luz} = c/\sqrt{\epsilon\mu}$  en el medio en que se mueve el electrón. Si  $v_{e1} > v_{luz}$  se observa la radiación descubierta en 1934 por S. I. Vavílov y P. A. Cherenkov.

<sup>1)</sup> El coeficiente de proporcionalidad de la fórmula (109.6) es igual a  $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}/6\pi c^2 = 20/c^2$  en el SI, y a  $2/(3c^3)$  en el sistema de Gauss.

# TERCERA PARTE

## ÓPTICA

### CAPITULO XVI

## CONOCIMIENTOS PREVIOS

### § 110. Onda luminosa

La luz es un fenómeno complejo: en unos casos se comporta como onda electromagnética, en otros, como flujo de partículas especiales (fotones). En este tomo se estudia la *óptica ondulatoria*, es decir, el conjunto de fenómenos, en cuya base se encuentra la naturaleza ondulatoria de la luz. Los fenómenos debidos a la naturaleza corpuscular<sup>1)</sup> de la luz se estudiarán en el tomo tercero.

En una onda electromagnética oscilan los vectores **E** y **H**. La experiencia demuestra que las acciones fisiológicas, fotoquímicas, fotoeléctricas y otras de la luz se deben a las oscilaciones del vector eléctrico. De acuerdo con esto, en adelante se hablará de *vector luz*, entendiéndose por él el vector intensidad del campo eléctrico. Al vector magnético de la onda luminosa casi no vamos a recordarlo.

El módulo de la amplitud del vector luz lo designaremos generalmente con la letra *A* (y a veces por  $E_m$ ). Respectivamente, la variación en el tiempo y en el espacio de la proyección del vector luz sobre la dirección, a lo largo de la cual oscila, se definirá por la ecuación

$$E = A \cos (\omega t - kr + \alpha). \quad (110.1)$$

Aquí *k* es el número de onda, y *r*, la distancia medida a lo largo de la dirección en que se propaga la onda luminosa. Para una onda plana que se propague en un medio no absorbente,  $A = \text{const}$ ; para una onda esférica *A* disminuye como  $1/r$  y así sucesivamente.

La razón de la velocidad de la onda luminosa en el vacío a la velocidad de fase *v* en un medio determinado se llama índice de refracción absoluto de dicho medio y se designa con la letra *n*. De este modo

$$n = \frac{c}{v}. \quad (110.2)$$

La comparación con la fórmula (104.10) da que  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ . Para la inmensa mayoría de las sustancias transparentes  $\mu$  no se diferencia

<sup>1)</sup> De corpúsculo, es decir, partícula.

prácticamente de la unidad. Por eso se puede considerar que

$$n = \sqrt{\epsilon}. \quad (110.3)$$

La fórmula (110.3) relaciona las propiedades ópticas de la sustancia con sus propiedades eléctricas. A primera vista puede parecer que esta fórmula no es correcta. Por ejemplo, para el agua  $\epsilon = 81$ , mientras que  $n = 1.33$ . Pero hay que tener presente que el valor  $\epsilon = 81$  se obtuvo por medio de mediciones electrostáticas. En los campos eléctricos rápidamente variables el valor de  $\epsilon$  que se obtiene es otro, que depende de la frecuencia de las oscilaciones del campo. Esto explica la *dispersión* de la luz, es decir, la dependencia del índice de refracción (o la velocidad de la luz) de la frecuencia (o de la longitud de onda). La sustitución en la fórmula (110.3) del valor de  $\epsilon$ , obtenido para la frecuencia correspondiente, conduce al valor correcto de  $n$ .

Los valores de los índices de refracción caracterizan la *densidad óptica* del medio. Los medios con  $n$  grande se dice que son ópticamente más densos que los medios con  $n$  menor. Respectivamente, los medios con  $n$  menor se dice que son ópticamente menos densos que los medios con  $n$  mayor.

Las longitudes de las ondas de la luz visible se encuentran entre los límites

$$\lambda_0 = 0,40 \dots 0,76 \mu\text{m} \quad (4000 \dots 7600 \text{ \AA}). \quad (110.4)$$

Estos valores se refieren a las ondas luminosas en el vacío. En una sustancia las longitudes de las ondas luminosas serán otras. En el caso de oscilaciones de frecuencia  $\nu$ , la longitud de onda en el vacío será  $\lambda_0 = c/\nu$ . En un medio en el que la velocidad de fase de la onda luminosa sea  $v = c/n$ , la longitud de onda tiene el valor  $\lambda = v/\nu = c/\nu n = \lambda_0/n$ . De este modo, la longitud de la onda luminosa en un medio con índice de refracción  $n$  está ligada con la longitud de onda en el vacío por la relación

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}. \quad (110.5)$$

Las frecuencias de las ondas luminosas visibles se encuentran entre los límites

$$\nu = (0,39 \dots 0,75) \cdot 10^{15} \text{ Hz}. \quad (110.6)$$

La frecuencia con que varía el vector densidad del flujo de energía transportado por la onda será aún mayor (igual a  $2\nu$ ). Ni el ojo, ni ningún receptor de energía luminosa pueden seguir unas variaciones tan frecuentes del flujo de energía, por lo que sólo registran el flujo promediado respecto del tiempo. El módulo del valor medio, respecto del tiempo, de la densidad del flujo de energía transportado por la onda luminosa recibe el nombre de *intensidad de la luz*  $I$  en el punto

dato del espacio. La densidad del flujo de energía electromagnética viene determinada por el vector de Poynting  $\mathbf{S}$ . Por consiguiente,

$$I = \langle \mathbf{S} \rangle = \langle [\mathbf{E}\mathbf{H}] \rangle. \quad (110.7)$$

El promedio se hace por el tiempo de «respuesta» del aparato, que, como se indicó, es mucho mayor que el período de las oscilaciones de la onda. La intensidad se mide en unidades de energía (por ejemplo, en  $\text{W}/\text{m}^2$ ) o en unidades ópticas llamadas «lumen por metro cuadrado» (véase el § 114).

Según la fórmula (105.12), los módulos de la amplitud de los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en la onda electromagnética están ligados por la relación

$$E_m \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H_m \sqrt{\mu \mu_0} = H_m \sqrt{\mu_0}$$

(hemos supuesto  $\mu = 1$ ). De aquí se sigue que

$$H_m = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_m = n E_m \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}},$$

donde  $n$  es el índice de refracción del medio en que se propaga la onda. De este modo,  $H_m$  es proporcional a  $E_m$  y  $n$ :

$$H_m \sim n E_m. \quad (110.8)$$

El módulo del valor medio del vector de Poynting es proporcional a  $E_m H_m$ . Por eso se puede escribir que

$$I \sim n E_m^2 = n A^2 \quad (110.9)$$

(el coeficiente de proporcionalidad es igual a  $1/2 \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$ ). Por lo tanto, la intensidad de la luz es proporcional al índice de refracción del medio y al cuadrado de la amplitud de la onda luminosa.

Advertimos que cuando se estudia la propagación de la luz en un medio homogéneo se puede considerar que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda luminosa:

$$I \sim A^2. \quad (110.10)$$

ero en el caso de que la luz pase a través del límite de separación de distintos medios, la expresión de la intensidad que no tiene en cuenta el factor  $n$  conduce a la no conservación del flujo luminoso.

Las líneas, a lo largo de las cuales se propaga la energía luminosa, se llaman *rayos*. El vector de Poynting promediado ( $\mathbf{S}$ ) está dirigido en cada punto según la tangente al rayo. En los medios isótropos la dirección de  $\langle \mathbf{S} \rangle$  coincide con la normal a la superficie de onda, es decir, con la dirección del vector de onda  $\mathbf{k}$ . Por consiguiente, los rayos son perpendiculares a las superficies de onda. En los medios anisótropos, la normal a la superficie de onda no coincide en general con la dirección del vector de Poynting, de modo que los rayos no son ortogonales respecto de la superficie de onda.

A pesar de que las ondas luminosas son transversales, de ordinario no manifiestan asimetría respecto al rayo. Esto se debe a que en la luz *natural* (es decir, en la que emiten las fuentes ordinarias) existen oscilaciones que se realizan en las direcciones más diversas perpendiculares al rayo (fig. 110.1). La radiación de un cuerpo luminoso está formada por las ondas que emiten sus átomos. El proceso de radiación de un átomo aislado dura aproximadamente  $10^{-8}$  s. Este tiempo es suficiente para que origine una sucesión de crestas y valles (o, como suele decirse, un *tren de ondas*) de, aproximadamente, 3 m de longitud. Después de «apagarse», al cabo de cierto tiempo el átomo vuelve a «resplandecer». Al mismo tiempo «resplandecen» muchos átomos. Los trenes de ondas excitados por ellos se superponen entre sí y forman la onda luminosa emitida por el cuerpo. El plano de oscilaciones de cada tren de ondas está orientado casualmente. Por eso, en la onda resultante las oscilaciones en distintas direcciones están representadas con igual probabilidad.



Fig. 110.1.

En la luz natural las oscilaciones en distintas direcciones se sustituyen unas a otras rápida y desordenadamente. Una luz en la cual la dirección de las oscilaciones esté ordenada de un modo cualquiera, se denomina *polarizada*. Si las oscilaciones del vector luz tienen lugar solamente en un plano que pase por el rayo, se dice que la polarización es *rectilínea* o que la luz está *planopolarizada*. La ordenación puede consistir en que el vector  $E$  gire alrededor del rayo, pulsando al mismo tiempo en magnitud. Como resultado de esto el extremo del vector  $E$  describe una elipse. Esta polarización se llama *elíptica*. Si el extremo del vector  $E$  describe una circunferencia, la polarización es *circular*.

En los capítulos XVII y XVIII se tratará de la luz natural. Por eso la dirección de las oscilaciones del vector luz no nos va a interesar particularmente. Los procedimientos para obtener luz polarizada y las propiedades de ésta se estudiarán en el capítulo XIX.

### § 111. Representación de las funciones armónicas por medio de los exponentes

Formemos la suma de dos números complejos  $z_1 = x_1 + iy_1$  y  $z_2 = x_2 + iy_2$ :

$$\begin{aligned} z = z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \end{aligned} \quad (111.1)$$

De (111.1) se sigue que la parte real de la suma de dos números complejos es igual a la suma de las partes reales de los sumandos:

$$\operatorname{Re} (z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2. \quad (111.2)$$

Supongamos que un número complejo es función de cierto parámetro, por ejemplo, del tiempo  $t$ :

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Tomando la diferencial de esta función respecto de  $t$ , obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}.$$

De aquí se infiere que la parte real de la derivada de  $z$  respecto de  $t$  es igual a la derivada respecto de  $t$  de la parte real de  $z$ :

$$\operatorname{Re} \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} z. \quad (111.3)$$

Al integrar una función compleja se tiene una relación análoga. En efecto,

$$\int z(t) dt = \int x(t) dt + i \int y(t) dt,$$

de donde se deduce que la parte real de la integral de  $z(t)$  es igual a la integral de la parte real de  $z(t)$ :

$$\operatorname{Re} \int z(t) dt = \int \operatorname{Re} z(t) dt. \quad (111.4)$$

Es evidente qué relaciones análogas a las (111.2), (111.3) y (111.4) tienen lugar también para las partes imaginarias de las funciones complejas.

