

INTERFERENCIA DE LA LUZ

§ 119. Interferencia de las ondas luminosas

Sean dos ondas de igual frecuencia que, superponiéndose una a otra, excitan en cierto punto del espacio oscilaciones de la misma dirección:

$$A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

La amplitud de la oscilación resultante en dicho punto se determina por la expresión

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta,$$

en la que $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ (véase la fórmula (55.2) del tomo 1°).

Si la diferencia de fase δ de las oscilaciones excitadas por las ondas permanece constante con el tiempo, las ondas se llaman *coherentes*¹⁾.

En el caso de ondas no coherentes, δ varía continuamente, tomando con igual probabilidad valores cualesquiera, a causa de lo cual el valor medio de $\cos \delta$ respecto del tiempo es nulo. Por eso

$$\langle A^2 \rangle = \langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle.$$

De aquí, teniendo en cuenta la relación (110.10), concluimos que la intensidad que se observa cuando se superponen ondas no coherentes es igual a la suma de las intensidades que crea cada una de ellas por separado:

$$I = I_1 + I_2. \quad (119.1)$$

En el caso de ondas coherentes, $\cos \delta$ tiene un valor constante con el tiempo (pero propio de cada punto del espacio), de manera que

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (119.2)$$

En los puntos del espacio en que $\cos \delta > 0$, I será mayor que $I_1 + I_2$; en los puntos en que $\cos \delta < 0$, I será menor que $I_1 + I_2$. De este modo, al superponerse las ondas luminosas coherentes se produce una redistribución del flujo luminoso en el espacio, como resultado de la cual en unos puntos surgen máximos de intensidad y en otros, mínimos. Este fenómeno se conoce con el nombre de *interferencia* de las ondas. La interferencia se manifiesta con especial claridad cuando la intensidad de las dos ondas que interfieren es la misma:

¹⁾ En el párrafo siguiente estudiaremos el concepto de coherencia con más detalles.

$I_1 = I_2$. Entonces, según (119.2), en los máximos $I = 4I_1$, y en los mínimos, $I = 0$. Para las ondas no coherentes con la misma condición se obtiene en todas partes la misma intensidad $I_c = 2I_1$ (véase (119.1)).

De lo dicho se infiere que si se ilumina una superficie cualquiera con varias fuentes de luz (por ejemplo, con dos lámparas), al parecer, debe observarse una figura de interferencia con su característica alternancia de máximos y mínimos de intensidad. Sin embargo, por la experiencia cotidiana sabemos que en este caso la iluminación de la superficie decrece monótonamente a medida que se aleja de las fuentes de luz sin que se observe ninguna figura de interferencia. Esto se explica porque las fuentes naturales de luz no son coherentes.

La no coherencia de las fuentes naturales de luz se debe a que la radiación del cuerpo luminoso se compone de las ondas emitidas por muchos átomos. Los átomos aislados radían trenes de ondas, cuya duración es del orden de 10^{-8} s y su extensión, de cerca de 3 m (véase el § 110). La fase de un nuevo tren no está ligada en absoluto con la fase del precedente.

En la onda luminosa emitida por el cuerpo, la radiación de un grupo de átomos es sustituida al cabo de un tiempo del orden de 10^{-8} s por la radiación de otro grupo, y la fase de la onda resultante sufre variaciones casuales.

Las ondas luminosas coherentes se pueden obtener dividiendo

en dos partes (por medio de reflexiones o refracciones) la onda radiada por una fuente. Si se hace que las dos ondas así obtenidas recorran caminos ópticos distintos y después se superpongan una a otra, se observa la interferencia. La diferencia de longitud de los caminos ópticos recorridos por las ondas que interfieren no debe ser muy grande, ya que las oscilaciones que han de superponerse deben pertenecer a un mismo tren de ondas resultante. Si esta diferencia es del orden de 1 m, se superponen ondas correspondientes a distintos trenes y la diferencia de fases entre ellas cambiará continuamente de un modo caótico.

Supongamos que las ondas coherentes, resultantes del desdoblamiento, proceden del punto O (fig. 119.1). Hasta el punto P la primera onda recorre, en un medio de índice de refracción n_1 , el camino s_1 , y la segunda onda recorre, en un medio de índice de refracción n_2 , el camino s_2 . Si en el punto O la fase de las oscilaciones es igual a ωt , la primera onda excita en el punto P oscilaciones $A_1 \cos \omega \times (t - s_1/v_1)$, y la segunda, oscilaciones $A_2 \cos \omega (t - s_2/v_2)$ ($v_1 = c/n_1$ y $v_2 = c/n_2$ son las velocidades de fase de las ondas). Por

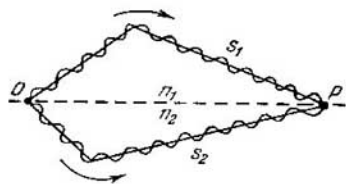


Fig. 119.1.

consiguiente, la diferencia de fase de las oscilaciones que excitan las ondas en el punto P será

$$\delta = \omega \left(\frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (n_2 s_2 - n_1 s_1).$$

Sustituyendo ω/c por $2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda_0$ (λ_0 es la longitud de la onda en el vacío), a la expresión de la diferencia de fase se le puede dar la forma

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \quad (119.3)$$

donde

$$\Delta = n_2 s_2 - n_1 s_1 = L_2 - L_1 \quad (119.4)$$

es una magnitud igual a la diferencia de las longitudes ópticas de los caminos recorridos por las ondas, llamada *diferencia de marcha, de camino o de recorrido óptico* (véase la fórmula (115.5)).

Por la fórmula (119.3) se ve que si la diferencia de marcha es igual a un número entero de longitudes de onda en el vacío

$$\Delta = \pm m \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (119.5)$$

la diferencia de fase δ resulta ser múltiple de 2π y las oscilaciones excitadas en el punto P por ambas ondas se efectuarán en la misma fase. De este modo, (119.5) es la condición de máximo de interferencia.

Si Δ es igual a un número semientero de longitudes de las ondas en el vacío,

$$\Delta = \pm \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (119.6)$$

será $\delta = \pm (2m + 1) \pi$ de manera que las oscilaciones en el punto P se encontrarán en oposición de fase. Por consiguiente, (119.6) es la condición de mínimo de interferencia.

Consideremos dos ondas luminosas cilíndricas coherentes que procedan de dos fuentes, S_1 y S_2 en forma de hilos delgados luminosos o de dos rendijas estrechas (fig. 119.2). La región en que estas ondas se superponen se llama *campo de interferencia*. En toda esta región se observa la alternancia de los sitios con intensidad de la luz máxima y mínima. Si en el campo de interferencia se introduce una pantalla, se verá en ella la figura de interferencia, formada por franjas brillantes y oscuras que se suceden alternativamente. Calculemos la anchura de estas franjas suponiendo que la pantalla es paralela al plano que pasa por las fuentes S_1 y S_2 . La posición de un punto en la pantalla la vamos a caracterizar por la coordenada x medida en dirección perpendicular a las líneas S_1 y S_2 . El punto de referencia lo elegimos en el punto O , respecto del cual S_1 y S_2 son simétricas. Consideraremos que las fuentes oscilan en concordancia.

cia de fase. Por la fig. 119.2 se ve que

$$s_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \quad s_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2.$$

Por lo tanto,

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 + s_1)(s_2 - s_1) = 2xd.$$

Más adelante se aclarará que para obtener una figura de interferencia distinguible, la distancia d entre las fuentes debe ser mucho menor que la distancia l hasta la pantalla. La distancia x , dentro de cuyos límites se forman las franjas de interferencia, también suele ser mucho menor que l . Con estas condiciones se puede suponer que

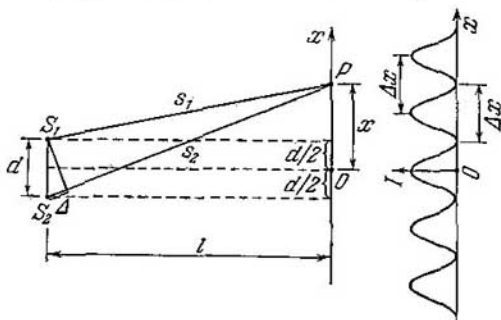


Fig. 119.2.

$s_2 + s_1 \approx 2l$. Entonces $s_2 - s_1 = xd/l$. Multiplicando $s_2 - s_1$ por el índice de refracción del medio n , obtenemos la diferencia de marcha óptica

$$\Delta = n \frac{xd}{l}. \quad (119.7)$$

La sustitución de este valor de Δ en la condición (119.5) da que los máximos de intensidad se observan donde los valores de x son iguales a

$$x_{\text{máx}} = \pm m \frac{l}{d} \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (119.8)$$

Aquí $\lambda = \lambda_0/n$ es la longitud de onda en el medio que llena el espacio entre la fuente y la pantalla.

Sustituyendo el valor (119.7) en la condición (119.6), obtenemos las coordenadas de los mínimos de intensidad:

$$x_{\text{mín}} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d} \lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (119.9)$$

La distancia entre dos máximos de intensidad vecinos la llamaremos *distancia entre las franjas de interferencia*, y la distancia entre los mínimos de intensidad vecinos, *anchura de las franjas de interferencia*. De las fórmulas (119.8) y (119.9) se sigue que la distancia entre las franjas y la anchura de éstas tienen un mismo valor

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda. \quad (119.10)$$

Según la fórmula (119.10), la distancia entre las franjas crece al disminuir la distancia d entre las fuentes. Si d fuera comparable con l , la distancia entre las franjas sería del mismo orden que λ , es decir, constituiría varias decenas de μm . En este caso las franjas por separado serían indistinguibles totalmente. Para que la figura de interferencia se haga clara es necesario que se cumpla la condición antes mencionada: $d \ll l$.

Si las ondas que interfieren tienen la misma intensidad ($I_1 = I_2 = I_0$), según (119.2), la intensidad resultante en los puntos en que la diferencia de fase es δ se determina por la expresión

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}.$$

Como $\delta \sim \Delta$, de acuerdo con (119.7), δ crece proporcionalmente a x . Por consiguiente, la intensidad varía a lo largo de la pantalla según la ley del cuadrado del coseno. En la fig. 119.2, a la derecha, se muestra la dependencia de I respecto de x que se obtiene en la luz monocromática.

La anchura de las franjas de interferencia y la distancia entre ellas depende de la longitud de onda λ . Únicamente en el centro de la figura, donde $x = 0$, coinciden los máximos de todas las longitudes de onda. A medida que se alejan del centro de la figura, los máximos de los distintos colores se desplazan unos de otros cada vez más. Esto hace que la figura de interferencia pierda nitidez cuando se observa en la luz blanca. En la luz monocromática el número de franjas de interferencia distinguibles aumenta sensiblemente.

Midiendo la distancia entre las franjas Δx y conociendo l y d , se puede calcular λ por la fórmula (119.10). Precisamente basándose en los experimentos de interferencia de la luz fueron halladas por vez primera las longitudes de onda de los rayos de distinto color.

Hemos estudiado la interferencia de dos ondas cilíndricas. Veamos lo que ocurre cuando se superponen dos ondas planas. Supongamos que las amplitudes de estas ondas son iguales y las direcciones en que se propagan forman un ángulo 2φ (fig. 119.3). Las direcciones en que oscila el vector luz consideraremos que son perpendiculares al plano del dibujo. Los vectores de onda \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 se encuentran en dicho plano y tienen el mismo módulo, $k = 2\pi/\lambda$. Escribamos las

ecuaciones de estas ondas:

$$A \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) = A \cos(\omega t - k \sin \varphi \cdot x - k \cos \varphi \cdot y),$$

$$A \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}) = A \cos(\omega t + k \sin \varphi \cdot x - k \cos \varphi \cdot y).$$

La onda resultante en los puntos de coordenadas x e y tiene la forma

$$A \cos(\omega t - k \sin \varphi \cdot x - k \cos \varphi \cdot y) +$$

$$+ A \cos(\omega t + k \sin \varphi \cdot x - k \cos \varphi \cdot y) =$$

$$= 2A \cos(k \sin \varphi \cdot x) \cos(\omega t - k \cos \varphi \cdot y). \quad (119.11)$$

De esta expresión se sigue que, en los puntos en que $k \sin \varphi \cdot x = \pm m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), la amplitud de las oscilaciones es igual a $2A$; y en los puntos en que $k \sin \varphi \cdot x = \pm (m + 1/2)\pi$, la amplitud de las oscilaciones es nula. Dondequiera que coloquemos la pantalla P perpendicularmente al eje, se observará en ella un sistema de franjas sucesivamente brillantes y oscuras, paralelas al eje z (este eje es perpendicular al plano del dibujo). Las coordenadas de los máximos de intensidad serán

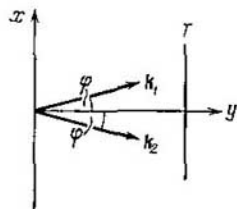


Fig. 119.3.

$$x_{\text{máx}} = \pm \frac{m\pi}{k \sin \varphi} = \pm \frac{m\lambda}{2 \sin \varphi}. \quad (119.12)$$

De la posición de la pantalla (es decir, de la coordenada y) sólo depende la fase de las oscilaciones (véase (119.11)).

Hemos supuesto para simplificar que las fases iniciales de las ondas que interfieren son nulas. Si la diferencia de estas fases es distinta de cero, en la fórmula (119.12) aparece un sumando constante y la figura de las franjas se desplaza a lo largo de la pantalla.

§ 120. Coherencia

Se llama *coherencia* el transcurso coordinado de varios procesos oscilatorios u ondulatorios. El grado de coordinación puede ser diverso. Respectivamente se puede introducir el concepto de *grado de coherencia* de dos ondas.

Se distinguen las coherencias *temporal* y *espacial*. Empezaremos por el estudio de la coherencia temporal.

Coherencia temporal. El proceso de interferencia descrito en el párrafo anterior está idealizado. En realidad este proceso es mucho más complejo. Esto se debe a que la onda monocromática que define la expresión

$$A \cos(\omega t - kr + \alpha),$$

en la que A , ω y α son constantes y representan una abstracción. Toda onda luminosa real está formada por la superposición de oscilaciones de todas las frecuencias (o longitudes de onda) comprendidas en un intervalo más o menos estrecho, pero finito, de frecuencias $\Delta\omega$ (o, respectivamente, de longitudes de ondas $\Delta\lambda$). Incluso para la luz considerada monocromática (es decir, de un solo color) el intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ es finito¹⁾. Además, la amplitud de la onda A y la fase α sufren con el tiempo variaciones casuales (caóticas) continuas. Por eso las oscilaciones excitadas en un punto determinado del espacio por dos ondas luminosas que se superponen una a otra tienen la forma

$$A_1(t) \cos [\omega_1(t) \cdot t + \alpha_1(t)], \quad A_2(t) \cos [\omega_2(t) \cdot t + \alpha_2(t)], \quad (120.1)$$

siendo las variaciones caóticas de las funciones $A_1(t)$, $\omega_1(t)$, $\alpha_1(t)$, $A_2(t)$, $\omega_2(t)$ y $\alpha_2(t)$ totalmente independientes.

Para simplificar vamos a suponer que las amplitudes A_1 y A_2 son constantes. Las variaciones de la frecuencia y de la fase se pueden reducir a la sola variación de la fase o a la sola variación de la frecuencia. Representemos la función

$$f(t) = A \cos [\omega(t) \cdot t + \alpha(t)] \quad (120.2)$$

en la forma

$$f(t) = A \cos \{ \omega_0 t + [\omega(t) - \omega_0] t + \alpha(t) \},$$

donde ω_0 es cierto valor medio de la frecuencia, e introduzcamos la designación $[\omega(t) - \omega_0] t + \alpha(t) = \alpha'(t)$. Entonces la fórmula (120.2) toma la forma

$$f(t) = A \cos [\omega_0 t + \alpha'(t)]. \quad (120.3)$$

Hemos obtenido una función en la cual sólo sufre variaciones caóticas la fase de las oscilaciones.

Por otra parte, en matemáticas se demuestra que una función inarmónica, por ejemplo, la (120.2), se puede representar en forma de suma de funciones armónicas, cuyas frecuencias estén comprendidas en cierto intervalo $\Delta\omega$ (véase la fórmula (120.4)).

De este modo, cuando se estudia el problema de la coherencia, son posibles dos enfoques: el «de la fase» y el «de la frecuencia». Empezaremos por el «de la fase». Supongamos que en las fórmulas (120.1) las frecuencias ω_1 y ω_2 satisfacen la condición $\omega_1 = \omega_2 = \text{const}$ y veamos qué influencia ejerce la variación de las fases α_1 y α_2 . De acuerdo con la fórmula (119.2), con las suposiciones hechas la intensidad de la luz en un punto dado se determina por la expresión

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta(t),$$

¹⁾ Las rayas espectrales que emiten los átomos tienen una anchura «natural» $\Delta\omega$ del orden de 10^8 s^{-1} ($\Delta\lambda \sim 10^{-4} \text{ \AA}$).

en la que $\delta(t) = \alpha_2(t) - \alpha_1(t)$. El último sumando de esta fórmula recibe el nombre de *término de interferencia*.

Todo dispositivo con el cual se puede observar una figura de interferencia (el ojo¹), una placa fotográfica, etc.), tiene cierta inercia. Por eso registra la figura promediada por el intervalo de tiempo t_{disp} necesario para que «actúe» el dispositivo. Si durante el tiempo t_{disp} el factor $\cos \delta(t)$ toma todos los valores desde -1 hasta $+1$, el valor medio del término de interferencia será nulo. Por eso la intensidad que registre el dispositivo será igual a la suma de las intensidades que crean en el punto dado cada una de las ondas por separado: no habrá interferencia y nos veremos obligados a reconocer que las ondas no son coherentes.

En cambio, si durante el tiempo t_{disp} el valor de $\cos \delta(t)$ permanece prácticamente invariable²), el dispositivo pone de manifiesto la interferencia y hay que reconocer que las ondas son coherentes.

De lo dicho se deduce que el concepto de coherencia es relativo: dos ondas pueden comportarse como coherentes al ser observadas con un dispositivo (de pequeña inercia) y como incoherentes al serlo con otro dispositivo (de mayor inercia). Para caracterizar las propiedades de coherencia de las ondas se introduce el *tiempo de coherencia* t_{coher} , que se define como el tiempo durante el cual la variación casual de la fase de la onda $\alpha(t)$ alcanza un valor del orden de π . Durante el tiempo t_{coher} la oscilación parece que se olvida de su fase inicial y se hace incoherente con respecto a sí misma.

Aprovechando el concepto de tiempo de coherencia se puede decir que en aquellos casos en que la constante de tiempo del dispositivo es mucho mayor que el tiempo de coherencia de las ondas que se superponen ($t_{\text{disp}} \gg t_{\text{coher}}$), el dispositivo no registra la interferencia. Pero si $t_{\text{disp}} \ll t_{\text{coher}}$, el dispositivo pone de manifiesto una figura de interferencia clara. Con valores intermedios de t_{disp} la claridad de la figura disminuirá a medida que t_{disp} crezca desde los valores menores que t_{coher} hasta valores mayores que t_{coher} .

La distancia $l_{\text{coher}} = ct_{\text{coher}}$ en que la onda se desplaza durante el tiempo t_{coher} se llama *longitud de coherencia* (o *longitud del tren*). La longitud de coherencia es la distancia, a la cual la variación casual de la fase alcanza el valor $\sim \pi$. Para obtener la figura de interferencia dividiendo una onda natural en dos partes, es necesario que la diferencia de marcha óptica Δ sea menor que la longitud de coherencia. Esta condición limita el número de franjas de interfe-

¹) Se recordará que la demostración de las películas cinematográficas se basa en la inercia de la percepción visual (persistencia de las imágenes en la retina), que, aproximadamente, es de 0,1 s.

²) La diferencia de fase $\delta(t)$ es distinta en diferentes puntos del espacio. La influencia del término de interferencia se manifiesta en aquellos puntos en que éste es distinto de cero.

rencia visibles que se observan valiéndose del esquema representado en la fig. 119.2. Al ir aumentando el número m de la franja crece la diferencia de marcha, por lo que la claridad de las franjas se va haciendo cada vez peor.

Pasemos ahora a esclarecer el papel de la no monocromaticidad de las ondas luminosas. Supongamos que la luz está constituida por una sucesión de trenes de ondas idénticos, de frecuencia ω_0 y duración τ . Al ser reemplazado un tren por el siguiente, la fase sufre variaciones desordenadas, por lo que los trenes resultan ser mutuamente incoherentes. Con estas suposiciones la duración τ de un tren coincide prácticamente con el tiempo de coherencia t_{coher} .

En matemáticas se demuestra el teorema de Fourier, según el cual toda función finita integrable $F(t)$ se puede representar en forma de suma de un número infinito de componentes armónicas de frecuencia continuamente variable:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (120.4)$$

La expresión (120.4) se llama *integral de Fourier*. La función $A(\omega)$, que figura bajo el signo de integral, es la amplitud de la componente monocromática correspondiente. Según la teoría de las integrales de Fourier, la forma analítica de la función $A(\omega)$ se determina por la expresión

$$A(\omega) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi, \quad (120.5)$$

en la que ξ es la variable auxiliar de integración.

Supongamos que la función $F(t)$ describe la perturbación luminosa, en cierto punto en el instante t , producida por un solo tren de ondas. En este caso se determina por las condiciones

$$\begin{aligned} F(t) &= A_0 e^{i\omega_0 t} & \text{para } |t| \leq \tau/2, \\ F(t) &= 0 & \text{para } |t| > \tau/2. \end{aligned}$$

La gráfica de la parte real de esta función se da en la fig. 120.1.

Fuera del intervalo de $-\tau/2$ a $+\tau/2$ la función $F(t)$ es nula. Por eso la expresión (120.5), que determina la amplitud de las componentes armónicas, tiene la forma

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 2\pi \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} [A_0 e^{i\omega_0 \xi}] e^{-i\omega \xi} d\xi = 2\pi A_0 \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{i(\omega_0 - \omega)\xi} d\xi = \\ &= 2\pi A_0 \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)\xi}}{i(\omega_0 - \omega)} \Big|_{-\tau/2}^{+\tau/2}. \end{aligned}$$

Después de sustituir los límites de integración y de hacer transformaciones fáciles, llegamos a la fórmula

$$A(\omega) = \pi A_0 \tau \frac{\text{sen}[(\omega - \omega_0) \tau/2]}{(\omega - \omega_0) \tau/2}.$$

La intensidad $I(\omega)$ de la componente armónica de la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud, es decir, a la expresión

$$f(\omega) = \frac{\text{sen}^2[(\omega - \omega_0) \tau/2]}{[(\omega - \omega_0) \tau/2]^2}. \quad (120.6)$$

La gráfica de la función (120.6) se muestra en la fig. 120.2. Por esta figura se ve que la intensidad de las componentes, cuyas frecuencias

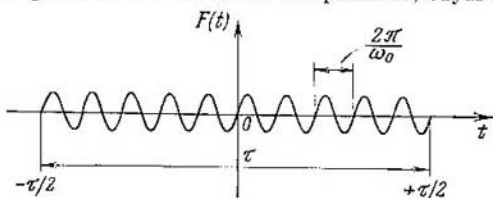


Fig. 120.1.

están comprendidas en el intervalo $\Delta\omega = 2\pi/\tau$, supera considerablemente la intensidad de las demás componentes. Esta circunstancia

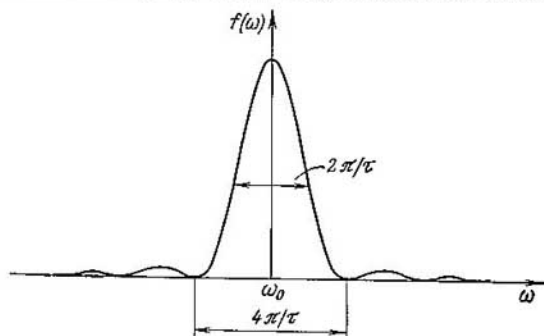


Fig. 120.2.

permite relacionar la duración τ del tren de ondas con las frecuencias eficaces del intervalo $\Delta\omega$ del espectro de Fourier

$$\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu}.$$

Identificando τ con el tiempo de coherencia, llegamos a la relación

$$t_{\text{coher}} \sim \frac{1}{\Delta\nu} \quad (120.7)$$

(el signo \sim significa «es igual en orden de magnitud »).

De la relación (120.7) se sigue que cuanto más ancho sea el intervalo de frecuencias representadas en una onda luminosa dada, tanto menor será el tiempo de coherencia de dicha onda.

La frecuencia está ligada con la longitud de onda en el vacío por la relación $\nu = c/\lambda_0$. Derivando esta relación hallamos que $\Delta\nu = c\Delta\lambda_0/\lambda_0^2 \approx c\Delta\lambda/\lambda^2$ (hemos omitido el signo menos que se obtiene al hallar la diferencial y hemos supuesto $\lambda_0 \approx \lambda$). Sustituyendo en la fórmula (120.7) $\Delta\nu$ por su expresión mediante λ y $\Delta\lambda$, se obtiene para el tiempo de coherencia la expresión

$$t_{\text{coher}} \sim \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}. \quad (120.8)$$

De aquí se obtiene para la longitud de coherencia el valor siguiente:

$$l_{\text{coher}} = ct_{\text{coher}} \sim \lambda^2/\Delta\lambda. \quad (120.9)$$

De la fórmula (119.5) se infiere que la diferencia de marcha, con la cual se obtiene el máximo de orden m -ésimo, se determina por la relación

$$\Delta_m = \pm m\lambda_0 \approx \pm m\lambda.$$

Cuando esta diferencia de marcha alcanza un valor del orden de la longitud de coherencia, las franjas se hacen indistinguibles. Por consiguiente, el orden de interferencia límite que se puede observar lo determina la condición

$$m_{\text{lim}} \lambda \sim l_{\text{coher}} \sim \lambda^2/\Delta\lambda,$$

de donde

$$m_{\text{lim}} \sim \lambda/\Delta\lambda. \quad (120.10)$$

De (120.10) se deduce que el número de franjas de interferencia observables valiéndose del esquema representado en la fig. 119.2, aumenta al disminuir el intervalo de longitudes de onda representadas en la luz que se emplea.

Coherencia espacial. Según la fórmula $k = \omega/v = n\omega/c$, a una dispersión de los valores de las frecuencias $\Delta\omega$ corresponde una dispersión de los valores de k . Hemos establecido que la coherencia temporal se determina por el valor de $\Delta\omega$. Por lo tanto, la coherencia temporal está relacionada con la dispersión de los valores del módulo del vector de onda k . La coherencia espacial está ligada con la dispersión de las direcciones del vector k , que se caracteriza por la magnitud Δe_k .

La aparición en un punto cualquiera del espacio de oscilaciones excitadas por ondas con e_h distinta es posible si estas ondas son emitidas por partes diferentes de una fuente de luz extensa (no puntual). Admitamos, para simplificar, que la fuente tiene la forma de un disco, el cual se ve desde el punto dado bajo el ángulo φ . En

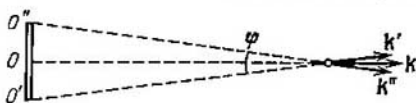


Fig. 120.3.

la fig. 120.3 se puede ver que el ángulo φ caracteriza el intervalo en que están comprendidos los versores e_h . Vamos a considerar que este ángulo es pequeño.

Supongamos que la luz de la fuente incide sobre dos rendijas estrechas, detrás de las cuales se encuentra una pantalla (fig. 120.4).

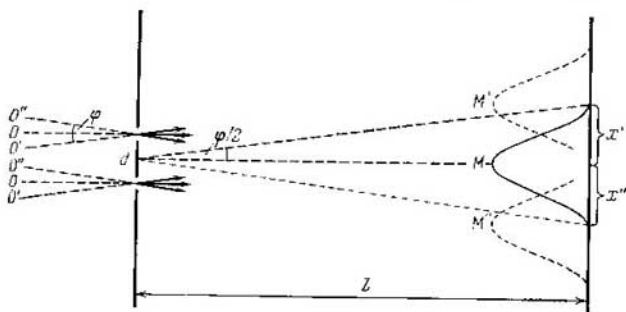


Fig. 120.4.

El intervalo de frecuencias que emite la fuente consideraremos que es pequeño, para que el grado de coherencia temporal sea suficiente para obtener una figura de interferencia nítida. La onda procedente de la parte de la superficie designada por O en la fig. 120.4, crea el máximo de orden nulo M en el centro de la pantalla. El máximo de orden nulo M' creado por la onda procedente de la parte O' estará desplazado del centro de la pantalla la distancia x' . En virtud de la pequeñez del ángulo φ y de la relación d/l , se puede admitir que $x' = l\varphi/2$. El máximo de orden nulo M'' que crea la onda procedente de la parte O'' , está desplazado del centro de la pantalla, hacia el

lado opuesto, la distancia x'' , igual a x' . Los máximos de orden nulo de las demás partes de la fuente se encuentran entre los máximos M' y M'' .

Las partes aisladas de la fuente de luz excitan ondas, cuyas fases no tienen ninguna relación entre sí. Por eso la figura de interferencia que aparezca en la pantalla será la superposición de las figuras que crean cada una de las partes por separado. Si el desplazamiento x' es mucho menor que la anchura de las franjas de interferencia $\Delta x = \lambda/d$ (véase la fórmula (119.10)), los máximos de las diversas partes de la fuente se superponen prácticamente unos a otros y la figura será la misma que la debida a una fuente puntual. Cuando $x' \approx \Delta x$, los máximos de unas partes se superponen a los mínimos de otras y la figura de interferencia no se observa. De este modo, la figura de interferencia se podrá distinguir a condición de que $x' < \Delta x$, es decir,

$$\frac{l\varphi}{2} < \frac{l\lambda}{d}, \quad (120.11)$$

o bien

$$\varphi < \lambda/d. \quad (120.12)$$

Al pasar de (120.11) a (120.12) hemos omitido el factor 2.

La fórmula (120.12) determina las dimensiones angulares de la fuente, con las cuales se observa la interferencia. Valiéndose de esta fórmula también se puede determinar la distancia máxima entre las rendijas, con la cual aún se puede observar la interferencia si la fuente tiene la dimensión angular φ . Multiplicando la desigualdad (120.12) por d/φ , llegamos a la condición

$$d < \lambda/\varphi. \quad (120.13)$$

El conjunto de ondas con distinta c_h se puede sustituir por la onda resultante que incide sobre la pantalla con las rendijas. La ausencia de figura de interferencia significa que las oscilaciones que excita esta onda en los sitios en que se encuentran las rendijas primera y segunda son incoherentes. Por lo tanto, también las oscilaciones de la onda misma en los puntos que se encuentran a la distancia d uno de otro son incoherentes. Si la fuente fuera idealmente monocromática (es decir, que $\Delta\nu = 0$ y $t_{\text{coher}} = \infty$), la superficie que pasa por las rendijas sería una superficie de onda y las oscilaciones en todos sus puntos se efectuarían en la misma fase. Hemos establecido que en el caso de que $\Delta\nu \neq 0$ y las dimensiones de la fuente sean finitas ($\varphi \neq 0$), las oscilaciones en los puntos de la superficie que se encuentren a una distancia $d > \lambda/\varphi$ serán incoherentes.

A la superficie que sería de onda a condición de que la fuente fuera monocromática, la denominaremos, para abreviar, pseudosu-

perficie de onda¹). La condición (120.12) podríamos satisfacerla disminuyendo la distancia d entre las rendijas, es decir, tomando puntos más próximos entre sí de la seudosuperficie de onda. Por consiguiente, las oscilaciones que excita la onda en puntos de la seudosuperficie de onda suficientemente próximos, resultan ser coherentes. Esta coherencia se llama *espacial*.

Así, la fase de las oscilaciones, al pasar de un punto de la seudosuperficie de onda a otro, varía desordenadamente. Introducimos la distancia ρ_{coher} a la cual desplazándose a lo largo de la seudosuperficie de onda, la variación casual de la fase alcanza el valor de $\sim \pi$. Las oscilaciones en dos puntos de la seudosuperficie de onda que se hallen entre sí a una distancia menor que ρ_{coher} serán aproximadamente coherentes. La distancia ρ_{coher} recibe el nombre de *longitud de coherencia espacial* o *radio de coherencia*. De (120.13) se sigue que

$$\rho_{\text{coher}} \sim \lambda/\varphi. \quad (120.14)$$

La dimensión angular del Sol es de cerca de 0,01 rd. y la longitud de las ondas luminosas es igual, aproximadamente, a 0,5 μm . Por consiguiente, el radio de coherencia de las ondas luminosas procedentes del Sol tiene un valor del orden de

$$\rho_{\text{coher}} = 0,5/0,01 = 50 \mu\text{m} = 0,05 \text{ mm}. \quad (120.15)$$

Todo el espacio que ocupa una onda se puede dividir en partes, dentro de cada una de las cuales dicha onda conserve aproximadamente la coherencia. El volumen de esta parte del espacio, llamada *volumen de coherencia*, es igual en orden de magnitud al producto de la longitud de coherencia temporal por el área del círculo de radio ρ_{coher} .

La coherencia espacial de una onda luminosa en las proximidades de la superficie del cuerpo caldeado que la emite está limitada por un radio de coherencia ρ_{coher} , cuya dimensión es de varias longitudes de onda solamente. A medida que aumenta la distancia a la fuente, el grado de coherencia espacial crece. La radiación de láser²) posee una enorme coherencia temporal y espacial. En el orificio de salida del láser la coherencia espacial se observa en toda la sección transversal del haz luminoso.

Al parecer, la interferencia se podría observar haciendo pasar por dos rendijas practicadas en una pantalla opaca la luz que se propaga desde una fuente cualquiera. Pero si la coherencia espacial de la onda que incide sobre las rendijas es pequeña, los haces de luz que pasan a través de ellas resultan ser no coherentes y la figura de

¹) Debe tenerse en cuenta que este término no se utiliza en la literatura científica. Nosotros lo empleamos convencionalmente para darle a la exposición mayor claridad.

²) Acerca de los láseres se tratará en el tomo 3º de este Curso.]

interferencia no se observa. T. Young consiguió en 1802 la interferencia de dos rendijas aumentando la coherencia espacial de la luz incidente sobre ellas. Este aumento lo logró haciendo pasar previamente la luz por un orificio pequeño practicado en una pantalla opaca. Con la luz que había pasado por ese orificio se iluminaban las rendijas de una segunda pantalla opaca. De este modo Young fue el primero que observó la interferencia de las ondas luminosas y determinó la longitud de éstas.

§ 121. Procedimientos para observar la interferencia de la luz

Vamos a examinar dos esquemas de interferencia concretos, en uno de ellos se emplea, para dividir en dos la onda luminosa, la reflexión, y en el otro, la refracción de la luz.

Espejos de Fresnel. Dos espejos planos en contacto OM y ON se sitúan de tal modo que sus superficies reflectoras formen un ángulo aproximadamente igual a π (fig. 121.1). Respectivamente, el ángulo

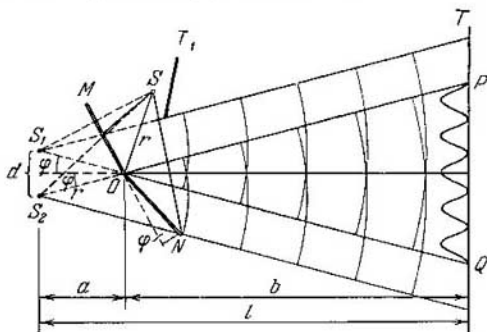


Fig. 121.1.

φ de la figura es muy pequeño. Paralelamente a la línea de intersección O de los espejos y a la distancia r de ella se coloca una fuente rectilínea de luz S (por ejemplo, una rendija luminosa estrecha). Los espejos proyectan sobre la pantalla T dos ondas cilíndricas coherentes que se propagan como si procedieran de las fuentes virtuales S_1 y S_2 . La pantalla opaca T_1 impide el paso de la luz de la fuente S hacia la pantalla T .

El rayo OQ es el reflejado del SO en el espejo OM y el rayo OP , el reflejado del SO en el espejo ON . Se comprende fácilmente que el

ángulo entre los rayos OP y OQ es igual a 2φ . Como S y S_1 están situados simétricamente con respecto a OM , la longitud del segmento OS_1 será igual a OS , es decir, a r . Razonamientos análogos conducen al mismo resultado para el segmento OS_2 . De este modo, la distancia entre las fuentes S_1 y S_2 es

$$d = 2r \operatorname{sen} \varphi \approx 2r\varphi.$$

En la fig. 121.1 se ve que $a = r \cos \varphi \approx r$. Por consiguiente,

$$l = r + b,$$

donde b es la distancia desde la línea de intersección O de los espejos hasta la pantalla T .

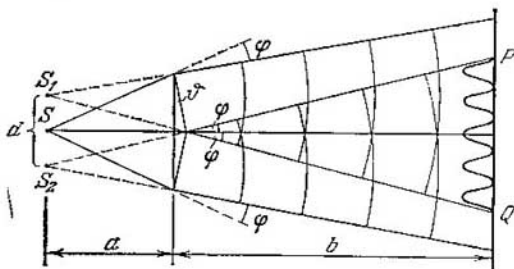


Fig. 121.2.

Sustituyendo en la fórmula (119.10) los valores de d y l que hemos hallado, obtenemos la anchura de una franja de interferencia:

$$\Delta x = \frac{r+b}{2r\varphi} \lambda. \quad (121.1)$$

La región PQ en que se superponen las ondas tiene la extensión $2b \operatorname{tg} \varphi \approx 2b\varphi$. Dividiendo esta longitud por la anchura de la franja Δx , hallamos el número máximo de franjas de interferencia que se pueden observar valiéndose de los espejos de Fresnel con unos parámetros dados del esquema:

$$N = \frac{4b\varphi^2}{\lambda(r+b)}. \quad (121.2)$$

Para que estas franjas se vean realmente es preciso que $N/2$ no supere al m_{lim} determinado por la fórmula (120.10).

Biprisma de Fresnel. Es un sistema de dos prismas iguales, de ángulo de refracción ϑ muy pequeño, unidos por sus bases (fig. 121.2). Ambos prismas forman un solo trozo de vidrio. Paralela a la arista

común, y a la distancia a de la cara opuesta a dicha arista, se sitúa una fuente rectilínea S de luz.

Se puede mostrar que cuando el ángulo de refracción ϑ de los prismas es muy pequeño y el ángulo de incidencia de los rayos sobre la cara del prisma no es muy grande, todos los rayos son desviados por el prisma prácticamente un mismo ángulo

$$\varphi = (n - 1) \vartheta$$

(n es el índice de refracción del prisma). El ángulo de incidencia de los rayos sobre el prisma es pequeño. Por eso todos los rayos son desviados por cada una de las mitades del biprisma el mismo ángulo. Como resultado se forman dos ondas cilíndricas coherentes que parten de las fuentes virtuales S_1 y S_2 que se encuentran en el mismo plano que S . La distancia entre las fuentes es

$$d = 2a \sin \varphi \approx 2a\varphi = 2a(n - 1) \vartheta.$$

La distancia de las fuentes a la pantalla

$$l = a + b.$$

La anchura de una franja de interferencia la hallamos por la fórmula (119.10):

$$\Delta x = \frac{a+b}{2a(n-1)\vartheta} \lambda. \quad (121.3)$$

La región PQ en que las ondas se superponen tiene la extensión

$$2b \operatorname{tg} \varphi \approx 2b\varphi = 2b(n - 1) \vartheta.$$

El número máximo de franjas observables es

$$N = \frac{4ab(n-1)^2 \vartheta^2}{\lambda(a+b)}. \quad (121.4)$$

§ 122. Interferencia de la luz al reflejarse en láminas delgadas

Cuando una onda luminosa incide sobre una lámina delgada (o una película) transparente se produce su reflexión en las dos superficies de la lámina. Como resultado surgen dos ondas luminosas que, en determinadas condiciones, pueden interferir.

Sea una lámina transparente planoparalela, sobre la cual incide una onda luminosa plana, que se puede considerar como un haz de rayos paralelos (fig. 122.1). La lámina proyecta hacia arriba dos haces paralelos de luz, de los cuales uno se ha formado a expensas de la reflexión en la superficie superior de la lámina y el otro, a causa de la reflexión en la superficie inferior (en la fig. 122.1 cada uno de estos haces se representa por un solo rayo). Al entrar en la lámina y salir de ella, el segundo haz sufre la refracción. Además de estos

dos haces la lámina proyecta hacia arriba los haces que se producen como resultado de la triple, quintuple, etc., reflexión en sus superficies. Pero debido a la pequeñez de su intensidad, estos haces no serán tenidos en cuenta¹). Tampoco nos vamos a interesar por los haces que pasan a través de la lámina.

La diferencia de marcha que adquieren los rayos 1 y 2 antes de encontrarse en el punto C, es

$$\Delta = ns_2 - s_1r \quad (122.1)$$

donde s_1 es la longitud del segmento BC; s_2 , la longitud total de los segmentos AO y OC; n , el índice de refracción de la lámina. El

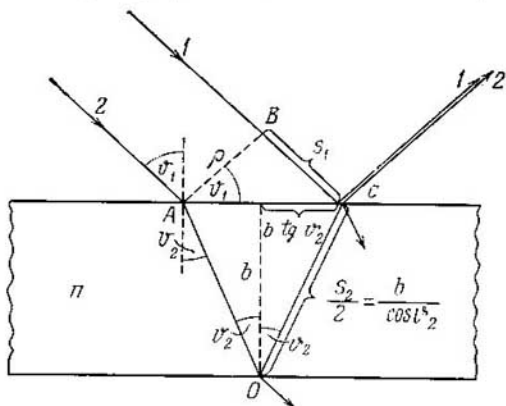


Fig. 122.1.

índice de refracción del medio que rodea la lámina supondremos que es igual a la unidad. En la fig. 122.1 se ve que $s_1 = 2b \operatorname{tg} \vartheta_2 \operatorname{sen} \vartheta_1$ y $s_2 = 2b/\cos \vartheta_2$ (b es el espesor de la lámina). La sustitución de estos valores en la expresión (122.1) da que

$$\Delta = \frac{2bn}{\cos \vartheta_2} - 2b \operatorname{tg} \vartheta_2 \operatorname{sen} \vartheta_1 = 2b \frac{n^2 - n \operatorname{sen} \vartheta_2 \operatorname{sen} \vartheta_1}{n \cos \vartheta_2}.$$

Haciendo la sustitución $n \operatorname{sen} \vartheta_2 = \operatorname{sen} \vartheta_1$ y teniendo en cuenta que

$$n \cos \vartheta_2 = \sqrt{n^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta_2} = \sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 \vartheta_1},$$

¹) Siendo $n = 1,5$, en la superficie de la lámina se refleja aproximadamente un 5% del flujo luminoso incidente (véase el último párrafo del § 112). Después de la segunda reflexión, la intensidad será igual a $0,05 \cdot 0,05$, o sea, al 0,25% de la intensidad del haz inicial. Después de la tercera reflexión, a $0,05 \cdot 0,05 \cdot 0,05$ ó al 0,0125%, lo que constituye la 1/400 parte de la intensidad del haz reflejado una sola vez.

es fácil reducir la fórmula para Δ a la forma

$$\Delta = 2b \sqrt{n^2 - \text{sen}^2 \vartheta_1}. \quad (122.2)$$

Al calcular la diferencia de fase δ entre las oscilaciones en los rayos 1 y 2 hay que tomar en consideración, además de la diferencia de marcha óptica Δ , la posibilidad del cambio de fase de la onda al reflejarse (véase el § 112). En el punto C (véase la fig. 122.1) la reflexión se produce en el límite de separación entre un medio ópticamente menos denso y un medio ópticamente más denso. Por eso la fase de la onda sufre un cambio igual a π . En el punto O la reflexión tiene lugar en el límite de separación entre un medio ópticamente más denso y un medio ópticamente menos denso, de manera que el salto de fase no se produce. En conclusión, entre los rayos 1 y 2 se crea una diferencia de fase adicional igual a π . Esta diferencia se puede tener en cuenta añadiendo (o restando) a Δ media longitud de onda en el vacío. Como resultado obtenemos

$$\Delta = 2b \sqrt{n^2 - \text{sen}^2 \vartheta_1} - \frac{\lambda_0}{2}. \quad (122.3)$$

Así, cuando sobre la lámina incide una onda plana se forman dos ondas reflejadas, cuya diferencia de fase se determina por la fórmula (122.3). Veamos las condiciones, con las cuales estas ondas resultan coherentes y pueden interferir. Consideraremos dos casos.

1. **Lámina planoparalela.** Las dos ondas planas reflejadas se propagan en una dirección, que forma con la normal a la lámina un ángulo igual al de incidencia ϑ_1 . Estas ondas pueden interferir si se cumplen las condiciones tanto de coherencia temporal como espacial.

Para que se produzca la coherencia temporal, la diferencia de marcha (122.3) no debe ser mayor que la longitud de coherencia, igual a $\lambda^2/\Delta\lambda \approx \lambda_0^2/\Delta\lambda_0$ (véase la fórmula (120.9)). Por consiguiente, debe cumplirse la condición

$$2b \sqrt{n^2 - \text{sen}^2 \vartheta_1} - \frac{\lambda_0}{2} < \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0}$$

o bien

$$b < \frac{\lambda_0 (\lambda_0/\Delta\lambda_0 + 1/2)}{2 \sqrt{n^2 - \text{sen}^2 \vartheta_1}}.$$

En la relación obtenida $1/2$ se puede despreciar en comparación con $\lambda_0/\Delta\lambda_0$. La expresión $\sqrt{n^2 - \text{sen}^2 \vartheta_1}$ tiene un valor del orden de la unidad¹⁾. Por lo tanto, se puede escribir que

$$b < \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda_0} \quad (122.4)$$

¹⁾ Para $n = 1,5$ la magnitud de esta expresión varía entre los límites de 1,12 (cuando $\vartheta_1 = \pi/2$) a 1,5 (cuando $\vartheta_1 = 0$).

(el espesor duplicado de la lámina debe ser menor que la longitud de coherencia).

