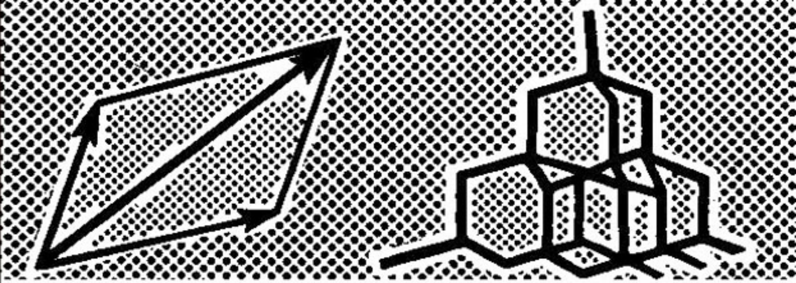


S. FRISH, A. TIMOREVA

Curso de Física General

TOMO 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

С. ФРИШ, А. ТИМОРЕВА

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Том I

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

S. FRISH, A. TIMOREVA

CURSO DE FISICA GENERAL

TOMO I

TRADUCIDO DEL RUSO
por el Ingeniero ANTONIO MOLINA GARCÍA
y el Candidato a Doctor en Ciencias Filológicas
MANUEL GISBERT TALENS

La versión española ha sido revisada por el Doctor en Ciencias Técnicas FEDERICO MOLERO JIMÉNEZ

MOSCU

Editorial MIR

CDU 530 (075 8) — 60

На испанском языке

Impreso en la URSS

$Ф \frac{0231\text{-}288}{041(01)\text{-}73}$

INDICE

Capítulo VIII. Principios de Termodinámica

Capítulo IX. Fenómenos moleculares en los líquidos

Capítulo X. Sólidos

TERCERA PARTE

VIBRACIONES Y ONDAS

Capítulo XI. Movimiento vibratorio armónico

Capítulo XII. Ondas

Capítulo XIII. Vibraciones acústicas

Introducción

§ 1. La física, su contenido y relaciones con otras ciencias y con la técnica. La física, junto con otras ciencias naturales, estudia las propiedades objetivas del mundo material que nos rodea. En griego, la palabra φύσιζ designa la naturaleza.

La física estudia las formas más generales del movimiento de la materia (mecánicas, caloríficas, electromagnéticas, etc.) y sus transformaciones mutuas. Las formas de movimiento estudiadas por la física son parte integrante de todas las formas de movimiento superiores y complejas (en los procesos químicos, biológicos, etc.) y les son inherentes; pero esto no quiere decir, ni mucho menos, que comprendan todos los aspectos del movimiento. Así tenemos que a la ley de la gravitación universal se subordinan todos los cuerpos conocidos, tanto terrestres como celestes, independientemente de que sean químicamente simples o compuestos, vivos o inertes. A la ley de la conservación de la energía establecida por la física se subordinan todos los procesos, independientemente de que tengan un carácter específicamente químico, biológico u otro cualquiera. Las formas superiores, más complejas, del movimiento son objeto de estudio de otras ciencias (química, biología, etc.).

No se puede establecer netamente una línea divisoria entre la física y otras ciencias naturales. Existen extensas regiones limítrofes entre la física y la química. Incluso han surgido ciencias especiales: la físico-química dividida a su vez en química física y física química. Las ramas en que los métodos físicos se aplican para el estudio de cuestiones más o menos particulares, también se unen originando ciencias especiales. Así han surgido, por ejemplo, la astrofísica, que estudia los fenómenos físicos que se producen en los cuerpos celestes, y la geofísica, que estudia los fenómenos físicos que tienen lugar en la atmósfera y en la corteza terrestre. Los descubrimientos físicos frecuentemente han servido de impulso para el desarrollo de otras ciencias. La invención del microscopio y del telescopio aceleró el desarrollo de la biología y de la astronomía. El análisis espectral descubierto por los físicos, se ha convertido en uno de los métodos fundamentales de la astrofísica, etc.

El progreso de la física y de la química, junto con el de otras ciencias naturales, ha desempeñado un gran papel en el desarrollo de la concepción materialista del mundo.

La filosofía materialista, cuyo peldaño superior es el materialismo dialéctico, utiliza ampliamente los descubrimientos físicos para fundamentar sus tesis. La física, verificando sus teorías directamente en la experiencia y la práctica, siempre ha avanzado por el camino de la revelación de las propiedades objetivas del mundo. Por ello se explica que la inmensa mayoría de los físicos de hecho son espontáneamente materialistas. No obstante, la debilidad del materialismo espontáneo, que reside en su inconsciencia y en su incapacidad para interpretar filosóficamente los datos experimentales de la ciencia, ha acarreado el que parte de los científicos burgueses, influenciados por la ideología reaccionaria de las clases pudientes, han intentado repetidas veces utilizar los descubrimientos físicos para fundamentar las concepciones idealistas. Tales tentativas son frecuentes sobre todo en los períodos de grandes descubrimientos cuando las viejas tesis se someten a revisión y las nuevas aún no están completamente claras. Así, a finales del siglo XIX y en los primeros años del XX, cuando surgió la teoría electrónica y se descubrieron los hechos que fueron la base de la teoría de la relatividad, aparecieron numerosas «argumentaciones» del idealismo «basadas» supuestamente en los nuevos descubrimientos físicos. La inconsistencia de estas «argumentaciones», con excepcional consecuencia y claridad la puso al descubierto Lenin en su libro «Materialismo y empiriocriticismo». Refiriéndose a las declaraciones de ciertos filósofos burgueses que afirmaban que los nuevos descubrimientos de la física llevaban a la conclusión de la desaparición de la materia, Lenin escribió: ««La materia desaparece»: esto quiere decir que desaparecen los límites dentro de los cuales conocíamos la materia hasta ahora, y que nuestro conocimiento se profundiza; desaparecen las propiedades de la materia que anteriormente nos parecían absolutas, inmutables, primarias (impenetrabilidad, inercia, masa, etc.) y que hoy se revelan como relativas, inherentes solamente a ciertos estados de la materia. Porque la *única* «propiedad» de la materia con cuya admisión está ligado el materialismo filosófico, es la propiedad de *ser una realidad objetiva*, de existir fuera de nuestra conciencia»*).

Lo que Lenin dijo hace más de medio siglo con respecto a la crisis de la física de entonces, se puede aplicar por completo a la etapa actual de desarrollo de esta ciencia, cuando el estudio de los procesos intraatómicos obliga a restringir las viejas concepciones de la mecánica y de la electrodinámica, y a introducir los nuevos conceptos

*) V. I. Lenin, *Materialismo y empiriocriticismo*, Editora Política, La Habana, 1963, pág. 251.

de la mecánica cuántica. El análisis crítico consecuentemente llevado a cabo desde el punto de vista del materialismo dialéctico, permite separar lo valioso del contenido físico de las nuevas teorías, de la cáscara idealista con que a veces la encubren sus autores.

El impulso para el desarrollo de la física, lo mismo que para todas las demás ciencias, ha sido la necesidad práctica de los hombres. La mecánica de los antiguos egipcios y griegos surgió en relación directa con las necesidades planteadas por la técnica de construcción y militar de entonces. Debido a la técnica en desarrollo y al arte militar se realizaron los grandes descubrimientos científicos de fines del siglo XVII y principios del XVIII.

M. V. Lomonósov, fundador de la física y química rusas, coordinaba el trabajo científico con las necesidades de la práctica. Sus numerosas y diversas investigaciones sobre la naturaleza de los cuerpos sólidos y líquidos, sobre la óptica, meteorología y electricidad atmosférica, estaban relacionadas con diferentes finalidades prácticas.

A principios del siglo XIX, la aplicación de las máquinas de vapor planteó la necesidad de resolver la cuestión de la más provechosa transformación del calor en trabajo mecánico. Esta cuestión no se podía resolver por métodos estricta y limitadamente técnicos. Después de que en 1824 el ingeniero francés N. L. Sadi Carnot examinó de manera general el problema de la transformación del calor en trabajo, se pudo realmente aumentar el rendimiento de las máquinas caloríficas. Al mismo tiempo, el trabajo de Carnot sirvió de base para que surgiera la ciencia general de la transmisión y transformación de la energía, que después se denominó termodinámica. De esta manera vemos que las necesidades de la práctica conducen a nuevos descubrimientos físicos; éstos son la base del desarrollo ulterior de la técnica. Frecuentemente, los descubrimientos físicos que a primera vista parecen puramente teóricos y abstractos, con el tiempo encuentran las más diversas e importantes aplicaciones técnicas.

El descubrimiento de Faraday en 1831 de la inducción electromagnética hizo posible la amplia utilización de los fenómenos eléctricos. El sistema periódico descubierto en 1869 por D. I. Mendeléiev, no sólo desempeñó un papel extraordinario en el desarrollo del estudio de los átomos y de la naturaleza de los fenómenos químicos, sino que resultó ser el guía en la resolución de enorme cantidad de problemas prácticos de química y física.

En los años setenta del siglo pasado, Maxwell creó la teoría general de los procesos electromagnéticos. Partiendo de esta teoría llegó a la conclusión de la posibilidad de difundir la energía electromagnética en forma de ondas. En 1888, Hertz confirmó experimentalmente la veracidad de esta deducción de Maxwell. Unos años después, el descubrimiento de Maxwell-Hertz lo utilizó A. S. Popov para llevar a cabo la radiotelegrafía. A su vez, el desarrollo de la radiotecnia abrió ante los físicos nuevas y extraordinariamente amplias posibilidades experimentales en el estudio de las propiedades de la naturaleza.

Los estudios de A. G. Stoliétov sobre la «actinoelectricidad» (1888-1889) desempeñaron un papel importante en la aclaración de la naturaleza del efecto fotoeléctrico, ampliamente utilizado en la técnica moderna (televisión, automática, etc.).

Los ejemplos de mutua influencia entre la técnica y la física en el proceso de su desarrollo son muy numerosos y no hay necesidad de citarlos todos. Solamente señalaremos que, en la actualidad, los problemas excepcionalmente importantes capaces de cambiar radicalmente la técnica como, por ejemplo, la aplicación práctica directa de la energía solar o la obtención de energía de las reacciones termonucleares, exigen un profundo estudio ulterior de los fenómenos físicos para poderlos resolver.

§ 2. Leyes físicas. Las leyes físicas se establecen mediante la generalización de los datos experimentales, y su veracidad se comprueba en la correspondencia de sus conclusiones con la práctica. Las leyes físicas expresan la relación interna y objetiva entre los fenómenos físicos y la dependencia real entre las magnitudes físicas.

La mayoría de las veces, el contenido de las leyes físicas se expresa matemáticamente como una dependencia de los valores numéricos a y b de las magnitudes físicas dadas A y B. De esto se deduce claramente la importancia de principio que tiene la *medición* de las magnitudes físicas para el establecimiento de las leyes físicas.

Medir una magnitud física cualquiera es compararla de manera determinada con otra magnitud homogénea tomada como unidad. Por ejemplo, la determinación de la longitud de cierto cuerpo la realizamos aplicándole sucesivamente otro cuerpo determinado cuya longitud se ha elegido como unidad.

Está claro que el resultado de la medición nunca podrá ser absolutamente exacto; el grado de exactitud depende del desarrollo de la técnica de medición y de la minuciosidad con que se ha realizado la medición. Por eso, el resultado de cualquier medición puede darse solamente de la forma siguiente: el valor numérico a de la magnitud física dada se halla entre los valores aproximados a_1 y a_2; cuanto menor sea la diferencia $\Delta a = a_1 - a_2$ con respecto a a, tanto más exactamente medida resultará la magnitud física A. Ya de esto solamente se deduce que las leyes físicas establecidas basándose en la experiencia no pueden ser absolutamente exactas.

Así pues, las leyes físicas que expresan matemáticamente relaciones cuantitativas entre las magnitudes físicas, no son absolutamente exactas; su exactitud corresponderá siempre al nivel de desarrollo de la ciencia y de la técnica de la época dada.

Veamos, por ejemplo, para determinada masa de gas, la dependencia entre el volumen y la presión a temperatura constante.

Supongamos que tenemos 8 litros de gas a la presión $p = \frac{1}{2}$ atm y a cierta temperatura constante. Variemos la presión de modo que adquiera valores determinados, por ejemplo de $p = 1$ atm, $\frac{4}{3}$ atm, 2 atm, etc., y midamos los volúmenes V del gas correspondientes a estas presiones (conservando constante la temperatura).

Entonces obtendremos los resultados experimentales que se pueden escribir en una tabla de la siguiente manera:

Presión p del gas, en atmósferas	1/2	1	4/3	2	4	8
Volúmenes correspondientes V del gas, en litros	8	4	3	2	1	1/2

De esta tabla se puede ver fácilmente que para la masa dada de gas, el producto de la presión p del gas por su volumen V es constante:

$$pV = \text{const.}$$

Este resultado representa la conocida *ley de Boyle-Mariotte*. Pero esta ley quedó establecida como resultado de mediciones realizadas solamente con un grado limitado de exactitud y en un intervalo limitado de presiones. Se podría esperar por ello que la ley de Boyle-Mariotte no resulte exacta de efectuar las mediciones con mucha más exactitud, o de hacerlas extensivas a valores más elevados y más bajos de la presión. Efectivamente, mediciones más exactas revelan cierta discrepancia con la ley de Boyle-Mariotte; estas discrepancias son pequeñas para las presiones a que se realizaron los experimentos, y grandes, a presiones considerablemente mayores. Se puede demostrar que la relación entre la presión y el volumen del gas a temperatura constante se expresa con más exactitud con la denominada fórmula de *Van der Waals*:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \text{const.}$$

donde $\frac{a}{V^2}$ y b son ciertos coeficientes de corrección. Si el volumen V del gas es grande en comparación con los coeficientes de corrección $\frac{a}{V^2}$ y b, éstos se pueden despreciar, y entonces obtenemos la ley de Boyle-Mariotte: $pV = \text{const.}$ De esta manera tenemos que la fórmula de Van der Waals no sólo refleja mejor que la de Boyle-Mariotte las propiedades reales del gas, sino que al mismo tiempo indica dentro de qué límites la fórmula de Boyle-Mariotte expresa una aproximación suficiente y cuándo no se puede aplicar.

Semejantes razonamientos se podrían aducir también respecto a otras leyes físicas, incluidas las mecánicas (véase el § 4).

El carácter aproximado de las leyes físicas no aminora sus valores objetivos: las leyes físicas, aun sin ser absolutamente exactas, expresan aproximadamente y con relativa veracidad las propiedades objetivas de la materia, y el grado de exactitud aumenta a medida que se va conociendo la naturaleza que nos rodea. La ciencia, en cada etapa histórica de su desarrollo, nos da una «fotografía» aproximada de la realidad; pero con el tiempo, estas fotografías se perfeccionan y reflejan mejor y de manera más completa las propiedades objetivas del mundo, cuyo conocimiento total es inagotable. «El materialismo consiste precisamente en admitir que la teoría es un calco, una copia aproximada de la realidad objetiva»*).

Frecuentemente, cuando se olvida el carácter aproximado de las leyes físicas, se les atribuye una exactitud absoluta y se extrapolan a regiones para las cuales su aplicación no ha sido comprobada, lo cual puede acarrear graves errores. Por ejemplo, establecida la ley según la cual, a temperaturas próximas a las ordinarias, cualquier gas, al descender la temperatura en 1° C a presión constante, disminuye $\frac{1}{273}$ el volumen que ocupaba a 0° C (*ley de Gay-Lussac*), mediante una extrapolación infundada para temperaturas muy bajas podemos llegar a la conclusión de que al enfriarlo hasta —273° C, la substancia gaseosa debe desaparecer. En realidad, mucho antes de llegar a esta temperatura, el gas deja de subordinarse a la ley de Gay-Lussac (véase el § 44).

§ 3. **Unidades de medición.** La elección de estas unidades puede ser arbitraria. Históricamente su elección está estrechamente relacionada con el carácter práctico de sus aplicaciones, por ejemplo, la antigua unidad rusa de longitud «codo», o la inglesa «foot» («pie»), están relacionadas con las dimensiones del cuerpo humano.

En el siglo XVIII, los científicos franceses intentaron establecer un sistema «absoluto», relacionando las unidades con objetos, que no pudiesen cambiar con el tiempo o perderse. Así, por unidad de longitud se decidió elegir la $\frac{1}{40\,000\,000}$ parte de la longitud del meridiano. Sin embargo, la elaboración de una regla de esta clase inevitablemente acarrea errores. Con dificultades análogas tropezaron los intentos de establecer otras unidades «absolutas». Por eso, desde fines del siglo pasado, se empezó a determinar las unidades mediante

---

*) V. I. Lenin, *Materialismo y empiriocriticismo*, Editora Política, La Habana, 1963, pág. 256-257.

cuerpos modelo (patrones). Por ejemplo, la unidad de longitud, el *metro*, se determinó como la distancia entre dos trazos hechos sobre una barra de platino iridiado que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas. Sin embargo, en la actualidad se usa un sistema «mixto», en cierto sentido, donde parte de las unidades se determina con patrones, y otra parte reproduciendo determinados fenómenos físicos. Así, según *el sistema internacional de unidades* (abreviadamente se designa con las iniciales SI) adoptado por la Conferencia Internacional de 1960, por unidad de longitud (*metro*) se toma la longitud que comprende 1 650 763,73 longitudes de ondas luminosas de la franja anaranjada del isótopo criptón 86 (Kr^{86}) en el vacío (véase el t. III):

$$1\ \mathrm{m} = 1\,650\,763{,}73\lambda\,(\mathrm{Kr}^{86}).$$

El metro determinado de esta manera es muy aproximado al viejo metro correspondiente a la distancia entre los trazos de la barra patrón. Pero en comparación con el metro antiguo, el nuevo tiene la ventaja de que no puede perderse ni estropearse; no cambia con el tiempo, como lo puede hacer la barra patrón al «envejecer» el material de que se ha elaborado. Siempre se puede comparar y volver a comparar repetidas veces cualquier longitud con la de la onda luminosa de la franja anaranjada del isótopo 86 del criptón.

Para medir longitudes que comprendan una cantidad muy grande de metros o una parte muy pequeña del mismo, se emplean otras unidades derivadas de la unidad de longitud, metro, según el sistema decimal:

$$1\ \mathrm{km} = 1\,000\ \mathrm{m};\quad 1\ \mathrm{cm} = \frac{1}{100}\ \mathrm{m};\quad 1\ \mathrm{mm} = \frac{1}{1\,000}\ \mathrm{m};$$

1 micrón (abreviadamente μ) es igual a $\frac{1}{1000}$ mm, etc.

Por unidad de masa en el sistema internacional de unidades se ha tomado la masa del patrón de platino iridiado que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas y que se denomina *kilogramo* (abreviadamente kg). La masa del kilogramo es muy próxima a la de 1 000 cm^3 de agua pura a la temperatura de 4° C. Las unidades mayores y menores que el kilogramo se establecen también según el sistema decimal:

$$1\ \mathrm{t} = 1\,000\ \mathrm{kg};\quad 1\ \mathrm{g} = \frac{1}{1\,000}\ \mathrm{kg},\ \text{etc.}$$

Por *unidad de tiempo* se ha tomado el correspondiente a $\frac{1}{31\,556\,925,9747}$ parte del año tropical del 1 de enero de 1900. Se entiende por año tropical el intervalo de tiempo comprendido entre dos pasos consecutivos del Sol (en su movimiento aparente según la eclíptica) por el punto del equinoccio de primavera. De esta manera resulta que la unidad de tiempo está relacionada con el de traslación de la Tierra alrededor del Sol. Esta unidad de tiempo se denomina *segundo*.

Para cualquiera otra magnitud física se podría establecer la correspondiente unidad elegida arbitariamente. Por ejemplo, para la unidad de superficie se podría elegir la superficie de un cuerpo cualquiera sin ninguna relación con la ya elegida unidad de longitud. Pero este procedimiento de elección de unidades sería muy incómodo. Por eso, por ejemplo, por unidad de superficie se elige la de un cuadrado de longitud de lado igual a la unidad de longitud. De manera análoga se hace con las demás magnitudes físicas estableciendo las unidades para ellas basándose en las relaciones con que estas magnitudes están ligadas a las unidades de medición ya elegidas.

Expliquemos esto con un ejemplo. Supongamos que se necesita establecer la unidad de medición para la magnitud física denominada densidad. Por densidad d de un cuerpo homogéneo dado se sobreentiende una magnitud física característica directamente proporcional a su masa m e inversamente proporcional a su volumen V. Por eso, el valor numérico de la densidad d será

$$d = k\frac{m}{V}, \tag{1}$$

donde k es un coeficiente numérico cuyo valor depende de las unidades en que se han medido d, m y V.

Teniendo establecidas por anticipado las unidades de medición de la masa m y del volumen V, podemos elegir la unidad de densidad de manera que la ecuación (1) se cumpla para cierto valor determinado del coeficiente k. Generalmente, para establecer la unidad de una magnitud física que se introduce de nuevo para su análisis, se supone a $k = 1$. Entonces la fórmula (1) adquiere el aspecto:

$$d = \frac{m}{V}, \tag{2}$$

y para que numéricamente sea exacta, por unidad de densidad deberemos elegir la de un cuerpo (independientemente de que exista o no en la naturaleza), cuya unidad de masa ocupe la unidad de volumen.

De la misma manera se introducen las unidades de medición de otras magnitudes físicas.

En el sistema internacional de unidades se consideran fundamentales las seis unidades siguientes:

unidad de longitud	1 metro (1 m)
unidad de masa	1 kilogramo (1 kg)
unidad de tiempo	1 segundo (1 s o seg)
unidad de temperatura	1 grado Kelvin o absoluto (1° K) (véase el § 44)

unidad de intensidad de la corriente eléctrica	1 amperio (1 A) (véase el t. II)
unidad de intensidad luminosa	1 bujía o candela (1 b ó 1 cd) (véase el t. III)

Las unidades de medición de otras magnitudes se introducen basándose en las correspondencias físicas que relacionan estas magnitudes con las fundamentales. En la mecánica, como unidades fundamentales, es suficiente utilizar las tres magnitudes físicas de longitud, masa y tiempo. En el sistema internacional, como ya se ha dicho, como unidades de estas magnitudes se toman el metro, el kilogramo y el segundo. Abreviadamente este sistema se puede designar como «sistema *MKS*».

Pero se pueden crear otros sistemas eligiendo otras unidades como fundamentales. Por ejemplo, en física se usa ampliamente el denominado sistema cegesimal (sistema *CGS*), en el cual se han tomado las siguientes unidades fundamentales:

unidad de longitud	1 centímetro (1 cm)
unidad de masa	1 gramo (1 g)
unidad de tiempo	1 segundo (1 s o seg)

Está claro que el sistema *CGS* es derivado del sistema internacional (SI).

Además, se usa el llamado *sistema técnico* (o sistema gravitatorio), en el cual como unidades fundamentales se han tomado las siguientes: longitud (1 m), tiempo (1 seg) y fuerza o peso, cuya unidad es la fuerza con que el globo terrestre atrae a un cuerpo de masa igual a 1 kg al nivel del mar, a los 45° de latitud. Esta unidad se denomina kilogramo-fuerza (o kilogramo-peso) (abreviadamente se designa 1 kgf, kg′ o kg*; para más detalles véase el § 17). Así tenemos que en el sistema técnico de unidades, las fundamentales son:

unidad de longitud	1 metro (1 m)
unidad de fuerza (peso)	1 kilogramo-fuerza (kilogramopeso) (1 kgf, kg′ o kg*)
unidad de tiempo	1 segundo (1 s o seg.)

PRIMERA PARTE

FUNDAMENTOS FISICOS DE LA MECANICA

CAPITULO I

Cinemática

§ 4. Observaciones generales. La mecánica es la ciencia que estudia las formas más simples del movimiento de la materia, el cual consiste en un desplazamiento de los cuerpos o de sus partes respecto a otros cuerpos o partes.

La mecánica, como todas las demás ciencias naturales, establece sus postulados como resultado de una generalización de los datos experimentales. Los experimentos sobre el desplazamiento de los cuerpos son muy simples. El hombre observa el desplazamiento de los cuerpos diariamente en la vida cotidiana, en cualquier proceso de producción, de aquí lo *patente* de las representaciones mecánicas. Con ello se explica también el que, de todas las ciencias naturales, la mecánica haya adquirido antes que las demás un amplio desarrollo. Las leyes fundamentales de la mecánica fueron elucidadas en gran parte por Galilei (1564—1642) y formuladas definitivamente por Newton (1642—1727). Leonhard Euler (1707—1783), que trabajó durante muchos años en la Academia de Ciencias de Petersburgo, fue el primero en expresar analíticamente las leyes de la mecánica y representó un papel muy importante en el desarrollo de ésta. No obstante, la mecánica de Galilei y Newton, que se denominó *«clásica»*, surgió como resultado de las observaciones de un tipo limitado de movimientos, a saber, de los movimientos de cuerpos de dimensiones comparables con las del cuerpo humano (la piedra lanzada) o muy grandes con respecto a éste (movimiento de los planetas), y que se desplazan a pequeñas velocidades. De aquí, el carácter aproximado de la mecánica clásica. El desarrollo ulterior de la ciencia ha demostrado que la mecánica clásica es una admirable aproximación de la realidad mientras se trate del movimiento de los cuerpos que constan de gran cantidad de átomos (*cuerpos macroscópicos*) y velocidades pequeñas en comparación con la de la luz. Lenin escribió: «...la mecánica era un calco de los movimientos lentos reales, mientras que la nueva física es un calco de los movimientos reales que tienen lugar a prodigiosas velocidades»*).

Las leyes del movimiento de los cuerpos macroscópicos a velocidades comparables a la de la luz, las formula la *teoría de la relatividad* establecida por Einstein.

Las leyes de la mecánica clásica también dejan de ser justas cuando pasamos al movimiento de átomos independientes o de partículas elementales (*cuerpos microscópicos*)**). Las leyes del movimiento de los cuerpos microscópicos las establece la llamada *mecánica cuántica* (quántica). Más adelante estableceremos los límites de aplicación de la mecánica clásica; por ahora supondremos que en nuestros casos se trata siempre de movimiento de cuerpos macroscópicos a velocidades pequeñas en comparación con la de la luz.

La familiaridad de los fenómenos mecánicos, su evidencia y los éxitos obtenidos en la explicación de ciertos fenómenos físicos (por ejemplo, los acústicos) mediante representaciones puramente mecánicas, condujo a que en el siglo XIX, para muchos físicos, *explicar* cualquier fenómeno fuera reducirlo a los fenómenos mecánicos. Este punto de vista correspondía a la filosofía del *materialismo mecanicista*. Sin embargo, todo el desarrollo ulterior de la física, sobre todo el de la óptica y electricidad, ha demostrado que muchos fenómenos se rigen por sus propias leyes y no se pueden equiparar al tipo del movimiento mecánico, que es más simple. El materialismo mecanicista tuvo que ceder el puesto al *materialismo dialéctico*, el cual examina los tipos más generales del movimiento de la materia y tiene en cuenta toda la variedad del mundo real.

Engels escribía a este respecto:

«Los naturalistas identifican el movimiento en general con el desplazamiento mecánico... El movimiento, en lo que se refiere a la materia, es un *cambio en general*. De esta clase de confusiones surge la iracunda tendencia de reducirlo todo al movimiento mecá-

---

*) V. I. Lenin, *Materialismo y empiriocriticismo*, Editora Política, La Habana, 1963, pág. 255.

**) Aquí, la palabra «microscópico» no quiere decir que esta partícula se pueda ver al microscopio, sino que representa una partícula elemental, electrón, protón, etc., o una partícula que consta de una pequeña cantidad de partículas elementales, por ejemplo, un átomo o una molécula independiente.

nico..., con lo cual se borra el carácter específico de las demás formas de movimiento»*).

El movimiento mecánico puede ser de los aspectos más variados y tener un carácter bastante complejo. Por eso, la mecánica descompone los movimientos reales en otros más simples, y después de estudiarlos, vuelve a los movimientos más complejos. El movimiento mecánico más simple es el del llamado punto material. Por *punto material* se entiende en mecánica el *cuerpo*, *cuyas dimensiones* y *forma se pueden despreciar en el problema dado*. Un mismo cuerpo real, según el planteamiento del problema, se puede considerar como un punto material o como un cuerpo de dimensiones finitas. Por ejemplo, examinando el problema del movimiento de un proyectil de artillería, como primera aproximación podemos despreciar su forma y dimensiones y considerar el proyectil como un punto material. Pero is hay que tener en cuenta la influencia de la resistencia del aire en su movimiento y el papel que desempeña el giro del proyectil durante el mismo, ya no tenemos derecho a considerar el proyectil como un punto material: debemos tener en cuenta su forma, dimensiones, etc. Al mismo tiempo tenemos que los astrónomos, al examinar el movimiento de la esfera terrestre alrededor del Sol, pueden considerar el globo terrestre como un punto material.

De la definición del movimiento mecánico como un simple desplazamiento se deduce claramente que este desplazamiento no puede realizarse más que *en relación con* otros cuerpos materiales cualesquiera. Por eso, para tener la posibilidad de caracterizar el movimiento de un cuerpo cualquiera, ante todo hay que establecer convencionalmente con respecto a qué otro cuerpo (o grupo de cuerpos, cuya posición de unos respecto a los otros sea fija) tenemos que considerar el desplazamiento del cuerpo dado. Este cuerpo o grupo de cuerpos, forma el *sistema de referencia o de comparación*. De esta manera, todo movimiento debe considerarse en relación a un sistema de referencia determinado. En los diversos casos, el sistema de referencia puede elegirse de distintas maneras, pero nosotros podremos caracterizar concretamente el movimiento dado sólo después de haber elegido un determinado sistema de referencia. Por ejemplo, lanzando un objeto cualquiera, podemos examinar su movimiento respeto a la habitación en que nos hallamos; en este caso el sistema de referencia lo formarán las paredes, el suelo y otras partes de la habitación. Sin embargo, podemos analizar el movimiento de este mismo cuerpo con relación al Sol o a cualquier estrella, pero de antemano debemos establecer concretamente con respecto a qué vamos a analizar el movimiento de nuestro objeto.

---

*) F. Engels, *Dialéctica de la naturaleza*. (Según la versión rusa del año 1950, pág. 197). (*N. del T.*).

Prácticamente, para describir el movimiento de un cuerpo, hay que relacionarlo con los cuerpos que formen un sistema de referencia, cualquier sistema de coordenadas, por ejemplo, el habitual sistema de coordenadas rectilíneas rectangulares. Al examinar el movimiento respecto a la habitación, por ejemplo, se puede ubicar el origen de coordenadas en uno de los rincones de la misma y los ejes dirigirlos a lo largo de las paredes; o se puede colocar el origen de coordenadas en el Sol, y los ejes trazarlos en dirección a determinadas estrellas*). Más adelante plantearemos la cuestión de la *elección* del sistema de referencia; por ahora consideraremos que se nos da este sistema y el sistema de coordenadas invariablemente relacionado con él y que nosotros utilizaremos para caracterizar el movimiento.

Se ha convenido en dividir la mecánica en dos partes: la *cinemática* que estudia solamente el propio desplazamiento en dependencia del tiempo, y la *dinámica* que estudia las interacciones de los cuerpos que conducen a un cambio de sus estados de movimiento.

§ 5. Movimiento rectilíneo uniforme. Veamos el movimiento de un cuerpo, considerado como punto material, que se reduce a un desplazamiento uniforme a lo largo de cierta recta OA (fig. 1).

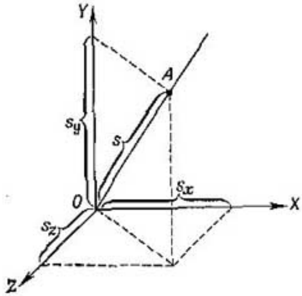


Fig. 1. La posición del cuerpo A en el movimiento rectilíneo la determina el segmento s o sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas x_x, s_y, s_z.