De lo expuesto se infiere que cuando con funciones complejas se hacen operaciones de suma, diferenciación o integración, así como combinaciones lineales de estas operaciones, la parte real (o la imaginaria) del resultado coincide con el resultado que se obtendría si se efectuaran operaciones análogas con las partes reales (o imaginarias) de las mismas funciones <sup>1)</sup>. Designando con el símbolo  $\tilde{L}$  la combinación lineal de las operaciones antes enumeradas, se puede escribir:

$$\operatorname{Re} \tilde{L}(z_1, z_2, \dots) = \tilde{L}(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2, \dots). \quad (111.5)$$

La propiedad de las operaciones lineales que hemos establecido permite aplicar el siguiente procedimiento de cálculo: al efectuar operaciones lineales con funciones armónicas de la forma

$$a \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha),$$

<sup>1)</sup> Advertimos que esta regla no es aplicable a las operaciones no lineales, como, por ejemplo, la multiplicación de funciones, la elevación al cuadrado, etc.

sustituir estas funciones por los exponentes

$$ae^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)} = \hat{a}e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}, \quad (111.6)$$

donde  $\hat{a} = ae^{i\alpha}$  es un número complejo llamado *amplitud compleja*. Con esta representación se puede efectuar la suma, la derivación respecto de las variables  $t$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y la integración, respecto de estas variables, de las funciones. Al hacer los cálculos se debe tomar la parte real del resultado obtenido. La conveniencia de este procedimiento se explica porque los cálculos con exponentes son mucho más sencillos que los que se hacen con las funciones trigonométricas.

Al pasar a la representación (111.6), en esencia, añadimos a todas las funciones de la forma  $a \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)$  los sumandos  $ia \sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)$ . Se recordará que este procedimiento se empleó ya al estudiar las oscilaciones forzadas (véase el § 60 del tomo 1°).

## § 112. Reflexión y refracción de una onda plana en el límite entre dos dieléctricos

Sea una onda electromagnética plana que incida sobre el límite de separación entre dos dieléctricos homogéneos e isotrópicos. El dieléctrico, en el cual se propaga la onda incidente, se caracteriza por la permitividad  $\epsilon_1$ ; el segundo dieléctrico, por la permitividad  $\epsilon_2$ . Las permeabilidades magnéticas las suponemos iguales a la unidad. La experiencia demuestra que en este caso, además de la onda plana refractada que se propaga en el segundo dieléctrico, surge una onda plana reflejada que se propaga en el primer dieléctrico.

Determinemos la dirección en que se propaga la onda incidente valiéndonos del vector de onda  $\mathbf{k}$ ; la onda reflejada, con ayuda del vector  $\mathbf{k}'$  y, finalmente, la onda refractada, por medio del vector  $\mathbf{k}''$ . Hallemos cómo se relacionan las direcciones de  $\mathbf{k}'$  y  $\mathbf{k}''$  con la dirección de  $\mathbf{k}$ . Esto se puede hacer aprovechando que en el límite de separación de dos dieléctricos debe cumplirse la condición

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (112.1)$$

Aquí  $E_{1\tau}$  y  $E_{2\tau}$  son las componentes tangenciales de la intensidad del campo eléctrico en los medios primero y segundo, respectivamente.

En el § 21 se demostró la relación (112.1) para los campos electrostáticos (véase la fórmula (21.4)). Pero esta fórmula es fácil extenderla a los campos que varían con el tiempo. Según la ecuación (71.1), que se determina por la expresión (21.2), la circulación de  $\mathbf{E}$  en el caso de campos alternativos no debe ser nula, sino igual a la integral  $\int (-\dot{\mathbf{B}}) dS$  tomada sobre la superficie del contorno representado

en la fig. 21.1:

$$\oint E_1 dl = E_{1x}a - E_{2x}a + \langle E_b \rangle 2b = - \int_{S=ab} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Como  $\mathbf{B}$  es finita, al pasar al límite  $b \rightarrow 0$  la integral del segundo miembro se anula y llegamos a la condición (21.3), de la cual se sigue (21.4).

Supongamos que el vector  $\mathbf{k}$ , que determina la dirección en que se propaga la onda incidente, se encuentra en el plano de la figura (fig. 112.1). La dirección de la normal a la superficie de separación la caracterizamos por el vector  $\mathbf{n}$ . El plano en que se encuentran los vectores  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{n}$  se llama *plano de incidencia* de la onda. Tomamos como eje  $x$  la línea de intersección del plano de incidencia con el límite de separación de los dieléctricos. El eje  $y$  lo dirigimos perpendicularmente al plano de dicha separación. Entonces el eje  $z$  será perpendicular al plano de incidencia y el vector  $\tau$  resulta dirigido a lo largo del eje  $x$  (véase la fig. 112.1).

Por razones de simetría está claro que los vectores  $\mathbf{k}'$  y  $\mathbf{k}''$  sólo pueden estar en el plano de incidencia (los medios son homogéneos e isotropos). En efecto, supongamos que, por ejemplo, el vector  $\mathbf{k}'$  se desviara de dicho plano «hacia nosotros».

Pero no existe fundamento para preferir esta desviación a otra igual que ella en sentido opuesto. Por eso la única dirección posible resulta ser aquella en que el vector  $\mathbf{k}'$  se encuentra en el plano de incidencia. Razonamientos análogos son también válidos para el vector  $\mathbf{k}''$ .

Separemos del rayo incidente natural un rayo componente plano-polarizado, en el cual la dirección de las oscilaciones del vector  $\mathbf{E}$  forme con el plano de incidencia un ángulo arbitrario. Las oscilaciones del vector  $\mathbf{E}$  en la onda electromagnética plana que se propaga en el sentido del vector  $\mathbf{k}$  las define la función<sup>1)</sup>

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} = \mathbf{E}_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

(con la elección que hemos hecho de los ejes de coordenadas, la proyección del vector  $\mathbf{k}$  sobre el eje  $z$  es nula, por lo que en el exponente no figura el sumando  $-k_z z$ ). A expensas de la elección del punto de referencia de  $t$  hemos anulado la fase inicial de la onda.

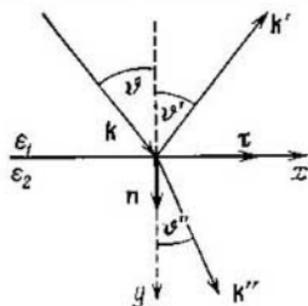


Fig. 112.1.

<sup>1)</sup> Más exactamente, la parte real de esta función, pero nosotros, para simplificar, diremos, simplemente la función.

Las intensidades en las ondas reflejada y refractada se determinan por medio de expresiones análogas:

$$E' = E'_m e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y + \alpha')}, \quad E'' = E''_m e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y + \alpha'')}$$

( $\alpha'$  y  $\alpha''$  son las fases iniciales de las respectivas ondas).

El campo resultante en el primer medio es

$$E_1 = E + E' = E_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} + E'_m e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y + \alpha')}. \quad (112.2)$$

Y en el segundo medio

$$E_2 = E'' = E''_m e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y + \alpha'')}. \quad (112.3)$$

Según (112.1), las componentes tangenciales de las expresiones (112.2) y (112.3) sobre la superficie de separación, o sea, para  $y = 0$ , deben ser iguales. Por lo tanto, llegamos a la relación

$$E_{m\tau} e^{i(\omega t - k_x x)} + E'_{m\tau} e^{i(\omega' t - k'_x x + \alpha')} = E''_{m\tau} e^{i(\omega'' t - k''_x x + \alpha'')}. \quad (112.4)$$

Para que la condición (112.4) se cumpla cualquiera que sea  $t$ , es necesario que todas las frecuencias sean iguales:

$$\omega = \omega' = \omega''. \quad (112.5)$$

Para cerciorarnos de esto escribimos la igualdad (112.4) en la forma

$$a e^{i\omega t} + b e^{i\omega' t} = c e^{i\omega'' t},$$

donde los factores  $a$ ,  $b$  y  $c$  no dependen de  $t$ . La igualdad que hemos escrito es equivalente a las dos siguientes:

$$a \cos \omega t + b \cos \omega' t = c \cos \omega'' t, \quad a \sin \omega t + b \sin \omega' t = c \sin \omega'' t.$$

La suma de dos funciones armónicas también será una función armónica únicamente en el caso de que las funciones que se suman tengan iguales frecuencias. La función armónica que se obtiene como resultado de la suma tiene la misma frecuencia que las funciones sumadas. De aquí se sigue la relación (112.5). De este modo llegamos a la conclusión de que las frecuencias de las ondas reflejada y refractada coinciden con la frecuencia de la onda incidente.

Para que la condición (112.4) se cumpla cualquiera que sea  $x$ , se necesita que sean iguales las proyecciones de los vectores de onda sobre el eje  $x$ :

$$k_x = k'_x = k''_x. \quad (112.6)$$

Los ángulos  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  y  $\vartheta''$  que muestra la figura 112.1 se llaman, respectivamente, *ángulo de incidencia*, *ángulo de reflexión* y *ángulo de refracción*. Por la figura se ve que  $k_x = k \sin \vartheta$ ,  $k'_x = k' \sin \vartheta'$ , y  $k''_x = k'' \sin \vartheta''$ . Por eso la relación (112.6) se puede escribir en la forma

$$k \sin \vartheta = k' \sin \vartheta' = k'' \sin \vartheta''.$$

Los vectores  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{k}'$  tienen módulos iguales entre sí y a  $\omega/v_1$ ; el módulo del vector  $\mathbf{k}''$  es igual a  $\omega/v_2$ . Por consiguiente,

$$\frac{\omega}{v_1} \sin \vartheta = \frac{\omega}{v_1} \sin \vartheta' = \frac{\omega}{v_2} \sin \vartheta''.$$

De aquí se infiere que

$$\vartheta' = \vartheta, \quad (112.7)$$

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta''} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}. \quad (112.8)$$

Las relaciones que hemos obtenido se cumplen cualquiera que sea el rayo planopolarizado componente del rayo natural. Por lo tanto son válidas también para el rayo natural en conjunto.

La relación (112.7) expresa la *ley de la reflexión de la luz*, según la cual *el rayo reflejado se encuentra en el mismo plano que el rayo incidente y que la normal levantada en el punto de incidencia; el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia*.