De este modo, las ondas reflejadas serán coherentes únicamente si el espesor de la lámina b no supera la magnitud determinada por la relación (122.4). Suponiendo $\lambda_0 = 5000 \text{ \AA}$ y $\Delta\lambda_0 = 20 \text{ \AA}$, obtenemos el valor límite del espesor, igual a

$$\frac{5000^2}{2 \cdot 20} \approx 6 \cdot 10^5 \text{ \AA} = 0,06 \text{ mm.} \quad (122.5)$$

Veamos ahora la condición con que se cumple la coherencia espacial. Interpongamos en el camino de los haces reflejados una pantalla T (fig. 122.2). Los rayos $1'$ y $2'$ que llegan al punto P' se hallan

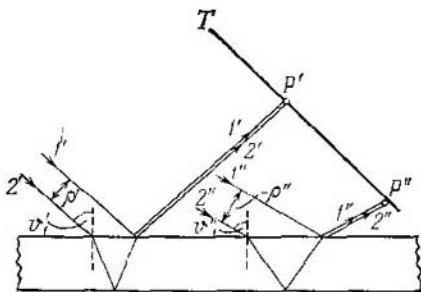


Fig. 122.2.

entre sí, en el haz incidente, a la distancia ρ' . Si esta distancia no es mayor que el radio de coherencia ρ_{coher} de la onda incidente, los rayos $1'$ y $2'$ serán coherentes y crearán en el punto P' la iluminación determinada por el valor de la diferencia de marcha Δ correspondiente al ángulo de incidencia ϑ_1' . Los otros pares de rayos, que inciden también bajo el mismo ángulo ϑ_1' , crean en los demás puntos de la pantalla la misma iluminación. De este modo, la pantalla resultará iluminada uniformemente (o en el caso en que $\Delta = (m + 1/2)\lambda_0$ estará oscura). Si varía la inclinación del haz (es decir, si varía el ángulo ϑ_1) variará también la iluminación de la pantalla.

En la fig. 122.1 se ve que la distancia entre los rayos incidentes 1 y 2 es

$$\rho = 2b \operatorname{tg} \vartheta_2 \cos \vartheta_1 = \frac{b \operatorname{sen}^2 \vartheta_1}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 \vartheta_1}}. \quad (122.6)$$

Si se toma $n = 1,5$, entonces para $\vartheta_1 = 45^\circ$ se obtiene $\rho = 0,8 b$, y para $\vartheta_1 = 10^\circ$ — $\rho = 0,1b$. Si la incidencia es normal ($\vartheta_1 = 0$), $\rho = 0$ cualquiera que sea n .

El radio de coherencia de la luz solar tiene un valor del orden de 0,05 mm (véase (120.15)). Si el ángulo de incidencia es de 45° se puede suponer $\rho \approx b$. Por lo tanto, para que se produzca la interferencia en estas condiciones debe cumplirse la relación

$$b < 0,05 \text{ mm} \tag{122.7}$$

(compárese con (122.5)). Para un ángulo de incidencia del orden de 10° la coherencia espacial se conservará si el espesor de la lámina no es mayor de 0,5 mm. De este modo, llegamos a la conclusión de que, a causa de las limitaciones que imponen las coherencias temporal y espacial, cuando la lámina se ilumina con luz solar, la interferencia sólo se observa si el espesor de dicha lámina no supera

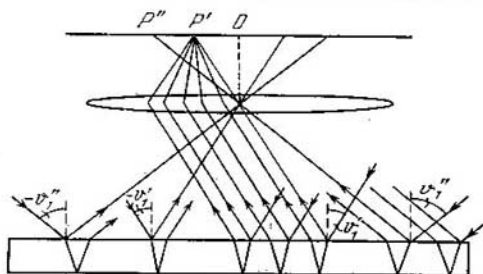


Fig. 122.3.

varias centésimas de milímetro. Empleando para la iluminación una luz, cuyo grado de coherencia sea mayor, la interferencia se observa también en láminas o películas más gruesas.

En la práctica la interferencia que produce una lámina planoparalela se observa interponiendo en el camino de los rayos reflejados una lente que los hace convergir en uno de los puntos de una pantalla situada en el plano focal de la lente (fig. 122.3). La iluminación en este punto depende del valor de la magnitud (122.3). Cuando $\Delta = m\lambda_0$ se obtienen los máximos de intensidad, y cuando $\Delta = (m + 1/2)\lambda_0$, los mínimos (m es un número entero). La condición de máximo de intensidad tiene la forma

$$2b \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1} = (m + 1/2) \lambda_0. \tag{122.8}$$

Sea una lámina planoparalela delgada iluminada con luz monocromática difusa (véase la fig. 122.3). Coloquemos paralelamente a la lámina una lente, en cuyo plano focal pondremos una pantalla. En la luz difusa hay rayos de las más diversas direcciones. Los rayos paralelos al plano del dibujo, e incidentes sobre la lámina bajo el ángulo ϑ_1 , después de reflejarse de ambas superficies de la lámina

son hechos convergir por la lente en el punto P' y crean en él una iluminación que se determina por el valor de la diferencia de marcha óptica. Los rayos que marchan siguiendo otros planos, pero que inciden sobre la lámina bajo el mismo ángulo θ'_1 , son reunidos por la lente en otros puntos, que se encuentran a la misma distancia del centro O de la pantalla que el punto P' . La iluminación en todos estos puntos será igual. Por lo tanto, los rayos que inciden sobre la lámina bajo un mismo ángulo θ'_1 crean en la pantalla un conjunto de puntos igualmente iluminados, dispuestos formando una circunferencia con centro en O . Análogamente, los rayos que inciden bajo otro ángulo θ''_1 crean en la pantalla un conjunto de puntos igualmente iluminados (pero diferente del anterior, puesto que Δ es otra), situados formando una circunferencia con otro radio. Como resultado, surge en la pantalla un sistema de franjas circulares, alternativamente brillantes y oscuras, con centro común en el punto O . Cada franja está formada por los rayos que inciden sobre la lámina bajo un mismo ángulo θ_1 . Por esta razón las franjas de interferencia que se obtienen en las condiciones descritas reciben el nombre de *franjas de igual inclinación*. Si la lente se coloca en otra posición con respecto a la lámina (la pantalla debe coincidir en todos los casos con el plano focal de la lente), la forma de las franjas de igual inclinación será otra.

Cada punto de la figura de interferencia se debe a los rayos que antes de pasar por la lente formaban un haz paralelo. Por eso, para observar las franjas de igual inclinación, la pantalla debe colocarse en el plano focal de la lente, es decir, como si se colocara para obtener en ella las imágenes de los objetos infinitamente lejanos. De acuerdo con esto se dice que las franjas de igual inclinación están localizadas en el infinito. El papel de la lente lo puede desempeñar el cristalino y el de la pantalla, la retina del ojo. En este caso, para observar las franjas de igual inclinación, el ojo debe acomodarse como si fuera a mirar objetos muy lejanos.

Según la fórmula (122.8), la posición de los máximos depende de la longitud de onda λ_0 . Por eso con la luz blanca se obtiene un conjunto de franjas, desplazadas una respecto de otra, formadas por los rayos de los distintos colores, y la figura de interferencia toma una coloración irisada. La posibilidad de observar la figura de interferencia con luz blanca viene determinada por la capacidad del ojo humano para distinguir los matices de las luces de longitudes de ondas próximas. Los rayos, cuyas longitudes de onda se diferencian en menos de 20 \AA , son percibidos por un ojo medio como si tuvieran el mismo color. Por eso, para valorar las condiciones en que puede observarse la interferencia producida por las láminas con la luz blanca, se debe considerar $\Delta\lambda_0$ igual a 20 \AA . Este valor precisamente es el que tomamos para determinar el espesor de la lámina (véase (122.5)).

2. **Lámina de espesor variable.** Tomemos una lámina en forma de cuña con ángulo en el vértice φ (fig. 122.4). Supongamos que sobre ella incide un haz de rayos paralelos. Ahora los rayos reflejados en distintas superficies de la lámina no serán paralelos. Dos rayos que hasta la incidencia se confundían prácticamente (en la fig. 122.4 se representan en forma de una sola recta, designada con la cifra 1') se cortan en el punto Q' después de reflejarse. Otros dos rayos, 1'', que prácticamente se confundían, se cortan en el punto Q'' . Se puede demostrar que los puntos Q' , Q'' y otros análogos a ellos se encuentran en un plano que pasa por el vértice de la cuña O . El rayo 1' reflejado en la superficie inferior de la cuña y el rayo 2' reflejado

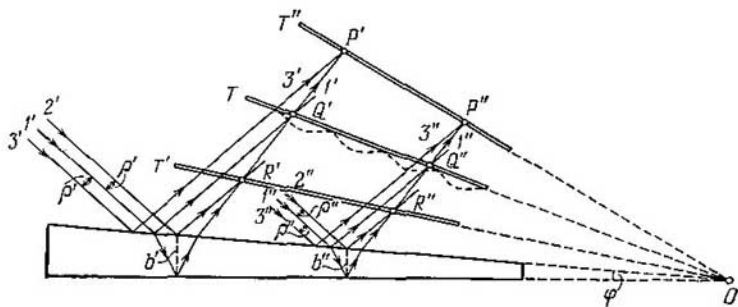


Fig. 122.4.

en su superficie superior, se intersecan en el punto R' situado más cerca de la cuña que el Q' . Análogamente, los rayos 1' y 3' se cortan en el punto P' , que está más lejos de la superficie de la cuña que el Q' .

Las direcciones en que se propagan las ondas reflejadas en las superficies superior e inferior de la cuña no coinciden. La coherencia temporal sólo se cumplirá en las partes de las ondas reflejadas en los sitios de la cuña, en los cuales el espesor satisface la condición (122.4). Supongamos que esta condición se cumple en toda la cuña. Admitamos, además, que el radio de coherencia es mucho mayor que la longitud de la cuña. Entonces las ondas reflejadas serán coherentes en todo el espacio que hay sobre la cuña y, cualquiera que sea la distancia a que la pantalla se encuentre de la cuña, se observará en ella una figura de interferencia en forma de franjas paralelas al vértice O de la cuña (véanse los tres últimos párrafos del § 119). Así, en particular, se plantea la cuestión cuando la cuña se ilumina con la luz omitida por un láser.

Si la coherencia espacial es limitada, la región en que se localiza la figura de interferencia (es decir, la región del espacio en la cual, colocando la pantalla, se puede observar en ella la figura de interferencia) también resulta limitada. Si la pantalla se coloca de forma que pase por los puntos Q' , Q'' , . . . (véase la pantalla T en la fig. 122.4), en ella surge la figura de interferencia incluso si la coherencia espacial de la onda incidente es extremadamente pequeña (en puntos de la pantalla se cortan los rayos que antes de incidir sobre la cuña coincidían). Cuando el ángulo φ de la cuña es pequeño, la diferencia de marcha de los rayos se puede calcular con suficiente grado de exactitud por la fórmula (122.3), tomando como b el espesor de la lámina en el sitio en que los rayos inciden sobre ella. Como la diferencia de marcha de los rayos reflejados en distintas partes de la cuña no es igual ahora, la iluminación de la pantalla no será uniforme, sino que aparecerán franjas brillantes y oscuras (véase en la fig. 122.4 la curva de trazos que indica la iluminación de la pantalla T). Cada una de estas franjas surge como resultado de la reflexión en partes de la cuña que tienen el mismo espesor, por cuya razón se les da el nombre de *franjas de igual espesor*.

Cuando la pantalla se desplaza desde la posición T , alejándola o aproximándola a la cuña, empieza a manifestarse el grado de coherencia espacial de la onda incidente. Si en la posición de la pantalla designada por T' en la fig. 122.4 la distancia ρ' entre los rayos incidentes I' y I'' se hace del orden del radio de coherencia, en la pantalla T' no se observará la figura de interferencia. Análogamente desaparece la figura de interferencia en la pantalla situada en la posición T'' .

De este modo, la figura de interferencia que se obtiene al reflejarse en la cuña una onda plana, resulta localizada en cierta región próxima a la superficie de dicha cuña; esta región será tanto más estrecha cuanto menor sea el grado de coherencia espacial de la onda incidente. En la fig. 122.4 se ve que a medida que nos acercamos al vértice de la cuña, las condiciones para la coherencia, tanto temporal como espacial, se hacen más favorables. Por eso la nitidez de la figura de interferencia disminuye al trasladarse del vértice de la cuña hacia su base. Puede ocurrir que la figura se observe en la zona correspondiente a la parte más delgada de la cuña. En la zona correspondiente de la parte restante, la iluminación de la pantalla es uniforme.

En la práctica, las franjas de igual espesor se observan colocando cerca de la cuña una lente y detrás de ella una pantalla (fig. 122.5). El papel de la lente lo puede desempeñar el cristalino, y el de la pantalla, la retina del ojo. Cuando la pantalla que hay detrás de la lente se encuentra en el plano conjugado del designado por T en la fig. 122.4 (o, respectivamente, el ojo se acomoda a este plano), la figura tendrá la nitidez máxima. Si se desplaza la pantalla, sobre

la cual se proyecta la imagen (o se desplaza la lente), la figura empeora, y desaparece totalmente cuando el plano conjugado de la pantalla sale de los límites de la región en que se localiza la figura de interferencia que se observa sin la lente.

Si la observación se hace con luz blanca, las franjas serán coloreadas, de manera que la superficie de la lámina o película aparecerá irisada. Esta coloración la tienen, por ejemplo, las delgadas capas de petróleo o aceite que se extienden sobre la superficie del agua, así como las pompas de jabón. Los colores de recocado que aparecen

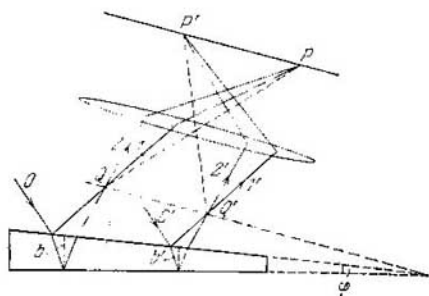


Fig. 112.5.

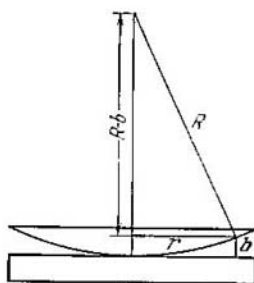


Fig. 122.6.

en las superficies de las piezas de acero templadas, también se deben a la interferencia producida por la película de óxidos transparentes.

Comparemos los dos casos de interferencia por reflexión en películas delgadas que hemos estudiado. Las franjas de igual inclinación se obtienen al iluminar una lámina de espesor constante ($b = \text{const}$) con luz difusa, en la cual hay rayos de distintas direcciones (θ_1 varía dentro de unos límites más o menos anchos). Las franjas de igual inclinación están localizadas en el infinito. Las franjas de igual espesor se observan iluminando una lámina de espesor no constante (b varía) con un haz paralelo de luz ($\theta_1 = \text{const}$). Las franjas de igual espesor están localizadas cerca de la lámina. En condiciones reales, por ejemplo, cuando se observan las irisaciones de una película jabonosa o de aceite, varía tanto el ángulo de incidencia como el espesor de la película. En este caso se observan franjas de tipo mixto.

Advertimos que la interferencia producida por películas delgadas no sólo se puede observar en la luz reflejada, sino también en la transmitida.

Anillos de Newton. Un ejemplo clásico de franjas de igual espesor son los *anillos de Newton*. Éstos se observan cuando la luz se refleja

en las superficies en contacto de una gruesa lámina planoparalela de vidrio y de una lente plano-convexa de gran radio de curvatura (fig. 122.6). El papel de película delgada, en cuyas superficies se reflejan las ondas coherentes, lo desempeña el espacio de aire que hay entre la lámina y la lente (a causa del gran espesor de la lámina y de la lente, a expensas de la reflexión en las otras superficies no se producen franjas de interferencia). Cuando la luz incide normalmente, las franjas de igual espesor tienen la forma de circunferencias concéntricas, y si la incidencia es oblicua, de elipses. Hallemos los radios de los anillos de Newton que se obtienen cuando la luz incide según la normal a la lámina. En este caso $\vartheta_1 = 0$ y la diferencia de marcha óptica es igual al doble del espesor del espacio de aire (véase la fórmula (122.2); se supone que en este espacio $n = 1$). De la fig. 122.6 se deduce que

$$R^2 = (R - b)^2 + r^2 \approx R^2 - 2Rb + r^2, \quad (122.9)$$

donde R es el radio de curvatura de la lente, r , el radio de la circunferencia de todos los puntos, a los cuales corresponde un mismo espacio de aire b . En virtud de la pequeñez de b , hemos despreciado la magnitud b^2 en comparación con $2Rb$. De acuerdo con (122.9), $b = r^2/2R$. Para tener en cuenta el cambio de fase en π que se produce durante la reflexión en la lámina, a $2b = r^2/R$ hay que añadirle $\lambda_0/2$. Como resultado se obtiene

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}. \quad (122.10)$$

En los puntos para los cuales $\Delta = m'\lambda_0 = 2m'(\lambda_0/2)$, surgen los máximos de intensidad y en los puntos para los cuales $\Delta = (m' + 1/2)\lambda_0 = (2m' + 1)(\lambda_0/2)$, los mínimos. Ambas condiciones se pueden unificar:

$$\Delta = m \frac{\lambda_0}{2},$$

en este caso a los valores pares de m corresponderán los máximos de intensidad, y a los impares, los mínimos. Sustituyendo aquí Δ por su valor (122.10) y resolviendo la ecuación que se obtiene respecto de r , hallamos los radios de los anillos de Newton brillantes y oscuros:

$$r = \sqrt{R\lambda_0(m-1)/2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (122.14)$$

A los m pares corresponden los radios de los anillos brillantes, y a los m impares, los radios de los anillos oscuros. Al valor de $m = 1$ corresponde $r = 0$, es decir, el punto de contacto de la lámina con la lente. En este punto se observa un mínimo de intensidad, debido al cambio de fase en π que experimenta la onda al reflejarse en la lámina.

Óptica antirreflektor. En la interferencia por reflexión en películas delgadas se basa la «clarificación» de la óptica. El paso de la luz a través de cada superficie refractora de una lente va acompañado de la reflexión de, aproximadamente, un 4% de la luz que incide sobre ella. En los objetivos compuestos estas reflexiones son múltiples y la pérdida total de flujo luminoso alcanza una magnitud apreciable. Además, la reflexión en las superficies de las lentes producen reflejos. En la óptica antirreflektor, para eliminar la reflexión de la luz, cada superficie libre de las lentes se recubre con una película delgada de una sustancia, cuyo índice de refracción es distinto del de la lente. El espesor de la película se elige de tal forma que las ondas reflejadas en sus dos superficies se extingan entre sí. Un buen resultado se obtiene si el índice de refracción de la película es igual a la raíz cuadrada del índice de refracción de la lente. Con esta condición la intensidad de las dos ondas reflejadas en las superficies de la película es la misma.

§ 123. Interferómetro de Michelson

Existe una gran variedad de instrumentos de interferencia llamados *interferómetros*. En la fig. 123.1 se representa el esquema del *interferómetro de A. Michelson*. El haz de luz de la fuente S incide

sobre la lámina semitransparente P_1 , recubierta de una tenue capa de plata (esta capa se muestra en la figura con puntos). La mitad del flujo luminoso incidente es reflejada por la lámina P_1 en la dirección del rayo 1, la otra mitad pasa a través de la lámina y se propaga en la dirección del rayo 2. El haz 1 se refleja en el espejo M_1 y retorna a P_1 , donde se divide en dos haces de igual intensidad. Uno de ellos pasa a través de la lámina y forma el haz $1'$, el otro se refleja en dirección a S ; este haz no nos va a interesar más. El haz 2, después de reflejarse en el espejo M_2 , también retorna a la lámina P_1 , donde se divide en dos partes: el haz $2'$ reflejado en la capa semitransparente, y otro haz, que pasa a través de dicha capa, el cual tampoco volverá a interesarnos. Los haces de luz $1'$ y $2'$ tienen la misma intensidad.

Si se cumplen las condiciones de coherencia temporal y espacial, los haces $1'$ y $2'$ interferirán. El resultado de la interferencia depende

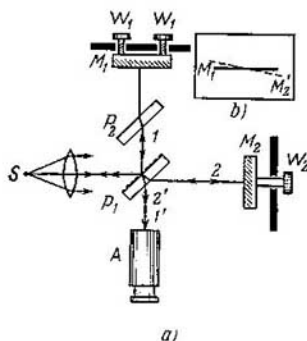


Fig. 123.1.

de la diferencia de marcha óptica desde la lámina P_1 hasta los espejos M_1 y M_2 y viceversa. El rayo 2 atraviesa el espesor de la lámina tres veces; el rayo 1, sólo una vez. Para compensar la diferencia de marcha óptica de las distintas longitudes de onda que a costa de esto se produce (debido a la dispersión), en el camino del rayo 1 se interpone una lámina P_2 , igual a la P_1 , pero sin recubrimiento de plata. Con esto se igualan los caminos de los rayos 1 y 2 en el vidrio. La figura de interferencia se observa con el anteojo A .

Sustituyamos mentalmente el espejo M_2 por su imagen virtual M'_2 en la lámina semitransparente P_1 . Entonces se puede considerar que los rayos 1' y 2' aparecen como resultado de la reflexión en una lámina transparente limitada por los planos M_1 y M'_2 . Valiéndose de los tornillos correctores W_1 se puede variar el ángulo entre estos planos, en particular, se pueden colocar rigurosamente paralelos uno al otro. Girando el tornillo micrométrico W_2 se puede desplazar suavemente el espejo M_2 , sin cambiar su inclinación. Con esto se puede variar el espesor de la «lámina», en particular, se puede hacer que los planos M_1 y M'_2 se corten (fig. 123.1, b).

El carácter de la figura de interferencia depende del ajuste de los espejos y de la divergencia del haz de luz que incide en el instrumento. Si el haz es paralelo y los planos M_1 y M'_2 forman un ángulo distinto de cero, en el campo visual del anteojo se observan franjas rectilíneas de igual espesor dispuestas paralelamente a la línea de intersección de los planos M_1 y M'_2 . Cuando la luz es blanca todas las franjas, excepto la que coincide con la línea de intersección de las franjas de orden nulo, estarán coloreadas. La franja de orden nulo resulta negra, ya que el rayo 1 es reflejado por la lámina P_1 afuera, y el rayo 2, adentro, a causa de lo cual se produce entre ellos una diferencia de fase igual a π . Con luz blanca las franjas sólo se observan si el espesor de la «lámina» $M_1M'_2$ es pequeño (véase (122.5)). Con la luz monocromática correspondiente a la raya roja del cadmio, A. Michelson observó una figura de interferencia clara siendo la diferencia de marcha del orden de 500 000 longitudes de onda (en este caso la distancia entre M_1 y M'_2 era aproximadamente de 150 mm).

Si el haz de luz es ligeramente divergente y la posición de los planos M_1 y M'_2 es rigurosamente paralela, se obtienen franjas de igual inclinación en forma de anillos concéntricos. Al girar el tornillo micrométrico W_2 el diámetro de dichos anillos aumenta o disminuye. En este caso en el centro de la figura aparecen nuevos anillos o los anillos van disminuyendo hasta reducirse a un punto y luego desaparecer. El desplazamiento de la figura en una franja corresponde a un traslado del espejo M_2 igual a media longitud de onda.

Con el instrumento que acabamos de describir, A. Michelson efectuó varios experimentos que han pasado a la historia de la física. El más célebre de ellos, realizado en colaboración con E. W. Morley

en 1887, tuvo por objeto descubrir el movimiento de la Tierra con respecto al hipotético éter (de este experimento se hablará en el § 150). En 1890—1895, Michelson, valiéndose del interferómetro de su invención, hizo la primera comparación de la longitud de onda de la raya roja del cadmio con la longitud del metro patrón.

En 1920 construyó Michelson el *interferómetro estelar*, con el cual midió las dimensiones angulares de algunas estrellas. Este aparato se montaba en un telescopio. Ante el objetivo de dicho telescopio se ponía una pantalla con dos rendijas (fig. 123.2). La luz procedente de la estrella se reflejaba en un sistema simétrico

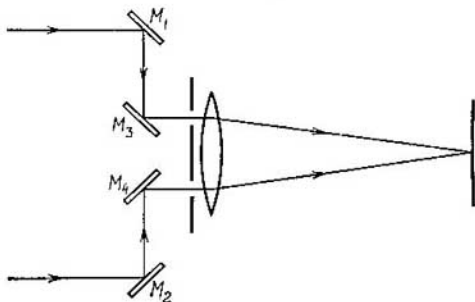


Fig. 123.2.

de espejos M_1 , M_2 , M_3 y M_4 montados en un bastidor rígido sujeto a una carretilla. Los espejos interiores M_3 y M_4 eran fijos, y los exteriores M_1 y M_2 podían desplazarse simétricamente alejándose de los espejos M_3 y M_4 o acercándose a ellos. La marcha de los rayos se ve claramente en la figura. En el plano focal del objetivo del telescopio aparecían franjas de interferencia, cuya eficacia luminosa¹⁾ dependía de la distancia entre los espejos exteriores. Desplazando estos espejos determinaba Michelson la distancia l entre ellos, con la cual la eficacia luminosa de las franjas se anulaba. Esta distancia debe ser del orden del radio de coherencia de la onda luminosa que llega de la estrella. Según (120.14), el radio de coherencia es igual a λ/φ . De la condición $l = \lambda/\varphi$ se obtiene el diámetro angular de

¹⁾ Se llama eficacia luminosa de una franja la magnitud

$$\varphi = \frac{I_{\text{máx}} - I_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}}},$$

en la que $I_{\text{máx}}$ y $I_{\text{mín}}$ son, respectivamente, las intensidades máxima y mínima de luz en la región de dicha franja.

la estrella

$$\varphi = \frac{\lambda}{l}.$$

El cálculo exacto conduce a la fórmula

$$\varphi = A \frac{\lambda}{l},$$

en la que $A = 1,22$ para una fuente en forma de disco circular uniformemente iluminado. Si los bordes del disco son más oscuros que el centro, el coeficiente es mayor que 1,22 y su valor depende de la velocidad con que decrece la iluminación en el sentido del centro hacia el borde. El cálculo exacto da, además, que la eficacia luminosa, anulada para cierto valor de l , si se sigue aumentando l vuelve a hacerse distinta de cero, pero los valores que alcanza en este caso son pequeños.

La distancia máxima entre los espejos exteriores era, en el interferómetro estelar construido por Michelson, igual a 6,1 m (el diámetro del telescopio era de 2,5 m). A esta distancia correspondía un diámetro angular mínimo medible de, aproximadamente, 0,02". La primera estrella cuyo diámetro angular se midió fue Betelgeuze (α Orionis). El valor de φ obtenido fue igual a 0,047".

§ 124. Interferencia de muchos rayos

Hasta aquí hemos estudiado la interferencia de dos rayos. Analicemos ahora el caso en que interfieren muchos rayos luminosos.

Supongamos que a un punto dado de una pantalla llegan N rayos de igual intensidad y que el desplazamiento de la fase de cada rayo posterior, respecto de la del anterior, tiene la misma magnitud δ . Representamos las oscilaciones que excitan los rayos en forma de exponente:

$$E_1 = ae^{i\omega t}, \quad E_2 = ae^{i(\omega t + \delta)}, \quad \dots, \quad E_m = ae^{i[\omega t + (m-1)\delta]}, \quad \dots, \\ E_N = ae^{i[\omega t + (N-1)\delta]}.$$

La oscilación resultante se determina por la fórmula

$$E = \sum_{m=1}^N E_m = ae^{i\omega t} \sum_{m=1}^N e^{i(m-1)\delta}.$$

La expresión obtenida es la suma de N términos de una progresión geométrica, cuyo primer término es igual a la unidad y cuya razón es $e^{i\delta}$. Por consiguiente,

$$E = ae^{i\omega t} \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} = \hat{A} e^{i\omega t},$$

donde

$$\hat{A} = a \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} \quad (124.1)$$

es la amplitud compleja, que se puede representar en la forma

$$\hat{A} = A e^{i\alpha} \quad (124.2)$$

(A es la amplitud ordinaria de la oscilación resultante y α , su fase inicial).

El producto de la magnitud (124.2) por su conjugada compleja da el cuadrado de la amplitud de la oscilación resultante:

$$\hat{A}\hat{A}^* = A e^{i\alpha} A e^{-i\alpha} = A^2. \quad (124.3)$$

Sustituyendo en (124.3) \hat{A} por su valor (124.1), obtenemos la expresión siguiente del cuadrado de la amplitud:

$$\begin{aligned} A^2 = \hat{A}\hat{A}^* &= a^2 \frac{(1 - e^{iN\delta})(1 - e^{-iN\delta})}{(1 - e^{i\delta})(1 - e^{-i\delta})} = \\ &= a^2 \frac{2 - e^{iN\delta} - e^{-iN\delta}}{2 - e^{i\delta} - e^{-i\delta}} = a^2 \frac{1 - \cos N\delta}{1 - \cos \delta} = a^2 \frac{\text{sen}^2(N\delta/2)}{\text{sen}^2(\delta/2)}. \end{aligned} \quad (124.4)$$

La intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud. Por lo tanto, la intensidad que se produce cuando interfieren los N rayos que consideramos, se determina por la expresión

$$I(\delta) = K a^2 \frac{\text{sen}^2(N\delta/2)}{\text{sen}^2(\delta/2)} = I_0 \frac{\text{sen}^2(N\delta/2)}{\text{sen}^2(\delta/2)} \quad (124.5)$$

(K es un coeficiente de proporcionalidad e $I_0 = K a^2$, la intensidad que crea cada uno de los rayos por separado).

Para los valores

$$\delta = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (124.6)$$

la expresión (124.5) se hace indeterminada. Suprimimos la indeterminación aplicando la regla de l'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} \frac{\text{sen}^2(N\delta/2)}{\text{sen}^2(\delta/2)} &= \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} \frac{2 \text{sen}(N\delta/2) \cos(N\delta/2) \cdot N/2}{2 \text{sen}(\delta/2) \cos(\delta/2) \cdot 1/2} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} N \frac{\text{sen}(N\delta)}{\text{sen} \delta}. \end{aligned}$$

La expresión obtenida también es indeterminada. Por eso aplicamos de nuevo la regla de l'Hospital:

$$\lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} \frac{\text{sen}^2(N\delta/2)}{\text{sen}^2(\delta/2)} = \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} N \frac{\text{sen}(N\delta)}{\text{sen} \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 2\pi m} N \frac{N \cos(N\delta)}{\cos \delta} = N^2.$$

De este modo, cuando $\delta = 2\pi m$ (o las diferencias de marcha $\Delta = m\lambda_0$) la intensidad resultante es

$$I = I_0 N^2. \quad (124.7)$$

Este resultado podía preverse de antemano. En efecto, a los puntos en que $\delta = 2\pi m$ todas las oscilaciones llegan en igual fase. Por consiguiente, la amplitud resultante es N veces mayor que la amplitud de una oscilación aislada, y la intensidad, N^2 veces mayor que la de ésta.

Los puntos, en los cuales se observa la intensidad determinada por la fórmula (124.7), se llaman *máximos principales*. Su posición se halla por la condición (124.6). El número m es el orden del máximo principal. De la expresión (124.5) se sigue que en el intervalo entre dos máximos principales vecinos hay $N - 1$ mínimo de intensidad. Para cerciorarnos de esto consideremos, por ejemplo, el intervalo entre los máximos de orden nulo ($m = 0$) y de primer orden ($m = 1$). En este intervalo δ varía desde cero hasta 2π , y $\delta/2$, desde cero hasta π . El denominador de la expresión (124.5) es en todas partes, excepto en los extremos del intervalo, distinto de cero, y en la mitad de dicho intervalo alcanza su valor máximo, igual a la unidad. La magnitud $N\delta/2$ toma en este intervalo todos los valores desde cero hasta $N\pi$. Para los valores $\pi, 2\pi, \dots, (N - 1)\pi$ el numerador de la expresión (124.5) se anula. Éstos serán los mínimos de intensidad. Sus posiciones corresponden a los valores de δ siguientes:

$$\delta = \frac{k'}{N} 2\pi \quad (k' = 1, 2, \dots, N - 1). \quad (124.8)$$

En los intervalos entre los $N - 1$ mínimos se encuentran $N - 2$ máximos secundarios. Los máximos secundarios de mayor intensidad son los que están más cerca de los máximos principales. El máximo secundario más próximo al principal de orden nulo está entre los mínimos primero ($k' = 1$) y segundo ($k' = 2$). Estos mínimos corresponden a los valores de δ iguales a $2\pi/N$ y $4\pi/N$. Por consiguiente, al máximo que consideramos le corresponde $\delta = 3\pi/N$. La sustitución de este valor en la fórmula (124.5) da

$$I(3\pi/N) = Ka^2 \frac{\text{sen}^2(3\pi/2)}{\text{sen}^2(3\pi/2N)}.$$

El numerador es igual a la unidad. Si N es grande se puede suponer que en el denominador el seno es igual al argumento ($\text{sen}(3\pi/2N) \approx 3\pi/2N$). Entonces

$$I(3\pi/N) \approx Ka^2 \frac{1}{(3\pi/2N)^2} = \frac{Ka^2 N^2}{(3\pi/2)^2}.$$

En el numerador se ha obtenido la intensidad del máximo principal (véase (124.7)). Por lo tanto, cuando N es grande, el máximo secundario más próximo al principal tiene una intensidad $(3\pi/2)^2 \approx 22$ veces menor que la de éste. Los demás máximos secundarios son más débiles aún.

En la fig. 124.1 se representa la gráfica de la función $I(\delta)$ para $N = 10$. Como término de comparación se da, con línea de trazos,

la gráfica de la intensidad para $N = 2$ (interferencia de dos rayos; véase la curva $I(x)$ en la fig. 119.2). En esta misma figura se ve que a medida que aumenta el número de rayos que interfieren, los máximos principales se estrechan. Los máximos secundarios son tan débiles que, en la práctica, la figura de interferencia tiene la forma de estrechas rayas brillantes sobre un fondo oscuro.

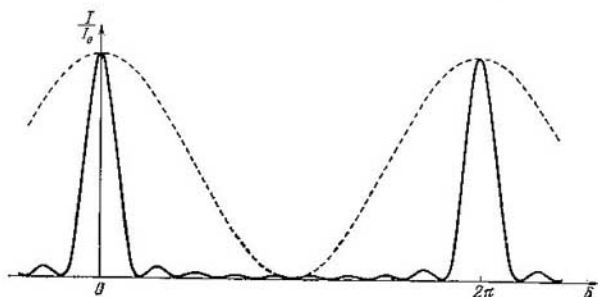


Fig. 124.1.

Consideremos ahora la interferencia de un gran número de rayos, cuya intensidad decrezca en proporción geométrica. Las oscilaciones que se componen tienen la forma:

$$\begin{aligned} E_1 &= ae^{i\omega t}, & E_2 &= a\rho e^{i(\omega t + \delta)}, & \dots, \\ E_m &= a\rho^{m-1}e^{i[\omega t + (m-1)\delta]}, & \dots \end{aligned} \quad (124.9)$$

(ρ es una magnitud constante menor que la unidad). La oscilación resultante viene descrita por la fórmula

$$E = \sum_{m=1}^N E_m = ae^{i\omega t} \sum_{m=1}^N \rho^{m-1} e^{i(m-1)\delta}.$$

Aplicando la expresión de la suma de los términos de una progresión geométrica, obtenemos

$$E = ae^{i\omega t} \frac{1 - \rho^N e^{iN\delta}}{1 - \rho e^{i\delta}} = \hat{A} e^{i\omega t}.$$

De este modo, la amplitud compleja es

$$\hat{A} = a \frac{1 - \rho^N e^{iN\delta}}{1 - \rho e^{i\delta}}. \quad (124.10)$$

Si N es grande, el número complejo $\rho^N e^{iN\delta}$ se puede despreciar en comparación con la unidad (como ejemplo diremos que $0.9^{100} \approx$

$\approx 3 \cdot 10^{-5}$). Entonces la expresión (124.10) se simplifica del modo siguiente:

$$\hat{A} = a \frac{1}{1 - \rho e^{i\delta}}.$$

Multiplicando esta expresión por su conjugada compleja, obtenemos el cuadrado de la amplitud ordinaria de la oscilación resultante:

$$\begin{aligned} A^2 = \hat{A}\hat{A}^* &= \frac{a^2}{(1 - \rho e^{i\delta})(1 - \rho e^{-i\delta})} = \frac{a^2}{1 + \rho^2 - \rho(e^{i\delta} + e^{-i\delta})} = \\ &= \frac{a^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \delta} = \frac{a^2}{(1 - \rho)^2 + 2\rho(1 - \cos \delta)} = \frac{a^2}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2(\delta/2)}. \end{aligned}$$

De aquí

$$J(\delta) = \frac{Ka^2}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2(\delta/2)} = \frac{I_1}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2(\delta/2)}, \quad (124.11)$$

donde $I_1 = Ka^2$ es la intensidad del rayo primero (más intenso).
Para los valores

$$\delta = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (124.12)$$

la expresión (124.11) tiene los máximos

$$I_{\text{máx}} = \frac{I_1}{(1 - \rho)^2}. \quad (124.13)$$

En los intervalos entre los máximos la función varía monótonamente, alcanzando en la mitad del intervalo el valor

$$I_{\text{mín}} = \frac{I_1}{(1 - \rho)^2 + 4\rho} = \frac{I_1}{(1 + \rho)^2}. \quad (124.14)$$

Por lo tanto, la razón de la intensidad en el máximo a la intensidad en el mínimo

$$\frac{I_{\text{máx}}}{I_{\text{mín}}} = \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right)^2 \quad (124.15)$$

resulta ser tanto mayor cuanto más se aproxima ρ a la unidad, es decir, cuanto más lentamente decrezca la intensidad de los rayos que interfieren. En la fig. 124.2 se da la gráfica de la función (124.11) para $\rho = 0,8$. De ella se deduce que la figura de interferencia tiene la forma de estrechas rayas nítidas sobre un fondo prácticamente oscuro. A diferencia de la fig. 124.1, los máximos secundarios están ausentes.

Un caso práctico de gran número de rayos de intensidad decreciente tiene lugar en el *interferómetro de Fabry y Perot*. Este aparato consta de dos láminas de vidrio o cuarzo separadas por un espacio de aire (fig. 124.3). Mediante un acabado meticuloso se consigue que las irregularidades de las superficies interiores de las láminas no superen varias centésimas de la longitud de onda. Después,

sobre estas superficies se extienden capas metálicas parcialmente transparentes o películas dieléctricas¹⁾. Las superficies exteriores de las láminas se hacen ligeramente sesgadas respecto de las interiores, para evitar los reflejos debidos a la reflexión de la luz en estas superficies. En la forma inicial que se dio a este interferómetro, una de las

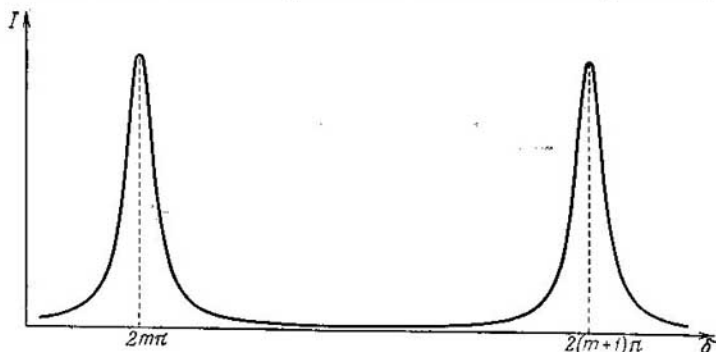


Fig. 124.2.

láminas podía desplazarse, con relación a la otra fija, por medio de un tornillo micrométrico. Pero la inseguridad de esta estructura hizo que dejara de usarse. En los modelos modernos las láminas

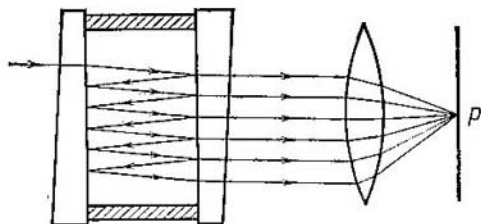


Fig. 124.3.

son fijas. El paralelismo de los planos interiores, de trabajo, se logra colocando entre las láminas un anillo de invar o de cuarzo²⁾.

¹⁾ Las capas metálicas tienen el inconveniente de que absorben intensamente la luz. Por eso en los últimos años se han empezado a sustituir por recubrimientos dieléctricos de muchas capas, que poseen un gran poder reflectante.

²⁾ Estos dos materiales se caracterizan por tener un coeficiente de dilatación muy pequeño.

Este anillo tiene a cada lado tres salientes con los extremos bien rectificadas. Las láminas se aprietan al anillo con unos muelles. Esta estructura asegura el paralelismo riguroso de las láminas y la permanencia de la distancia entre ellas. Un interferómetro semejante, con distancia fija entre las láminas, se llama *patrón de Fabry-Perot*.

Veamos lo que ocurre con un rayo que penetra en el espacio entre las láminas (fig. 124.4). Sea I_0 la intensidad de dicho rayo. En el punto A_1 se divide en el rayo I , que sale fuera, y el rayo reflejado I' . Si el índice de reflexión de la superficie de la lámina es ρ , la intensidad del rayo I será $I_1 = (1 - \rho) I_0$, mientras que la del rayo re-

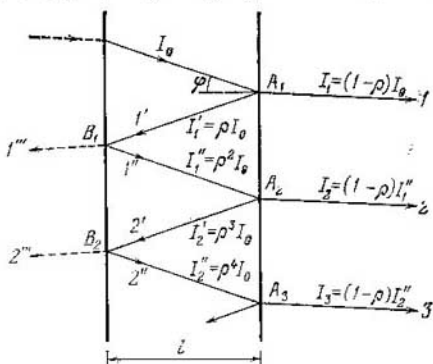


Fig. 124.4.

flejado $I_1' = \rho I_0$). En el punto B_1 el rayo I' se divide en dos. El rayo I'' indicado con línea de trazos queda fuera de juego y el I'' tendrá la intensidad $I_1'' = \rho I_1' = \rho^2 I_0$. En el punto A_2 el rayo I'' se divide en dos, el rayo 2 que sale fuera con la intensidad $I_2 = (1 - \rho) I_1'' = (1 - \rho) \rho^2 I_0$ y el rayo reflejado $2'$, y así sucesivamente. De este modo, entre las intensidades de los rayos $1, 2, 3$, etc., que salen del instrumento existe la relación

$$I_1 : I_2 : I_3 : \dots = 1 : \rho^2 : \rho^4 : \dots$$

Respectivamente, entre las amplitudes de las oscilaciones se obtiene la relación

$$A_1 : A_2 : A_3 : \dots = 1 : \rho : \rho^2 : \dots$$

(compárese con (124.9)).

1) Despreciamos la absorción de la luz por las capas reflectoras y en el espesor de las láminas.

En cada uno de los rayos 2, 3, 4, . . . la oscilación tiene un retraso de fase, respecto de la oscilación en el rayo que le precede, igual a una misma magnitud δ , determinada por la diferencia de marcha óptica Δ que se produce en el camino $A_1 - B_1 - A_2$ ó $A_2 - B_2 - A_3$, etc. (véase la fig. 124.4). En la figura se ve que $\Delta = 2l/\cos \varphi$, donde φ es el ángulo de incidencia de los rayos sobre la capa reflectora.

Si con una lente se hacen convergir los rayos 1, 2, 3 . . . en el punto P de su plano focal (véase la fig. 124.3), las oscilaciones crea-

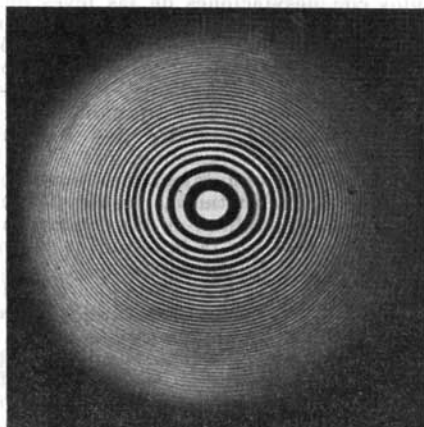


Fig. 124.5.

das por estos rayos tendrán la forma (124.9). Por consiguiente, la intensidad en el punto P se determina por la fórmula (124.11), en la cual ρ tiene el sentido de índice de reflexión y

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2l}{\cos \varphi} \cdot$$

Si a través del instrumento se hace pasar un haz divergente de luz, en el plano focal de la lente aparecen franjas de igual inclinación en forma de anillos nítidos (fig. 124.5).

El interferómetro de Fabry y Perot se utiliza en espectroscopia para estudiar la estructura fina de las rayas espectrales. También se emplea mucho en metrología para comparar la longitud del metro patrón con las longitudes de onda de algunas rayas espectrales.

DIFRACCIÓN DE LA LUZ

§ 125. Introducción

Se llama difracción el conjunto de fenómenos que se observan cuando la luz se propaga en un medio con bruscas heterogeneidades¹⁾ y que están relacionados con desviaciones de las leyes de la óptica geométrica. La difracción, en particular, hace que las ondas luminosas bordeen los obstáculos y que la luz penetre en la región de la sombra geométrica. El rodeo de los obstáculos por las ondas sonoras (es decir, la difracción de las ondas sonoras) se observa constantemente en la vida ordinaria. Para observar la difracción de las ondas luminosas hay que crear condiciones especiales. Esto se debe a la pequeñez de la longitud de estas ondas. Sabemos que en el límite, cuando $\lambda \rightarrow 0$, las leyes de la óptica ondulatoria se transforman en las leyes de la óptica geométrica. Por lo tanto, las desviaciones de las leyes de la óptica geométrica, a igualdad de las demás condiciones, serán tanto menores cuanto menor sea la longitud de la onda.

Entre la interferencia y la difracción no existe una diferencia física esencial. Ambos fenómenos consisten en la redistribución del flujo luminoso debida a la superposición de las ondas. Por razones históricas, la redistribución de la intensidad que se produce como resultado de la superposición de las ondas excitadas por un número finito de fuentes coherentes discretas se llama interferencia de las ondas. Y la redistribución de la intensidad causada por la superposición de las ondas excitadas por fuentes coherentes dispuestas de un modo continuo, se denomina difracción de las ondas. Por eso se dice, por ejemplo, figura de interferencia producida por dos rendijas estrechas y figura de difracción por una rendija.

La difracción se observa por lo general valiéndose del esquema siguiente. En el camino de la onda luminosa que se propaga desde una fuente, se interpone un obstáculo opaco que tapa parte de su superficie de onda. Detrás de este obstáculo se coloca una pantalla, en la cual aparece la figura de difracción.

Hay dos tipos de difracción. Si la fuente de luz S y el punto de observación P están tan lejos del obstáculo que los rayos que inciden sobre éste y los que van hacia el punto P forman haces prácticamente paralelos, se dice que la *difracción es de rayos paralelos* o de *Fraunhofer*. En el caso contrario se dice que la *difracción es de Fresnel*. La difracción de Fraunhofer se puede observar colocando una lente

¹⁾ Por ejemplo, cerca de los bordes de cuerpos opacos o transparentes, a través de orificios, etc.

detrás del foco de luz S y otra delante del punto de observación P , de modo que los puntos S y P se encuentren en el plano focal de la lente respectiva (fig. 125.1).