En cualquier momento dado de tiempo t, cuando el cuerpo en movimiento se halla en cierto punto A, podemos determinar su posición mediante el segmento s considerado a partir de cierto punto O que tomaremos convencionalmente como origen de espacios. Está claro que s variará con el tiempo. El segmento s coincidirá con el *trayecto* recorrido realmente por el cuerpo que se mueve en línea recta, si en el momento inicial ($t = 0$) el cuerpo se hallaba en el punto O. Trazando el sistema de coordenadas $OXYZ$, se puede carac-

*) El sistema de coordenadas también se puede relacionar con cualquier medio material continuo. Por ejemplo, se puede estudiar el movimiento de los peces con respecto al agua en que están nadando.

terizar también la posición del cuerpo en cada momento dado por sus coordenadas x, y y z. En el sistema elegido de coordenadas de la fig. 1, las coordenadas del cuerpo x, y y z coinciden con las proyecciones de los trayectos s_x, s_y y s_z sobre los ejes de coordenadas. De esta manera tenemos que la posición de un punto en movimiento se puede caracterizar por el segmento s, que será cierta función del tiempo t:

$$s = f(t), \tag{1}$$

o por sus coordenadas x, y y z, que también serán funciones del tiempo:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t). \tag{2}$$

Como el movimiento que examinamos se efectúa a lo largo de una recta, se denomina *rectilíneo*.

El movimiento se denomina *uniforme*, si el cuerpo que se desplaza recorre los mismos espacios a iguales intervalos de tiempo arbitrariamente elegidos.

Los movimientos, evidentemente, se diferenciarán unos de otros en que los cuerpos pueden recorrer, durante iguales intervalos de tiempo, distintos espacios, o, en otras palabras, en que los mismos espacios pueden recorrerse en distintos intervalos de tiempo. Estas diferencias en los movimientos las caracterizaremos introduciendo el concepto de *velocidad*. Por velocidad de un movimiento uniforme se sobreentiende una magnitud física que sea tanto mayor, cuanto mayor sea el espacio recorrido por el cuerpo durante un mismo intervalo de tiempo, o, en otras palabras, una magnitud física que sea tanto mayor, cuanto menor sea el intervalo de tiempo necesario para recorrer el espacio dado. La velocidad del movimiento uniforme v es una magnitud física directamente proporcional al camino recorrido e inversamente proporcional al intervalo de tiempo invertido en recorrer este espacio.

Supongamos que la posición de un cuerpo que se desplaza en movimiento rectilíneo, en un momento determinado de tiempo t_0, se determina por el segmento s_0, y en el momento t, por el segmento s. Entonces, en el tiempo $t - t_0$ el cuerpo recorre el espacio $s - s_0$ y la expresión matemática de la velocidad v se podrá escribir de la siguiente manera:

$$v = k\frac{s - s_0}{t - t_0}, \tag{3}$$

donde k es el coeficiente de proporcionalidad. En el caso particular de $t_0 = 0$ y $s_0 = 0$, tenemos:

$$v = k\frac{s}{t}. \tag{3a}$$

En esta ecuación s es el espacio recorrido durante el tiempo t. La velocidad del movimiento uniforme es una magnitud constante. Utilizando la relación (3), la velocidad v, el espacio s y el tiempo t se pueden medir en unidades cualesquiera. En cambio, si de antemano le damos al coeficiente k un valor determinado cualquiera, como ya se ha indicado en el § 3, no se podrán elegir arbitariamente las unidades de medición para las tres magnitudes físicas v, s y t. Arbitrariamente se pueden elegir sólo dos unidades para dos magnitudes, y para la tercera magnitud la unidad de medición se ha de elegir de tal manera que la relación (3) se pueda efectuar con el coeficiente dado k. Así, suponiendo $k = 1$ y, por lo tanto, convirtiendo la fórmula (3) en:

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0}, \tag{4}$$

se pueden elegir arbitrariamente las unidades sólo para dos magnitudes de las que figuran en ella. Si elegimos por unidad de longitud 1 centímetro (cm) y por unidad de tiempo el segundo (s), utilizan-

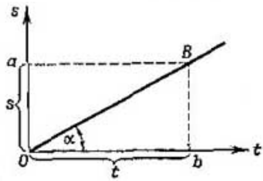


Fig. 2. En el movimiento uniforme, la relación entre el espacio recorrido s y el tiempo t la representa la recta OB.

do la fórmula (4) tendremos que tomar como unidad de velocidad la de un movimiento uniforme en el cual durante un segundo se recorra 1 cm. Esta es la unidad de velocidad en el sistema CGS, que abreviadamente se designa cm/s. En otros sistemas de unidades, por unidad de longitud se toma el metro (m) o el kilómetro (km), y por unidad de tiempo, el segundo (s) o la hora (h); en estos casos las unidades de la velocidad serán respectivamente m/s y km/h.

De la fórmula (4) tenemos que

$$s = s_0 + v(t - t_0). \tag{5}$$

Si $t_0 = 0$ y $s_0 = 0$, la fórmula (5) se convierte en:

$$s = vt; \tag{5a}$$

aquí, s es el espacio recorrido por el cuerpo durante el tiempo t.

Comparando la ecuación (5a) con la (1) vemos que, en el caso del movimiento uniforme del cuerpo, el espacio recorrido es una *función lineal* del tiempo.

La dependencia lineal del espacio con respecto al tiempo se puede representar gráficamente. Tomemos el eje de abscisas por eje de los tiempos t (fig. 2) y por eje de ordenadas el de espacios s. Entonces, en correspondencia con la fórmula (5a), el espacio s en función del tiempo t se expresará por la recta OB, que pasa por el origen de coordenadas. En el transcurso de un intervalo de tiempo t, representado en el eje de abscisas por el segmento Ob, el cuerpo recorrerá el trayecto s, representado por el segmento Oa o por el segmento bB igual al Oa.

De la fig. 2 deducimos que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{bB}{Ob} = \frac{s}{t} = v. \tag{6}$$

De esta manera, en nuestro diagrama la velocidad v se representará por la tangente del ángulo α: cuanto mayor sea la velocidad v, mayor será el ángulo α que forma la recta OB con el eje de los tiempos t.

§ 6. Movimiento rectilíneo variado. En el movimiento variado, el espacio recorrido es diferente en los distintos intervalos iguales de tiempo. En este caso se puede introducir el concepto de *velocidad media*. La velocidad media de un movimiento variado en el intervalo dado de tiempo $t - t_0$ es igual a la velocidad de un movimiento uniforme con la cual el cuerpo recorrería el mismo espacio $s - s_0$ en el mismo intervalo de tiempo $t - t_0$ que invierte al recorrerlo con movimiento variado. Designando la velocidad media por $\bar{v}$, tenemos

$$\bar{v} = \frac{s - s_0}{t - t_0}.$$

El valor de la velocidad media $\bar{v}$ depende del intervalo de tiempo en que se toma. Por eso, la velocidad media no es una característica suficiente del movimiento variado. Por ejemplo, en el movimiento de un tren en el trayecto entre dos estaciones nos puede interesar no sólo la velocidad media de todo el trayecto, sino también la velocidad que tuvo en distintos trechos. Para ello, evidentemente, deberemos dividir el trayecto en trechos Δs y medir los intervalos de tiempo Δt que se ha invertido en recorrer estos trechos, entonces

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1}$$

representa la velocidad media en un trecho determinado Δs del trayecto.

Cuanto menores sean los intervalos de tiempo Δt para los cuales tenemos que determinar la velocidad media $\bar{v}$, tanto más exacta será la característica del movimiento que obtengamos. El intervalo de tiempo Δt se puede elegir tan pequeño, que el movimiento en este intervalo se puede considerar prácticamente uniforme. Entonces, la velocidad media $\bar{v}$ en este pequeño intervalo de tiempo nos dará una característica suficiente del movimiento en el instante dado; en otras palabras, representará la velocidad v en el punto dado del trayecto (velocidad instantánea).

Por lo tanto, la *velocidad del movimiento variado en el punto dado del trayecto (o en el instante dado, velocidad instantánea) es el límite a que tiende la velocidad media al disminuir infinitamente el intervalo de tiempo Δt para el cual se determina esta velocidad.*

Matemáticamente se expresa así:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (\bar{v}) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right). \tag{2}$$

Del cálculo diferencial se sabe que el $\frac{\lim}{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$ es la derivada del espacio respecto al tiempo; por lo tanto, la velocidad es igual, numéricamente, a la derivada del espacio respecto al tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{2a}$$

Lo dicho se puede aclarar mediante un diagrama.

Gráficamente la relación de dependencia entre el espacio y el tiempo en el movimiento variado se expresa por una curva. La forma

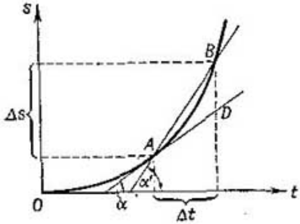


Fig. 3. La velocidad del movimiento no uniforme la determina la tangente del ángulo α formado por la línea tangente con el eje Ot.

de esta curva será diferente para distintos movimientos: para un caso particular se representa mediante la curva OAB de la fig. 3.

La velocidad media $\bar{v}$ en el intervalo de tiempo Δt es:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha'.$$

Introduciendo la velocidad media $\bar{v}$, sustituimos por la cuerda AB la dependencia real del espacio respecto al tiempo expresada por el arco $\breve{AB}$ para el intervalo de tiempo Δt, es decir, sustituimos el movimiento variado por el uniforme. Disminuyendo infinitamente el intervalo de tiempo Δt, según lo dicho, obtenemos la velocidad instantánea en el momento t; en este caso, en el límite la secante AB se transforma en la tangente AD; la cuerda AB y el arco $\breve{AB}$ se confunden, es decir, el movimiento variado en un intervalo infinitamente pequeño de tiempo coincidirá con el movimiento uniforme.

Así tendremos:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \operatorname{tg} \alpha,$$

dondo α es el ángulo entre el eje Ot y la tangente al punto dado A de la curva que representa al espacio en función del tiempo.

Veamos cómo se representa el espacio recorrido en función de la velocidad en el movimiento variado.

Construyamos un diagrama en que el eje de abscisas sea el de los tiempos t y el de ordenadas, el de las velocidades v. La curva ABC

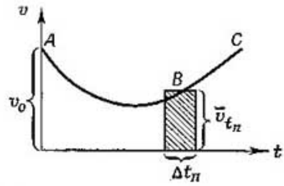


Fig. 4. El espacio recorrido en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño Δ_n viene representado por el área de la columna rayada.

representada en la fig. 4, corresponde al caso particular en que la velocidad, de valor v_0 en el momento inicial, primeramente disminuye con el tiempo y después aumenta.

Dividamos todo el tiempo que dura el movimiento t en una gran cantidad de intervalos muy pequeños Δt. Según la fórmula (1), el trayecto recorrido en uno de estos intervalos n será $\Delta s_n = \bar{v}_{t_n} \cdot \Delta t_n$, donde $\bar{v}_{t_n}$ es la velocidad media en el intervalo de tiempo Δt_n. Gráficamente se representa por el área del estrecho rectángulo rayado de la fig. 4. Todo el trayecto s recorrido durante el tiempo t es igual a la suma de todos los pequeños trayectos Δs_n, recorridos en los distintos intervalos de tiempo Δt_n:

$$s = \sum_n \bar{v}_{t_n} \cdot \Delta_{t_n}, \tag{3}$$

es decir, es igual a la suma de las áreas de todos los rectángulos en que ha resultado dividida la fig. $OABC$ (fig. 5.). En el límite, siendo los intervalos de tiempo Δt_n infinitamente pequeños, los rectángulos serán infinitamente estrechos y su suma coincidirá con el área de la figura $OABC$. Así tenemos que en el diagrama, el espacio s vendrá representado por el área comprendida entre la curva AB, que interpreta la relación entre la velocidad y el tiempo, y las ordenadas correspondientes a los instantes inicial y final del tiempo t durante el cual se recorre el espacio.

§ 7. Movimiento rectilíneo uniformemente variado. Aceleración. Movimiento uniformemente variado se denomina aquel en que la velocidad v, a iguales intervalos de tiempo Δt arbitrariamente elegidos varía en igual magnitud Δv. En el caso de que Δv tenga el mismo signo que la velocidad, es decir, cuando el valor numérico de la velocidad aumenta con el tiempo, el movimiento se denomina *uniformemente acelerado*; en el caso de que Δv tenga el signo contrario, es decir, cuando el valor numérico de la velocidad disminuye con el tiempo, el movimiento se denomina *uniformemente retardado*.

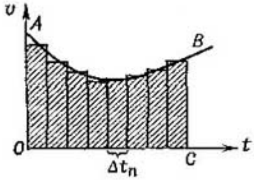


Fig. 5. El espacio recorrido en un intervalo de tiempo finito t, viene representado por el área de la figura rayada $OABC$.

Para caracterizar cuan de prisa varía la velocidad con el tiempo, se introduce la magnitud física denominada *aceleración*. La aceleración w del movimiento rectilíneo uniformemente variado es una magnitud física directamente proporcional al incremento de la velocidad e inversamente proporcional al intervalo de tiempo en que se ha efectuado este incremento de velocidad.

Supongamos que en el instante t_0 la velocidad era v_0, y en el instante t, la velocidad era v; entonces, en el intervalo $t - t_0$ la velocidad habrá variado en $v - v_0$ y matemáticamente la aceleración w se representará:

$$w = k\frac{\Delta v}{\Delta t} = k\frac{v - v_0}{t - t_0}, \tag{1}$$

donde k es el coeficiente de proporcionalidad que depende de la elección de las unidades en que se miden la velocidad v y el tiempo t. La aceleración del movimiento uniformemente variado es una magnitud constante. Si consideramos el coeficiente de proporcionalidad $k = 1$, la aceleración

$$w = \frac{\Delta v}{\Delta t}; \tag{1a}$$

en el sistema CGS por unidad de aceleración se debe tomar la de un movimiento en que la velocidad varíe 1 cm/s cada segundo. Abreviadamente esta unidad de aceleración se designa 1 cm/s^2. En el sistema MKS, por unidad de aceleración se toma la del movimiento en el cual la velocidad varía 1 m/s cada segundo (abreviadamente 1 m/s^2).

De la fórmula (1), siendo $k = 1$, tenemos:

$$v = v_0 + w(t - t_0). \tag{2}$$

Por lo tanto, en el movimiento uniformemente variado, la velocidad es una función lineal del tiempo. Si $t_0 = 0$, según la (2):

$$v = v_0 + wt;$$

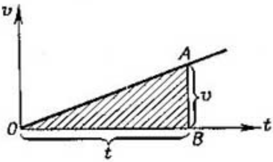
y, finalmente, si la velocidad inicial $v_0 = 0$,

$$v = wt. \tag{2b}$$

La aceleración w tiene el mismo signo que el incremento de velocidad Δv, por eso, en el movimiento uniformemente acelerado, la aceleración w es positiva, y en el uniformemente retardado es negativa.

Determinemos el espacio recorrido en el movimiento uniformemente variado.

Fig. 6. El espacio recorrido en el movimiento uniformemente variado viene representado por el área del triángulo OAB.



Supongamos, para simplificar, que la velocidad inicial $v_0 = 0$, entonces, según la (2b), gráficamente, la relación entre la velocidad y el tiempo (consideramos que $w > 0$) vendrá representada por la recta OA (fig. 6), y, por lo tanto, según lo dicho en el párrafo anterior, el espacio s recorrido en el tiempo t, lo representará el área de la figura OAB. Como en el caso dado, esta figura es un triángulo, su superficie será

$$\frac{AB \cdot OB}{2} = \frac{v \cdot t}{2}.$$

De aquí que el espacio s recorrido en el tiempo t sea:

$$s = \frac{vt}{2}. \tag{3}$$

Sustituyendo la velocidad v por su valor en función de w y de t según la (2b), obtenemos:

$$s = \frac{wt^2}{2}. \tag{4}$$

Si la velocidad inicial no era igual a cero, sino que tenía un valor v_0, resulta:

$$s = v_0 t + \frac{wt^2}{2}. \tag{4a}$$

Como ejemplo de movimiento uniformemente variado puede citarse el de caída libre de los cuerpos sobre la superficie de la Tierra.

En este caso la aceleración es:

$$w = g = 9{,}81\ \mathrm{m}/s^2.$$

La caída de los cuerpos en el aire se puede considerar uniformemente variada sólo en los casos en que el valor de la resistencia del aire sea pequeño (una piedra que cae de una pequeña altura); cuando el valor de esta resistencia sea grande, la caída de los cuerpos en el aire se convierte en movimiento uniforme (véase el § 16). Así, por ejemplo, las pequeñas gotas de agua que forman la niebla, descienden con movimiento uniforme; también desciende con movimiento uniforme en el aire un paracaidista con el paracaídas desplegado.

Examinemos varios ejemplos de movimiento uniformemente variado.

E j e m p l o 1. Una piedra se ha dejado caer desde una torre de 20 m de altura con una velocidad inicial igual a cero. Despreciando la resistencia del aire, determinar: el tiempo de caída, y la velocidad con que llega la piedra al suelo.

S o l u c i ó n. Como el movimiento de la piedra, según los datos, se puede considerar uniformemente variado, aplicamos las ecuaciones deducidas en este párrafo.

Con la fórmula (4) determinamos el tiempo de caída de la piedra:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{w}}, \qquad (5)$$

donde s es el espacio recorrido por la piedra, es decir, la altura desde la cual ha caído.

Colocando en lugar de la aceleración w su valor $w = g = 9{,}81$ m/s², obtendremos

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{9{,}81}}\ \mathrm{s} \cong 2\ \mathrm{s}.$$

La velocidad adquirida al final del movimiento será:

$$v = wt = gt = 9{,}81 \cdot 2\ m/\mathrm{s} = 19{,}6\ \mathrm{m/s}.$$

La velocidad v adquirida al final de la caída se puede expresar también algébricamente en función del espacio recorrido s y de la aceleración w. Para ello, en la ecuación $v = wt$, sustituimos t por su valor según la (5), entonces

$$v = wt = w\sqrt{\frac{2s}{w}},$$

de donde

$$v = \sqrt{2sw}. \qquad (6)$$

E j e m p l o 2. Una piedra lanzada verticalmente hacia arriba alcanza la altura de 30 m. ¿Cuánto tiempo invertirá en alcanzar esta altura y cuánto en caer a la Tierra? ¿De qué velocidad inicial hay que dotarla?

S o l u c i ó n. El movimiento de la piedra lanzada verticalmente hacia arriba será, en el ascenso, uniformemente retardado, por lo tanto la aceleración $w = -g$ y la altura alcanzada

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \qquad (7)$$

donde v_0 es la velocidad inicial de la piedra y t el tiempo invertido en el ascenso. La velocidad inicial v_0 se determina partiendo de la condición de que la velocidad v_s en el punto de máxima altura es igual a cero, es decir:

$$v_s = v_0 - gt = 0,$$

de donde

$$v_0 = gt \tag{8}$$

y, por consiguiente, según la (7)

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

el tiempo de ascenso de la piedra hasta la altura s será:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Comparando este tiempo con el determinado por la ecuación (5), hallamos que el ascenso de la piedra hasta la altura s dura lo mismo que la caída libre desde la misma altura. Sustituyendo t por su valor según la (8), obtenemos:

$$v_0 = \sqrt{2sg}.$$

Por lo tanto [compárese con la fórmula (6)], la velocidad con que hay que lanzar la piedra verticalmente hacia arriba, también será igual a la que adquire cayendo libremente desde la misma altura s. Aplicando las ecuaciones deducidas y colocando los valores numéricos del ejemplo, hallamos:

$$v_0 = \sqrt{2sg} = \sqrt{2 \cdot 30 \cdot 9{,}81} \text{ m/s} \cong 24{,}2 \text{ m/s};$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{9{,}81}} \text{ s} \cong 2{,}48 \text{ s}.$$

§ 8. Aceleración de un movimiento rectilíneo variado cualquiera. En el caso general del movimiento rectilíneo variado se puede introducir el concepto de *aceleración media*. La aceleración media $\overline{w}$ en el intervalo dado de tiempo Δt es igual a la aceleración de un cuerpo con aceleración uniforme y adquiere, en este mismo intervalo de tiempo Δt, el mismo incremento de velocidad Δv, que el del cuerpo que estudiamos:

$$\overline{w} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{1}$$

Introduzcamos el concepto de *aceleración instantánea* análogamente al de velocidad instantánea. Disminuyamos el intervalo de tiempo Δt hasta tal punto, que el movimiento en este intervalo se pueda considerar uniformemente variado. La aceleración media $\overline{w}$ en este intervalo de tiempo será la aceleración instantánea. Por lo tanto, por aceleración instantánea se comprende el límite a que tiende la aceleración media $\overline{w}$ al disminuir infinitamente el intervalo de tiempo Δt para el cual se calcula:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} (\overline{\omega}) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right), \tag{2}$$

donde Δv es la variación infinitamente pequeña de la velocidad en el intervalo de tiempo infinitamente pequeño Δt.

Del cálculo diferencial sabemos que

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{dv}{dt}, \tag{2a}$$

es decir, la aceleración es igual a la derivada de la velocidad respecto al tiempo. Como $v = \frac{ds}{dt}$, tenemos

$$w = \frac{d^2 s}{dt^2}, \tag{2b}$$

es decir, la aceleración es igual a la segunda derivada del espacio respecto al tiempo.

Estas relaciones, lo mismo que en el caso de la velocidad, las podemos explicar mediante un diagrama. Supongamos que en la

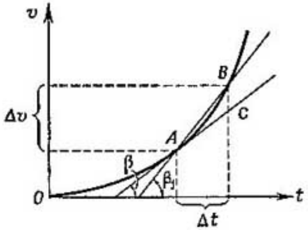


Fig. 7. La aceleración del movimiento variado viene determinada por la tangente de lángulo β que forma la línea tangente con el eje Ot.

fig. 7, la curva OAB representa la dependencia de la velocidad respecto al tiempo. La aceleración media $\overline{w}$ en el intervalo de tiempo desde t hasta $t + \Delta t$ será

$$\overline{w} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \operatorname{tg} \beta_1,$$

donde β_1 es el ángulo entre el eje Ot y la secante AB. Disminuyendo infinitamente el intervalo de tiempo Δt, la secante AB se aproximará a la tangente AC y, de esta manera, en el límite:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \operatorname{tg} \beta,$$

donde β es el ángulo entre el eje Ot y la tangente AC en el punto dado A de la curva que representa la velocidad en función del tiempo.

§ 9. Vector velocidad y vector aceleración. La velocidad se caracteriza no sólo por su valor numérico, sino también por la dirección y sentido. Para describir el movimiento de un cuerpo no es suficiente indicar el valor numérico de la velocidad, hay que indicar además en qué dirección se desplaza.

Las magnitudes que definen la dirección además del valor numérico, se denominan *vectores*. Las magnitudes para cuya determinación es suficiente saber sólo su valor numérico, se denominan *escalares* (por ejemplo, un intervalo de tiempo, la masa, la densidad, etc.)*).

El vector se puede representar por una flecha de longitud igual a la cantidad de unidades, arbitrariamente elegidas, correspondiente a su valor numérico, y cuya dirección coincida con la del vector.

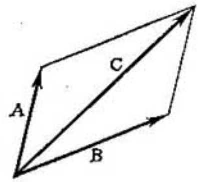


Fig. 8. Al sumar dos vectores **A** y **B**, el vector resultante **C** viene representado por la diagonal del paralelogramo cuyos lados son vectores **A** y **B**.

Se ha decidido designar los vectores con una letra en negrita, y su valor numérico, con la misma letra corriente; por ejemplo, la letra **A** designa un vector, y la A, su magnitud. El signo menos colocado delante del vector denota que el vector — **A** va dirigido en sentido contrario al vector **A** siendo de igual longitud.

La experiencia enseña que las magnitudes físicas vectoriales se suman de manera diferente que las magnitudes algébricas. El modo de sumar los vectores lo determina la regla del paralelogramo: al sumar dos vectores **A** y **B**, el vector resultante **C** lo determina la diagonal del paralelogramo de lados **A** y **B** (fig. 8).

Al sumar más de dos vectores se puede hallar el vector resultante aplicando sucesivamente la regla del paralelogramo. El mismo resultado se obtiene, si se construye una línea quebrada, cuyas componentes, según la magnitud, dirección y sentido, coincidan con los vectores componentes **A**, **B**, **C** y **D** (fig. 9). El vector resultante **F** lo determina el vector que cierra la línea quebrada, formando un polígono, desde su origen hasta su extremo**)).

La diferencia entre dos vectores **A** y **B** se puede determinar introduciendo un vector $\mathbf{B}' = -\mathbf{B}$, entonces:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B}'. \tag{1}$$

*) Algunos autores españoles, las magnitudes que representan la masa, la densidad, etc., es decir, que son siempre positivas y en su representación intervienen solamente los números que las miden, las denominan magnitudes modulares; y las que admiten una sola dirección (en dos sentidos opuestos) como el tiempo que, a partir de un punto origen, tiene dos signos (positivo o negativo), las denominan escalares (*N. del T.*).

**) En español, este polígono se denomina «polígono de vectores, vectorial o sumatorio» (*N. del T.*).

Construyendo el vector **B′** de magnitud igual a la del **B**, pero de sentido opuesto, encontramos el vector **C** resultante de la suma geométrica de los vectores **A** y **B′**. Según la ecuación (1), el vector **C** representará al mismo tiempo la diferencia de vectores **A** — **B**.

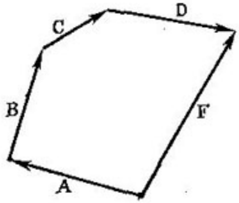


Fig. 9. El vector **F**, que es la resultante (suma) de los vectores **A**, **B**, **C** y **D**, se representa por el vector que cierra, formando polígono, la línea quebrada compuesta por los vectores **A**, **B**, **C** y **D**.

Un vector se puede determinar bien directamente, por su dirección, sentido y magnitud, bien por sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas. En el caso de coordenadas planas rectangulares

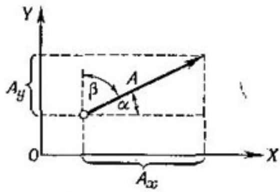


Fig. 10. Los segmentos A_x y A_y son las proyecciones del vector **A** sobre los ejes OX y OY.

(fig. 10), el vector **A** lo determinan las proyecciones en los ejes A_x y A_y. En la fig. 10 vemos que

$$A_x = A\cos\alpha; \quad A_y = A\cos\beta = A\operatorname{sen}\alpha;$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}. \tag{2}$$

La dirección del vector **A** la determina el ángulo α que forma con el eje OX, o el ángulo β que forma con el eje OY.

Como se ve de la fig. 10:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_y}{A_x}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{A_x}{A_y}. \tag{3}$$

La velocidad del movimiento rectilíneo es un *vector* dirigido según la recta por la cual se mueve el cuerpo y en el mismo sentido en que éste se desplaza. Los resultados del cálculo del movimiento realizado fundándose en la regla vectorial de la suma de velocidades, coinciden con el resultado de las observaciones de los movimientos reales, lo cual confirma que se puede considerar la velocidad como un vector. Si el cuerpo participa simultáneamente en dos movimientos rectilíneos uniformes de velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (fig. 11), el movimiento resultante lo caracteriza el vector velocidad $\mathbf{v}$, resultante de la suma vectorial de las velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

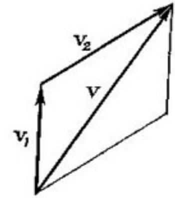


Fig. 11. La velocidad resultante $\mathbf{v}$ viene determinada por la diagonal del paralelogramo cuyos lados son las velocidades que se suman $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

El vector velocidad $\mathbf{v}$ se puede descomponer en dos vectores componentes de direcciones cualesquiera, por ejemplo, en un plano se puede descomponer en dos dirigidos según los ejes del sistema de

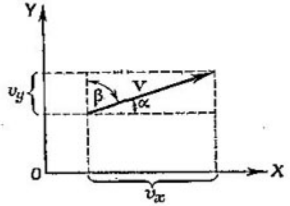


Fig. 12. Descomposición de la velocidad $\mathbf{v}$ en sus componentes v_x y v_y.

coordenadas OXY (fig. 12). En este caso, la fórmula (2) puede escribirse de la manera siguiente:

$$v_x = v\cos\alpha;\ \ v_y = v\cos\beta = v\,\mathrm{sen}\,\alpha;\ \ v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \qquad (4)$$

E j e m p l o. Hallar la magnitud y dirección con respecto a la orilla, de la velocidad $\mathbf{v}$ de un hombre que se desplaza transversalmente en el interior de un barco. La velocidad del hombre es $v_1 = 2$ m/s, la del barco, $v_2 = 8$ m/s.

S o l u c i ó n. La velocidad $\mathbf{v}$ del hombre respecto a la orilla es la suma vectorial de las velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (fig. 13). Su valor numérico será $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{4 + 64}$ m/s $= \sqrt{68}$ m/s $= 8{,}25$ m/c. La dirección de la velocidad $\mathbf{v}$ la determina el ángulo α que forma esta velocidad con la dirección de movimiento del barco. Según la fig. 13 tenemos:

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{8} = 0{,}25,$$

de donde $\alpha = 14°03'$.

La aceleración, como la velocidad, es un *vector*, ya que se caracteriza por tener, además de magnitud, dirección y sentido. En el caso del movimiento rectilíneo, las direcciones de la aceleración, velocidad y movimiento están en una misma recta. En este caso, la aceleración, como ya se ha indicado, puede tener el mismo sentido que la velocidad (movimiento acelerado), o el sentido contrario (movimiento retardado). Si la aceleración va dirigida con cierto ángulo respecto a la velocidad, ésta variará no sólo de magnitud, sino también de *dirección*. En este caso el cuerpo se desplazará según una curva.

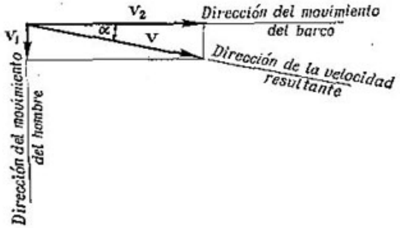


Fig. 13. Determinación de la velocidad resultante.

§ **10. Movimiento curvilíneo.** Si la línea descrita por el punto material en su movimiento, o, como se ha convenido en denominarla, la *trayectoria*, es una curva, el movimiento se denominna *curvilíneo*. Para determinar el vector velocidad en el movimiento curvilíneo,

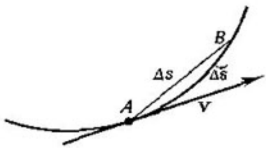


Fig. 14. En el movimiento curvilíneo, el vector velocidad **v** va dirigido según la tangente a la trayectoria.

examinemos lo que pasa en un pequeño intervalo de tiempo Δt. En este intervalo de tiempo, el punto material recorrerá un pequeño arco $\breve{\Delta s}$ (fig. 14). Si disminuimos infinitamente este intervalo de tiempo, el arco $\breve{\Delta s}$ también se reducirá infinitamente y en el límite se confundirá con su cuerda Δs. En el límite, el movimiento curvilíneo coincidirá, en un trecho infinitamente pequeño, con el movimiento rectilíneo. Por eso, la velocidad del movimiento curvilíneo en el punto dado A será:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\breve{\Delta s}}{\Delta t} \right), \tag{1}$$

y su dirección coincidirá con la de una cuerda infinitamente pequeña Δs de un arco infinitamente pequeño $\breve{\Delta s}$. Pero, como en el límite, la cuerda infinitamente pequeña coincide, según la dirección, con la tangente en el punto dado A, el *vector de la velocidad instantánea* **v** *en el movimiento curvilíneo va dirigido según la tangente a la trayectoria del cuerpo en el sentido de su movimiento.*

Si la velocidad **v** en el movimiento curvilíneo tiene un valor *numérico* constante, es decir, si en iguales intervalos cualesquiera de tiempo el punto material recorre un arco de igual longitud, el movimiento curvilíneo se denomina uniforme. Sin embargo, hay que recordar que la velocidad, en este caso, también cambia de dirección constantemente: en cada punto de la trayectoria tendrá la dirección de la tangente, que en la trayectoria curvilínea en diferentes puntos tiene distintas direcciones.

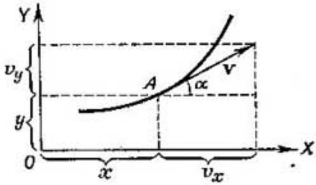


Fig. 15. Representación del movimiento curvilíneo por medio de las componentes de la velocidad en las direcciones de los ejes de coordenadas.

De esta manera tenemos que *en el movimiento curvilíneo, el vector velocidad nunca es constante: siempre va cambiando*. En el caso del movimiento curvilíneo uniforme, este vector varía sólo de dirección, conservando constante su magnitud; y en el caso general del movimiento curvilíneo variado, cambia de dirección y de magnitud.

Para examinar el movimiento curvilíneo es muy cómodo determinar la posición del cuerpo mediante coordenadas, por ejemplo, en el caso del movimiento en el plano, con las coordenadas x e y (fig. 15).