La relación (112.8) expresa la *ley de la refracción de la luz*, que se enuncia del modo siguiente: *el rayo refractado se encuentra en el mismo plano que el rayo incidente y que la normal levantada en el punto de incidencia; la razón del seno del ángulo de incidencia al seno del ángulo de refracción es una magnitud constante para sustancias dadas*.

La magnitud  $n_{12}$  que figura en la fórmula (112.8) se llama *índice relativo de refracción* de la segunda sustancia en la forma con respecto a la primera. Representemos esta magnitud en la forma

$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{v_2} \frac{v_1}{c} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (112.9)$$

Así, el índice relativo de refracción de dos sustancias es igual a la razón de sus índices de refracción absolutos.

Sustituyendo en la fórmula (112.8)  $n_{12}$  por la relación  $n_2/n_1$ , se puede representar la ley de la refracción en la forma

$$n_1 \sin \vartheta = n_2 \sin \vartheta''. \quad (112.10)$$

Por esta fórmula se ve que cuando la luz pasa de un medio ópticamente más denso a un medio ópticamente menos denso, el rayo se aleja de la normal a la superficie de separación de los medios. El aumento del ángulo de incidencia  $\vartheta$  va acompañado de un crecimiento más rápido del ángulo de refracción  $\vartheta''$ , y cuando el ángulo  $\vartheta$  llega al valor

$$\vartheta_{\text{lím}} = \arcsen n_{12} \quad (112.11)$$

el ángulo  $\vartheta''$  se hace igual a  $\pi/2$ . El ángulo determinado por la fórmula (112.11) recibe el nombre de *ángulo límite*.

La energía que lleva consigo el rayo incidente se distribuye entre los rayos reflejado y refractado. A medida que aumenta el ángulo

de incidencia crece la intensidad del rayo reflejado y decrece la intensidad del rayo refractado, la cual se anula en el ángulo límite. Cuando los ángulos de incidencia están comprendidos entre los límites de  $\vartheta_{lim}$  a  $\pi/2$ , la onda luminosa penetra en el segundo medio hasta una distancia del orden de la longitud de onda  $\lambda$  y después retorna al primer medio. Este fenómeno se llama *reflexión total (interna)*.

Hallemos la relación entre las amplitudes y las fases de las ondas incidente y reflejada. Para simplificar nos limitaremos al caso de la incidencia normal de una onda plana sobre la superficie de separación de dieléctricos homogéneos e isotrópicos, cuyos índices de refracción sean  $n_1$  y  $n_2$ . Designemos las componentes eléctricas de las ondas incidente, reflejada y refractada por  $E$ ,  $E'$  y  $E''$ , respectivamente, y las componentes magnéticas por  $H$ ,  $H'$  y  $H''$ .

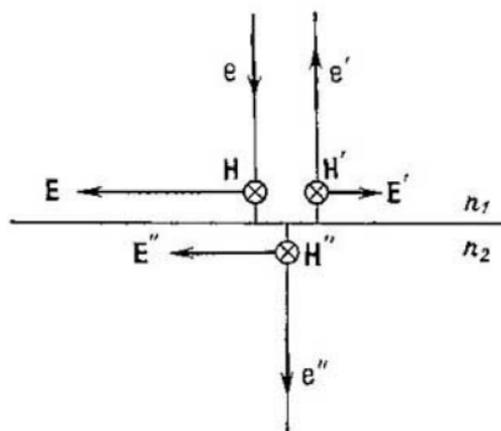


Fig. 122.2.

De las razones de simetría se sigue que las oscilaciones de los vectores  $E'$  y  $E''$  se efectúan a lo largo de la misma dirección que las oscilaciones de vector  $E$ . Análogamente, las oscilaciones de los vectores  $H'$  y  $H''$  tienen lugar a lo largo de la dirección del vector  $H$ . En este caso los componentes normales de los vectores  $E$  y  $H$  son nulos. Por eso los componentes tangenciales de estos vectores coinciden con los vectores mismos. En la fig. 112.2 se representan los valores instantáneos de los vectores  $E$  y  $H$  en las ondas incidente, reflejada y refractada. En esta figura se muestran también los versores  $e$ ,  $e'$  y  $e''$  de las direcciones, a lo largo de las cuales se propagan las respectivas ondas. La figura se ha dibujado suponiendo que los vectores  $E$  y  $E''$  tienen el mismo sentido, y los vectores  $E$  y  $E'$ , sentidos opuestos (en este caso el sentido de los vectores  $H$ ,  $H'$  y  $H''$  es hacia detrás de la figura). Las relaciones efectivas entre las direcciones de los vectores se determinan haciendo los cálculos.

Los módulos de los vectores  $E$  y  $H$  están ligados por la relación  $H = nE \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$  (véase el texto que precede a la fórmula (110.8); las relaciones obtenidas para los valores de las amplitudes de  $E$  y  $H$  son válidas también para sus valores instantáneos). La tríada de los vectores  $E$ ,  $H$ ,  $e$  forma un sistema dextrógiro. Teniendo en cuenta

lo expuesto, se puede escribir que

$$\mathbf{H} = n_1 \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} [\mathbf{eE}] \quad (112.12)$$

(véase la fig. 112.2). Relaciones análogas existen también para los vectores en las ondas reflejada y refractada.

Escribamos las condiciones de continuidad de los componentes tangenciales de los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  (véanse las fórmulas (21.4) y (54.6)):

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}' = \mathbf{E}'' \quad (112.13)$$

$$\mathbf{H} + \mathbf{H}' = \mathbf{H}'' \quad (112.14)$$

Hay que recordar que el valor de los vectores se toma en la inmediatez del límite de separación.

Sustituyendo en (112.14) los vectores  $\mathbf{H}$  por los  $\mathbf{E}$ , de acuerdo con la fórmula (112.12), obtenemos (después de simplificar por  $\sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$ )

$$n_1 [\mathbf{eE}] + n_1 [\mathbf{e'E}'] = n_2 [\mathbf{e''E''}].$$

Tomando en consideración que  $\mathbf{e} = \mathbf{e}'' = -\mathbf{e}'$ , transformamos la última relación como sigue:

$$n_1 [\mathbf{eE}] - n_1 [\mathbf{e'E}'] = n_2 [\mathbf{eE''}].$$

De aquí

$$[\mathbf{e}, n_1 \mathbf{E}] = [\mathbf{e}, (n_1 \mathbf{E}' + n_2 \mathbf{E}'')].$$

Como los vectores  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{E}$  son perpendiculares entre sí, de la igualdad obtenida se deduce que

$$n_1 \mathbf{E} = n_1 \mathbf{E}' + n_2 \mathbf{E}'' \quad (112.15)$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (112.13) y (112.15), obtenemos las relaciones

$$\mathbf{E}' = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \mathbf{E}, \quad (112.16)$$

$$\mathbf{E}'' = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \mathbf{E}. \quad (112.17)$$

De la fórmula (112.17) se infiere que los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{E}''$  tienen en cada instante igual sentido. De aquí concluimos que las oscilaciones en las ondas incidente y transmitida al segundo medio se efectúan en el límite de separación en la misma fase, es decir, cuando la onda pasa a través de dicho límite la fase no sufre ningún salto.

De la fórmula (112.16) se deduce que si  $n_2 < n_1$  el sentido del vector  $\mathbf{E}'$  coincide con el del vector  $\mathbf{E}$ . Esto significa que las oscilaciones en las ondas incidente y reflejada se efectúan en el límite de separación en la misma fase, o sea, que la fase de la onda no varía durante la reflexión. Pero si  $n_2 > n_1$ , el sentido del vector  $\mathbf{E}'$  es opuesto al del  $\mathbf{E}$ . Esto significa que las oscilaciones en las ondas incidente y reflejada se efectúan en el límite de separación en oposi-

ción de fase, es decir, que la fase de la onda cambia de un salto en  $\pi$ . El resultado obtenido es válido también cuando la onda incide oblicuamente sobre el límite de separación de dos medios transparentes (véase el § 135). Hay que señalar que los sentidos de los vectores  $E$ ,  $E'$  y  $E''$  que muestra la fig. 112.2 están de acuerdo con el resultado del cálculo para el caso en que  $n_2 > n_1$ .

Así, pues, al reflejarse una onda luminosa en el límite de separación de un medio ópticamente menos denso con un medio ópticamente más denso ( $n_1 < n_2$ ), la fase de las oscilaciones del vector luz sufre una variación igual a  $\pi$ , y si la reflexión tiene lugar en el límite de separación de un medio ópticamente más denso con un medio ópticamente menos denso ( $n_1 > n_2$ ), esta variación de fase no se produce.

Sustituyendo en la expresión  $n_1 E'^2 + n_2 E''^2$  los valores (112.16) y (112.17) de  $E'$  y  $E''$  llegamos, después de hacer transformaciones fáciles, a la relación

$$n_1 E^2 = n_1 E'^2 + n_2 E''^2.$$

Esta relación se ha obtenido para valores instantáneos de  $E$ . Una relación análoga sirve también para los valores de amplitud del vector luz:

$$n_1 E_m^2 = n_1 E'_m{}^2 + n_2 E''_m{}^2. \quad (112.18)$$

Según (110.9), la expresión  $n_1 E_m^2$  se puede interpretar como una magnitud proporcional a la intensidad  $I$  de la onda incidente;  $n_1 E'_m{}^2$ , como una magnitud proporcional a la intensidad  $I'$  de la onda reflejada, y  $n_2 E''_m{}^2$ , como una magnitud proporcional a la intensidad  $I''$  de la onda refractada. De este modo, la relación (112.18) expresa la ley de la conservación de la energía.

Las relaciones obtenidas permiten hallar el *índice de reflexión*  $\rho$  y el *índice de transmisión*  $\tau$  de la onda luminosa (para el caso de la incidencia normal sobre el límite de separación de dos medios transparentes). En efecto, por definición

$$\rho = \frac{I'}{I} = \frac{n_1 E'_m{}^2}{n_1 E_m^2}.$$

Sustituyendo en esta expresión la relación  $E'_m/E_m$  que se obtiene de (112.16), llegamos a la fórmula

$$\rho = \left( \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} \right)^2, \quad (112.19)$$

donde  $n_{12} = n_2/n_1$  es el índice de refracción del segundo medio con respecto al primero.

Para el índice de transmisión se obtiene la expresión

$$\tau = \frac{I''}{I} = \frac{n_2 E''_m{}^2}{n_1 E_m^2} = n_{12} \left( \frac{2}{n_{12} + 1} \right)^2. \quad (112.20)$$

Es fácil cerciorarse de que la suma  $\rho + \tau$ , como debe ser, es igual a la unidad.

Advertimos que la sustitución en la fórmula (112.19) de  $n_{12}$  por la magnitud recíproca  $n_{21} = 1/n_{12}$  no varía el valor de  $\rho$ . Por consiguiente, el índice de reflexión de la superficie de separación de los dos medios dados tiene el mismo valor para los dos sentidos de propagación de la luz.