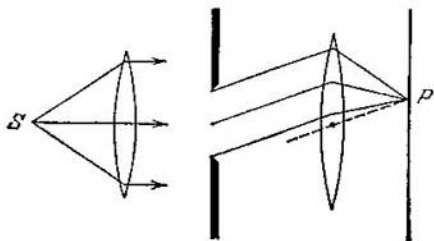


Fig. 125.1.

El criterio para determinar de qué tipo de difracción —de Fresnel o de Fraunhofer— se trata en cada caso concreto se dará en el § 129.

§ 126. Principio de Huygens—Fresnel

La penetración de las ondas luminosas en la región de la sombra geométrica se puede explicar por medio del principio de Huygens (véase el § 118). Pero este principio no proporciona información sobre la amplitud y, por consiguiente, sobre la intensidad de las ondas que se propagan en distintas direcciones. Fresnel completó el principio de Huygens con la representación de la interferencia de las ondas secundarias. La toma en consideración de las amplitudes y fases de las ondas secundarias permite hallar la amplitud de la onda resultante en cualquier punto del espacio. El principio de Huygens desarrollado por este procedimiento recibe el nombre de *principio de Huygens—Fresnel*.

Según este último principio, cada elemento de una superficie de onda S (fig. 126.1) sirve de fuente de una onda esférica secundaria, cuya amplitud es proporcional a la magnitud del elemento dS . La amplitud de una onda esférica disminuye con la distancia r a la fuente según la ley $1/r$ (véase la fórmula (94.10)). Por consiguiente, desde cada parte dS de la superficie de onda llegará al punto P , que se encuentra delante de esta superficie, una oscilación

$$dE = K \frac{\sigma_0 dS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0). \quad (126.1)$$

En esta expresión $(\omega t + \alpha_0)$ es la fase de la oscilación en el sitio en que se halla la superficie de onda S ; k es el número de onda; r ,

la distancia desde el elemento dS de la superficie hasta el punto P . El factor a_0 viene determinado por la amplitud de la oscilación luminosa en el sitio en que se encuentra dS . El coeficiente K depende del ángulo φ entre la normal \mathbf{n} a la superficie dS y la dirección que va desde dS hasta el punto P . Cuando $\varphi = 0$, este coeficiente es máximo, y cuando $\varphi = \pi/2$, se anula.

La oscilación resultante en el punto P es la superposición de las oscilaciones (126.1) tomadas para toda la superficie de onda S :

$$E = \int_S K(\varphi) \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0) dS. \quad (126.2)$$

Esta fórmula es la expresión analítica del principio de Huygens—Fresnel.

Para fundamentar el principio de Huygens—Fresnel se pueden aducir los razonamientos siguientes. Supongamos que en el camino

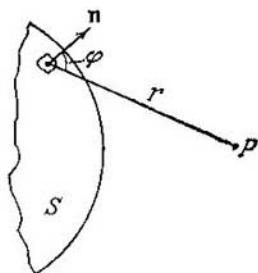


Fig. 126.1.

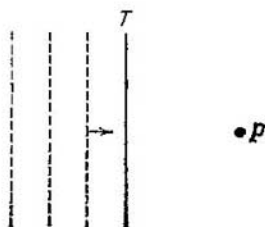


Fig. 126.2.

que sigue una onda luminosa (que para simplificar consideraremos plana) se interpone una pantalla opaca delgada T (fig. 126.2). Detrás de la pantalla la intensidad de la luz es en todas partes nula. Esto se debe a que la onda luminosa que incide sobre la pantalla excita oscilaciones de los electrones que hay en el material de que está hecha. Los electrones que oscilan radian ondas electromagnéticas. El campo que hay detrás de la pantalla es la superposición de la onda primaria (que incide sobre la pantalla) y todas las ondas secundarias. Las amplitudes y las fases de las ondas secundarias resultan ser tales que, al superponerse estas ondas a la primaria, en cualquier punto P detrás de la pantalla se obtiene una amplitud nula. Por lo tanto, si la onda primaria crea en el punto P la oscilación

$$A_{\text{prim}} \cos(\omega t + \alpha),$$

la oscilación resultante excitada en este mismo punto por las ondas secundarias tiene la forma

$$A_{\text{sec}} \cos(\omega t + \alpha - \pi),$$

siendo $A_{\text{sec}} = A_{\text{prim}}$.

Esto significa que al calcular la amplitud de la oscilación originada en el punto P por la onda luminosa que se propaga desde una fuente real, se puede sustituir esta fuente por el conjunto de las fuentes secundarias situadas a lo largo de la superficie de onda. En esto consiste la esencia del principio de Huygens—Fresnel.

Dividamos el obstáculo opaco en dos partes. Una de ellas, que llamaremos tapón, tiene dimensiones finitas y forma arbitraria (circular, rectangular, etc.). La otra incluye toda la superficie restante del obstáculo infinito. Mientras el tapón está en su sitio, la oscilación resultante en el punto P detrás de la pantalla es nula. Esta oscilación se puede representar como la suma de las creadas por la onda primaria, por la onda originada por el tapón y por la producida por la parte restante del obstáculo:

$$A_{\text{prim}} \cos(\omega t + \alpha) + A_{\text{tap}} \cos(\omega t + \alpha') + \\ + A_{\text{obst}} \cos(\omega t + \alpha'') = 0. \quad (126.3)$$

Si se quita el tapón, es decir, si se deja que la onda pase por el orificio que queda en el obstáculo opaco, la oscilación en el punto P tendrá la forma

$$E_P = A_{\text{prim}} \cos(\omega t + \alpha) + A_{\text{obst}} \cos(\omega t + \alpha'') = \\ = -A_{\text{tap}} \cos(\omega t + \alpha') = A_{\text{tap}} \cos(\omega t + \alpha' - \pi).$$

Hemos aplicado la condición (126.3) y supuesto que por quitar el tapón no varía el carácter de las oscilaciones de los electrones en la parte que queda del obstáculo.

De este modo, se puede considerar que las oscilaciones en el punto P las crea el conjunto de las fuentes de ondas secundarias situadas en la superficie del orificio originado al quitar el tapón.

§ 127. Zonas de Fresnel

Los cálculos por la fórmula (126.2) son en el caso general un problema muy difícil. Pero, como demostró Fresnel, en los casos que se caracterizan por su simetría, la amplitud de la oscilación resultante se puede hallar por medio de una simple suma algebraica o geométrica.

Para comprender la esencia del método elaborado por Fresnel vamos a determinar la amplitud de la oscilación luminosa excitada en un punto P por una onda esférica que se propaga en un medio homogéneo isótropo desde un foco puntual S (fig. 127.1). Las super-

ficies de onda son en este caso simétricas con respecto a la recta SP . Aprovechando esto, dividimos la superficie de onda representada en la figura en zonas anulares construidas de tal modo que las distancias desde los bordes de cada zona hasta el punto P se diferencian en $\lambda/2$ (λ es la longitud de la onda en el medio en que se propaga). Las zonas que tienen esta propiedad se llaman *zonas de Fresnel*.

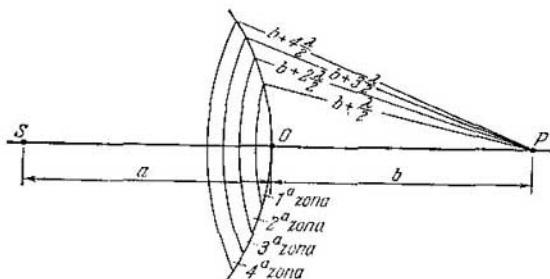


Fig. 127.1.

En la fig. 127.1 se ve que la distancia b_m desde el borde exterior de la m -ésima zona hasta el punto P es

$$b_m = b + m \frac{\lambda}{2} \quad (127.1)$$

(b es la distancia desde el vértice de la superficie de onda O hasta el punto P).

Las oscilaciones que llegan al punto P desde puntos análogos de dos zonas colindantes (es decir, desde puntos que se encuentran en la mitad de cada zona, en sus bordes, etc.), se hallan en oposición de fase. Por eso, entre la oscilación resultante creada por cada zona en conjunto y las originadas por las zonas contiguas habrá una diferencia de fase igual a π .

Calculemos el área de las zonas. El límite exterior de la m -ésima zona separa en la superficie de onda un segmento esférico de altura h_m (fig. 127.2). El área de este segmento la designaremos por S_m . Entonces el área de la m -ésima zona se puede representar en la forma

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1},$$

donde S_{m-1} es el área del segmento esférico separado por el límite exterior de la $(m-1)$ -ésima zona.

En la fig. 127.2 se ve que

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_m)^2$$

(a es el radio de la superficie de onda y r_m , el radio del límite exterior de la m -ésima zona). Elevando al cuadrado las expresiones entre paréntesis, obtenemos

$$r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 = bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2 - 2bh_m - h_m^2. \quad (127.2)$$

De aquí

$$h_m = \frac{bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2}{2(a+b)}. \quad (127.3)$$

Limitándonos a considerar los números m no demasiado grandes, en

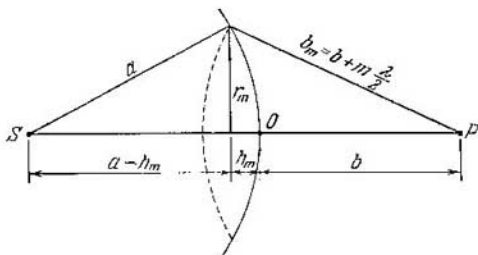


Fig. 127.2.

virtud de la pequeñez de λ se puede despreciar el sumando que contiene λ^2 . En esta aproximación

$$h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}. \quad (127.4)$$

El área del segmento esférico $S = 2\pi R h$ (R es el radio de la esfera y h la altura del segmento). Por consiguiente,

$$S_m = 2\pi a h_m = \frac{\pi ab}{a+b} m\lambda,$$

y el área de la m -ésima zona

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

La expresión que hemos obtenido no depende de m . Esto significa que cuando los números m no son demasiado grandes, las áreas de las zonas de Fresnel son aproximadamente iguales.

De la igualdad (127.2) se pueden deducir los radios de las zonas. Cuando los números m no son demasiado grandes, la altura del segmento $h_m \ll a$, por lo tanto se puede considerar que $r_m^2 = 2ah_m$. Sustituyendo h_m por su valor (127.4), obtenemos para el radio del límite exterior de la m -ésima zona la expresión

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}. \quad (127.5)$$

Si suponemos $a = b = 1$ m y $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, para el radio de la primera zona (central) se obtiene el valor $r_1 = 0,5$ mm. Los radios de las zonas siguientes crecen como \sqrt{m} .

Así, las áreas de las zonas de Fresnel son aproximadamente iguales. La distancia b_m desde la zona hasta el punto P crece lentamente con el número m de la zona. El ángulo φ entre la normal a los elementos de la zona y la dirección al punto P también crece con m . Todo esto conduce a que la amplitud A_m de la oscilación excitada por la m -ésima zona en el punto P decrece monótonamente al crecer m . Incluso cuando los números m son muy grandes y el área de la zona empieza a crecer apreciablemente con m (véase (127.3)), la disminución del factor $K(\varphi)$ es mayor que el crecimiento ΔS_m de manera que A_m continúa disminuyendo. De este modo, las amplitudes de las oscilaciones que excitan en el punto P las zonas de Fresnel forman una sucesión monótonamente decreciente:

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \dots$$

Las fases de las oscilaciones excitadas por zonas vecinas difieren en π . Por lo tanto, la amplitud A de la oscilación resultante en el punto P se puede representar en la forma

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \quad (127.6)$$

En esta expresión todas las amplitudes correspondientes a las zonas impares figuran con un signo y las correspondientes a las zonas pares, con otro.

Escribamos la expresión (127.6) en la forma

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \quad (127.7)$$

Como A_m decrece monótonamente, se puede considerar aproximadamente que

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Entonces las expresiones entre paréntesis serán iguales a cero y la fórmula (127.7) se simplificará del modo siguiente:

$$A = A_1/2. \quad (127.8)$$

Según la fórmula (127.8), la amplitud creada en un punto determinado P por toda la superficie de onda esférica es igual a la mitad de la amplitud que crea la zona central sola. Si en el camino de la onda se interpone una pantalla opaca con un orificio que deje abierta solamente la zona centro de Fresnel, la amplitud en el punto P será igual a A_1 , es decir, dos veces mayor que la amplitud (127.8). Respectivamente, la intensidad de la luz en el punto P será en este caso cuatro veces mayor que en ausencia de obstáculos entre los puntos S y P .

Resolvamos ahora el problema de la propagación de la luz desde el foco S al punto P por el método de la composición gráfica de las amplitudes. Dividamos la superficie de onda en zonas anulares análogas a las de Fresnel pero de anchura mucho menor (la diferencia de marcha desde los bordes de la zona hasta el punto P constituye una pequeña fracción de λ igual para todas las zonas). La oscilación que crea en el punto P cada una de las zonas la representaremos en forma de un vector de longitud igual a la amplitud de la oscilación y cuya dirección forme con la tomada como referencia un ángulo que dé la fase inicial de la oscilación (véase el § 55 del tomo 1^o).



Fig. 127.3.

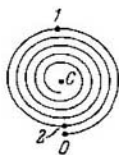


Fig. 127.4.

La amplitud de las oscilaciones creadas por estas zonas en el punto P disminuye lentamente al pasar de una zona a otra. Cada oscilación siguiente está retrasada en fase respecto de la anterior una misma magnitud. Por consiguiente, el diagrama vectorial que se obtiene al componer las oscilaciones excitadas por las zonas aisladas tiene la forma que se muestra en la fig. 127.3.

Si las amplitudes creadas por las zonas aisladas fueran iguales, el final del último de los vectores representados en la fig. 127.3 coincidiría con el principio del primer vector. En realidad el valor de la amplitud disminuye, aunque muy débilmente, por lo que los vectores no forman una figura cerrada, sino una línea quebrada en espiral.

En el límite, cuando la anchura de las zonas anulares tiende a cero (su número aumenta ilimitadamente en este caso) el diagrama vectorial toma la forma de espiral que se arrolla al punto C (fig. 127.4). Las fases de las oscilaciones en los puntos O y I se diferencian en π (los vectores infinitamente pequeños que forman la espiral están dirigidos en estos puntos en sentidos opuestos). Por lo tanto, la parte $O-I$ de la espiral corresponde a la primera zona de Fresnel. El vector trazado del punto O al punto I (fig. 127.5, a) representa la oscilación que excita en el punto P esta zona. Análogamente, el vector trazado del punto I al 2 (fig. 127.5, b) representa la oscilación que excita la segunda zona de Fresnel. Las oscilaciones de las zonas primera y segunda están en oposición de fase; de acuerdo con esto, los vectores OI y $I2$ están dirigidos en sentidos opuestos.

Las oscilaciones excitadas en el punto P por toda la superficie de onda viene representada por el vector OC (fig. 127.5, c). En la figura se ve que la amplitud es en este caso igual a la mitad de la amplitud que crea la primera zona. Este resultado lo obtuvimos antes algebraicamente (véase la fórmula (127.8)). Advertimos que la oscilación que excita la mitad interior de la primera zona de Fresnel se representa por el vector OB (fig. 127.5, d). De este modo,

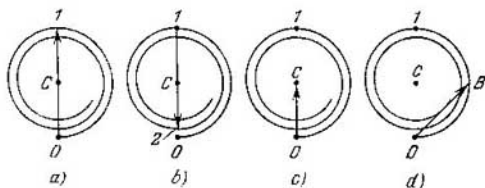


Fig. 127.5.

la acción de la mitad interior de la primera zona de Fresnel no es equivalente a la mitad de la acción de dicha primera zona. El vector OB es $\sqrt{2}$ veces mayor que el vector OC . Por lo tanto, la intensidad de la luz creada por la mitad interior de la primera zona de Fresnel es dos veces mayor que la intensidad que crea toda la superficie de onda.

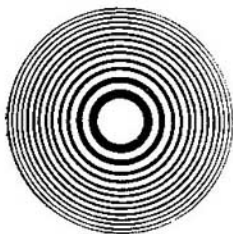


Fig. 127.6.

Las oscilaciones de las zonas de Fresnel pares e impares están en oposición de fase y, por consiguiente, se debilitan unas a otras. Si en el camino de la onda luminosa se interpusiera una lámina que tapara todas las zonas pares o impares, la intensidad de la luz en el punto P aumentaría bruscamente. Esta lámina, llamada *placa zonal*, actúa de un modo semejante a una lente convergente. En la

fig. 127.6 se representa una placa que tapa las zonas pares. Un efecto todavía mayor se puede lograr, sin tapar las zonas pares (o impares), cambiando en π la fase de sus oscilaciones. Esto se puede realizar por medio de una lámina transparente, cuyo espesor en los lugares correspondientes a las zonas pares o impares se diferencie en una magnitud debidamente elegida. Esta lámina se llama *placa zonal fásica*. En comparación con la *placa zonal de amplitudes* que tapa las zonas, la fásica da un aumento adicional de la amplitud igual al doble, y de la intensidad de la luz, igual al cuadruple.

§ 128. Difracción de Fresnel por obstáculos simples

Los métodos algebraico y gráfico de composición de las amplitudes estudiados en el párrafo anterior permiten resolver una serie de problemas de difracción de la luz.

Difracción por un orificio circular. Pongamos en el camino de una onda luminosa esférica una pantalla opaca que tenga un orificio circular de radio r_0 . La colocaremos de tal modo que la perpendicular bajada desde el foco de luz S incida sobre el centro del orificio (fig. 128.1). En la prolongación de esta perpendicular tomamos un

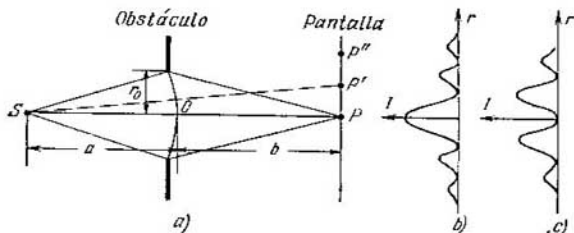


Fig. 128.1.

punto P . Si el radio r_0 del orificio es mucho menor que las longitudes a y b que se indican en la figura, la longitud a se puede considerar igual a la distancia desde el foco S hasta el obstáculo, y la longitud b , igual a la distancia desde el obstáculo hasta el punto P . Cuando las distancias a y b satisfacen la condición

$$r_0 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda, \tag{128.1}$$

en la que m es un número entero, el orificio deja descubiertas exactamente las m primeras zonas de Fresnel construidas para el punto P (véase la fórmula (127.5)). Por consiguiente, el número de zonas de Fresnel descubiertas se determina por la expresión

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \tag{128.2}$$

De acuerdo con (127.6), la amplitud en el punto P será

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m. \tag{128.3}$$

A_m se toma con signo más si m es impar y con signo menos si m es par. Representando (128.3) de una forma análoga a (127.7) y suponiendo que las expresiones entre paréntesis son iguales a cero,

Llegamos a las fórmulas

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2} \quad (\text{si } m \text{ es impar}),$$

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m \quad (\text{si } m \text{ es par}).$$

Las amplitudes de dos zonas contiguas son prácticamente iguales. Por eso $(A_{m-1}/2) - A_m$ se puede sustituir por $-A_m/2$. Como resultado se obtiene:

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}, \quad (128.4)$$

donde el signo más se toma para los m impares, y el menos, para los pares.

Para números m pequeños la amplitud A_m se diferencia poco de A_1 . Por lo tanto, cuando los números m son impares, la amplitud en el punto P será aproximadamente igual a A_1 , y cuando son pares, nula. Este resultado es fácil de obtener por medio del diagrama vectorial representado en la fig. 127.4.

Si se quita el obstáculo, la amplitud en el punto P se hace igual a $A_1/2$ (véase (127.8)). De este modo, un obstáculo con orificio que descubra un pequeño número impar de zonas, no sólo no debilita la iluminación en el punto P , sino que, al contrario, hace que aumente la amplitud casi dos veces y la intensidad casi cuatro veces.

Veamos el carácter que tiene la figura de difracción que se observa en una pantalla situada detrás del obstáculo (véase la fig. 128.1). Como el orificio está situado simétricamente con respecto a la recta SP , la iluminación en distintos puntos de la pantalla dependerá únicamente de su distancia r al punto P . En este mismo punto la intensidad alcanzará un máximo o un mínimo en dependencia de que el número de zonas de Fresnel descubiertas sea par o impar. Supongamos, por ejemplo, que dicho número es igual a tres. Entonces en el centro de la figura de difracción se obtiene un máximo de intensidad. La figura de las zonas de Fresnel para el punto P se da en la fig. 128.2, *a*. Ahora nos desplazamos por la pantalla al punto P' . La figura de las zonas de Fresnel, limitada por los bordes del orificio, para el punto P' tiene la forma que muestra la fig. 128.2, *b*. El borde del orificio cubre parte de la tercera zona y al mismo tiempo descubre parcialmente la zona cuarta. Como resultado la intensidad de la luz disminuye y en cierta posición del punto P' alcanza un mínimo. Si nos desplazamos por la pantalla al punto P'' , el borde del orificio cubre parcialmente no sólo la tercera zona de Fresnel, sino también la segunda, y al mismo tiempo descubre una parte de la quinta zona (fig. 128.2, *c*). En definitiva la acción de las partes descubiertas de las zonas impares supera la acción de las partes descubiertas de las zonas pares y la intensidad alcanza un

máximo, aunque más débil que el que se observa en el punto P .

De este modo, la figura de difracción por un orificio circular tiene la forma de anillos concéntricos, brillantes y oscuros, que se suceden unos a otros. En el centro de la figura habrá una mancha brillante (si m es impar) u oscura (si m es par) (fig. 128.3). La marcha de la intensidad I con la distancia r al centro de la figura se representa en la fig. 128.1, b (para m impar) y en la fig. 128.1, c (para m

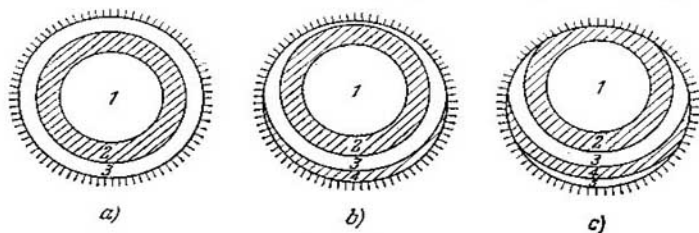


Fig. 128.2.

par). Si la pantalla se desplaza paralelamente a sí misma a lo largo de la recta SP , las figuras representadas en la fig. 128.3 se reemplazan una a otra (de acuerdo con (128.2), al variar b , el valor de m se hace unas veces impar y otras par).

Si el orificio sólo descubre una parte de la zona central de Fresnel, en la pantalla se obtiene una mancha brillante difuminada; en este

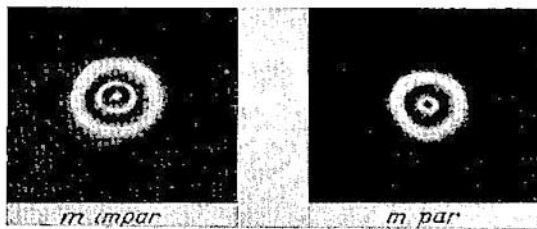


Fig. 128.3.

caso no surge la sucesión de anillos brillantes y oscuros. Y si el orificio descubre un gran número de zonas, la sucesión de los anillos brillantes y oscuros sólo se observa en una región muy estrecha en el límite de la sombra geométrica; dentro de esta región la iluminación es prácticamente constante.

Difracción por un disco circular. Coloquemos entre el foco de luz S y el punto de observación P un disco circular opaco de radio r_0 (fig. 128.4). Si el disco cubre las m primeras zonas de Fresnel, la amplitud en el punto P será

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \\ = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots$$

Las expresiones que figuran entre paréntesis se pueden suponer iguales a cero, por consiguiente,

$$A = A_{m+1}/2. \quad (128.5)$$

Veamos el carácter de la figura que se obtiene sobre la pantalla (véase la fig. 128.4). Es evidente que la iluminación puede depender

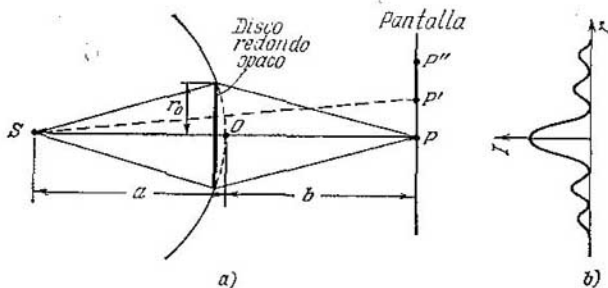


Fig. 128.4.

únicamente de la distancia r al punto P . Cuando el número de zonas cubiertas es pequeño, la amplitud A_{m+1} se diferencia poco de A_1 . Por eso la intensidad en el punto P será casi la misma que en ausencia del obstáculo entre el foco S y el punto P (véase (127.8)). Para el punto P' , desplazado con respecto al P en cualquier dirección radial, el disco cubrirá parte de la $(m+1)$ -ésima zona de Fresnel y al mismo tiempo descubrirá parte de la m -ésima zona. Esto hace que disminuya la intensidad. En cierta posición del punto P' la intensidad alcanza un mínimo. Si nos desplazamos del centro de la figura aún más, el disco cubrirá adicionalmente una parte de la $(m+2)$ -ésima zona y al mismo tiempo descubrirá parte de la $(m-1)$ -ésima. Como resultado la intensidad aumenta y en el punto P'' alcanza un máximo.

De este modo, en el caso de un disco circular opaco, la figura de difracción tiene la forma de anillos concéntricos, brillantes

y oscuros, que se suceden. En el centro de la figura hay una mancha brillante (fig. 128.5). La variación de la intensidad I de la luz con la distancia r al punto P se representa en la fig. 128.4, *b*.

Si el disco cubre solamente una parte pequeña de la zona central de Fresnel, no proyecta sombra en absoluto y la iluminación de la pantalla permanece igual que en ausencia del obstáculo. Y si son muchas las zonas de Fresnel que cubre el disco, la sucesión de los anillos brillantes y oscuros sólo se observa en una región estrecha en el límite de la sombra geométrica. En este caso $A_{m+1} \ll A_1$, por lo que la mancha brillante central está ausente y la iluminación en la región de la sombra geométrica es en todas partes prácticamente nula.

Una mancha brillante en el centro de la sombra proyectada por el disco fue causa de un incidente entre S. Poisson y A. I. Fresnel. La Academia de Ciencias de París propuso la difracción de la luz como tema para el premio del año 1818. Los organizadores del concurso eran partidarios de la teoría corpuscular de la luz y esperaban que los trabajos que se presentasen a él contribuirían al triunfo definitivo de su teoría. Pero Fresnel presentó un trabajo, en el cual todos los fenómenos ópticos conocidos hasta entonces se explicaban desde el punto de vista de la teoría ondulatoria. Al examinar este trabajo, Poisson, que era miembro del jurado del concurso, advirtió que de la teoría de Fresnel se deducía una conclusión «absurda»: en el centro de la sombra proyectada por un disco circular pequeño debía haber una mancha blanca. D. F. Arago hizo inmediatamente el experimento y descubrió que, efectivamente, la mancha existía. Esto acarrió la victoria y el reconocimiento general de la teoría ondulatoria de la luz.

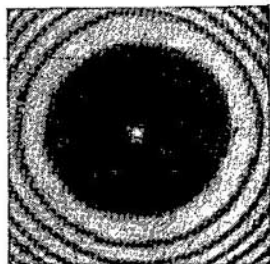


Fig. 128.5.

Difracción por el borde rectilíneo de un semiplano. Interpongamos en el camino de una onda luminosa (que para simplificar consideraremos plana) un semiplano opaco de borde rectilíneo. Coloquémoslo de manera que coincida con una de las superficies de onda. A una distancia b , detrás del semiplano, ponemos una pantalla, paralela a él, en la cual tomamos un punto P (fig. 128.6). La parte descubierta de la superficie de onda la dividimos en zonas en forma de franjas rectilíneas muy estrechas, paralelas al borde del semiplano. La anchura de estas zonas la elegimos de manera que las distancias desde el punto P hasta los bordes de cualquier zona, medidas en el plano de la figura, se diferencien en una misma magni-

tud Δ . Con esta condición la diferencia de fase entre las oscilaciones que crean en el punto P zonas vecinas será una magnitud constante.

A las zonas que se encuentran a la derecha del punto P les atribuiremos los números $1, 2, 3$, etc., y a las situadas a su izquierda, los números $1', 2', 3'$, etc. Las zonas, cuyos números son m y m' ,

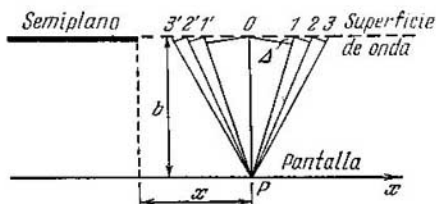


Fig. 128.6.

tienen la misma anchura y son simétricas con respecto al punto P . Por eso, las oscilaciones que ellas crean en P coinciden en amplitud y en fase.

Para establecer la dependencia de la amplitud respecto del número m de la zona, vamos a calcular el área de las zonas. En la

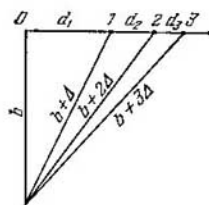


Fig. 128.7.

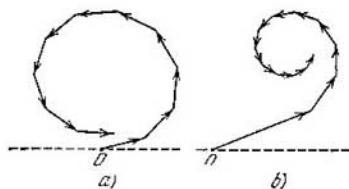


Fig. 128.8.

fig. 128.7 se ve que la anchura total de las m primeras zonas es igual a

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = \sqrt{(b + m\Delta)^2 - b^2} = \sqrt{2bm\Delta + m^2\Delta^2}.$$

Debido a la estrechez de las zonas, $\Delta \ll b$. Por eso, cuando los números m no son muy grandes, el término elevado al cuadrado que hay bajo el signo de raíz se puede despreciar. Entonces

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = \sqrt{2bm\Delta}.$$

Suponiendo en esta fórmula que $m = 1$, obtenemos que $d_1 = \sqrt{2b \Delta}$. Por consiguiente, a la expresión de la anchura total de las m primeras zonas se le puede dar la forma

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = d_1 \sqrt{m}.$$

De aquí

$$d_m = d_1 (\sqrt{m} - \sqrt{m-1}). \quad (128.6)$$

El cálculo por la fórmula (128.6) da que

$$d_1 : d_2 : d_3 : d_4 : \dots = 1 : 0,41 : 0,32 : 0,27 : \dots \quad (128.7)$$

En estas mismas relaciones se encuentran las áreas de las zonas.

De (128.7) se infiere que la amplitud de las oscilaciones que crean en el punto P las zonas aisladas decrece al principio (para las primeras zonas) muy de prisa, y luego este decrecimiento se hace más lento. Por esta razón la línea quebrada que se obtiene en la composición gráfica de las oscilaciones excitadas por las zonas rectilíneas marcha al principio con una inclinación más suave que en el caso de las zonas anulares (cuyas áreas son aproximadamente iguales para una construcción análoga). En la fig. 128.8 se comparan ambos diagramas vectoriales. En los dos casos el retraso en fase de cada oscilación posterior se ha tomado el mismo. El valor de la amplitud para las zonas anulares (fig. 128.8, *a*) se ha tomado constante, y para las zonas rectilíneas (fig. 128.8, *b*), decreciente de acuerdo con la proporción (128.7). Las gráficas de la fig. 128.8 son aproximadas. En la construcción exacta de estas gráficas hay que tener en cuenta la dependencia de la amplitud respecto de r y φ (véase (126.1)). No obstante, esto no influye en el carácter general de los diagramas.

En la fig. 128.8, *b* sólo se muestran las oscilaciones debidas a las zonas que se encuentran a la derecha del punto P . Las zonas con números m y m' son simétricas respecto de P . Por eso es natural que al construir el diagrama, los vectores que representan las oscilaciones correspondientes a estas zonas sean simétricos con respecto al origen de coordenadas O (fig. 128.9). Si la anchura de las zonas tiende a cero, la línea quebrada que representa la fig. 128.9 se transforma en la curva suave (fig. 128.10) llamada *espiral de Cornu*.

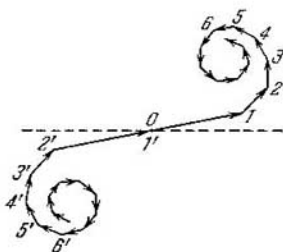


Fig. 128.9.

La ecuación de la espiral de Cornu en forma paramétrica tiene la forma

$$\xi = \int_0^v \cos \frac{\pi u^2}{2} du, \quad \eta = \int_0^v \sin \frac{\pi u^2}{2} du. \quad (128.8)$$

Estas integrales se llaman *integrales de Fresnel*. En las funciones elementales no se toman dichas integrales, pero hay tablas con las

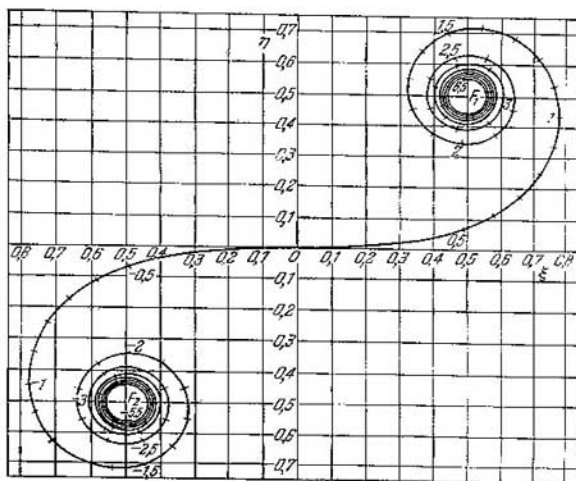


Fig. 128.10.

cuales se pueden hallar sus valores para distintos v . El sentido del parámetro v consiste en que $|v|$ da la longitud del arco de la curva de Cornu medido desde el origen de coordenadas.

Los números marcados a lo largo de la curva en la fig. 128.10 dan los valores del parámetro v . Los puntos F_1 y F_2 , a los cuales se aproxima asintóticamente la curva cuando v tiende a $+\infty$ y $-\infty$, son los *focos* o *polos* de la espiral de Cornu. Sus coordenadas son

$$\xi = +\frac{1}{2}, \quad \eta = +\frac{1}{2} \quad \text{para el punto } F_1,$$

$$\xi = -\frac{1}{2}, \quad \eta = -\frac{1}{2} \quad \text{para el punto } F_2.$$

El bucle derecho de la espiral (parte OF_1) corresponde a las zonas situadas a la derecha del punto P y el izquierdo (parte OF_2), a las zonas que están a la izquierda de este punto.

Hallemos la derivada $d\eta/d\xi$ en el punto de la curva correspondiente a un valor dado del parámetro v . Según (128.8), a un incremento de v igual a dv corresponde

$$d\xi = \cos \frac{\pi v^2}{2} dv, \quad d\eta = \sin \frac{\pi v^2}{2} dv.$$

Por lo tanto, $d\eta/d\xi = \operatorname{tg}(\pi v^2/2)$. Al mismo tiempo, $d\eta/d\xi = \operatorname{tg} \theta$, siendo θ el ángulo de inclinación de la tangente a la curva en el punto dado. De este modo,

$$\theta = \frac{\pi}{2} v^2. \quad (128.9)$$

De aquí se sigue que en el punto correspondiente a $v = 1$, la tangente a la curva de Cornu es perpendicular al eje ξ . Cuando $v = 2$, el ángulo θ es igual a 2π , de manera que la tangente es paralela al eje ξ . Para $v = 3$, el ángulo θ es igual a $9\pi/2$, de modo que la tangente es otra vez perpendicular al eje ξ y así sucesivamente.

La espiral de Cornu da la posibilidad de hallar la amplitud de la oscilación luminosa en cualquier punto de la pantalla. La posición del punto la vamos a caracterizar por la coordenada x , medida desde el límite de la sombra geométrica (véase la fig. 128.6). Para el punto P , que se encuentra en dicho límite ($x = 0$), todas las zonas rayadas estarán cubiertas. A las oscilaciones de las zonas no rayadas corresponde el bucle derecho de la espiral. Por consiguiente, la oscilación resultante se representa por un vector, cuyo origen se encuentra en el punto O y su extremo, en el punto F_1 (fig. 128.11, *a*). Cuando el punto P se desplaza en la región de la sombra geométrica, el semiplano cubre cada vez un número mayor de zonas no rayadas. Por eso el origen del vector resultante se trasladará por el bucle derecho en dirección al polo F_1 (fig. 128.11, *b*). Como resultado, la amplitud de la oscilación tiende monótonamente a cero.

Si el punto P se desplaza desde el límite de la sombra geométrica hacia la derecha, como adición a las zonas no rayadas se descubre un número cada vez mayor de zonas rayadas. Por eso el origen del vector resultante se deslizará por el bucle izquierdo en dirección al polo F_2 . Con esto la amplitud pasa por una serie de máximos (el primero de los cuales es igual a la longitud del segmento MF_1 en la fig. 128.11, *c*) y de mínimos (el primero de ellos es igual a la longitud del segmento NF_1 en la fig. 128.11, *d*). Cuando la superficie de onda está totalmente descubierta, la amplitud es igual a la longitud del segmento F_2F_1 (fig. 128.11, *e*), es decir, exactamente dos veces mayor que la amplitud en el límite de la sombra geométrica (véase la fig. 128.11, *a*). Respectivamente, la intensidad en dicho

límite constituye $\frac{1}{4}$ de la intensidad I_0 que se obtiene en la pantalla en ausencia de obstáculos.

La dependencia de la intensidad de la luz I respecto de la coordenada x se da en la fig. 128.12. En esta figura se ve que al pasar a la región de la sombra geométrica, la intensidad no varía de un golpe, sino que paulatinamente tiende a cero. A la derecha del límite de la sombra geométrica se encuentra una serie de máximos y mínimos de intensidad sucesivos. Los cálculos dan que para $b = 1$ m

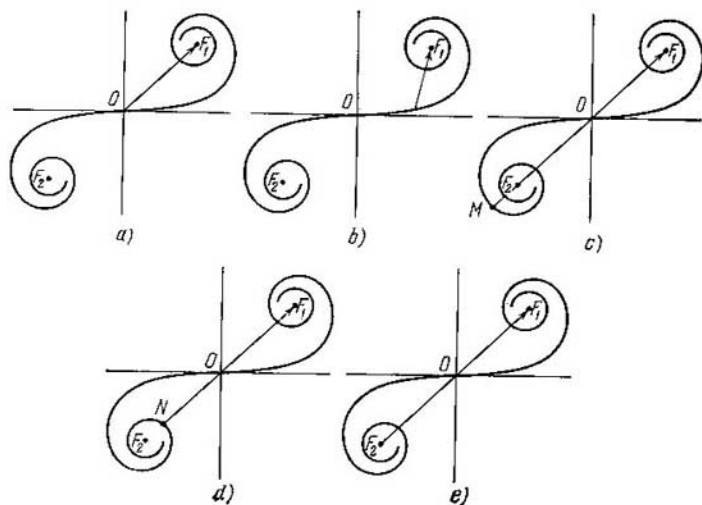


Fig. 128.11.

y $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, las coordenadas de los máximos (véase la fig. 128.12) tienen los valores siguientes: $x_1 = 0,61$ mm, $x_2 = 1,17$ mm, $x_3 = 1,54$ mm, $x_4 = 1,85$ mm y así sucesivamente. Al variar la distancia b desde el semiplano hasta la pantalla, los valores de las coordenadas de los máximos y mínimos varían como \sqrt{b} . De los datos citados se sigue que los máximos se disponen bastante densamente. Con ayuda de la curva de Cornu se puede hallar también la magnitud relativa de la intensidad en los máximos y mínimos. Para el primer máximo se obtiene el valor de $1,37 I_0$, y para el primer mínimo, el de $0,78 I_0$.

En la fig. 128.13 se reproduce la fotografía de la figura de difracción por el borde de un semiplano.

Difracción por una rendija. Una rendija infinitamente larga se puede formar colocando uno junto a otro dos semiplanos orientados en sentidos opuestos. Por consiguiente, el problema de la difracción de Fresnel por una rendija se puede resolver valiéndose de la

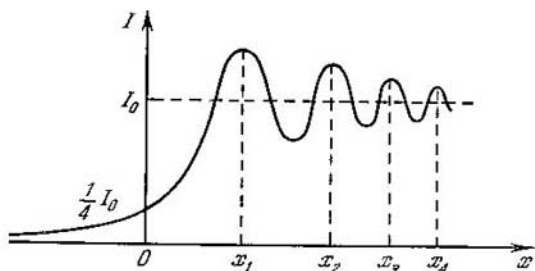


Fig. 128.12.

espiral de Cornu. La superficie de onda, el plano de la rendija y la pantalla en que se observa la difracción consideraremos que son paralelos entre sí (fig. 128.14).

Para el punto P , que se encuentra enfrente del centro de la rendija, el principio y el fin del vector resultante se encuentran en

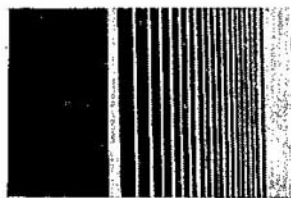


Fig. 128.13.

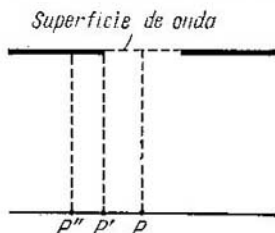


Fig. 128.14.

puntos de la espiral simétricos con respecto al origen de coordenadas (fig. 128.15). Si nos desplazamos al punto P' , que está enfrente de un borde de la rendija, el origen del vector resultante se trasladará a la mitad de la espiral O . Y el extremo del vector se desplaza por la espiral en dirección al polo F_1 . Si nos adentramos en la región de la sombra geométrica, el principio y el fin del vector resultante se deslizarán por la espiral y en definitiva se encontrarán a la distancia mínima uno del otro (véase en la fig. 128.15 el vector correspon-

diente al punto P''). La intensidad de la luz alcanza en este caso un mínimo. Si continúan deslizándose por la espiral, el principio y el fin del vector volverán a alejarse uno del otro y la intensidad crecerá. Lo mismo ocurrirá cuando el desplazamiento tenga lugar desde el punto P en el sentido contrario, puesto que la figura de difracción es simétrica con respecto al centro de la rendija.

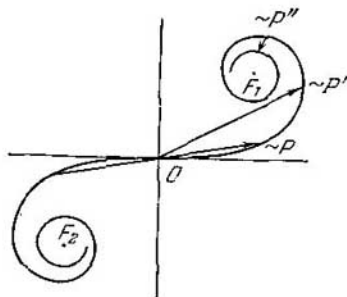


Fig. 128.15.

Si se varía la anchura de la rendija, corriendo los semiplanos en sentidos opuestos, la intensidad en el punto medio P pulsará, pasando alternativamente por máximos (fig. 128.16, a) y por mínimos distintos de cero (fig. 128.16, b).

Así, la figura de difracción de Fresnel por una rendija está formada por una franja central brillante (en el caso representado en la

fig. 128.16, a) o relativamente oscura (en el caso que representa la fig. 128.16, b), a ambos lados de la cual se encuentran franjas oscuras y brillantes, simétricas a ella, que se suceden unas a otras.

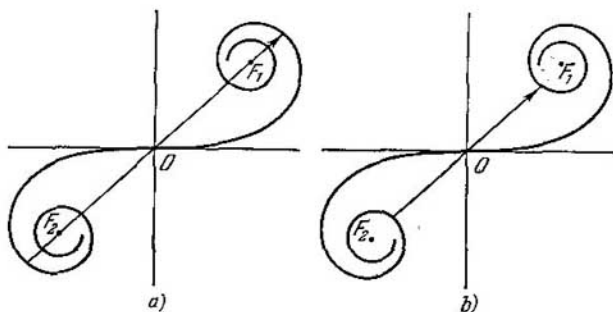


Fig. 128.16.

Quando la anchura de la rendija es grande, el principio y el fin del vector resultante para el punto P se encuentran en las espiras internas de la espiral, cerca de los polos F_1 y F_2 . Por eso la intensidad de la luz en los puntos situados frente a la rendija será prácticamente constante. Sólo en los límites de la sombra geométrica se for-

ma un sistema de franjas brillantes y oscuras densamente dispuestas.

Advertimos que todos los resultados obtenidos en este párrafo son válidos a condición de que el radio de coherencia de la onda luminosa que incide sobre el obstáculo sea mucho mayor que la dimensión característica de éste (el diámetro del orificio o disco, la anchura de la rendija, etc.).

§ 129. Difracción de Fraunhofer por una rendija

Sea una onda luminosa plana que incide sobre una rendija infinitamente larga¹⁾ (fig. 129.1). Coloquemos detrás de la rendija una lente convergente y en su plano focal, una pantalla. La superficie de la onda incidente, el plano de la rendija y la pantalla son paralelos entre sí. Como la rendija es infinita, la figura que se observe en cualquier plano perpendicular a ella será la misma. Por eso bastará investigar el carácter de la figura en uno de estos planos, por ejemplo, en el de la fig. 129.1. Todas las magnitudes que se introduzcan a continuación, en particular el ángulo φ que forma el rayo con el eje óptico de la lente, se refieren a este plano.

Dividamos la parte descubierta de la superficie de onda en zonas elementales de anchura dx paralelas a los bordes de la rendija. Las ondas secundarias que emiten las zonas en la dirección determinada por el ángulo φ , se reúnen en el punto P de la pantalla. Cada zona elemental crea en el punto P una oscilación dE . La lente hace convergir en su plano focal ondas planas (no esféricas). Por eso el factor $1/r$ de la expresión (126.1) para dE , en el caso de la difracción de Fraunhofer estará ausente. Limitándonos a considerar ángulos φ no demasiado grandes, podemos suponer que el coeficiente K de la fórmula (126.1) es constante. Entonces la amplitud de la oscilación que excita una zona en un punto cualquiera de la pantalla dependerá únicamente del área de la zona. Esta área es proporcional a la anchura dx de dicha zona, por lo tanto, la amplitud dA de la oscilación dE excitada por una zona de anchura dx en un punto cualquiera de la pantalla tiene la forma

$$dA = C dx,$$

donde C es una constante.

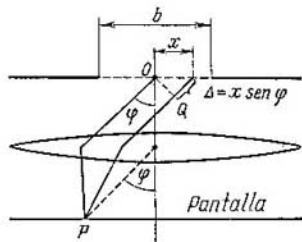


Fig. 129.1.

¹⁾ En la práctica es suficiente que la longitud de la rendija sea muchas veces mayor que su anchura.