También es muy cómodo examinar, en vez del propio vector **v** de la velocidad instantánea, sus proyecciones en los ejes de coordenadas v_x y v_y. Entonces, el valor numérico del vector **v**, considerando el problema en un plano, será:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \tag{2}$$

y su dirección la determinará el ángulo α formado por el eje OX y la recta con que coincide la dirección del vector velocidad.

En la fig. 15 vemos que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x}. \tag{3}$$

Las proyecciones en los ejes de coordenadas Δx y Δy corresponden al vector de desplazamiento del cuerpo Δ **s**. Según las reglas del cálculo diferencial, las proyecciones de la velocidad

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{ds}{dt}$$

serán las magnitudes

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \frac{dx}{dt};$$

$$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = \frac{dy}{dt}. \tag{4}$$

Aquí dx/dt y dy/dt son las derivadas de las coordenadas respecto al tiempo. Estas se pueden calcular, si las coordenadas del cuerpo en movimiento se dan en determinada función del tiempo:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t).$$

Veamos unos cuantos ejemplos de movimiento curvilíneo.

E j e m p l o 1. Un cuerpo ha sido lanzado con una velocidad inicial v_0 y un ángulo α de ascenso respecto al horizonte. Hallar: 1) la trayectoria, 2) la altura de máxima elevación, 3) la distancia alcanzada (amplitud del tiro).

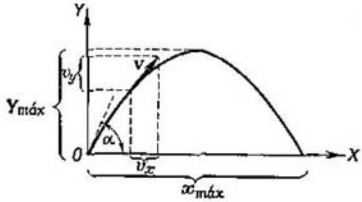


Fig. 16. Trayectoria de un cuerpo lanzado según una línea que forma el ángulo α con el horizonte.

S o l u c i ó n. Eligiendo los ejes de coordenadas como se indica en la fig. 16, deducimos las siguientes ecuaciones para las componentes de la velocidad del cuerpo (se desprecia la resistencia del aire).

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\alpha, \\ v_y &= v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Las coordenadas x e y del cuerpo en función del tiempo se expresan:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 \cos\alpha \cdot t, \\ y &= v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Excluyendo el tiempo t de las ecuaciones para x e y obtenemos la ecuación de la trayectoria:

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} \cdot x^2$$

Como α es el ángulo dado y v_0 la magnitud de la velocidad inicial, los coeficientes que van ante la x y la x^2 son magnitudes constantes; designándolos por a y b respectivamente, obtenemos

$$y = ax - bx^2,$$

que es la ecuación de *una parábola*. Por lo tanto, el cuerpo pesado lanzado hacia arriba formando un ángulo con el horizonte, se mueve según una parábola.

En el punto más elevado de la trayectoria (vértice) $v_y = 0$, de donde

$$v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt = 0,$$

y el tiempo t' de elevación a la altura máxima será

$$t' = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}.$$

Altura máxima de elevación:

$$y_{máx} = v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{v}\right)^2 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}. \tag{7}$$

El cuerpo cae en el plano horizontal al cabo de $t = 2t'$, de donde

$$t = \frac{2 v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}.$$

La amplitud del tiro la obtenemos sustituyendo este valor de t en la ecuación para x:

$$x_{\text{máx}} = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha. \tag{8}$$

De la última fórmula tenemos que, para la velocidad dada v_0, la amplitud será máxima cuando $\alpha = 45°$.

Todas las fórmulas obtenidas son justas solamente para el movimiento de los cuerpos en el vacío. En el lanzamiento de los cuerpos pesados en el aire, un importante papel lo desempeña la resistencia de éste.

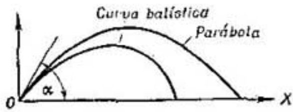


Fig. 17. Comparación de la trayectoria parabólica con la curva balística.

Debido a la resistencia del aire, durante el vuelo, la velocidad disminuye, y la trayectoria no es ya una parábola: su rama descendente es de mayor pendiente (*curva balística*, véase la fig. 17); la amplitud y la flecha (altura) son menores. El carácter de la curva balística depende en alto grado de la forma del objeto lanzado. La importancia de la resistencia del aire se puede ver en el siguiente ejemplo: de la fórmula (8) se infiere que, para un cuerpo que se desplaza en el vacío con una velocidad inicial $v_0 = 550$ m/s y un ángulo de tiro (de inclinación) de 20°, el alcance o amplitud es de 19,8 km. Pero para un proyectil de artillería de cuerpo cilíndrico con la parte anterior cónica, de 82 kgf de peso, en las mismas condiciones iniciales, la amplitud es sólo de 8,1 km.

Ejemplo 2. Un cuerpo pesado es lanzado con una velocidad inicial v_0 y un ángulo α de inclinación respecto al horizonte. Despreciando la resistencia del aire, hallar la magnitud y la dirección de la velocidad en: 1) el vértice (punto de máxima elevación) de la trayectoria, 2) el punto de caída en el plano horizontal.

Solución. Primeramente determinamos la dirección del vector velocidad **v** en el vértice de la trayectoria, para el cual $v_y = 0$:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v_y}{v_x} = 0, \text{ de donde } \alpha_1 = 0.$$

Por lo tanto, en el vértice, la velocidad está dirigida horizontalmente, y será igual a

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha} = v_0 \cos \alpha.$$

Determinemos ahora la dirección y magnitud de la velocidad en el punto de caída. Utilizando las ecuaciones para v_y y para el tiempo t que tarda en caer el cuerpo, deducidas en el ejemplo anterior, tenemos que en el punto de caída $v_y = -v_0 \operatorname{sen} \alpha$, de donde se deduce que el ángulo α_2, que determina la dirección de la velocidad en este punto, se hallará de la relación:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 \frac{v_y}{v_x} = -\frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

de donde: $\alpha_2 = -\alpha$, es decir, la velocidad del cuerpo en el punto de caída forma con el horizonte un ángulo igual al que formaba con el horizonte la velocidad inicial, pero dirigida hacia abajo (fig. 18).

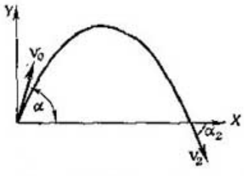


Fig. 18. La velocidad v_2 con que el cuerpo cae, numéricamente es igual a la velocidad inicial v_0.

La velocidad en el punto de caída del cuerpo será

$$v_2 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha} = v_0,$$

es decir, en el punto de caída la velocidad es igual a la inicial.

§ 11. La aceleración en el movimiento curvilíneo. Como se ha indicado en el párrafo anterior, en el movimiento curvilíneo variado, el vector velocidad cambia de dirección y de magnitud. La variación del vector velocidad $\Delta\mathbf{v}$ en el intervalo de tiempo desde t hasta $t + \Delta t$ es la *diferencia vectorial* de las velocidades $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1$ que tenía el cuerpo en los instantes $t + \Delta t$ y t. En este caso la aceleración será

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{\Delta t} \right), \tag{1}$$

donde $|\Delta\mathbf{v}|$ es el valor numérico de la variación del vector velocidad $\mathbf{v}$; la aceleración tiene la misma dirección que la variación de velocidad infinitamente pequeña $\Delta\mathbf{v}$. De esta manera, la ecuación (1) puede escribirse en forma vectorial:

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \right). \tag{1a}$$

Antes de examinar con más detalle la aceleración en el movimiento curvilíneo, analicemos el concepto de *curvatura* de una línea curva.

En el caso de la circunferencia, la curvatura la determina la magnitud $C = \frac{1}{R}$, donde R es el radio de la circunferencia dada. Si α es el ángulo central correspondiente al arco de circunferencia s, como se sabe, entre R, α y s hay la relación:

$$\breve{s} = R\alpha. \tag{2}$$

El *círculo osculador o de curvatura* de una línea plana en un punto A es la posición límite de la circunferencia que pasa por el punto A y otros dos puntos B_1 y B_2 al acercarse infinitamente al punto A (en la fig. 19, la curva viene representada con un trazo continuo, y el círculo osculador con una línea de puntos). El radio del círculo osculador nos da el *radio de curvatura* de la curva en el punto A, y el centro de este círculo es el *centro de curvatura* de la curva para el mismo punto A.

Tracemos por los puntos B_1 y B_2 las tangentes B_1D y B_2E a la circunferencia que pasa por los puntos B_1, A y B_2. Las normales a estas tangentes B_1C y B_2C serán radios R de la circunferencia y se

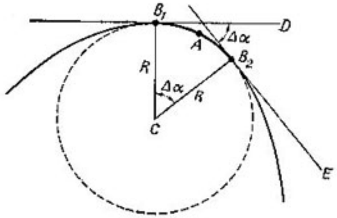


Fig. 19. Determinación del radio de curvatura del arco $\breve{\Delta s}$.

intersecarán en su centro C. El ángulo $\Delta\alpha$ entre las normales B_1C y B_2C será igual al ángulo entre las tangentes B_1D y B_2E. Según la fórmula (2):

$$R=\frac{\breve{\Delta s}}{\Delta\alpha},$$

donde $\breve{\Delta s}$ representa el arco de circunferencia $\overparen{B_1AB_2}$. Cuando $\breve{\Delta s}\to$ $\to 0$, según lo dicho, el radio de la circunferencia determinará el radio de curvatura de la curva en el punto A. Así, para el radio de curvatura de la curva, tenemos:

$$R=\lim_{\breve{\Delta s}\to 0}\left(\frac{\breve{\Delta s}}{\Delta\alpha}\right). \tag{2a}$$

La magnitud inversa de R es la curvatura en el punto dado:

$$C=\frac{1}{R}.$$

En la fig. 20 se ve que en el punto A_1, donde la curva es menos cerrada, el radio de curvatura R_1 es mayor que el R_2 correspondiente al punto A_2, donde la curva es más cerrada. En el punto A_3 de la curva donde la concavidad es del otro lado, el centro de curvatura también está en el otro lado de la curva.

Examinemos ahora con más detalle la aceleración de un cuerpo que se desplaza con movimiento variado según una curva plana. Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ los vectores velocidad respectivamente en los puntos A y B de la curva (fig. 21). El vector $\mathbf{v}_2$ se diferencia del $\mathbf{v}_1$ por su magnitud y dirección. Tracemos desde el punto A el segmento AC

igual y paralelo al BD, que representa el vector velocidad $\mathbf{v}_2$. Entonces, el segmento EC, que es igual a la diferencia de los vectores $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1$, representará la variación de la velocidad $\Delta\mathbf{v}$ en el trayecto AB. Acercando el punto B hacia el punto A, tenderá a cero el intervalo de tiempo Δt que invierte el cuerpo en ir desde A hasta B. En este

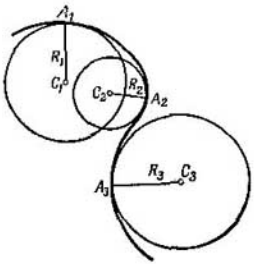


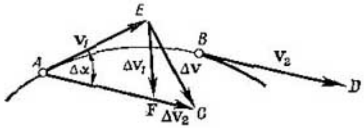
Fig. 20. Radios de curvatura en diferentes puntos de una curva.

caso, según la fórmula (1a), obtenemos para la aceleración en el punto A, la ecuación:

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right).$$

Tomemos en AC el segmento $AF = v_1$ y descompongamos $\Delta\mathbf{v}$ en dos componentes: $\Delta\mathbf{v}_1$ y $\Delta\mathbf{v}_2$. Entonces $\Delta\mathbf{v}_1$ caracterizará la varia-

Fig. 21. Variación de la velocidad $\Delta\mathbf{v}$ en el movimiento curvilíneo.



ción de la velocidad según la dirección, y $\Delta\mathbf{v}_2$ la variación de la velocidad según la magnitud. Está claro que $\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}_1 + \Delta\mathbf{v}_2$; colocando este valor en la ecuación de la aceleración $\mathbf{w}$, tendremos

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}_1 + \Delta \mathbf{v}_2}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}_1}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}_2}{\Delta t} \right).$$

En todas las operaciones la suma es vectorial. La magnitud

$$\mathbf{w}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}_1}{\Delta t} \right) \tag{3}$$

es la parte de la aceleración que caracteriza solamente la variación de la velocidad según la dirección.

Designemos el ángulo entre AE y AC por $\Delta\alpha$. Por construcción, este ángulo es el formado por los vectores de las velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, y por lo tanto, por las tangentes a nuestra curva en los puntos A y B. Si el ángulo $\Delta\alpha$ es pequeño, como se ve de la fig. 21, se puede escribir:

$$EF = AE \cdot \Delta\alpha,$$

pero como $EF = \Delta v_1$ y $AE = v_1$, tenemos que

$$\Delta v_1 = v_1 \Delta\alpha.$$

Utilizando esta ecuación de Δv_1, y sustituyendo este valor en la (3), obtenemos el valor de la componente de la aceleración w_n:

$$w_n = \lim_{\Delta t \to 0} \left(v_1 \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \right).$$

Multiplicando y dividiendo esta magnitud por la longitud del arco $\breve{\Delta s} = \breve{AB}$, y teniendo en cuenta que si $\Delta t \to 0$, $\breve{\Delta s} \to 0$ también tiende a cero, hallamos:

$$w_n = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \breve{\Delta s} \to 0}} \left(v_1 \frac{\Delta\alpha}{\breve{\Delta s}} \cdot \frac{\breve{\Delta s}}{\Delta t} \right) = v_1 \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\breve{\Delta s}}{\Delta t} \right) \cdot \lim_{\breve{\Delta s} \to 0} \left(\frac{\Delta\alpha}{\breve{\Delta s}} \right).$$

Pero el $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\breve{\Delta s}}{\Delta t} \right) = v_1$, y según la (2a), el $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \left(\frac{\Delta\alpha}{\breve{\Delta s}} \right) = \frac{1}{R}$. Sustituyendo, tendremos para w_n:

$$w_n = \frac{v_1^2}{R}, \tag{4}$$

donde v_1 es la velocidad del cuerpo en el punto A, y R, el radio de curvatura en el mismo punto. En el límite, cuando $\Delta\alpha \to 0$, tenemos que el $\angle AEF \to 90°$ y, por lo tanto, el vector $\Delta\mathbf{v}_1$, se orientará normalmente a la velocidad $\mathbf{v}_1$, dirigida según la tangente a la curva en el punto A. De esta manera, la $\mathbf{w}_n$, que coincide según la dirección con la $\Delta\mathbf{v}_1$, resultará normal a la velocidad y dirigida hacia el centro de curvatura del trayecto en el punto dado. En consonancia con ello, esta parte $\mathbf{w}_n$ de la aceleración total se denomina *aceleración normal* o *centrípeta*.

De lo expuesto, podemos determinar fácilmente la dirección de la segunda componente $\mathbf{w}_t$ de la aceleración. Efectivamente, cuando $\Delta\alpha \to 0$, el segmento AC tiende a coincidir con la dirección de $\mathbf{v}_1$, de donde $\Delta\mathbf{v}_2$ y, por lo tanto, $\mathbf{w}_t$, resultarán dirigidas según la misma recta que la velocidad $\mathbf{v}_1$, es decir, según la tangente a la curva en el punto A. Por eso, la componente $\mathbf{w}_t$ de la aceleración se denomina *aceleración tangencial*.

Resumiendo podemos decir: *en el movimiento curvilíneo, la aceleración total* $\mathbf{w}$ *se puede descomponer en dos*: 1) *aceleración tangencial*

$\mathbf{w}_t$, *que caracteriza la variación de la velocidad según su magnitud*, y 2) *aceleración normal* $\mathbf{w}_n$, *que caracteriza la variación de la dirección de la velocidad.* En este caso hay que tener en cuenta que

$$w_n = \frac{v^2}{R}, \tag{5}$$

donde R es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto dado, y v es el valor de la velocidad del cuerpo en este punto. La aceleración normal va dirigida hacia el centro de curvatura normalmente a la curva.

La aceleración tangencial es:

$$w_t = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right), \tag{6}$$

donde Δv es la variación numérica del valor del vector velocidad. La aceleración tangencial va dirigida según la tangente a la trayectoria. Está claro (fig. 22) que la aceleración normal $\mathbf{w}_n$ y la tangencial

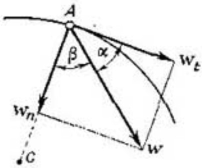


Fig. 22. En el movimiento curvilíneo, la aceleración total $\mathbf{w}$ se descompone en aceleración tangencial $\mathbf{w}_t$ y aceleración normal (centrípeta) $\mathbf{w}_n$.

$\mathbf{w}_t$, *son perpendiculares* entre sí, de donde la magnitud de la aceleración total w será

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_t^2}. \tag{7}$$

La dirección del vector de la aceleración total $\mathbf{w}$ se determina bien en función del ángulo β que forma $\mathbf{w}$ con el radio de curvatura, bien en función del ángulo α que forma $\mathbf{w}$ con la tangente:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w_t}{w_n}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{w_n}{w_t}. \tag{8}$$

En el movimiento curvilíneo uniforme, $w_t = 0$ y $w = w_n$; por lo tanto, en el movimiento curvilíneo uniforme, la aceleración tangencial es igual a cero, y la aceleración total coincide con la normal y *va dirigida, en cada punto de la trayectoria, según la perpendicular a ésta, hacia el centro de curvatura.* En este caso, la aceleración refleja el hecho de que la velocidad, permaneciendo constante según su magnitud, todo el tiempo *varía de dirección.*

Las fórmulas obtenidas se refieren al movimiento según una curva plana, sin embargo son fáciles de generalizar para el caso del movimiento curvilíneo no plano.

E j e m p l o. Hallar las aceleraciones normales y tangenciales de un cuerpo pesado lanzado horizontalmente con una velocidad inicial v_0 (se desprecia la resistencia del aire).

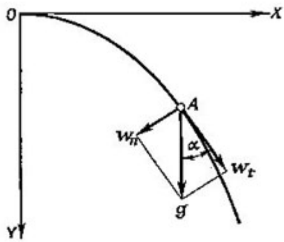


Fig. 23. Aceleración de un cuerpo lanzado horizontalmente.

S o l u c i ó n. En nuestro caso, la aceleración total será la de la gravedad g, que va dirigida verticalmente hacia abajo y es de magnitud constante. De aquí (fig. 23) que para la aceleración normal tengamos:

$$w_n = g \operatorname{sen} \alpha$$

y para la tangencial

$$w_t = g \cos \alpha \tag{10}$$

El valor del ángulo α lo determinamos sabiendo que la velocidad del cuerpo $\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{w}_t$, y que el eje OY, en la fig. 23 va dirigido verticalmente hacia abajo; entonces

$$v_x = v_0; \quad v_y = gt,$$

de donde

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$$

y

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{gt}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$$

Colocando estos valores de sen α y cos α en las (9) y (10), hallamos

$$w_n = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}; \qquad w_t = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$$

Cuando $t = 0$, es decir, en el momento inicial en que $w_t = 0$ y $w_n = w = g$, la aceleración normal coincide con la total. Según va cayendo el cuerpo, la aceleración normal irá disminuyendo (aumenta el radio de curvatura, la trayectoria del cuerpo lanzado se va enderezando) y empieza a aumentar la aceleración tangencial. Cuando $t \to \infty$, tenemos que: $w_t \to w = g$ y $w_n \to 0$.

§ 12. Cinemática del sistema invariable (del cuerpo sólido invariable). Velocidad y aceleración angulares. Todos los cuerpos reales existentes se deforman más o menos bajo la acción de las fuerzas que se les aplican; unas partes del cuerpo pueden desplazarse respecto a otras. Para simplificar este razonamiento se ha introducido el concepto de *cuerpo sólido invariable*. Por cuerpo sólido invariable se entiende un cuerpo imaginario que no se deforma bajo la acción de las fuerzas aplicadas al mismo. En el cuerpo sólido invariable no puede haber desplazamientos relativos de unas de sus partes respecto a las otras. El movimiento del cuerpo sólido invariable se reduce a los movimientos *de traslación* y *de rotación*.

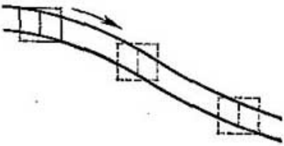


Fig. 24. Movimiento de traslación de un cuerpo sólido.

El movimiento de traslación del cuerpo sólido invariable es el movimiento en el cual cualquier línea recta trazada en el cuerpo y fija en él, se desplaza permaneciendo paralela a sí misma (fig. 24). En el movimiento de traslación, todos los puntos del cuerpo sólido invariable tienen la misma velocidad **v** y la misma aceleración **w**.

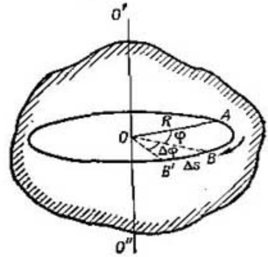


Fig. 25 Movimiento de rotación de un cuerpo sólido

El movimiento de rotación es aquel en que todos los puntos del cuerpo describen circunferencias cuyos centros están en una línea recta denominada *eje de rotación* (fig. 25).

En el caso general, el cuerpo sólido puede realizar al mismo tiempo los movimientos de traslación y de rotación. Y por fin, el mismo eje de rotación puede variar de posición con respecto al cuerpo; en este caso, para cada instante dado de tiempo, se dice que la rotación se efectúa alrededor del eje instantáneo.

Introduzcamos el concepto de *velocidad angular*. Para ello determinemos la posición de cierto punto B del cuerpo en rotación (fig. 25) mediante el ángulo φ que forma el radio OB con cierto radio inicial OA. Al girar el cuerpo, el ángulo φ varía constantemente. Velocidad angular de un cuerpo de rotación uniforme se llama la magnitud física ω que es proporcional al ángulo $\Delta\varphi$, que gira el radio OB, e inversamente proporcional al intervalo de tiempo Δt que invierte el radio para girar en este ángulo $\Delta\varphi$:

$$\omega = k\,\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \tag{1}$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad. Si suponemos a $k = 1$, resulta

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \tag{2}$$

en este caso, al medir $\Delta\varphi$ y Δt en determinadas unidades, deberemos elegir para la medición de ω las unidades que no alteren el cumplimiento de la ecuación (2). Midiendo, como generalmente se hace, los ángulos en radianes y el tiempo en segundos, deberemos elegir por unidad de velocidad angular la del movimiento en el cual el ángulo φ varía un radián por segundo; esta unidad de la velocidad angular se puede designar por radián/s, pero con frecuencia se designa simplemente por $\frac{1}{s}$ o s^{-1}.

El valor de la velocidad angular ω del cuerpo sólido en rotación no depende de la elección del punto B, ya que el ángulo $\Delta\varphi$ que gira el radio OB en el intervalo de tiempo dado Δt, no depende de la posición del punto B.

Veamos la relación existente entre la velocidad lineal v del punto B y la velocidad angular ω del sólido.

Supongamos que al variar el ángulo en $\Delta\varphi$, el punto B recorre el arco de círculo $\overset{\frown}{\Delta s}$, entonces la velocidad lineal será

$$v = \frac{\overset{\frown}{\Delta s}}{\Delta t};$$

por otro dado (véase la fig. 25), tenemos que

$$\Delta\varphi = \frac{\overset{\frown}{\Delta s}}{R}, \text{ de donde } v = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\cdot R,$$

o, según la (2)

$$v = \omega R, \tag{3}$$

donde R es la distancia del punto B al eje de rotación. Cuanto más alejado esté el punto B del eje de rotación, tanto mayor será su velocidad lineal v, siendo la angular ω constante. Los distintos puntos de un cuerpo que gira tienen distintas velocidades lineales.

Relacionemos la velocidad angular con *el período T de rotación* del cuerpo. En el intervalo de tiempo $\Delta t = T$, el cuerpo realiza una vuelta completa, y el ángulo φ aumenta en 2π, es decir, $\Delta\varphi = 2\pi$, de donde, según la (2):

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{4}$$

Por fin, veamos el concepto de *número de revoluciones* (*vueltas*) n por unidad de tiempo (frecuencia). Como en una vuelta se invierte el tiempo T, en la unidad de tiempo se efectuarán n vueltas:

$$n = \frac{1}{T}. \tag{5}$$

De aquí, según la (4), obtenemos otra ecuación para la velocidad angular del sólido:

$$\omega = 2\pi n. \tag{6}$$

Todos los puntos del sólido, moviéndose según una circunferencia, tienen una aceleración normal:

$$w_n = \frac{v^2}{R},$$

donde v es la velocidad lineal, y R la distancia al eje de rotación. Sustituyendo en esta ecuación la velocidad v por su valor en función de la velocidad angular ω según la (3)

$$w_n = \omega^2 R. \tag{7}$$

Como todos los puntos del sólido tienen una misma velocidad angular ω, de la fórmula (7) se ve que cuanto más alejados estén del eje de rotación del sólido, mayor será la aceleración normal.

Mediante las fórmulas (5) y (6) podemos expresar la (7) de la siguiente manera:

$$w_n = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \tag{8}$$

o

$$w_n = 4\pi^2 n^2 R. \tag{8a}$$

En el caso del movimiento *variado* circular introducimos el concepto de velocidad angular instantánea ω:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right). \tag{9}$$

En este caso, la relación entre la velocidad angular instantánea ω y la velocidad lineal instantánea v, seguirá siendo la misma que entre ω y v en el movimiento de rotación uniforme [fórmula (3)].

En la rotación variada, la velocidad angular ω varía con el tiempo. Para caracterizar esta variación se introduce el concepto de *aceleración angular* β, que, en el caso de una rotación uniformemente variada, es un magnitud física directamente proporcional a la variación de la velocidad angular $\Delta\omega$ e inversamente proporcional al intervalo de tiempo Δt en que ha ocurrido esta variación. En el caso general de una rotación variada, la aceleración angular instantánea será

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right). \tag{10}$$

Del cálculo diferencial sabemos que

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{9a}$$

y para la aceleración angular:

$$\beta = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{10a}$$

E j e m p l o 1. Determinar las velocidades angular y lineal de los puntos de la superficie terrestre y sus aceleraciones normales.

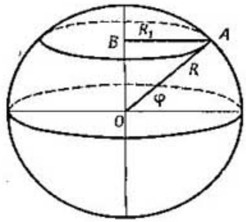


Fig. 26. El punto A, que se halla en la esfera terrestre a la latitud φ, describe una circunferencia de radio R_1.

S o l u c i ó n. La velocidad angular será:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}\ \mathrm{s}^{-1} \cong 7{,}3\cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1},$$

que es la misma para todos los puntos de la esfera terrestre.

La velocidad lineal de los puntos a la latitud φ (fig. 26) será

$$v = \omega R_1 = \omega R \cos\varphi,$$

donde R es el radio de la esfera terrestre. Sustituyendo ω por su valor y sabiendo que $R = 6370$ km $= 6{,}37\cdot 10^6$ m, obtenemos

$$v = 4{,}65\cdot 10^2 \cos\varphi \ \mathrm{m/s}.$$

La aceleración normal w_n a la latitud φ es

$$w_n = \omega^2 R_1 = \omega^2 R \cos\varphi.$$

Sustituyendo ω y R por sus valores, tenemos

$$w_n = 3{,}4 \cos\varphi \ \mathrm{cm/s^2}.$$

E j e m p l o 2. Una rueda de radio $r = 10$ cm gira aceleradamente de manera que el número de revoluciones aumenta en $n_0 = \frac{1}{2}$ vueltas por segundo.

¿Cuáles son al cabo de dos segundos: 1) la velocidad angular de la rueda, 2) la lineal de los puntos de su llanta y 3) las aceleraciones normal, tangencial y total de los puntos de la llanta?

Solución. El número de revoluciones n al cabo de dos segundos será

$$n = n_0 t = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{1}{s} = 1\ s^{-1}.$$

La velocidad angular ω al cabo de dos segundos será:

$$\omega = 2\pi n = 2\pi n_0 t = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1\ s^{-1} = 6{,}28\ s^{-1}.$$

La velocidad lineal de los puntos de la llanta de la rueda en ese mismo instante será:

$$v = \omega R = 6{,}28 \cdot 10\ \text{cm/s} = 62{,}8\ \text{cm/s} = 0{,}628\ \text{m/s}.$$

La aceleración normal de los puntos de la llanta será

$$w_n = \omega^2 R = 6{,}28^2 \cdot 10\ \text{cm/s}^2 = 394{,}4\ \text{cm/s}^2.$$

La aceleración tangencial w_t la hallamos sabiendo que

$$v = \omega R = 2\pi n_0 R t,$$

es decir, v aumenta uniformemente con el tiempo, por lo tanto, lo mismo que en el caso del movimiento uniformemente variado, tiene que verificarse la ecuación $v = \omega_t t$, donde w_t es la aceleración tangencial buscada, de donde

$$w_t = 2\pi n_0 R = 6{,}28 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10\ \text{cm/s}^2 = 31{,}4\ \text{cm/s}^2.$$

La aceleración total

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_t^2} = \sqrt{394{,}4^2 + 31{,}4^2}\ \text{cm/s}^2 = 396{,}5\ \text{cm/s}^2.$$

La dirección de la aceleración total la determinamos de la fig. 22, donde se ve que el ángulo α que forma con la tangente a la circunferencia se determina por la ecuación:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{w_n}{w} = \frac{394{,}4}{396{,}5} = 0{,}9965,$$

de donde $\alpha = 85°30'$. De esta manera, la aceleración total va dirigida formando un ángulo de 85°30′ con la tangente, o, lo que es lo mismo, formando un ángulo $\beta = 4°30'$ con el radio.

§ 13. La velocidad angular como vector. El movimiento según una circunferencia de radio dado R estará completamente caracterizado, si se conocen: 1) *la velocidad angular* ω (o la lineal v), 2) *el plano* en que está la circunferencia, y 3) *el sentido de la rotación.* La última característica es imprescindible ya que el movimiento según una circunferencia, mirado desde un lado determinado del plano, puede transcurrir bien en el sentido de las agujas del reloj, bien en sentido contrario. No obstante, todas estas características se pueden dar con ayuda de un vector, si convenimos en trazar este vector perpendicularmente al plano y concordar el sentido del vector con un sentido determinado de rotación. Esta última se establece según la regla del sacacorchos: *se hace coincidir el sentido del vector con el movimiento de traslación (avance) del sacacorchos, y la rotación con la dirección de giro de la manilla del sacacorchos* (fig. 27). De esta manera, para la característica de la rotación se introduce el concepto de un vector ω, denominado *vector de la velocidad* angular, que: 1) su magnitud sea igual al valor numérico de la velocidad angular ω, 2) sea perpendicular al plano de la circunferencia por la cual se realiza la rotación, y 3) mirando desde el extremo de este vector, la rotación se efectúe contra las agujas del reloj (fig. 28).

La representación de la velocidad angular mediante un vector se justifica porque, en el caso de que el sólido esté dotado de dos rotaciones simultáneas, la rotación resultante (composición de rotaciones) se caracteriza por un vector obtenido sumando los vectores de las velocidades angulares componentes según la regla del paralelogramo.

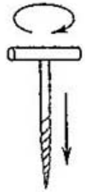


Fig. 27. Regla del sacacorchos.

En el análisis vectorial se introduce el concepto del llamado *producto vectorial* de dos vectores. Por producto vectorial de los vectores **A** y **B** se sobreentiende un vector **C** de magnitud

$$C = A \cdot B \operatorname{sen} (\angle \mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

donde A y B son las magnitudes de los vectores **A** y **B**, y ($\angle$ **A**, **B**), el ángulo formado por ellos (ángulo α en la fig. 29). El vector **C** es perpendicular al plano

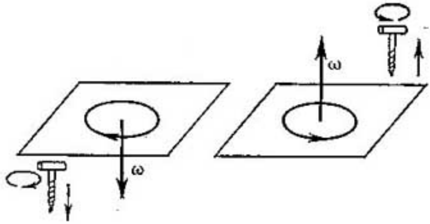


Fig. 28. El vector de la velocidad angular se traza perpendicularmente al plano en que se realiza la rotación y en el sentido en que, mirando desde su extremo, la rotación se efectúa contra las agujas del reloj.

que contiene los vectores **A** y **B**, y de sentido hacia el lado en que, mirando desde su extremo, el vector **A** se pueda hacer coincidir con el vector **B** haciéndolo girar contra las agujas del reloj (hacia el lado del ángulo menor, véase la fig. 29). En otras palabras: al girar la manilla del sacacorchos desde **A** hacia **B** (en el sentido del ángulo menor), el movimiento de traslación del sacacorchos determina el sentido del vector **C**.