El índice de refracción de los vidrios es aproximadamente igual a 1,5. La sustitución de  $n_{12} = 1,5$  en la fórmula (112.19) da  $\rho = 0,04$ . Por lo tanto, cada superficie de una lámina de vidrio refleja (si la incidencia se aproxima a la normal) cerca del 4% de la energía luminosa que incide sobre ella.

### § 113. Flujo luminoso

Toda onda luminosa real es una superposición de ondas, cuyas longitudes están comprendidas en cierto intervalo  $\Delta\lambda$ . Este intervalo sigue siendo finito incluso para la luz monocromática. En la luz blanca  $\Delta\lambda$  abarca toda la gama de ondas electromagnéticas que percibe el ojo humano, es decir, que se extiende desde 0,40 hasta 0,76  $\mu\text{m}$ .

La distribución del flujo de energía entre las ondas se puede caracterizar por medio de la función de distribución

$$\varphi(\lambda) = \frac{d\Phi_e}{d\lambda}, \quad (113.1)$$

en la que  $d\Phi_e$  es el flujo de energía correspondiente a las longitudes de onda desde  $\lambda$  hasta  $\lambda + d\lambda$ . Conociendo la forma de la función (113.1) se puede calcular el flujo de energía transportado por las ondas comprendidas en un intervalo finito desde  $\lambda_1$  hasta  $\lambda_2$ :

$$\Phi_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda) d\lambda. \quad (113.2)$$

La acción de la luz sobre el ojo (sensación luminosa) depende en alto grado de la longitud de onda. Esto es fácil de comprender si se tiene en cuenta que las ondas electromagnéticas con  $\lambda$  menor que 0,40  $\mu\text{m}$  y mayor que 0,76  $\mu\text{m}$  no producen sensación visual. La sensibilidad del ojo humano normal medio a la radiación de distinta longitud de onda la da la *curva de sensibilidad espectral relativa* (fig. 113.1). Sobre el eje horizontal se ha tomado la longitud de onda  $\lambda$ , y sobre el eje vertical, la sensibilidad espectral relativa  $V(\lambda)$ . La sensibilidad máxima del ojo corresponde a la radiación, cuya longitud de onda es de 0,555  $\mu\text{m}$ <sup>1)</sup> (parte verde del espectro).

<sup>1)</sup> Es interesante que en la radiación solar esta longitud de onda está representada con la mayor intensidad.

La función  $V(\lambda)$  para esta longitud de onda se toma como unidad. A igualdad del flujo de energía, la intensidad de la luz de otras longitudes de onda valorada visualmente resulta ser menor. Respectivamente,  $V(\lambda)$  también es menor que la unidad para estas longitudes de onda. Los valores de la función  $V(\lambda)$  son inversamente proporcionales a los valores de los flujos de energía que, por su intensidad, producen la misma sensación visual:

$$\frac{V(\lambda_1)}{V(\lambda_2)} = \frac{(d\Phi_e)_2}{(d\Phi_e)_1}.$$

Por ejemplo,  $V(\lambda) = 0,5$  significa que para obtener una sensación visual de la misma intensidad, la luz de la longitud de onda dada

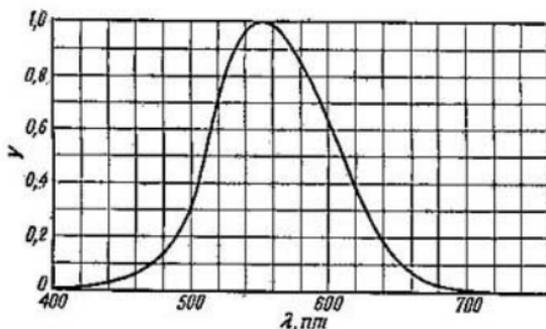


Fig. 113.1.

debe tener una densidad de flujo de energía dos veces mayor que la luz para la cual  $V(\lambda) = 1$ . Fuera del intervalo de las longitudes de onda visibles, la función  $V(\lambda)$  es nula.

Para caracterizar la intensidad de la luz teniendo en cuenta su capacidad para producir sensación visual, se introduce la magnitud  $\Phi$ , llamada *flujo luminoso*. Para un intervalo  $d\lambda$  el flujo luminoso se define como el producto del flujo de energía por el valor correspondiente de la función  $V(\lambda)$ :

$$d\Phi = V(\lambda) d\Phi_e. \quad (113.3)$$

Expresando el flujo de energía por medio de la función de distribución de la energía entre las ondas (véase (113.1)), obtenemos

$$d\Phi = V(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda. \quad (113.4)$$

El flujo luminoso total es

$$\Phi = \int_0^{\infty} V(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda. \quad (113.5)$$

La función  $V(\lambda)$  es una magnitud adimensional. Por consiguiente, la dimensión del flujo luminoso coincide con la dimensión del flujo de energía. Esto permite definir el flujo luminoso como un flujo de energía luminosa que se valora por la sensación visual que produce.

### § 114. Magnitudes y unidades fotométricas

Se llama fotometría la parte de la óptica que trata de la medición de los flujos luminosos y de las magnitudes relacionadas con ellos.

**Intensidad de la luz.** Una fuente o foco de luz, cuyas dimensiones se puedan despreciar en comparación con la distancia desde el punto de observación hasta dicha fuente, se dice que es *puntual*. En un medio homogéneo e isótropo, la onda emitida por una fuente puntual será esférica. Para caracterizar las fuentes puntuales de luz se utiliza la *intensidad de la luz*  $I$ , que se define como el flujo de radiación de la fuente que corresponde a la unidad de ángulo sólido:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} \quad (114.1)$$

( $d\Phi$  es el flujo luminoso radiado por el foco dentro de los límites del ángulo sólido  $d\Omega$ ).

En el caso general la intensidad de la luz depende de la dirección:  $I = I(\vartheta, \varphi)$ , ( $\vartheta$  y  $\varphi$  son los ángulos polar y azimutal del sistema de coordenadas esférico). Si  $I$  no depende de la dirección, la fuente de luz se llama *isótropa*. Para una fuente isótropa

$$I = \Phi/4\pi, \quad (114.2)$$

donde  $\Phi$  es el flujo luminoso total radiado por la fuente en todas las direcciones.

En el caso de una fuente extensa se puede hablar de la intensidad de la luz de un elemento  $dS$  de su superficie. Entonces en la fórmula (114.1) debe entenderse por  $d\Phi$  el flujo luminoso radiado por el elemento de superficie  $dS$  dentro de los límites del ángulo sólido  $d\Omega$ .

La unidad de intensidad de la luz, la *candela* (cd), es una de las unidades fundamentales del Sistema Internacional (SI). Su valor se toma tal, que la luminancia (véase más adelante) del radiador completo a la temperatura de solidificación del platino sea igual a 60 cd por  $1 \text{ cm}^2$ . Por radiador completo o ideal se entiende un dispositivo que posee las propiedades del cuerpo negro (véase el tomo 3º).

**Flujo luminoso.** La unidad de flujo luminoso es el *lumen* (lm). Este es igual al flujo luminoso radiado por una fuente isótropa, cuya intensidad de la luz sea de 1 cd dentro de los límites de un ángulo sólido igual a un estereorradián:

$$1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot 1 \text{ sr}. \quad (114.3)$$

Empíricamente se ha establecido que al flujo luminoso de 1 lm originado por una radiación de longitud de onda  $\lambda = 0,555 \mu\text{m}$  le corresponde un flujo de energía de 0,0016 W. Al flujo luminoso de 1 lm debido a una radiación de otra longitud de onda  $\lambda$  le corresponde un flujo de energía

$$\Phi_e = 0,0016/V(\lambda) \text{ W.} \quad (114.4)$$

**Iluminación.** El grado de iluminación de una superficie por la luz que incide sobre ella se caracteriza por la magnitud

$$E = \frac{d\Phi_{\text{linc}}}{dS}, \quad (114.5)$$

llamada *iluminación* ( $d\Phi_{\text{linc}}$  es el flujo luminoso que incide sobre el elemento de superficie  $dS$ ).

La unidad de iluminación es el *lux* (lx), igual a la iluminación que crea el flujo de 1 lm distribuido uniformemente por la superficie de 1 m<sup>2</sup>:

$$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm} : 1 \text{ m}^2. \quad (114.6)$$

La iluminación  $E$  creada por una fuente puntual se puede expresar por medio de la intensidad de la luz  $I$ , la distancia  $r$  desde la superfi-

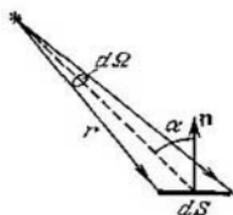


Fig. 114.1.

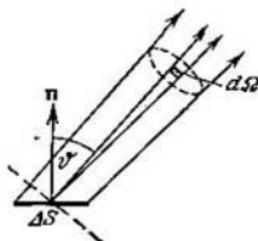


Fig. 114.2.

cie iluminada hasta la fuente, y el ángulo  $\alpha$  entre la normal  $n$  a dicha superficie y la dirección a la fuente. Sobre la superficie  $dS$  (fig. 114.1) incide el flujo  $d\Phi_{\text{linc}} = I d\Omega$  comprendido dentro de los límites del ángulo sólido  $d\Omega$  que descansa sobre  $dS$ . El ángulo  $d\Omega$  es igual a  $dS \cos \alpha / r^2$ . Por lo tanto,  $d\Phi_{\text{linc}} = I dS \cos \alpha / r^2$ . Dividiendo este flujo por  $dS$ , obtenemos

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}. \quad (114.7)$$

**Emitancia luminosa.** Una fuente de luz extensa se puede caracterizar por la *emitancia luminosa*  $M$  de sus distintas partes, entendiéndose por ésta el flujo luminoso emitido por la unidad de superficie hacia fuera en todas las direcciones (dentro de los límites de los valores de  $\vartheta$  desde 0 hasta  $\pi/2$ ;  $\vartheta$  es el ángulo que forma la dirección

dada con la normal exterior a la superficie):

$$M = \frac{d\Phi_{\text{emitt}}}{dS} \quad (114.8)$$

( $d\Phi_{\text{emitt}}$  es el flujo emitido hacia fuera en todas las direcciones por un elemento de superficie  $dS$  de la fuente).

La emitancia luminosa puede producirse a expensas de la reflexión por una superficie de la luz que incide sobre ella. Entonces se entiende por  $d\Phi_{\text{emitt}}$ , en la fórmula (114.8), el flujo reflejado por un elemento  $dS$  de la superficie en todas las direcciones.

La unidad de emitancia luminosa es el *lumen por metro cuadrado* ( $\text{lm}/\text{m}^2$ ).