Designemos por A_0 la suma algebraica de las amplitudes de las oscilaciones excitadas en un punto determinado de la pantalla por todas las zonas. Su valor puede hallarse integrando dA sobre toda la anchura b de la rendija

$$A_0 = \int dA = \int_0^b C dx = Cb.$$

De aquí $C = A_0/b$ y, por consiguiente,

$$dA = \frac{A_0}{b} dx.$$

Determinemos ahora las relaciones de fase entre las oscilaciones dE . Se comparan las fases de las oscilaciones que excitan en el punto P las zonas elementales de coordenadas O y x (fig. 129.4). Los caminos ópticos OP y QP son tautócronos (véase la fig. 117.2). Por eso la diferencia de fase entre las oscilaciones que consideramos se origina en el recorrido Δ , igual a $x \sin \varphi$. Si la fase inicial de la oscilación excitada en el punto P por la zona elemental que se encuentra en el centro de la rendija ($x = 0$) se supone igual a cero, la fase inicial de la oscilación que excita la zona de coordenada x será

$$-2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi$$

(λ es la longitud de la onda en el medio dado).

De este modo, la oscilación excitada por la zona elemental de coordenada x en el punto P (cuya posición está determinada por el ángulo φ) se puede representar en la forma

$$dE_\varphi = \left(\frac{A_0}{b} dx \right) \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi \right) \right] \quad (129.1)$$

(se tiene en cuenta la parte real de esta expresión).

Integrando la expresión (129.1) sobre toda la anchura de la rendija, obtenemos la oscilación resultante, excitada en el punto P por la parte de la superficie de onda que descubre la rendija:

$$E_\varphi = \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{A_0}{b} \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi \right) \right] dx.$$

Sacamos fuera del signo de integral los factores que no dependen de x . Además, introducimos la designación

$$\gamma = \frac{\pi}{\lambda} \sin \varphi. \quad (129.2)$$

Como resultado se obtiene

$$E_{\varphi} = \frac{A_0}{b} e^{i\omega t} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{-2i\gamma x} dx = \frac{A_0}{b} e^{i\omega t} \frac{1}{(-2i\gamma)} e^{-2i\gamma x} \Big|_{-b/2}^{+b/2} =$$

$$= e^{i\omega t} \left\{ \frac{A_0}{\gamma b} \cdot \frac{1}{(-2i)} [e^{-i\gamma b} - e^{i\gamma b}] \right\} = e^{i\omega t} \left\{ \frac{A_0}{\gamma b} \cdot \frac{1}{2i} [e^{i\gamma b} - e^{-i\gamma b}] \right\}.$$

La expresión entre llaves determina la amplitud compleja \hat{A}_{φ} de la oscilación resultante. Tomando en consideración que la diferencia de exponentes dividida por $2i$ es igual a $\text{sen } \gamma b^1$, se puede escribir:

$$\hat{A}_{\varphi} = A_0 \frac{\text{sen } \gamma b}{\gamma b} = A_0 \frac{\text{sen } (\pi b \text{ sen } \varphi / \lambda)}{\pi b \text{ sen } \varphi / \lambda} \quad (129.3)$$

(hemos sustituido γ por su valor (129.2)).

La expresión (129.3) es real. Su módulo es la amplitud ordinaria de la oscilación resultante:

$$A_{\varphi} = \left| A_0 \frac{\text{sen } (\pi b \text{ sen } \varphi / \lambda)}{\pi b \text{ sen } \varphi / \lambda} \right|. \quad (129.4)$$

Para el punto que se encuentra enfrente del centro de la lente, $\varphi = 0$. La sustitución de este valor en la fórmula (129.4) da para la amplitud el valor A_0^2). Este resultado se puede obtener de un modo más fácil. Cuando $\varphi = 0$, las oscilaciones de todas las zonas elementales llegan al punto P en una misma fase. Por eso la amplitud de la oscilación resultante es igual a la suma algebraica de las amplitudes de las oscilaciones que se componen.

Para valores de φ que satisfagan la condición $\pi b \text{ sen } \varphi / \lambda = \pm k\pi$, es decir, en el caso en que

$$b \text{ sen } \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (129.5)$$

la amplitud A_{φ} se anula. De este modo, la condición (129.5) determina las posiciones de los mínimos de intensidad. Advertimos que $b \text{ sen } \varphi$ es la diferencia de marcha Δ de los rayos que van al punto P desde los bordes de la rendija (véase la fig. 129.1).

La condición (129.5) es fácil de obtener de los siguientes razonamientos. Si la diferencia de marcha Δ desde los bordes de la rendija es igual a $\pm k\lambda$, la parte descubierta de la superficie de onda se puede dividir en $2k$ zonas de igual anchura, de modo que la diferencia de marcha desde los bordes de cada zona sea $\lambda/2$ (véase la fig. 129.2, construida para $k = 2$). Las oscilaciones de cada par de zonas contiguas se extinguen una a otra, con lo que la amplitud

¹⁾ Véase el § 64 del tomo 1^o.

²⁾ Se recordará que $\lim_{u \rightarrow 0} (\text{sen } u / u) = 1$ (cuando las u son pequeñas se puede suponer que $\text{sen } u \approx u$).

resultante es nula. Si para el punto P la diferencia de marcha Δ es igual a $\pm (k + 1/2) \lambda$, el número de zonas será impar, la acción de una de ellas resultará no compensada y se obtendrá un máximo de intensidad.

La intensidad de la luz es proporcional al cuadrado de la amplitud. Por consiguiente, de acuerdo con (129.4)

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\text{sen}^2(\pi b \text{sen } \varphi / \lambda)}{(\pi b \text{sen } \varphi / \lambda)^2}, \quad (129.6)$$

donde I_0 es la intensidad en medio de la figura de interferencia (enfrente del centro de la lente), e I_{φ} es la intensidad en el punto cuya posición la determina el valor dado de φ .

De la fórmula (129.6) se obtiene que $I_{-\varphi} = I_{\varphi}$. Esto significa que la figura de interferencia es simétrica con respecto al centro

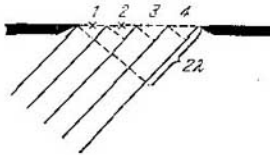


Fig. 129.2.

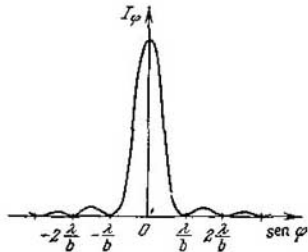


Fig. 129.3.

de la lente. Advertimos que si la rendija se desplaza paralelamente a la pantalla (a lo largo del eje x en la fig. 129.1), la figura de difracción que se observa en esta última no se mueve (su punto medio se encuentra frente al centro de la lente). Y al contrario, el desplazamiento de la lente sin mover la rendija va acompañado de un desplazamiento igual de la figura por la pantalla.

La gráfica de la función (129.6) se representa en la fig. 129.3. Sobre el eje de abscisas se han tomado los valores de $\text{sen } \varphi$, y sobre el de ordenadas, la intensidad I_{φ} . La cantidad de mínimos de intensidad se determina por la razón de la anchura de la rendija b a la longitud de la onda λ . De la condición (129.5) se deduce que $\text{sen } \varphi = \pm k\lambda/b$. El módulo de $\text{sen } \varphi$ no puede ser mayor que la unidad. Por eso, $k\lambda/b \leq 1$, de donde

$$k \leq \frac{b}{\lambda}. \quad (129.7)$$

Cuando la anchura de la rendija es menor que la longitud de la onda, los mínimos no se producen en absoluto. En este caso la inten-

sidad de la luz disminuye monótonamente desde el centro de la figura hacia sus bordes.

A los bordes del máximo central corresponden los valores del ángulo φ que se obtienen de la condición $b \sin \varphi = \pm \lambda$. Estos valores son iguales a $\pm \arcsen(\lambda/b)$. Por lo tanto, la anchura angular del máximo central será

$$\delta\varphi = 2 \arcsen \frac{\lambda}{b}. \quad (129.8)$$

En el caso de $b \gg \lambda$, el valor de $\arcsen(\lambda/b)$ se puede suponer igual a λ/b . Entonces la fórmula de la anchura angular del máximo central se simplifica del modo siguiente:

$$\delta\varphi = \frac{2\lambda}{b}. \quad (129.9)$$

Resolvamos ahora el problema de la difracción de Fraunhofer por una rendija por el método de la composición gráfica de las amplitudes. La parte descubierta de la superficie de onda se divide en zonas muy estrechas de igual anchura. La oscilación que excita cada una de estas zonas tiene la misma amplitud ΔA y se retrasa en fase de

la oscilación precedente en una misma magnitud δ , dependiente del ángulo φ , que determina la dirección al punto de observación P . Si $\varphi = 0$, la diferencia de fase δ es nula y el diagrama vectorial tiene la forma que muestra la fig. 129.4, a. La amplitud de la oscilación resultante A_0 es igual a la suma de las amplitudes de las ondas que se componen. Cuando $\Delta = b \sin \varphi = \lambda/2$, las oscilaciones de los bordes de la rendija están en oposición de fase. Respectivamente, los vectores ΔA se disponen a lo largo de una semicircunferencia de longitud A_0 (fig. 129.4, b). Por consiguiente, la amplitud resultante es igual a $2A_0/\pi$. En el caso en que $\Delta = b \sin \varphi = \lambda$, entre las oscilaciones de los bordes de la rendija hay una diferencia de fase de 2π . El correspondiente diagrama vectorial se representa

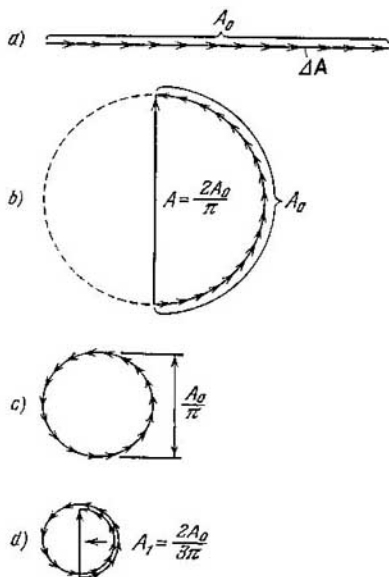


Fig. 129.4.

en la fig. 129.4, *c*. Los vectores ΔA se disponen a lo largo de una circunferencia de longitud A_0 . La amplitud resultante es nula y se obtiene el primer mínimo. El primer máximo se obtiene para $\Delta = b \sin \varphi = 3\lambda/2$. En este caso las oscilaciones de los bordes de la rendija difieren en fase en 3π . Construyendo sucesivamente los vectores ΔA daremos vuelta y media a una circunferencia de diámetro $A_1 = (2/3\pi)A_0$ (fig. 129.4, *d*). El diámetro de esta circunferencia es la amplitud del primer máximo. De este modo, la intensidad del primer máximo es $I_1 = (2/3\pi)^2 I_0 \approx 0,045 I_0$. Análogamente se puede hallar la intensidad relativa de los demás máximos. En definitiva se obtiene la relación siguiente:

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 : \dots = 1 : \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{7\pi}\right)^2 : \dots = \\ = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,008 : \dots \quad (129.10)$$

De este modo, la intensidad del máximo central es mucho mayor que la de los demás máximos; en él se concentra la parte fundamental del flujo luminoso que pasa a través de la rendija.

En el caso de que la rendija sea muy pequeña en comparación con la distancia desde ella hasta la pantalla, los rayos que van al punto P desde los bordes de la rendija también serán prácticamente paralelos en ausencia de la lente entre ésta y la pantalla. Por lo tanto, si sobre la rendija incide una onda plana, se observará la difracción de Fraunhofer. Todas las fórmulas obtenidas antes serán válidas, debiéndose entender por φ en estas fórmulas el ángulo entre la dirección de cualquiera de los bordes al punto P y la normal al plano de la rendija.

Establezcamos el criterio cuantitativo que permita determinar qué tipo de difracción se observará en cada caso concreto. Para esto, hallemos la diferencia de marcha de los rayos desde los bordes de la rendija hasta el punto P (fig. 129.5). Aplicamos el teorema de los cosenos al triángulo de lados r , $r + \Delta$ y b :

$$(r + \Delta)^2 = r^2 + b^2 - 2rb \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right).$$

Después de hacer transformaciones fáciles se obtiene

$$2r \Delta + \Delta^2 = b^2 + 2rb \sin \varphi. \quad (129.11)$$

Nos interesa el caso en que los rayos que van de los bordes de la rendija al punto P son casi paralelos. Con esta condición, $\Delta^2 \ll r \Delta$, por lo que en la ecuación (129.11) se puede despreciar el sumando Δ^2 . En esta aproximación

$$\Delta = \frac{b^2}{2r} + b \sin \varphi. \quad (129.12)$$

En el límite, cuando $r \rightarrow \infty$, se obtiene un valor de la diferencia de marcha $\Delta_\infty = b \operatorname{sen} \varphi$ que coincide con la expresión que figura en la fórmula (129.5).

Para r finitas el carácter de la figura de difracción vendrá determinado por la relación entre la diferencia $\Delta - \Delta_\infty$ y la longitud de la onda λ . Si

$$\Delta - \Delta_\infty \ll \lambda, \quad (129.13)$$

la figura de difracción será prácticamente la misma que en el caso

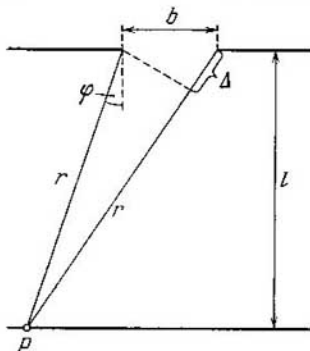


Fig. 129.5.

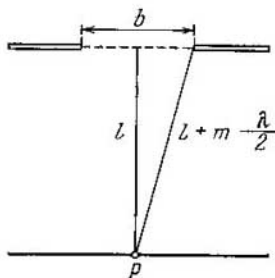


Fig. 129.6.

de la difracción de Fraunhofer. Y si $\Delta - \Delta_\infty$ es comparable con λ ($\Delta - \Delta_\infty \sim \lambda$), se producirá la difracción de Fresnel.

De (129.12) se sigue que

$$\Delta - \Delta_\infty = \frac{b^2}{2r} \sim \frac{b^2}{l}$$

(l es la distancia desde la rendija hasta la pantalla). La sustitución de esta expresión en (129.13) lleva a la condición $(b^2/l) \ll \lambda$ o

$$\frac{b^2}{l\lambda} \ll 1. \quad (129.14)$$

De este modo, el carácter de la difracción depende del valor del parámetro adicional

$$b^2/l\lambda. \quad (129.15)$$

Si este parámetro es mucho menor que la unidad, se observa la difracción de Fraunhofer, y si es del orden de la unidad, la difracción de Fresnel; finalmente, si este parámetro es mucho mayor que la unidad, resulta aplicable la aproximación de la óptica geométrica. Para comodidad de las comparaciones representamos lo expuesto

en la forma siguiente:

$$\frac{b^2}{l\lambda} \begin{cases} \ll 1 & \text{-- difracción de Fraunhofer,} \\ \sim 1 & \text{-- difracción de Fresnel,} \\ \gg 1 & \text{-- óptica geométrica.} \end{cases} \quad (129.16)$$

Al parámetro (129.15) se le puede dar una interpretación intuitiva. Tomemos un punto P que se encuentre frente a la mitad de la rendija (fig. 129.6). Para este punto el número m de zonas de Fresnel descubiertas se determina por la relación

$$\left(l + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 = l^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Abriendo los paréntesis y omitiendo el sumando proporcional a λ^2 , obtenemos¹⁾

$$m = \frac{b^2}{4l\lambda} \sim \frac{b^2}{l\lambda}. \quad (129.17)$$

Así, el parámetro (129.15) está relacionado directamente con el número de zonas de Fresnel descubiertas (para los puntos que se encuentran enfrente de la mitad de la rendija).

Si la rendija descubre una parte pequeña de la zona central de Fresnel ($m \ll 1$), se observa la difracción de Fraunhofer. La distribución de la intensidad en este caso se representa por la curva que se da en la fig. 129.3. Si la rendija descubre un número pequeño de zonas de Fresnel ($m \sim 1$), en la pantalla se obtiene una imagen de la rendija cuyos bordes están encuadrados por franjas brillantes y oscuras claramente visibles. Por último, en el caso en que la rendija descubre un gran número de zonas de Fresnel ($m \gg 1$), en la pantalla se obtiene una imagen de la rendija uniformemente iluminada. Sólo junto a los límites de la sombra geométrica hay unas franjas brillantes y oscuras muy estrechas que prácticamente no se distinguen a simple vista.

Veamos cómo varía la figura al alejar la pantalla de la rendija. Cuando las distancias de la pantalla a la rendija son pequeñas ($m \gg 1$), la imagen corresponde a las leyes de la óptica geométrica. Aumentando la distancia llegamos primero a una figura de difracción de Fresnel, que luego pasa a ser figura de difracción de Fraunhofer. Este mismo orden de transformaciones se observa en el caso de que, sin variar la distancia l , se disminuye la anchura b de la rendija.

De lo dicho queda claro que el criterio de aplicabilidad de la óptica geométrica no es la pequeñez de la longitud de onda com-

¹⁾ Advertimos que para los puntos fuertemente desplazados en la región de la sombra geométrica, el número de zonas descubiertas será mayor.

rada con la dimensión característica del obstáculo (por ejemplo, la anchura de la rendija), sino el valor del parámetro (129.15) (que debe ser mucho mayor que la unidad). Supongamos, por ejemplo, que las dos relaciones b/λ y l/b son iguales a 100. En este caso $\lambda \ll b$, pero $b^2/\lambda l = 1$ y, por lo tanto, se observa claramente la difracción de Fresnel.

§ 130. Red de difracción

Se llama red de difracción el conjunto de un gran número de rendijas iguales que se encuentran a la misma distancia una de otra (fig. 130.1). La distancia d entre las mitades de las rendijas contiguas recibe el nombre de *período* de la red.

Coloquemos paralelamente a una red una lente convergente y en su plano focal pongamos una pantalla. Veamos qué carácter

tiene la figura de difracción que se observa en la pantalla cuando sobre la red incide una onda luminosa plana (para simplificar supondremos que esta onda incide normalmente sobre la red). Cada una de las rendijas da sobre la pantalla la figura que describe la curva representada en la fig. 129.3. Las figuras de

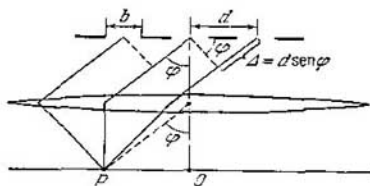


Fig. 130.1.

todas las rendijas vienen a parar en un mismo punto de la pantalla (independientemente de las posiciones de dichas rendijas, el máximo central se encuentra enfrente del centro de la lente). Si las oscilaciones que llegan al punto P desde rendijas distintas no fueran coherentes, la figura resultante de las N rendijas se diferenciaría de la creada por una sola rendija únicamente en que todas las intensidades aumentarían N veces. Pero las oscilaciones de las distintas rendijas son, en mayor o menor grado, coherentes; por eso la intensidad resultante será diferente de $N I_{\varphi}$ (I_{φ} es la intensidad que crea una rendija; véase (129.6)).

En adelante vamos a suponer que el radio de coherencia de la onda incidente es mucho mayor que la longitud de la red, de manera que las oscilaciones de todas las rendijas se pueden considerar coherentes entre sí. En este caso la oscilación resultante en el punto P , cuya posición viene determinada por el ángulo φ , es la suma de N oscilaciones de igual amplitud A_{φ} , desplazadas en fase una de otra en la misma magnitud δ . Según la fórmula (124.5) la intensidad

en estas condiciones es

$$I_{\text{red}} = I_{\varphi} \frac{\text{sen}^2 (N\delta/2)}{\text{sen}^2 (\delta/2)} \quad (130.1)$$

(en el caso dado el papel de I_0 lo desempeña I_{φ}).

En la fig. 130.1 se ve que la diferencia de marcha desde las rendijas vecinas es $\Delta = d \text{ sen } \varphi$. Por consiguiente, la diferencia de fase

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} d \text{ sen } \varphi, \quad (130.2)$$

donde λ es la longitud de la onda en el medio dado.

Sustituyendo en la fórmula (130.1) I_{φ} por su expresión (129.6) y δ por la suya (130.2), obtenemos

$$I_{\text{red}} = I_0 \frac{\text{sen}^2 (\pi b \text{ sen } \varphi / \lambda)}{(\pi b \text{ sen } \varphi / \lambda)^2} \frac{\text{sen}^2 (N\pi d \text{ sen } \varphi / \lambda)}{\text{sen}^2 (\pi d \text{ sen } \varphi / \lambda)} \quad (130.3)$$

(I_0 es la intensidad que crea una rendija frente al centro de la lente).

En (130.3) el primer factor se anula en los puntos para los cuales

$$b \text{ sen } \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (130.4)$$

En estos puntos la intensidad que crea cada una de las rendijas por separado es nula (véase la condición (129.5)).

El segundo factor toma en (130.3) el valor N^2 en los puntos que satisfacen la condición

$$d \text{ sen } \varphi = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (130.5)$$

(véase (124.7)). En las direcciones que determina esta condición las oscilaciones de las rendijas aisladas se refuerzan mutuamente, por lo que su amplitud en el punto correspondiente de la pantalla será

$$A_{\text{máx}} = NA_{\varphi} \quad (130.6)$$

(A_{φ} es la amplitud de la oscilación emitida por una rendija bajo el ángulo φ).

La condición (130.5) determina la posición de los máximos de intensidad llamados *principales*. El número m da el *orden* del máximo principal. Máximos de orden nulo sólo hay uno; de 1º, 2º, etc., órdenes hay dos de cada orden.

Elevando al cuadrado la igualdad (130.6) obtenemos que la intensidad de los máximos principales $I_{\text{máx}}$ es N^2 veces mayor que la intensidad I_{φ} que crea en la dirección φ una rendija:

$$I_{\text{máx}} = N^2 I_{\varphi} \quad (130.7)$$

Además de los mínimos que determina la condición (130.4), en los intervalos entre los máximos principales vecinos hay $(N - 1)$ mínimos adicionales. Estos mínimos surgen en aquellas direcciones,

en las cuales las oscilaciones de distintas rendijas se extinguen mutuamente. De acuerdo con la fórmula (124.8), las direcciones de los mínimos adicionales se determinan por la condición

$$d \operatorname{sen} \varphi = \pm \frac{k'}{N} \lambda$$

($k' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots$). (130.8)

En la fórmula (130.8) k' toma todos los valores de los números enteros excepto 0, N , $2N$, ..., es decir, menos aquellos, con los cuales la ecuación (130.8) se transforma en la (130.5).

La condición (130.8) es fácil de obtener por el método de la composición gráfica de las oscilaciones. Las oscilaciones de las

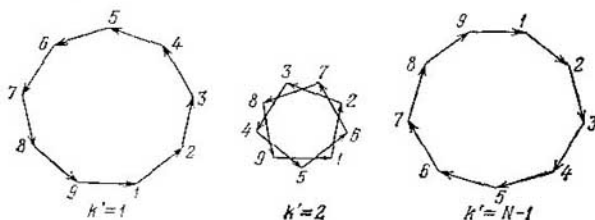


Fig. 130.2.

rendijas aisladas se representan por vectores de la misma longitud. Según (130.8), cada vector posterior forma con la dirección del anterior un mismo ángulo

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen} \varphi = \frac{2\pi}{N} k'.$$

Por eso, en aquellos casos en que k' no es múltiplo entero de N , tomando como origen del vector posterior el extremo del anterior, obtenemos una línea quebrada, cerrada, que da k' (cuando $k' < N/2$) o $N-k'$ (cuando $k' > N/2$) vueltas antes de que el extremo del N -ésimo vector se apoye en el origen del 1°. Respectivamente, la amplitud resultante es nula. Lo dicho se aclara en la fig. 130.2, que muestra la suma de los vectores para el caso de $N=9$ y de los valores de k' iguales a 1, 2 y $N-1=8$.

Entre los mínimos adicionales se encuentran máximos secundarios débiles. El número de estos máximos que corresponde al intervalo entre los máximos principales vecinos es igual a $N-2$. En el § 124 se demostró que la intensidad de los máximos secundarios no supera al $1/22$ de la intensidad del máximo principal más próximo.

En la fig. 130.3 se da la gráfica de la función (130.3) para $N = 4$ y $d/b = 3$. La curva de trazos que pasa por los vértices de los máximos principales representa la intensidad debida a una rendija multiplicada por N^2 (véase (130.7)). Con la relación, tomada en esta figura, entre el período de la red y la anchura de la rendija ($d/b = 3$), los máximos principales de 3° , 6° , etc., órdenes caen sobre los mínimos de intensidad debidos a una sola rendija, por lo que estos máximos se pierden. En general, de las fórmulas (130.4) y (130.5) se infiere que el máximo principal de m -ésimo orden caerá sobre el k -ésimo mínimo debido a una rendija si se cumple la igualdad $m/d = k/b$ o $m/k = d/b$. Esto es posible si d/b es igual a la razón de dos números enteros r y s (tiene interés práctico el caso en que

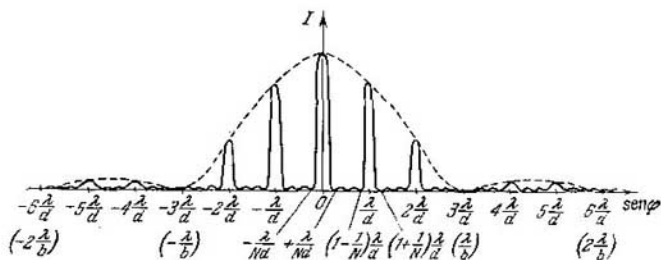


Fig. 130.3.

estos números no son grandes). Entonces el máximo principal de r -ésimo orden se superpone al s -ésimo mínimo correspondiente a una rendija; el máximo de $2r$ -ésimo orden, al $2s$ -ésimo mínimo y así sucesivamente, como resultado de lo cual los máximos de los órdenes r , $2r$, $3r$, etc., estarán ausentes.

La cantidad de máximos principales que se observan se determina por la razón del período d de la red a la longitud de onda λ . El módulo de $\text{sen } \varphi$ no puede ser mayor que la unidad. Por lo tanto, de la fórmula (130.5) se sigue que

$$m \leq d/\lambda. \quad (130.9)$$

Determinemos la anchura angular del máximo central (de orden nulo). La posición de los mínimos adicionales más próximos a él se determina por la condición $d \text{ sen } \varphi = \pm \lambda/N$ (véase la fórmula (130.8)). Por consiguiente, a estos mínimos corresponden valores de φ iguales a $\pm \arcsen (\lambda/Nd)$. De aquí, para la anchura angular

del máximo central, se obtiene la expresión

$$\delta\varphi_0 = 2 \operatorname{arcsen} \frac{\lambda}{Nd} \approx \frac{2\lambda}{Nd} \quad (130.10)$$

(hemos aprovechado que $\lambda/Nd \ll 1$).

La posición de los mínimos adicionales más próximos al máximo principal de m -ésimo orden la determina la condición $d \operatorname{sen} \varphi = (m \pm 1/N) \lambda$. De aquí se obtiene para anchura angular del m -ésimo máximo la expresión siguiente:

$$\delta\varphi_m = \operatorname{arcsen} \left(m + \frac{1}{N} \right) \frac{\lambda}{d} - \operatorname{arcsen} \left(m - \frac{1}{N} \right) \frac{\lambda}{d}.$$

Introduciendo las designaciones $m\lambda/d = x$ y $\lambda/Nd = \Delta x$, se puede representar esta fórmula en la forma

$$\delta\varphi_m = \operatorname{arcsen} (x + \Delta x) - \operatorname{arcsen} (x - \Delta x). \quad (130.11)$$

Si el número de rendijas es muy grande, el valor de $\Delta x = \lambda/Nd$ será muy pequeño. Por eso puede suponerse que $\operatorname{arcsen} (x \pm \Delta x) \approx$

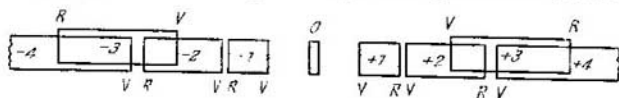


Fig. 130.4.

$\approx \operatorname{arcsen} x \pm (\operatorname{arcsen} x)' \Delta x$. La sustitución de estos valores en la fórmula (130.11) conduce a la expresión aproximada

$$\delta\varphi_m \approx 2 (\operatorname{arcsen} x)' \Delta x = \frac{2\Delta x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-m^2(\lambda/d)^2}} \frac{2\lambda}{Nd}. \quad (130.12)$$

Cuando $m = 0$ esta expresión se transforma en la (130.10).

El producto Nd da la longitud de la red de difracción. Por lo tanto, la anchura angular de los máximos principales es inversamente proporcional a la longitud de la red. Cuando aumenta el orden m del máximo, la anchura $\delta\varphi_m$ crece.

La posición de los máximos principales depende de la longitud de onda λ . Por eso, cuando a través de la red se hace pasar luz blanca, todos los máximos, excepto el central, se descomponen en un espectro, cuyo extremo violeta da hacia el centro de la figura de difracción, y el rojo, hacia fuera. De este modo, una red de difracción es un instrumento espectral. Advertimos que así como un prisma de vidrio desvía más los rayos violetas, la red de difracción, al contrario, desvía más los rojos.

La fig. 130.4 representa esquemáticamente los espectros de distintos órdenes que produce la red de difracción cuando a través

de ella pasa luz blanca. En el centro se encuentra un estrecho máximo de orden nulo; este máximo sólo tiene coloreados los bordes (según (130.10) $\delta\varphi_0$ depende de λ). A ambos lados del máximo central hay dos espectros de 1^{er} orden, después dos espectros de 2^o orden y así sucesivamente. Las posiciones del extremo rojo del espectro de m -ésimo orden y del extremo violeta del espectro de $(m + 1)$ -ésimo orden se determinan por las relaciones

$$\text{sen } \varphi_{\text{rojo}} = m \frac{0,76}{d}, \quad \text{sen } \varphi_{\text{violet}} = (m + 1) \frac{0,40}{d},$$

en las que d se toma en micrometros. A condición de que

$$0,76m > 0,40(m \pm 1),$$

los espectros de órdenes m -ésimo y $(m + 1)$ -ésimo se superponen parcialmente. De esta desigualdad se obtiene que $m > \frac{10}{9}$. Por consiguiente, la superposición parcial comienza desde los espectros de 2^o y 3^{er} orden (véase la fig. 130.4, en la cual, para mayor claridad, los espectros de distintos órdenes están desplazados uno respecto de otro en sentido vertical).

Las características principales de todo instrumento espectral son su *dispersión* y su *poder resolutivo* o *separador*. La dispersión determina la distancia angular o lineal entre dos rayos espectrales, cuyas longitudes de onda se diferencien en una unidad (por ejemplo, en 1 Å). El poder resolutivo determina la diferencia mínima de las longitudes de onda $\delta\lambda$ con la cual dos rayas se perciben separadas en el espectro.

Se llama *dispersión angular* la magnitud

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}, \quad (130.13)$$

donde $\delta\varphi$ es la distancia angular entre las rayas espectrales cuyas longitudes de onda se diferencian en $\delta\lambda$.

Para hallar la dispersión angular de la red de difracción derivamos la condición (130.5) de máximo principal hacia la izquierda respecto de φ y hacia la derecha respecto de λ . Omitiendo el signo menos, se obtiene

$$d \cos \varphi \delta\varphi = m \delta\lambda.$$

De aquí

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi} \quad (130.14)$$

Dentro de los límites de ángulos pequeños $\cos \varphi \approx 1$, por lo que se puede suponer que

$$D \approx \frac{m}{d}. \quad (130.15)$$

De la expresión obtenida se sigue que la dispersión angular es inversamente proporcional al período de la red. Cuanto más alto sea el orden m del espectro, tanto mayor será la dispersión.

Se da el nombre de *dispersión lineal* a la magnitud

$$D_{lin} = \frac{\delta l}{\delta \lambda}, \quad (130.16)$$

en la que δl es la distancia lineal, sobre la pantalla o la placa fotográfica, entre las rayas espectrales, cuyas longitudes de onda diferencian en $\delta \lambda$. En la fig. 130.5 se ve que, si los valores del ángulo φ son pequeños, se puede suponer que $\delta l \approx f' \delta \varphi$, donde f' es la

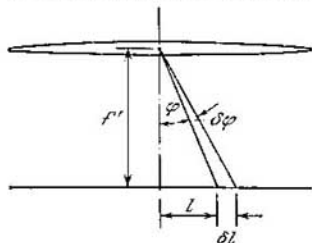


Fig. 130.5.

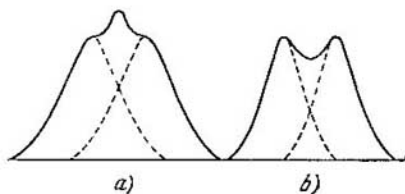


Fig. 130.5.

distancia focal de la lente que hace convergir sobre la pantalla los rayos difractados. Por consiguiente, la dispersión lineal está ligada con la dispersión angular D por la relación

$$D_{lin} = f' D.$$

Tomando en consideración la expresión (130.15), obtenemos para la dispersión lineal de la red de difracción (cuando los ángulos φ son pequeños) la fórmula siguiente

$$D_{lin} = f' \frac{m}{d}. \quad (130.17)$$

El *poder resolutivo* o *separador* de un instrumento espectral es la magnitud adimensional

$$R = \frac{\lambda}{\delta \lambda}. \quad (130.18)$$

en la que $\delta \lambda$ es la diferencia mínima entre las longitudes de onda de dos rayas espectrales, con la cual estas rayas se perciben separadas.

La posibilidad de resolver (es decir, de percibir separadamente) dos rayas espectrales próximas no sólo depende de la distancia entre ellas (determinada por la dispersión del instrumento), sino también

de la anchura del máximo espectral. En la fig. 130.6 se muestra la intensidad resultante (curvas de línea continua) que se observa cuando se superponen dos máximos próximos (curvas de línea de trazos). En el caso *a* ambos máximos se perciben como uno solo. En el caso *b*, entre los máximos hay un mínimo. Dos máximos próximos son percibidos por el ojo separadamente si la intensidad en el intervalo entre ellos no es mayor que el 80% de la intensidad de los máximos. De acuerdo con el criterio propuesto por J. W. Rayleigh esta relación de las intensidades se produce si el centro de uno de los máximos coincide con el borde del otro (fig. 130.6, *b*). Esta disposición mutua de los máximos se obtiene con un valor determinado (para un instrumento dado) de $\delta\lambda$.

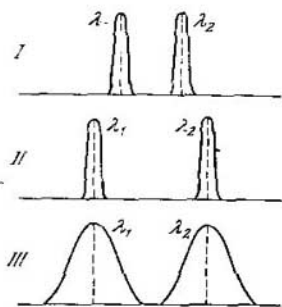


Fig. 130.7.

Hallamos el poder resolutivo de la red de difracción. La posición del centro del m -ésimo máximo para la longitud de onda $\lambda + \delta\lambda$ viene determinada por la condición

$$d \cdot \sin \varphi_{\text{máx}} = m (\lambda + \delta\lambda).$$

Los bordes del m -ésimo máximo para la longitud de onda λ están situados bajo ángulos que satisfacen la relación

$$d \cdot \sin \varphi_{\text{mín}} = \left(m \pm \frac{1}{N} \right) \lambda.$$

El centro del máximo para la longitud de onda $\lambda + \delta\lambda$ coincidirá con el borde del máximo para la longitud de onda λ si

$$m (\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N} \right) \lambda.$$

De aquí

$$m\delta\lambda = \frac{\lambda}{N}.$$

Despejando esta razón respecto a $\lambda/\delta\lambda$, obtenemos la expresión del poder resolutivo

$$R = mN. \quad (130.19)$$

De este modo el poder separador de una red de difracción es proporcional al orden m del espectro y al número N de rendijas.

En la fig. 130.7 se comparan las figuras de difracción que se obtienen para dos rayas espectrales con redes que se diferencian en los valores de la dispersión D y del poder resolutivo R . Las redes *I* y *II* poseen el mismo poder separador (tienen igual número N de rendijas), pero diferente dispersión (el período d de la red *I* es dos

veces mayor, y, respectivamente, la dispersión D dos veces menor, que el de la red II). Las redes II y III poseen igual dispersión (tienen el mismo período d), pero distinto poder resolutivo (el número N de rendijas y el poder separador R de la red II son dos veces mayores que los de la red III).

Las redes de difracción pueden ser de transmisión y de reflexión. Las primeras se hacen de láminas de vidrio o cuarzo en cuya superficie se marca, en una máquina especial con cuchilla de diamante, una serie de trazos paralelos. Los intervalos entre los trazos sirven de rendijas.

Las redes de reflexión se hacen también con cuchilla de diamante marcando los trazos sobre un espejo metálico. La luz incide oblicuamente sobre la red de difracción por reflexión. En estas condiciones una red cuyo período sea d actúa como lo haría una red por transmisión cuyo período fuera $d \cdot \cos \vartheta$, siendo ϑ el ángulo de incidencia, si la luz incidiera sobre ésta normalmente. Esto permite observar el espectro al reflejarse la luz, por ejemplo, en una placa de gramófono, que tiene en total varios surcos por milímetro, si se coloca de tal forma que el ángulo de incidencia se aproxime a $\pi/2$. Rowland inventó una red cóncava de difracción por reflexión que, ella misma (sin lente) enfoca los espectros de difracción.

Las mejores redes tienen hasta 1200 trazos por milímetro ($d \approx \approx 0,8 \mu\text{m}$). De la fórmula (130.9) se sigue que los espectros de segundo orden de la luz visible no se observan con este período. El número total de trazos que tienen estas redes alcanza 200 mil (su longitud es de cerca de 200 mm). Si la distancia focal del instrumento $f' = 2 \text{ m}$, la longitud del espectro visible de 1^{er} orden es, en este caso, de más de 700 mm.

§ 131. Difracción de rayos X

Pongamos dos redes de difracción una detrás de otra de manera que sus trazos sean perpendiculares entre sí. La primera red (de trazos verticales, por ejemplo) da en la dirección horizontal una serie de máximos, cuyas posiciones las determina la condición

$$d_1 \cdot \sin \varphi_1 = \pm m_1 \lambda \quad (m_1 = 0, 1, 2, \dots). \quad (131.1)$$

La segunda red (de trazos horizontales) divide cada uno de los haces formados de este modo en máximos dispuestos verticalmente cuyas posiciones vienen determinadas por la condición

$$d_2 \cdot \sin \varphi_2 = \pm m_2 \lambda \quad (m_2 = 0, 1, 2, \dots). \quad (131.2)$$

En definitiva la figura de difracción tendrá la forma de manchas regularmente dispuestas a cada una de las cuales le corresponden dos índices numéricos, m_1 y m_2 , enteros (fig. 131.1).

Esta misma figura de difracción se obtiene si en vez de dos redes separadas se toma una lámina transparente en la cual se hayan marcado dos sistemas de trazos perpendiculares entre sí. Esta lámina será una *estructura periódica bidimensional* (la red ordinaria es una estructura unidimensional). Midiendo los ángulos φ_1 y φ_2 que definen la posición de los máximos, y conociendo la longitud λ de la onda, por las fórmulas (131.1) y (131.2) se pueden hallar los períodos d_1 y d_2 de la estructura. Si las direcciones, en las cuales la estructura es periódica (por ejemplo, las perpendiculares a los trazos de la red) forman un ángulo α distinto de $\pi/2$, los máximos de difracción no se encontrarán en los vértices de unos



Fig. 131.1.

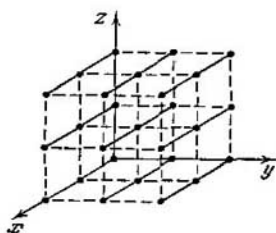


Fig. 131.2.

rectángulos (como en la fig. 131.1), sino en los vértices de unos paralelogramos. En este caso, por la figura de difracción se pueden determinar no sólo los períodos d_1 y d_2 , sino también el ángulo α .

Una figura de difracción análoga a la representada en la fig. 131.1 la da cualquier estructura periódica bidimensional, como, por ejemplo, un sistema de pequeños orificios o un sistema de pequeñas esferas opacas.

Para que aparezcan los máximos de difracción es necesario que el período d de la estructura sea mayor que λ . En el caso contrario las condiciones (131.1) y (131.2) sólo pueden ser satisfechas con valores nulos de m_1 y m_2 (porque el módulo de $\sin \varphi$ no puede ser mayor que la unidad).

La difracción se observa también en las estructuras tridimensionales, es decir, en las formaciones espaciales que presentan periodicidad en tres direcciones que no están en un mismo plano. Estructuras de este tipo son todos los cuerpos cristalinos. Pero su período ($\sim 10^{-10}$ m) es demasiado pequeño para que se pueda observar la difracción con luz visible. En el caso de los cristales la condición $d > \lambda$ sólo se cumple por los rayos X. La difracción de rayos X por cristales se observó por primera vez en 1913 en el experimento de

Laue, Friedrich y Knipping (a Laue le pertenece la idea, a los otros dos autores, la realización práctica).

Hallemos las condiciones para la formación de los máximos de difracción por una estructura tridimensional. En las direcciones en que las propiedades de la estructura manifiestan periodicidad, se trazan los ejes de coordenadas x , y y z (fig. 131.2). La estructura podemos figurárnosla como un conjunto de cadenas lineales paralelas y equidistantes de elementos estructurales situadas a lo largo de uno de los ejes de coordenadas. Vamos a examinar la acción de una cadena aislada, paralela, por ejemplo, al eje x (fig. 131.3). Supongamos que sobre ella incide un haz de rayos paralelos que forman con el eje x un ángulo α_0 . Cada elemento estructural es una fuente de ondas secundarias. A las fuentes vecinas llega la onda

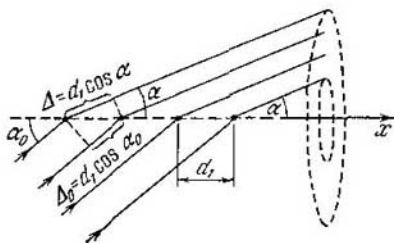


Fig. 131.3.

incidente con una diferencia de fase $\delta_0 = 2\pi \Delta_0/\lambda$, en la que $\Delta_0 = d_1 \cos \alpha_0$ (d_1 es el período de la estructura a lo largo del eje x). Además, entre las ondas secundarias que se propagan en las direcciones que forman con el eje x un ángulo α (todas estas direcciones se encuentran a lo largo de las generatrices de un cono, de eje del cual sirve el eje x), se produce una diferencia de marcha adicional $\Delta = d_1 \cos \alpha$. Las oscilaciones debidas a distintos elementos estructurales se reforzarán entre sí en aquellas direcciones para las cuales

$$d_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = \pm m_1 \lambda \quad (m_1 = 0, 1, 2, \dots). \quad (131.3)$$

A cada valor de m_1 le corresponde su cono de direcciones a lo largo de las cuales se obtienen los máximos de intensidad de una cadena, paralela al eje x , tomada por separado. El eje de este cono coincide con el eje x .

La condición de máximo para una cadena paralela al eje y tiene la forma

$$d_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) = \pm m_2 \lambda \quad (m_2 = 0, 1, 2, \dots), \quad (131.4)$$

en la que d_2 es el período de la estructura en la dirección del eje y ; β_0 , el ángulo entre el haz incidente y el eje y , y β , el ángulo que

forman con el eje y las direcciones a lo largo de las cuales se obtienen los máximos de difracción. A cada valor de m_2 le corresponde un cono de direcciones cuyo eje coincide con el y .

En las direcciones que satisfacen simultáneamente las condiciones (131.3) y (131.4) se produce el reforzamiento mutuo de las oscilaciones de las fuentes que se encuentran en un mismo plano perpendicular al eje z (estas fuentes forman una estructura bidimensional). Las direcciones de los máximos de intensidad se encuentran a lo largo de las líneas de intersección de los conos de direcciones, uno de los cuales se determina por la condición (131.3) y el otro por la condición (131.4).

Finalmente, para una cadena paralela al eje z , las direcciones de los máximos se determinan por la condición

$$d_3 (\cos \gamma - \cos \gamma_0) = \pm m_3 \lambda \quad (m_3 = 0, 1, 2, \dots), \quad (131.5)$$

en la que d_3 es el período de la estructura en la dirección del eje z ; γ_0 , el ángulo entre el haz incidente y el eje z , y γ , el ángulo que forman con el eje z las direcciones a lo largo de las cuales se obtienen los máximos de difracción. Como en los casos anteriores, a cada valor de m_3 le corresponde un cono de direcciones cuyo eje es el eje z .

En las direcciones que satisfacen simultáneamente las condiciones (131.3), (131.4) y (131.5) se produce el reforzamiento mutuo de las oscilaciones de todos los elementos que forman la estructura espacial. Como resultado surgen los máximos de difracción de la estructura tridimensional. Las direcciones de estos máximos se encuentran en las líneas de intersección de tres conos cuyos ejes son paralelos a los de coordenadas.

Las condiciones que hemos hallado

$$\begin{aligned} d_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) &= \pm m_1 \lambda, \\ d_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) &= \pm m_2 \lambda, \quad (m_1 = 0, 1, 2, \dots) \\ d_3 (\cos \gamma - \cos \gamma_0) &= \pm m_3 \lambda \end{aligned} \quad (131.6)$$

se conocen con el nombre de *fórmulas de Laue*. A cada dirección (α, β, γ) determinada por estas fórmulas le corresponden tres índices numéricos m_1, m_2 y m_3 enteros. El valor máximo del módulo de la diferencia de los cosenos es igual a 2. Por eso las condiciones (131.6) pueden cumplirse con valores distintos de cero de los índices m sólo si λ no es mayor que $2d$.

Los ángulos α, β y γ no son independientes. Por ejemplo, en el caso de un sistema de coordenadas rectangulares están ligados por la relación

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (131.7)$$

De este modo, cuando se dan $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ y λ , los ángulos α, β y γ que determinan las direcciones de los máximos se pueden hallar

resolviendo un sistema de cuatro ecuaciones. Si el número de ecuaciones supera al de incógnitas, el sistema sólo tiene solución si cumple determinadas condiciones (solamente cumpliendo estas condiciones los tres conos pueden cortarse uno a otro según una línea).

El sistema de ecuaciones (131.6) y (131.7) sólo tiene solución para ciertas longitudes de onda completamente determinadas (λ se puede considerar como la cuarta incógnita, cuyos valores, obtenidos de la solución del sistema, dan aquellas longitudes de onda con las cuales se observan los máximos). A cada uno de estos valores de λ le corresponde, en general, un solo máximo. Sin embargo, también se pueden obtener varios máximos dispuestos simétricamente.

Si la longitud de onda es fija (la radiación es monocromática), el sistema de ecuaciones se puede hacer compatible variando los

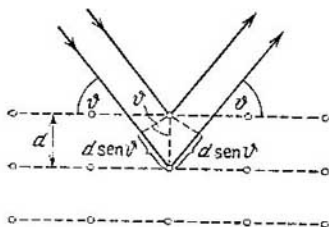


Fig. 131.4.