El producto vectorial de dos vectores se escribe así:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

El producto vectorial no es conmutativo: los vectores $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}' = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ coinciden solamente en magnitud, pero tienen sentido opuesto.

La representación de la velocidad angular como vector nos permite relacionar cómodamente el vector de la velocidad lineal **v** con el de la velocidad angular **ω** y el radio vector **r**, que determina la posición del punto material respecto al eje de rotación.

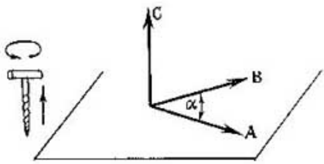


Fig. 29. Producto vectorial.

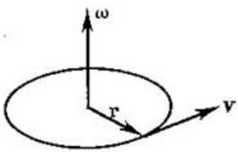


Fig. 30. Relación entre los vectores **ω**, **v** y **r**.

Como se ve de la fig. 30:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

es decir, **v** es el producto vectorial de **ω** por **r**.

Al examinar la velocidad angular como vector, debemos considerar también la aceleración angular β como vector, porque en este caso, en la ecuación

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right)$$

la magnitud $\Delta\omega$ representa una variación vectorial de la velocidad angular ω.

CAPITULO II

Dinámica

§ 14. Primera ley de Newton (Principio de la inercia). Hasta ahora hemos estudiado solamente el desplazamiento de los cuerpos en función del tiempo, es decir, los problemas de la cinemática. Las cuestiones relacionadas con la acción mutua de los cuerpos y que acarrean cambios en el estado del movimiento, no las hemos tocado en absoluto. De estas cuestiones se ocupa la *dinámica*. Los postulados fundamentales de la dinámica los formuló Newton en su «Philosophiae naturais principia mathematica» (1687) en forma de *tres leyes básicas del movimiento*.

La primera ley puede enunciarse de la siguiente manera: *todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme mientras otros cuerpos no actúen sobre él y le obliguen a cambiar de estado*.

En esta definición, el cuerpo se considera un punto material, es decir, en su estudio es excluye el movimiento de rotación. En el § 35 veremos que el cuerpo puede hallarse también en estado de rotación uniforme, si otros cuerpos no actúan sobre él.

De esta primera ley (principio) se deduce que el cuerpo puede cambiar su estado de reposo o de movimiento rectilíneo, cuando *actúen sobre él otros cuerpos materiales.*

La comprobación experimental directa de este principio es imposible, ya que en el medio real que nos rodea, no se puede colocar el cuerpo en tales condiciones que no sufra la acción de otros cuerpos. No obstante, mediante generalizaciones de una serie de hechos, nos convencemos de la veracidad de este principio. Generalmente, el estado de reposo que observamos en los cuerpos que nos rodean, se debe a que la acción de los diferentes cuerpos se compensa mutuamente, por ejemplo, la atracción de la Tierra y la reacción del apoyo o de la suspensión del cuerpo pesado, si está en reposo. Si el cuerpo se mueve, mantendrá tanto más su velocidad, cuanto menos actúen sobre él otros cuerpos: una piedra impulsada, resbalando sobre la superficie de la Tierra con cierta velocidad inicial, se deslizará tanto más cuanto más llana sea esta superficie, es decir, cuanto menos cuerpos actúen sobre la piedra. Definitivamente, de la veracidad del principio de la inercia, nos convence indirectamente la coincidencia de todas las consecuencias que se deducen con los datos experimentales, Deteniéndonos con más detalle en la primera ley de Newton, hay que plantear la siguiente pregunta: ¿sobre qué sistema de referencia (qué sistema de coordenadas) se establece el reposo o el movimiento rectilíneo uniforme de que se habla en el principio de la inercia? El mismo Newton consideraba que se trataba de un movimiento absoluto en el espacio absoluto. El escribió: «El espacio absoluto por su esencia misma, sin relacionarlo con nada exterior, siempre permanece igual e inmóvil... El movimiento absoluto es el desplazamiento de un cuerpo de un lugar absoluto a otro»*). Este punto de vista es metafísico y no corresponde a la realidad. Las propiedades del espacio real existente las determina la misma materia. La posición de unos cuerpos y sus movimientos, como ya lo hemos subrayado, no se pueden determinar más que en relación con otros cuerpos materiales; respecto a diferentes cuerpos, un mismo cuerpo puede desplazarse de distintas maneras.

Las observaciones demuestran que el principio de la inercia no es justo para cualquier sistema de referencia. Veamos unos cuantos ejemplos. Supongamos que el sistema de referencia es un vagón con movimiento rectilíneo uniforme. Entonces, abstrayéndonos de las trepidaciones, se cumple la primera ley de Newton: un cuerpo que esté en reposo con respecto al vagón, no se mueve si no actúan sobre él otros cuerpos, etc. Pero en cuanto el vagón empiece a girar, a frenar o a acelerar la marcha, aparecen claras infracciones del principio de la inercia: el cuerpo, hasta entonces en reposo, puede inclinarse o caer sin que actúen, al parecer, sobre él los cuerpos que le rodean. Tomemos como sistema de referencia la esfera terrestre; en este caso el principio de la inercia se cumple con mucha más exactitud que en el caso del vagón en marcha, donde, incluso con movimiento uniforme, se deja sentir la trepidación; pero hasta en el caso de la esfera terrestre, las observaciones minuciosas sobre ciertos procesos (oscilación del péndulo, difusión de las corrientes aéreas y oceánicas, etc.) revelan cierto incumplimiento del principio de la inercia, mejor dicho, de las consecuencias que se desprenden del mismo. Pero si elegimos como sistema de referencia el sistema heliocéntrico con el origen de coordenadas en el Sol y los ejes dirigidos a determinadas estrellas, en este sistema el principio de la inercia se cumple prácticamente con mucha exactitud. El sistema de referencia respecto a cual se cumple el principio de la inercia se denomina *sistema inercial*.

Como ya se ha indicado, el sistema heliocéntrico prácticamente es, con mucha exactitud, un sistema inercial; será inercial también cualquier otro sistema de referencia que se mueve con respecto al primero con movimiento rectilíneo uniforme. Cualquier sistema que

*) Esta cita está traducida del ruso (*N. del T.*).

tenga cierta aceleración con respecto a un sistema inercial, no puede ser inercial. Más abajo hablaremos con más detalle sobre los sistemas acelerados.

§ 15. Ley de la aceleración (segunda ley de Newton). Fuerza y masa. La ley de la aceleración, según definición del mismo Newton, dice: *la variación del movimiento es proporcional a la fuerza aplicada, y su dirección es la misma que la de la fuerza que actúa**).

De esta manera, la ley de la aceleración introduce el concepto de una nueva magnitud física: la *fuerza*.

Del principio de la inercia, como hemos visto, se deduce que sólo la acción de unos cuerpos sobre otros es capaz de variar el estado de sus movimientos. Esta acción de unos cuerpos sobre otros que acarrea el cambio del estado de sus movimientos, la caracteriza la magnitud física denominada fuerza. El cambio de estado del movimiento significa que el cuerpo deja el estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, es decir, que *varía su velocidad*, que *el cuerpo adquiere una aceleración*. De esto se deduce que la magnitud física denominada fuerza caracteriza la acción de unos cuerpos sobre otros, de cuyo resultado los cuerpos adquieren aceleración.

Tomemos un cuerpo determinado cualquiera y hagamos ejercer sobre él la acción de otro cuerpo cualquiera (u otros cuerpos) de manera que el primero adquiera diferentes aceleraciones w. Está claro que cuanto mayor sea la acción mayor será la aceleración w adquirida por el cuerpo. De esto se deduce naturalmente que la fuerza con que otros cuerpos actúan sobre el que se examina, es la magnitud física f, proporcional a la aceleración que adquiere el cuerpo dado:

$$f = k'w, \tag{1}$$

donde k' es un coeficiente de proporcionalidad.

La ecuación (1) nos permite comparar entre sí las fuerzas que actúan sobre un cuerpo dado, por las aceleraciones que le comunican. Como la aceleración tiene dirección y sentido, la fuerza también será una magnitud dirigida. La experiencia demuestra que al actuar varias fuerzas sobre un cuerpo, éste adquiere la misma aceleración que la adquirida bajo la acción de una fuerza igual a la suma vectorial de las dadas. De esto se deduce que *la fuerza es un vector*; y este vector fuerza va dirigido en el mismo sentido que el vector aceleración que aquél origina.

De esta manera, la ecuación (1) se puede escribir en forma vectorial:

$$\mathbf{f} = k'\mathbf{w}. \tag{1a}$$

La acción de un cuerpo sobre otro no se limita sólo a comunicarse mutuamente una aceleración. La fuerza también caracteriza a otras

*) Esta definición es traducción de la versión rusa (*N. del T.*).

acciones que, a su vez, pueden utilizarse para puntualizar el concepto de fuerza. Hablando con exactitud, los cuerpos, actuando unos sobre otros, originan cambios de forma o, como se dice, *se deforman* mutuamente. Estas deformaciones se pueden utilizar para comparar las fuerzas. Supongamos que el cuerpo A (fig. 31, a), actuando directamente sobre el cuerpo B le comunica una aceleración $\mathbf{w}$ (lo empuja). Si colocamos entre los cuerpos A y B un cuerpo elástico cualquiera, por ejemplo, un resorte p (fig. 31, b), cuando el cuerpo A empuje al B, el resorte se comprimirá, y tanto más cuanto mayor sea la aceleración que el cuerpo A le comunique al B, es decir, cuanto mayor sea la

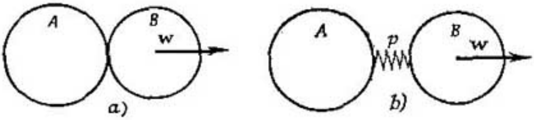


Fig. 31. El cuerpo A, empujando al B, le comunica la aceleración $\mathbf{w}$. En este caso, el resorte colocado entre los cuerpos, se comprime.

fuerza con que el cuerpo A actúa sobre el B. Midiendo esta fuerza mediante la aceleración que origina según la ecuación (1), podemos graduar el resorte y en adelante utilizarlo para medir fuerzas. El resorte se convertirá en un instrumento para medir las fuerzas; este instrumento se denomina dinamómetro.

Utilizando este método de medición de fuerzas con el dinamómetro de resorte, podemos hacer el siguiente experimento: aplicar una misma fuerza a *distintos* cuerpos y comparar las aceleraciones que éstos adquieren. Resulta que, bajo la acción de una misma fuerza, diferentes cuerpos adquieren distintas aceleraciones. De esta manera tenemos que la aceleración adquirida por distintos cuerpos se determina no sólo por la fuerza o fuerzas que actúan sobre ellos, sino también por cierta propiedad de los mismos cuerpos. Esta propiedad de los cuerpos viene caracterizada por la magnitud física denominada *masa*.

Cuanto menor sea la aceleración que adquiere el cuerpo bajo la acción de una fuerza, tanto mayor será su masa. Por lo tanto, podemos suponer que las masas de diferentes cuerpos son inversamente proporcionales a las aceleraciones adquiridas bajo la acción de fuerzas iguales:

$$\frac{m_1}{m_2} = \left| \frac{w_2}{w_1} \right|. \tag{2}$$

La masa de los cuerpos depende de sus dimensiones y de la naturaleza de la substancia.

La masa es una de las características más fundamentales de los cuerpos. Newton consideraba que la masa es una medida de la cantidad de materia en el cuerpo. Esta definición, que reinó durante mucho tiempo en los círculos científicos, tenía carácter metafísico. También era falso el parecer de los físicos idealistas que le atribuían a la masa el carácter meramente formal de «coeficiente» en las ecuaciones de la mecánica.

El materialismo dialéctico nos enseña que las propiedades de la materia son inagotables, y por eso ninguna de las características físicas de la materia en movimiento puede servir de medida absoluta. Hablando de la materia como categoría filosófica, gnoseológica, Lenin indicaba que no hay que confundir el concepto filosófico de la materia con unas u otras características de sus diferentes variedades, y decía: «Pero no puede permitirse de ningún modo confundir, como hacen los adeptos de Mach, la doctrina sobre esta o la otra estructura de la materia con la categoría gnoseológica, confundir la cuestión de las nuevas propiedades de las nuevas variedades de la materia (de los electrones, por ejemplo) con la vieja cuestión de la teoría del conocimiento, con la cuestión de los orígenes de nuestro conocimiento, de la existencia de la verdad objetiva, etc.»*).

El concepto de masa, como el de cualquier otra magnitud física, puede establecerse sólo estudiando el complejo de las leyes generales objetivas de las relaciones mutuas de esta magnitud con otras magnitudes físicas. Con respecto a la masa, una de estas relaciones mutuas la expresa la ley de la aceleración, la cual comprende el concepto de la inercia de los cuerpos. Aquí hay que tener en cuenta, al hablar de la inercia de los cuerpos, que éstos se diferencian por cierta propiedad objetiva que se revela en que adquieren diferentes aceleraciones siendo iguales las acciones exteriores a que se someten. Esta propiedad, inherente a todos los cuerpos, la caracteriza una determinada magnitud física, que es la masa. La ecuación (2) nos permite comparar cuantitativamente las masas de diferentes cuerpos. La masa medida de esta manera se puede denominar «*masa inerte*», ya que se mide basándose en fenómenos de inercia.

Un contenido más completo del concepto de masa se revela al examinar un amplio conjunto de hechos. Uno de los más fundamentales es la ley de la conservación de las masas, establecida por M. V. Lomonósov: la masa de un sistema aislado de cuerpos permanece constante sean cuales fueran los cambios que se produzcan en él. En el § 17 indicaremos la relación existente entre la masa y la magnitud física denominada cantidad de movimiento; esta magnitud, que tiene carácter vectorial, también se subordina a la ley de la conservación (ley de conservación de la cantidad de movimiento).

---

*) V. I. Lenin, Obras completas, t. XIV, *Materialismo y empiriocriticismo*, cap. II, 4; Editorial Cartago, S. A., Buenos Aires, 1960.

Además, la masa también se revela en los fenómenos gravitatorios (ley de la gravitación, §§ 32 y 33). Por fin, la teoría de la relatividad lleva a la conclusión de la existencia de una profunda relación mutua entre la masa y la energía. A velocidades próximas a la de la luz en el vacío, la masa del cuerpo no permanece constante, sino que aumenta con la velocidad. Lo que permanece constante es la masa del sistema completamente aislado, es decir, del sistema con el cual no hay ninguna clase de intercambio (ni de materia: átomos, moléculas, etc.; ni de energía).

Comparando las ecuaciones (1) y (2), llegamos a la conclusión de que: *la aceleración* $\mathbf{w}$ *adquirida por un cuerpo, es directamente proporcional a la fuerza* $\mathbf{f}$ *que actúa sobre él, e inversamente proporcional a su masa* m:

$$\mathbf{w} = k\frac{\mathbf{f}}{m}, \qquad (3)$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad.

La ecuación (3) tiene carácter vectorial y expresa el contenido exacto de la segunda ley de Newton.

Al resolver muchos problemas físicos, frecuentemente se conocen la magnitud y dirección de las fuerzas que actúan, como por ejemplo, en el caso de las fuerzas de gravitación (§ 32) o de fuerzas elásticas que se subordinan a la ley de Hooke (§ 89). Entonces la ecuación (3) permite hallar la aceleración y, por lo tanto, determinar el carácter del movimiento.

La igualdad (3) es la ecuación o ley fundamental de la dinámica.

§ 16. Fuerzas de rozamiento. Junto con las fuerzas que surgen al deformarse los cuerpos (fuerzas elásticas) y las fuerzas de gravitación, existen otras fuerzas originadas por las interacciones moleculares de contacto entre dos cuerpos o entre diferentes partes de un mismo cuerpo. Estas fuerzas que se revelan al desplazarse estos cuerpos o estas partes de un cuerpo respecto a otros o a otras, se denominan *fuerzas de rozamiento*.

Las fuerzas de rozamiento que surgen al contacto de diferentes cuerpos, se denominan fuerzas *de rozamiento exterior*. Estas fuerzas no desaparecen incluso cuando los cuerpos en contacto están inmóviles uno con respecto al otro (*rozamiento en reposo o rozamiento de adherencia*). Las fuerzas originadas por el desplazamiento de unas partes del cuerpo respecto a otras, se denominan fuerzas *de rozamiento interno* (estas fuerzas aparecen con más frecuencia en el movimiento de los líquidos y de los gases, en cuyo caso este rozamiento interno se denomina viscosidad).

Las fuerzas de rozamiento tienen una importancia muy grande en nuestra práctica cotidiana y en la técnica, por eso, el saberlas calcular es esencial para la justa aplicación de la ley de la aceleración en muchos importantes casos prácticos.

La dirección de las fuerzas de rozamiento es tangencial a las superficies de contacto de los cuerpos y depende de sus velocidades relativas. Esto último las diferencia notablemente de las fuerzas de elasticidad y de las de gravitación. Las fuerzas de rozamiento pueden surgir no solamente entre los cuerpos sólidos en contacto, sino también entre un cuerpo sólido y un líquido, o entre un sólido y un gas.

Como, en las condiciones terrestres, en todo movimiento real surgen unas u otras fuerzas de rozamiento, para determinar la aceleración del cuerpo hay que tener en cuenta, además de la fuerza dada $\mathbf{f}$ que actúa sobre él, la de rozamiento $\mathbf{f}_r$, que surge si hay una velocidad relativa $\mathbf{v}$.

Supongamos que un cuerpo A se desplaza respecto a otro, en contacto con él, a la velocidad relativa $\mathbf{v}$. La experiencia demuestra que la fuerza de rozamiento $\mathbf{f}_r$ que actúa en el cuerpo A, siempre va dirigida en sentido contrario a la velocidad $\mathbf{v}$. Supongamos que sobre el cuerpo A, además de la fuerza de rozamiento $\mathbf{f}_r$, actúa otra fuerza cualquiera $\mathbf{f}$. Entonces, la aceleración $\mathbf{w}$ adquirida por el cuerpo A, se determina por la suma de las fuerzas $\mathbf{f} + \mathbf{f}_r$.

Según la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{w} = \frac{k}{m}(\mathbf{f} + \mathbf{f}_r), \tag{1}$$

donde m es la masa del cuerpo, y k un coeficiente de proporcionalidad.

Para que en las condiciones reales el cuerpo se mueva a velocidad constante $\mathbf{v}$, hay que aplicarle un fuerza $\mathbf{f}$ que equilibre la fuerza de rozamiento $\mathbf{f}_r$. Sólo en este caso, según la ecuación (1), la fuerza resultante $\mathbf{f} + \mathbf{f}_r$ es igual a cero y, por consiguiente, es igual a cero la aceleración $\mathbf{w}$, es decir, el cuerpo se mueve uniformemente.

El cuerpo se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme cuando la fuerza de rozamiento debida al movimiento mismo equilibra a la fuerza exterior.

Veamos, por ejemplo, un barco con movimiento rectilíneo empujado por la fuerza constante f de la hélice, que consideramos positiva. En cuanto el barco arranca, surge la fuerza de rozamiento, que depende de la velocidad v del barco. Como la fuerza de rozamiento va en sentido contrario a la propulsora f de la hélice, la designaremos por $-f_r$. El barco se mueve debido a la fuerza resultante $f - f_r$. Al principio del movimiento, cuando la velocidad v es pequeña, la fuerza resultante es positiva y el barco se desplaza con movimiento acelerado. A medida que aumenta la velocidad v, aumenta la magnitud de la fuerza de rozamiento, y la aceleración disminuye. Por fin, la diferencia $f - f_r$ se hace igual a cero, y entonces el barco se mueve uniformemente. Si la fuerza propulsora de la hélice, por cualquier causa, disminuye, la diferencia $f - f_r$ puede resultar negativa, entonces el barco empieza a desplazarse con movimiento retardado.

Como segundo ejemplo veamos la caída de un sólido en el aire teniendo en cuenta la resistencia de éste. Si el cuerpo empieza a caer con velocidad inicial igual a cero, sobre el cuerpo actuará solamente la fuerza de la gravedad P, y adquirirá la aceleración w, que es igual a la de la caída libre g. A medida que aumenta la velocidad de caída aparece y aumenta la fuerza de rozamiento con el aire; la fuerza resultante $P - f_r$ será menor que la de la gravedad, y la aceleración w, menor que la de la caída libre g. Con el aumento ulterior de la velocidad de caída, la fuerza de rozamiento, por fin, equilibrará a la de la gravedad P, y el cuerpo caerá con movimiento uniforme, a velocidad constante. La magnitud de esta velocidad de caída uniforme depende de la forma y dimensiones del cuerpo que cae. Por ejemplo, la experiencia demuestra que para un hombre que cae, esta velocidad aproximadamente es igual a 60 m/s. Esta es la velocidad que adquieren los paracaidistas en el «salto retardado». Después de abrir el paracaídas la fuerza de resistencia del aire aumenta de súbito, y la velocidad de caída («descenso») disminuye aproximadamente hasta 5-6 m/s.

La fuerza de rozamiento que surge al deslizarse unas superficies secas con respecto a otras, depende en alto grado del estado de estas superficies (de su rugosidad). La magnitud de la fuerza de rozamiento depende también de la componente normal F_n de la fuerza que actúa sobre la superficie. Al aumentar la componente normal F_n, la fuerza de rozamiento aumenta poco más o menos proporcionalmente a la F_n:

$$f_r = \varkappa F_n. \tag{2}$$

El coeficiente $\varkappa$ de la fórmula (2) se denomina *coeficiente de rozamiento*. El valor del coeficiente de rozamiento $\varkappa$ depende no sólo del carácter de las superficies de contacto, sino también de su velocidad relativa v.

La magnitud de la fuerza de rozamiento (siendo constante la componente normal F_n de la fuerza), para superficies sólidas que se tocan, en unos límites bastante amplios, no depende de la magnitud de las superficies de contacto.

Si, por ejemplo, un paralelepípedo de superficies igualmente elaboradas, que resbala por una superficie sólida, lo colocamos sobre otra cara de dimensiones diferentes, la fuerza de rozamiento f_r, siendo la velocidad relativa v la misma, permanece invariable.

El rozamiento entre dos superficies secas de contacto, como ya se ha indicado, no desaparece cuando la velocidad relativa v es igual a cero. Para que el cuerpo empiece a deslizarse por una superficie cualquiera, hay que aplicarle una fuerza exterior f, paralela a la superficie de contacto, mayor que cierta magnitud f_1 determinada para el caso dado. Mientras la fuerza exterior $f < f_1$, el cuerpo permanecerá inmóvil, lo cual significa que entre el cuerpo y la superficie con la cual está en contacto, surge una fuerza f_r, denominada *fuerza de rozamiento estático*, que equilibra la fuerza exterior.

La fuerza de rozamiento estático puede adquirir cualquier valor entre 0 y f_1, según sea la magnitud de la fuerza exterior aplicada. El valor máximo de la fuerza de rozamiento estático es igual a la magnitud de la fuerza f_1 bajo cuya acción empieza a deslizarse el cuerpo. Este valor satisface la ecuación (2); en este caso, el coeficiente $\varkappa$ se denomina *coeficiente de rozamiento estático*. El valor de este coeficiente depende solamente de la naturaleza de las superficies de contacto. Si éstas son de madera y están secas, el coeficiente aproximadamente es igual a 0,6; si el contacto es entre el acero y el hielo, el coeficiente de rozamiento estático es aproximadamente de 0,03.

Cuando la fuerza exterior f supera a la fuerza máxima de rozamiento estático, el cuerpo empieza a deslizarse y aparece la fuerza de rozamiento al (de) deslizamiento (o fuerza de rozamiento cinético). Esta fuerza de rozamiento al deslizamiento, al principio es *menor* que la fuerza de rozamiento estático, y con el aumento de la velocidad relativa v, primeramente continúa disminuyendo, y después, al seguir aumentando esta velocidad relativa v, aumenta. Gráficamente la dependencia de la fuerza de rozamiento respecto a la velocidad relativa se representa en el diagrama de la fig. 32. Si $v = 0$, la fuerza de rozamiento

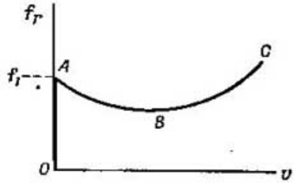


Fig. 32. Dependencia de la fuerza de rozamiento f respecto a la velocidad relativa v.

puede tener cualquier valor entre cero y f_1 (segmento OA en el eje de ordenadas), según sea el valor de la fuerza exterior aplicada. La dependencia ulterior de la fuerza de rozamiento respecto a la velocidad relativa v, la representa la curva ABC.

En la técnica, entre las superficies de contacto se introduce un lubricante, es decir, un líquido viscoso que forma una delgada capa entre las superficies sólidas. El primero que desarrolló la teoría de la lubricación fue el ingeniero ruso N. P. Petrov, el cual demostró que, con lubricante, la cuestión se reduce al rozamiento interno. La capa del lubricante líquido más cercana al cuerpo, se adhiere a éste; el deslizamiento se produce solamente entre las capas del líquido. En el caso de un árbol coaxial con un cojinete, la fuerza de rozamiento es proporcional a la viscosidad del líquido lubricante y al número de revoluciones del árbol por unidad de tiempo, e inversamente proporcional a la holgura entre la superficie del árbol y el cojinete.

§ 17. Cantidad de movimiento. Impulsión (impulso) de una fuerza. Veamos primeramente el movimiento producido por una fuerza constante $\mathbf{f}$, es decir, un movimiento que se caracteriza por una magnitud constante del vector aceleración $\mathbf{w}$. Supongamos que en el intervalo de tiempo Δt, la velocidad del cuerpo varía en la magnitud $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$; entonces

$$\mathbf{w} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\Delta t};$$

colocando este valor de la aceleración $\mathbf{w}$ en la ecuación de la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{w} = k\frac{\mathbf{f}}{m},$$

obtenemos

$$\frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\Delta t} = k\frac{\mathbf{f}}{m} \quad \text{o} \quad \frac{m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1}{\Delta t} = k\mathbf{f}. \tag{1}$$

Hay que tener en cuenta que $m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$ es la diferencia vectorial de las magnitudes $m\mathbf{v}_2$ y $m\mathbf{v}_1$. La magnitud $m\mathbf{v}$, igual al producto del vector velocidad $\mathbf{v}$ del cuerpo por su masa, se denomina *cantidad de movimiento* **K**. La cantidad de movimiento

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v} \tag{2}$$

es una magnitud vectorial y tiene la misma dirección que el vector velocidad $\mathbf{v}$.

Introduciendo en la ecuación (1) la cantidad de movimiento, tenemos

$$\frac{\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1}{\Delta t} = k\mathbf{f} \quad \text{o} \quad \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta t} = k\mathbf{f}, \tag{3}$$

donde $\Delta\mathbf{K}$ es la variación del vector cantidad de movimiento. La ecuación (3) significa que *en el movimiento uniforme la variación de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo es proporcional a la fuerza aplicada y se produce en la misma dirección en que actúa el vector fuerza*.

De la ecuación (3) se puede dar también la siguiente definición de fuerza: la fuerza es una magnitud vectorial proporcional a la variación de la cantidad de movimiento causada por ella en la unidad de tiempo y dirigida en el mismo sentido que la variación de la cantidad de movimiento.

Generalicemos la ecuación (3) para el caso de movimientos variados cualesquiera, cuando la fuerza $\mathbf{f}$ varía con el tiempo. Entonces, en la ecuación (3) por Δt debemos sobreentender un instante infinitamente pequeño, es decir, tenemos que escribir:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta t} = k\mathbf{f}, \tag{3a}$$

donde el vector $\mathbf{f}$ es la magnitud de la fuerza en el instante dado.

La ecuación (3a), lo mismo que la (3) del § 15, expresa la segunda ley de Newton.

Desde el punto de vista de los razonamientos aducidos, la ecuación (3) del § 15 y la (3a) del presente, son completamente equivalentes, ya que la segunda se ha deducido directamente de la primera; ambas expresan exactamente la segunda ley de Newton. No obstante, la equivalencia indicada tiene lugar suponiendo que la masa m del cuerpo es una magnitud constante, independiente de su velocidad. Esto es justo mientras la velocidad del cuerpo sea pequeña en comparación con la velocidad de la luz. En los movimientos verificados a velocidades comparables con la de la luz, la masa m no permanece constante: depende de la velocidad v. Los movimientos a tales velocidades se rigen por la mecánica de la teoría de la relatividad. En este caso, no obstante, la ecuación (3a) conserva su valor, por lo tanto es una fórmula más general de la ley de la aceleración que la ecuación (2) del § 15. Junto con el valor de la fuerza en el instante dado de tiempo, podemos examinar también el valor medio de la fuerza $\overline{f}$ en un intervalo finito de tiempo Δt; entonces, en lugar de la (3a) obtenemos

$$\frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta t}=k\overline{\mathbf{f}}, \quad \text{o} \quad \overline{\mathbf{f}}\Delta t=k'\Delta \mathbf{K}=k'(m\mathbf{v}_2-m\mathbf{v}_1), \tag{4}$$

donde $k'=\frac{1}{k}$.

La magnitud $\overline{f}\,\Delta t$, igual al producto del valor medio de la fuerza $\overline{f}$ por el intervalo de tiempo Δt en que examinamos su acción, se denomina *impulsión o impulso de la fuerza*. La impusión de la fuerza es una magnitud vectorial. La ecuación (4) establece que el vector impulso de la fuerza es proporcional a la variación vectorial de la cantidad de movimiento que se verifica en el intervalo de tiempo en que se considera la impulsión de la fuerza, y va dirigido en el mismo sentido que la variación de la cantidad de movimiento.

§ 18. Unidades de fuerza y de masa. Ejemplos. Suponiendo que en la ecuación (3) del § 15, el coeficiente de proporcionalidad $k=1$, obtenemos

$$\mathbf{w}=\frac{\mathbf{f}}{m}. \tag{1}$$

Esta relación se puede utilizar para establecer las unidades de medición de la fuerza f y de la masa m.

En el sistema *CGS*, por unidad de masa se ha tomado el gramo (véase el § 3), y por unidad de aceleración 1 cm/s²; de donde, según la ecuación (1), debemos elegir, en el sistema *CGS*, *por unidad de fuerza una fuerza que comunique al cuerpo de 1 g de masa una aceleración de 1 cm/s²*. Esta unidad de fuerza se denomina *dina*.

Suponiendo en la fórmula (véase el § 17).

$$\overline{\mathbf{f}}\Delta t=k'(m\mathbf{v}_2-m\mathbf{v}_1)$$

el coeficiente $k'=1$, obtenemos

$$\overline{\mathbf{f}}=\frac{m\mathbf{v}_2-m\mathbf{v}_1}{\Delta t},$$

de donde se deduce que la dina es igual a la fuerza que produce una variación de la cantidad de movimiento de 1 g·cm/s por segundo.

En el sistema *MKS*, por unidad de fuerza debe elegirse una fuerza tal que comunique a un cuerpo de 1 kg de masa una aceleración de 1 m/s². Esta unidad de fuerza de denomina *newton*. Como se puede calcular fácilmente, tenemos:

$$1 \text{ newton}=0{,}001 \text{ estenio}=10^5 \text{ dinas}.$$

En el sistema técnico de unidades, la unidad de fuerza se elige como una de las fundamentales, independientemente de la segunda ley de Newton. Está claro que cualquier fuerza establecida de modo determinado, puede servir de unidad. En el sistema técnico se ha elegido como tal, una determinada fuerza de gravedad. Sobre todos los cuerpos que se hallan en la superficie de la Tierra actúa una fuerza de atracción de la Tierra (fuerza de gravedad, o *peso*, como se denomina habitualmente). La fuerza de gravedad es distinta para diferentes cuerpos, y, para un mismo cuerpo, depende del lugar de la esfera terrestre y de la altura sobre la superficie de la Tierra a que se encuentre el cuerpo. No obstante, si se elige un cuerpo completamente determinado y se fija su posición sobre la esfera terrestre, estará completamente determinada la fuerza de gravedad que actúa sobre él (su peso), y que puede ser elegida como unidad. Así se ha hecho: *en el sistema técnico, por unidad de fuerza se ha elegido la fuerza con que es atraída una pesa patrón de 1 kg masa, a la latitud de 45° y al nivel del mar* (con más exactitud, en el sistema técnico se toma por unidad de fuerza la que comunica a 1 kg masa una aceleración $g_0 = 9{,}80665$ m/s²). Esta unidad de fuerza se denomina *kilogramo*, es decir, lo mismo que la unidad de masa. Para evitar confusiones, designaremos estas dos unidades de magnitudes físicas completamente diferentes, con distinas siglas: la unidad de masa de un kilogramo la designaremos kg, y la unidad de fuerza de un kilogramo, kgf. La fuerza igual a $\frac{1}{1\,000}$ kgf, se denomina *gramo-fuerza* y la designaremos con la sigla gf (a diferencia del gramo masa designado por *g* o gr.). La fuerza de 1 000 kgf se denomina *tonelada-fuerza* (se designa por tf.). Como la fuerza de 1 kgf comunica a un cuerpo de 1 kg de masa una aceleración de 981 cm/s² (aceleración de la gravedad), tendremos que

$$1 \text{ kgf} = 981\,000 \text{ dinas}, \quad 1 \text{ gf} = 981 \text{ dinas}.$$

Como las variaciones del peso de los cuerpos para los distintos puntos de la superficie de la Tierra no son muy grandes, al resolver los problemas, generalmente se puede considerar que en la Tierra, el cuerpo de 1 kg de masa pesa 1 kgf. Para la latitud de 45° y al nivel del mar, esta correlación, por definición, se cumple exactamente.