**Luminancia.** La emitancia luminosa caracteriza la radiación (o reflexión) de luz por un punto dado de una superficie en todas las direcciones. Para caracterizar la radiación (reflexión) de la luz en una dirección determinada sirve la *luminancia*  $L$ . La dirección puede darse por medio del ángulo polar  $\vartheta$  (medido desde la normal exterior  $n$  a la superficie radiante  $\Delta S$ ) y del ángulo azimutal  $\varphi$ . La luminancia se define como la razón de la intensidad de la luz de la superficie elemental  $\Delta S$  en la dirección dada, a la proyección de la superficie  $\Delta S$  sobre un plano perpendicular a la dirección tomada.

Consideremos el ángulo sólido elemental  $d\Omega$  que descansa sobre la superficie luminosa  $\Delta S$  y está orientado en la dirección  $(\vartheta, \varphi)$  (fig. 114.2). La intensidad de la luz de la superficie  $\Delta S$  en esta dirección, según la determina (114.1), es  $I = d\Phi/d\Omega$ , donde  $d\Phi$  es el flujo luminoso que se propaga dentro de los límites del ángulo  $d\Omega$ . La proyección de  $\Delta S$  sobre un plano perpendicular a la dirección  $(\vartheta, \varphi)$  (en la fig. 114.2 la traza de este plano se representa con línea de trazos) será  $\Delta S \cos \vartheta$ . Por consiguiente, la luminancia

$$L = \frac{d\Phi}{d\Omega \Delta S \cos \vartheta}. \quad (114.9)$$

En el caso general la luminancia es diferente en distintas direcciones:  $L = L(\vartheta, \varphi)$ . Lo mismo que la emitancia luminosa, la luminancia puede ser utilizada para caracterizar una superficie que refleje la luz que incide sobre ella.

Según la fórmula (114.9), el flujo radiado por la superficie  $\Delta S$  dentro de los límites del ángulo sólido  $d\Omega$  en la dirección determinada por  $\vartheta$  y  $\varphi$  es

$$d\Phi = L(\vartheta, \varphi) d\Omega \Delta S \cos \vartheta. \quad (114.10)$$

Las fuentes, cuya luminancia es igual en todas las direcciones ( $L = \text{const}$ ), se llaman *lambertianas* (porque se subordinan a la ley de Lambert) o *de coseno* (porque el flujo que emite un elemento de superficie de esta fuente es proporcional a  $\cos \vartheta$ ). En rigor, la ley de Lambert sólo la cumple el cuerpo negro absolutamente.

La emitancia luminosa  $M$  y la luminancia  $L$  de una fuente lambertiana están ligadas entre sí por una relación simple. Para hallarla sustituimos en (114.10)  $d\Omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$  y la expresión que se obtiene la integramos respecto de  $\varphi$  entre los límites de 0 a  $2\pi$ , y respecto de  $\vartheta$ , de 0 a  $\pi/2$ , teniendo en cuenta que  $L = \text{const.}$  Como resultado hallamos el flujo luminoso total emitido hacia fuera en todas las direcciones por un elemento de superficie  $\Delta S$  de la fuente lambertiana:

$$\Delta\Phi_{\text{emit}} = L \Delta S \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = \pi L \Delta S.$$

Dividiendo este flujo por  $\Delta S$ , obtenemos la emitancia luminosa. Por lo tanto, para una fuente lambertiana

$$M = \pi L. \quad (114.11)$$

De unidad de luminiscencia sirve la *candela por metro cuadrado* ( $\text{cd}/\text{m}^2$ ). La luminiscencia de  $1 \text{ cd}/\text{m}^2$  la posee una superficie plana, uniformemente luminosa, en la dirección de la normal a ella, si en esta dirección la intensidad de la luz de un metro cuadrado de la superficie es igual a una candela.

## § 115. Óptica geométrica

La longitud de las ondas luminosas que percibe el ojo humano es muy pequeña (del orden de  $10^{-7} \text{ m}$ ). Por eso la propagación de la luz visible se puede considerar en primera aproximación prescindiendo de su naturaleza ondulatoria y suponiendo que la luz se propaga a lo largo de ciertas líneas llamadas *rayos*. En el caso extremo correspondiente a  $\lambda \rightarrow 0$ , las leyes de la óptica se pueden enunciar en el lenguaje de la geometría. De acuerdo con esto, la parte de la óptica en que se desprecia la finitud de la longitud de las ondas se llama *óptica geométrica*. También se lo da el nombre de *óptica de los rayos luminosos*.

La base de la óptica geométrica la constituyen cuatro leyes: 1) la ley de la propagación rectilínea de la luz; 2) la ley de la independencia de los rayos luminosos, 3) la ley de la reflexión de la luz, y 4) la ley de la refracción de la luz.

La ley de la propagación rectilínea de la luz afirma que *en un medio homogéneo la luz se propaga rectilíneamente*. Esta ley es aproximada: cuando la luz pasa por orificios muy pequeños se observan desviaciones de su rectitud, tanto mayores cuanto menor es el orificio.

La ley de la independencia de los rayos luminosos establece que *los rayos, al intersectarse, no se perturban unos a otros*. Las intersecciones de los rayos no impiden que cada uno de ellos se propague independientemente de los otros. Esta ley sólo es justa si las intensidades

de la luz no son demasiado grandes. Cuando las intensidades son las que se consiguen con los láseres, la independencia de los rayos luminosos deja de observarse.

Las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz se enunciaron en el § 112 (véanse las fórmulas (112.7) y (112.8) y el texto posterior a ellas).

De fundamento de la óptica geométrica puede servir el principio establecido a mediados del siglo XVII por el matemático francés P. Fermat. De este principio se deducen las leyes de la propagación rectilínea, de la reflexión y de la refracción de la luz. Tal como lo enunció el mismo Fermat, este principio dice: *la luz se propaga por el camino para recorrer el cual es mínimo el tiempo que necesita.*

Para recorrer un trozo de camino  $ds$  (fig. 115.4) necesita la luz el tiempo  $dt = ds/v$ , donde  $v$  es la velocidad de la luz en el punto dado del medio. Sustituyendo  $v$  por  $c/n$  (véase (110.2)), obtenemos que  $dt = (1/c) n ds$ . Por consiguiente, el tiempo  $\tau$  que tarda la luz en recorrer el camino desde el punto  $I$  hasta el punto  $2$ , será

$$\tau = \frac{1}{c} \int_1^2 n ds. \quad (115.1)$$

La magnitud, con dimensión de longitud,

$$L = \int_1^2 n ds \quad (115.2)$$

se llama *camino óptico* o *longitud del recorrido óptico*. En un medio homogéneo el camino óptico es igual al producto de la longitud geométrica  $s$  del camino por el índice de refracción  $n$  del medio:

$$L = ns. \quad (115.3)$$

Según (115.1) y (115.2)

$$\tau = L/c. \quad (115.4)$$

La proporcionalidad del tiempo de recorrido  $\tau$  a la longitud del recorrido óptico  $L$  da la posibilidad de enunciar el principio de Fermat del modo siguiente: *la luz se propaga por el camino, cuya longitud óptica es mínima*. Más exactamente, la longitud del recorrido óptico debe ser extrema, es decir, mínima, máxima o estacionaria, igual para todos los caminos posibles. En este último caso todos los caminos de la luz entre dos puntos resultan ser *tautócronos* (del griego

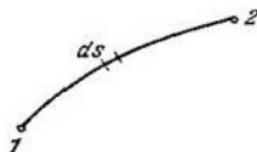


Fig. 115.4.

*tauto*, el mismo, y *cronos*, tiempo, es decir, que requieren el mismo tiempo para ser recorridos).

Del principio de Fermat se infiere la reversibilidad de los rayos luminosos. En efecto, el camino óptico mínimo en el caso de la propagación de la luz desde el punto 1 hasta el punto 2, también resulta ser mínimo en el caso de la propagación de la luz en sentido inverso. Por lo tanto, un rayo lanzado al encuentro del que recorre el camino del punto 1 al punto 2, recorrerá este mismo camino, pero en sentido contrario.

Vamos a obtener, por medio del principio de Fermat, las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz. Supongamos que la luz del punto *A* llega al punto *B* después de reflejarse en la superficie

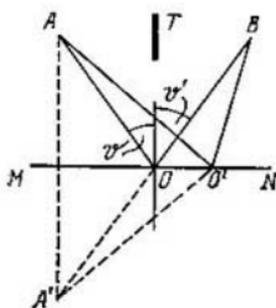


Fig. 115.2.

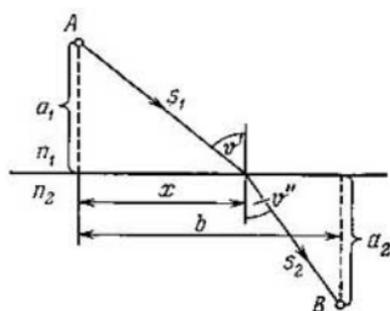


Fig. 115.3

*MN* (fig. 115.2; el camino directo de *A* a *B* lo intercepta la pantalla opaca *T*). El medio por el cual pasa el rayo es homogéneo. Por eso, la condición de longitud mínima del recorrido óptico se reduce a que su longitud geométrica sea mínima. La longitud geométrica de un camino tomado arbitrariamente  $AO'B = A'O'B$  (el punto auxiliar *A'* es la imagen especular del punto *A*). Por la figura se ve que la longitud mínima es la del rayo que se refleja en el punto *O*, para el cual el ángulo de reflexión es igual al de incidencia. Advertimos que si el punto *O'* se aleja del *O*, la longitud geométrica del recorrido aumenta ilimitadamente, de manera que en este caso sólo existe un extremo, el mínimo.

Hallemos ahora el punto en que debe refractarse el rayo que se propaga del punto *A* al *B* para que la longitud del recorrido óptico sea extrema (fig. 115.3). Para un rayo arbitrario la longitud del recorrido óptico será

$$L = n_1 s_1 + n_2 s_2 = n_1 \sqrt{a_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}.$$

Para hallar el valor extremo se deriva  $L$  respecto de  $x$  y se iguala la derivada a cero:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{n_1 x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{n_2 (b-x)}{\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}} = n_1 \frac{x}{s_1} - n_2 \frac{b-x}{s_2} = 0.$$

Los factores de  $n_1$  y  $n_2$  son iguales respectivamente a  $\text{sen } \vartheta$  y  $\text{sen } \vartheta''$ . De este modo se obtiene la relación

$$n_1 \text{sen } \vartheta = n_2 \text{sen } \vartheta'',$$

que expresa la ley de la refracción (véase la fórmula (112.10)).

Consideremos la reflexión en la superficie interna de un elipsoide de revolución (fig. 115.4;  $F_1$  y  $F_2$  son los focos del elipsoide). De acuerdo con la definición del elipsoide, los caminos  $F_1 O F_2$ ,  $F_1 O' F_2$ ,

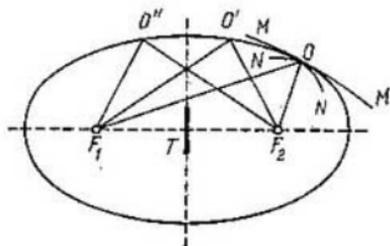


Fig. 115.4.