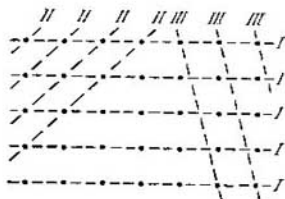


Fig. 131.5.

valores de α_0 , β_0 y γ_0 , es decir, haciendo girar la estructura espacial con respecto a la dirección del rayo incidente.

No hemos tocado el problema de cómo los rayos procedentes de distintos elementos estructurales se hacen coincidir en un punto de la pantalla. En el caso de la luz visible se consigue esto por medio de una lente. Cuando se trata de rayos X esto no se puede lograr con la lente, porque el índice de refracción de estos rayos en todas las substancias es prácticamente igual a la unidad. Por eso la interferencia de las ondas secundarias se logra utilizando haces muy estrechos de rayos, que sin lente dan sobre la pantalla (o placa fotográfica) manchas de dimensiones muy pequeñas.

El científico ruso G. V. Wulf y los físicos ingleses W. H. y W. L. Bragg demostraron, independientemente el uno de los otros, que el cálculo de la figura de difracción por una red cristalina se puede efectuar por el sencillo procedimiento siguiente. Por los nudos de la red cristalina se hacen pasar planos paralelos equidistantes (fig. 131.4), que llamaremos capas atómicas. Si la onda que incide sobre el cristal es plana, la envolvente de las ondas secundarias

generadas por los átomos que se encuentran en una de estas capas también será un plano. Por lo tanto, la acción total de los átomos de una capa podemos figurárnosla en forma de una onda plana que se refleja en una superficie cubierta de átomos de acuerdo con la ley de la reflexión ordinaria.

Las ondas planas secundarias reflejadas en distintas capas atómicas son coherentes e interferirán entre sí de un modo semejante a como lo hacen las ondas que emiten en una dirección dada distintas rendijas de una red de difracción. En este caso, lo mismo que en el de una red, las ondas secundarias se extinguen prácticamente una a otra en todas las direcciones, excepto en aquellas para las cuales la diferencia de marcha entre las ondas vecinas es múltiplo de λ . En la fig. 131.4 se ve que la diferencia de marcha de dos ondas reflejadas en capas atómicas contiguas es igual a $2d \sin \theta$, donde d es el período de identidad del cristal en dirección perpendicular a las capas que se consideran, y θ , el ángulo, complementario del de incidencia, llamado *ángulo de deslizamiento* de los rayos incidentes. Por lo tanto, las direcciones en que se obtienen los máximos de difracción se determinan por la condición

$$2d \sin \theta = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (131.8)$$

Esta relación se llama *fórmula de Bragg—Wulf*.

Las capas atómicas se pueden tomar en un cristal por muchos procedimientos (fig. 131.5). Cada sistema de capas puede dar un máximo de difracción si para él se cumple la condición (131.8). Pero sólo tienen una intensidad apreciable aquellos máximos que se obtienen a expensas de la reflexión en capas cubiertas con suficiente densidad de átomos (por ejemplo, las capas I y II en la fig. 131.5).

Advertimos que el cálculo por la fórmula de Bragg—Wulf y el cálculo por las fórmulas de Laue (véase (131.6)) conducen a resultados coincidentes.

La difracción de los rayos X por los cristales tiene dos aplicaciones fundamentales: la investigación de la composición espectral de la radiación X (*espectroscopia de rayos X*) y el estudio de la estructura de los cristales (*análisis estructural por rayos X*).

Determinando las dimensiones de los máximos que se obtienen en la difracción por cristales, cuya estructura se conoce, de la radiación X que se investiga, se pueden calcular las longitudes de onda. Inicialmente, para determinar las longitudes de onda se emplearon los cristales del sistema cúbico, hallando sus distancias interplanares por la densidad y la masa molecular relativa del cristal.

En el método de análisis estructural propuesto por Laue un haz de rayos X se dirige sobre un monocristal fijo. Para cada sistema de capas cubiertas con suficiente densidad de átomos, se encuentra en la radiación una longitud de onda con la cual se cumple

la condición (131.8). Por eso, en la placa fotográfica que se coloca detrás del cristal se obtiene (una vez revelada) un conjunto de manchitas negras. La disposición mutua de estas manchitas refleja la simetría del cristal. Por las distancias entre ellas y por su intensidad se consigue hallar la distribución de los átomos en el cristal y las distancias entre ellos. En la fig. 131.6 se da el diagrama de Laue del berilo (mineral del grupo de los silicatos).

En el método de análisis estructural elaborado por Debye y Scherrer se utiliza una radiación X monocromática y muestras policristalinas. La substancia que se va a investigar se reduce a polvo, con el cual se prensa una muestra en forma del alambrito. Esta muestra se coloca coincidiendo con el eje de una cámara cilíndrica en cuya

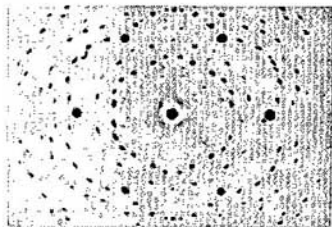


Fig. 131.6.

pared lateral se extiende una película fotográfica (fig. 131.7). En la enorme cantidad de cristalitos orientados al azar hay un conjunto de ellos para los cuales se cumple la condición (131.8), con la particularidad de que el rayo difractado por distintos cristalitos se

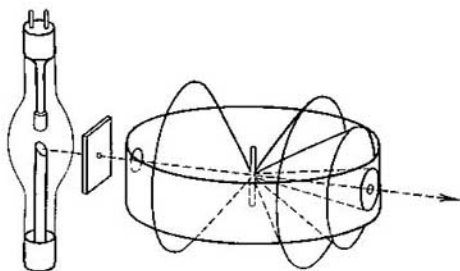


Fig. 131.7.

encontrará en todos los planos posibles. Como resultado, para cada sistema de capas atómicas y cada m se obtiene no una dirección de máximo, sino un cono de direcciones cuyo eje coincide con la dirección del rayo incidente (véase la fig. 131.7). La figura que se obtiene

en la película (diagrama de Debye) tiene la forma que muestra la fig. 131.8. Capa par de rayas situadas simétricamente corresponde



Fig. 131.8.

a uno de los máximos de difracción que satisfacen la condición (131.8) con un cierto valor de m . Descifrando el roentgenograma se puede determinar la estructura del cristal.

§ 132. Poder separador de un objetivo

Sea una pantalla opaca con un orificio circular de radio b , practicado en ella, sobre la cual incide una onda luminosa plana. El número de zonas de Fresnel que descubre el orificio para un punto P , que se encuentra enfrente de su centro y a la distancia l de él, se puede hallar por la fórmula (128.2), suponiendo en ella $a = \infty$, $r_0 = b$ y $b = l$. En definitiva se obtiene

$$m = \frac{b^2}{l\lambda} \quad (132.1)$$

(compárese con (129.17)).

Lo mismo que en el caso de una rendija, en dependencia del parámetro (132.1) tiene lugar la aproximación de la óptica geométrica, la difracción de Fresnel o, finalmente, la difracción de Fraunhofer (véase (129.16)).

La figura de difracción de Fraunhofer por el orificio circular se puede observar sobre una pantalla situada en el plano focal de una lente

colocada detrás del orificio, dirigiendo sobre él una onda luminosa plana. Esta figura tiene la forma de una mancha brillante central rodeada de anillos oscuros y brillantes que se suceden alternativamente (fig. 132.1). El cálculo correspondiente da que el primer mínimo se encuentra del centro de la figura de difracción a la distancia angular

$$\varphi_{\min} = \arcsen 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad (132.2)$$

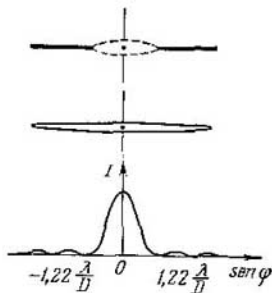


Fig. 132.1.

donde D es el diámetro del orificio (compárese con (129.8)). Si $D \gg \lambda$, se puede considerar que

$$\varphi_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (132.3)$$

Una parte aplastante (cerca de un 84 %) del flujo luminoso que pasa por el orificio va a parar a la región de la mancha brillante central. La intensidad del primer anillo brillante es en total de un 1,74 % y la del segundo, de un 0,41 % de la intensidad de dicha mancha. La intensidad de los demás anillos brillantes es aún menor. Por eso, en primera aproximación, se puede considerar que la figura de difracción consta solamente de una mancha brillante cuyo radio angular viene determinado por la fórmula (132.2). Esta mancha es en esencia la imagen de una fuente puntual de luz infinitamente lejana (sobre el orificio incide una onda luminosa plana).

La figura de difracción no depende de la distancia entre el orificio y la lente. En particular, será la misma en el caso en que los bordes del orificio coincidan con los de la lente. De aquí se infiere que ni la lente más perfecta puede dar una imagen óptica ideal. A causa de la naturaleza ondulatoria de la luz, la imagen de un punto que dé la lente tiene la forma de una manchita, que es el máximo central de la figura de difracción. La dimensión angular de esta manchita disminuye a medida que aumenta el diámetro D de la montura de la lente.

Cuando la distancia angular entre dos puntos es muy pequeña, sus imágenes obtenidas con cualquier instrumento óptico se superponen una a otra y dan una sola mancha brillante. Por consiguiente, dos puntos muy próximos no serán percibidos por el instrumento separadamente o, como suele decirse, no serán resueltos por él. Por eso, por muy grandes que sean las dimensiones de la imagen, no se verán en ella los detalles correspondientes.

Designemos por $\delta\varphi$ la distancia angular mínima entre dos puntos con la cual aún pueden ser separados por el instrumento óptico. La magnitud recíproca de $\delta\varphi$ se llama *poder separador* o *de resolución del instrumento*:

$$R = \frac{1}{\delta\varphi}. \quad (132.4)$$

Halleemos el poder separador de un antejo o de un aparato fotográfico para el caso en que se observan o se fotografian objetos muy alejados. Con esta condición, los rayos que van al objetivo desde cada punto del objeto se pueden considerar paralelos y aplicar la fórmula (132.2). De acuerdo con el criterio de Rayleigh, dos puntos próximos se podrán aún distinguir separadamente si el centro del máximo de difracción central de uno de ellos coincide con el borde del máximo central del otro (es decir, con su primer

mínimo). En la fig. 132.2 se ve que esto ocurre si la distancia angular $\delta\psi$ entre los puntos es igual al radio angular (132.2). El diámetro del portaobjetivo D es mucho mayor que la longitud de onda λ .

Por lo tanto, se puede considerar que

$$\delta\psi = 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

De donde

$$R = \frac{D}{1,22\lambda}. \quad (132.5)$$

De esta fórmula se deduce que el poder separador del objetivo será tanto mayor cuanto mayor sea su diámetro.

El diámetro de la pupila del ojo humano, cuando la iluminación es normal, es igual, aproximadamente, a 2 mm. Sustituyendo este valor en la fórmula (132.5) y tomando $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-3}$ mm, se obtiene:

$$\delta\psi = 1,22 \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,305 \cdot 10^{-3} \text{ rd} \approx 1'.$$

Por consiguiente, la distancia angular mínima entre dos puntos, a la cual el ojo los percibe aún separadamente, es igual a un minuto angular. Es curioso que la distancia entre los elementos fotosensibles contiguos de la retina del ojo corresponde a esta distancia angular.

§ 133. Holografía

La holografía (del griego: *holos*, completo y *grafos*, escribir, es decir, «escritura completa») es un procedimiento especial de fijar en una placa fotográfica la estructura de una onda luminosa reflejada en un objeto. Cuando esta placa (*holograma*) se ilumina con un haz luminoso, la onda registrada en ella se reconstruye casi en su forma inicial, de manera que, al percibirla el ojo, la sensación visual es prácticamente igual que la sentida al observar el objeto mismo.

La holografía fue patentada en 1947 por el físico inglés D. Gabor. Pero la realización completa de su idea sólo fue posible después de que en 1960 se crearon las fuentes de luz de alto grado de coherencia llamadas láseres. El esquema inicial de Gabor fue perfeccionado por los físicos norteamericanos E. N. Leith y J. Upatnieks, los cuales obtuvieron en 1963 los primeros hologramas de láser. El científico soviético Yu. N. Denisiuk propuso en 1962 un método original de fijación de hologramas en una capa gruesa de emulsión. Por este procedimiento, a diferencia de los hologramas en capa de emulsión fina, se consigue una imagen en color del objeto.

Nosotros vamos a limitarnos a estudiar un método elemental de obtención de hologramas sobre emulsión en capa delgada. En la fig. 133.1, *a* se da el esquema de la instalación para obtener los hologramas, y en la fig. 133.1, *b*, el esquema de la reconstrucción de la imagen. El haz luminoso emitido por el láser, ensanchado por medio de un sistema de lentes, se divide en dos partes. Una de ellas se refleja en un espejo hacia la placa fotográfica y forma el denominado haz de referencia *1*. La otra parte incide sobre la placa después de reflejarse en el objeto que se fotografía; esta parte constituye el haz objeto *2*. Ambos haces deben ser coherentes. Este requisito se cumple, ya que la radiación de láser posee un alto grado de coherencia espacial (las oscilaciones luminosas son coherentes por toda la sección transversal del haz de láser). Los haces de referencia y objeto, superponiéndose, originan la figura de interferencia que se fija en la placa fotográfica. Esta, una vez expuesta y revelada es el *holograma*. En la formación del holograma participan dos haces de luz, por lo que el esquema descrito para obtener estos hologramas se llama de dos haces.

Para reconstruir la imagen, la placa fotográfica revelada se coloca, respecto de la fuente de luz, tal como estaba al hacer la fotografía y se ilumina con el haz de luz de referencia (la parte del haz

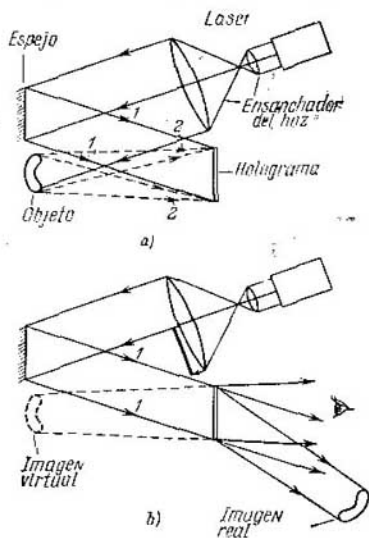


Fig. 133.1.

de láser que iluminaba el objeto al fotografiarlo, se tapa ahora). El haz de referencia se difracta en el holograma y, como resultado, surge una onda que tiene exactamente la misma estructura que la reflejada en el objeto. Esta onda da una imagen virtual de dicho objeto, la cual es percibida por el ojo del observador. Además de la onda que forma la imagen virtual, se produce otra que da una imagen real del objeto. Esta imagen real es «seudoscópica», es decir, que su relieve es inverso al del objeto: los sitios convexos aparecen en ella cóncavos y viceversa.

Examinemos el carácter del holograma y el proceso de reconstruc-

ción de la imagen. Supongamos que sobre la placa fotográfica inciden dos haces luminosos, paralelos y coherentes, que marchan formando entre sí un ángulo ψ (fig. 133.2). El 1 es el haz de referencia y el 2, el haz objeto (el objeto es en este caso un punto infinitamente lejano). Para simplificar supondremos que el haz 1 incide sobre la placa normalmente. Todos los resultados que se obtienen a continuación también son válidos cuando el haz de referencia incide oblicuamente, pero en este caso las fórmulas son más «voluminosas».

A causa de la interferencia del haz de referencia y el haz objeto, sobre la placa se forma un sistema de máximos y mínimos de intensidad, rectilíneos, que se suceden alternativamente. Supongamos

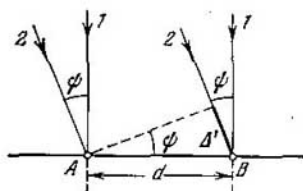


Fig. 133.2.

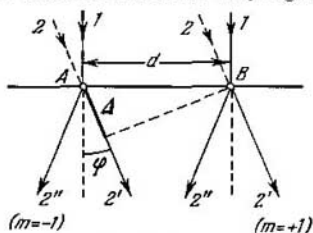


Fig. 133.3.

que los puntos A y B corresponden a los centros de dos máximos de interferencia vecinos. Entonces la diferencia de marcha Δ' es igual a λ . En la fig. 133.2 se ve que $\Delta' = d \operatorname{sen} \psi$, luego

$$d \operatorname{sen} \psi = \lambda. \quad (133.1)$$

Una vez fijada en la placa (mediante la exposición y el revelado) la figura de interferencia, dirigimos sobre ella el haz de referencia 1. Para este haz la placa desempeña el papel de red de difracción, cuyo período d se determina por la fórmula (133.1). Esta red tiene la peculiaridad de que su capacidad de transmisión varía en dirección perpendicular a los «trazos» según una ley cosinusoidal (en las redes que se estudiaron en el § 130 variaba a saltos: claro—oscuro—claro—oscuro y así sucesivamente). Esta peculiaridad hace que la intensidad de todos los máximos de difracción de orden superior al 1º sea prácticamente nula.

Al iluminar la placa con el haz de referencia (fig. 133.3) se produce una figura de difracción cuyos máximos forman con la normal a la placa los ángulos φ , determinables por la condición

$$d \operatorname{sen} \varphi = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1) \quad (133.2)$$

(compárese con la fórmula (130.5)). El máximo correspondiente a $m = 0$ se encuentra en la prolongación del haz de referencia. El máximo correspondiente a $m = +1$ tiene la misma dirección

que tenía durante la exposición el haz objeto 2 (compárense las fórmulas (133.1) y (133.2)). Además surge el máximo que corresponde a $m = -1$. Puede demostrarse que el resultado obtenido es correcto también en el caso en que el haz objeto 2 no es paralelo sino divergente. Entonces el máximo correspondiente a $m = +1$ tiene el carácter de un haz de rayos divergente 2' (que da una imagen virtual del punto de que partían los rayos 2 durante la exposición); en cambio, el máximo correspondiente a $m = -1$ tiene el carácter de un haz de rayos convergente 2'' (que forma la imagen real del punto de que partían los rayos 2 durante la exposición).

Para obtener el holograma, la placa se ilumina con el haz de referencia 1 y con el conjunto de haces divergentes 2 reflejados en distintos puntos del objeto. En la placa aparece una figura de interferencia compleja que se forma como resultado de la superposición de las figuras que dan cada uno de los haces 2 por separado. Cuando el holograma se ilumina con el haz de referencia 1 resultan reconstruidos todos los haces 2, es decir, toda la onda luminosa que se reflejó en el objeto (a ella corresponde $m = +1$). Además de ésta, surgen otras dos ondas (correspondientes a $m = 0$ y $m = -1$). Pero estas ondas se propagan en otras direcciones y no impiden percibir la onda que origina la imagen virtual del objeto (véase la fig. 133.1).

La imagen del objeto que da el holograma es tridimensional. Puede observarse desde distintas posiciones. Si durante la exposición los objetos más próximos tapaban a los más lejanos, echándose hacia un lado se puede mirar por detrás del objeto más cercano (o mejor dicho, de su imagen) y ver los que él ocultaba. Esto se explica porque al desplazarnos hacia un lado percibimos la imagen reconstruida de la parte periférica del holograma, sobre la cual, durante la exposición, incidían también los rayos reflejados en los objetos ocultos. Al observar las imágenes de los objetos próximos y lejanos hay que acomodar la vista de distinto modo, lo mismo que cuando se observan los objetos mismos.

Si el holograma se rompe en varios trozos, cada uno de ellos, al ser iluminado, da la misma figura que el holograma inicial. Pero cuanto menor sea la parte del holograma que se utilice para la reconstrucción de la imagen, tanto menor será su nitidez. Esto es fácil de comprender teniendo en cuenta que si disminuye el número de trazos de una red de difracción, su poder separador también disminuye (véase la fórmula (130.19)).

Las posibles aplicaciones de la holografía son muy variadas. Una lista muy incompleta de ellas la forman el cine, la televisión y el microscopio holográficos y el control de la calidad del acabado de las piezas. En la literatura se puede encontrar la afirmación de que el invento de la holografía es comparable por sus consecuencias con el de la radiocomunicación.

CAPÍTULO XIX

POLARIZACIÓN DE LA LUZ

§ 134. Luz natural y luz polarizada

Recordaremos que se llama luz polarizada aquella, en la cual la dirección de las oscilaciones del vector luz están ordenadas de algún modo (véase el § 110). En la luz visible las oscilaciones en distintas direcciones se suceden unas a otras rápida y desordenadamente.

Consideremos dos oscilaciones eléctricas perpendiculares entre sí que se efectúen a lo largo de los ejes x e y y entre las cuales haya una diferencia de fase δ :

$$E_x = A_1 \cos \omega t, \quad E_y = A_2 \cos (\omega t + \delta). \quad (134.1)$$

La intensidad resultante E es la suma vectorial de las intensidades E_x y E_y (fig. 134.1). El ángulo φ entre las direcciones de los vectores E_x y E_y se determina por la expresión

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_2 \cos (\omega t + \delta)}{A_1 \cos \omega t}. \quad (134.2)$$

Si la diferencia de fase δ sufre variaciones caóticas casuales, el ángulo φ , es decir, la dirección del vector luz E también experimentará variaciones bruscas desordenadas. De acuerdo con esto, la luz natural podemos figurárnosla como la superposición de dos ondas electromagnéticas no coherentes de igual intensidad, polarizadas en planos perpendiculares entre sí. Esta representación simplifica mucho el estudio del paso de la luz natural a través de los dispositivos polarizadores.

Supongamos que las ondas luminosas E_x y E_y son coherentes y que δ es igual a cero o a π . Entonces, según (134.2)

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{A_2}{A_1} = \text{const.}$$

Por consiguiente, la oscilación resultante se realiza en una dirección fija, es decir, la onda resulta polarizada plana.

En el caso en que $A_1 = A_2$ y $\delta = \pm \pi/2$.

$$\operatorname{tg} \varphi = \mp \operatorname{tg} \omega t$$

($\cos (\omega t \pm \pi/2) = \mp \operatorname{sen} \omega t$). De aquí se infiere que el plano de oscilaciones gira alrededor de la dirección del rayo con una velocidad angular igual a la frecuencia de oscilación ω . La luz estará, en este caso, polarizada circularmente.

Para comprender el carácter de la oscilación resultante en el caso de un valor arbitrario constante de δ , tomamos en considera-

cón que la magnitud (134.1) es la coordenada del extremo del vector resultante E (fig. 134.2). Por el estudio de las oscilaciones (véase el § 57 del tomo 1º) sabemos que dos oscilaciones armónicas de igual frecuencia, perpendiculares entre sí, en el caso general dan al componerse un movimiento elíptico (en particular, se puede obtener un movimiento rectilíneo o un movimiento circular). Análogamente, el punto cuyas coordenadas vienen determinadas por la expresión (134.1), es decir, el extremo del vector E , se mueve siguiendo una elipse. Por consiguiente, dos ondas luminosas, plano-polarizadas, coherentes, cuyos planos de oscilaciones sean perpendiculares entre sí, al superponerse dan una onda luminosa polarizada elípticamente. Cuando la diferencia de fase δ es igual a cero o a π ,

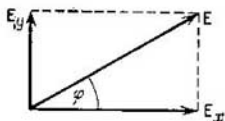


Fig. 134.1.

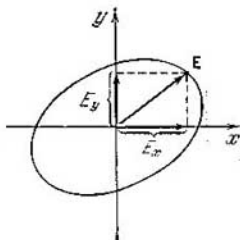


Fig. 134.2.

la elipse degenera en una recta y se obtiene luz polarizada plana. Si $\delta = \pm\pi/2$ y las amplitudes de las ondas que se componen son iguales, la elipse se transforma en circunferencia y se obtiene luz polarizada circularmente.

En dependencia del sentido en que gire el vector E , la polarización puede ser elíptica o circular dextrógira o levógira. Si con respecto a sentido contrario al del rayo, el vector E gira en el sentido de las agujas del reloj, la polarización es *dextrógira*, en el caso contrario será *levógira*.

Al plano en el cual oscila el vector luz de una onda polarizada para le daremos el nombre de *plano de oscilaciones*. Por razones históricas se llamó *plano de polarización* no al plano en que oscila el vector E , sino al plano perpendicular a él.

La luz polarizada plana se puede obtener de la natural valiéndose de los dispositivos llamados *polarizadores*. Estos dispositivos dejan pasar libremente las oscilaciones paralelas al plano que llamaremos *de polarizador*, y detienen total o parcialmente las oscilaciones perpendiculares a dicho plano. Al polarizador que sólo detiene parcialmente las oscilaciones perpendiculares a su plano lo llamaremos *imperfecto*. Al polarizador ideal, que detiene totalmente las

oscilaciones perpendiculares a su plano y que no debilita las oscilaciones paralelas a éste, lo nombraremos simplemente polarizador.

A la salida de un polarizador imperfecto se obtiene luz en la cual las oscilaciones de una dirección prevalecen sobre las de otras direcciones. Esta luz se llama *polarizada parcialmente*. Se puede considerar como una mezcla de luz natural y polarizada plana. La luz parcialmente polarizada, lo mismo que la natural, se puede representar como la superposición de dos ondas polarizadas planas no coherentes cuyos planos de oscilaciones son perpendiculares

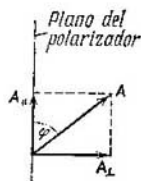


Fig. 134.3.

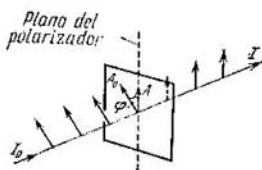


Fig. 134.4.

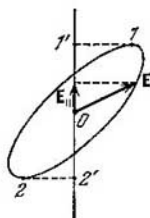


Fig. 134.5.

entre sí. La diferencia consiste en que, en el caso de la luz natural la intensidad de estas ondas es igual, mientras que en el caso de la parcialmente polarizada, es distinta.

Si a través de un polarizador se hace pasar luz parcialmente polarizada, al girar el dispositivo alrededor de la dirección del rayo, la intensidad de la luz transmitida variará entre los límites de $I_{\text{máx}}$ a $I_{\text{mín}}$, efectuándose el paso de uno de estos valores al otro durante el giro en un ángulo igual a $\pi/2$ (en una vuelta completa se alcanzará dos veces el valor máximo de la intensidad y dos veces el mínimo). La expresión

$$P = \frac{I_{\text{máx}} - I_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}}} \quad (134.3)$$

se llama *grado de polarización*. Para la luz polarizada plana $I_{\text{mín}} = 0$ y $P = 1$; para la luz natural $I_{\text{máx}} = I_{\text{mín}}$ y $P = 0$. El concepto de grado de polarización es inaplicable a la luz polarizada elípticamente (en esta luz las oscilaciones están totalmente ordenadas).

Las oscilaciones de la amplitud A que se realizan en un plano que forma con el de polarización un ángulo φ se pueden descomponer en dos oscilaciones cuyas amplitudes sean $A_{\parallel} = A \cos \varphi$ y $A_{\perp} = A \sin \varphi$ (fig. 134.3; el rayo es perpendicular al plano del dibujo). La primera oscilación pasará a través del polarizador; la segunda será detenida. La intensidad de la onda transmitida será proporcional a $A_{\parallel}^2 = A^2 \cos^2 \varphi$, es decir, igual a $I \cos^2 \varphi$, donde I es la intensidad

de la oscilación cuya amplitud es A . Por lo tanto, la oscilación paralela al plano del polarizador lleva una parte de la intensidad igual a $\cos^2 \varphi$. En la luz natural todos los valores de φ son igualmente probables. Por eso, la parte de la luz transmitida por el polarizador será igual al valor medio de $\cos^2 \varphi$, es decir, a $1/2$. Cuando el polarizador se gira alrededor de la dirección del rayo natural, la intensidad de la luz transmitida sigue siendo la misma, varía solamente la orientación del plano de oscilaciones de la luz que sale del dispositivo.

Sea un polarizador sobre el cual incide luz polarizada plana de amplitud A_0 e intensidad I_0 (fig. 134.4). A través del dispositivo pasa la componente de la oscilación cuya amplitud es $A = A_0 \cos \varphi$, en la que φ es el ángulo entre el plano de oscilaciones de la luz incidente y el plano del polarizador. Por consiguiente, la intensidad I de la luz transmitida se determina por la expresión

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (134.4)$$

La relación (134.4) es la *ley de Malus*.

Interpongamos en el camino de un rayo de luz natural dos polarizadores cuyos planos formen un ángulo φ . Del primer polarizador saldrá luz polarizada plana cuya intensidad I_0 constituirá la mitad de la intensidad I_{nat} de la luz natural. Según la ley de Malus, del segundo polarizador saldrá luz cuya intensidad será $I_0 \cos^2 \varphi$. De este modo, la intensidad de la luz transmitida por los dos polarizadores será:

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{nat}} \cos^2 \varphi. \quad (134.5)$$

La intensidad máxima, igual a $1/2 I_{\text{nat}}$, se obtiene cuando $\varphi = 0$ (los polarizadores son paralelos). Si $\varphi = \pi/2$, la intensidad es nula, porque los polarizadores cruzados no dejan pasar luz.

Supongamos que una luz polarizada elípticamente incide sobre un polarizador. El dispositivo deja pasar el componente E_{\parallel} , del vector \mathbf{E} , cuya dirección es la del plano del polarizador (fig. 134.5). Este componente alcanza su valor máximo en los puntos 1 y 2. Por lo tanto, la amplitud de la luz polarizada plana que sale del dispositivo es igual a la longitud del segmento OI' . Haciendo girar el polarizador alrededor de la dirección del rayo, observaremos la variación de la intensidad entre los límites de $I_{\text{máx}}$ (que se obtiene cuando el plano del polarizador coincide con el semieje mayor de la elipse) a $I_{\text{mín}}$ (que se alcanza cuando el plano del polarizador coincide con el semieje menor de la elipse). Este mismo carácter tiene la variación de la intensidad de la luz que se obtiene al girar el polarizador en el caso de la luz polarizada parcialmente. Si la luz está polarizada circularmente, el giro del polarizador no va acompañado (como en el caso de la luz natural) de variación de la intensidad de la luz transmitida por el dispositivo.

§ 135. Polarización por reflexión y refracción

Si el ángulo de incidencia de la luz sobre el límite de separación de dos dieléctricos (por ejemplo, en la superficie de una lámina de vidrio) es distinto de cero, los rayos reflejado y refractado resultan parcialmente polarizados¹). En el rayo reflejado prevalecen las oscilaciones perpendiculares al plano de incidencia (en la fig. 135.1 estas oscilaciones se indican con puntos), y en el refractado, las oscilaciones paralelas al plano de incidencia (en la figura se representan con flechitas bilaterales). El grado de polarización depende del ángulo de incidencia.

Designemos por θ_{Br} el ángulo que satisface la condición

$$\operatorname{tg} \theta_{Br} = n_{12} \quad (135.1)$$

(n_{12} es el índice de refracción del segundo medio respecto del primero). Si el ángulo de incidencia θ_1 es igual a θ_{Br} , el rayo reflejado estará totalmente polarizado (contendrá únicamente oscilaciones perpendiculares al plano de incidencia). El grado de polarización del rayo refractado, cuando el ángulo de incidencia es igual a θ_{Br} , alcanza su valor máximo, pero

sigue estando polarizado sólo parcialmente.

La relación (135.1) se conoce con el nombre de *ley de Brewster*, y el ángulo θ_{Br} se llama *ángulo de Brewster*. Es fácil cerciorarse de que cuando la luz incide bajo el ángulo de Brewster los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí.

El grado de polarización de los rayos reflejado y refractado para distintos ángulos de incidencia, se puede obtener por las *fórmulas de Fresnel*. Estas fórmulas se infieren de las condiciones que se imponen al campo electromagnético en el límite entre dos dieléctricos²). Al número de estas condiciones pertenece la igualdad de los componentes tangenciales de los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} , así como la igualdad de los componentes normales de los vectores \mathbf{D} y \mathbf{B} a ambos lados del límite de separación (por una parte hay que tomar la suma de los vectores correspondientes a las ondas incidente y reflejada, y por la otra, el vector para la onda refractada).

Las fórmulas de Fresnel establecen las relaciones entre las amplitudes complejas de las ondas incidente, reflejada y refractada. Se recordará que se llama *amplitud compleja* \tilde{A} la expresión $Ae^{i\alpha}$, en

¹) En la reflexión por una superficie conductora (por ejemplo, la superficie de un metal) se obtiene luz polarizada elípticamente.

²) Fresnel obtuvo estas fórmulas basándose en la representación de la luz como ondas elásticas que se propagan en el éter.

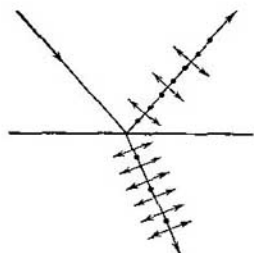


Fig. 135.1.

la que A es la amplitud ordinaria, y α , la fase inicial de la oscilación. Por consiguiente, la igualdad de dos amplitudes complejas significa la igualdad tanto de las amplitudes ordinarias como de las fases iniciales de ambas oscilaciones:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow A_1 = A_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2. \quad (135.2)$$

En el caso en que las amplitudes complejas se diferencian en el signo, las amplitudes ordinarias son iguales, pero las fases iniciales se diferencian en π ($e^{i\pi} = -1$):

$$\hat{A}_1 = -\hat{A}_2 \Rightarrow A_1 = A_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \pi. \quad (135.3)$$

Imaginémonos la onda incidente en forma de superposición de dos ondas no coherentes, en una de las cuales las oscilaciones se efectúan en el plano de incidencia, y en la otra, perpendicularmente a este plano. La amplitud compleja de la primera onda la designaremos por \hat{A}_{\parallel} , y la de la segunda, por \hat{A}_{\perp} . De un modo análogo procedemos con las ondas reflejada y refractada, designando las amplitudes de las ondas reflejadas con los mismos símbolos y añadiéndoles un apóstrofo, y las amplitudes de las ondas refractadas, con dichos símbolos y añadiéndoles dos apóstrofes. Así,

\hat{A}_{\parallel} y \hat{A}_{\perp} son las amplitudes de las ondas incidentes,
 \hat{A}'_{\parallel} y \hat{A}'_{\perp} , las amplitudes de las ondas reflejadas, y
 \hat{A}''_{\parallel} y \hat{A}''_{\perp} , las amplitudes de las ondas refractadas.

Las fórmulas de Fresnel tienen la forma siguiente¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}'_{\parallel} &= \hat{A}_{\parallel} \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\operatorname{tg}(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \\ \hat{A}'_{\perp} &= -\hat{A}_{\perp} \frac{\operatorname{sen}(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\operatorname{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \\ \hat{A}''_{\parallel} &= \hat{A}_{\parallel} \frac{2 \operatorname{sen} \vartheta_2 \cos \vartheta_1}{\operatorname{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}, \\ \hat{A}''_{\perp} &= \hat{A}_{\perp} \frac{2 \operatorname{sen} \vartheta_2 \cos \vartheta_1}{(\operatorname{sen} \vartheta_1 + \vartheta_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (135.4)$$

(ϑ_1 es el ángulo de incidencia, y ϑ_2 el ángulo de refracción de la onda luminosa). Subrayamos que las fórmulas (135.4) establecen las relaciones entre las amplitudes complejas en el límite de separación de los dieléctricos, es decir, en el punto de incidencia del rayo sobre dicho límite. De las fórmulas tercera y cuarta (135.4) se sigue que los signos de las amplitudes complejas de las ondas incidente y refractada son cualesquiera que sean los valores de los ángulos ϑ_1 y ϑ_2 (porque la suma de ϑ_1 y ϑ_2 no puede ser mayor que π). Esto

¹⁾ Por lo general, las fórmulas de Fresnel se escriben sin «circunflejo» sobre las amplitudes. No obstante, para subrayar que nos referimos a las amplitudes complejas, hemos creído conveniente escribirlas con él.

significa que al penetrar en el segundo medio, la fase de la onda no cambia bruscamente.

Cuando se estudian las relaciones de fase entre las ondas incidente y reflejada se debe tener en cuenta que para la onda polarizada perpendicularmente al plano de incidencia, a la ausencia de salto de fase durante la reflexión corresponde la coincidencia de los signos de \hat{A}_\perp y \hat{A}'_\perp (fig. 135.2, a). En cambio, para la onda polarizada en el plano de incidencia, el salto de fase está ausente en el caso en que

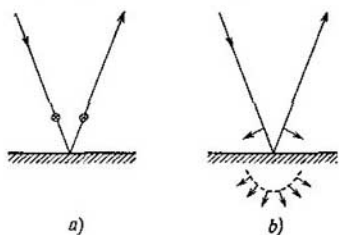


Fig. 135.2

los signos de \hat{A}_\parallel y \hat{A}'_\parallel son contrarios (fig. 1.235 b).

Las relaciones de fase entre las ondas reflejada e incidente dependen de las relaciones entre los índices de refracción n_1 y n_2 de los medios primero y segundo, y de la relación entre el ángulo de incidencia ϑ_1 y el ángulo de Brewster ϑ_{Br} (se recordará que cuando $\vartheta_1 = \vartheta_{Br}$ la suma de los ángulos ϑ_1 y ϑ_2 es igual a $\pi/2$). En la tabla 135.1 se dan los resultados que se deducen de las fórmulas prime-

ra y segunda (135.4) en los cuatro casos posibles. De esta tabla se sigue que en el caso de la incidencia bajo un ángulo menor que el de Brewster, la reflexión en el medio ópticamente más denso va

Tabla 135.1

	$\vartheta_1 < \vartheta_{Br}$ ($\vartheta_1 + \vartheta_2 < \pi/2$)	$\vartheta_1 > \vartheta_{Br}$ ($\vartheta_1 + \vartheta_2 > \pi/2$)
$n_2 > n_1$ $\vartheta_1 > \vartheta_2$	Los signos de \hat{A}'_\parallel y \hat{A}'_\perp son iguales (salto de fase igual a π) El signo de \hat{A}'_\perp es contrario al de \hat{A}_\perp (salto de fase igual a π)	El signo de \hat{A}'_\parallel es contrario al de \hat{A}_\parallel (no hay salto de fase) El signo de \hat{A}'_\perp es contrario al de \hat{A}_\perp (salto de fase igual a π)
$n_2 < n_1$ $\vartheta_1 < \vartheta_2$	El signo de \hat{A}'_\parallel es contrario al de \hat{A}_\parallel (no hay salto de fase) Los signos de \hat{A}'_\parallel y \hat{A}'_\perp son iguales (no hay salto de fase)	Los signos de \hat{A}'_\parallel y \hat{A}_\parallel son iguales (salto de fase igual a π) Los signos de \hat{A}'_\perp y \hat{A}_\perp son iguales (no hay salto de fase)

acompañada de un salto de fase igual a π , y la reflexión en el medio ópticamente menos denso transcurre sin variación de fase. Este resultado, para $\vartheta_1 = 0$, se obtuvo en el § 112. En el caso en que $\vartheta_1 < \theta_{Br}$, las relaciones de fase para las dos componentes de la onda resultan distintas. De la primera fórmula (135.4) se obtiene que si $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi/2$, es decir, cuando $\vartheta_1 = \theta_{Br}$, la amplitud $\hat{A}'_{||}$ se anula. Por consiguiente, en la onda reflejada sólo están presentes las oscilaciones perpendiculares al plano de incidencia, o sea, la onda reflejada está polarizada totalmente. De este modo, la ley de Brewster se deduce directamente de las fórmulas de Fresnel.

Si los ángulos de incidencia son pequeños, en las fórmulas (135.4) se pueden sustituir los senos y las tangentes por los ángulos mismos y suponer que los cosenos son iguales a la unidad. Además, en este caso se puede considerar que $\vartheta_1 = n_{12}\vartheta_2$ (esto se infiere de la ley de la refracción después de sustituir los senos por los ángulos). Como resultado, las fórmulas de Fresnel toman, para pequeños ángulos de incidencia, la forma

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}'_{||} &= \hat{A}_{||} \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = \hat{A}_{||} \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1}, \\ \hat{A}'_{\perp} &= -\hat{A}_{\perp} \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = -\hat{A}_{\perp} \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1}, \\ \hat{A}''_{||} &= \hat{A}_{||} \frac{2\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = \hat{A}_{||} \frac{2}{n_{12} + 1}, \\ \hat{A}''_{\perp} &= \hat{A}_{\perp} \frac{2\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = \hat{A}_{\perp} \frac{2}{n_{12} + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (135.5)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (135.5) y multiplicando por el índice de refracción del medio correspondiente las expresiones obtenidas, resultan las relaciones entre las intensidades de los rayos incidente, reflejado y refractado para el caso de ángulos de incidencia pequeños (véase la fórmula (110.9)). Con esto, por ejemplo, la intensidad de la luz reflejada I' se puede calcular como la suma de las intensidades de sus componentes $I'_{||}$ e I'_{\perp} . En definitiva se obtiene

$$I' = I \left(\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} \right)^2, \quad I'' = n_{12} I \left(\frac{2}{n_{12} + 1} \right)^2.$$

De estas fórmulas se deducen las expresiones (112.19) y (112.20) para ρ y τ .

§ 136. Polarización por doble refracción

Al pasar la luz a través de todos los cristales transparentes, excepto los que pertenecen al sistema cúbico, se observa el fenómeno llamado *doble refracción*¹⁾. Consiste este fenómeno en que la luz que

¹⁾ La doble refracción la observó por primera vez Erasmi Bartholinus, en 1669, con el espato de Islandia (variedad del carbonato de calcio CaCO_3 , cuyos cristales pertenecen al sistema hexagonal).

incide sobre el cristal se divide dentro de él en dos rayos que se propagan en general con velocidades y direcciones distintas.

Los cristales que poseen doble refracción se subdividen en *uniáxicos* y *biáxicos*. En los cristales uniáxicos uno de los rayos refractados se subordina a la ley de la refracción ordinaria, en particular, se encuentra en el mismo plano que el rayo incidente y la normal a la superficie de refringencia. Este rayo se llama *ordinario* y se designa con la letra *o*. Para el otro rayo, denominado *extraordinario* (y que se designa con la letra *e*), la relación de los senos del ángulo de incidencia y del ángulo de refracción no permanece constante cuando varía el ángulo de incidencia. Incluso en el caso de la incidencia normal de la luz sobre el cristal, el rayo extraordinario se desvía, en general, de la normal (fig. 136.1). Además, el rayo extraordinario no se suele encontrar en el mismo plano que el rayo incidente y la normal a la superficie refringente. De ejemplos de cristales uniáxicos pueden servir el espato de Islandia, el cuarzo y la turmalina. En los cristales biáxicos (mica, aljez), los dos rayos son extraordinarios, es decir, sus índices de refracción dependen de la dirección en el cristal. En adelante nos limitaremos a estudiar solamente los cristales uniáxicos.

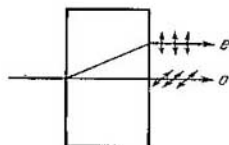


Fig. 136.1.

con la misma velocidad¹⁾. Esta dirección se llama *eje óptico* del cristal. Debe tenerse en cuenta que el eje óptico no es una línea recta que pasa por cierto punto del cristal, sino una dirección determinada en el mismo. Cualquier recta paralela a esta dirección es eje óptico del cristal.

Todo plano que pase por el eje óptico recibe el nombre de *sección principal* o *plano principal* del cristal. Por lo general se utiliza la sección principal que pasa por el rayo luminoso.

La investigación de los rayos ordinario y extraordinario demuestra que ambos rayos están totalmente polarizados en direcciones perpendiculares entre sí (véase la fig. 136.1). El plano de oscilaciones del rayo ordinario es perpendicular a la sección principal del cristal. En el rayo extraordinario las oscilaciones del vector luz se efectúan en el plano que coincide con la sección principal. Al salir del cristal los dos rayos sólo se diferencian entre sí en la dirección de polarización, por lo que los nombres de «ordinario» y «extraordinario» únicamente tienen sentido dentro del cristal.

Algunos cristales absorben más intensamente uno de los rayos que el otro. Este fenómeno se llama *dicroísmo*. Un dicroísmo muy

¹⁾ En los cristales biáxicos existen dos de estas direcciones.

fuerte a los rayos visible tiene el cristal de turmalina (mineral de composición compleja). En la práctica, 1 mm de longitud de este cristal absorbe totalmente el rayo ordinario. En los cristales del sulfato yoduro de quinina uno de los rayos se absorbe en la longitud de 0,1 mm aproximadamente. Esta circunstancia se aprovecha para fabricar el dispositivo polarizador denominado *polaroide*. Este consiste en una película de celuloide en la cual se introduce una gran cantidad de cristalitos de sulfato de iodoquinina igualmente orientados.

La doble refracción se explica por la anisotropía de los cristales. La permitividad ϵ de los cristales de sistemas no cúbicos depende de la dirección. En los cristales uniáxicos ϵ tiene distintos valores: ϵ_{\parallel} en la dirección del eje óptico, y ϵ_{\perp} en las direcciones perpendiculares a él. En otras direcciones ϵ posee valores intermedios. Según la fórmula (110,3), $n = \sqrt{\epsilon}$. Por consiguiente, de la anisotropía de ϵ se infiere que a las ondas electromagnéticas con distintas direcciones de oscilación del vector \mathbf{E} corresponden valores distintos del índice de refracción n . Por eso la velocidad de las ondas luminosas depende de la dirección de las oscilaciones del vector \mathbf{E} .

En el rayo ordinario las oscilaciones del vector luz se efectúan en dirección perpendicular a la sección principal del cristal (en la fig. 136.2 estas oscilaciones se representan por puntos sobre el rayo correspondiente). Por eso, cualquiera que sea la dirección del rayo ordinario (en la figura se indican tres direcciones: 1, 2 y 3), el vector \mathbf{E} forma con el eje óptico del cristal un ángulo recto, y la velocidad de la onda luminosa será la misma e igual a $v_0 = c/\sqrt{\epsilon_{\perp}}$. Representando la velocidad del rayo ordinario en forma de segmentos tomados en distintas direcciones, se obtiene una superficie esférica. En la fig. 136.2 se muestra la intersección de esta superficie con el plano del dibujo. Una figura como la de este dibujo se observa en cualquier sección principal, es decir, en cualquier plano que pase por el eje óptico. Imaginémonos que en un punto O dentro del cristal se encuentra una fuente puntual de luz. Entonces la esfera que hemos construido será la superficie de onda de los rayos ordinarios.