Habiendo elegido en el sistema técnico la unidad de fuerza de la manera indicada y midiendo la aceleración en m/s², con la fórmula (1) del presente párrafo ya no podemos establecer arbitrariamente la unidad de masa. *Por unidad de masa, en el sistema técnico, debe elegirse la masa de un cuerpo que bajo la acción de una fuerza de 1 kgf adquiere la aceleración le 1 m/s²*. Esta unidad de masa no tiene una denominación especial.

Como la masa de 1 kg, si se le aplica la fuerza de 1 kgf, es decir, su propio peso, adquiere la aceleración de la caída libre que es igual a 9,81 m/seg², la unidad técnica de masa que impulsada por una fuerza de 1 kgf adquiere una aceleración de 1 m/s², debe ser 9,81 veces mayor que un kg. De esta manera:

$$1 \text{ unidad técn. de masa} = 9{,}81 \text{ kg}.$$

Detengámonos con más detalle en la correlación entre peso y masa de los cuerpos. El peso de un cuerpo P es la fuerza con que lo atrae la esfera terrestre, por lo tanto, la aceleración $w = g$ que el cuerpo de masa m adquiere por su propio peso, según la fórmula (3) del § 15, será

$$g = k\frac{P}{m}, \text{ de donde } P = k'mg, \tag{2}$$

donde k' es un coeficiente de proporcionalidad.

La fórmula (2) da la relación general entre el peso P del cuerpo y su masa m, independientemente de la elección de unidades de medición del peso P del cuerpo, de su masa m y de la aceleración de la gravedad g. El valor del coeficiente de proporcionalidad k' depende de la elección de estas unidades. Si suponemos que $k' = 1$, tendremos

$$P = mg, \tag{2a}$$

pero en este caso ya no tenemos derecho a medir P, m y g con unidades cualesquiera, sino que deberemos utilizar las unidades determinadas de un sistema cualquiera. Por ejemplo, en el sistema *CGS*, m se mide en gramos, g en cm/s² y P en dinas; en el sistema técnico: m en unidades técnicas de masa, g en m/s², y P en kgf. En cada uno de estos sistemas se cumple la ecuación (2a). Pero si nosotros utilizamos un sistema mixto de unidades, por ejemplo, medimos m en kilogramos masa (kg), g en m/s² y P en kilogramos peso (kgf), el coeficiente de proporcionalidad k' ya no se puede suponer igual a la unidad; en este caso adquirirá el valor de:

$$k' = \frac{1}{9{,}81}.$$

Entonces

$$P\ (\text{kgf}) = \frac{1}{9{,}81}\cdot m\,(\text{kg})\cdot g\,(\text{m/s}^2).$$

Colocando en esta ecuación los valores $m = 1$ kg y $g = 9{,}81$ m/s² obtenemos: $P = 1$ kgf, como era de esperar.

Debido a la importancia de las relaciones deducidas en los §§ 15 y 17, y a la necesidad de saber utilizar bien los sistemas de unidades, daremos unos cuantos ejemplos.

Ejemplo 1. Un vagón de 16 tf de peso se desliza con una velocidad inicial de 5 m/s. Determinar el valor medio de la fuerza que impulsa al vagón, para los siguientes tres casos: a) el vagón se detiene al cabo de 1 min frenado por la fuerza de rozamiento; b) el vagón se frena en 15 s; c) el vagón se para, al chocar con un obstáculo, en 0,5 s.

S o l u c i ó n. Hallamos el valor medio de la fuerza que actúa sobre el vagón de la relación entre la impulsión de la fuerza y la variación de la cantidad de movimiento, según la ecuación (4) del § 17:

$$\bar{\mathbf{f}}\Delta t = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1, \text{ de donde } \bar{\mathbf{f}} = \frac{m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1}{\Delta t}.$$

En nuestros casos, el vagón se detiene, por lo tanto su velocidad final $\mathbf{v}_2 = 0$, de donde

$$\bar{\mathbf{f}} = -\frac{m\mathbf{v}_1}{\Delta t}.$$

El signo menos significa que la fuerza que actúa sobre el vagón va en sentido contrario al de la velocidad del vagón $\mathbf{v}_1$. Utilizando el sistema técnico de unidades, tenemos que la masa del vagón $m = \frac{16\,000}{9{,}81}$ unid. técn. de masa $\cong$ $\cong$ 1632 unid. técn. de masa, de donde, en el caso a), el valor medio de la fuerza $\bar{\mathbf{f}}$ será

$$\bar{f} = \frac{1632\cdot 5}{60} \text{ kgf} = 136 \text{ kgf};$$

en el caso b):

$$\bar{f} = \frac{1632\cdot 5}{15} \text{ kgf} = 544 \text{ kgf};$$

y en el caso c):

$$\bar{f} = \frac{1632\cdot 5}{0{,}5} \text{ kgf} = 16\,320 \text{ kgf}.$$

Así tenemos que, a una misma variación de cantidad de movimiento, la fuerza depende del tiempo en que esta cantidad de movimiento varía: al detenerse despacio debido al rozamiento, esta fuerza resultó igual a 136 kgf solamente, al chocar contra un obstáculo, cuando la cantidad de movimiento ha

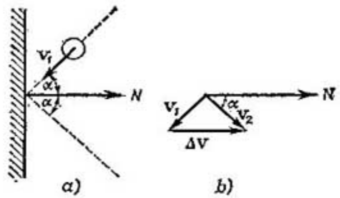


Fig. 33. Choque elástico de la pelota contra la pared.

descendido hasta cero en el pequeño intervalo de tiempo de 0,5 s, la fuerza ya es mayor de 16 tf.

E j e m p l o 2. Una pelota de 200 gf de peso choca contra una pared y rebota, sin pérdida de velocidad, de manera que su trayectoria de antes del golpe forma con la normal a la pared (fig. 33, *a*), el mismo ángulo que después del golpe. La velocidad de la pelota es de 5 m/s y la duración del golpe sobre la pared es $\Delta t = 0{,}05$ s. Determinar la fuerza del golpe para $\alpha = 60°$.

S o l u c i ó n. De la fórmula (4) del § 17 tenemos:

$$\bar{\mathbf{f}}\Delta t = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = m\Delta v, \tag{3}$$

donde $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ es una diferencia vectorial. Considerando positivo el sentido de la normal hacia el exterior de la pared (fig. 33, *b*), tenemos

$$\Delta v = v_2 \cos \alpha - (-v_1 \cos \alpha) = v_2 \cos \alpha + v_1 \cos \alpha.$$

Según la condición del problema, la pelota rebota sin pérdida de velocidad, es decir:

$$v_1 = v_2 = v, \quad \text{de donde } \Delta v = 2v \cos \alpha;$$

el vector $\Delta \mathbf{v}$ va dirigido según la normal a la pared. Sustituyendo este valor de Δv en la (3), encontramos que el valor medio de la fuerza $\overline{f}$ que actúa sobre la pelota durante el golpe, es

$$\overline{f} = \frac{2mv \cdot \cos \alpha}{\Delta t},$$

donde Δt es la duración del golpe. Para lo valores dados en el ejemplo, tenemos:

$$\overline{f} = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}}{9{,}81 \cdot 0{,}05}\ \text{kgf} \cong 2\ \text{kgf}.$$

E j e m p l o 3. Por una polea fija pasa arrollada una cuerda (fig. 34 en cuyos extremos van colgadas las pesas P_1 y P_2. Suponiendo que el movimiento se efectúa sin rozamiento, I eterminar la aceleración con que se mueven las pesas.

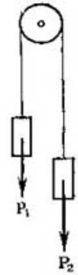


Fig. 34. Movimiento de las pesas fijas en una cuerda que pasa por una polea.

S o l u c i ó n. En cada pesa actúa su peso y la fuerza de tensión de la cuerda f_t. Consideremos que la dirección hacia abajo es positiva. Entonces:

$$m_2 w = P_2 - f_t, \quad -m_1 w = P_1 - f_t,$$

donde m_1 y m_2 son las masas de las pesas, y w el valor de su aceleración. Restando una ecuación de otra tenemos:

$$(m_1 + m_2)\, w = P_2 - P_1;$$

pero los pesos P_2 y P_1 son iguales respectivamente a $m_2 g$ y $m_1 g$, donde g es la aceleración de la gravedad, de donde

$$w = g\, \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}. \tag{4}$$

Esta clase de polea con una cuerda arrollada y dos pesas representa un aparato demostrativo («máquina de Atwood»), que se utiliza para ilustrar la segunda ley de Newton.

Si ambas pesas son iguales, $m_2 = m_1$, y, según la (4), la aceleración de las pesas $w = 0$. En este caso, impulsando a las pesas, es decir, comunicándoles cierta velocidad v, es fácil observar que, siendo pequeño el rozamiento de la polea, las pesas se desplazarán con movimiento uniforme. Si tomamos una pesa un poco más pesada que la otra, obtenemos que $m_2 - m_1$ es mucho menor que $m_2 + m_1$, de donde, según la (4), la aceleración de las pesas w no será muy grande. En este caso es fácil registrar los trayectos recorridos por las pesas en distintos intervalos de tiempo, y convencerse de que corresponden al caso del movimiento uniformemente acelerado.

§ 19. Principio clásico de la relatividad. En el § 14 hemos visto que la primera ley de Newton se cumple en un sistema inercial de referencia; lo mismo ocurre con la segunda ley. El principio de la inercia, puede, en general, considerarse como un caso particular de la ley de la aceleración; efectivamente, haciendo $\mathbf{f} = 0$ en la ecuación de la ley de la aceleración $\mathbf{f} = m\mathbf{w}$, obtenemos que $\mathbf{w} = 0$, lo cual indica que en el cuerpo sobre el cual no actúa ninguna fuerza (es decir, no actúa ningún otro cuerpo), la aceleración es igual a cero, es decir, el cuerpo permanece en reposo o se desplaza con movimiento rectilíneo y uniforme.

Hemos indicado también que cualquier sistema que se desplace con movimiento rectilíneo uniforme respecto a un sistema inercial, es también un sistema inercial.

Veamos el movimiento de un mismo cuerpo respecto a dos sistemas inerciales diferentes. Está claro que este movimiento se distinguirá solamente en cierta diferencia constante de velocidades: *la aceleración de un mismo cuerpo en diferentes sistemas inerciales es la misma.* De aquí que, según la ley de la aceleración, las fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo en ambos sistemas inerciales, también serán iguales. Si nosotros nos encontramos en el interior de un vagón que se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme, para comunicar una determinada aceleración a un cuerpo cualquiera hay que aplicarle las mismas fuerzas que se le aplicarían de estar el vagón parado. En otras palabras, en el interior del vagón con movimiento rectilíneo uniforme, todos los procesos mecánicos transcurren exactamente igual que en el vagón inmóvil. Esto quiere decir (abstrayéndonos, claro está, de las trepidaciones y de la posibilidad de mirar por la ventanilla) que, hallándonos en el interior de un vagón con movimiento rectilíneo uniforme, no se puede, con mediciones o experimentos mecánicos determinar la velocidad del vagón; ni siquiera establecer si se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme o está en reposo. Galilei fue el primero que demostró esta imposibilidad. En 1623, examinando los fenómenos que transcurrían en el interior de un camarote cerrado de un barco, escribió: «Y (sólo si el movimiento del barco es uniforme), usted no notará el menor cambio en los fenómenos, y por ninguno de ellos será capaz de juzgar si el barco se mueve o está parado: usted, saltando, recorrerá respecto al suelo las mismas distancias que estando el barco parado, es decir, porque el barco se mueva con mucha rapidez, usted no realizará mayores saltos hacia la popa que hacia la proa, aunque, al tiempo de hallarse en el aire, el suelo que se encuentra debajo de usted, corre en sentido contrario a su salto, y al lanzarle cualquier cosa a su amigo, no necesitará lanzarla con más fuerza, si él está cerca de la proa y usted cerca de la popa, que si se encontrasen cambiados sus lugares; las gotas de agua de un jarro suspendido del techo caerán verticalmente al suelo, y ni una de ellas caerá inclinándose hacia la popa, aunque, mientras la gota se halla en el aire, el barco se desplaza hacia delante. Las moscas continuarán su vuelo indiferentemente en todas direcciones, y de ninguna manera ocurrirá que (al parecer, cansadas de seguir la rápida carrera del barco) se reúnan en la parte más cercana a la popa»*).

Resumiendo podemos decir: *con ningún experimento mecánico realizado en el interior de un sistema, se puede determinar si el sistema inercial se halla en reposo o se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme.* Desde el punto de vista mecánico, todos los sistemas inerciales son equivalentes. Cualquiera de ellos se puede suponer fijo (en reposo) y determinar la velocidad de los demás sistemas inerciales, respecto a este sistema.

Este postulado se denomina *principio clásico de la relatividad o principio de la relatividad de Galilei.*

La teoría de la relatividad de Einstein generaliza este resultado estableciendo que, en general, con ninguna clase de experimentos realizados en el interior del sistema, sean eléctricos, luminosos, etc., se puede determinar el movimiento rectilíneo uniforme del sistema.

§ 20. Principio de la igualdad de la acción y de la reacción (tercera ley de Newton). Ley (principio) de la conservación de la cantidad de movimiento. *El principio de la igualdad de la acción y de la reacción* complementa a la ley de la aceleración: subraya la circunstancia de que la acción de los cuerpos que lleve a un cambio de estado de sus movimientos, tiene carácter *de acción mutua*. Este principio dice: *si el cuerpo B* (fig. 35) *actúa sobre el cuerpo A con una fuerza* $\mathbf{f}_1$, *el cuerpo A, a su vez, actúa sobre el B con una fuerza* $\mathbf{f}_2$ *igual a la fuerza* $\mathbf{f}_1$, *y dirigida en sentido contrario*:

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2. \quad (1)$$

Es esencial subrayar que las fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ de que se trata en este principio («acción» y «reacción»), *están aplicadas a diferentes cuerpos.*

Aduzcamos unos cuantos ejemplos: a) un hombre empuja una vagoneta (fig. 36): la fuerza $\mathbf{f}_1$ dirigida hacia delante estará aplicada a la vagoneta, la fuerza $\mathbf{f}_2$, igual a la anterior, pero de sentido contrario, estará aplicada a las manos del hombre; b) un martillo golpea

*) Traducción de la versión rusa (*N. del T.*)

un clavo: la fuerza $\mathbf{f}_1$ actúa sobre el clavo del lado del martillo, una fuerza $\mathbf{f}_2$, igual a la anterior, pero de sentido opuesto, actuará sobre el martillo; c) de un pozo se eleva atado a una cuerda un cubo: la fuerza $\mathbf{f}_1$ está aplicada al cubo y dirigida hacia arriba, la fuerza $\mathbf{f}_2$, igual a la anterior, pero dirigida hacia abajo, está aplicada a la cuerda*).

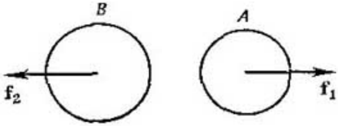


Fig. 35. El cuerpo B actúa sobre el A con una fuerza $\mathbf{f}_1$; a su vez, el cuerpo A actúa sobre el B con una fuerza $\mathbf{f}_2$ de igual intensidad que la $\mathbf{f}_1$, pero de sentido contrario.

Los dos cuerpos solicitados mutuamente adquieren aceleración. Si las masas de los cuerpos son m_1 y m_2, y las aceleraciones adquiridas por ellos son respectivamente $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$, según la segunda ley de Newton tendremos:

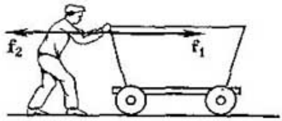


Fig. 36. El hombre empuja a la vagoneta con una fuerza $\mathbf{f}_1$; la fuerza $\mathbf{f}_2$ de la misma intensidad que la $\mathbf{f}_1$, pero de sentido contrario, está aplicada a las manos del hombre.

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{m_1}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{m_2},$$

de donde, según (1)

$$\mathbf{w}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{w}_2, \tag{2}$$

es decir, los cuerpos solicitados mutuamente adquieren una aceleración de sentidos opuestos e inversamente proporcional a sus masas.

Del principio de la igualdad de la acción y de la reacción se deduce una consecuencia muy importante. En el caso de la acción

*) La fuerza $\mathbf{f}_2$ que, según la tercera ley de Newton, está aplicada al cuerpo B, que es solicitado por el cuerpo A, a veces se llama *fuerza de inercia*. Sin embargo, está claro que esta división de fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ en «motriz», fuerza $\mathbf{f}_1$, y «fuerza de inercia», $\mathbf{f}_2$, se puede hacer sólo en el caso de que los mismos cuerpos A y B, por cualquier característica, se puedan dividir en «movido» y «motor», como tiene lugar en el caso del hombre que, apoyándose en el suelo, mueve la vagoneta. En cuanto nos representemos el caso del choque de dos bolas iguales, estará claro que ambos cuerpos A y B y las dos fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$, que figuran en este principio, «tienen iguales derechos». Por eso el término de «fuerza de inercia» en el sentido indicado (en el de acción y reacción) no tiene razón de ser, y nosotros no lo vamos a utilizar.

Sobre la otra acepción del término «fuerza de inercia», véase el § 22.

mutua de dos cuerpos A y B, la variación de la cantidad de movimiento del cuerpo A según la fórmula (3) del § 17 será:

$$\Delta \mathbf{K}_A = \mathbf{f}_1 \cdot \Delta t_1, \tag{3}$$

donde $\mathbf{f}_1$ es la fuerza que actúa sobre el cuerpo A de parte del cuerpo B, y Δt_1, el tiempo durante el cual actúa la fuerza $\mathbf{f}_1$. Hay que tener en cuenta que en este caso se suponía que la fuerza $\mathbf{f}_1$ era constante durante el intervalo de tiempo Δt_1. La variación de la cantidad de movimiento del cuerpo B será:

$$\Delta \mathbf{K}_B = \mathbf{f}_2 \cdot \Delta t_2,$$

donde $\mathbf{f}_2$ es la fuerza que actúa sobre el cuerpo B de parte del A, y Δt_2, el tiempo durante el cual actúa la fuerza $\mathbf{f}_2$. Según el principio de la igualdad de la acción y de la reacción:

$$\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1,$$

además, está claro que el tiempo Δt_1 durante el cual el cuerpo B actúa sobre el A, será igual al tiempo Δt_2 durante el cual el cuerpo A actúa sobre el B, de donde $\mathbf{f}_1 \Delta t_1 = - \mathbf{f}_2 \Delta t_2$ y, por lo tanto:

$$\Delta \mathbf{K}_A = -\Delta \mathbf{K}_B. \tag{4}$$

Esta igualdad que hemos obtenido para el caso de una fuerza constante de acción mutua entre los cuerpos, se puede generalizar fácilmente para el caso cuando la fuerza $\mathbf{f}_1$ varía. Para ello, el tiempo de acción mutua entre los cuerpos se ha de dividir en intervalos tan pequeños Δt_i, que durante el transcurso de cada uno de ellos, se pueda considerar constante la fuerza. Para cada uno de los intervalos de tiempo Δt_i infinitamente pequeños se cumplirá la igualdad (4), por lo tanto, se cumplirá para todo el tiempo de acción mutua. Resulta, pues, que la ecuación (4) tiene carácter general. Esto significa que *como consecuencia de la acción mutua de los cuerpos, la cantidad de movimiento de uno ha aumentado tanto, como ha disminuido la del otro*, es decir, se ha producido una transmisión de cantidad de movimiento.

La fórmula (4) se puede escribir así:

$$\Delta \mathbf{K}_A + \Delta \mathbf{K}_B = 0, \tag{5}$$

es decir, al solicitarse mutuamente dos cuerpos, la variación total de sus cantidades de movimiento es igual a cero, de lo cual se deduce que la cantidad de movimiento total, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_A + \mathbf{K}_B$, permanece constante. Este resultado se puede generalizar para cualquier cantidad de cuerpos que formen un *sistema cerrado*, es decir, de cuerpos que se soliciten mutuamente, pero que no lo hagan con ningún cuerpo exterior respecto al sistema de los mismos. Suponiendo que el sistema consta de n cuerpos y designando sus respectivas cantidades de movimiento por $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$, . . ., $\mathbf{K}_n$, obtenemos

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \ldots + \mathbf{K}_n = \text{const}, \tag{6}$$

es decir, *el vector total de la cantidad de movimiento de un sistema cerrado, que es la suma vectorial de las cantidades de movimiento de los cuerpos que forman el sistema cerrado, permanece constante durante todo el tiempo del movimiento.*

Esta ley que lleva el nombre *de ley (principio) de la conservación de la cantidad de movimiento*, es una de las leyes fundamentales de la física. Es justa no sólo en el caso de la acción mutua de los

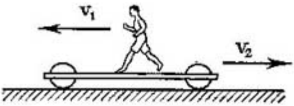


Fig. 37. El hombre corre por la carretilla a la velocidad $\mathbf{v}_1$; la carretilla se desplaza en sentido contrario a la velocidad $\mathbf{v}_2$.

cuerpos macroscópicos, sino también en el de las partículas microscópicas, es decir, de átomos, núcleos atómicos, electrones, etc. independientes.

Para ilustrar la ley de la conservación de la cantidad de movimiento veamos el siguiente ejemplo: un hombre de masa m_1 está inmóvil en una carretilla, que a su vez está en reposo respecto a la Tierra. La masa de la carretilla es m_2. Su cantidad de movimiento total es igual a cero. Si el hombre empieza a correr por la carretilla a la velocidad $\mathbf{v}_1$ respecto a la Tierra (fig. 37), adquiere una cantidad de movimiento m_1v_1, en cuyo caso, la carretilla, si no actúan las fuerzas de rozamiento, también adquirirá la cantidad de movimiento $m_2v_2 = -m_1v_1$, ya que la cantidad de movimiento total $m_1v_1 + m_2v_2$ debe permanecer igual a cero. De esta manera tenemos que la carretilla adquiere, respecto a la Tierra, una velocidad igual a

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1,$$

donde el signo menos indica que la velocidad $\mathbf{v}_2$ va dirigida en sentido contrario al del hombre. La carretilla se desplazará mientras corra el hombre. Cuando el hombre se detenga en la carretilla, su cantidad de movimiento de nuevo será igual a cero, y la cantidad de movimiento de la carretilla también será igual a cero, es decir, se detiene.

Examinemos el choque de dos bolas inelástico. La ley de la conservación de la cantidad de movimiento nos permite determinar la velocidad v que adquieren las dos bolas de masas m_1 y m_2 después de un golpe inelástico y central (las velocidades de las bolas están dirididas según la recta que une sus centros), siendo las respectivas velocidades de antes del choque v_1 y v_2.

Después del golpe inelástico las dos bolas se mueven a la misma velocidad v. Además, como el golpe es central, las tres velocidades v_1, v_2 y v estarán en una recta. Por lo tanto, debido a la conservación de la cantidad de movimiento, tendremos

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)\,v, \text{ de donde } v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Examinemos el caso cuando en los dos cuerpos A y B, además de las fuerzas de acción mutua $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$, actúan las fuerzas exteriores $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$; entonces, para cada uno de los cuerpos, tenemos:

$$\Delta\mathbf{K}_A = \mathbf{f}\Delta t + \mathbf{F}_1\Delta t; \quad \Delta\mathbf{K}_B = \mathbf{f}_2\Delta t + \mathbf{F}_2\Delta t.$$

Sumando estas ecuaciones y observando que, según el principio de la igualdad de la acción y de la reacción, $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = 0$, tenemos:

$$\Delta(\mathbf{K}_A + \mathbf{K}_B) = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)\,\Delta t.$$

Haciendo $\mathbf{K}_A + \mathbf{K}_B = \mathbf{K}$, cantidad de movimiento total, y $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}$, fuerza resultante, podemos escribir:

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{F}\cdot\Delta t.$$

Esta misma igualdad tendrá lugar sea cual quiere el número de cuerpos del sistema. Luego, *la variación de la cantidad de movimiento total de un sistema de cuerpos la determina la impulsión de la resultante de las fuerzas exteriores*. Si la resultante de las fuerzas exteriores es igual a cero, también lo será la variación de la cantidad de movimiento total, y, por lo tanto, el vector total de la cantidad de movimiento del sistema permanecerá constante; por consiguiente, la ecuación (7) nos lleva otra vez a la (6).

Denominando las fuerzas de acción mutua de los cuerpos que forman un sistema, *fuerzas internas*, podemos decir: *bajo la acción de las fuerzas internas, el sistema no puede variar su cantidad de movimiento total*. Bajo la acción de estas fuerzas, solamente pueden ponerse en movimiento distintas partes del sistema respecto a otras. Por ejemplo, una locomotora, bajo la acción de las fuerzas que solamente actúan sobre el émbolo de parte del vapor, no puede ponerse en movimiento; se pone en movimiento por la aparición de *una fuerza exterior* que es la fuerza de rozamiento entre las ruedas y los carriles. La fuerza que se origina debido al rozamiento, aplicada a las ruedas, mueve a la locomotora. La fuerza que, según la tercera ley de Newton es igual y opuesta y está aplicada a los carriles, empuja a éstos en sentido contrario. Como los carriles están fijos a la Tierra, su desplazamiento no tiene importancia. La cantidad de movimiento adquirida por la locomotora es igual a la que se transmite a la esfera terrestre. Como la masa de la esfera terrestre es extremadamente grande en comparación con la de la locomotora, la velocidad adquirida por ella es insignificante.

Como la proyección del vector resultante sobre cualquier dirección (eje) (fig. 38) es igual a la suma de las proyecciones de los vectores componentes sobre esta misma dirección, de la ecuación (7) se deduce que la variación de la suma de proyecciones de las cantidades de movimiento de los cuerpos que forman el sistema, en cualquier dirección, también se determina por la suma de

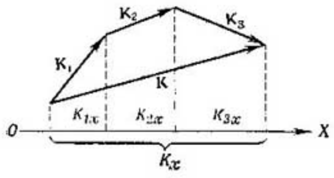


Fig. 38. La proyección K_x del vector resultante **K** es igual a la suma de las proyecciones de los vectores componentes.

las proyecciones de las impulsiones de las fuerzas exteriores en la misma dirección. Si como tales direcciones tomamos las de los ejes OX, OY y OZ del sistema de coordenadas rectilíneas rectangulares, obtenemos, para el sistema de n cuerpos:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta K_{xi} = \sum_{i=1}^{n} F_{xi}\Delta t, \quad \sum_{i=1}^{n} \Delta K_{yi} = \sum_{i=1}^{n} F_{yi}\Delta t,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta K_{zi} = \sum_{i=1}^{n} F_{zi}\Delta t. \tag{8}$$

Pasando a los intervalos de tiempo infinitamente pequeños y, en correspondencia con ello, a las variaciones infinitamente pequeñas de las componentes de las cantidades de movimiento, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dK_{xi}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{xi}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{dK_{yi}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{yi},$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dK_{zi}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{zi}, \tag{8a}$$

es decir, la suma de las derivadas respecto al tiempo de las proyecciones de las cantidades de movimiento sobre cada uno de los ejes coordenados, es igual a la suma de las proyecciones de las fuerzas exteriores sobre el mismo eje.

Si la suma de las proyecciones de las fuerzas exteriores sobre uno de los ejes es igual a cero, según la ecuación (8), la suma de las proyecciones de las cantidades de movimiento de los cuerpos que forman el sistema, sobre el mismo eje, permanece constante. Si la suma de las fuerzas exteriores es igual a cero, será constante la suma de las proyecciones de las cantidades de movimiento de los cuerpos en cada uno de los ejes:

$$K_x = \sum_{i=1}^{n} k_{xi} = \text{const}, \quad K_y = \sum_{i=1}^{n} K_{yi} = \text{const},$$
$$K_z = \sum_{i=1}^{n} K_{zi} = \text{const}. \tag{6a}$$

§ 21. Fuerzas que actúan en el movimiento curvilíneo. La relación entre el vector fuerza **f** y la aceleracion **w** originada por él, expresada por la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{f}=m\mathbf{w}, \tag{1}$$

es general y justa para cualquier movimiento, tanto rectilíneo como curvilíneo. Sin embargo, en vista de la importancia de diferentes tipos de movimientos curvilíneos, veamos con más detalle las fuerzas que actúan en este caso. La ecuación (1) indica que la fuerza y la aceleración en cada instante dado tienen la misma dirección. En el movimiento curvilíneo, como ya hemos visto en el § 11, la aceleración **w** no va dirigida según la tangente a la trayectoria, sino que forma

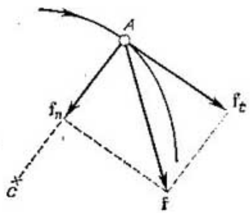


Fig. 39. Descomposición de una fuerza en sus componentes tangencial y normal.

con ella cierto ángulo y puede ser descompuesta en dos componentes: tangencial w_t y normal w_n. De esto se deduce que la fuerza **f** que actúa sobre el cuerpo que se desplaza con movimiento curvilíneo, en cada instante dado va dirigida formando cierto ángulo con la dirección del movimiento y puede descomponerse en dos componentes: tangencial $\mathbf{f}_t$ y normal $\mathbf{f}_n$.

La primera componente f_t va dirigida según la tangente a la trayectoria, la segunda, f_n, según la normal a la misma, es decir, según el radio de curvatura hacia el centro de curvatura (fig. 39); por eso, la componente normal f_n se denomina también *componente centrípeta de la fuerza*.

De la fig. 39 se ve que el valor de la fuerza total **f** es:

$$f=\sqrt{f_t^2+f_n^2}. \tag{2}$$

Las componentes tangencial f_t y normal f_n están relacionadas respectivamente con las componentes tangencial w_t y normal w_n de la aceleración mediante las ecuaciones:

$$f_t=mw_t, \quad f_n=mw_n. \tag{3}$$

Como, según la ecuación (5) del § 11, la componente normal de la aceleración es $w_n=\frac{v^2}{R}$, donde v es la velocidad lineal del cuerpo, y R el radio de curvatura de la trayectoria en el punto dado, tenemos que

$$f_n = m\frac{v^2}{R}. \tag{4}$$

En el movimiento curvilíneo uniforme, donde la velocidad es constante por su magnitud, y la componente tangencial de la aceleración igual a cero, la componente tangencial de la fuerza es también igual a cero, y toda la fuerza es centrípeta. Esta fuerza, actuando según la normal a la trayectoria, obliga al cuerpo a girar continuamente sin variar de magnitud la velocidad. Si esta fuerza no existiese, el cuerpo se desplazaría en movimiento rectilíneo.

En el caso del movimiento circular, en la ecuación (4) se puede sustituir la velocidad lineal v por la angular ω o expresarla en función del período T, o del número de revoluciones (vueltas) n. Entonces, según las ecuaciones $v = \omega R = 2\pi\frac{R}{T} = 2\pi nR$ (véase el § 12), obtenemos para la fuerza centrípeta:

$$f_n = m\omega^2 R = 4\pi^2 m\frac{R}{T^2} = 4\pi^2 mn^2 R. \tag{4a}$$

Según la tercera ley de Newton, junto a la fuerza centrípeta aplicada al cuerpo que se mueve según una curva, existe otra fuerza igual a la primera y de sentido contrario aplicada al mismo cuerpo (a las «ligaduras» o «enlaces»), y que le obliga a girar. Esta fuerza se denomina *centrífuga*. De esta manera, las fuerzas centrípeta y centrífuga son las dos fuerzas cuya existencia viene determinada por el principio de la igualdad de la acción y de la reacción, aplicadas a diferentes cuerpos. Por ejemplo, en el caso de hacer girar una piedra atada de una cuerda, la fuerza centrípeta está aplicada a la piedra, y la centrífuga, a la cuerda; en el caso del tranvía que toma una curva, la fuerza centrípeta está aplicada al tranvía, y la centrífuga, a los carriles; en el caso de la Luna girando alrededor de la Tierra, la fuerza centrípeta está aplicada a la Luna, la centrífuga a la Tierra.