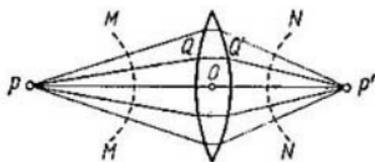


Fig. 115.5.

$F_1 O'' F_2$ , etc., tienen la misma longitud. Por lo tanto, todos los rayos que parten del foco  $F_1$  y que, después de reflejarse, llegan al foco  $F_2$ , son tautócronos. En este caso la longitud del recorrido óptico es estacionaria. Si la superficie del elipsoide se sustituye por la  $MM$ , cuya curvatura es menor y está orientada de forma que el rayo que parte del punto  $F_1$ , después de reflejarse en  $MM$ , incide sobre el punto  $F_2$ , el recorrido  $F_1 O F_2$  será mínimo. Para la superficie  $NN$ , de curvatura mayor que la del elipsoide, el recorrido  $F_1 O F_2$  será máximo.

Los caminos ópticos tienen también carácter estacionario cuando los rayos pasan a través de una lente (fig. 115.5). El rayo  $POP'$  recorre un camino más corto en el aire (donde el índice de refracción  $n$  es prácticamente igual a la unidad) y un camino más largo en el vidrio ( $n \approx 1,5$ ). El rayo  $PQQ'P'$  recorre un camino más largo en el aire, pero, en cambio, recorre un camino más corto en el vidrio. En definitiva, la longitud de los recorridos ópticos de todos los rayos resulta ser la misma. Por eso, los rayos son tautócronos y la longitud del recorrido óptico, estacionaria.

Examinemos una onda que se propague en un medio no homogéneo isótropo a lo largo de los rayos 1, 2, 3, etc., (fig. 115.6). La no homogeneidad supondremos que es lo suficientemente pequeña para

que en trozos de rayo de longitud  $\lambda$  pueda considerarse constante el índice de refracción. Construimos las superficies de onda  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , etc., de tal modo que las oscilaciones en los puntos de cada superficie siguiente tengan un retraso de fase de  $2\pi$  respecto de las oscilaciones en los puntos de la superficie que la precede. Las oscilaciones de los puntos que se encuentran en un mismo rayo vienen descritas por la ecuación  $\xi = a \cos(\omega t -$

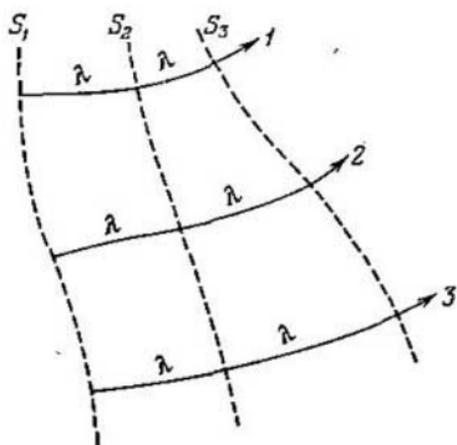


Fig. 115.6.

$-kr + \alpha)$  ( $r$  es la distancia medida a lo largo del rayo). El retraso de fase se determina por la expresión  $k\Delta r$ , en la que  $\Delta r$  es la distancia entre las superficies contiguas. De la condición  $k\Delta r = 2\pi$  obtenemos que  $\Delta r = 2\pi/k = \lambda$ . La longitud óptica de cada uno de los caminos de longitud geométrica  $\lambda$  es igual a  $n\lambda = \lambda_0$  (véase (110.5)). Según (115.4), el tiempo  $\tau$  que tarda la luz en recorrer cierto camino es proporcional a la longitud óptica de dicho camino. Por consiguiente, la igualdad de las longitudes ópticas significa la igualdad de los tiempos que tarda la luz en recorrer los res-

pectivos caminos. Así, llegamos a la conclusión de que los trozos de rayos comprendidos entre dos superficies de onda tienen la misma longitud óptica y son tautócronos. En particular, son tautócronos los trozos de los rayos comprendidos entre las superficies de onda  $MM$  y  $NN$  representadas con líneas de trazos en la fig. 115.5.

Del análisis que hemos hecho se deduce que el retraso de fase  $\delta$  que se produce en el camino de longitud óptica  $L$  se determina por la expresión

$$\delta = \frac{L}{\lambda_0} 2\pi \quad (115.5)$$

( $\lambda_0$  es la longitud de la onda en el vacío).

## § 116. Sistema óptico centrado

Un conjunto de rayos forman un haz. Si los rayos al prolongarse se encuentran en un punto, el haz se llama homocéntrico. A un haz de rayos homocéntrico corresponde una superficie de onda esférica. En la fig. 116.1, *a* se muestra un haz homocéntrico convergente, y en la fig. 116.1, *b*, un haz homocéntrico divergente. Un caso par-

ticular de haz homocéntrico es el haz de rayos paralelos; a este haz corresponde una superficie de onda plana.

Todo sistema óptico efectúa una transformación de los haces luminosos. Si el sistema no altera la homocentricidad de los haces, los rayos que parten del punto  $P$  se cortan en un punto  $P'$ . Este punto es la *imagen óptica* del  $P$ . Si un punto cualquiera de un objeto da una imagen en forma de punto, esta imagen se llama *puntual* o *anastigmática*.

La imagen se dice que es *real*, si los rayos luminosos se cortan realmente en el punto  $P'$  (véase la fig. 116.1, a), y *virtual*, si en el punto  $P'$  se cortan las prolongaciones de los rayos trazadas en sentido contrario a aquel en que se propaga la luz (véase la fig. 116.1, b).

En virtud de la reversibilidad de los rayos luminosos, el foco de luz  $P$  y su imagen  $P'$  pueden trocar sus papeles, es decir, la fuente puntual situada en  $P'$  tendrá su imagen en  $P$ . Por esta razón  $P$  y  $P'$  se llaman *puntos conjugados*.

El sistema óptico que da una imagen anastigmática («estigmática»), geoméricamente semejante al objeto representado, se llama *ideal*. Por medio de este sistema una continuidad espacial de puntos  $P$  da una imagen en forma de continuidad espacial de puntos  $P'$ . La primera de estas continuidades de puntos se denomina *espacio objeto*, la segunda, *espacio imagen*. En estos dos espacios los puntos, rectas y planos se corresponden unívocamente entre sí. Esta relación de dos espacios recibe en geometría el nombre de *correspondencia colineal*.

Un sistema óptico consiste en un conjunto de superficies reflectoras y refringentes que separan entre sí medios ópticamente homogéneos. Por lo general estas superficies suelen ser esféricas o planas (un plano se puede considerar como una esfera de radio infinito). Con menos frecuencia se utilizan superficies más complejas (elipsoide, hiperboloide, paraboloides de revolución y otras).

Un sistema óptico formado por superficies esféricas (y, en particular, planas) se llama *centrado* si los centros de todas las superficies se encuentran en una recta. Esta recta es el *eje óptico* del sistema.

A cada punto  $P$  o plano  $S$  del espacio objeto corresponde un punto  $P'$  o plano  $S'$ , conjugado con él, del espacio imagen. Entre el conjunto infinito de puntos y planos conjugados existen puntos y planos que poseen propiedades especiales. Estos puntos y planos se llaman *cardinales*. A ellos pertenecen los puntos y planos *focales*,

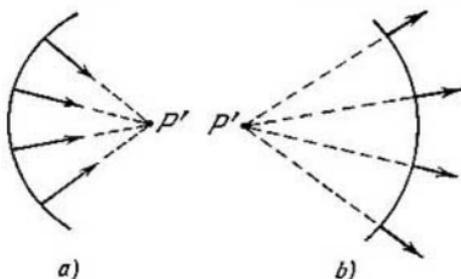


Fig. 116.1.

*principales* y *nodales*. Las propiedades de un sistema óptico perfectamente centrado quedan totalmente determinadas si se dan sus puntos o planos cardinales.

**Planos focales y focos de un sistema óptico.** En la fig. 116.2 se muestran las superficies refringentes exteriores y el eje óptico de un sistema perfectamente centrado. Tomemos en el espacio objeto de este sistema un plano  $S$  perpendicular al eje óptico. De las razones de simetría se sigue que el plano  $S'$ , conjugado de  $S$ , también será perpendicular al eje óptico. La traslación del plano  $S$  respecto del sistema hace que, respectivamente, se desplace el plano  $S'$ . Cuando el plano  $S$  está ya muy lejos, el ulterior aumento de su distancia al

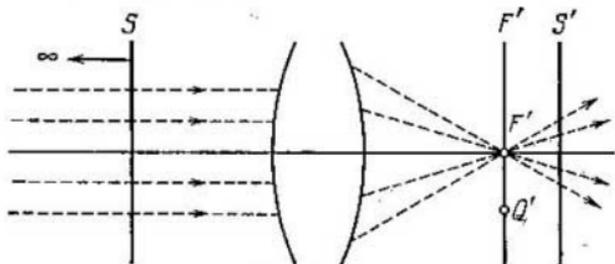


Fig. 116. 2.

sistema no produce prácticamente variación en la posición del plano  $S'$ . Esto significa que como resultado del alejamiento del plano  $S$  al infinito, el plano  $S'$  se encuentra en una determinada posición límite  $F'$ . El plano  $F'$ , que coincide con la posición límite del  $S'$ , se llama *plano focal posterior* del sistema óptico. Resumiendo, puede decirse que se denomina plano focal posterior  $F'$  el plano conjugado del  $S_{\infty}$ , perpendicular al eje del sistema, que se encuentra en el infinito del espacio objeto.

El punto de intersección del plano focal posterior con el eje óptico recibe el nombre de *foco posterior* del sistema. Se designa también con la letra  $F'$ . Este punto es el conjugado del  $P_{\infty}$ , situado en el infinito sobre el eje del sistema. Los rayos que parten del punto  $P_{\infty}$  forman un haz paralelo al eje (véase la fig. 116.2). Al salir del sistema, estos rayos constituyen un haz que converge en el foco  $F'$ . El haz paralelo que incide sobre un sistema óptico puede salir de él no en forma de haz convergente (como en la fig. 116.2), sino de haz divergente. En este caso en el punto  $F'$  no se cortarían los mismos rayos que salen, sino sus prolongaciones en sentido contrario. Respectivamente, el plano focal posterior resulta estar delante (según la marcha de los rayos) del sistema o dentro de él.

Los rayos que parten de un punto  $Q_{\infty}$ , infinitamente alejado y no situado en el eje del sistema, forman un haz paralelo dirigido obli-

cuamente al eje de dicho sistema. Al salir de éste los rayos forman un haz que converge en el punto  $Q'$  del plano focal posterior, pero que no coincide con el foco  $F'$  (véase el punto  $Q'$  en la fig. 116.2). De lo expuesto se deduce que la imagen de un objeto infinitamente alejado se encontrará en el plano focal.