Las oscilaciones en el rayo extraordinario se efectúan en la sección principal. Por eso, para rayos distintos, las direcciones de oscilación del vector \mathbf{E} (en la fig. 136.2 estas direcciones se representan con flechitas bilaterales) forman con el eje óptico diferentes ángulos α . Para el rayo 1, el ángulo α es igual a $\pi/2$, por lo que la velocidad

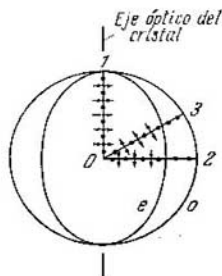


Fig. 136.2.

tiene el valor $v_o = c/\sqrt{\epsilon_{\perp}}$; para el rayo 2, el ángulo $\alpha = 0$ y la velocidad $v = c/\sqrt{\epsilon_{\parallel}}$. Para el rayo 3 la velocidad tiene un valor intermedio. Se puede demostrar que la superficie de onda de los rayos extraordinarios es un elipsoide de revolución. En los puntos de intersección con el eje óptico del cristal, este elipsoide y la esfera construida para los rayos ordinarios son tangentes.

Los cristales uniaxiales se caracterizan por tener el índice de refracción del rayo ordinario $n_o = c/v_o$, y el índice de refracción del rayo extraordinario, perpendicular al eje óptico, $n_e = c/v_e$. Esta última magnitud se llama simplemente índice de refracción del rayo extraordinario.

En dependencia de cuál de las velocidades, v_o o v_e , es mayor, los cristales uniaxiales pueden ser positivos o negativos (fig. 136.3). En

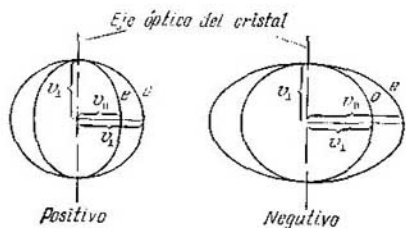


Fig. 136.3.

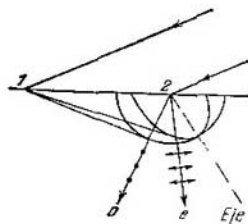


Fig. 136.4.

los cristales positivos $v_e < v_o$ (esto significa que $n_e > n_o$). En los negativos, $v_e > v_o$ ($n_e < n_o$). Es fácil recordar qué cristales son positivos y cuáles son negativos. En los cristales positivos el elipsoide de velocidades tiene su alargamiento a lo largo del eje óptico, lo que lo asocia con la idea de la raya vertical del signo «+»; y en los cristales negativos, el elipsoide de velocidades tiene el alargamiento en dirección perpendicular al eje óptico, asociándose con la idea del trazo del signo «-».

La marcha de los rayos ordinario y extraordinario en el cristal se puede determinar por medio del principio de Huygens. En la fig. 136.4 se han construido las superficies de onda de los rayos ordinario y extraordinario con centro en el punto 2, que se encuentra en la superficie del cristal. La construcción se ha hecho para el instante en que el frente de la onda incidente alcanza el punto 1. Las envolventes de todas las ondas secundarias (las ondas cuyos centros se hallan en el intervalo entre los puntos 1 y 2 no se muestran en la figura) para los rayos ordinario y extraordinario serán, evidentemente, planos. El rayo refractado o o e , que sale del punto 2, pasa

por el punto de tangencia de la envolvente con la superficie de onda correspondiente.

Se recordará que se llaman rayos las líneas a lo largo de las cuales se propaga la energía de la onda luminosa (véase el § 110). De la fig. 136.4 se sigue que el rayo ordinario o coincide con la normal a la superficie de onda correspondiente. El rayo extraordinario e , en cambio, se desvía apreciablemente de la normal a la superficie de onda.

En la fig. 136.5 se representan tres casos de incidencia normal de la luz sobre la superficie del cristal, que se diferencian por la dirección del eje óptico. En el caso *a* los rayos o y e se propagan a lo largo del eje óptico y por eso marchan sin dividirse.

En la fig. 136.5, *b* se ve que, incluso cuando la luz incide normalmente sobre la superficie refringente, el rayo extraordinario puede desviarse de la normal a esta superficie. En la fig. 136.5, *c* el eje óptico del cristal es paralelo a la superficie refringente.

En este caso, cuando la luz incide normalmente, los rayos ordinario y extraordinario marchan en una misma dirección pero se propagan con distinta velocidad, por lo que entre ellos se produce una diferencia de fase cada vez mayor. El carácter de la polarización de los rayos ordinario y extraordinario es el mismo que para los rayos representados en la fig. 136.4.

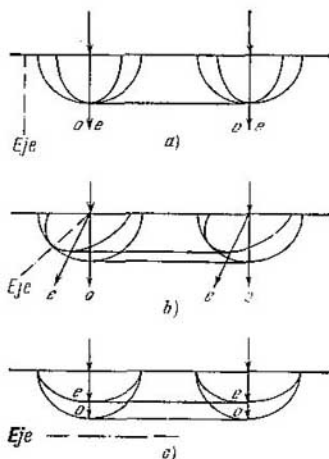


Fig. 136.5.

§ 137. Interferencia de rayos polarizados

Si se superponen dos rayos coherentes, polarizados en direcciones perpendiculares entre sí, no se puede obtener ninguna figura de interferencia con su característica sucesión alternativa de máximos y mínimos de intensidad. La interferencia se produce únicamente si las oscilaciones en los rayos que interactúan se efectúan a lo largo de una misma dirección. Las oscilaciones en dos rayos polarizados inicialmente en direcciones perpendiculares entre sí, se pueden reducir a un plano haciendo pasar estos rayos por un polarizador colocado de tal forma, que su plano no coincida con ninguno de los planos de oscilaciones de los rayos.

Veamos lo que ocurre cuando se superponen los rayos ordinario y extraordinario salidos de una lámina de cristal. Supongamos que la lámina está tallada paralelamente al eje óptico (fig. 137.1). Si la luz incide normalmente sobre la lámina, los rayos ordinario y extraordinario se propagan sin separarse, pero con velocidades distintas (véase la fig. 136.5, c). Durante el tiempo que tardan en pasar por la lámina, entre los rayos se produce la diferencia de marcha

$$\Delta = (n_o - n_e) d \quad (137.1)$$

o la diferencia de fase

$$\delta = \frac{(n_o - n_e) d}{\lambda_0} 2\pi \quad (137.2)$$

(d es el espesor de la lámina, y λ_0 , la longitud de la onda en el vacío).

De este modo, si a través de una lámina de cristal, tallada paralelamente al eje óptico, se hace pasar luz natural (fig. 137.1, a), de ella salen dos rayos, 1 y 2,

polarizados en planos mutuamente perpendiculares¹⁾, entre los cuales existirá la diferencia de fase que determina la fórmula (137.2). Interpongamos en el camino de estos rayos un polarizador. Las oscilaciones de ambos rayos, después de pasar por el polarizador, se encontrarán en un plano. Sus amplitudes serán iguales a las componentes de las amplitudes

de los rayos 1 y 2 en la dirección del plano del polarizador (fig. 137.1, b).

Los rayos que salen del polarizador han surgido como resultado del desdoblamiento de la luz obtenida de una fuente. Por eso, al parecer, deberían interferir. Pero si los rayos 1 y 2 surgen a expensas del paso de la luz natural a través de la lámina, no dan interferencia. Esto se explica muy fácilmente. Aunque los rayos ordinario y extraordinario fueron generados por una misma fuente de luz, contienen en lo fundamental oscilaciones que pertenecen a distintos trenes de ondas, emitidos por átomos separados. En el rayo ordinario las oscilaciones se deben principalmente a los trenes cuyos planos de oscilaciones están próximos a una dirección en el espacio, y en el rayo extraordinario, a los trenes cuyos planos de oscilaciones están próximos a otra dirección, perpendicular a la primera. Como los trenes de ondas aislados no son coherentes, los rayos ordinario y

¹⁾ En el cristal el rayo 1 era el extraordinario y podría haberse designado con la letra e , y el rayo 2 era el ordinario (o). Al salir del cristal desaparece el motivo de que estos rayos se llamen ordinario y extraordinario.

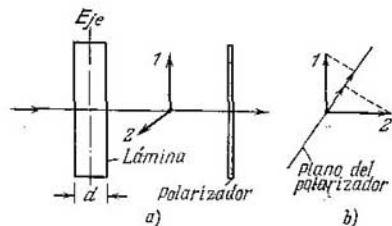


Fig. 137.1.

extraordinario, y, por lo tanto, los rayos 1 y 2, surgidos de la luz natural, tampoco son coherentes.

De otra forma se plantea la cuestión si sobre la lámina de cristal incide luz polarizada en un plano. En este caso las oscilaciones de cada tren de ondas se dividen entre los rayos ordinario y extraordinario en igual proporción (dependiente de la orientación del eje óptico de la lámina respecto del plano de oscilaciones del rayo incidente). Por eso, los rayos o y e , y, por lo tanto, los 1 y 2, resultan ser coherentes e interfieren.

§ 138. Paso de la luz polarizada plana a través de una lámina de cristal

Sea una lámina de cristal tallada paralelamente al eje óptico. En el párrafo anterior se explicó que cuando sobre esta lámina incide luz polarizada en un plano, los rayos ordinario y extraordinario son coherentes. Al entrar en la lámina la diferencia de fase δ de estos rayos es nula, y a la salida de ella

$$\delta = \frac{\Delta}{\lambda_0} 2\pi = \frac{(n_o - n_e)d}{\lambda_0} 2\pi \quad (138.1)$$

(véase (137.1) y (137.2); se supone que la luz incide sobre la lámina normalmente).

Una lámina, tallada paralelamente al eje óptico, para la cual

$$(n_o - n_e) d = m\lambda_0 + \lambda_0/4$$

(m es cualquier número entero o cero), se llama *lámina de cuarto de onda*. Al pasar por esta lámina, los rayos ordinario y extraordinario adquieren una diferencia de fase igual a $\pi/2$ (se recordará que la diferencia de fase se determina con una exactitud de hasta $2\pi m$). Una lámina para la cual

$$(n_o - n_e) d = m\lambda_0 + \lambda_0/2,$$

se llama *lámina de media onda*, y así sucesivamente.

Consideremos el paso de la luz polarizada en un plano a través de una lámina de media onda. La oscilación de E en el rayo incidente, que se realiza en el plano P , excita al entrar en el cristal la oscilación de E_o en el rayo ordinario y de E_e en el rayo extraordinario (fig. 138.1). En el tiempo que dura el paso por la lámina, la diferencia de fase entre las oscilaciones de E_o y E_e cambia en π . Por eso, a la salida de la lámina, la relación de fase entre los rayos ordinario y extraordinario corresponderá a la disposición mutua de los vectores E_e y E_o' (al entrar en la lámina correspondía a la disposición de los vectores E_e y E_o). Por consiguiente, la luz que sale de la lámina estará polarizada en el plano P' . Los planos P y P' están situados simétricamente respecto del eje óptico O de la lámina. Por

lo tanto, la lámina de media onda hace girar un ángulo igual a 2φ el plano de oscilaciones de la luz que pasa por ella (φ es el ángulo entre el plano de oscilaciones del rayo incidente y el eje de la lámina).

Ahora hagamos pasar la luz polarizada por una lámina de cuarto de onda (fig. 138.2). Si la lámina se dispone de forma que el ángulo φ entre el plano de oscilaciones P del rayo incidente y el eje O de la lámina sea igual a 45° , las amplitudes de los dos rayos que salen de la lámina serán iguales (se supone que no existe dicroísmo). El desfase entre las oscilaciones de estos rayos es de $\pi/2$. Por consiguiente, la luz que sale de la lámina estará polarizada circularmente. Si el valor de φ es otro, las amplitudes de los rayos que salen de la lámina

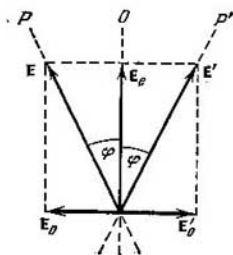


Fig. 138.1.

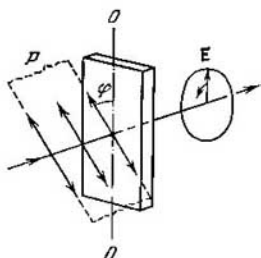


Fig. 138.2.

no serán iguales. Por eso, al superponerse estos rayos forman una luz polarizada según una elipse, uno de cuyos ejes coincide con el eje O de la lámina.

Si se hace pasar luz planopolarizada a través de una lámina de número fraccionario de ondas que no coincida con $m + 1/4$ ó $m + 1/2$, de ella emergerán dos ondas luminosas coherentes, polarizadas en planos perpendiculares entre sí, cuya diferencia de fase será distinta de $\pi/2$ y de π . Por lo tanto, cualquiera que sea la relación de las amplitudes de estas ondas, dependientes del ángulo φ (véase la fig. 138.2), a la salida de la lámina se obtiene luz polarizada elípticamente, y ninguno de los ejes de la elipse coincidirá con el eje O de la lámina. La orientación de los ejes de la elipse respecto del eje O se determina por la diferencia de fase δ y también por la relación de las amplitudes, es decir, por el ángulo φ entre el plano de oscilaciones de la onda incidente y el eje O de la lámina.

Advertimos que, independientemente del espesor de la lámina, si φ es igual a cero o a $\pi/2$, en la lámina sólo se propaga un rayo (en el primer caso será el extraordinario y en el segundo, el ordinario), de manera que al emerger de la lámina, la luz sigue siendo planopolarizada y su plano de oscilaciones coincide con P .

Si en el camino de una luz elípticamente polarizada se interpone una lámina de cuarto de onda, de tal modo que su eje óptico se encuentre a lo largo de uno de los ejes de la elipse, la lámina aportará una diferencia de fase adicional igual a $\pi/2$. Como resultado, la diferencia de fase de las dos ondas planopolarizadas cuya suma da la onda elípticamente polarizada, se hace igual a cero o a π , de forma que la superposición de estas ondas da una onda polarizada en un plano. Por consiguiente, la lámina de cuarto de onda, convenientemente girada, transforma la luz polarizada elíptica en luz polarizada plana. En esto se basa el método con el cual se puede distinguir la luz polarizada elípticamente de la polarizada parcialmente, o la luz polarizada circular de la natural. Para esto la luz que se analiza se hace pasar por una lámina de cuarto de onda y por un polarizador situado detrás de ella. Si el rayo que se estudia está elípticamente polarizado (o polarizado circularmente), girando la lámina y el polarizador alrededor de la dirección del rayo se logra oscurecer totalmente el campo visual. En cambio, si la luz está parcialmente polarizada (o es natural), en ninguna posición de la lámina y del polarizador es posible obtener la absorción del rayo que se investiga.

§ 139. Lámina de cristal entre dos polarizadores

Entre los polarizadores¹⁾ P y P' coloquemos una lámina de cristal uniaxial tallado paralelamente a su eje óptico O (fig. 139.1). Del polarizador P sale luz polarizada plana de intensidad I . Pasando por la lámina, esta luz, en el caso general, se polariza elípticamente. Y

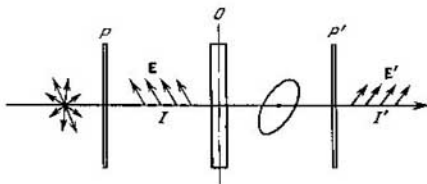


Fig. 139.1.

cuando emerge del polarizador P' vuelve a ser polarizada plana. Su intensidad I' depende de la orientación mutua de los planos de los polarizadores P y P' y el eje óptico de la lámina, así como de la diferencia de fase δ que adquieren los rayos ordinario y extraordinario al pasar por la lámina.

¹⁾ El segundo polarizador P' en el sentido de la marcha del rayo, se llama también *analisador*.

Supongamos que el ángulo φ entre el plano del polarizador P y el eje O de la lámina es igual a $\pi/4$. Conviene considerar dos casos particulares: primero, los polarizadores son paralelos (fig. 139.2, *a*); segundo, los polarizadores están cruzados (fig. 139.2, *b*). La oscilación luminosa que sale del polarizador P , se representa por el vector E , que se encuentra en el plano P . Al entrar en la lámina, la oscilación E excita dos oscilaciones: la E_o , perpendicular al eje óptico (rayo ordinario), y la E_e , paralela a dicho eje (rayo extraordinario). Estas oscilaciones son coherentes y al pasar por la lámina adquieren una diferencia de fase δ que depende del espesor de la lámina y de

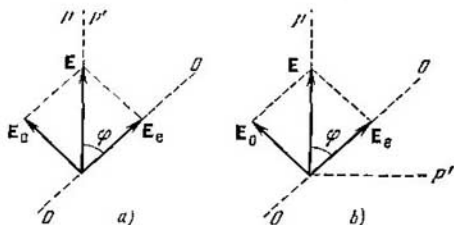


Fig. 139.2.

la diferencia entre los índices de refracción de los rayos ordinario y extraordinario. Las amplitudes de estas oscilaciones son iguales entre sí y a $E/\sqrt{2}$:

$$E_o = E_e = E \cos \frac{\pi}{4} = E/\sqrt{2}, \quad (139.1)$$

donde E es la amplitud de la onda que emerge del primer polarizador.

A través del segundo polarizador pasan las componentes de las oscilaciones E_o y E_e en dirección al plano P' . Las amplitudes de estas componentes son en ambos casos iguales a las amplitudes (139.1) multiplicadas por $\cos(\pi/4)$, es decir,

$$E'_o = E'_e = E/2. \quad (139.2)$$

En el caso de los polarizadores paralelos (fig. 139.2, *a*) la diferencia de fase de las ondas que salen del polarizador P' es igual a δ , es decir, a la diferencia de fase adquirida al pasar por la lámina. En el caso de los polarizadores cruzados (fig. 139.2, *b*) las proyecciones de los vectores E_o y E_e sobre la dirección de P' tienen signos distintos. Esto significa que además de la diferencia de fase δ aparece una diferencia de fase adicional igual a π .

Las ondas emergidas del segundo polarizador interferirán. La amplitud $E_{||}$ de la onda resultante, en el caso de los polarizadores

paralelos, se determina por la relación

$$E_{\parallel}^2 = E_o'^2 + E_e'^2 + 2E_o'E_e' \cos \delta,$$

y en el caso de los polarizadores cruzados, por la relación

$$1248 \quad E_{\perp} = E_o'^2 + E_e'^2 + 2E_o'E_e' \cos(\delta + \pi).$$

Teniendo en cuenta (139.2), se puede escribir que

$$R_{\parallel}^2 = \frac{1}{4} E^2 + \frac{1}{4} E^2 + \frac{1}{2} E^2 \cos \delta = \frac{1}{2} E^2 (1 + \cos \delta) = E^2 \cos^2 \frac{\delta}{2},$$

$$E_{\perp}^2 = \frac{1}{4} E^2 + \frac{1}{4} E^2 + \frac{1}{2} E^2 \cos(\delta + \pi) = \frac{1}{2} E^2 (1 - \cos \delta) = E^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

La intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud. Por consiguiente,

$$I'_{\parallel} = I \cos^2 \frac{\delta}{2}, \quad I'_{\perp} = I \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (139.3)$$

Aquí I'_{\parallel} es la intensidad de la luz que sale del segundo polarizador en el caso de los polarizadores paralelos; I'_{\perp} , idem, en el caso de los polarizadores cruzados, e I , la intensidad de la luz después de pasar por el primer polarizador.

De las fórmulas (139.3) se sigue que las intensidades I'_{\parallel} e I'_{\perp} con «complementarias», es decir, que sumadas dan la intensidad I . En particular, cuando

$$\delta = 2m\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (139.4)$$

la intensidad I'_{\parallel} será igual a I y la intensidad I'_{\perp} será nula. Y para los valores

$$\delta = (2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (139.5)$$

la intensidad I'_{\parallel} se anula y la I'_{\perp} alcanza el valor de I .

La diferencia entre los índices de refracción $n_o - n_e$ depende de la longitud de onda λ_o de la luz. Además, λ_o figura directamente en la expresión (138.1) de δ . Vamos a suponer que la luz que incide sobre el polarizador P está constituida por una radiación con dos longitudes de onda, λ_1 y λ_2 , tales que δ para λ_1 satisface la condición (139.4), y para λ_2 , la condición (139.5). En este caso, si los polarizadores son paralelos, a través del sistema representado en la fig. 139.1 pasará sin dificultad la luz de longitud de onda λ_1 y será detenida totalmente la luz de longitud de onda λ_2 . Y si los polarizadores están cruzados, pasará sin obstáculos la luz cuya longitud de onda es λ_2 y será detenida totalmente la de longitud de onda λ_1 . Por lo tanto, con una disposición de los polarizadores, el color de la luz, después de atravesar el sistema, será el correspondiente a la longitud de onda λ_1 , y con la otra disposición, el correspondiente a la longitud de onda λ_2 . Estos colores se denominan *complementarios*. Si uno de los pola-

rizadores gira, el color varía continuamente, pasando cada cuarto de vuelta de un color complementario a otro. El cambio de color se observa también con φ distinto de $\pi/4$ (pero no igual a cero o a $\pi/2$), aunque en este caso los colores son menos brillantes.

La diferencia de fase δ depende del espesor de la lámina. Por eso, si la lámina birrefringente colocada entre los polarizadores tiene distinto espesor en diferentes partes, observando estas partes desde el lado del polarizador P' , aparecerán con colores distintos. Al girar el polarizador P' , estos colores variarán, pasando cada uno al complementario. El siguiente ejemplo servirá para esclarecer esto. En la

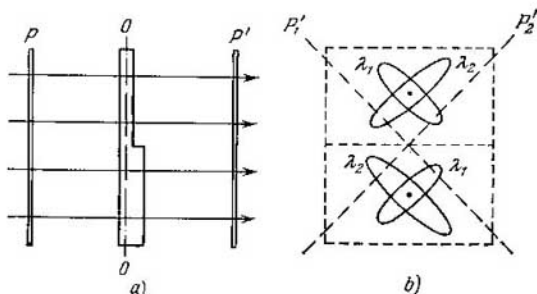


Fig. 139.3.

fig. 139.3, *a* se ha representado una lámina, cuya mitad inferior es más gruesa que la superior, colocada entre dos polarizadores. Supongamos que la luz que pasa por la lámina está constituida por una radiación que sólo tiene dos longitudes de onda: λ_1 y λ_2 . En la fig. 139.3, *b* se da la «vista» desde el lado del polarizador P' . Al salir de la lámina de cristal, cada componente de la radiación estará, en general, polarizada elípticamente. La orientación y la excentricidad de las elipses será distinta para las longitudes de onda λ_1 y λ_2 y para las dos mitades de la lámina. Si el polarizador P' se coloca en la posición P'_1 , en la radiación que pase a través de P' predominará la longitud de onda λ_1 en la mitad superior de la lámina, y la longitud de onda λ_2 en la mitad inferior. Por eso, estas mitades tendrán diferente color. Cuando el polarizador P' se coloca en la posición P'_2 , el color de la mitad superior dependerá de la radiación cuya longitud de onda es λ_2 , y el de la mitad inferior, de la que tiene la longitud de onda λ_1 . De este modo, al girar 90° el polarizador P' , sucede algo así como si las dos mitades intercambiaran sus colores. Está claro que esto sólo ocurrirá con una relación determinada de los espesores de ambas mitades de la lámina.

§ 140. Doble refracción artificial

En los cuerpos amorfos transparentes y en los cristales del sistema cúbico se puede observar la doble refracción bajo la influencia de acciones exteriores. En particular, esto ocurre cuando los cuerpos se deforman mecánicamente. De medida de la anisotropía óptica que se produce sirve la diferencia entre los índices de refracción de los rayos ordinario y extraordinario. La experiencia da que esta diferencia es proporcional a la tensión σ en el punto dado del cuerpo (es decir, a la fuerza por unidad de superficie; véase el § 14 del tomo 1º):

$$n_o - n_e = k\sigma \quad (140.1)$$

(k es un coeficiente de proporcionalidad que depende de las propiedades de la substancia).

Coloquemos una lámina de vidrio Q entre dos polarizadores cruzados P y P' (fig. 140.1). Mientras el vidrio no se haya deformado,

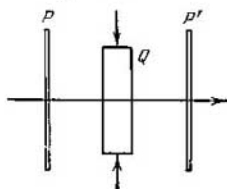


Fig. 140.1.

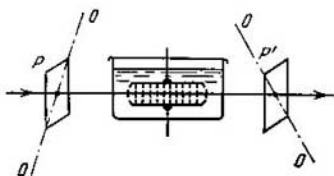


Fig. 140.2.

este sistema no dejará pasar la luz. Pero si la lámina se comprime, la luz comenzará a pasar a través del sistema y la figura que se observe en los rayos transmitidos resultará cubierta de franjas de colores. Cada una de estas franjas corresponderá a las partes de la lámina que tienen la misma deformación. Por consiguiente, la disposición de las franjas da idea de la distribución de las tensiones dentro de la lámina. En esto se basa el método óptico de investigación de las tensiones. El modelo de una pieza o estructura cualquiera, hecho de material transparente isótropo (por ejemplo, de plexiglás), se coloca entre dos polarizadores cruzados y se somete a la acción de cargas semejantes a las que debe soportar la pieza misma. La figura que se observa entonces a la luz blanca transmitida permite determinar la distribución de las tensiones y juzgar acerca de su magnitud.

La aparición de la doble refracción en los líquidos y en los sólidos amorfos sometidos a la acción de un campo eléctrico fue descubierta por J. Kerr en 1875. Este fenómeno se conoce con el nombre de *efecto Kerr*. En 1930 este fenómeno se observó en los gases.

El esquema del dispositivo para estudiar el efecto Kerr en los líquidos se muestra en la fig. 140.2. Consiste en una *célula de Kerr* situada entre dos polarizadores P y P' cruzados. La célula de Kerr es un recipiente, herméticamente cerrado, que contiene el líquido, en el cual se han introducido las placas de un condensador. Cuando se hace llegar tensión a las placas, entre ellas surgen un campo eléctrico prácticamente homogéneo. Bajo su acción adquiere el líquido las propiedades de un cristal uniaxial cuyo eje óptico está orientado en el sentido del campo.

La diferencia que surge entre los límites de refracción n_o y n_e es proporcional al cuadrado de la intensidad del campo E :

$$n_o - n_e = kE^2. \quad (140.2)$$

En el camino l se produce entre los rayos ordinario y extraordinario la diferencia de marcha $\Delta = (n_o - n_e) l = k l E^2$ o la diferencia de fase $\delta = \frac{\Delta}{\lambda_0} 2\pi = 2\pi \frac{k}{\lambda_0} l E^2$.

Esta expresión suele escribirse en la forma

$$\delta = 2\pi B l E^2, \quad (140.3)$$

donde B es una magnitud característica de la sustancia, llamada *constante de Kerr*.

De los líquidos conocidos, el que mayor constante de Kerr tiene es el nitrobenzono ($C_6H_5NO_2$). La constante de Kerr depende de la temperatura de la sustancia y de la longitud de onda de la luz.

El efecto Kerr se explica porque la polarizabilidad de las moléculas es distinta en diferentes direcciones. En ausencia del campo las moléculas están orientadas caóticamente, por lo que el líquido en conjunto no manifiesta anisotropía. Bajo la acción del campo las moléculas giran de tal modo que en la dirección de aquél estén orientados sus momentos dipolares eléctricos (si las moléculas son polares) o las direcciones de máxima polarizabilidad (si las moléculas son neutras). Como resultado el líquido se hace ópticamente anisótropo. A la acción orientadora del campo se opone el movimiento térmico de las moléculas. Esto condiciona la disminución de la constante de Kerr cuando aumenta la temperatura.

El tiempo durante el cual se establece (al conectar el campo) o desaparece (al desconectarlo) la orientación predominante de las moléculas es aproximadamente igual a 10^{-10} s. Por eso una célula de Kerr situada entre dos polarizadores cruzados puede servir prácticamente de obturador óptico sin inercia. En ausencia de tensión en las placas del condensador, el obturador estará cerrado. Cuando se conecta la tensión, el obturador deja pasar una parte considerable de la luz que incide sobre el primer polarizador.

§ 141. Rotación del plano de polarización

Rotación natural. Algunas sustancias, llamadas *ópticamente activas*, tienen la propiedad de producir una rotación del plano de polarización de la luz polarizada plana que pasa a través de ellas. A estas sustancias pertenecen cuerpos cristalinos (como el cuarzo y el cinabrio), líquidos puros (esencia de trementina, nicotina) y las disoluciones de las sustancias ópticamente activas en solventes no activos (soluciones acuosas de azúcar, de ácido tartárico y otras).

En las sustancias cristalinas la rotación del plano de polarización es máxima en el caso en que la luz se propaga a lo largo del eje óptico del cristal. El ángulo de rotación φ es proporcional al camino l recorrido por el rayo en el cristal:

$$\varphi = \alpha l. \quad (141.1)$$

El coeficiente α recibe el nombre de *constante de rotación*. Esta constante depende de la longitud de la onda (dispersión de la capacidad de rotación).

En las disoluciones el ángulo de rotación del plano de polarización es proporcional al camino l recorrido por la luz en ellas y a la concentración de sustancia activa c :

$$\varphi = [\alpha] cl. \quad (141.2)$$

Aquí $[\alpha]$ es una magnitud llamada *constante de rotación específica*.

En dependencia del sentido en que gire el plano de polarización, las sustancias ópticamente activas se dividen en *dextrógiras* y *levógiras*. El sentido de la rotación (respecto del rayo) no depende del sentido de éste. Por eso, si un rayo, que haya atravesado el cristal ópticamente activo pasando a lo largo de su eje óptico, se refleja en un espejo y se hace que vuelva a pasar por el cristal en sentido contrario, la posición inicial del plano de polarización se restablece.

De todas las sustancias ópticamente activas existen dos variedades: la dextrógira y la levógira. Así, hay cuarzo dextrógiro y levógiro, azúcar dextrógira y levógira, y así sucesivamente. Las moléculas o cristales de una variedad son como la imagen especular de las moléculas o cristales de la otra variedad (fig. 141.1). Las letras C , X , Y , Z y T designan átomos o agrupaciones atómicas (radicales) que se diferencian entre sí. La molécula b es como la imagen especular de la molécula a . Si el tetraedro representado en la fig. 141.1 se mira a lo largo de la dirección CX , recorriendo el perímetro de su base en el sentido de las agujas del reloj se tiene la sucesión $ZYTZ$, en la molécula a , y la sucesión $ZTYZ$, en la molécula b . Esto mismo se observa cualquiera que sea la dirección CY , CZ o CT que se tome. La sucesión de los radicales X , Y , Z y T en la

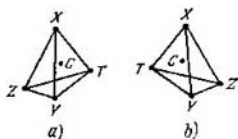


Fig. 141.1.

molécula b es inversa a su sucesión en la molécula a . Por esta razón, si, por ejemplo, la substancia formada por moléculas a es dextrógira, la substancia constituida por moléculas b será levógira.

Si entre dos polarizadores cruzados se coloca una substancia activa (un cristal de cuarzo o una cubeta transparente con disolución de azúcar, por ejemplo), el campo visual se ilumina. Para restablecer la oscuridad hay que hacer que uno de los polarizadores gire el ángulo φ , determinado por la expresión (141.1) o (141.2). Si se trata de una disolución, conociendo la constante de rotación específica $[\alpha]$ de la substancia y la longitud l , se puede, después de medir el ángulo de rotación φ , determinar por la fórmula (141.2) la concentración c de la solución. Este procedimiento para determinar la concentración se utiliza en la industria productora de distintas substancias, en particular en la de fabricación de azúcar (el aparato que se emplea en este caso se llama sacarímetro).

Rotación magnética del plano de polarización. Las substancias ópticamente inactivas adquieren la propiedad de hacer girar el plano de polarización si se someten a la acción de un campo magnético. Este fenómeno fue descubierto por M. Faraday y en su honor se le da a veces el nombre de *efecto Faraday*. Dicho efecto sólo se observa cuando la luz se propaga a lo largo de la dirección de la imanación. Por eso, para observar el efecto Faraday, en las piezas polares del electroimán se perforan orificios a través de los cuales se hace pasar el rayo luminoso. La substancia que se analiza se coloca entre los polos de dicho electroimán.

El ángulo de rotación φ del plano de polarización es proporcional al camino l que recorre la luz por la substancia y a la imanación de esta última. La imanación, a su vez, es proporcional a la intensidad del campo magnético H (véase la fórmula (52.11)). Por lo tanto, se puede escribir que

$$\varphi = V l H. \quad (141.3)$$

El coeficiente V se denomina *constante de Verdet* o *rotación magnética específica*. La constante V , lo mismo que la constante de rotación α , depende de la longitud de la onda.

El sentido de giro está determinado por la dirección del campo magnético. El signo de este giro no depende del sentido del rayo. Por consiguiente, si este último se refleja en un espejo y se obliga a volver a pasar en sentido inverso por la substancia imanada, el giro del plano de polarización no se duplica.

La rotación magnética del plano de polarización se debe a la precesión de las órbitas electrónicas que se produce bajo la acción del campo magnético (véase el § 57).

Las substancias ópticamente activas sometidas a la acción de un campo magnético adquieren una capacidad adicional de rotación del plano de polarización, la cual se suma a su capacidad natural.

CAPÍTULO XX

INTERACCIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS CON LA SUBSTANCIA

§ 142. Dispersión de la luz

Se llama *dispersión de la luz* el fenómeno debido a la dependencia del índice de refracción de la sustancia respecto de la longitud de la onda luminosa. Esta dependencia se puede caracterizar por la función

$$n = f(\lambda_0), \quad (142.1)$$

en la que λ_0 es la longitud de la onda luminosa en el vacío.

La *dispersión por la sustancia* es la derivada de n respecto de λ_0 .

Para todas las sustancias incoloras transparentes la función (142.1) tiene en la parte visible del espectro el carácter que se muestra en la fig. 142.1. Con la disminución de la longitud de onda, el índice de refracción aumenta cada vez más rápidamente, de manera que la dispersión por la sustancia $dn/d\lambda_0$ es negativa y su módulo crece al disminuir λ_0 .

Si la sustancia absorbe parte de los rayos, en la región de la absorción y cerca de ella la marcha de la dispersión pone de manifiesto una anomalía (véase la fig. 144.2). En cierto tramo de la curva la dispersión por la sustancia $dn/d\lambda_0$ resulta positiva. Esta marcha de la dependencia de n respecto de λ_0 se llama *dispersión anómala*.

Los medios que poseen la propiedad de dispersar reciben el nombre de *dispersores*. En los medios dispersores la velocidad de las ondas luminosas depende de la longitud de onda λ_0 o de la frecuencia ω .

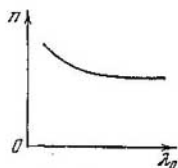


Fig. 141.2.

§ 143. Velocidad de grupo

En rigor, una onda monocromática de la forma

$$E = A \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (143.1)$$

es una sucesión infinita en el tiempo y en el espacio de «crestas» y «valles» que se desplazan a lo largo del eje x con la velocidad de fase

$$v = \omega/k. \quad (143.2)$$

(véase la fórmula (94.7)). Valiéndose de esta onda es imposible transmitir una señal, ya que cada «cresta» posterior en nada se distingue de la anterior. Para transmitir una señal hay que «marcar» la onda,

por ejemplo, interrumpiéndola durante cierto tiempo Δt . Pero en este caso la onda no vendrá ya descrita por la ecuación (143.1).

Lo más fácil es transmitir la señal por medio de un impulso luminoso (fig. 143.1). Según el teorema de Fourier, este impulso se puede representar como una superposición de ondas de la forma (143.1) cuyas frecuencias estén comprendidas en cierto intervalo $\Delta\omega$. Una superposición de ondas cuyas frecuencias se diferencian poco entre sí, se llama *paquete* o *grupo de ondas*. La expresión analítica de un grupo de ondas tiene la forma

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A_\omega \cos(\omega t - k_\omega x + \alpha_\omega) d\omega \quad (143.3)$$

(el subíndice ω de A , k y α indica que estas magnitudes son diferentes para distintas frecuencias). Si se fija t , la gráfica de la función

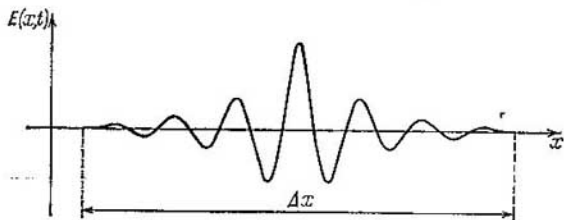


Fig. 143.1.

(143.3) tiene la forma que se muestra en la fig. 143.1. Cuando t varía, la gráfica se desplaza a lo largo del eje x . Dentro de los límites de un paquete, las ondas planas se refuerzan entre sí en mayor o menor grado, fuera del paquete se extinguen prácticamente unas a otras totalmente.

El cálculo correspondiente da, que cuanto menor sea la anchura Δx del paquete, tanto mayor será el intervalo de frecuencias $\Delta\omega_0$, respectivamente, será mayor el intervalo de números de onda Δk que se requiera para definir dicho paquete por medio de la expresión (143.3). Tiene lugar la relación

$$\Delta k \cdot \Delta x \approx 2\pi. \quad (143.4)$$

Subrayamos que para que la superposición de ondas definida por la expresión (143.3) se pueda considerar un grupo de ondas es necesario que se cumpla la condición $\Delta\omega \ll \omega_0$.

En un medio no dispersor todas las ondas planas que forman un paquete se propagan con la misma velocidad de fase v . Es evidente que, en este caso, la velocidad de movimiento del paquete coincide

con v y la forma del paquete no varía con el tiempo. Se puede demostrar que en un medio dispersor el paquete se esparce, es decir, su anchura aumenta. Si la dispersión no es grande, la expansión del paquete no será demasiado rápida. En este caso a dicho paquete se le puede atribuir la velocidad u , entendiéndose por ella la velocidad con la cual se traslada el centro de paquete, o sea, el punto en el cual el valor de E es máximo. Esta velocidad se denomina *velocidad de grupo*. En un medio dispersor la velocidad de grupo u es distinta de la velocidad de fase v (se tiene en cuenta la velocidad de fase de la componente armónica de mayor amplitud, o en otros términos, la velocidad de fase de la frecuencia dominante). A continuación se

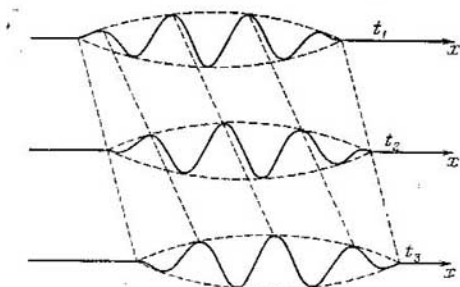


Fig. 143.2.

demostrará que cuando $dn/d\lambda_0 < 0$, la velocidad de grupo es menor que la de fase ($u < v$), y cuando $dn/d\lambda_0 > 0$, la velocidad de grupo es mayor que la de fase ($u > v$).

En la fig. 143.2 se dan las «fotografías» de un paquete de ondas en tres instantes sucesivos t_1 , t_2 y t_3 . Este dibujo se ha hecho para el caso en que $u < v$. En la figura se ve que, al mismo tiempo que avanza el paquete, se mueven las «crestas» y los «valles» dentro de él, engendrándose continuamente en su límite izquierdo nuevas «crestas» que, después de recorrer el paquete, desaparecen por su límite derecho. Como resultado, mientras que el paquete en conjunto se desplaza con la velocidad u , algunas «crestas» y «valles» lo hacen con la velocidad v .

En el caso en que $u > v$, el sentido en que se desplaza el paquete es opuesto al del movimiento de las «crestas» dentro de él.

Aclaremos esto con el ejemplo de la superposición de dos ondas planas de igual amplitud y distintas λ . En la fig. 143.3 se da la «fotografía instantánea» de estas ondas. Una de ellas se representa con línea continua y la otra, con línea de trazos. La intensidad es

máxima en el punto *A*, en el cual coinciden las fases de las dos ondas en un instante dado. En los puntos *B* y *C* ambas ondas están en oposición de fase, por lo que la intensidad de la onda resultante es nula. Supongamos que las dos ondas se propagan de izquierda a derecha y que la velocidad de la onda «continua» es menor que la de la onda «de trazos» (en este caso será $dv/d\lambda > 0$, y, por lo tanto, $dn/d\lambda < 0$). Entonces el punto en que estas ondas se refuerzan una a otra se desplazará con el tiempo hacia la izquierda, con relación a las ondas. Como resultado, la velocidad de grupo será menor que la de fase. Si la velocidad de la onda «continua» es mayor que la «de

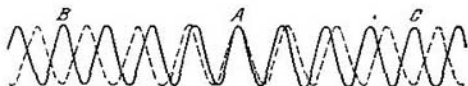


Fig. 143.3.

trazos» (es decir, $dn/d\lambda > 0$), el punto en que se produce el reforzamiento de las ondas se desplazará hacia la derecha, de manera que la velocidad de grupo será mayor que la de fase.

Escribamos las ecuaciones de las ondas suponiendo, para simplificar las fórmulas, que las fases iniciales son iguales a cero:

$$E_1 = A \cos (\omega t - kx),$$

$$E_2 = A \cos [(\omega + \Delta\omega) t - (k + \Delta k) x].$$

Aquí $k = \omega/v_1$, y $(k + \Delta k) = (\omega + \Delta\omega)/v_2$. Sea $\Delta\omega \ll \omega$ y, respectivamente, $\Delta k \ll k$. Entonces, sumando las oscilaciones y haciendo transformaciones de acuerdo con la fórmula de la suma de cosenos, se obtiene

$$E = E_1 + E_2 = \left[2A \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right) \right] \cos (\omega t - kx) \quad (143.5)$$

(en el segundo factor se ha despreciado $\Delta\omega$ en comparación con ω y Δk en comparación con k).

El factor que figura entre corchetes varía con x y t mucho más lentamente que el segundo factor. Por eso la expresión (143.5) se puede considerar como la ecuación de una onda plana cuya amplitud varía según la ley¹⁾

$$\text{Amplitud} = \left| 2A \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right) \right|.$$

¹⁾ Compárese con las fórmulas (56.1) y (56.2) del tomo 1º. La dependencia de la función (143.5) respecto de x cuando t se fija, se representa por una curva análoga a la curva de la fig. 56.1, a del tomo 1º.

En este caso tenemos una serie de máximos de amplitud iguales, que se determinan por la condición

$$\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x_{\text{máx}} = \pm m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (143.6)$$

Cada uno de estos máximos se puede considerar como centro del grupo de ondas correspondiente.

Despejando $x_{\text{máx}}$ en (143.6), obtenemos

$$x_{\text{máx}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t + \text{const.}$$

De aquí se sigue que los máximos se trasladan con la velocidad

$$u = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (143.7)$$

La expresión obtenida es la de la velocidad de grupo para el caso en que el grupo está formado por dos componentes.

Hallemos la velocidad con que se traslada el centro del grupo de ondas descrito por la expresión (143.3). Pasando de los cosenos a los exponentes, obtenemos

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \hat{A}_\omega \exp[i(\omega t - k_\omega x)] d\omega \quad (143.8)$$

($\hat{A}_\omega = A_\omega e^{i\alpha_\omega}$ es la amplitud compleja).

Desarrollamos la función $k_\omega = k(\omega)$ en serie en el entorno de ω_0 :

$$k_\omega = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 (\omega - \omega_0) + \dots \quad (143.9)$$

Aquí $k_0 = k(\omega)_0$, y $(dk/d\omega)_0$ es el valor de la derivada en el punto ω_0 .

Pasamos a la variable $\xi = \omega - \omega_0$. Entonces $\omega = \omega_0 + \xi$, y $d\omega = d\xi$. Haciendo esta sustitución en (143.8) y poniendo en vez de k_ω su valor (143.9), se puede escribir que

$$E(x, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \hat{A}_\xi \exp\left\{i\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right]\xi\right\} d\xi. \quad (143.10)$$

Hemos llegado a la ecuación de una onda plana de frecuencia ω_0 , número de onda k_0 y amplitud compleja

$$\hat{A}(x, t) = \int_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \hat{A}_\xi \exp\left\{i\left[t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x\right]\xi\right\} d\xi. \quad (143.11)$$

De (143.11) se deduce que la ecuación

$$t - \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0 x = \text{const} \quad (143.12)$$

relaciona el tiempo t y la coordenada x del plano en el cual la amplitud compleja tiene el valor fijo dado y , en particular, también un valor con el cual el módulo de la amplitud compleja, o sea, la amplitud ordinaria $A(x, t)$, alcanza un máximo.

Tomando en consideración que $1/(dk/d\omega)_0 = (d\omega/dk)_0$, representamos (143.12) en la forma

$$x_{\text{máx}} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t - \text{const}' \left(\text{const} = \frac{\text{const}}{(dk/d\omega)_0} \right). \quad (143.13)$$

De (143.13) se deduce que el punto en el cual la amplitud del grupo de ondas es máxima, se traslada con la velocidad $(d\omega : dk)_0$. De este modo llegamos a la expresión siguiente de la velocidad de grupo:

$$u = \frac{d\omega}{dk} \quad (143.14)$$

(el subíndice 0 se ha omitido por innecesario). Con anterioridad se obtuvo una expresión análoga (véase (143.7)) para un grupo de dos ondas.

Se recordará que en el desarrollo (143.9) se despreciaron los términos de altos grados de pequeñez. En esta aproximación la forma del paquete de ondas no varía con el tiempo. Si se tienen en cuenta los términos siguientes del desarrollo, se obtiene una expresión de la amplitud de la cual se sigue que la anchura del paquete crece con el tiempo, o sea, el paquete de ondas se extiende.

A la expresión de la velocidad de grupo se le puede dar otra forma. Sustituyendo ω por vk (véase (143.2)), representamos (143.14) del modo siguiente:

$$u = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}. \quad (143.15)$$

Después escribimos

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}.$$

De la relación $\lambda = 2\pi/k$ se infiere que $d\lambda/dk = -2\pi/k^2 = -\lambda/k$. Respectivamente, $dv/dk = -(dv/d\lambda)(\lambda/k)$. Sustituyendo este valor en (143.15), obtenemos

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (143.16)$$

Por esta fórmula se ve que, en dependencia del signo de $dv/d\lambda$, la velocidad de grupo u puede ser menor o mayor que la velocidad de fase v . En ausencia de dispersión $dv/d\lambda = 0$ y la velocidad de grupo coincide con la de fase.

El máximo de intensidad corresponde al centro del grupo de ondas. Por eso, en aquellos casos en que el concepto de velocidad de grupo tiene sentido, la velocidad de transporte de energía por la onda es igual a la velocidad de grupo.

El concepto de velocidad de grupo sólo es aplicable a condición de que la absorción de la energía de la onda por el medio dado sea pequeña. Si el amortiguamiento de las ondas es considerable, el concepto de velocidad de grupo pierde su sentido. Esto ocurre en la región de la dispersión anómala. En esta región la absorción es muy grande y, por lo tanto, el concepto de velocidad de grupo es inaplicable.