De la denominada *fuerza centrífuga de inercia* se hablará más abajo (§ 22).

Examinemos unos cuantos *ejemplos*.

Para disminuir la presión lateral de las ruedas de los trenes sobre los carriles en las curvas, la vía se hace un poco inclinada (peralte). Calculemos en qué ángulo α hay que inclinar la vía respecto al horizonte en una curva de radio R para que el vagón que vaya a la velocidad v al tomar la curva no cause presión lateral sobre los carriles.

El vagón no originará ninguna presión lateral sobre los carriles en el caso de que la componente $\mathbf{f}_1$ de la fuerza de la gravedad $\mathbf{P}$, no equilibrada por la reacción de la vía, dirigida hacia el centro de curvatura (fig. 40), sea la fuerza centrípeta que hace inclinar al vagón. Por lo tanto, se debe cumplir la condición:

$$f_1 = P \operatorname{tg} \alpha = \frac{mv^2}{R}, \tag{5}$$

donde m es la masa del vagón. Como el peso del vagón es $P = mg$, según la (5), la inclinación buscada de la vía la determinará el ángulo α que cumpla la ecuación:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{Rg}. \tag{6}$$

En la fórmula (6), como se ve, no entra la masa del vagón, sino solamente el radio de curvatura R y la velocidad v. En las vías ferroviarias el peralte se

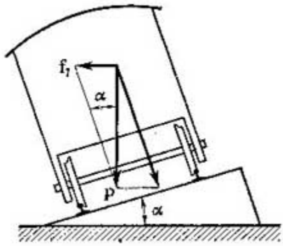


Fig. 40. La componente f_1 de la fuerza de la gravedad inclina al vagón.

determina según la velocidad media con que los trenes toman la curva; en este caso, los trenes que van más despacio, ejercen mayor presión sobre el carril interior, y los que van a mayor velocidad, sobre el exterior.

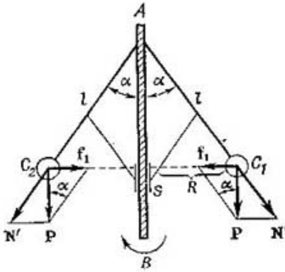


Fig. 41. Regulador centrífugo.

Como segundo ejemplo veamos la acción del regulador centrífugo de péndulo de la máquina de vapor, cuyo esquema se representa en la fig. 41. En el extremo superior A del árbol vertical AB del regulador, van articulados dos brazos de igual longitud l, en cuyos extremos hay dos bolas pesadas C_1 y C_2. Con los brazos AC_1 y AC_2 van unidos con articulación otros dos brazos cuyos extremos inferiores llevan el manguito S. El regulador gira alrededor del eje vertical AB. Al variar la velocidad de giro, varía el ángulo de desviación (de divergencia) de los brazos AC_1 y AC_2, lo cual produce un desplazamiento del manguito S. El manguito está unido al mecanismo de regulación de la admisión del vapor en el cilindro de la máquina de vapor.

Determinemos el ángulo de divergencia α de los brazos AC_1 y AC_2 a la velocidad angular dada ω del regulador.

En la posición inclinada del brazo AC_1, la fuerza de la gravedad del contrapeso C_1, que es $P = mg$ y va dirigida verticalmente hacia abajo, no la equilibra la reacción del brazo. Descompongamos la fuerza $\mathbf{P}$ en dos: $\mathbf{N}$ en dirección del brazo, y $\mathbf{f}_1$ horizontalmente. La componente $\mathbf{N}'$ la equilibra la reacción del brazo; la componente $\mathbf{f}_1$ es la fuerza centrípeta que hace girar la bola obligándola a moverse según una circunferencia alrededor del árbol AB. De esto se deduce que se debe cumplir la condición.

$$f_1 = m\omega^2 R. \tag{7}$$

Pero de la fig. 41 tenemos que

$$f_1 = P \operatorname{tg} \alpha = mg \operatorname{tg} \alpha, \quad R = l \operatorname{sen} \alpha,$$

de donde, según la (7)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l\omega^2 \operatorname{sen} \alpha}{g}, \quad \text{o} \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{l\omega^2}{g} \right) = 0.$$

De donde obtenemos dos soluciones; primera:

$$\cos \alpha = \frac{g}{l\omega^2} \tag{8}$$

y segunda: $\operatorname{sen} \alpha = 0$, es decir, $\alpha = 0$. Esta segunda solución no representa ningún interés, ya que la construcción del regulador no permite el valor de $\alpha = 0$; la primera solución determina el valor buscado de α: con el aumento de ω aumenta el ángulo α.

§ 22. Sistemas acelerados. Fuerzas de inercia. Como hemos visto basándonos en los razonamientos aducidos en el § 19, con ninguna clase de experimentos mecánicos llevados a cabo en el

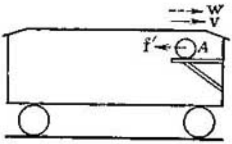


Fig. 42. La bola A queda rezagada respecto al vagón que se desplaza con movimiento acelerado.

interior de un sistema de referencia se puede establecer si el sistema se desplaza o no con movimiento rectilíneo uniforme. Sin embargo, una aceleración cualquiera del sistema se refleja en los fenómenos mecánicos que se producen en él.

Examinemos ahora más detenidamente la influencia de la aceleración del sistema en los procesos que pasan en él. Para ello, volvamos de nuevo al ejemplo del vagón en marcha. Supongamos que, al principio, el vagón lleva un movimiento rectilíneo a velocidad constante $\mathbf{v}$ en la dirección indicada por la flecha (fig. 42). En un tablero horizontal de la pared delantera del vagón hay una bola A

de masa m. Consideremos que el tablero es absolutamente liso, de modo que entre el tablero y la bola no haya rozamiento. Veamos lo que ocurre dentro del vagón respecto a uno de los sistemas de referencia siguientes: 1) respecto al relacionado con la vía del ferrocarril y 2) respecto al relacionado con el vagón. En el movimiento rectilíneo uniforme, ninguna fuerza actúa sobre la bola en ninguno de los dos sistemas (excepto la gravedad y la reacción en el punto de apoyo, que se equilibran mutuamente). Supongamos ahora que el vagón adquiere una aceleración $\mathbf{w}$ constante dirigida en el mismo sentido que la velocidad $\mathbf{v}$ del vagón: el vagón empieza a desplazarse cada vez más de prisa.

¿Qué ocurre con el movimiento de la bola respecto a los dos sistemas de referencia indicados?

Aclaremos primeramente el carácter del movimiento de la bola respecto al sistema de referencia relacionado con la vía del ferrocarril. Respecto a la vía, la bola continúa moviéndose a la velocidad primitiva $\mathbf{v}$, ya que ninguna clase de fuerza horizontal actúa sobre ella; pero como el vagón empieza a ir cada vez más de prisa, la bola quedará rezagada del vagón.

De esta manera tenemos que la bola que antes estaba en reposo respecto al tablero del vagón, ahora empieza a resbalar en dirección contraria al movimiento del mismo. De esto se deduce que respecto al sistema de referencia relacionado con el vagón, la bola ha adquirido una aceleración $-\mathbf{w}$.

Si admitimos que en el sistema de referencia relacionado con el vagón (que es inercial), es aplicable la segunda ley de Newton, la aparición, en este sistema, de la aceleración se puede explicar formalmente por la acción de una fuerza que actúa sobre la bola:

$$\mathbf{f}' = m(-\mathbf{w}),$$

donde m es la masa de la bola (contrapeso), y $-\mathbf{w}$, su aceleración respecto al vagón, de magnitud igual a la aceleración del mismo. Esta fuerza ficticia que tenemos que introducir en el sistema de referencia acelerado para que se cumpla la segunda ley de Newton se denomina *fuerza de inercia*.

Supongamos ahora que la bola del tablero se fija a la pared del vagón con un resorte C (fig. 43). En este caso, al acelerar el vagón, la bola empezará a rezagarse respecto al mismo y lo hará solamente hasta que el resorte se extienda lo suficiente para que la fuerza surgida en él le comunique a la bola la aceleración $\mathbf{w}$ igual a la del vagón. En otras palabras: el resorte *tira* de la bola con una fuerza $\mathbf{f}$; esta fuerza está aplicada a la bola, *va dirigida en el sentido de la aceleración del vagón* $\mathbf{w}$ y es de magnitud igual a mw, donde m es la masa de la bola. Según la tercera ley de Newton hay una segunda fuerza $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}$, aplicada al resorte y dirigida en sentido contrario de la aceleración del vagón.

Respecto al sistema de referencia relacionado con el vagón, la bola, después que el resorte se ha extendido, permanecerá en estado de reposo respecto al vagón. Por consiguiente, en este sistema de referencia, según la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas aplicadasa la bola debe ser igual a cero. Esto se cumplirá, si aplicamos a la bola la fuerza de inercia f′ y consideramos que equilibra

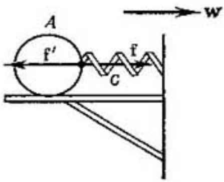


Fig. 43. El resorte tira de la bola con la fuerza f en la dirección del vagón en movimiento acelerado. Con una fuerza de la misma intensidad f′, la bola hace extenderse al resorte.

a la fuerza f con que el resorte extendido tira de ella. Esta es la fuerza de inercia $\mathbf{f}' = \mathbf{f}_1$. De esta manera, la fuerza $\mathbf{f}_1$ debida a la tercera ley de Newton, y que se aplica al resorte («enlaces» o «ligaduras») en el sistema de referencia acelerado, la aplicamos al mismo cuerpo (bola A). Utilizando el sistema acelerado, relacionado con el vagón, nosotros transformamos en estático el problema dinámico de equilibrio de la bola. Para ello, como se ha indicado, consideramos aplicada a la bola A, no sólo la fuerza f que actúa sobre ella, sino también la fuerza $\mathbf{f}_1$ que actúa sobre el enlace. Esta sustitución del problema dinámico por el estático se puede hacer en cualquier caso de movimiento acelerado.

Supongamos que sobre un punto materiál de masa m actúa una fuerza f. La ecuación del movimiento de este punto material viene expresada por la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{w},$$

donde w es la aceleración adquirida por el punto material. Esta ecuación se puede escribir así:

$$\mathbf{f} + (-m\mathbf{w}) = 0.$$

La magnitud $\mathbf{f}_1 = -m\mathbf{w}$, según la tercera ley de Newton, representa la fuerza aplicada a los cuerpos que, al actuar sobre el punto material que examinamos, le comunican a éste una aceleración. Aplicando mentalmente la fuerza $\mathbf{f}' = \mathbf{f}_1$ al mismo punto material y llamándola *fuerza de inercia*, obtenemos que:

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}' = 0,$$

es decir, *en todo instante dado, la fuerza de inercia y la fuerza aplicada al punto material se equilibran*. Este postulado se denomina *principio de D'Alembert*.

Veamos unos cuentos ejemplos más en los que surgen fuerzas de inercia. Supongamos que en el suelo de un ascensor hay una carga de masa m. Si el ascensor se eleva con una aceleración $\mathbf{w}$, esta misma aceleración la adquiere también la carga como resultado de la presión que el suelo ejerce sobre ella, y que se suma al esfuerzo reactivo que equilibra el peso de la carga. La fuerza de esta presión $\mathbf{f} = m\mathbf{w}$. Según la tercera ley de Newton la carga, a su vez, presionará sobre el suelo con una fuerza complementaria de $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}$. Si la carga no reposa directamente sobre el suelo, sino en el platillo de una

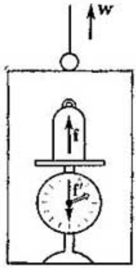


Fig. 44. El ascensor que se desplaza hacia arriba con movimiento acelerado, comunica la aceleración a la carga. Sobre la carga actúa una fuerza $\mathbf{f}$; con la fuerza $\mathbf{f}_1$ de igual intensidad que la anterior actúa la carga sobre el platillo de la balanza.

balanza de resorte (fig. 44), esta fuerza $\mathbf{f}_1$ presionará sobre el resorte; este se comprimirá más y, si la aguja de la balanza, cuando no había aceleración, indicaba el peso de la carga $\mathbf{P}$, ahora indicará el peso $\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{f}'$, donde $\mathbf{f}' = \mathbf{f}_1$.

En el caso de que el ascensor descienda con la aceleración $\mathbf{w}$, con la misma aceleración descenderá junto con él la carga. Parte de la fuerza de la gravedad que actúa sobre la carga, le comunicará a ésta una aceleración. Esta parte de la fuerza de la gravedad será $\mathbf{f} = m\mathbf{w}$, de donde la presión de la carga sobre la balanza será $\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \mathbf{f}$.

En ambos casos, las indicaciones de la balanza se diferenciarán de lo que indicaba la misma (P) cuando no había aceleración en el ascensor, debido a que se trata de un problema dinámico: movimiento de una carga con aceleración $\mathbf{w}$. Respecto al sistema de referencia relacionado con el ascensor, la carga continúa, en ambos casos, en reposo, y la variación de las indicaciones en la balanza se puede considerar como un cambio de peso de la carga, cambio debido a que a su verdadero peso $\mathbf{P}$ se le ha añadido la fuerza de inercia $\mathbf{f}'$ (dirigida en el mismo sentido que $\mathbf{P}$, si la aceleración del ascensor $\mathbf{w}$ va hacia arriba, y en sentido contrario a $\mathbf{P}$, si la aceleración $\mathbf{w}$ va dirigida hacia abajo).

De manera completamente análoga se explica la aparición de las fuerzas de inercia *en un sistema de movimiento circular*. Sea un hombre sentado en una plataforma giratoria con una piedra de masa m en las manos (fig. 45). Para que la piedra se desplace junto con la plataforma, es decir, describiendo una circunferencia de radio R (donde R es la distancia desde la piedra hasta el eje de la plataforma), es necesario comunicar a la piedra *una aceleración centrípeta* $w_n = \omega^2 R$, donde ω es la velocidad angular de la plataforma. Para ello, *a la piedra deberá estar aplicada una fuerza centrípeta* $f = m\omega^2 R$. El hombre

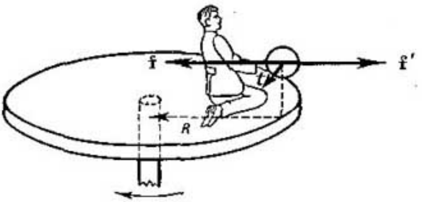


Fig. 45. El hombre sentado en una plataforma giratoria tira de una pesa con la fuerza f para hacerla girar.

debe tirar continuamente de la piedra para obligarla a girar. Sin la fuerza **f**, la piedra empezaría a desplazarse por la tangente t. Según la tercera ley de Newton, la piedra actúa sobre las manos del hombre con una fuerza $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}$; esta fuerza $\mathbf{f}_1$ está aplicada a las manos del hombre y dirigida desde el centro de la plataforma hacia el exterior. En el § 21 hemos denominado a esta fuerza *fuerza centrífuga*.

Sin embargo, si examinamos todo el proceso con respecto al sistema de referencia que gira junto con la plataforma, la piedra, al girar, permanece inmóvil en este sistema, y la necesidad de aplicarle la fuerza **f** se puede considerar como resultado de que la misma piedra tenía aplicada la fuerza $\mathbf{f}' = \mathbf{f}_1$, dirigida desde el centro de la plataforma hacia el exterior. Esta es una fuerza de inercia análoga a las fuerzas de inercia estudiadas en los ejemplos del vagón y del ascensor con aceleración.

La fuerza de inercia que actúa en un sistema que gira, a veces se denomina *fuerza centrífuga de inercia*. Y no se debe confundir con la fuerza *realmente* centrífuga de que hablamos en el § 21.

En la vida cotidiana frecuentemente nos encontramos con fuerzas de inercia. Por ejemplo, cuando el tranvía empieza a frenar bruscamente, o a tomar una curva a bastante velocidad, nos lanza, respecto al tranvía, hacia delante o hacia un lado (a la parte exterior de la curva). Esto es debido a que nosotros conservamos la velocidad que teníamos antes de que el vagón adquiriese aceleración. Con respecto al sistema de referencia relacionado con el vagón, estos desplazamientos relativos se explican por la acción de las fuerzas de inercia. Estas fuerzas de inercia hay que considerarlas, en cualquier sistema acelerado, como complementarias a las fuerzas que actúan en el sistema inercial.

Einstein, en la teoría general de la relatividad, intentó poner en claro la naturaleza de las fuerzas de inercia. Según Einstein las fuerzas de inercia son equivalentes a las fuerzas de la gravitación. Nosotros ya hemos visto que la aceleración del ascensor nos lleva al mismo resultado que si la carga se hiciese más o menos pesada (según la dirección de la aceleración **w**), es decir, las fuerzas de inercia resultan equivalentes a las de la gravedad.

De esta manera resulta que la aceleración de cualquier sistema es equivalente a la aparición en el mismo de fuerzas de gravitación. Sin embargo, como demostró V. A. Fok, esta equivalencia no es justa en los límites de grandes escalas espaciales y temporales. El sistema inercial de referencia, es decir, el relacionado con el conjunto de estrellas fijas, es el privilegiado, y la aceleración en este sistema no tiene el carácter relativo que tiene la velocidad.

§ 23. Dependencia entre la gravedad y la latitud del lugar. Es muy cómodo utilizar las fuerzas de inercia para resolver diferentes problemas mecánicos de sistemas acelerados, en particular, sistemas de movimiento circular. Un sistema

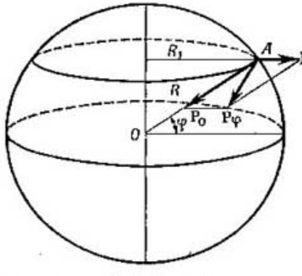


Fig. 46. Influencia de la rotación de la Tierra sobre la fuerza de la gravedad.

de movimiento circular de esta clase es, entre otros, el de la esfera terrestre, que da una vuelta al día. Por eso, para analizar con exactitud los diferentes procesos mecánicos que transcurren en la superficie de la Tierra, hay que tener en cuenta las fuerzas de inercia debidas a su rotación. Estas fuerzas son pequeñas, por eso, en muchos casos, las podemos despreciar y considerar aproximadamente, como ya se ha indicado, que la Tierra es un sistema inercial de referencia. No obstante, en una serie de casos no se puede despreciar la rotación de la Tierra.

Examinemos la influencia de la rotación de la Tierra en la fuerza de la gravedad. Sea un cuerpo sólido A de masa m situado en la latitud φ (fig. 46). Resolviendo el problema respecto a un sistema de coordenadas que gire junto con la Tierra, debemos tener en cuenta la fuerza de inercia:

$$f = m\omega^2 R_1, \tag{1}$$

donde ω es la velocidad angular de la Tierra, y R_1 la distancia desde el cuerpo hasta el eje terrestre. La fuerza **f** va dirigida perpendicularmente al eje de la Tierra. Esta fuerza **f** se suma a la fuerza de la gravedad del cuerpo $\mathbf{P}_0$ dirigida hacia el centro de la Tierra.

De aquí que el peso aparente $\mathbf{P}_\varphi$ del cuerpo a la latitud φ sea:

$$\mathbf{P}_\varphi = \mathbf{P}_0 + \mathbf{f}. \tag{2}$$

En esta ecuación, el miembro de la derecha es una suma vectorial.

En la fig. 46, tenemos que: $R_1 = R\cos\varphi$, donde R es el radio de la Tierra, de donde, según la (1):

$$f = m\omega^2 R\cos\varphi. \tag{3}$$

Esta fuerza es muy pequeña en comparación con la de la gravedad. Efectivamente, $P_0 = mg_0$, de donde:

$$\frac{f}{P_0}\,\frac{\omega^2 R}{g_0}\cos\varphi;$$

sustituyendo ω, R y g_0 (aceleración verdadera de la fuerza de la gravedad) por sus valores resulta que $\frac{\omega^2 R}{g_0} = \frac{1}{289}$, y como el coseno del ángulo φ siempre es $\leqslant 1$, tenemos que la fuerza f es mucho menor que la de la gravedad P_0. Por eso, para determinar el peso aparente $\mathbf{P}_\varphi$ según la ecuación (2), hacemos el siguiente cálculo aproximado: descomponemos la fuerza $\mathbf{f}$ en dos: $\mathbf{f}_1$ dirigida verticalmente hacia arriba (para el punto dado de la esfera terrestre), y $\mathbf{f}_2$ dirigida horizontalmente. Entonces, aproximadamente se puede considerar que la componente f_2 solamente desvía la fuerza de la gravedad, y la componente $\mathbf{f}_1$, la hace variar solamente de magnitud. De aquí que aproximadamente tengamos:

$$P_\varphi = P_0 - f_1.$$

Pero de la fig. 47 tenemos que $f_1 = f\cos\varphi$, de donde

$$P_\varphi = P_0 - f\cos\varphi,$$

o, según la (3)

$$P_\varphi = P_0 - m\omega^2 R\cos^2\varphi.$$

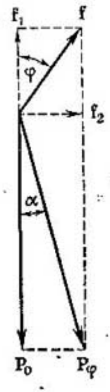


Fig. 47. Determinación del peso del cuerpo $\mathbf{P}_\varphi$ a la latitud φ.

Sustituyendo $mg_0 = P_0$, y sacando P_0 fuera del paréntesis, tenemos:

$$P_\varphi = P_0\left(1 - \frac{\omega^2 R}{g_0}\cos^2\varphi\right). \tag{4}$$

La fórmula (4) nos da la dependencia que hay entre el peso aparente P_φ y la latitud del lugar φ. La magnitud $\frac{\omega^2 R}{g_0}$ es constante e igual a $\frac{1}{289}$, de modo que

$$P_\varphi = P_0\left(1 - \frac{1}{289}\cos^2\varphi\right). \tag{4a}$$

En realidad, hay que tener en cuenta, además, que la Tierra no es una esfera perfecta, sino que está achatada por los polos, lo cual acarrea un aumento de la fuerza de la gravedad en éstos. La dependencia verdadera del peso del cuerpo respecto a la latitud φ es:

$$P_\varphi = P_0\left(1 - \frac{1}{191}\cos^2\varphi\right).$$

En el polo, P_φ coincide con P_0; en el ecuador, la diferencia entre P_φ y P_0 es la máxima.

El ángulo α que forma la dirección del peso aparente $\mathbf{P}_\varphi$ con el radio terrestre, como se ve de la fig. 47, se determina de la ecuación:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{f_2}{P_\varphi}.$$

Haciendo la sustitución aproximada de P_φ por P_0, y teniendo en cuenta que $f_2 = f \operatorname{sen}\varphi$, obtenemos que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{f \operatorname{sen}\varphi}{P_0} = \frac{m\omega^2 R \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi}{m g_0},$$

o

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\omega^2 R}{g_0}\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi. \tag{5}$$

De esta manera, la fuerza aparente de la gravedad P_φ va dirigida hacia el centro de la Tierra, tanto en el polo como en el ecuador. La mayor desviación la tiene en la latitud

$$\varphi = 45°.$$

Si el cuerpo se mueve según el ecuador a la velocidad lineal de v (calculada según un sistema inercial de coordenadas, relacionado con el centro de la esfera terrestre), sobre él actuará una fuerza de inercia f dirigida en sentido opuesto a la de la gravedad, e igual a:

$$f = \frac{mv^2}{R}.$$

El valor de esta fuerza será igual al de la gravedad P_0, si

$$\frac{mv^2}{R} = mg_0,$$

de donde, para v tendremos el valor de:

$$v = \sqrt{g_0 R}$$

Como $g_0 = 981$ cm/s² y $R = 6370$ km $= 6{,}37 \cdot 10^8$ cm, tenemos que:

$$v = \sqrt{981 \cdot 6{,}37 \cdot 10^8}\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} = 7{,}91 \cdot 10^5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} \simeq 7{,}9\,\frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Así tenemos que, si no hay fuerza de rozamiento con el aire, un cuerpo lanzado horizontalmente a la velocidad de $v = 7{,}9$ km/s, se movería sobre la superficie de la Tierra sin caer, es decir, como un satélite. Esta velocidad se denomina *«velocidad orbital»* (*«primera velocidad cósmica»*).

En el movimiento de un satélite artificial, «sputnik», sobre la superficie de la Tierra a la altura h según una órbita circular, como es fácil de calcular la velocidad será menor. A la altura de $h = 250$ km, tenemos que $v = 7{,}76$ km/s y a la de $h = 2000$ km, $v = 6{,}9$ km/s.

§ 24. Fuerzas de Coriolis. Demostremos que, en un sistema que gira, sobre un cuerpo que *se desplaza* respecto a este sistema, actúa, además de la fuerza centrífuga, otra fuerza complementaria. Esta fuerza se denomina *fuerza de Coriolis* (en honor del matemático francés Coriolis, 1795-1843), depende de la velocidad $\mathbf{v}'$ del cuerpo respecto al sistema en rotación y de la velocidad angular del sistema ω.

Veamos primeramente un caso particular. Sea el sistema un disco que gira a una velocidad angular ω constante alrededor de un eje vertical O (fig. 48) en la dirección que indica la flecha. Supongamos que el cuerpo a se desplaza con movimiento uniforme partiendo del punto A según el radio OC a la velocidad v' respecto al disco. En el tiempo Δt, el cuerpo a recorre el espacio $\Delta l = AB = v'\Delta t$. En este tiempo Δt, *en el sistema fijo de*

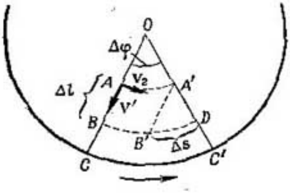


Fig. 48. Movimiento de un cuerpo según el radio de un disco que gira.

coordenadas, gracias a la rotación del disco, el radio OC gira en un ángulo $\Delta\varphi = \omega\Delta t$, y el cuerpo se traslada de A a D. *En el sistema fijo de coordenadas*, el cuerpo a participa al mismo tiempo en dos movimientos: uno, respecto al disco a la velocidad v', y otro, junto con el disco que gira. La velocidad lineal de rotación del disco es diferente para los distintos puntos del mismo. Llamemos v_r a su valor para el punto A. Moviéndose solamente a la velocidad de giro v_r, el cuerpo a describiría el arco $\overset{\frown}{AA'}$ y vendría a parar al punto A'. Al moverse al mismo tiempo a la velocidad v_r y a la velocidad relativa v', el cuerpo a debería venir a parar al punto B' (el segmento $A'B' \parallel AB$). En realidad, el cuerpo a viene a parar al punto D. Esto ocurre debido a que la velocidad lineal de rotación v_r aumenta a medida que se aleja el punto a del centro de rotación. De esta manera tenemos que, respecto *al sistema fijo de coordenadas*, el cuerpo a varía constantemente su velocidad al desplazarse según el radio: se desplaza con movimiento *acelerado*. La magnitud de esta aceleración w puede determinarse por trayecto complementario $\overset{\frown}{\Delta s} = \overset{\frown}{B'D}$ que el cuerpo a ha recorrido en el tiempo Δt. En la fig. 48 vemos que:

$$\Delta s = A'B'\Delta\varphi,$$

o, como $A'B' = \Delta l = v'\Delta t$ y $\Delta\varphi = \omega\Delta t$,

$$\Delta s = \omega v' (\Delta t)^2. \tag{1}$$

Por consiguiente, el trayecto complementario Δs aumenta proporcionalmente al cuadrado del tiempo Δt. Pero esta proporcionalidad del trayecto al cuadrado del tiempo Δt tiene lugar en el movimiento con aceleración constante w (movimiento uniformemente acelerado), en el cual

$$\Delta s = \frac{1}{2} w (\Delta t)^2.$$

Comparando esta ecuación de Δs con la (1), vemos que el cuerpo a tiene una aceleración

$$w = 2v'\omega. \tag{2}$$

Esta aceleración va dirigida perpendicularmente a la velocidad relativa v', y, en nuestro caso, hacia la derecha. Para comunicarle

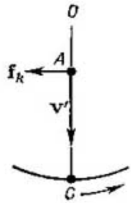


Fig. 49. Dirección de la fuerza de Coriolis en el movimiento de un cuerpo según el radio de un disco que gira.

al cuerpo a esta aceleración es necesario aplicarle una fuerza f dirigida hacia la derecha e igual a $f = mw$, donde m es la masa del cuerpo. Si no existiese esta fuerza f, el cuerpo se desviaría, en el sistema de coordenadas que *gira junto con el disco*, de su movimiento «rectilíneo» según el radio del disco.

La fuerza f_k de magnitud igual a la f, pero de sentido opuesto, según la tercera ley de Newton, actuará sobre los enlaces o ligaduras que mantienen al cuerpo a en su movimiento según el radio. De manera completamente análoga a los casos examinados antes de los sistemas acelerados, consideraremos, usando el sistema de coordenadas que gira junto con el disco, que la fuerza f_k está aplicada al mismo cuerpo a. Así tenemos que, *al cuerpo que se mueve según el radio a la velocidad* v' *en un sistema que gira, se le aplica una fuerza «de inercia»*

$$f_k = 2v'\omega m, \tag{3}$$

de dirección perpendicular a v' (en nuestro ejemplo hacia la izquierda, véase la fig. 49).

La fuerza f_k se denomina *fuerza de Coriolis.*

Demostremos ahora que la fuerza de Coriolis existe también cuando el cuerpo a se desplaza por el disco según una circunferencia de centro en el eje de rotación (fig. 50). Al desplazarse el cuerpo a respecto al disco a la velocidad v', la velocidad total *en el sistema fijo de coordenadas* es igual a $v_r + v'$, donde v_r es la velocidad lineal de rotación del disco en el lugar donde se encuentra el cuerpo a.

Por consiguiente, sobre el cuerpo a actúa una fuerza centrípeta

$$f_c = \frac{m\,(v_r + v')^2}{R},$$

donde R es la distancia del cuerpo al eje de rotación. Desarrollando el cuadrado, obtenemos

$$f_c = \frac{mv_r^2}{R} + \frac{mv'^2}{R} + 2\,\frac{v' \cdot v_r}{R}\,m.$$

En el sistema de coordenadas *relacionado con el disco*, el miembro $\frac{mv_r^2}{R}$ determina la fuerza centrífiga de inercia originada por la rotación del disco a la velocidad angular ω; el miembro $\frac{mv'^2}{R}$ determina la fuerza centrífuga originada por el movimiento relativo del cuerpo según la circunferencia de radio R a la velocidad v'; el miembro

$$f = 2\,\frac{v' \cdot v_r}{R}\,m = 2v'\omega m$$

determina la fuerza complementaria originada por la existencia simultánea de la rotación del disco y del movimiento del cuerpo respecto al mismo.

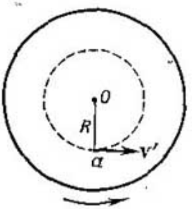


Fig. 50. Movimiento de un cuerpo según una circunferencia concéntrica sobre un disco que gira.

La fuerza f_k, igual a la f, pero de sentido opuesto, nos da para esto caso la fuerza de Coriolis.

Esta fuerza, por su magnitud, coincide con la fuerza que surge en el movimiento según el radio [fórmula (3)], y va dirigida también perpendicularmente a la velocidad relativa.

Ahora examinemos el caso cuando el cuerpo a se desplaza a la velocidad relativa $\mathbf{v}'$ cuya dirección con el radio OC forma un ángulo β (fig. 51).

En este caso la velocidad $\mathbf{v}'$ se puede descomponer en dos: una componente según el radio $v_1' = v' \cos\beta$, y la otra perpendicular al mismo $v_2' = v' \operatorname{sen}\beta$.

A la componente v_1', según la fórmula (3), le corresponde la fuerza *de Coriolis* $f_{k1} = 2v'\omega \cos\beta \cdot m$; a la componente v_2, la fuerza $f_{k2} = 2v'\omega \operatorname{sen}\beta \cdot m$; la fuerza total de Coriolis será:

$$f_k = \sqrt{f_{k_1}^2 + f_{k_2}^2} = 2v'\omega m.$$

Así vemos que para cualquier dirección de la velocidad relativa obtenemos la misma ecuación (3) para la fuerza de Coriolis.