Si se aleja hasta el infinito el plano  $S'$ , perpendicular al eje (fig. 116.3), su plano conjugado  $S$  se situará en la posición límite  $F$ , llamada *plano focal anterior* del sistema. Abreviando, se puede decir

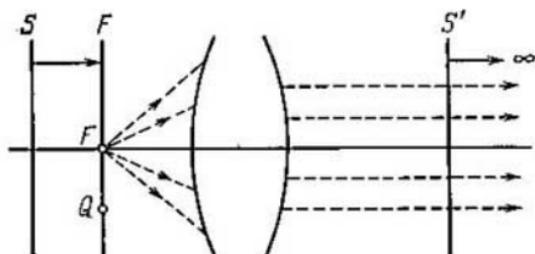


Fig. 116.3.

que el plano focal anterior  $F$  es el conjugado del  $S'_\infty$ , perpendicular al eje del sistema, que se encuentra en el infinito del espacio imagen.

El punto de intersección del plano focal anterior  $F$  con el eje óptico se llama *foco anterior* del sistema. Este foco se designa también

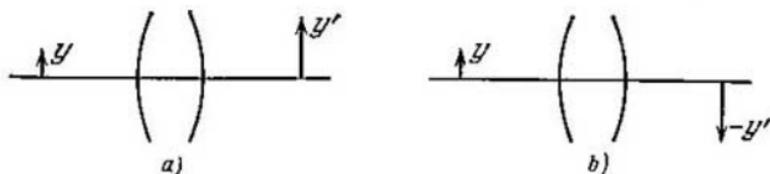


Fig. 116.4.

con la letra  $F$ . Los rayos que parten del foco  $F$  forman al salir del sistema un haz de rayos paralelos al eje. Los rayos que parten del punto  $Q$ , perteneciente al plano focal  $F$  (véase la fig. 116.3), forman, después de pasar por el sistema, un haz paralelo dirigido oblicuamente al eje. Puede ocurrir que el haz paralelo a la salida del sistema se obtenga cuando incida sobre éste no un haz de rayos divergente (como en la fig. 116.3), sino convergente. En este caso el foco anterior estará detrás del sistema o dentro de él.

**Planos y puntos principales.** Sean dos planos conjugados perpendiculares al eje óptico de un sistema. El segmento rectilíneo  $y$  (fig. 116.4), que se halla en uno de estos planos, tendrá su imagen en el segmento  $y'$  que se encuentra en el otro plano. De la simetría axial del sistema se infiere que los segmentos  $y$  e  $y'$  deben hallarse en un

plano que pase por el eje óptico (en el plano de la figura). La imagen  $y'$  puede estar dirigida en el mismo sentido que el objeto  $y$  (véase la fig. 116.4, a) o en sentido opuesto (véase la fig. 116.4, b). En el primer caso se dice que la imagen es *derecha* o *directa*; en el segundo, que es *invertida*. Los segmentos que se toman desde el eje óptico hacia arriba se consideran positivos, y los que se toman hacia abajo, negativos. En las figuras se indican las longitudes reales de los

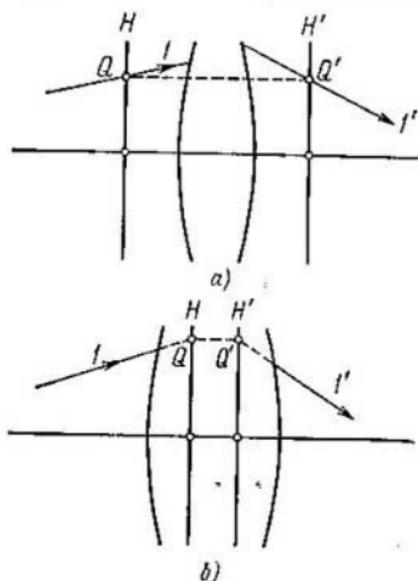


Fig. 116.5.

segmentos, es decir, para los segmentos negativos son positivas las magnitudes  $(-y)$  y  $(-y')$ . La relación entre las dimensiones lineales de la imagen y del objeto se llama *aumento lineal* o *lateral*. Designándolo por la letra  $\beta$  se puede escribir

$$\beta = \frac{y'}{y}. \quad (116.1)$$

El aumento lineal es una magnitud algebraica. Es positivo si la imagen es derecha (los signos de  $y$  y  $y'$  son iguales), y negativo si la imagen es invertida (el signo de  $y'$  es contrario al de  $y$ ).

Puede demostrarse que existen dos planos conjugados que se representan el uno al otro con el aumento lineal  $\beta = +1$ . Estos planos se llaman *principales*. El plano perteneciente al espacio ob-

jeto se denomina *plano principal anterior* del sistema y se designa con la letra  $H$ . El plano correspondiente al espacio imagen recibe el nombre de *plano principal posterior* y se designa con el símbolo  $H'$ . Los puntos de intersección de los planos principales con el eje óptico se llaman *puntos principales* del sistema (anterior y posterior, respectivamente). Estos puntos se designan con los mismos símbolos  $H$  y  $H'$  que los planos. En dependencia de la estructura del sistema, los planos y puntos principales pueden encontrarse tanto fuera del sistema como dentro de él. Puede ocurrir que uno de los planos pase por fuera del sistema y el otro por dentro. También es posible que ambos planos estén fuera del sistema y a un mismo lado de él.

De la definición de los planos principales se deduce que un rayo  $I$  que corte (en realidad, fig. 116.5, a, o mediante su prolongación imaginaria dentro del sistema, fig. 116.5, b) al plano principal anterior  $H$  en un punto  $Q$ , tendrá como conjugado un rayo  $I'$  que corta-

rá (directamente o por prolongación imaginaria) al plano principal  $H'$  en el punto  $Q'$ , situado al mismo lado del eje y a la misma distancia de él que el punto  $Q$ . Esto es fácil de comprender si se recuerda que  $Q$  y  $Q'$  son puntos conjugados y se tiene en cuenta que todo rayo que pase por el punto  $Q$  debe tener como conjugado un rayo que pase por el punto  $Q'$ .

**Planos y puntos nodales.** Se llaman *puntos nodales* o *nodos* los puntos conjugados  $N$  y  $N'$  situados en el eje óptico que tienen la propiedad de que los rayos conjugados que pasan por ellos (en realidad o al ser prolongados imaginariamente dentro del sistema) son paralelos entre sí (véanse los rayos  $1-1'$  y  $2-2'$  en la fig. 116.6). Los planos perpendiculares al eje que pasan por los nodos se denominan *planos nodales* (anterior y posterior).

La distancia entre los nodos es siempre igual a la distancia entre los puntos principales. Cuando las propiedades ópticas de los medios que se encuentran a ambos lados del sistema son iguales (es decir,  $n = n'$ ), los nodos coinciden con los puntos principales.

**Distancias focales y potencia óptica de un sistema.** La distancia desde el punto principal anterior  $H$  hasta el foco anterior  $F$  se llama

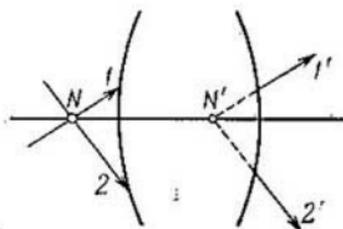


Fig. 116.6.

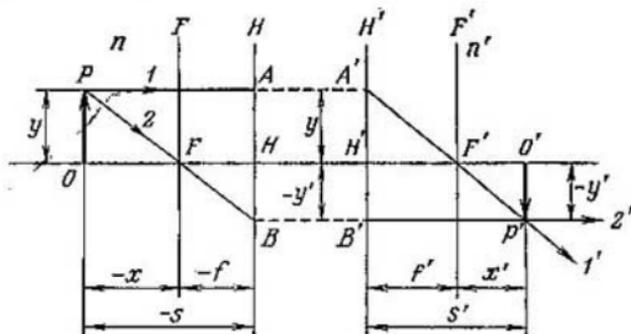


Fig. 117.7.

*distancia focal anterior  $f$*  del sistema. Se da el nombre de *distancia focal posterior  $f'$*  a la distancia desde  $H'$  hasta  $F'$ . Las distancias focales  $f$  y  $f'$  son magnitudes algebraicas. Son positivas si el foco dado se encuentra a la derecha del punto principal correspondiente, y negativas, en el caso contrario. Por ejemplo, en el sistema representado en la fig. 116.7 (véase más adelante), la distancia focal

posterior  $f'$  es positiva, y la distancia focal anterior  $f$ , negativa. En esta figura se indica la longitud verdadera del segmento  $HF$ , o sea, la magnitud positiva ( $-f$ ), igual al módulo de  $f$ .

Se puede demostrar que entre las distancias focales  $f$  y  $f'$  de un sistema óptico centrado, constituido por superficies refringentes esféricas, existe la relación

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} \quad (116.2)$$

en la que  $n$  es el índice de refracción del medio que hay delante del sistema óptico, y  $n'$ , el índice de refracción del medio que hay detrás de él. De (116.2) se sigue que cuando los índices de refracción de los medios que hay por ambos lados del sistema óptico son iguales, las distancias focales sólo se diferencian en el signo:

$$f' = -f \quad (116.3)$$

La magnitud

$$\Phi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \quad (116.4)$$

se llama *potencia óptica* o *convergencia* del sistema. Cuanto mayor sea  $\Phi$  menor será la distancia focal  $f'$  y, por consiguiente, tanto mayor será la refracción de los rayos por el sistema óptico. La potencia óptica se mide en *dioptrías* (dptr). Para obtener  $\Phi$  en dioptrías, en la fórmula (116.4) hay que tomar la distancia focal en metros. Si  $\Phi$  es positiva, la distancia focal posterior  $f'$  también es positiva; por consiguiente, el sistema da una imagen real de un punto infinitamente lejano, es decir, el haz de rayos paralelos se convierte en convergente. En este caso el sistema se dice que es *convergente*. Si  $\Phi$  es negativa, la imagen de un punto infinitamente alejado será virtual, o sea, el haz de rayos paralelos es transformado por el sistema en divergente. Este sistema se llama *divergente*.

**Fórmula de un sistema.** Las propiedades ópticas de un sistema se determinan totalmente dando sus planos o puntos cardinales. En particular, conociendo la posición de los planos cardinales se puede construir la imagen óptica que produce el sistema. Tomemos en el espacio objeto un segmento  $OP$  perpendicular al eje óptico (fig. 116.7; los nodos no se muestran en esta figura). La posición de este segmento se puede dar por medio de la distancia  $x$  medida desde el punto  $F$  hasta el  $O$ , o de la distancia  $s$  desde  $H$  hasta  $O$ . Las magnitudes  $x$  y  $s$ , lo mismo que las distancias focales  $f$  y  $f'$ , son algebraicas (en la figura se muestran sus módulos).