§ 144. Teoría elemental de la dispersión

La dispersión de la luz se puede explicar basándose en la teoría electromagnética y en la teoría electrónica de la sustancia. Para esto hay que estudiar el proceso de la interacción de la luz con la sustancia. El movimiento de los electrones en el átomo se subordina a las leyes de la mecánica cuántica. En particular, el concepto de trayectoria del electrón en el átomo pierde todo sentido. No obstante, como demostró H. A. Lorentz, para comprender cualitativamente muchos fenómenos ópticos basta limitarse a la hipótesis de la existencia de los electrones ligados casi elásticamente dentro de los átomos. Si estos electrones se sacan de sus posiciones de equilibrio, comienzan a oscilar y pierden paulatinamente la energía de oscilación en la radiación de ondas electromagnéticas. Como resultado, las oscilaciones se amortiguan. El amortiguamiento se puede tener en cuenta introduciendo la «fuerza de rozamiento de radiación», proporcional a la velocidad.

Cuando a través de una sustancia pasan ondas electromagnéticas, cada electrón se encuentra sometido a la acción de la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} - e[\mathbf{v}\mathbf{B}] = -e\mathbf{E} - e\mu_0[\mathbf{v}\mathbf{H}] \quad (144.1)$$

(véase la fórmula (43.5)); la carga del electrón es igual a $-e$). Según (105.13), la relación entre las intensidades de los campos magnético y eléctrico en una onda es $H/E = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$. Por consiguiente, para la relación entre las fuerzas magnética y eléctrica que actúan sobre un electrón se obtiene de (144.1) el valor

$$\frac{\mu_0 v H}{E} = \mu_0 v \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = v \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{v}{c}.$$

Incluso si la amplitud de las oscilaciones del electrón a alcanzara un valor del orden de 1 \AA (10^{-10} m), o sea, del orden de las dimensiones del átomo, la amplitud de la velocidad del electrón $a\omega$ será igual aproximadamente a $10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{15} = 3 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ (según (110.6), $\omega = 2\pi\nu$ es igual, aproximadamente, a $3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$). De este modo, la relación v/c es notoriamente menor que 10^{-3} , por lo que en (144.1) se puede despreciar el segundo sumando.

Así, se puede considerar que, al pasar a través de la substancia una onda electromagnética, cada electrón se encuentra sometido a la acción de la fuerza

$$F = -eE_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

(α es una magnitud determinada por las coordenadas del electrón dado, y E_0 , la amplitud de la intensidad del campo eléctrico de la onda).

Para simplificar los cálculos, al principio vamos a prescindir del amortiguamiento debido a la radiación. Más adelante tendremos en cuenta este amortiguamiento introduciendo en las fórmulas obtenidas las correcciones pertinentes. La ecuación del movimiento del electrón tiene la forma

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = -(e/m) E_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

(véase la fórmula (50.13) del tomo 1º; ω_0 es la frecuencia propia de las oscilaciones del electrón). Al segundo miembro de esta ecuación le añadimos el sumando $-i(e/m) E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$ y, de este modo, pasamos a las funciones complejas \hat{E} y \hat{r} :

$$\ddot{\hat{r}} + \omega_0^2 \hat{r} = -(e/m) \hat{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (144.2)$$

Aquí $\hat{E}_0 = E_0 e^{i\alpha}$ es la amplitud compleja del campo eléctrico de la onda.

Vamos a buscar la solución de la ecuación en la forma $\hat{r} = \hat{r}_0 e^{i\omega t}$ en la que \hat{r}_0 es la amplitud compleja de las oscilaciones del electrón.

Respectivamente, $\ddot{\hat{r}} = -\omega^2 \hat{r}_0 e^{i\omega t}$. La sustitución de estas expresiones en la ecuación (144.2) conduce, después de simplificar por el factor común $e^{i\omega t}$, a la relación

$$-\omega^2 \hat{r}_0 + \omega_0^2 \hat{r}_0 = -(e/m) \hat{E}_0.$$

De donde

$$\hat{r}_0 = \frac{-(e/m) \hat{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Le multiplicación del resultado obtenido por $e^{i\omega t}$, da que

$$\hat{r}(t) = \frac{-(e/m) \hat{E}(t)}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Finalmente, tomando las partes reales de las funciones complejas \hat{r} y \hat{E} , hallamos r como función de t :

$$r(t) = \frac{-(e/m) E(t)}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (144.3)$$

Para simplificar el problema vamos a suponer que las moléculas no son polares. Además, como la masa de los núcleos es grande en comparación con la del electrón, despreciaremos los desplazamientos de los núcleos de sus posiciones de equilibrio bajo la acción del campo de la onda. En esta aproximación el momento dipolar eléctrico de la molécula se puede representar en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \sum_i q_i \mathbf{R}_{0i} + \sum_k e_k [\mathbf{r}_{0k} + \mathbf{r}_k(t)] = \\ &= \left\{ \sum_i q_i \mathbf{R}_{0i} + \sum_k e_k \mathbf{r}_{0k} \right\} + \sum_k e_k \mathbf{r}_k(t) = \\ &= \mathbf{p}_0 + \sum_k e_k \mathbf{r}_k(t) = \sum_k e_k \mathbf{r}_k(t), \end{aligned}$$

donde q_i y \mathbf{R}_{0i} son, respectivamente, las cargas y los radios vectores de las posiciones de equilibrio de los núcleos; e_k y \mathbf{r}_{0k} , la carga y el radio vector de la posición de equilibrio del k -ésimo electrón; $\mathbf{r}_k(t)$, el desplazamiento del k -ésimo electrón de su posición de equilibrio bajo la acción del campo de la onda, y \mathbf{p}_0 , el momento dipolar de la molécula en ausencia del campo, el cual, por suposición, es nulo. Todas las $\mathbf{r}_k(t)$ son colineales de $\mathbf{E}(t)$. Por eso, para la proyección de $\mathbf{p}(t)$ sobre la dirección de $\mathbf{E}(t)$ se obtiene la expresión

$$p(t) = \sum_k e_k r_k(t) = \sum_k (-e) r_k(t)$$

(hemos tenido en cuenta que las e_k de todos los electrones son iguales entre sí y a $-e$). Sustituyamos aquí el valor de $r(t)$ (144.3), tomando en consideración que las frecuencias propias ω_{0k} de los electrones que entran en la composición de la molécula no son iguales. Como resultado obtenemos

$$p(t) = \sum_k \frac{e^2/m}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} E(t). \quad (144.4)$$

Designamos por N el número de moléculas que hay en la unidad de volumen. El producto $Np(t)$ da la polarización de la substancia $P(t)$. Según las fórmulas (19.5) y (16.2), la permitividad

$$\epsilon = 1 + \kappa = 1 + \frac{P(t)}{e_0 E(t)} = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \frac{p(t)}{E(t)}.$$

Sustituyendo aquí el valor de la relación $p(t)/E(t)$ que se obtiene de (144.4), y ϵ por n^2 (véase (110.3)), llegamos a la fórmula

$$n^2 = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \sum_k \frac{e^2/m}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}. \quad (144.5)$$

Si las frecuencias ω difieren sensiblemente de todas las frecuencias propias ω_{0k} , la suma que figura en la fórmula (144.5) será pe-

queña en comparación con la unidad, por lo que $n^2 \approx 1$. En las proximidades de cada una de las frecuencias propias, la función (144.5) sufre una discontinuidad: cuando ω tiende a ω_{0k} por la izquierda, se transforma en $+\infty$, y cuando tiende por la derecha, en $-\infty$ (véanse las curvas en línea de trazos de la fig. 144.1). Este comportamiento de la función (144.5) se debe a que hemos despreciado el rozamiento de radiación (recordamos que si se desprecia el rozamiento, la amplitud de las oscilaciones forzadas se hace infinita con la resonancia; véase la fórmula (60.18) del tomo 1º). La

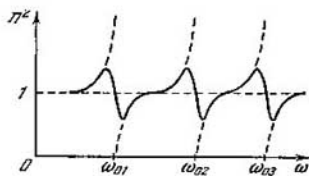


Fig. 144.1.

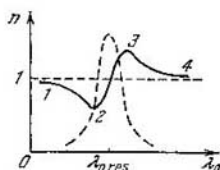


Fig. 144.2.

toma en consideración del rozamiento de radiación conduce a la dependencia de n^2 respecto de ω que muestra la curva de línea continua de la fig. 144.1.

Pasando de n^2 a n y de ω a λ_0 , obtenemos la curva representada en la fig. 144.2 (en ella sólo se da un tramo de curva en la región de una de las longitudes de onda de resonancia). La curva de trazos representa en esta figura la marcha del coeficiente de absorción de la luz por la substancia (véase el párrafo siguiente). El trozo 3-4 es análogo a la curva dada en la fig. 142.1. Los trozos 1-2 y 3-4 corresponden a la dispersión normal ($dn/d\lambda_0 < 0$). En el trozo 2-3 la dispersión es anómala ($dn/d\lambda_0 > 0$).

En la región 1-2 el índice de refracción es menor que la unidad, por consiguiente, la velocidad de fase de la onda es mayor que c . Esta circunstancia no contradice la teoría de la relatividad, basada en la afirmación de que la velocidad de transmisión de una señal no puede ser mayor que c . En el párrafo anterior se explicó que es imposible transmitir una señal por medio de una onda monocromática ideal. La transmisión de la energía (o sea, de la señal) mediante una onda no totalmente monocromática (por un grupo de ondas) se efectúa con una velocidad igual a la de grupo, determinada por la fórmula (143.16). En la región de la dispersión normal $dv/d\lambda > 0$ (dn y dv tienen signos distintos, mientras que $dn/d\lambda < 0$), de manera que, aunque $v > c$, la velocidad de grupo es menor que c . En la región de la dispersión anómala, el concepto de velocidad de grupo pierde su sentido (la absorción es muy grande). Por eso, el valor de

u calculado por la fórmula (143.6) no caracteriza la velocidad de transmisión de la energía. El cálculo correspondiente da que también en esta región la velocidad de transmisión de la energía es menor que c .

§ 145. Absorción de la luz

Cuando una onda luminosa pasa a través de una substancia, parte de su energía se gasta en excitar las oscilaciones de los electrones. Una parte de esta energía vuelve a la radiación en forma de ondas secundarias generadas por los electrones; pero otra parte se transforma en energía del movimiento de los átomos, es decir, en energía interna de la substancia. Por eso la intensidad de la luz disminuye al pasar la substancia, o sea, la luz es absorbida por dicha substancia. Las oscilaciones forzadas de los electrones y, por lo tanto, la absorción de la luz se hace particularmente intensa con la frecuencia de resonancia (véase la curva de resonancia que con línea de trazos se representa en la fig. 144.2).

La experiencia demuestra que la intensidad de la luz al pasar a través de una substancia disminuye según una ley exponencial:

$$I = I_0 e^{-\kappa l}. \quad (145.1)$$

Aquí I_0 es la intensidad de la luz a la entrada en la capa absorbente (en el límite o en un punto determinado dentro de la substancia); l , el espesor de la capa, y κ , una constante, que depende de las propiedades de la substancia absorbente, llamada *coeficiente de absorción*. La relación (145.1) se conoce con el nombre de *ley de Bouguer*.

Tomando la diferencial de la relación (145.1), obtenemos

$$dI = -\kappa I_0 e^{-\kappa l} dl = -\kappa I dl. \quad (145.2)$$

De esta expresión se sigue que la pérdida de intensidad en el camino dl es proporcional a su longitud y al valor de la intensidad misma. De coeficiente de proporcionalidad sirve el coeficiente de absorción.

De la fórmula (145.1) se infiere que cuando $l = 1/\kappa$, la intensidad I es e veces menor que I_0 . De este modo, el coeficiente de absorción es la magnitud recíproca del espesor de una capa al atravesar la cual la intensidad de la luz disminuye e veces.

El coeficiente de absorción depende de la longitud de onda λ de la luz (o de la frecuencia ω). En una substancia cuyos átomos (o moléculas) no influyan unos sobre otros (gases o vapores de metales a presión moderada), el coeficiente de absorción para la mayoría de las longitudes de onda es próximo a cero, y sólo para regiones espectrales muy estrechas (de varias centésimas de angström de anchura) pone de manifiesto máximos bruscos (fig. 145.1). Estos máximos corresponden a las frecuencias de resonancia de los electrones dentro de los átomos. En el caso de moléculas poliatómicas también se

manifiestan las frecuencias correspondientes a las oscilaciones de los átomos dentro de ellas. Como la masa de los átomos es decenas de millares de veces mayor que la masa del electrón, las frecuencias moleculares son mucho menores que las atómicas y se encuentran en la región infrarroja del espectro.

Los gases a altas presiones, los líquidos y los sólidos dan bandas de absorción anchas (fig. 145.2). A medida que aumenta la presión de los gases, los máximos de absorción, que al principio eran muy estrechos (véase la fig. 145.1), se ensanchan cada vez más, y a altas

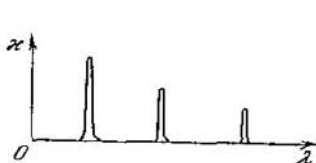


Fig. 145.1.

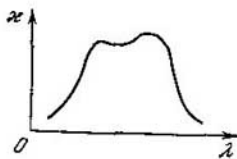


Fig. 145.2.

presiones el espectro de absorción de los gases se aproxima a los espectros de absorción de los líquidos. Este hecho indica que el ensanchamiento de las bandas de absorción es resultado de la interacción de los átomos entre sí.

Los metales son prácticamente opacos a la luz (su coeficiente α tiene un valor del orden de 10^6 m^{-1} ; para que pueda compararse, diremos que, para el vidrio, $\alpha \approx 1 \text{ m}^{-1}$). Esto se debe a la existencia de los electrones libres en los metales. Bajo la acción del campo eléctrico de la onda luminosa, los electrones se ponen en movimiento y en el metal se producen corrientes rápidamente variables acompañadas de desprendimiento de calor de Lenz-Joule. Como resultado, la energía de la onda luminosa disminuye rápidamente, transformándose en energía interna del metal.

§ 146. Difusión de la luz

Desde el punto de vista clásico, el proceso de la difusión de la luz consiste en que la luz que pasa a través de una sustancia hace oscilar los electrones en los átomos. Los electrones que oscilan excitan ondas secundarias que se propagan en todas las direcciones. Este fenómeno, al parecer, en cualesquiera condiciones debería conducir a la difusión de la luz. Pero las ondas secundarias son coherentes, por lo que es necesario tener en cuenta su interferencia mutua.

El cálculo correspondiente da que, en el caso de un medio homogéneo, las ondas secundarias se extinguen totalmente unas a otras en todas las direcciones, excepto en la que se propaga la onda pri-

maria. Por lo tanto, no se produce la redistribución de la luz entre las direcciones, es decir, su difusión.

Las ondas secundarias no se destruyen entre sí en las direcciones laterales únicamente cuando la luz se propaga en un medio no homogéneo. Las ondas luminosas, difractándose en las heterogeneidades del medio, dan una figura de difracción que caracteriza la distribución, bastante uniforme, de la intensidad en todas las direcciones. Esta difracción en heterogeneidades pequeñas recibe el nombre de *difusión de la luz*.

Los medios con heterogeneidad óptica claramente manifiesta se dice que son *turbios*. A estos medios pertenecen: 1) los humos, es decir, las suspensiones en gases de partículas sólidas pequeñísimas;



Fig. 146.1.

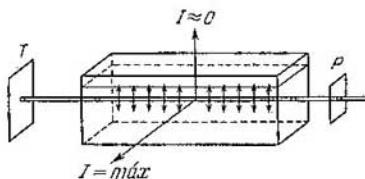


Fig. 145.2.

2) las nieblas, o suspensiones en gases de gotas líquidas muy pequeñas; 3) las suspensiones formadas por partículas sólidas flotantes en líquidos; 4) las emulsiones, o sea, las suspensiones de pequeñas gotas de un líquido en otro que no disuelve al primero (de ejemplo de emulsión puede servir la leche, que es una mezcla de gotitas de grasa en agua); 5) los sólidos como el nácar, los ópalos, los vidrios opalinos, etc.

La luz difusa por partículas cuyas dimensiones son mucho menores que la longitud de la onda luminosa resulta polarizada parcialmente. Esto se explica porque las oscilaciones de los electrones, producidas por el haz de luz que se difunde, tienen lugar en un plano perpendicular a dicho haz (fig. 146.1). Las oscilaciones del vector E en la onda secundaria se producen en un plano que pasa por la dirección de las oscilaciones de las cargas (véase la fig. 109.2). Por eso, la luz que difunden las partículas en las direcciones perpendiculares al haz estará totalmente polarizada. En las direcciones que forman con el haz un ángulo distinto del recto, la luz difusa sólo está polarizada parcialmente.

Como resultado de la difusión de la luz en las direcciones laterales, la intensidad en la dirección de propagación disminuye con más rapidez que en el caso en que sólo actúa la absorción. Por esto, para una sustancia turbia, en la expresión (145.1) debe figurar, además del coeficiente de absorción κ , un coeficiente adicional κ' condicio-

nado por la difusión:

$$I = I_0 e^{-(\kappa + \kappa')l}, \quad (146.1)$$

La constante κ' se llama *coeficiente de extinción*.

Si las dimensiones de las heterogeneidades son pequeñas en comparación con la longitud de la onda luminosa (no mayores que $\sim 0,1\lambda$), la intensidad de la luz difusa I es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia o inversamente proporcional a la cuarta potencia de la longitud de onda:

$$I \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}. \quad (146.2)$$

Esta dependencia recibe el nombre de *ley de Rayleigh*. Su origen es fácil de comprender si se tiene en cuenta que la potencia de radiación de una carga oscilante es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia y, por lo tanto, inversamente proporcional a la cuarta potencia de la longitud de onda (véase la fórmula (109.5)).

Si las dimensiones de las heterogeneidades son comparables con la longitud de onda, los electrones que se encuentran en distintos puntos de una heterogeneidad oscilan con desfase apreciable. Esta circunstancia complica el fenómeno y conduce a otras leyes: la intensidad de la luz difusa se hace proporcional sólo al cuadrado de la frecuencia (o inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de onda).

Una manifestación de la ley (146.2) se puede observar fácilmente haciendo pasar un haz de luz blanca a través de un recipiente con líquido turbio (fig. 146.2). A causa de la difusión de la luz, la traza del haz se ve bien en el líquido si se mira desde un lado, y como las ondas luminosas cortas sufren la difusión más intensamente que las largas, esta traza es azulina. El haz transmitido resulta ser rico en radiación de onda larga y la mancha que forma en la pantalla T no es blanca, sino amarillo-rojiza. Poniendo a la entrada del haz en el recipiente un polarizador P , descubrimos que la intensidad de la luz difusa no es la misma en distintas direcciones perpendiculares al rayo primario. La directividad de la radiación de dipolo (véase la fig. 109.3) hace que, en las direcciones que coinciden con el plano de oscilaciones del haz primario, la intensidad de la luz difusa sea prácticamente nula, mientras que en las direcciones perpendiculares al plano de oscilaciones la intensidad de la luz difusa es máxima. Girando el polarizador alrededor de la dirección del haz primario, observaremos el reforzamiento y debilitamiento alternativos de la luz difusa en la dirección dada.

Incluso los líquidos y los gases cuidadosamente depurados difunden la luz en cierto grado. Los físicos soviético L. I. Mandelstam y polaco M. Smolujovski establecieron que la causa de la aparición de heterogeneidades ópticas son, en este caso, las fluctuaciones de la densidad (es decir, las desviaciones de la densidad, respecto de

su valor medio, que se observan dentro de los límites de volúmenes pequeños). Estas fluctuaciones son causadas por el movimiento desordenado de las moléculas de la substancia; por esta razón, la difusión de la luz condicionada por ella se llama *molecular*.

Por la difusión molecular se explica el color azul del cielo. Los puntos en que el aire se condensa o enrarece, que continuamente surgen en la atmósfera a causa del movimiento desordenado de las moléculas, producen la difusión de la luz solar. Al ocurrir esto, según la ley (146.2), los rayos celestes y azules se difunden más intensamente que los amarillos y rojos, lo que condiciona el color azul del cielo. Cuando el Sol está bajo, los rayos que se propagan directamente desde él atraviesan un gran espesor del medio difusor, por lo que resultan ricos en ondas de gran longitud. Esta es la causa de que al amanecer el cielo adquiera tonalidades rojas.

Condiciones especialmente favorables para que se produzcan fluctuaciones considerables existen en las proximidades del estado crítico de la substancia (en el punto crítico $dp/dV = 0$; véase el § 123 del tomo 1^o). Estas fluctuaciones ocasionan una difusión de la luz tan intensa que, al «trasluz», una ampolla de vidrio llena de la substancia parece completamente negra. Este fenómeno se denomina *opalescencia crítica*.

§ 147. Efecto Vavílov—Cherenkov

En 1934, P. A. Cherenkov, bajo la dirección de S. I. Vavílov, descubrió un tipo especial de radiación de los líquidos sometidos a la acción de los rayos γ del radio. Vavílov expresó la suposición correcta de que la fuente de esta radiación son los electrones rápidos creados por los rayos γ . Este fenómeno recibió el nombre de *efecto Vavílov—Cherenkov*. Su explicación teórica completa fue dada en 1937 por I. E. Tamm e I. M. Frank¹⁾.

Según la teoría electromagnética, una carga en movimiento uniforme no radia ondas electromagnéticas (véase el § 109). Sin embargo, como demostraron Tamm y Frank, esto sólo es justo si la velocidad v de la partícula cargada no es mayor que la velocidad de fase c/n de las ondas electromagnéticas en el medio en que se mueve dicha partícula. Si $v > c/n$, incluso moviéndose uniformemente, la partícula radia ondas electromagnéticas. En realidad la partícula pierde energía en la radiación, por lo cual se mueve con aceleración negativa. Pero esta aceleración no es la causa (como en el caso en que $v < c/n$), sino la consecuencia de la radiación. Si la pérdida de energía debida a la radiación se compensara de algún modo, la partícula, moviéndose uniformemente con la velocidad $v > c/n$, sería, a pesar de todo, fuente de la radiación.

¹⁾ El trabajo de Cherenkov, Tamm y Frank fue distinguido con el premio Nobel de física 1958.

El efecto Vavílov—Cherenkov se ha observado experimentalmente con electrones, protones y mesones moviéndose en medios líquidos y sólidos.

En la radiación de Vavílov—Cherenkov predominan las ondas cortas, por lo que tiene color celeste. La propiedad más característica de esta radiación consiste en que no es emitida en todas las direcciones, sino únicamente a lo largo de las generatrices de un cono cuyo eje coincide con la dirección de la velocidad de la partícula (fig. 147.1). El ángulo ϑ entre las direcciones en que se propaga la radiación y el vector velocidad de la partícula se determina por la relación

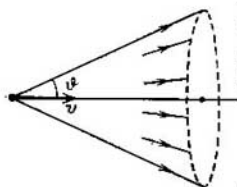


Fig. 147.1.

$$\cos \vartheta = \frac{c \cdot n}{v} = \frac{c}{nv}. \quad (147.1)$$

El efecto Vavílov—Cherenkov encuentra amplia utilización en la técnica experimental. En los llamados *contadores Cherenkov*, el destello producido por una partícula cargada rápida se transforma por medio de un fotomultiplicador¹⁾ en un impulso de corriente. Para que este contador entre en acción, la energía de la partícula debe ser mayor que el valor umbral determinado por la condición $v = c/n$. Por eso, los contadores Cherenkov no sólo permiten registrar las partículas, sino también juzgar acerca de su energía. Se consigue incluso determinar el ángulo ϑ entre la dirección del destello y la velocidad de la partícula, lo que da la posibilidad de calcular por la fórmula (147.1) la velocidad (y, por consiguiente, la energía) de la partícula.

¹⁾ Se llama **fotomultiplicador** un multiplicador electrónico, cuyo primer electrodo (fotocátodo) es capaz de emitir electrones bajo la acción de la luz.

CAPÍTULO XXI

ÓPTICA DE LOS MEDIOS EN MOVIMIENTO

§ 148. Velocidad de la luz

La velocidad de la luz en el vacío es una de las magnitudes físicas fundamentales. El establecimiento de la finitud de la velocidad de la luz tuvo una importancia esencial enorme. La finitud de la velocidad de transmisión de señales y de la transmisión de las interacciones se encuentra en la base de la teoría de la relatividad.

Debido a que el valor numérico de la velocidad de la luz es muy grande, la determinación experimental de esta velocidad constituye un problema muy complicado. Las primeras determinaciones de la velocidad de la luz se efectuaron basándose en las observaciones astronómicas. En 1676, el astrónomo danés O. Roemer halló la velocidad de la luz partiendo de la observación de los eclipses de los satélites de Júpiter. Obtuvo un valor igual a 215 000 km/s.

El movimiento de la Tierra por su órbita hace que la posición aparente de las estrellas en el firmamento varíe. Este fenómeno, llamado *aberración de la luz*, fue utilizado en 1727 por el astrónomo inglés J. Bradley para determinar la velocidad de la luz.

Supongamos que la dirección a la estrella que se observa con un telescopio es perpendicular al plano de la órbita de la Tierra. Entonces el ángulo entre la dirección a la estrella y el vector velocidad de la Tierra v será durante todo el año igual a $\pi/2$ (fig. 148.1). Dirijamos el eje del telescopio exactamente a la estrella. Durante el tiempo τ que necesita la luz para recorrer la distancia desde el objetivo hasta el ocular, el telescopio se desplazará junto con la Tierra, en dirección perpendicular al rayo de luz, la distancia $v\tau$. Como resultado, la imagen de la estrella no se encontrará en el centro del ocular. Para que esta imagen se encuentre exactamente en dicho centro hay que hacer girar un ángulo α el eje del telescopio en dirección al vector v . La tangente de este ángulo se determina por la relación

$$\operatorname{tg} \alpha = v/c \quad (148.1)$$

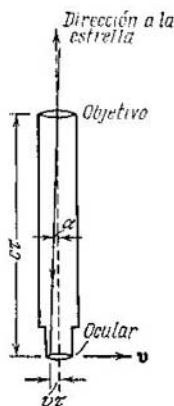


Fig. 148.1

(véase la fig. 148.1). Del mismo modo las gotas de lluvia que caen perpendicularmente sólo pasarán a través de un tubo largo, montado verticalmente en una carretilla en movimiento, si el eje de dicho tubo se inclina en la dirección de la marcha de la carretilla.

Así, la posición aparente de la estrella resulta desplazada, respecto de su verdadera posición, un ángulo α . El vector velocidad de la Tierra gira continuamente en el plano de la órbita. Por lo tanto, el eje del telescopio también gira describiendo un cono alrededor de la dirección verdadera a la estrella. Respectivamente, la posición aparente de la estrella en el firmamento describe una circunferencia cuyo diámetro angular es igual a 2α . Si la dirección a la estrella forma con el plano de la órbita de la Tierra un ángulo distinto del

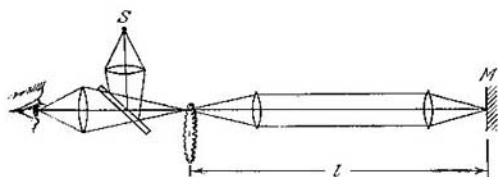


Fig. 148.2.

recto, su posición aparente describe una elipse cuyo eje mayor tiene la dimensión angular 2α . Para las estrellas que se encuentran en el plano de la órbita, la elipse degenera en una recta.

De las observaciones astronómicas halló Bradley que $2\alpha = 40,9''$. El valor respectivo de c , obtenido por la fórmula (148.1), resultó ser igual a 303 000 km/s.

En las condiciones de la Tierra la velocidad de la luz fue medida la primera vez, en el año 1849, por el científico francés H. L. Fizeau. El esquema de su experimento se da en la fig. 148.2. La luz del foco S incidía sobre un espejo semitransparente. La luz reflejada en el espejo iba a caer sobre el borde de un disco dentado que giraba rápidamente. Cada vez que frente al haz luminoso se encontraba un hueco entre los dientes, se producía un impulso luminoso que llegaba hasta el espejo M y se reflejaba en sentido contrario. Si en el instante en que la luz retornaba al disco, frente al haz había un hueco, el impulso reflejado pasaba parcialmente a través del espejo semitransparente y llegaba al ojo del observador. Si el impulso reflejado encontraba en su camino un diente del disco, el observador no veía la luz.

Durante el tiempo $\tau = 2l/c$ que tardaba la luz en recorrer el camino de ida y vuelta al espejo M , el disco tenía tiempo de girar un ángulo $\Delta\varphi = \omega\tau = 2l\omega/c$, donde ω es la velocidad angular de rotación del disco. Sea el número de dientes del disco igual a N . Entonces el ángulo entre los puntos medios de dos dientes vecinos

será $\alpha = 2\pi/N$. La luz no retornaba al ojo del observador cuando las velocidades de rotación del disco eran tales que durante el tiempo τ el disco tenía tiempo de girar los ángulos $\alpha/2, 3\alpha/2, \dots, (m-1/2)\alpha$ y así sucesivamente. Por lo tanto, la condición del m -ésimo oscurecimiento tiene la forma

$$\Delta\varphi = (m - 1/2)\alpha \quad \text{ó} \quad 2l\omega_m/c = (m - 1/2)2\pi/N.$$

Por esta fórmula, conociendo l , N y la velocidad angular ω_m con la cual se obtiene el m -ésimo oscurecimiento, se puede determinar c . En el experimento de Fizeau l era igual aproximadamente a 8,6 km. El valor de c que se obtuvo fue de 313 000 km/s.

En 1928 se utilizaron para medir la velocidad de la luz las células de Kerr (véase el § 140). Con ellas se pueden obtener intermitencias del haz luminoso con mucha más frecuencia ($\sim 10^7 \text{s}^{-1}$) que por medio del disco dentado. Esto dio la posibilidad de medir c con l del orden de varios metros.

A. A. Michelson realizó varias mediciones de la velocidad de la luz por el método del prisma giratorio. En la experiencia de Michelson efectuada en 1932, la luz se propagaba en un tubo de 1,6 km de longitud del cual se había extraído el aire.

En la actualidad la velocidad de la luz en el vacío se toma igual a

$$c = 299\,792,5 \pm 0,1 \text{ km/s.} \quad (148.2)$$

Advertimos que en todos los experimentos realizados con intermitencias de la luz, no se determinó su velocidad de fase, sino la de grupo. En el aire estas dos velocidades son prácticamente iguales.

§ 149. Experimento de Fizeau

Hasta ahora hemos supuesto que las fuentes, los receptores y los demás cuerpos con respecto a los cuales se consideraba la propagación de la luz, estaban en reposo. Es natural que nos interese el problema de cómo influye en la propagación de la luz el movimiento de la fuente de ondas luminosas. En este caso se plantea la necesidad de indicar con respecto a qué se efectúa el movimiento. En el § 103 se explicó que el movimiento de una fuente o de un receptor de ondas sonoras respecto del medio en que estas ondas se propagan influye en el transcurso de los fenómenos acústicos (efecto Doppler) y, por lo tanto, puede ser descubierto.

La teoría ondulatoria consideró inicialmente la luz como ondas elásticas que se propagaban en cierto medio hipotético llamado éter universal. Después de la creación de la teoría de Maxwell, el éter elástico fue sustituido por el éter portador de las ondas y de los campos electromagnéticos. Se entendía por este último un medio especial que, lo mismo que su antecesor el éter elástico, llenaba todo el espacio universal y penetraba en todos los cuerpos. Como el éter era un me-

dio, era de esperar la posibilidad de descubrir el movimiento de los cuerpos, por ejemplo, de las fuentes y receptores de luz, con respecto a él. En particular, podía esperarse la existencia del «viento etéreo» que soplaría a la Tierra durante el movimiento de ésta alrededor del Sol.

En la mecánica se estableció el principio de la relatividad de Galileo, según el cual todos los sistemas inerciales de referencia son equivalentes desde el punto de vista de la mecánica. El descubrimiento del éter hubiera hecho posible destacar (valiéndose de los fenómenos ópticos) un sistema de referencia especial, preponderante, absoluto. El movimiento de los demás sistemas hubiera podido considerarse con respecto a este sistema absoluto.

De este modo, el esclarecimiento del problema de la interacción del éter universal con el movimiento de los cuerpos desempeñaba un papel esencial. Podían admitirse tres posibilidades: 1) el éter permanece totalmente impasible al movimiento de los cuerpos; 2) el éter es arrastrado parcialmente por los cuerpos en movimiento, adquiriendo una velocidad igual a αv , en la que v es la velocidad del cuerpo con respecto al sistema de referencia absoluto, y α , un coeficiente de arrastre, menor que la unidad; 3) el éter es arrastrado totalmente por los cuerpos en movimiento, como la Tierra, por ejemplo, de un modo semejante a como el cuerpo al moverse arrastra la capa de gas próxima a su superficie. Pero esta última posibilidad está en contradicción con la existencia del fenómeno de la aberración de la luz. En el párrafo anterior se aclaró que la variación de la posición aparente de las estrellas se puede explicar por el movimiento del telescopio con respecto al sistema (medio) de referencia, en el cual se propaga la onda luminosa.

Para esclarecer el problema de si el éter es arrastrado o no por los cuerpos en movimiento, Fizeau realizó en 1851 el experimento siguiente. El haz de luz paralelo procedente de un foco S (fig. 149.1) se dividía, por medio de una lámina plateada semitransparente P , en dos haces, designados con las cifras 1 y 2. A expensas de la reflexión en los espejos M_1 , M_2 y M_3 , los haces, después de recorrer en total un camino L igual, volvían a incidir sobre la lámina P . El haz 1 pasaba parcialmente a través de P , y el haz 2 se reflejaba parcialmente, como resultado de lo cual surgían dos haces coherentes 1' y 2' que producían en el plano focal del anteojo una figura de interferencia en forma de franjas. En el camino de los haces 1 y 2 se colocaban dos tubos, por los cuales se podía hacer pasar agua con la velocidad u en las direcciones que indican las flechitas. El rayo 2 se propagaba en ambos tubos al encuentro del agua, y el 1, a favor de la corriente.

Cuando el agua estaba en reposo, los haces 1 y 2 recorrían el camino L en el mismo tiempo. Si el agua al moverse arrastrara siquiera parcialmente al éter, al abrir la corriente de agua el rayo 2, que se propagaba en contra de ella, debería tardar en recorrer el camino L .

más tiempo que el rayo 1, que se propagaba a favor de la corriente. Como resultado debería surgir entre los rayos cierta diferencia de marcha y la figura de interferencia se desplazaría.

La diferencia de marcha que nos interesa sólo podía producirse en el camino de los rayos que pasaban por el agua. Este camino tenía la longitud $2l$. Llamemos v a la velocidad de la luz con respecto al éter en el agua. Cuando el éter no es arrastrado por el agua, la velocidad de la luz con respecto al dispositivo coincidirá con v . Supongamos que el agua al moverse arrastra parcialmente al éter, comunicándole la velocidad αu con respecto al dispositivo (u es la velocidad del agua y α , el coeficiente de arrastre). Entonces la velocidad de la luz

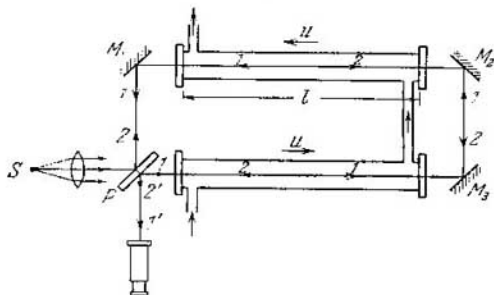


Fig. 149.1.

con respecto al dispositivo es igual a $v + \alpha u$ para el rayo 1 y a $v - \alpha u$ para el rayo 2. El rayo 1 recorre el camino $2l$ en el tiempo $t_1 = 2l/(v + \alpha u)$, y el rayo 2, en el tiempo $t_2 = 2l/(v - \alpha u)$. De la fórmula (115.4) se infiere que la longitud óptica del camino en recorrer el cual tarda la luz el tiempo t es igual a ct . Por consiguiente, la diferencia de marcha de los rayos 1 y 2 será $\Delta = c(t_2 - t_1)$. Dividiendo Δ por λ_0 se obtiene el número de franjas en que se desplaza la figura de interferencia cuando se abre la corriente de agua:

$$\Delta N = \frac{c(t_2 - t_1)}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_0} \left(\frac{2l}{v - \alpha u} - \frac{2l}{v + \alpha u} \right) = \frac{4cl\alpha u}{\lambda_0(v^2 - \alpha^2 u^2)}.$$

Fizeau descubrió que las franjas de interferencia se desplazan en realidad. El valor del coeficiente de arrastre correspondiente al desplazamiento resultó ser

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad (149.1)$$

donde n es el índice de refracción del agua. De este modo el experimento de Fizeau demostró que el éter (de existir) sólo es arrastrado parcialmente por el agua en movimiento.

Es fácil cerciorarse de que el resultado de la experiencia de Fizeau se explica por la ley relativista de composición de las velocidades. De acuerdo con la primera de las fórmulas (66.1) del tomo 1º, las velocidades v_x y v'_x de un cuerpo en los sistemas K y K' están ligadas por la relación

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + v_0 v'_x / c^2} \quad (149.2)$$

(v_0 es la velocidad del sistema K' respecto del sistema K).

Asociemos el dispositivo de Fizeau al sistema de referencia K , y el agua en movimiento al sistema K' . Entonces el papel de v_0 lo desempeñará la velocidad de la corriente de agua u ; el de v'_x , la velocidad de la luz con respecto al agua, igual a c/n , y, finalmente, el de v_x , la velocidad de la luz con relación al dispositivo v_{disp} . La sustitución de estos valores en la fórmula (149.2), da

$$v_{\text{disp}} = \frac{c/n + u}{1 + u(c/n)/c^2} = \frac{c/n + u}{1 + u/cn}$$

La velocidad de la corriente de agua u es mucho menor que c . Por lo tanto, la expresión obtenida se puede simplificar como sigue:

$$v_{\text{disp}} = \frac{c/n + u}{1 + u/cn} \approx \left(\frac{c}{n} + u\right) \left(1 - \frac{u}{cn}\right) \approx \frac{c}{n} + u \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad (149.3)$$

(hemos despreciado el término u^2/cn).

Según las representaciones clásicas, la velocidad de la luz con relación al dispositivo v_{disp} es igual a la suma de la velocidad de la luz respecto del éter, es decir, c/n , y la velocidad del éter respecto del dispositivo, o sea, αu : $w_{\text{disp}} = c/n + \alpha u$

La comparación con la fórmula (149.3) da para el coeficiente de arrastre α el valor obtenido por Fizeau (véase (149.1)).

Debe tenerse en cuenta que únicamente es igual en todos los sistemas de referencia la velocidad de la luz en el vacío. La velocidad de la luz en una substancia es distinta en diferentes sistemas de referencia. El valor c/n lo tiene en el sistema de referencia asociado al medio en el cual se propaga la luz.

§ 150. Experimento de Michelson

En 1881 efectuó A. A. Michelson el célebre experimento con que esperaba descubrir el movimiento de la Tierra respecto del éter (viento etéreo). Este mismo experimento, pero con un aparato más perfecto, volvió a realizarlo Michelson, en colaboración con E. W. Morley, en 1887. El dispositivo de Michelson y Morley se representa en la fig. 150.1. Sobre un fundamento de ladrillos descansaba un baño anular, de fundición, que contenía mercurio. En este mercurio nadaba un flotador de madera en forma de toro cortado lon-

gitudinalmente. Sobre este flotador se colocaba una pesada losa de piedra cuadrada. Este dispositivo permitía girar suavemente dicha losa alrededor del eje vertical del aparato. Sobre la losa se montaba un interferómetro de Michelson (véase la fig. 123.1) modificado de

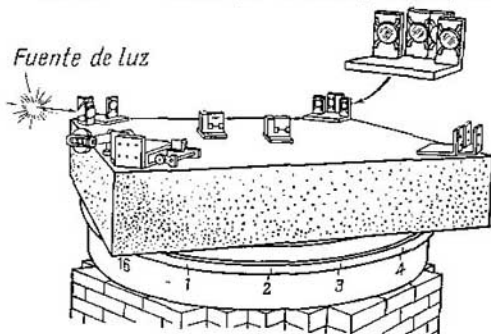


Fig. 150.1.

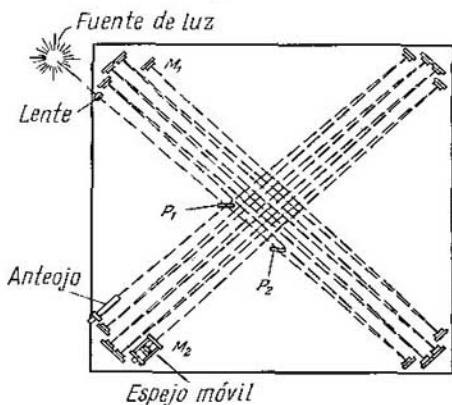


Fig. 150.2.

tal forma, que ambos rayos, antes de retornar a la lámina semitransparente, recorrían varias veces, yendo y viniendo, un camino que coincidía con la diagonal de la losa. El esquema de la marcha de los rayos se muestra en la fig. 150.2. En esta figura las designaciones están de acuerdo con las de la fig. 123.1.

De base del experimento servían los razonamientos siguientes. Supongamos que el brazo PM_2 del interferómetro (fig. 150.3) coincide con la dirección del movimiento de la Tierra respecto del éter. En este caso el tiempo que tarda el rayo 1 en recorrer el camino de ida y vuelta hasta el espejo M_1 será distinto del tiempo que tarde el rayo 2 en recorrer el camino PM_2P . Como resultado, incluso si las longitudes de ambos brazos son iguales, los rayos 1 y 2 adquieren cierta diferencia de marcha. Si el aparato se hace girar 90° , los brazos cambian de sitio y la diferencia de marcha cambia de signo. Esto debía

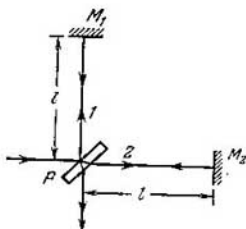


Fig. 150.2.

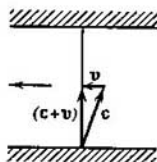


Fig. 150.4.

hacer que la figura de interferencia se desplazara en una magnitud que, según los cálculos de Michelson, se podría apreciar perfectamente.

Para calcular el desplazamiento esperado de la figura de interferencia hallamos el tiempo que tardan los rayos 1 y 2 en recorrer los caminos respectivos. Supongamos que la velocidad de la Tierra con respecto al éter sea v . Si el éter no fuera arrastrado por la Tierra y la velocidad de la luz con respecto a él fuera c (el índice de refracción del aire es prácticamente igual a la unidad), la velocidad de la luz con relación al aparato sería igual a $c - v$ en la dirección PM_2 y a $c + v$ en la dirección M_2P . Por lo tanto, para el rayo 2 el tiempo vendría determinado por la expresión

$$t_2 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2-v^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (150.1)$$

(la velocidad con que se mueve la Tierra por su órbita es igual a 30 km/s, por lo que $v^2/c^2 = 10^{-8} \ll 1$).

Antes de empezar a calcular el tiempo t_1 , consideremos el siguiente ejemplo de la mecánica. Una lancha de motor que desarrolla la velocidad c respecto del agua, tiene que cruzar un río, que fluye con la velocidad v , en dirección exactamente perpendicular a sus orillas (fig. 150.4). Para que la lancha se traslade en la dirección dada, su velocidad c respecto del agua debe estar dirigida como se indica

en la figura. Por consiguiente, la velocidad de la lancha respecto de las orillas debe ser igual a $|c + v| = \sqrt{c^2 + v^2}$. Así mismo debía determinarse (supuso Michelson) la velocidad del rayo I con respecto al aparato. Por lo tanto, para el rayo I el tiempo sería¹⁾

$$t_1 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (150.2)$$

Sustituyendo en la expresión $\Delta = c(t_2 - t_1)$ los valores de t_2 y t_1 (150.1) y (150.2), obtenemos la diferencia de marcha de los rayos I y 2 :

$$\Delta = 2l \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \right] = l \frac{v^2}{c^2}.$$

Al girar 90° el aparato, la diferencia de marcha cambia de signo. Por consiguiente, el número de franjas de interferencia en que se desplaza la figura es

$$\Delta N = \frac{2\Delta}{\lambda_0} = 2 \frac{l}{\lambda_0} \frac{v^2}{c^2}. \quad (150.3)$$

La longitud del brazo l (teniendo en cuenta la múltiple reflexión) era de 11 m. La longitud de onda de la luz, en el experimento de Michelson y Morley, era de $0,59 \mu\text{m}$. La sustitución de estos valores en la fórmula (150.3), da

$$\Delta N = \frac{2 \cdot 11}{0,59 \cdot 10^{-6}} 10^{-8} = 0,37 \approx 0,4 \text{ franjas.}$$

El aparato permitía descubrir desplazamientos del orden de 0,01 franja. Pero no se manifestó desplazamiento alguno de la figura de interferencia. Para excluir la posibilidad de que en el instante de hacer las mediciones el plano del horizonte resultara perpendicular al vector velocidad orbital de la Tierra, el experimento se repitió a distintas horas del día. Después se volvió a hacer muchas veces en distintas estaciones del año (durante el año el vector velocidad orbital de la Tierra gira 360° en el espacio) y siempre dio resultados negativos. Fue imposible descubrir el viento etéreo. El éter universal siguió siendo «inatrapable».

Se hicieron varios intentos de explicar el resultado negativo del experimento de Michelson sin renunciar a la hipótesis del éter universal, pero todos ellos resultaron infundados. La explicación exhaustiva y sin contradicciones de todos los hechos experimentales, incluidos los resultados del experimento de Michelson, fue dada por A. Einstein en 1905. Este llegó a la conclusión de que el éter universal, es decir, el medio especial que podría servir de sistema absoluto de referencia, no existe. De acuerdo con esto, Einstein extendió el

¹⁾ Hemos aplicado las fórmulas $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$ y $1/(1-x) \approx 1 + x$, que son válidas para valores pequeños de x .

principio mecánico de la relatividad a todos los fenómenos físicos sin exclusión. Más tarde, de acuerdo con los datos experimentales, Einstein postuló que la velocidad de la luz en el vacío es la misma en todos los sistemas inerciales de referencia y no depende del movimiento de las fuentes y de los receptores de luz.

El principio de la relatividad y el de la constancia de la velocidad de la luz constituyen la base de la teoría especial de la relatividad creada por Einstein (véase el capítulo VIII del tomo 1°).