Por fin, examinemos el caso más general cuando el cuerpo se desplaza según una dirección que forma un ángulo con el eje de rotación (fig. 52). Descompongamos la velocidad $\mathbf{v}'$ en dos: una perpendicular al eje de rotación $\mathbf{v}_1'$, y otra paralela al mismo $\mathbf{v}_2'$. Esta última componente no estipula ninguna variación de la distancia del eje y, por consiguiente, no puede originar ninguna clase de aceleraciones o fuerzas complementarias.

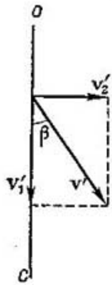


Fig. 51. Descomposición de la velocidad relativa en sus componentes $\mathbf{v}_1'$, según el radio, y $\mathbf{v}_2'$, perpendicular al radio.

Por lo tanto, la magnitud de la fuerza de Coriolis la determina sólo la componente $v_1' = v' \operatorname{sen} \alpha$. Sustituyendo en la fórmula (3) v' por $v_1' = v' \operatorname{sen} \alpha$, obtenemos la ecuación general para la fuerza de Coriolis.

$$f_k = 2v'\omega \operatorname{sen} \alpha \cdot m. \tag{4}$$

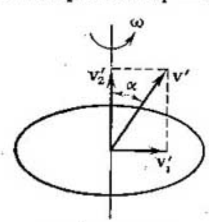
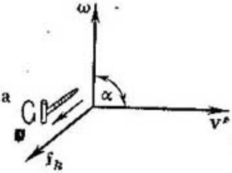


Fig. 52. Descomposición de la velocidad relativa en sus componentes $\mathbf{v}_1'$, perpendicular al eje de rotación, y $\mathbf{v}_2'$, según el eje de rotación.

En todos los casos, la fuerza de Coriolis va dirigida perpendicularmente a la velocidad relativa $\mathbf{v}'$ y al eje de rotación. Para determinar el sentido de la

Fig. 53. Determinación de la dirección y sentido de la fuerza de Coriolis $\mathbf{f}_k$.



fuerza $\mathbf{f}_k$ introducimos en el examen el vector de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ (véase el § 13). Entonces, la fuerza *de Coriolis* $\mathbf{f}_k$ será perpendicular al plano que contiene los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{v}'$ (fig. 53), y de manera que, si hacemos coincidir la dirección de rotación de la manilla del sacacorchos con la que va desde el vector $\mathbf{v}'$ hacia el vector $\boldsymbol{\omega}$ (según el ángulo menor), la dirección de la fuerza $\mathbf{f}_k$ la determinará la de traslación del sacacorchos.

Utilizando las notaciones del análisis vectorial, $\mathbf{f}_k$ se determina por el producto vectorial de $\mathbf{v}'$ y $\boldsymbol{\omega}$ (véase el § 13):

$$\mathbf{f}_k = 2\,[\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}]\,m. \tag{4a}$$

La fuerza de Coriolis se revela en los movimientos sobre la superficie de la esfera terrestre que tiene una velocidad angular determinada, debido a la rotación de la Tierra. Supongamos, por ejemplo, que un tren, en el hemisferio septentrional va hacia el norte según la dirección de un meridiano (punto a en la fig. 54). En este aso, el vector de la velocidad relativa $\mathbf{v}'$ orma un ángulo agudo α con el vector de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, y *la fuerza de Coriolis* $\mathbf{f}_h$ va dirigida según la tangente a la superficie terrestre hacia la derecha, si la observamos poniéndonos de cara al sentido del movimiento del tren. El tren ejerce sobre el carril de la derecha más presión que sobre el de la izquierda. En el hemisferio austral, moviéndose el tren hacia el sur (punto a en la fig. 54), $\mathbf{v}'$ forma con $\boldsymbol{\omega}$ un ángulo obtuso, y la fuerza de Coriolis va hacia la izquierda respecto de la marcha del tren. Con la fuerza de Corolis se explica la socavación de la orilla derecha de los ríos en el hemisferio septentrional, y la de la izquierda, en el austral (ley de Baer), la causa de los vientos alisios del noreste en el hemisferio septentrional, etc.

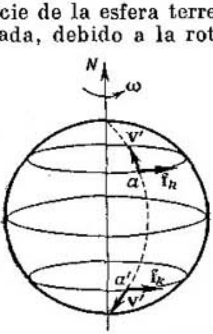


Fig. 54. Dirección y sentido de las fuerzas de Coriolis que actúan sobre un cuerpo que se desplaza por la superficie de la Tierra.

Otros ejemplos de la influencia de la fuerza de Coriolis en el movimiento de los cuerpos en la superficie de la esfera terrestre son: la desviación hacia oriente de la vertical de los cuerpos que caen libremente y la desvición del plano de oscilación del péndulo. Examinemos este último caso más detalladamente. Supongamos, para simplificar, que el péndulo oscila en el polo norte. Entonces, la velocidad $\mathbf{v}'$ de la pesa del péndulo todo el tiempo es perpendicular al eje de la esfera terrestre (siendo el hilo bastante largo) y, por consiguiente, $\mathbf{v}'$ es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$, donde $\boldsymbol{\omega}$, como antes, es el vector de la velocidad angular de rotación de la Tierra. Como resultado de ello, en la pesa del péndulo actúa una fuerza de Coriolis de valor $f_h = 2mv'\omega$, situada en el plano horizontal y dirigida hacia la derecha respecto al vector $\mathbf{v}'$. Solicitada por esta fuerza, la pesa del péndulo, a cada oscilación se inclina hacia la derecha. Por consiguiente, el plano de oscilación del péndulo gira respecto a la Tierra según las agujas del reloj y efectúa un ángulo de 2π al día. Si el péndulo está situado en la latitud φ, su plano de oscilación gira diariamente un ángulo de 2π sen φ.

El primero que llevó a cabo la observación de la desviación del plano de oscilación del péndulo fue Foucault en 1851 y esto fue la demostración directa de la rotación de la Tierra.

CAPITULO III

Trabajo y energía

§ 25. **Trabajo y potencia.** En el ambiente que nos rodea, los cuerpos actúan unos sobre otros mediante diversas fuerzas (fuerzas elásticas, de gravitación, de rozamiento, etc.). El desplazamiento de los cuerpos se realiza bajo la acción de estas fuerzas. De aquí naturalmente, surge la necesidad de caracterizar la acción de las fuerzas que está relacionada con dichos desplazamientos. En mecánica, con este objeto se toma una magnitud que será tanto mayor

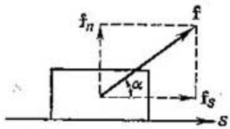


Fig. 55. El trabajo lo realiza solamente la componente $\mathbf{f}_s$ según la dirección del desplazamiento s.

cuanto mayor sea la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento y cuanto mayor sea el espacio recorrido por el punto de aplicación de la fuerza. Esta magnitud se denomina trabajo. Su esencia física se podrá ver claramente después de establecer la relación entre el trabajo realizado y la variación de la energía. Entonces se aclarará que el trabajo es una variación de la energía (§ 28).

En el caso elemental del movimiento rectilíneo y de una fuerza constante dirigida según el desplazamiento, el trabajo es proporcional al producto de la fuerza f por el desplazamiento s del punto de su aplicación:

$$A = kfs, \tag{1}$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad.

En el caso de que la fuerza aplicada al cuerpo forme un ángulo α con la dirección del desplazamiento (fig. 55), descomponemos la fuerza $\mathbf{f}$ en dos: una, $\mathbf{f}_s$, según la dirección del desplazamiento, y la otra, $\mathbf{f}_n$, perpendicular al mismo.

Según lo dicho, el trabajo lo ejecuta sólo la componente f_s, de donde

$$A = kf_s s,$$

o, como $f_s = f \cos\alpha$,

$$A = kfs \cos\alpha. \tag{1a}$$

Suponiendo el coeficiente de proporcionalidad $k = 1$, obtenemos:

$$A = fs \cos\alpha. \tag{2}$$

De esta manera tenemos que, en el caso de una dirección cualquiera de la fuerza, *el trabajo es igual al producto de la fuerza f por el desplazamiento s de su punto de aplicación y por el coseno del ángulo α entre la dirección de la fuerza y la del desplazamiento.*

El trabajo se caracteriza solamente por su valor numérico, por lo tanto es una magnitud escalar.

En el análisis vectorial, la magnitud escalar C, igual al producto de las magnitudes de los vectores **B** y **D** y el coseno del ángulo formado por ellos, se denomina producto escalar, geométrico o interno:

$$C = B \cdot D \cos\alpha.$$

De la ecuación (2) se deduce que el trabajo es un producto escalar del vector fuerza **f** por el de desplazamiento **s**.

Cuando el ángulo $\alpha < 90°$, el $\cos\alpha > 0$, y el trabajo será positivo; en este caso, la componente f_s de la fuerza tiene el mismo sentido que el desplazamiento. Si el ángulo $\alpha > 90°$, el $\cos\alpha < 0$, y el trabajo es negativo; en este caso la componente f_s de la fuerza tiene sentido opuesto al desplazamiento. Aclaremos lo dicho con ejemplos: 1) al cuerpo que descansa en una superficie rugosa, se le aplica una fuerza f que lo desplaza por esta superficie; la fuerza f va dirigida en el sentido del desplazamiento y realiza un trabajo positivo. Al mismo tiempo, al cuerpo va aplicada la fuerza de rozamiento f_r y dirigida en sentido contrario al desplazamiento del cuerpo; el trabajo realizado por esta fuerza es negativo; 2) un cuerpo sólido se ha lanzado hacia arriba, la fuerza de la gravedad va dirigida hacia abajo, es decir, en sentido contrario al del movimiento; el trabajo de la gravedad es negativo; 3) un cuerpo sólido cae; en este caso la gravedad tiene el mismo sentido que el movimiento del cuerpo, por lo tanto, el trabajo de la fuerza de la gravedad es positivo; 4) un cuerpo, solicitado por una fuerza centrípeta se desplaza uniformemente por una circunferencia; en este caso la fuerza en cada instante es perpendicular a la dirección del movimiento ($\alpha = 90°$), y el trabajo, según la fórmula (2), es igual a cero.

Veamos ahora el caso cuando la fuerza no es constante y el movimiento es curvilíneo. Tomemos un arco elemental $\overset{\frown}{\Delta s}$ tan pequeño que se pueda considerar que coincide con su cuerda Δs. Sea f_s la componente de la fuerza **f** según la tangente al arco $\underset{\smile}{\Delta s}$. Entonces, valor de f_s en el trayecto Δs se puede considerar constante, y el trabajo elemental ΔA, realizado en este trayecto, será

$$\Delta A = f_s \cdot \Delta s.$$

Todo el trabajo A realizado en el trayecto finito s, lo obtenemos dividiendo el trayecto s en elementos infinitamente pequeños Δs, determinando los trabajos elementales ΔA y sumándolos:

$$A = \sum f_s \Delta s. \tag{4}$$

El trabajo total A se puede representar gráficamente. Tomemos como abscísas los desplazamientos s (fig. 56), y como ordenadas los

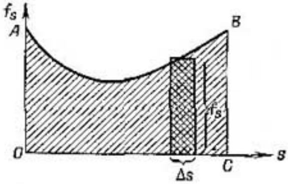


Fig. 56. Gráficamente el trabajo viene determinado por el área de la figura *OABC*.

correspondientes valores de la componente f_s de la fuerza. Supongamos que la curva AB representa los valores de estos componentes f_s para los distintos puntos del trayecto de un caso particular. Dividamos toda la longitud del trayecto, representada por el segmento OC, en segmentos elementales Δs. El trabajo elemental ΔA realizado en uno de estos segmentos Δs es igual a $f_s \Delta s$, es decir, se representa por la columna rayada en cruz. Todo el trabajo en el trayecto s será igual a la suma de los trabajos elementales ΔA, es decir, gráficamente se representa por toda la superficie rayada de la figura, $OABC$.

Determinemos el trabajo realizado cuando el cuerpo está solicitado al mismo tiempo por varias fuerzas $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, etc. (fig. 57). El trabajo elemental ΔA de la resultante será

$$\Delta A = f \cos \alpha \; \Delta s,$$

donde $\mathbf{f}$ es la resultante de las fuerzas $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ y α es el ángulo que esta resultante forma con la dirección del desplazamiento Δs. La magnitud $f \cos \alpha$ es la

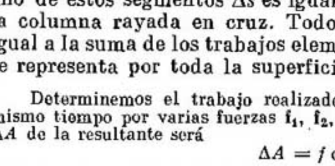


Fig. 57. El trabajo de la fuerza resultante $\mathbf{f}$ es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas componentes $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$.

proyección f_s de la fuerza $\mathbf{f}$ en la dirección $\mathbf{s}$. Pero nosotros hemos visto (§ 20) que la proyección del vector resultante en una dirección es igual a la suma de las proyecciones de sus componentes en la misma dirección, de donde

$$f_s = f_{1s} + f_{2s} + f_{3s}$$

y por consiguiente,

$$\Delta A = f_s \Delta s = f_{1s} \Delta s + f_{2s} \Delta s + f_{3s} \Delta s,$$

es decir, el trabajo de la resultante es igual a la suma algebraica de los trabajos de las componentes.

Utilizando este lema, podemos transformar la ecuación del trabajo de la siguiente manera: descomponemos la fuerza **f**, que actúa en cierta dirección, en sus componentes según los ejes coordenados, f_x, f_y, f_z, y entonces, según lo demostrado:

$$\Delta A = f_x \cos \alpha_1 \Delta s + f_y \cos \alpha_2 \Delta s + f_z \cos \alpha_3 \Delta s,$$

donde α_1, α_2, y α_3 son los ángulos correspondientes formados por las componentes de las fuerzas f_x, f_y y f_z, con la dirección del desplazamiento Δ **s**. Las componentes f_x, f_y y f_z coinciden en dirección con los ejes de coordenadas X, Y, Z, de donde $\Delta s \cos \alpha_1 = \Delta x$, $\Delta s \cos \alpha_2 = \Delta y$ y $\Delta s \cos \alpha_3 = \Delta z$, donde Δx, Δy y Δz son las proyecciones del desplazamiento Δs sobre los ejes de coordenadas. Por lo tanto:

$$\Delta A = f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z. \tag{5}$$

Para una fuerza variable, se debe tomar un desplazamiento infinitamente pequeño ds con sus componentes dx, dy y dz; entonces tendremos:

$$dA = f_x dx + f_y\, dy + f_z\, dz. \tag{5a}$$

Todo el trabajo en un desplazamiento finito s se expresará por la suma de los trabajos elementales dA, es decir, con una integral curvilínea:

$$A = \int_{B_1}^{B_2} (f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz), \tag{6}$$

donde B_1 y B_2 son, respectivamente, los puntos inicial y final del trayecto s.

En la práctica, frecuentemente es muy importante saber, además del trabajo realizado por las fuerzas, el tiempo en que se ejecuta. Está claro que, de dos mecanismos que hagan un mismo trabajo, se considerará mejor el que lo realice en menos tiempo. Por eso, junto al trabajo se introduce una nueva magnitud denominada *potencia*. Se denomina *potencia W la magnitud física directamente proporcional al trabajo ΔA e inversamente proporcional al intervalo de tiempo Δt en que se ha efectuado este trabajo*:

$$W = k \frac{\Delta A}{\Delta t}, \tag{7}$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad. Suponiendo $k = 1$, tenemos:

$$W = \frac{\Delta A}{\Delta t} \tag{7a}$$

Si la fuerza varía con el tiempo, la potencia también varía; en este caso conviene hablar *de la potencia instantánea*, entendiendo por tal el límite a que tiende la relación $\Delta A/\Delta t$ al disminuir infinitamente el intervalo de tiempo Δt:

$$W = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta A}{\Delta t} \right). \quad (8)$$

Según las notaciones del cálculo diferencial, tendremos:

$$W = \frac{dA}{dt}. \quad (8a)$$

es decir, la potencia es igual a la derivada del trabajo respecto al tiempo.

Como el trabajo elemental $\Delta A = f_s \Delta s$, tendremos, según (8)

$$W = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{f_s \cdot \Delta s}{\Delta t} \right) = f_s \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right), \text{ pero el } \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = v,$$

donde v es la magnitud de la velocidad instantánea. De donde:

$$W = f_s \cdot v, \quad (9)$$

es decir, la potencia instantánea es proporcional al producto de la proyección de la fuerza sobre la dirección del movimiento por la velocidad.

Debido a la importancia práctica de las magnitudes del trabajo y de la potencia, históricamente ha surgido una gran cantidad de unidades para medirlas. Citémoslas.

1) *Unidad de trabajo en el sistema CGS*. Utilizando la ecuación (2) en la cual suponemos $\alpha = 0$, obtenemos que por *unidad de trabajo en el sistema CGS se toma el realizado por una fuerza de una dina cuando su punto de aplicación se desplaza 1 cm en la dirección de la fuerza*. Esta unidad de trabajo se denomina *ergio*.

Además se usa una unidad mayor de trabajo, el *julio*:

$$1 \text{ iulio} = 10^7 \text{ ergios}.$$

2) *En el sistema MKS, por unidad de trabajo se toma el realizado por la fuerza de 1 newton en el trayecto de 1 m*. Como 1 N = 10^5 dinas, y 1 m = 10^2 cm, esta unidad de trabajo es igual a 10^7 ergios, es decir, 1 julio.

3) *En el sistema práctico de unidades, por unidad de trabajo se toma el realizado por la fuerza de 1 kgf en el trayecto de 1 m*. Esta unidad de trabajo se denomina *kilográmetro* (abreviadamente kgm).

Como 1 kgf = 981 000 dinas, y 1 m = 100 cm, tenemos que 1 kgm = 981 000·100 ergios = 9,81·10^7 ergios = 9,81 julios;

$$1 \text{ julio} = \frac{1}{9,81} \text{ kgm} = 0,102 \text{ kgm}.$$

4) *Unidad de potencia en el sistema CGS*. En el sistema CGS, por unidad de potencia se toma *la de un mecanismo que realiza el trabajo de 1 ergio en 1 s*. Esta unidad se denomina *ergio/s*.

Además de la unidad de potencia ergio/s, se emplea otra mayor denominada *vatio*:

$$1 \text{ vatio} = 10^7 \text{ ergios/s} = 1 \text{ julio/s}.$$

Así tenemos que un mecanismo que realice un trabajo de 1 J en 1 s, tiene una potencia de 1 W.

100 vatios es 1 hectovatio (hW),

1000 vatios es 1 kilovatio (kW).

5) En el sistema MKS, por unidad de potencia se toma *la de un mecanismo que realiza el trabajo de 1 julio en 1 s*, es decir, 1 *vatio*.

6) *En el sistema técnico, por unidad de potencia se toma la de un mecanismo que realice el trabajo de 1 kgm en 1 s.* Esta unidad de potencia se designa abreviadamente por kgm/s.

Está claro que:

$$1 \text{ kgm/s} = 9{,}81 \text{ vatios},$$

$$1 \text{ vatio} = \frac{1}{9{,}81} \text{ kgm/s} = 0{,}102 \text{ kgm/s}.$$

Además, históricamente se creó la unidad de potencia denominada «*caballo de vapor*»*), igual a 75 kgm/s. Así tenemos:

$$1 \text{ CV} = 75 \text{ kgm/s} = 736 \text{ vatios} = 0{,}736 \text{ kilovatios}.$$

7) En la práctica actual, frecuentemente se emplean, además, las dos siguientes unidades *de trabajo*:

a) la unidad igual al trabajo realizado durante 1 hora por un mecanismo de potencia constante igual a 1 hectovatio. Esta unidad de trabajo se denomina *hectovatio-hora*:

$$1 \text{ hectovatio-hora} = 100 \text{ vatios} \cdot 3600 \text{ s} = 3{,}9 \cdot 10^5 \text{ julios};$$

b) la unidad igual al trabajo realizado durante 1 hora por un mecanismo de potencia constante igual a 1 kilovatio. Esta unidad de trabajo se denomina *kilovatio-hora*:

$$1 \text{ kilovatio-hora} = 1000 \text{ vatios} \cdot 3600 \text{ s} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ julios}.$$

Veamos unos cuantos ejemplos de determinación del trabajo de la potencia.

E j e m p l o 1. Un tren de tracción eléctrica de 500 tf de peso recorre con movimiento uniforme un trayecto de 3 km cuesta arriba con una inclinación de 4 m por 1 km. El coeficiente de rozamiento es $\varkappa = 0{,}002$.

Determinar: a) el trabajo realizado por el tren; b) la potencia desarrollada por el mismo sabiendo que el trayecto de 3 km ha sido recorrido en 5 min.

---

*) Como término medio, trabajando largo tiempo, un caballo produce, efectivamente, una potencia de unos 75 kgm/s; sin embargo, en un pequeño intervalo de tiempo, un caballo puede desarrollar una potencia de varios «caballos de vapor».

S o l u c i ó n. El trabajo se realiza en sentido contrario al de la fuerza de rozamiento:

$$P_r = \varkappa P_1,$$

donde P_1 es la presión que ejerce el tren sobre la vía (fig. 58), y contra la componente de la fuerza de la gravedad P_2, paralela a la vía. Así tenemos que el trabajo buscado A es

$$A = (\varkappa P_1 + P_2)\cdot s. \tag{10}$$

De la fig. 58 tenemos que

$$P_1 = P\cos\alpha; \quad P_2 = P\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

donde P es el peso del tren y α el ángulo de inclinación de la vía respecto al horizonte.

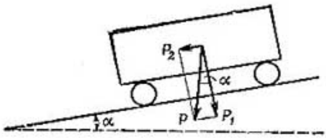


Fig. 58. El trabajo se realiza en sentido contrario al de las fuerzas de rozamiento y de la componente P_2, que tira del tren hacia atrás.

Colocando estos valores de P_1 y P_2 en la (10), tenemos

$$A = P\,(\varkappa\cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha)s. \tag{11}$$

Las magnitudes sen α y cos α se determinan de la condición de que la pendiente es de 4 m por km de vía, de donde

$$\mathrm{sen}\,\alpha\,\frac{4}{1000}=0{,}004 \ \text{y} \ \cos\alpha=\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}004^2}=0{,}99992,$$

es decir, aproximadamente la unidad. Después, según la ecuación (11), tenemos que:

$$A = 5\cdot10^5\,(0{,}002 + 0{,}004)\cdot3{,}000 \ \text{kgm},$$

de donde

$$A = 9\cdot10^6 \ \text{kgm} = 8{,}83\cdot10^7 \ \text{J} = 8{,}83\cdot10^4 \ \text{kJ}.$$

La potencia buscada será

$$W=\frac{A}{t}=\frac{8{,}83\cdot10^4}{300} \ \text{kW}=2{,}94\cdot10^2 \ \text{kW}$$

o

$$W=\frac{2{,}94\cdot10^2}{0{,}736} \ \text{CV}=399 \ \text{CV}.$$

E j e m p l o 2. Determinar el trabajo realizado al comprimir un resorte reduciendo su longitud en 10 cm, si se sabe que la fuerza es proporcional a la compresión del resorte y que para reducirlo en 1 cm es necesario aplicar una fuerza de 2 kgf.

S o l u c i ó n. Esto es un caso de trabajo de una fuerza variable; la fuerza aumenta proporcionalmente a la compresión del resorte. Llamando s a esta reducción de longitud tenemos que la fuerza es

$$f = ks, \tag{12}$$

donde k es un coeficiente que se determina por el grado de rigidez del resorte.

Gráficamente, la dependencia de la fuerza f respecto a la reducción de longitud s se representa por la recta OA que pasa por el origen de coordenadas (fig. 59).

Si el resorte se ha comprimido en la magnitud s, esta magnitud representará el trayecto en que la fuerza variable que estudiamos, ha realizado el trabajo.

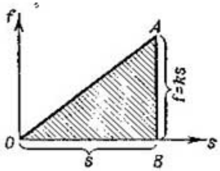


Fig. 59. El trabajo de las fuerzas elásticas de un resorte extendido o comprimido es igual al área del triángulo OAB.

bajo. Según lo dicho en la pág. 91, el trabajo viene representado por la superficie rayada de la figura. Como esta figura es un triángulo, su superficie será igual a $\frac{AB\cdot OB}{2}$, pero $OB = s$ y $AB = ks$, de donde el trabajo buscado será

$$A=\frac{ks\cdot s}{2}=\frac{ks^2}{2}. \tag{13}$$

El valor k lo determinamos, según la (12) de la condición de que $f = 2$ kgf siendo $s = 1$ cm; sin embargo, prefiriendo utilizar el sistema técnico, tomaremos s en m, entonces $s = 0{,}01$ m y

$$k=\frac{f}{s}=\frac{2}{0{,}01}\ \text{kgf/m}=200\ \text{kgf/m}.$$

Colocando este valor de k en la (13) obtenemos

$$A=\frac{200\cdot(0{,}1)^2}{2}\ \text{kgm}=1\ \text{kgm}.$$

§ 26. Energía cinética de un sistema mecánico. El cuerpo considerado como un punto material, que se desplaza solicitado por una fuerza, varía la velocidad. El trabajo de la fuerza aplicada está relacionado con la variación de la velocidad del cuerpo. Esta relación se expresa mediante la magnitud física denominada *energía cinética* del punto material.

Para determinar la energía cinética de un punto material calculemos primero el trabajo que hay que realizar para variar la velocidad del punto material de masa m desde el valor v_1 hasta el valor v_2. Para ello apliquemos al punto material una fuerza constante $\mathbf{f}$ paralela al vector velocidad $\mathbf{v}_1$, fuerza que, en cierto intervalo de tiempo t, varía la velocidad desde el valor v_1 hasta el v_2. En este intervalo de tiempo t, el punto material recorre un trayecto s, y la fuerza $\mathbf{f}$ realiza el trabajo

$$A=fs. \tag{1}$$

Debido a la constancia de la fuerza, el movimiento será uniformemente acelerado, y su aceleración

$$w = \frac{v_2 - v_1}{t},$$

por consiguiente, la fuerza será

$$f = mw = m\frac{v_2 - v_1}{t}. \tag{2}$$

El trayecto recorrido por el punto material en el tiempo t lo determinamos en función de la velocidad media $\overline{v} = \frac{v_2 + v_1}{2}$, de donde obtenemos

$$s = \frac{v_2 + v_1}{2} t.$$

Colocando los valores hallados de la fuerza f y del trayecto s, según la (2) y la (3), en la fórmula (1), tenemos que

$$A = m\frac{v_2 - v_1}{t} \cdot \frac{v_2 + v_1}{2} t = m\frac{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)}{2},$$

de donde

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{4}$$

Así tenemos que *el trabajo de la fuerza f es igual al incremento de la magnitud $\frac{mv^2}{2}$, que se denomina energía cinética.* Designemos la energía cinética por E_c:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}. \tag{5}$$

Entonces, la ecuación (4) se puede escribir así:

$$A = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c. \tag{6}$$

De la ecuación (4) se deduce que, para que el cuerpo que se desplaza a la velocidad v se pare ($v_1 = v$, $v_2 = 0$), la fuerza que se le aplica debe realizar un trabajo negativo igual a la energía cinética del cuerpo $E_c = mv^2/2$; y viceversa, para comunicar a un cuerpo de masa m una velocidad v, la fuerza aplicada deberá realizar un trabajo positivo igual a $mv^2/2$.

Si en la expresión $mv^2/2$, todas las magnitudes están expresadas en unidades del sistema *CGS*, es decir, m en gramos, v en cm/s, la energía se expresará en ergios. En el sistema técnico v se expresa en m/s y m en unidades técnicas de masa (iguales a 9,81 kg), la energía resultará en kgm. En la práctica frecuentemente se emplean sistemas mixtos: la velocidad v se expresa en m/s, la masa m en kg, y la energía E_c se quiere obtener en kgm. Entonces, en la fórmula (5) se debe introducir un coeficiente de proporcionalidad k, que en nuestro caso será igual a $\frac{1}{9,81}$, así tenemos:

$$E_c\,(\mathrm{kgm}) = \frac{\mathrm{m\,(kg)}\,[v\,(\mathrm{m/s})]^2}{9,81 \cdot 2}.$$

La ecuación (4) también se puede obtener fácilmente para el caso cuando la fuerza es variable y el movimiento curvilíneo. Supongamos que en un pequeño intervalo de tiempo cualquiera Δt el cuerpo recorre un trayecto elemental Δs (fig. 60). El trabajo ΔA realizado en este trayecto será

$$\Delta A = f \cos \alpha \cdot \Delta s, \tag{7}$$

donde α es el ángulo que forma la fuerza $\mathbf{f}$ con la dirección del desplazamiento Δs.

Según la segunda ley de Newton, $\mathbf{f} = m \cdot \mathbf{w}$, donde $\mathbf{w}$ es la aceleración ori-

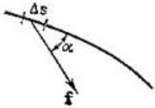


Fig. 60. Trayecto elemental Δs reccorrido en el movimiento curvilíneo.

ginada por la fuerza que estudiamos; la dirección del vector $\mathbf{w}$ coincide con la de la fuerza $\mathbf{f}$. De aquí que la ecuación (7) la podemos escribir así:

$$\Delta A = mw \cos \alpha \cdot \Delta s. \tag{8}$$

La magnitud $w \cos \alpha$ es la proyección del vector aceleración sobre el desplazamiento elemental Δs, que coincide, en dirección, con la tangente a la trayectoria. Así, $w \cos \alpha$ es la componente tangencial de la aceleración, w_t, la cual es igual a $\Delta v / \Delta t$, donde Δv es la variación del valor de v. Colocando este valor de $w \cos \alpha$ en la (8), obtenemos que

$$\Delta A = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta s.$$

Por fin, observando que $\Delta s = v \Delta t$, hallamos que

$$\Delta A = mv \Delta v. \tag{9}$$

Para obtener el trabajo total A realizado en un trayecto finito s, hay que sumar los trabajos elementales (9):

$$A = \sum \Delta A = \sum mv \Delta v.$$

Sacando la masa m, como magnitud constante, fuera del signo de la suma, obtenemos

$$A = m \sum v \,\Delta v. \tag{9a}$$

Para calcular esta suma, supongamos que la variación de la velocidad es infinitamente pequeña, entonces sustituiremos la suma por la integral

$$A = m \int_{v_1}^{v_2} v \, dv,$$

tomada entre los límites de la velocidad correspondiente al comienzo del trayecto v_1 y la correspondiente al final del mismo v_2. Integrando obtenemos

$$m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \text{ de donde } A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Veamos unos cuantos ejemplos de determinación de la energía cinética.

Ejemplo 1. Un tren de 600 tf de peso sale de la estación y al cabo de 5 min después de la salida tiene una velocidad de 60 km/h, habiendo recorrido 2,5 km. ¿Qué potencia media ha desarrollado la locomotora, si el coeficiente de rozamiento $\varkappa$ es constante e igual a 0,005?

Solución. El trabajo realizado por la locomotora consta del efectuado para vencer la fuerza de rozamiento y del empleado para comunicar al tren la energía cinética correspondiente, de donde

$$A = f_r\, s + \frac{mv^2}{2},$$

donde $f_r = \varkappa P$ es la fuerza de rozamiento, m es la masa del tren y v la velocidad al final del trayecto s.

De aquí que la potencia buscada sea

$$W = \frac{A}{t} = \varkappa P\,\frac{s}{t} + \frac{mv^2}{2t},$$

o

$$W = 0{,}005\; 6\cdot 10^5\,\frac{2{,}5\cdot 10^3}{300} + \frac{6\cdot 10^5\cdot (16{,}7)^2}{9{,}81\cdot 2\cdot 300} = 5{,}3\cdot 10^4 \text{ kgm/s},$$

o

$$W = \frac{5{,}3\cdot 10^4}{75}\,\text{CV} \cong 700 \text{ CV}.$$

Ejemplo 2. Determinar la velocidad adquirida por las bolas después de un choque central perfectamente elástico; las masas de las bolas son m_1 y m_2 y sus velocidades respectivas antes del choque, v_1 y v_2.

Solución. Designemos las velocidades de las bolas después del choque por v_1' y v_2'. El carácter perfectamente elástico del choque significa que la suma de las energías cinéticas de las bolas después del choque debe ser igual a la suma de las energías cinéticas de antes del choque:

$$\frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \tag{10}$$

Además, debe cumplirse la ley de la conservación de la cantidad de movimiento (véase el § 20), según la cual:

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2. \tag{11*}$$

* Hay que tener en cuenta que la igualdad (10) tiene carácter escalar; esta ecuación sería justa también en el caso de un choque no central, es decir, cuando las velocidades v_1 y v_2 de las bolas tienen diferentes direcciones. En cambio, la igualdad (11) tiene carácter vectorial; en la forma que se cita en el texto, es justa solamente para el choque central, cuando todas las velocidades, v_1, v_2, v_1' y v_2', van dirigidas según una misma recta.