Desde el punto  $P$  trazamos el rayo  $I$ , paralelo al eje óptico. Este rayo atraviesa el plano  $H$  en el punto  $A$ . De acuerdo con las propiedades de los planos principales, el rayo  $I'$ , conjugado del  $I$ , debe pasar por el punto  $A'$ , conjugado del  $A$  en el plano  $H'$ . Como el rayo  $I$  es paralelo al eje óptico, el rayo  $I'$ , conjugado suyo, pasa

por el foco posterior  $F'$ . Ahora tracemos desde el punto  $P$  el rayo 2, que pasa por el foco anterior  $F$ . Este rayo atraviesa el plano  $H$  en el punto  $B$ . El rayo 2', conjugado del 2, pasará por el punto  $B'$ , conjugado del  $B$  en el plano  $H'$ , y será paralelo al eje óptico. El punto  $P'$  de intersección de los rayos 1' y 2' es la imagen del punto  $P$ . La imagen  $O'P'$ , lo mismo que el segmento  $OP$ , es perpendicular al eje óptico.

La posición de la imagen  $O'P'$  se puede caracterizar por la distancia  $x'$  desde el punto  $F'$  hasta  $O'$ , o por la distancia  $s'$  desde  $H'$  hasta  $O'$ . Las magnitudes  $x'$  y  $s'$  son algebraicas. En el caso que representa la fig. 116.7, estas magnitudes son positivas.

La magnitud  $x'$ , que determina la posición de la imagen, está relacionada por una ley con la magnitud  $x$ , que determina la posición del objeto, y con las distancias focales  $f$  y  $f'$ . Para los triángulos rectángulos con vértice común en el punto  $F$  (véase la fig. 116.7) se puede escribir la relación

$$\frac{OP}{HB} = \frac{y}{-y'} = \frac{-x}{-f}. \quad (116.5)$$

Análogamente, para los triángulos con vértice común en el punto  $F'$  tenemos que

$$\frac{H'A'}{O'P'} = \frac{y}{-y'} = \frac{f'}{x'}. \quad (116.6)$$

Juntando ambas relaciones se obtiene que  $(-x)/(-f) = f'/x'$ , de donde

$$xx' = ff'. \quad (116.7)$$

Esta igualdad se conoce con el nombre de *fórmula de Newton*. Si se cumple la condición  $n = n'$ , la fórmula de Newton toma la forma

$$xx' = -f^2 \quad (116.8)$$

(véase (116.2)).

De la fórmula que relaciona las distancias  $x$  y  $x'$  del objeto y la imagen a los respectivos focos del sistema, es fácil pasar a la fórmula que establece la relación entre las distancias  $s$  y  $s'$  a los puntos principales. Por la fig. 116.7 se ve que  $(-x) = (-s) - (-f)$  (es decir,  $x = s - f$ ), y  $x' = s' - f'$ . Sustituyendo estas expresiones de  $x$  y  $x'$  en la fórmula (116.7) y haciendo transformaciones, obtenemos que

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1. \quad (116.9)$$

Si se cumple la condición  $f' = -f$  (véase (116.3)), la fórmula (116.9) se simplifica de la forma siguiente

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}. \quad (116.10)$$

Las relaciones (116.7)–(116.10) son las fórmulas del sistema óptico centrado.

## § 117. Lente delgada

El sistema óptico centrado más simple es una *lente*. Esta es un cuerpo transparente (generalmente de vidrio) limitado por dos superficies esféricas<sup>1)</sup> (como caso particular una de las superficies puede ser plana). Los puntos de intersección de las superficies con el eje óptico de la lente se denominan *vértices* de las superficies refringentes. La distancia entre los vértices es el *espesor* o *grosor* de la lente. Si el grosor de la lente es despreciable en comparación con el menor de los radios de curvatura de las superficies que limitan la lente, ésta se dice que es *delgada*.

Los cálculos, que aquí no vamos a hacer, dan que, en el caso de una lente delgada, los planos principales  $H$  y  $H'$  se puede considerar que coinciden y que pasan por el centro  $O$  de la lente (fig. 117.1). Para las distancias focales de una lente delgada se obtiene la expresión

$$f' = -f = \frac{n_0}{n-n_0} \frac{R_1 R_2'}{R_2 - R_1}; \quad (117.1)$$

aquí  $n$  es el índice de refracción de la lente;  $n_0$ , el índice de refracción del medio que rodea la lente, y  $R_1$  y  $R_2$ , los radios de curvatura de las

superficies de la lente. Con los radios de curvatura se puede operar como con las magnitudes algebraicas: el radio de curvatura de la superficie convexa (es decir, en el caso en que el centro de curvatura está a la derecha del vértice) debe considerarse positivo, y el de la superficie cóncava (o sea, en el caso en que el centro de curvatura se halla a la izquierda del vértice), negativo. En los dibujos se indica el módulo del radio de curvatura, es decir,  $-R$ , si  $R < 0$ .

Si los índices de refracción de los medios que se encuentran a ambos lados de la lente delgada son iguales, los nodos  $N$  y  $N'$  coinciden con los puntos principales, o sea, se encuentran en el centro  $O$  de la lente. Por lo tanto, en este caso todo rayo que pase por el centro de la lente no cambiará de dirección. Si los índices de refracción de los medios que hay delante y detrás de la lente son distintos, los nodos no coinciden con los puntos principales, de manera que un rayo que pase por el centro de la lente sufrirá desviación.

Un haz de rayos paralelos, después de pasar por la lente, converge en uno de los puntos del plano focal (véase el punto  $Q'$  en la

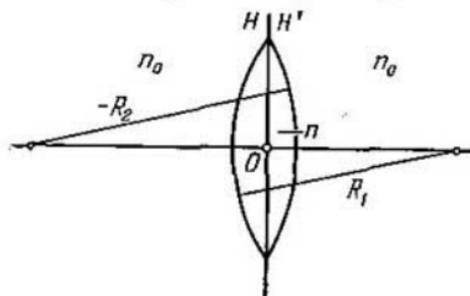


Fig. 117. 1.

<sup>1)</sup> Hay lentes con superficies más complejas.

fig. 117.2). Para determinar la posición de este punto hay que prolongar el rayo que pasa por el centro de la lente hasta su intersección con dicho plano focal (véase el rayo  $OQ'$  representado con línea de trazos). En este punto de intersección convergerán los demás rayos. Este procedimiento sirve si las propiedades ópticas del medio son las mismas por ambos lados de la lente ( $n = n'$ ). En el caso contrario el rayo que pasa por el centro sufre desviación. Para hallar el punto  $Q'$  en este caso hay que conocer la posición de los puntos nodales de la lente.

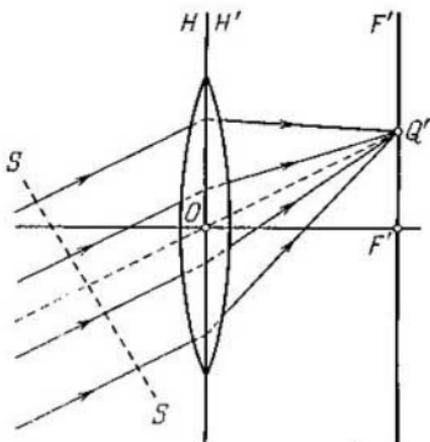


Fig. 117.2.

Conviene indicar que los caminos tomados a lo largo de los rayos que comienzan en la superficie  $SS$  (véase la fig. 117.2) y terminan en el punto  $Q'$  tienen la misma longitud óptica y son tautócronos (véase el final del § 115).

Para terminar hay que decir que una lente es un sistema óptico que dista mucho de ser perfecto. Las imágenes que da de los objetos tienen una serie de defectos. Pero el estudio de éstos queda fuera de los límites de este libro.

## § 118. Principio de Huygens

En los dos capítulos siguientes tenemos que estudiar los procesos que tienen lugar detrás de un obstáculo opaco con orificios, en el caso de que sobre él incida una onda luminosa. En la aproximación opticogeométrica, detrás del obstáculo no debe penetrar la luz en la región de la sombra geométrica. Pero en realidad la onda luminosa se propaga en principio por todo el espacio que hay detrás del obstáculo y penetra en dicha región. Esta penetración es tanto más importante cuanto menores son las dimensiones de los orificios. Cuando el diámetro de los orificios o la anchura de las rendijas son comparables con la longitud de la onda luminosa, la aproximación de la óptica geométrica resulta totalmente inaceptable.

El comportamiento de la luz detrás de un obstáculo con un orificio se puede explicar cualitativamente valiéndose del *principio de Huygens*, el cual establece el procedimiento para construir el frente de onda en un instante  $t + \Delta t$  si se conoce la posición de dicho frente en el instante  $t$ . Según el principio de Huygens, cada punto hasta el

cual llega el movimiento oscilatorio sirve de centro de ondas secundarias; la envolvente de estas ondas da la posición del frente en el siguiente instante (fig. 118.1; el medio se supone que no es homogéneo: la velocidad de la onda en la parte inferior del dibujo es mayor que en la superior).

Supongamos que sobre un obstáculo plano con un orificio incide un frente de onda paralelo a él (fig. 118.2). De acuerdo con Huygens, cada punto de la parte del frente de onda separada por el orifi-

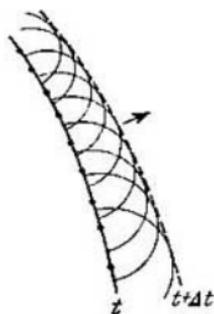


Fig. 118.1.

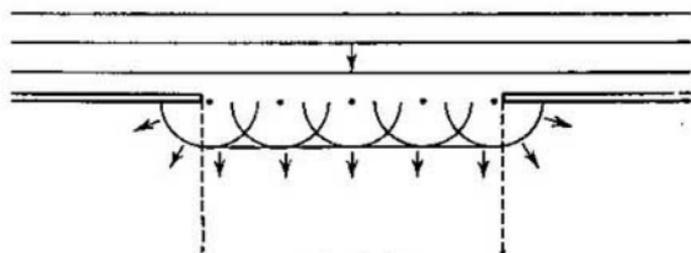


Fig. 118.2.

cio sirve de centro de ondas secundarias que, en un medio homogéneo e isótropo, serán esféricas. Construyendo la envolvente de las ondas secundarias nos convencemos de que detrás del orificio penetra la onda en la región de la sombra geométrica (cuyos límites se indican en la figura con líneas de trazos), rodeando el borde del obstáculo.

El principio de Huygens no da ninguna indicación acerca de la intensidad de las ondas que se propagan en distintas direcciones. Este inconveniente fue superado por Fresnel. El principio perfeccionado por él y llamado de Huygens—Fresnel se expone en el § 126. En ese mismo párrafo se da el fundamento físico de dicho principio.