§ 151. Efecto Doppler

En la acústica, la variación de la frecuencia debida al efecto Doppler está determinada por las velocidades de movimiento de la fuente y del receptor respecto del medio portador de las ondas sonoras (véase la fórmula (103.2)). Para las ondas luminosas también existe efecto Doppler. Sin embargo, no existe un medio especial que sirva

de portador de las ondas electromagnéticas. Por eso, el desplazamiento Doppler de las frecuencias de las ondas luminosas está determinado únicamente por la velocidad relativa de la fuente y el receptor.

Asociemos a la fuente de luz el origen de coordenadas del sistema K , y al receptor, el origen de coordenadas del sistema K' (fig. 151.1).

Los ejes x y x' los dirigimos, como de ordinario, a lo largo del vector velocidad v con que se mueve el sistema K' (es decir, el receptor) respecto del sistema K (o sea, de la fuente). La ecuación de la onda luminosa plana emitida por la fuente en dirección al receptor tendrá en el sistema K la forma

$$E(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right]. \quad (151.1)$$

Aquí ω es la frecuencia de la onda registrada en el sistema de referencia asociado a la fuente, es decir, la frecuencia con que oscila la fuente. Suponemos que la onda luminosa se propaga en el vacío, por lo que la velocidad de fase es c .

Según el principio de la relatividad, las leyes de la naturaleza tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales de referencia. Por lo tanto, en el sistema K' la onda (151.1) se describe por la ecuación

$$E'(x', t') = A' \cos \left[\omega' \left(t' - \frac{x'}{c} \right) + \alpha' \right], \quad (151.2)$$

en la que ω' es la frecuencia registrada en el sistema de referencia K' , es decir, la frecuencia que percibe el receptor. Hemos puesto

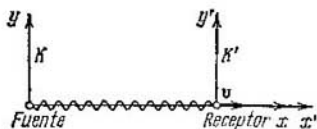


Fig. 151.1.

apóstrofos a todas las magnitudes, excepto c , que es igual en todos los sistemas de referencia.

La ecuación de la onda en el sistema K' se puede obtener de la ecuación en el sistema K , pasando de x y t a x' y t' por medio de las transformaciones de Lorentz. Sustituyendo en (151.1) x y t según las fórmulas (63.16) del tomo 1º, se obtiene

$$E(x', t') = A \cos \left\{ \omega \left[\frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{x' + vt'}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}} \right] + \alpha \right\}$$

(el papel de v_0 lo desempeña v). Esta expresión es fácil de reducir a la forma

$$E(x', t') = A \cos \left\{ \omega \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(t' - \frac{x'}{c} \right) + \alpha \right\}. \quad (151.3)$$

La ecuación (151.3) describe en el sistema K' la misma onda que la ecuación (151.2). Por eso deberá cumplirse la relación

$$\omega' = \omega \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \omega \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Hagamos los siguientes cambios en las designaciones: la frecuencia de la fuente ω , designémosla por ω_0 , y la del receptor ω' , por ω . Como resultado la fórmula toma la forma

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad (151.4)$$

Pasando de la frecuencia angular a la ordinaria, obtenemos:

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad (151.5)$$

La velocidad v del receptor respecto a la fuente, que figura en las fórmulas (151.4) y (151.5), es una magnitud algebraica. Cuando el receptor se aleja, $v > 0$ y, según (151.4), $\omega < \omega_0$; cuando el receptor se acerca a la fuente, $v < 0$, de manera que $\omega > \omega_0$.

En el caso en que $v \ll c$, la fórmula (151.4) se puede escribir aproximadamente así:

$$\omega \approx \omega_0 \frac{1 - (1/2)(v/c)}{1 + (1/2)(v/c)} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c} \right).$$

De aquí, limitándonos a los términos del orden de v/c , se obtiene:

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{v}{c} \right). \quad (151.6)$$

De esta fórmula se puede hallar la variación relativa de la frecuencia

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = - \frac{v}{c} \quad (151.7)$$

(por $\Delta \omega$ se entiende $\omega - \omega_0$).

Se puede demostrar que, además del *efecto longitudinal* que hemos estudiado, en las ondas luminosas existe el *efecto Doppler transversal*. Este consiste en la disminución de la frecuencia percibida por el receptor, que se observa cuando el vector velocidad relativa está dirigido perpendicularmente a la recta que pasa por el receptor y por la fuente¹⁾ (por ejemplo, cuando la fuente se mueve siguiendo una circunferencia en cuyo centro se halla el receptor). En este caso la frecuencia ω_0 en el sistema de la fuente está ligada con la frecuencia ω en el sistema del receptor por medio de la relación

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (151.8)$$

La variación relativa de la frecuencia en el efecto Doppler transversal

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (151.9)$$

es proporcional al cuadrado de v/c y, por consiguiente, mucho menor que en el efecto longitudinal, en el cual dicha variación es proporcional a la primera potencia de v/c .

La existencia del efecto Doppler transversal fue demostrada experimentalmente por H. E. Ives en 1938. En los experimentos de Ives se determinaba la variación de la frecuencia de radiación de los átomos de hidrógeno en los rayos canales (véase el último párrafo del § 85). La velocidad de los átomos era aproximadamente de $2 \cdot 10^6$ m/s. Estos experimentos constituyen una confirmación empírica directa de la validez de las transformaciones de Lorentz.

En el caso general el vector velocidad relativa se puede descomponer en dos componentes, uno de los cuales está dirigido a lo largo del rayo y otro, perpendicularmente a él. El primer vector componente condiciona el efecto Doppler longitudinal, y el segundo, el transversal.

El efecto Doppler longitudinal se utiliza para determinar la velocidad radial de las estrellas. Midiendo el desplazamiento relativo de las rayas en los espectros de las estrellas se puede hallar v por la fórmula (151.4).

El movimiento térmico de las moléculas de un gas luminoso hace que, debido al efecto Doppler, se ensanchen las rayas espectrales. A causa del carácter caótico del movimiento térmico, todas las direcciones de las velocidades de las moléculas respecto del espectrógrafo son igualmente probables. Por eso, en la radiación que registra el instrumento están presentes todas las frecuencias comprendidas en el intervalo desde $\omega_0 (1 - v/c)$ hasta $\omega_0 (1 + v/c)$, donde ω_0 es la frecuencia radiada por las moléculas, y v , la velocidad del movimiento térmico (véase la fórmula (151.6)). De este modo, la anchura

¹⁾ Se recordará que en las ondas acústicas no existe efecto Doppler transversal.

registrada de una raya espectral es igual a $2\omega_0 v/c$. La magnitud

$$\delta\omega_D = 2\omega_0 \frac{v}{c} \quad (151.10)$$

se llama *anchura de la raya espectral debida al efecto Doppler* (se entiende por v la velocidad más probable de las moléculas). Por la magnitud del ensanchamiento Doppler de las rayas espectrales se puede juzgar acerca de la velocidad del movimiento térmico de las moléculas y, por lo tanto, acerca de la temperatura del gas luminoso.

APÉNDICES

I. Unidades de las magnitudes eléctricas y magnéticas en el SI y en el sistema de Gauss

Constante eléctrica

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi (2,997925)^2 \cdot 10^9} \text{ F/m} \approx \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ F/m.}$$

Constante magnética

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m.}$$

Constante electrodinámica

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

Las relaciones entre las unidades se dan aproximadamente. Para obtener valores más exactos, en las relaciones que figuran en la última columna hay que sustituir 3 por 2,997925 y 9 por (2,997925)².

Magnitudes y sus símbolos	Unidades y sus símbolos		Relaciones entre las unidades
	SI	Sistema de Gauss	
Fuerza F	newton (N)	dina (din)	1 N = 10 ⁵ din
Trabajo A y energía W	julio (J)	ergio (erg)	1 J = 10 ⁷ erg
Carga q	culombio (C)	unid. CGSE	1 C = 3 · 10 ⁹ unid. CGSE
Intensidad de campo eléctrico E	voltio por metro (V/m)	unid. CGSE	1 unid. CGSE = 3 · 10 ⁴ V/m
Potencial ϕ , tensión U y f.e.m. \mathcal{E}	voltio (V)	unid. CGSE	1 unid. CGSE = 300 V
Momento eléctrico dipolar p	C · m	unid. CGSE	1 C · m = 3 · 10 ¹¹ unid. CGSE
Polarización P	C/m ²	unid. CGSE	1 C/m ² = 3 · 10 ⁵ unid. CGSE
Susceptibilidad dieléctrica κ	unid. SI	unid. CGSE	1 unid. CGSE = 4π unid. SI

Continuación

Magnitudes y sus símbolos	Unidades y sus símbolos		Relaciones entre las unidades
	SI	Sistema de Gauss	
Desplazamiento eléctrico (inducción eléctrica) D	culombio por metro cuadrado (C/m ²)	unid. CGSE	1 C/m ² = $4\pi \cdot 3 \cdot 10^5$ unid. GCSE
Flujo eléctrico de desplazamiento (flujo eléctrico de inducción) Φ	culombio (C)	unid. CGSE	1 C = $4\pi \cdot 3 \cdot 10^9$ unid. CGSE
Capacidad eléctrica C	faradio (F)	centímetro (cm)	1 F = $9 \cdot 10^{11}$ cm
Intensidad de corriente I	amperio (A)	unid. CGSE	1 A = $3 \cdot 10^9$ unid. CGSE
Densidad de corriente j	amperio por metro cuadrado (A/m ²)	unid. CGSE	1 A/m ² = $3 \cdot 10^5$ unid. CGSE
Resistencia eléctrica R	ohmio (Ω)	unid. CGSE	1 unid. CGSE = $9 \cdot 10^{11} \Omega$
Resistencia específica ρ	ohmio-metro ($\Omega \cdot m$)	unid. CGSE	1 unid. CGSE = $9 \cdot 10^9 \Omega \cdot m$
Conductividad específica σ	siemenio por metro (S/m)	unid. CGSE	1 S/m = $9 \cdot 10^9$ unid. CGSE
Inducción magnética B	tesla (T)	gaussio (Gs)	1 T = 10^4 Gs
Flujo de inducción magnética Φ y flujo magnético total o enlazado Ψ	weber (Wb)	maxwello (Mx)	1 Wb = 10^8 Mx
Momento magnético P_m	amperio-metro cuadrado (A · m ²)	unid. CGSM	1 A · m ² = 10^3 unid. CGSM
Imanación J	amperio por metro (A/m)	unid. CGSM	1 unid. CGSM = 10^3 A/m
Intensidad de campo magnético H	amperio por metro (A/m)	oerstedio (Oe)	1 A/m = $4 \pi \cdot 10^{-3}$ Oe 1 Oe = 79,6 A/m
Susceptibilidad magnética χ	unid. SI	unid. CGSM	1 unid. CGSM = 4π unid. SI
Inductancia L e inductancia mutua L_{12}	henrio (H)	centímetro (cm)	1 H = 10^9 cm

II. Fórmulas fundamentales del electromagnetismo en el SI y en el sistema de Gauss

Nombre	SI	Sistema de Gauss
Ley de Coulomb	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$
Intensidad de campo eléctrico (definición)		$E = \frac{F}{q}$
Intensidad del campo de una carga puntual	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{er^2}$	$E = \frac{q}{er^2}$
Intensidad del campo entre planos cargados y cerca de la superficie de un conductor cargado	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	$E = \frac{4\pi\sigma}{e}$
Potencial (definición)		$\varphi = \frac{W_p}{q}$
Potencial del campo de una carga puntual	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{er}$	$\varphi = \frac{q}{er}$
Trabajo de las fuerzas del campo sobre una carga		$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$
Relación entre E y φ		$E = -\nabla\varphi$
Relación entre φ y E		$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E \, dl$
Rotor del vector E para un campo electrostático		$[\nabla E] = 0$
Circulación del vector E para un campo electrostático		$\oint E \, dl = 0$
Momento eléctrico de dipolo		$p = ql$
Momento mecánico que actúa sobre un dipolo en un campo eléctrico		$N = [pE]$
Energía de un dipolo en un campo eléctrico		$W = -pE$
Momento dipolar de una molécula "elástica"	$p = \beta\epsilon_0 E$	$p = \beta E$

Continuación

Nombre	SI	Sistema de Gauss
Polarización (definición)		
Relación entre P y E	$P = \kappa \epsilon_0 E$	$P = \kappa E$
Relación entre P y la densidad espacial de las cargas ligadas	$\rho' = -\nabla \cdot P$	
Relación entre P y la densidad superficial de las cargas ligadas	$\sigma' = P_n$	
Desplazamiento eléctrico (inducción eléctrica) (definición)	$D = \epsilon_0 E + P$	$D = E + 4\pi P$
Divergencia del vector D	$\nabla \cdot D = \rho$	$\nabla \cdot D = 4\pi \rho$
Teorema de Gauss para D	$\oint D \cdot dS = \sum q$	$\oint D \cdot dS = 4\pi \sum q$
Relación entre la permitividad ϵ y la susceptibilidad dieléctrica κ	$\epsilon = 1 + \kappa$	$\epsilon = 1 + 4\pi \kappa$
Relación entre los valores de κ en el SI y en el sistema de Gauss		$\kappa_{SI} = 4\pi \kappa_{SG}$
Relación entre D y E	$D = \epsilon \epsilon_0 E$	$D = \epsilon E$
Relación entre D y E en el vacío	$D = \epsilon_0 E$	$D = E$
D del campo de una carga puntual	$D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}$	$D = \frac{q}{r^2}$
Capacidad de un condensador (definición)	$C = \frac{q}{U}$	
Capacidad de un condensador plano	$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$	$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$
Energía de un sistema de cargas	$W = \frac{1}{2} \sum q\varphi$	
Energía de un condensador cargado	$W = \frac{CU^2}{2}$	
Densidad de energía de un campo eléctrico	$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$	$w = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$

Continuación

Nombre	SI	Sistema de Gauss
Intensidad de corriente (definición)		$I = \frac{dq}{dt}$
Densidad de corriente (definición)		$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}$
Ecuación de continuidad		$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$
Tensión (definición)		$U = \Phi_1 - \Phi_2 + \mathcal{E}_{12}$
Ley de Ohm		$I = \frac{1}{R} U$
Ley de Ohm en forma diferencial		$j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E$
Ley de Joule—Lenz		$Q = \int_0^t RI^2 dt$
Ley de Joule—Lenz en forma diferencial		$D = \rho j^2$
Fuerza de interacción de dos corrientes paralelas en el vacío (referida a la unidad de longitud)	$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}$	$F = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2}{b}$
Campo de una carga en movimiento libre	$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [vr]}{r^3}$	$B = \frac{1}{c} \frac{q [vr]}{r^3}$
Ley de Biot—Savart	$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [dl, r]}{r^3}$	$dB = \frac{1}{c} \frac{I [dl, r]}{r^3}$
Fuerza de Lorentz	$F = qE + q [vB]$	$F = qE + \frac{q}{c} [vB]$
Ley de Ampere	$dF = I [dl, B]$	$dF = \frac{1}{c} I [dl, B]$
Momento magnético de un circuito con corriente	$p_m = IS$	$p_m = \frac{1}{c} IS$
Momento mecánico que actúa sobre el momento magnético en un campo magnético		$N = [p_m B]$

Continuación

Nombre	SI	Sistema de Gauss
Energía "mecánica" del momento magnético en un campo magnético	$W = -p_m B$	
Divergencia del vector B	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	
Teorema de Gauss para B	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	
Imanación (definición)	$\mathbf{J} = \frac{\sum p_m}{\Delta V}$	
Intensidad de campo magnético (definición)	$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{J}$	$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{J}$
Relación entre J y H	$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}$	
Relación entre la permeabilidad magnética μ y la susceptibilidad magnética χ	$\mu = 1 + \chi$	$\mu = 1 + 4\pi \chi$
Relación entre los valores de χ en el SI y en el sistema de Gauss	$\chi_{SI} = 4\pi \chi_{SG}$	
Relación entre B y H	$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
Relación entre B y H en el vacío	$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mathbf{H}$
Rotor del vector H en el caso de un campo estacionario	$[\nabla \mathbf{H}] = \mathbf{j}$	$[\nabla \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$
Circulación del vector H en el caso de un campo estacionario	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \sum I$
Intensidad del campo magnético de una corriente directa	$H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{b}$	$H = \frac{1}{c} \frac{2I}{b}$
Intensidad del campo magnético en el centro de una corriente circular	$H = \frac{I}{2R}$	$H = \frac{1}{c} \frac{2\pi I}{R}$
Intensidad del campo de un solenoide	$H = nI$	$H = \frac{4\pi}{c} nI$

Continuación

Nombre	SI	Sistema de Gauss
Flujo de inducción magnética (definición)		$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
Trabajo realizado sobre un circuito con corriente al trasladarlo en un campo magnético	$A = I\Delta\Phi$	$A = \frac{1}{c} I\Delta\Phi$
Flujo enlazado o flujo magnético total (definición)		$\Psi = \sum \Phi$
F.e.m. de inducción	$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}$	$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt}$
Inductancia (definición)	$L = \frac{\Psi}{I}$	$L = c \frac{\Psi}{I}$
Inductancia de un solenoide	$L = \mu_0 \mu n^2 l S$	$L = 4\pi \mu n^2 l S$
F.e.m. de autoinducción (en ausencia de materiales ferromagnéticos)	$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$	$\mathcal{E}_s = -\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt}$
Energía del campo magnético de una corriente	$W = \frac{LI^2}{2}$	$W = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2}$
Densidad de la energía de un campo magnético	$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$	$w = \frac{\mu H^2}{8\pi}$
Energía de los circuitos acoplados con corriente	$W = \frac{1}{2} \sum L_{lk} I_l I_k$	$W = \frac{1}{2c^2} \sum L_{lk} I_l I_k$
Densidad de corriente de desplazamiento	$\mathbf{j}_{des} = \dot{\mathbf{D}}$	$\mathbf{j}_{des} = \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}}$
Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial	$[\nabla \cdot \mathbf{E}] = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $[\nabla \times \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$[\nabla \cdot \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $[\nabla \times \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho$

Continuación

Nombre	SI	Sistema de Gauss
Ecuaciones de Maxwell en forma integral	$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \int_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{S}$ $\oint_{S} \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0$ $\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \int_{S} \mathbf{j} \, d\mathbf{S} + \int_{S} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, d\mathbf{S}$ $\oint_{S} \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = \int_{V} \rho \, dV$	$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \frac{1}{c} \int_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{S}$ $\oint_{S} \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0$ $\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_{S} \mathbf{j} \, d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \int_{S} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \, d\mathbf{S}$ $\oint_{S} \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = 4\pi \int_{V} \rho \, dV$
Velocidad de las ondas electromagnéticas		$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
Relación entre las amplitudes de los vectores E y H en una onda electromagnética	$E_m \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_m \sqrt{\mu_0 \mu}$	$E_m \sqrt{\epsilon} = H_m \sqrt{\mu}$
Vector de Poynting	$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$
Densidad de impulso de un campo electromagnético	$\mathbf{K} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$	$\mathbf{K} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$

III. Potencial vectorial

En el § 49 se indicó que la inducción magnética \mathbf{B} se puede representar en la forma

$$\mathbf{B} = [\nabla\mathbf{A}], \quad (\text{III.1})$$

en la que \mathbf{A} es cierta función denominada *potencial vectorial* o *potencial vector*. Esta representación es posible debido a que la divergencia del rotor es siempre nula. Por eso la condición $\nabla\mathbf{B} = 0$ se cumple automáticamente en esta representación.

De un modo semejante al potencial escalar φ del campo eléctrico, el potencial vector \mathbf{A} no se determina unívocamente. La adición a \mathbf{A} del gradiente de una función arbitraria ψ no hace que varíe el valor de $[\nabla\mathbf{A}]$, es decir, de \mathbf{B} . En efecto sustituycmos \mathbf{A} por $\mathbf{A} + \nabla\psi$. Según (11.38), el rotor del gradiente de

cualquier función es nulo. Por lo tanto,

$$[\nabla, (A + \nabla\psi)] = [\nabla A] + [\nabla, \nabla\psi] = [\nabla A].$$

De este modo, la función

$$A' = A + \nabla\psi, \quad (\text{III.2})$$

lo mismo que la A , será el potencial vector del campo magnético dado.

Tomando la divergencia de la función (III.2), obtenemos-

$$\nabla A' = \nabla A + \nabla(\nabla\psi) = \nabla A + \Delta\psi.$$

Eligiendo la función ψ puede asignarse a $\nabla A'$ cualquier valor prefijado, y, en particular, el de cero. Así, el potencial vector siempre se puede elegir de tal forma que su divergencia sea nula:

$$\nabla A = 0, \quad (\text{III.3})$$

es decir, de manera, que el campo A no tenga manantiales.

Advertimos que, incluso si se cumple la condición (III.3), la función A sigue siendo multiforme. Para que la determinación del potencial vector sea unívoca hay que dar las condiciones de frontera para A .

Ecuación de Poisson. De acuerdo con (13.5), para un campo en el vacío

$$\nabla E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

Sustituycamos en esta relación E por $-\nabla\varphi$:

$$\nabla(\nabla\varphi) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

El primer miembro de esta fórmula es $\nabla^2\varphi = \Delta\varphi$, donde Δ es el operador de Laplace. De esta forma llegamos a la ecuación

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (\text{III.4})$$

llamada *ecuación de Poisson*. En forma desarrollada esta ecuación tiene el aspecto siguiente:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (\text{III.5})$$

El potencial del campo creado por un sistema de cargas distribuidas con la densidad $\rho(r)$ se puede obtener valiéndose del principio de superposición y de la expresión del potencial de una carga puntual. Indicando con un apóstrofo las variables respecto de las cuales se efectúa la integración, se obtiene

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r') dV'}{|r - r'|}. \quad (\text{III.6})$$

La función (III.6) es la solución de la ecuación (III.4).

Sustituycamos en la fórmula (49.9) B por el rotor de A ;

$$[\nabla, [\nabla A]] = \mu_0 j.$$

Transformando el primer miembro de acuerdo con la fórmula (11.40), obtenemos

$$\nabla(\nabla A) - \Delta A = \mu_0 j.$$

Y eligiendo A de manera que se cumpla la condición (III.3), llegamos a la ecuación

$$\Delta A = -\mu_0 j, \quad (III.7)$$

análoga a la (III.4), que es la ecuación de Poisson para el potencial vector.

La ecuación (III.7) equivale a tres ecuaciones escalares:

$$\Delta A_k = -\mu_0 j_k \quad (k = x, y, z). \quad (III.8)$$

La solución de estas ecuaciones se puede obtener sustituyendo en (III.6) la función $(1/\epsilon_0) \rho(r')$ por la función $\mu_0 j_k(r')$ (compárense las ecuaciones (III.4) y (III.8)). Como resultado obtenemos

$$A_k(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_k(r') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (k = x, y, z). \quad (III.9)$$

Las tres expresiones (III.9) se pueden unificar en una vectorial:

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(r') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (III.10)$$

Advertimos que la integración en las fórmulas (III.9) y (III.10) se extiende a toda la región por la cual pasan las corrientes que crean el campo.

La fórmula (III.10) permite, conociendo la distribución de las corrientes en el espacio, calcular el potencial vector del campo que dichas corrientes crean. Determinando luego el rotor del potencial vector, se halla la inducción magnética \mathbf{B} del campo.

Ley de Biot — Savart. Calculemos el potencial vector creado por la corriente I que pasa por un conductor delgado. Para ello dividimos el conductor en elementos de longitud dl y equiparamos a cada elemento un vector $d\mathbf{l}$ cuyo módulo sea igual a dl y cuya dirección coincida con la del vector densidad de corriente \mathbf{j} en el elemento dado del conductor (fig. III.1). La posición del elemento $d\mathbf{l}$ respecto del origen de coordenadas O se determina por el radio vector \mathbf{r}' , y la del punto P , en que se determina el potencial vector, por el radio vector \mathbf{r} .

Según la fórmula (III.10), el elemento de corriente $d\mathbf{l}$ hace al potencial vector, en el punto cuyo radio vector es \mathbf{r} , la aportación

$$d\mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}(r') S' dl}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (III.11)$$

en la que S' es el área de la sección transversal del conductor en el punto r' , y $S' dl = dV'$ es el volumen del elemento $d\mathbf{l}$. Como los vectores $\mathbf{j}(r')$ y $d\mathbf{l}$ tienen la misma dirección, el numerador de la fórmula (III.11) se puede transformar del modo siguiente:

$$\mathbf{j}(r') S' dl = \mathbf{j}(r') S' dl = I d\mathbf{l},$$

donde I es la intensidad de la corriente que pasa por el conductor. Así, a la fórmula (III.11) se le puede dar la forma

$$d\mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (III.12)$$

Advertimos que $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}'$ es el incremento del vector \mathbf{r}' sobre el segmento $d\mathbf{l}$.

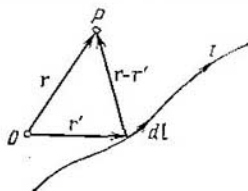


Fig. III.1.

El potencial vector en el punto P es igual a la suma de las expresiones (III.12)

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{III.13})$$

Para subrayar que la posición del segmento $d\mathbf{l}$ respecto del origen de coordenadas O está determinado por el radio vector \mathbf{r}' , la hemos escrito en la forma $d\mathbf{l}(r')$. La integración se hace a todo lo largo del conductor.

La inducción magnética en el punto P se determina por el rotor de la función (III.13)

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\nabla_r, \int \frac{d\mathbf{l}(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \quad (\text{III.14})$$

(las magnitudes escalares constantes las hemos sacado del signo de rotor).

En la fórmula (III.14) la integración se efectúa respecto de las coordenadas con apóstrofo (es decir, de las coordenadas del punto en que se halla el elemento $d\mathbf{l}$), y la derivación, al calcular el rotor, respecto de las coordenadas sin apóstrofo (o sea, de las coordenadas del punto P); para subrayar esto se le ha puesto al operador ∇ el subíndice r . Por esta razón, las operaciones de integración y de cálculo del rotor se pueden cambiar de sitio entre sí. Como resultado, la fórmula (III.14) toma la forma

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \left[\nabla_r, \frac{d\mathbf{l}(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]. \quad (\text{III.15})$$

En la expresión (III.15) el rotor se toma del producto del vector $d\mathbf{l}(r')$ por el escalar $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. De acuerdo con las reglas de derivación, el rotor consta en este caso de dos componentes, en uno de los cuales el operador ∇_r actúa sobre el factor vectorial, y en el otro, sobre el factor escalar. El factor vectorial $d\mathbf{l}(r')$ no contiene coordenadas sin apóstrofo. Esto hace que el primer sumando sea nulo. Por lo tanto, la

función subintegral en (III.15) se puede representar en la forma

$$\left[\nabla_r, \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{l}(r') \right].$$

Unos cálculos fáciles dan para el gradiente de la función $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 1/\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ (al hallar el gradiente la derivación se efectúa respecto de las coordenadas x, y, z) el valor $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$. Teniendo esto en cuenta, la fórmula (III.15) toma la forma

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I [d\mathbf{l}, (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (\text{III.16})$$

Hemos llegado a la ley de Biot — Savart (véase la fórmula (42.3), en la que \mathbf{r} corresponde a $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ en la fórmula (III.16).

Campo a grandes distancias de un circuito con corriente. Halleemos por medio del potencial vector la inducción magnética \mathbf{B} del campo creado por un circuito plano con corriente a distancias mucho mayores que las dimensiones lineales del circuito.

Los ejes x e y se eligen en el plano del circuito de manera que el sentido de la corriente forme con el eje z un sistema dextrógiro (fig. III.2; en esta I ura

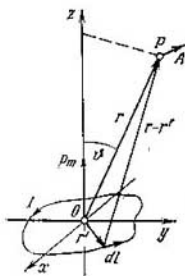


Fig. III.2.

las designaciones son las mismas que en la fig. III.4). Según la fórmula (III.13),

$$A(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{III.17})$$

La integral se toma ahora sobre el contorno cerrado.

Aprovechando que, por la condición impuesta, $r' \ll r$, conservamos en la expresión subintegral únicamente los términos de orden r'/r y omitimos los de órdenes de infinitud más altos. Teniendo esto en cuenta, la función $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ se puede representar en la forma

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}' + r'^2}} \approx \frac{1}{r} \sqrt{1 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2} \quad (\text{III.18})$$

(hemos omitido bajo el signo de raíz el sumando $(r'/r)^2$). Como $2\mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2 \ll 1$, la cadena de transformaciones (III.18) se puede continuar como sigue:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r(1 - \mathbf{r}\mathbf{r}'/r^2)} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^2} \right). \quad (\text{III.19})$$

Sustituyendo en (III.17) la función subintegral por su expresión aproximada (III.19), obtenemos

$$A(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} \oint d\mathbf{l} + \frac{1}{r^3} \oint (\mathbf{r}\mathbf{r}') d\mathbf{l} \right\} \quad (\text{III.20})$$

(hemos aprovechado que r no depende de las co-

ordenadas con apóstrofo). El primer sumando es nulo, puesto que $\oint d\mathbf{l} = 0$.

Transformemos el segundo sumando expresando el producto escalar mediante los componentes de los vectores que se multiplican y representando $d\mathbf{l}$ en la forma $e_x dx' + e_y dy'$ (se recordará que x' e y' son las coordenadas del punto en que se encuentra $d\mathbf{l}$; x' es igual a cero en este punto). Como resultado la expresión (III.20) toma la forma

$$A(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint (xx' + yy') (e_x dx' + e_y dy') = \\ = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left\{ e_x \left(x \oint x' dx' + y \oint y' dx' \right) + e_y \left(x \oint x' dy' + y \oint y' dy' \right) \right\}. \quad (\text{III.21})$$

Las coordenadas sin apóstrofo las hemos sacado del signo de las integrales porque la integración se efectúa respecto de las coordenadas con apóstrofo.

Bajo el signo de integral $\oint x' dx'$ figura la función diferencial $x'^2/2$. La integral de una diferencial total tomada sobre un camino cerrado es nula. Análogamente es nula $\oint y' dy'$. Por lo tanto, la expresión (III.21) se simplifica como sigue:

$$A(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} = \left\{ e_{xy} \oint y' dx' + e_{yx} \oint x' dy' \right\}. \quad (\text{III.22})$$

En la fig. III.3 se ve que la primera integral en (III.22) es igual al área del circuito S tomada con signo menos, y la segunda integral, al área S tomada

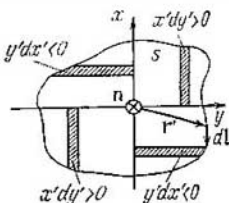


Fig. III.3.

con signo más. De este modo,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 IS}{4\pi r^3} (-e_x y + e_y x). \quad (\text{III.23})$$

Introducimos la normal positiva \mathbf{n} al plano del circuito, es decir, un vector de componentes $(0, 0, 1)$, y calculamos el producto vectorial

$$[\mathbf{n}\mathbf{r}] = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -e_x y + e_y x.$$

La comparación con (III.23) muestra que la expresión del potencial vector se puede representar en la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 IS}{4\pi r^3} [\mathbf{n}\mathbf{r}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[(IS\mathbf{n}), \mathbf{r}]}{r^3}.$$

El factor $IS\mathbf{n}$ es el momento magnético \mathbf{p}_m del circuito (véase la fórmula (46.5)). Por consiguiente,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{p}_m \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (\text{III.24})$$

De la expresión obtenida se infiere que el vector \mathbf{A} es en cada punto P perpendicular al plano que pasa por la dirección del vector \mathbf{p}_m y por el punto P (véase la fig. III.2).

Sustituyendo IS por \mathbf{p}_m , representamos la expresión (III.23) en la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{p}_m}{4\pi r^3} (-y e_x + x e_y). \quad (\text{III.25})$$

Calculando el rotor de la función (III.25), hallamos la inducción magnética del campo:

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}] = \frac{\mu_0 \mathbf{p}_m}{4\pi} \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{r^3} & \frac{x}{r^3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 \mathbf{p}_m}{4\pi r^5} (3xz e_x + 3yz e_y + (3z^2 - r^2) e_z). \quad (\text{III.26})$$

Con la fórmula (III.26) se puede calcular \mathbf{B} en cualquier punto que se encuentre del circuito a una distancia r mucho mayor que las dimensiones lineales de éste. Por esta fórmula, para los puntos $(0, 0, z)$ que se encuentran sobre el eje z , se obtiene el valor

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 \mathbf{p}_m}{4\pi r^5} (2z^2 e_z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{r^3} \quad (\text{III.27})$$

($\mathbf{p}_m e_z = \mathbf{p}_m$; $z^2 = r^2$). La fórmula (III.27) coincide con la (47.2) obtenida para el circuito circular. Para los puntos $(x, y, 0)$ que se encuentran en el plano del circuito,

$$\mathbf{B}(x, y, 0) = \frac{\mu_0 \mathbf{p}_m}{4\pi r^5} (-r^2 e_z) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}$$

(compárese con las fórmulas (9.9) y (9.10)).

Hallemos el módulo del vector B en un punto de coordenadas x, y, z . Según la fórmula (III.26)

$$\begin{aligned}
 B^2 &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \right)^2 \{ 9x^2z^2 + 9y^2z^2 + (3z^2 - r^2)^2 \} = \\
 &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \right)^2 \left\{ \frac{9(x^2 + y^2)z^2 + (3z^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2}{r^4} \right\}.
 \end{aligned}$$

Por medio de cálculos sencillos podemos cerciorarnos de que la expresión que figura entre llaves se puede representar en la forma

$$1 + 3 \frac{z^2}{r^2} = 1 + 3 \cos^2 \vartheta,$$

donde ϑ es el ángulo entre el vector p_m y la dirección al punto P (véase la fig. III.2). De este modo llegamos a la expresión

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{P_m}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}$$

(véase la fórmula (47.6)).

ÍNDICE ALFABÉTICO DE MATERIAS

- Aberración de la luz, 401
 Aitica (tono) del sonido, 309
 Amperio, 105, 120, 167, 200
 Amplitud compleja, 297, 338, 395, 397,
 — 479, 482
 — de la onda, 293, 304
 Angström (Å) 64
 Anillos de Newton, 389
 Antiferromagnéticos, materiales ~, 191

 Betatrón, 236, 332
 Biprisma de Fresnel, 380

 Camino óptico, 351, 354
 Campo de potencial 212
 — eléctrico, 18, 212
 — electrostático, 29, 55, 56, 212
 — magnético, 122, 123, 153
 — rotacional, 157, 196, 211, 236, 332
 — solenoidal, 157, 197
 Candela (cd), 347, 350
 Carga de ensayo, 19, 24
 — eléctrica, 13, 14, 134, 275
 — elemental, 13, 16, 17, 179, 230, 231
 — específica, 221, 223, 231
 — puntual, 14, 19
 Cargas extrañas, 68
 — inducidas, 92
 Cargas libres, 68
 — ligadas, 68, 70, 73
 Célula de Kerr, 472, 493
 Centímetro, 94, 200
 Ciclotrón, 239
 Circulación, 46, 47, 48
 — del vector B , 153-156
 — — — E , 55
 — — — H , 166
 Coeficiente de absorción, 305, 484, 485
 — — extinción, 488
 Coherencia, 370, 372
 — espacial, 370, 375, 378
 — temporal, 370, 375, 384
 Colores complementarios, 469
 Condensador, 51, 62, 63, 94, 95, 96
 Conductividad eléctrica, 110, 245
 Constante de Curie, 184, 186
 — — Parady, 230
 — — Hall, 247, 249
 — — Kerr, 472
 — — Planck, 179
 — — rotación, 473
 — — tiempo, 268, 258
 — — Verdet, 474
 — eléctrica (ϵ_0), 11, 18, 96, 122
 — electrodinámica (c), 11, 121, 122
 — magnética (μ_0), 11, 120, 122
 Convergencia, 360
 Corriente casi estacionaria, 273
 Corriente continua, 105, 113
 — de desplazamiento, 215, 216, 217
 Corrientes de Foucault, 198, 199
 — en torbellino, 198

 Corriente inducida, 192
 Corrientes moleculares, 162, 176
 Corriente total, 215
 Criterio de Rayleigh, 438, 447
 Culombio, 17, 76, 105, 120

 Decibelio, 310
 Decremento logarítmico de amortiguamiento, 278, 279
 Densidad de carga, 57, 59, 69, 71, 73, 78
 — — corriente, 104
 — — la energía del campo eléctrico, 101,
 102
 — — — — — magnético, 208
 — — — — — fuerza magnética, 133
 — del flujo de energía, 302, 320
 — — impulso, 329
 — óptica, 334
 Desplazamiento eléctrico, 11, 74
 Dicroísmo, 460
 Dieléctrico, 64
 Diferencia de recorrido óptico, 367
 Difracción de Fraunhofer, 402, 430
 — — Fresnel, 402, 430
 — — la luz, 402
 — — rayos paralelos, 402
 — — por una rendija, 421, 423, 426
 Dioptría, 360
 Dipolo, 30, 38, 66, 330, 331
 Dispersión de la luz, 334, 475
 — — un instrumento espectral, 436, 437
 — — por una red de difracción, 437
 — — — substancia, 475
 Divergencia, 43, 44, 46, 53
 — del campo eléctrico, 58
 — — — magnético, 153
 Doble refracción, 324, 459, 461
 Dominios, 88, 190

 Ecuación de continuidad, 101, 214
 — — la onda amortiguada, 294
 — — — — esférica, 295
 — — — — plana, 293
 Ecuaciones de Maxwell, 218, 219, 319
 — — — en forma integral, 219, 220
 Ecuación de onda, 207, 298, 320
 Efecto Doppler, 317, 318, 493
 — — Faraday, 474
 — — Kerr, 471
 Eficacia luminosa de las franjas de Interferencia, 393
 Electrolitos, 230
 Electrón, 13, 226, 227, 228, 230
 Electrón-voltio, 26
 Emitancia luminosa, 348, 349
 Energía del campo eléctrico, 100, 274
 — — — magnético, 207, 274
 — — de una onda, 301
 Enfoque magnético, 227
 Espectrógrafo de masas, 233, 234
 Espejos de Fresnel, 379
 Espín, 178, 179
 Espiral de Cornu, 417, 420

- Eter, 303, 493, 494, 496, 499
 Experimento de Arago, 415
 — — Barnett, 178
 — — Busch, 227
 — — Einstein—Haas, 177, 178
 — — Fizeau, 492, 494, 495
 — — Hertz, 323, 324
 — — Ives, 502
 — — Laue, Friedrich y Knipping, 440-441
 — — Lébedev, 324, 329
 — — Mandelshtam y Papalexí, 242
 — — Michelson, 493, 496
 — — Michelson-Morley, 392, 496, 499
 — — Millikan, 228
 — — Oersted, 122, 123
 — — Popov, 325
 — — Riecke, 241
 — — Stern y Gerlach, 179, 180
 — — Thomson, 226, 228, 231
 — — Tolman y Stuart, 242
 — — Young, 379
- Factor de calidad, 279
 Faradio, 94
 Ferrocélicos, 87, 188
 Flujo de energía, 302
 — — — vector, 39, 40
 — — — enlazado, 196
 — — — luminoso, 346
 — — — magnético total, 196, 201
 Fórmula de Bragg-Wulff, 444
 — — — Newton, 361
 — — — Thomson, 276
 Fórmulas de Fresnel, 456, 457, 459
 — — — Laue, 442, 444
 — — — del sistema óptico centrado, 361
 — — — de transformación de las fuerzas, 136
 — — — — — los campos, 138, 139
 Frente de onda, 291, 363
 Fuentes de coseno, 349
 Fuente lambertiana, 349
 — — — puntual, 295, 348
 Fuerza coercitiva, 87, 188
 — — — de Lorentz, 130, 461
 — — — electromotriz, 168
 — — — autoinducida, 201, 202, 205
 — — — inducida, 192, 193, 196
 Fuerzas exteriores, 108, 112, 210, 236
 Fuerza magnética, 129, 131, 132, 222
- Gausso, 125, 167
 Generador de Van de Graaff, 235
 Gradiente, 39, 53
 Grado de polarización, 454
 Grupo de ondas, 476, 484
- Hencio, 200
 Histéresis, 87, 188, 189, 190
- Iluminación, 348
 Imagnación, 162, 167, 474
 — — — remanente, 188
 Impedancia, 280
 Índice de reflexión, 344, 459
 — — — refracción, 333, 334, 335, 341, 456, 462
 — — — transmisión, 344, 459
 Inducción eléctrica, 75, 76
 — — — electromagnética, 192, 211, 218
 — — — magnética, 123, 130, 167
 — — — remanente, 188
 Inductancia, 200, 202, 275
 — — — mutua, 205
- Infrasonido, 309
 Integrales de Fresnel, 418
 Intensidad de la corriente, 103, 275
 — — — luz, 334, 335, 347
 — — — onda, 303
 — — — del campo de las fuerzas externas, 109
 — — — — eléctrico, 19, 28, 167
 — — — — magnético, 11, 166, 168
 — — — sonido, 309, 310, 315
 Interferencia, 364, 402, 463
 Interferómetro estelar, 393
 Interferómetro de Fabry y Perot, 398, 401
 — — — Michelson, 391, 497
- Láser, 351, 378, 387, 448
 Lazo de histéresis, 87, 188
 Lente, 353, 362
 Ley de Ampere, 133
 — — — Blot-Savart-Laplace, 128
 — — — Bouguer, 485
 — — — Brewster, 456, 459
 — — — conservación de la carga eléctrica, 14, 106, 113, 114
 — — — Coulomb, 15, 17, 80, 134
 — — — Curie, 184, 186
 — — — Curie-Weiss, 191
 — — — Joule-Lenz, 118, 245
 — — — la independencia de los rayos luminosos, 350
 — — — reflexión de la luz, 341, 350, 352
 — — — refracción de la luz, 341, 350, 352, 353
 — — — Lenz, 192, 198, 201, 202
 — — — Malus, 455
 — — — Ohm, 109, 110, 112, 114, 245, 253, 273
 — — — Paschen, 270
 — — — Rayleigh, 488, 489
 — — — Wiedemann-Franz, 246
 Leyes de la electrolisis, 250
 Longitud de coherencia, 372, 375
 — — — espacial, 378
 — — — un tren de ondas, 372
 Lumen, 335, 347, 349
 Luminiscencia, 349, 350
 Luz, 348
 Luz monocromática, 345, 371
 — — — natural, 338, 452, 467
 — — — polarizada, 335, 452
 — — — parcialmente, 454, 455, 467
- Magnetón de Bohr, 179, 180
 Maxwellio, 195
 Método de Debye y Scherrer, 445
 — — — Laue, 444
 Momento eléctrico dipolar, 31, 37, 64, 148, 483
 — — — magnético dipolar, 142, 148
 — — — intrínseco, 178, 179, 190
 — — — orbital, 176
 — — — mecánico intrínseco, 178, 179
 — — — orbital, 177
 Monopolo, 38
 Monopolos de Dirac, 153
 Multipolo, 38
- Nivel de intensidad del sonido, 310
 Número de onda, 204, 333
- Oerstedio, 167
 Ohmio, 109

- Onda esférica, 291, 304
 — estacionaria, 305, 307, 324
 — plana, 291
 Ondas acústicas, 309
 — coherentes, 305, 365, 366
 — elásticas, 289, 298, 300
 — electromagnéticas, 218, 325, 328, 332
 — longitudinales, 289, 290
 — luminosas, 333
 — transversales, 289
 Operador nabla, 52
 Óptica antirrefractora, 391
 — de los rayos luminosos, 350
 — geométrica, 350, 363, 403
 — ondulatoria, 333
- Paquete de ondas, 476, 480
 Parábolas de Thomson, 231
 Paramagnético, material —, 175, 184, 190, 191
 Patrón de Fabry y Perot, 400
 Permeabilidad magnética, 11, 168, 170, 188
 Permitividad, 11, 75, 76, 87, 95, 461, 483
 Placa zonal, 401
 Planos cardinales, 355, 360
 Plasma, 264, 268
 Poder resolutivo de una red de difracción, 438
 — — — un instrumento, 436
 — — — objetivo, 447
 Polarización circular de la luz, 336, 452, 466, 467
 — de un dieléctrico, 66, 483
 — elíptica de la luz, 330, 453, 467
 — espontánea, 87
 — —, regiones de —, 88
 Polarización plana de la luz, 336, 452
 — rectilínea de la luz, 336
 — remanente, 87
 Polaroides, 461
 Potencia óptica, 360
 Potencial, 24, 25, 28, 58
 — vector, 157, 511
 Precesión de la órbita del electrón, 182, 183, 474
 — — Larmor, 182, 183
 Principio de Fermat, 351, 352
 — — Huygens-Fresnel, 364, 403, 404
 — — superposición de las ondas, 305, 402
 — — — los campos eléctricos, 21
 — — — — magnéticos, 123
 Punto antiferromagnético de Curie, 191
 — de Curie, 88, 190
 — — Néel, 191
 Puntos cardinales, 355, 360
- Radio de coherencia, 378, 393, 423, 431
 Rayo, 335, 463
 — extraordinario, 460, 464
 — ordinario, 460, 464
 Reactancia, 287
- Relación giromagnética, 177
 — magnetomecánica, 177
 Resistencia eléctrica, 109, 111, 245
 — — aparente, 286
 Rotor, 49, 50, 53
 Rotor del vector B, 156
 — — — E, 55
- Sensibilidad espectral relativa del ojo humano, 345
 Siemens, 110
 Sistema óptico centrado, 355, 361, 362
 — — ideal, 355
 Sobretonos, 309
 Solenoide, 157-160, 171, 200, 208
 Sonido, 300
 Superconductividad, 111
 Superficie equipotencial, 29, 80
 — de onda, 291, 335, 461, 462
 Susceptibilidad dieléctrica, 67, 79, 168
 — magnética, 167, 168, 175, 184, 186, 189
- Tautócronos, 351, 353, 363
 Tensión, 95, 109
 Tensor de susceptibilidad dieléctrica, 67
 — — magnética, 167
 Teorema de Gauss para el vector B, 153
 — — — — — D, 76, 77, 83
 — — — — — E, 57
 — — Ostrogradsk-Gauss, 46, 54, 58
 — — Stokes, 52, 55
 Teoría de la relatividad, 134, 484, 500
 Tesla, 125, 130
 Tiempo de coherencia, 372, 375
 Timbre del sonido, 309
 Tren de ondas, 336, 366, 464
- Ultrasonido, 309, 311
 Umbral de audición, 309
 — doloroso, 310
- Velocidad de fase, 294, 300, 308, 333, 484
 — — grupo, 475, 477, 481, 484, 493
 — — la luz, 17, 121, 491
 — del sonido, 312, 314, 315
 — de onda, 293, 294
 Vector de onda, 296, 335, 375
 — — Poynting, 326, 328, 335
 — — Umov, 303
 — luz, 333
 Voltio, 26, 195
- Weber, 195, 200
- Zona de onda, 330
 Zonas de Fresnel, 406, 407, 430
 — — imanación espontánea (dominios), 100