Resolviendo las dos ecuaciones (10) y (11) respecto a las dos incógnitas v'_1 y v'_2, hallamos que

$$v'_1=\frac{(m_1-m_2)\,v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2},\qquad v'_2=\frac{(m_2-m_1)\,v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2}. \tag{12}$$

E j e m p l o 3. Determinar la pérdida de energía cinética en el choque central inelástico de dos bolas. Las masas de las bolas son m_1 y m_2 y sus velocidades antes del choque, v_1 y v_2.

S o l u c i ó n. La energía cinética de las bolas antes del choque es:

$$E_{c1}=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}.$$

Después del golpe inelástico, ambas bolas se deslizan a la misma velocidad v', que es igual (véase el § 20) a:

$$v'=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2} \tag{13}$$

La variación de la energía cinética en el golpe es igual a:

$$\Delta E=E_{c2}-E_{c1}=\frac{(m_1+m_2)\,v'^2}{2}-\left(\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}\right).$$

Sustituyendo en esta ecuación v' por su valor según la (13) hallamos que

$$\Delta E=-\frac{m_1m_2\,(v_1-v_2)^2}{2\,(m_1+m_2)} \tag{14}$$

Por lo tanto, en el choque inelástico de las bolas se produce una disminución de la energía cinética. Esta pérdida de energía cinética se ha invertido en realizar el trabajo de deformación inelástica de las bolas durante el choque. Al fin y al cabo, este trabajo se ha transformado en calor elevando la temperatura de las bolas.

Pasando del estudio de un punto material, al de un sistema de puntos materiales, aplicaremos la ecuación (4) a cada uno de los puntos del sistema:

$$A_i=\frac{mv_{i2}^2}{2}-\frac{mv_{i1}^2}{2} \tag{15}$$

Aquí el subíndice i denota el punto material dado, y A_i expresa el trabajo de las fuerzas aplicadas a este punto.

Energía cinética E_c del sistema se denomina la suma de energías cinéticas de todos los puntos materiales que forman el sistema:

$$E_c=\sum_i\frac{mv_i^2}{2} \tag{16}$$

Sumando los miembros de la igualdad (15) para todos los puntos materiales, tenemos:

$$E_{c2}-E_{c1}=A, \tag{17}$$

donde $A=\sum_i A_i$ es la suma de los trabajos de todas las fuerzas aplicadas a todos los puntos materiales que forman el sistema. La ecuación (17) expresa una de las leyes fundamentales de la mecánica: *la variación de la energía cinética de un sistema es igual al trabajo de todas las fuerzas aplicadas a los puntos materiales que lo forman.*

§ 27. Energía potencial de un sistema mecánico. Supongamos que el cuerpo considerado como punto material *se desplaza de un lugar a otro* actuando sobre los cuerpos que le rodean y al mismo tiempo siendo solicitado por ellos. Por consiguiente, sobre este

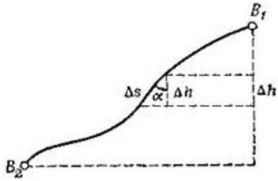


Fig. 61. Determinación del trabajo de la fuerza de la gravedad.

cuerpo actúan ciertas fuerzas. En este caso se dice que el cuerpo se desplaza *en un campo de fuerzas.* El carácter de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que examinamos puede ser muy variado, por ejemplo, estas fuerzas pueden ser las de la gravedad, de rozamiento, eléctricas, etc.

Veamos el trabajo realizado en el movimiento del punto material por un campo homogéneo de la fuerza de la gravedad. Esta clase de campo (campo gravitatorio) lo tenemos cerca de la superficie de la Tierra, donde la gravedad prácticamente no depende de la altura sobre la superficie de la Tierra (mientras la altura h sea pequeña comparada con el radio de la esfera terrestre R). Supongamos que el punto material se desplaza según cierta curva B_1B_2 (fig. 61). Dividamos esta curva en segmentos elementales tan pequeños, que cada uno de ellos se pueda considerar rectilíneo. Entonces, el trabajo elemental ΔA realizado al desplazarse según el segmento Δs, será $\Delta A = P\Delta s \cos\alpha$, donde P es el peso del cuerpo, y α el ángulo que forma la dirección de la fuerza de la gravedad con la del desplazamiento. De la fig. 61 se ve que $\Delta s \cos\alpha = \Delta h$, donde Δh es la variación de la altura al efectuarse el desplazamiento Δs.

Todo el trabajo de desplazamiento desde el punto B_1 hasta el B_2 será:

$$A = \sum \Delta A = \sum P\Delta h = P \sum \Delta h,$$

pero $\Sigma\Delta h$ es el segmento h que indica la diferencia de altura de los puntos B_1 y B_2; por lo tanto:

$$A = Ph, \tag{1}$$

es decir, el trabajo de la fuerza de la gravedad en el desplazamiento de un cuerpo según una curva cualquiera es igual al trabajo en el desplazamiento del cuerpo por la vertical, a una distancia h, igual a la diferencia de alturas de los puntos inicial y final del trayecto del cuerpo. *El trabajo en el campo de la fuerza de la gravedad no depende de la forma ni de la longitud del trayecto, sino solamente de la diferencia de altura entre el punto inicial y el final.*

Pero resulta que en la naturaleza existen otras fuerzas, además de las de la gravedad, que poseen también esta propiedad en que el trabajo de las fuerzas en el desplazamiento de un punto material depende solamente de las posiciones inicial y final de los puntos materiales, y no de la forma del trayecto ni de la velocidad con que se mueven. Estas fuerzas se denominan *fuerzas potenciales.* En el movimiento de un punto material en un campo de fuerzas potenciales, se puede introducir el concepto *de energía potencial*, cuya diferencia determina el trabajo de las fuerzas. Sea un punto material que se traslada desde cierto punto (*1*) del espacio a otro punto (*2*), y llamemos $A_{1,2}$ al trabajo que realizan en este desplazamiento las fuerzas que lo solicitan Según lo dicho, para las fuerzas potenciales, este trabajo se caracteriza solamente por las posiciones de los puntos inicial y final del trayecto, es decir, de las posiciones de los puntos (*1*) y (*2*). Esto significa que la posición del punto material en el campo de las fuerzas potenciales se puede caracterizar mediante una magnitud E_p tal, que el trabajo $A_{1,2}$ sea igual a la diferencia de los valores E_{p1} y E_{p2}, que toma E_p en los puntos (*1*) y (*2*):

$$E_{p1}-E_{p2}=A_{1,2} \tag{2}$$

La magnitud E_p se denomina energía potencial.

La igualdad (2) solamente determina *la diferencia* de las energías potenciales de dos puntos; la propia energía potencial se puede determinar, si convenimos en tomar como valor cero el valor de la energía potencial de un punto cualquiera del espacio.

Como ejemplo, determinemos la energía potencial de un punto material en un campo de fuerzas de la gravedad. Según la ecuación (1), el trabajo de las fuerzas de la gravedad al desplazarse un cuerpo entre dos puntos del espacio B_1 y B_2, de los cuales el segundo se halla a una altura h por debajo del primero, es igual a $A = Ph$, o $A = mgh$, si llamamos m a la masa del cuerpo, y g a la aceleración de la gravedad. Llamemos h_1 a la altura del punto B_1, contando a partir de cierta altura cero, y h_2 a la del punto B_2. Entonces $h = h_1 - h_2$ y

$$A=mgh_1-mgh_2.$$

Por otro lado, según la fórmula (2), tenemos que:

$$A=E_{p1}-E_{p2}$$

Si convenimos en tomar como cero el valor de la energía potencial del punto a la altura $h_2 = 0$, de la comparación de las dos últimas ecuaciones tenemos:

$$E_{ph} = mgh. \tag{3}$$

Por consiguiente, la energía potencial de un cuerpo de masa m elevado a la altura h, es igual a mgh, si hemos convenido que la energía potencial de un cuerpo que se halla en la superficie de la Tierra es igual a cero. Si el cuerpo cae desde la altura h, la fuerza de la gravedad realiza un trabajo positivo $A = Ph$. La energía potencial, en este caso, disminuye. Al elevar un cuerpo a la altura h, el trabajo de las fuerzas de la gravedad es negativo. En este caso, de la igualdad (2), obtenemos que $E_{p1} - E_{p2} < 0$, es decir, la energía potencial aumenta.

Como segundo ejemplo veamos *la energía potencial de un resorte comprimido*. En el ejemplo 2 del § 25 hemos visto que el trabajo que hay que invertir en reducir la longitud de un resorte elástico en la magnitud s, es $A = \frac{ks^2}{2}$, donde k es el coeficiente de rigidez del resorte. En esta misma magnitud aumenta la energía potencial del resorte. Si la energía potencial de un resorte no comprimido la consideramos igual a cero, la del resorte comprimido reduciendo su longitud en la magnitud s será:

$$E_p = \frac{ks^2}{2}$$

Aquí la energía potencial es proporcional al cuadrado de la reducción del resorte.

Pasemos a examinar los sistemas de puntos materiales. Primeramente supongamos que el sistema está aislado, es decir, que sus puntos actúan solamente unos sobre otros sin ser solicitados por los cuerpos exteriores al sistema. Supongamos que las fuerzas de acción mutua de los puntos materiales dependen de las distancias entre ellos, y convengamos en llamar *configuración* de un sistema la disposición determinada de sus puntos materiales. Cualquier desplazamiento de unos puntos respecto a otros, acarreará una variación de la configuración del sistema. Al pasar el sistema de una configuración cualquiera (*1*) a otra (*2*), las fuerzas que actúan sobre todos sus puntos materiales, efectuarán un trabajo que designaremos por $A_{1,2}$. Si todas las fuerzas tienen carácter potencial, el trabajo $A_{1,2}$ dependerá *solamente de cuáles sean las configuraciones inicial y final del sistema*. En este caso, el trabajo $A_{1,2}$ puede considerarse como la diferencia de energías potenciales del sistema correspondientes a las configuraciones (*1*) y (*2*):

$$A_{1,2} = E_{p1} - E_{p2}. \tag{4}$$

Como antes, la ecuación (4) determina solamente la diferencia de energías potenciales. Para determinar la propia energía potencial, hay que considerar igual a cero la energía de una determinada configuración del sistema.

El ejemplo arriba estudiado de energía potencial de un cuerpo en el campo de la fuerza de la gravedad de la Tierra, se puede considerar también como ejemplo de energía potencial de un sistema conjunto formado por la Tierra y el cuerpo pesado que se estudia. En el caso de caer el cuerpo pesado desde la altura h, la configuración inicial será la formada por la Tierra y el cuerpo a la altura h sobre su superficie; y la configuración final, la formada por la Tierra y el cuerpo en su superficie. El trabajo de la fuerza de la gravedad será la diferencia de las energías potenciales de estas dos configuraciones:

$$A_{1,2}=E_{ph}-E_{p0}.$$

Observemos una vez más que la ecuación (4) solamente tiene sentido si el trabajo de las fuerzas no depende de cómo se efectúa el desplazamiento de los puntos materiales al pasar el sistema de una configuración a otra. Esta condición no siempre se cumple. No todas las fuerzas que encontramos en la naturaleza son potenciales. El trabajo de las fuerzas de rozamiento, por ejemplo, depende de la longitud del trayecto recorrido. Por eso, cuando hay fuerzas de rozamiento, no se puede expresar el trabajo como la diferencia de energías potenciales.

§ 28. Leyes (principios) de la conservación y de la variación de la energía mecánica de un sistema. Supongamos que tenemos un sistema aislado de puntos materiales en que actúan solamente fuerzas potenciales. *El estado del sistema vendrá determinado por su configuración y velocidades de los puntos materiales que lo forman.* Al pasar el sistema *de un estado a otro*, las fuerzas aplicadas a sus puntos materiales realizan un trabajo que llamaremos de nuevo $A_{1,2}$, considerando que el subíndice 1 se refiere al estado inicial del sistema (*1*), y el 2, al final (*2*). En cada uno de estos estados, que se diferencian por las velocidades y disposición de sus puntos materiales, el sistema se caracterizará por las correspondientes magnitudes de la energía cinética E_{c1} y E_{c2} y de la energía potencial E_{p1} y E_{p2}. Entonces, el trabajo $A_{1,2}$ puede expresarse de dos maneras: por la diferencia de las energías cinéticas

$$A_{1,2}=E_{c2}-E_{c1}, \tag{1}$$

o por la diferencia de las energías potenciales

$$A_{1,2}=E_{p1}-E_{p2} \tag{2}$$

De estas dos igualdades tenemos

$$E_{c2}+E_{p2}=E_{c1}+E_{p1}. \tag{3}$$

La suma de las energías potencial y cinética de un sistema se denomina *energía mecánica total E del sistema*:

$$E_c + E_p = E, \tag{4}$$

lo cual permite escribir la igualdad (3) de la forma siguiente:

$$E_1 = E_2, \tag{5}$$

es decir, tenemos que *la energía total de un sistema aislado en que actúan solamente fuerzas potenciales permanece constante*. Esta conclusión se denomina ley (principio) de la conservación de la energía mecánica. Es una de las consecuencias más importantes de los principios fundamentales de la mecánica.

Al pasar de un estado a otro, pueden variar las energías cinética y potencial por separado, pero su suma seguirá siendo constante. Si, por ejemplo, ha aumentado la energía cinética en cierta magnitud ΔE_c, en la misma magnitud $\Delta E_p = \Delta E_c$ debe disminuir la energía potencial. No obstante, hay que recordar que la ley de la conservación de la energía mecánica en un sistema aislado, se cumple solamente cuando las fuerzas que actúan en el sistema son potenciales. Si hay fuerzas no potenciales, como, por ejemplo, fuerzas de rozamiento, la suma de energías cinética y potencial no permanecerá constante. La generalización de la ley de la conservación de la energía para un sistema cualquiera se expondrá en el § 68.

Veamos el caso de la caída de un cuerpo, despreciando el rozamiento.

Sea un cuerpo de masa m elevado a la altura h. Su energía potencial será

$$E_p = mgh.$$

A medida que el cuerpo vaya cayendo de la altura h, su energía potencial disminuye; pero el cuerpo adquiere velocidad y, por consiguiente, energía cinética. Al final de la caída, esta energía cinética será

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

donde $v = \sqrt{2\,gh}$ es la velocidad con que el cuerpo llega a la Tierra. Colocando este valor de v en la ecuación de la energía cinética, hallamos que

$$E_c = \frac{m \cdot 2gh}{2} = mgh,$$

es decir, al final de la caída, en lugar de la energía potencial, tiene una cantidad de energía cinética igual a la potencial que tenía. La energía ha pasado de una forma a otra, pero la cantidad total sigue sin variar.

Para un sistema mecánico cerrado, la energía total E, igual a la suma de la energía cinética E_c y potencial E_p, se conserva constante:

$$E = E_c + E_p = \text{const.}$$

La disminución de la energía cinética lleva al aumento de la potencial, y viceversa. Como en el caso de la piedra que cae, en el caso general de un sistema mecánico cerrado, los procesos se reducen al paso de la energía cinética a la potencial y viceversa.

Supongamos que, en un sistema mecánico cerrado, primeramente todos los cuerpos están en reposo. Entonces $E_c = 0$ y la energía potencial $E_p = E$, es decir, es la reserva total de energía. Como la energía cinética E_c siempre es positiva, solamente podrá surgir a costa de la disminución de la energía potencial E_p. De esto se deduce que si en el momento inicial la energía potencial E_p tiene *el valor mínimo posible* y los cuerpos que forman el sistema mecánico se encuentran en reposo ($E_c = 0$), posteriormente *no podrán ponerse en movimiento*, ya que, sin la acción de fuerzas exteriores, no puede surgir energía cinética E_c. En otras palabras: *un sistema mecánico cerrado, cuyo valor de energía potencial es mínimo y en el cual no hay movimiento de los cuerpos, se halla en equilibrio.* Como ejemplo puede servir una esfera pesada reposando en el fondo de un hoyo: su energía potencial E_p tiene el valor mínimo, y la esfera se halla en equilibrio; sin la acción de una fuerza exterior, la esfera no podrá salir del hoyo.

Veamos algunos ejemplos particulares.

E j e m p l o 1. Una piedra de 2 kgf de peso que cae de una altura de 5 m penetra 5 cm en el suelo blando. ¿A qué es igual la fuerza media del golpe?

S o l u c i ó n. La piedra elevada a una altura h tenía una reserva de energía potencial $E_p = Ph$, donde P es el peso de la piedra. A costa de esta energía potencial se ha realizado el trabajo de penetración de la piedra en el terreno, de donde

$$\bar{f} \cdot s = Ph,$$

donde $\bar{f}$ es la fuerza media del golpe y s la profundidad de introducción en el suelo. Por lo tanto:

$$\bar{f} = P\frac{h}{s} = 2\ \frac{5}{0{,}05}\ \text{kgf} = 200\ \text{kgf}.$$

E j e m p l o 2. Para medir la velocidad de las balas se utiliza el péndulo balístico, que es un cajón con arena suspendido de una cuerda. La bala, al chocar con el cajón, se introduce en él, pero éste resulta despedido y alcanza cierta altura (fig. 62). Determinar la velocidad de la bala v sabiendo que la masa del proyectil es m_1, la del cajón, m_2 y la altura de elevación del cajón, h.

S o l u c i ó n. Cuando la bala choca con el cajón, empieza a moverse junto con él a la velocidad v' que se determina de la condición de que el choque entre la bala y el cajón es inelástico:

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, v.$$

La energía cinética del cajón con la bala es

$$E_c = \frac{(m_1 + m_2)\, v'^2}{2}.$$

Sustituyendo en esta ecuación v' por su valor, tenemos

$$E_c = \frac{m_1^2 v^2}{2\,(m_1 + m_2)}.$$

Al desplazarse el cajón y adquirir la altura h, toda esta energía cinética pasa a potencial, de donde

$$\frac{m_1^2 v^2}{2\,(m_1 + m_2)} = (m_1 + m_2)\, gh,$$

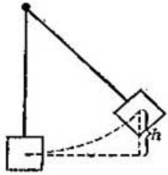


Fig. 62. Péndulo balístico.

y de aquí obtenemos que la velocidad de la bala es:

$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}.$$

Como generalmente la masa de la bala m_1 es muy pequeña en comparación con la del cajón, aproximadamente se toma

$$v = \frac{m_2}{m_1} \sqrt{2gh}.$$

Veamos ahora un sistema no aislado y supongamos que entre las fuerzas interiores hay también fuerzas de rozamiento (fuerzas no potenciales). En este caso nos limitamos a considerar solamente los fenómenos mecánicos sin tener en cuenta los caloríficos y otros no mecánicos de que se hablará más adelante (§ 68). Dividamos las fuerzas que actúan en los puntos materiales en tres grupos: 1) fuerzas potenciales interiores, 2) fuerzas de rozamiento (no potenciales interiores), y 3) fuerzas exteriores originadas por la acción de los cuerpos que no entran en el sistema que se estudia. Entonces, en la ecuación (1) dividimos el trabajo en tres partes correspondientes a estos tres grupos de fuerzas, y como resultado obtenemos que:

$$E_{c2} - E_{c1} = A_{\text{pot. inter}} + A_r + A_{\text{exter}}. \qquad (6)$$

La variación de la energía potencial estará relacionada solamente con el trabajo de las fuerzas potenciales:

$$E_{p1} - E_{p2} = A_{\text{pot. inter.}} \qquad (7)$$

De las ecuaciones (6) y (7) obtenemos que:

$$E_{c2} + E_{p2} - (E_{c1} + E_{p1}) = A_{\text{exter.}} + A_r.$$

Pero la suma de las energías cinética y potencial $E_c + E_p$ es la energía total del sistema mecánico, E, de donde:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{exter.}} + A_r. \qquad (8)$$

De la ecuación (8) se deduce que *la variación de la energía mecánica total del sistema es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas exteriores y de las de rozamiento*. Por consiguiente, la energía mecánica total del sistema es una magnitud física cuya variación depende de las fuerzas exteriores y de las de rozamiento. La energía de un sistema mecánico no aislado aumenta, si la suma de los trabajos de las fuerzas exteriores y de las de rozamiento es positiva, y disminuye, si esta suma es negativa. Observemos que el trabajo de las fuerzas de rozamiento siempre es negativo, ya que las fuerzas de rozamiento, para cada punto material, van en sentido contrario a la velocidad, es decir, en sentido contrario al desplazamiento. Así tenemos que la fuerza de rozamiento siempre acarrea una disminución de la energía mecánica total del sistema.

§ 29. Representación gráfica de la energía. La energía potencial de un cuerpo de peso P elevado sobre la superficie de la Tierra a la altura h, es

$$E_p = Ph = mgh, \qquad (1)$$

donde m es la masa del cuerpo.

Representemos gráficamente la dependencia de E_p respecto a h tomando como abscisas los valores de h, y como ordenadas, los de

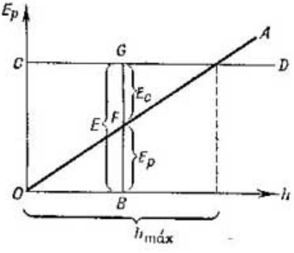


Fig. 63. La energía potencial de un cuerpo que se eleva, viene representada por la recta OA.

E_p. Entonces, según la fórmula (1), la dependencia de E_p respecto a h viene representada por la recta OA (fig. 63), que pasa por el origen de coordenadas, formando con el eje de abscisas un ángulo tanto mayor, cuanto mayor sea el peso del cuerpo P. Supongamos que el proceso que estamos examinando es el del lanzamiento vertical hacia arriba de una piedra de peso $P = mg$. Si despreciamos la resistencia del aire, se puede considerar que el movimiento de la piedra se efectúa sin la participación de trabajos exteriores. Entonces, la energía total de la piedra

$$E = E_c + E_p \tag{2}$$

es constante. Gráficamente se representará por la recta *CD* paralela al eje de abscisas. Como la energía cinética $E_c \gg 0$, según la (2), el valor máximo posible de la energía potencial será $E_p = E$ (toda la energía ha pasado a ser potencial). De aquí que la máxima altura de elevación de la piedra $h_{máx}$, la determine el punto en que se cortan las rectas *OA* y *CD*. El movimiento de la piedra será posible solamente para los valores de h comprendidos entre cero y $h_{máx}$. Para un valor determinado de h comprendido en estos límites, el segmento *BF* representará la energía potencial de la piedra y el *FG*, la energía cinética. El diagrama demuestra con bastante claridad que con la elevación de la piedra (h aumenta), aumenta la energía potencial E_p y disminuye la cinética E_c; y, viceversa, con el descenso de la piedra (h disminuye), disminuye E_p y aumenta E_c. La suma de sus valores $E_p + E_c$ siempre permanece constante.

La altura máxima de elevación de la piedra, $h_{máx}$, vendrá determinada por la energía total:

$$h_{máx} = \frac{E}{mg}. \tag{3}$$

La energía cinética para una altura $h < h_{máx}$, representada por el segmento *FG*, será:

$$E_c = E - E_p = mgh_{máx} - mgh. \tag{4}$$

Designando por v la velocidad que la piedra tiene a la altura h, tenemos que $E_c = \frac{mv^2}{2}$; y según la (4):

$$\frac{mv^2}{2} = mgh_{máx} - mgh, \quad \text{de donde} \quad v = \sqrt{2g\,(h_{máx} - h)}. \tag{5}$$

Al elevar la piedra, esta velocidad va dirigida hacia arriba, al descender, irá hacia abajo.

Esta misma velocidad se puede expresar en función de la velocidad inicial de la piedra, v_0, entonces

$$E_c = E - E_p = \frac{mv_0^2}{2} - mgh, \quad \text{de donde} \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - mgh,$$

y, por consiguiente,

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \tag{6}$$

La misma fig. 63 representa, además, la relación entre las energías en el caso de resbalamiento sin rozamiento de un cuerpo pesado P sobre un plano inclinado. Sin embargo, en el caso del plano inclinado, como variable independiente podemos elegir no solamente h, sino también, por ejemplo, el segmento l (fig. 64) medido en la base del plano inclinado a partir de su punto inferior. Debido a que $h = l \cdot \text{tg}\alpha$, donde α es el ángulo de inclinación del plano respecto al horizonte, la energía potencial, en función de l, será:

$$E_p = mg \cdot \text{tg}\,\alpha \cdot l.$$

De esta manera tenemos que, gráficamente, E_p también se representa en función de l, mediante una recta que pasa por el origen de coordenadas, pero su inclinación no será la misma que en la fig. 63

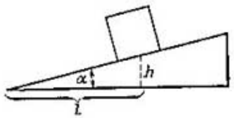


Fig. 64. Un cuerpo pesado sobre un plano inclinado.

Esta misma manera de representar la energía se puede utilizar también para el caso de resbalamiento sin rozamiento de un cuerpo sólido por una superficie de perfil arbitrario. Sea un cuerpo que resbala sin rozamiento por la montaña cuyo perfil se representa en la fig. 65, *a*. En este caso, la energía potencial E_p como función de la distancia l medida en la base de la montaña, se representará por la

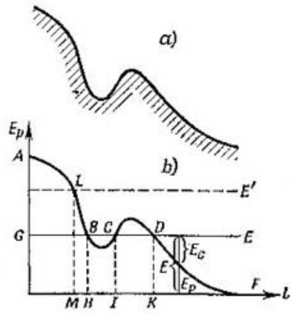


Fig. 65. La energía potencial de un cuerpo que resbala por la pendiente de una montaña, viene representada por la curva *ABCDF*.

curva *ABCDF* (fig. 65, *b*). A los lugares de subida más empinada de la montaña les corresponde una subida más empinada de la curva de la fig. 65, *b*, y al hoyo de la montaña le corresponde un «hoyo potencial» de la curva *ABCDF*. Supongamos que la energía total E del cuerpo se representa por la curva *GE*. Basándonos en la relación $E_p \leqq E$, de la fig. 65, *b* se ve claramente que, en este caso l puede tener los valores comprendidos entre los puntos H e I, o entre el punto K y el infinito. Esto significa que el cuerpo puede, con este valor de E, resbalar por la pendiente *DF* de la montaña, o desplazarse por el interior del hoyo *BC*. Si se encuentra en el hoyo, la barrera *CD* le impedirá salir del mismo. La condición de equilibrio del cuerpo reside en tener el mínimo (absoluto o relativo) de energía potencial.

Si el valor de la energía total es E', representado por la recta que pasa por el punto L, el cuerpo resbalará por toda la pendiente de la montaña entre los puntos L y el infinito. La energía cinética para cada valor de l la determinará el segmento comprendido entre la recta que representa la energía total, y la curva que representa la energía potencial.

Como último ejemplo veamos el movimiento de un cuerpo de masa m fijado a un resorte. Al desplazarse el cuerpo una distancia s, el resorte se comprimirá ($s < 0$) o se extenderá ($s > 0$), y como resultado, surgirá una energía potencial

$$E_p = \frac{ks^2}{2}, \qquad (7)$$

donde k es la rigidez del resorte. La energía potencial E_p como función del desplazamiento s, vendrá representada por una parábola (fig. 66). Si la energía total $E = E_p + E_c$ viene representada por la recta FG, la energía potencial

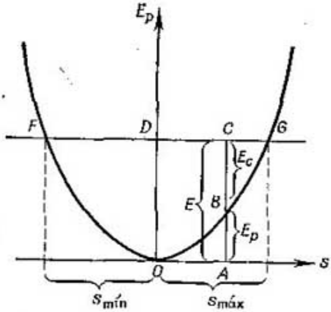


Fig. 66. La energía potencial de un resorte deformado la representa la parábola FOG.

para un valor dado de s se representará por el segmento AB, y la energía cinética del cuerpo, por el segmento BC. Los posibles valores del desplazamiento s estarán comprendidos entre $s_{máx}$ y $s_{mín}$, determinados por los segmentos DG y DF. Como la parábola es simétrica tenemos que $s_{mín} = - s_{máx}$. De aquí se deduce que el cuerpo realiza una oscilación alrededor de la posición de equilibrio, posición determinada por el valor $s = 0$. Su energía cinética y, por consiguiente, su velocidad adquieren el máximo valor al pasar por la posición de equilibrio, y el valor mínimo (igual a cero) en las desviaciones máximas. La energía cinética para cierto valor de s será

$$E_c = E - E_p = E - \frac{ks^2}{2};$$

la energía total es $E = \frac{ks_{máx}^2}{2}$, de donde

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{ks_{máx}^2}{2} - \frac{ks^2}{2};$$

y de aquí obtenemos el valor de la velocidad del cuerpo en función del desplazamiento s:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(s_{máx}^2 - s^2)}. \qquad (8)$$

§ 30. Fórmulas de las dimensiones. El material estudiado en los párrafos anteriores nos permite plantear la cuestión *de las dimensiones de las magnitudes físicas y de las fórmulas de las dimensiones.*

Hasta ahora, la unidad de medición de cualquier magnitud física la hemos establecido fundándonos en la relación de esta magnitud con otras, para las cuales las unidades de medición eran ya conocidas, suponiendo, en la fórmula correspondiente, que el coeficiente de proporcionalidad era igual a la unidad. De esta manera se ha establecido un sistema determinado de unidades relacionado con una elección determinada *de magnitudes fundamentales* y sus unidades de medición. Así, en el sistema *CGS*, como magnitudes físicas fundamentales se han elegido la longitud, el tiempo y la masa, y como unidades de medición correspondientes a ellas, el centímetro, el segundo y el gramo respectivamente. Sobre la posibilidad de elección de otras unidades fundamentales, ya hemos hablado en el § 3.

Elegidas las magnitudes físicas fundamentales, se pueden establecer distintas unidades, y, por consiguiente, surge la pregunta de cómo se relacionan las unidades derivadas con las unidades de las magnitudes fundamentales. Detengámonos en los sistemas en donde por magnitudes fundamentales se han elegido la longitud, el tiempo y la masa, y designemos sus unidades de medición por L, T y M respectivamente.

Si la unidad derivada A varía proporcionalmente al exponente potencial p de la unidad de longitud L, al q de la unidad de masa M y al r de la unidad de tiempo T, se dice que la unidad A tiene la dimensión p respecto a la unidad de longitud, q respecto a la de masa, y r respecto a la unidad de tiempo. Esta dependencia de la unidad A respecto a la de las magnitudes fundamentales, se expresa mediante una fórmula simbólica (fórmula de dimensiones):

$$[A]=L^p\cdot M^q\cdot T^r. \tag{1}$$

Por ejemplo, si la fórmula de las dimensiones de una unidad determinada A tiene la forma de

$$[A]=\frac{ML^2}{T^2},$$

que también se puede escribir

$$[A]=ML^2T^{-2},$$

esto significa que esta unidad derivada A cambia directamente proporcional a la unidad de masa y al cuadrado de la unidad de longitud e inversamente proporcional al cuadrado de la unidad de tiempo. Por ejemplo, si la unidad de masa la aumentamos en 1000 veces, la de longitud en 100 veces y la de tiempo en 60 veces, la unidad derivada A que examinamos aumentará en $\frac{1000\cdot 100^2}{60^2}$ veces, es decir, en $2{,}78\cdot 10^3$ veces.

Si la unidad derivada es independiente de alguna de las unidades fundamentales, se dice que es de dimensión cero (nula) respecto a esta unidad fundamental.

El saber las dimensiones de las magnitudes físicas es esencial, y no solamente porque permite calcular fácilmente cómo varía la unidad de medición de la magnitud dada al variar las de las magnitudes fundamentales, sino que además, al comprobar las dimensiones de las magnitudes nos permite controlar la exactitud de los cálculos. Este control se basa, ante todo, en el siguiente axioma: *sumar, restar y relacionar con el signo de igualdad, se puede hacer solamente con magnitudes de una misma dimensión.*

Efectivamente, no se puede sumar, por ejemplo, una masa con una longitud, ni afirmar que el área de una figura puede ser igual a la longitud de un segmento, etc.

Además, se puede decir que *el grado de una potencia puede ser solamente un número, es decir, una magnitud sin dimensiones.*

Determinemos las dimensiones de una serie de magnitudes físicas ya conocidas.

Dimensiones de la velocidad: partiendo de la relación $v = \frac{s}{t}$, vemos que la unidad de velocidad es directamente proporcional a la de longitud e inversamente proporcional a la de tiempo, de donde

$$[v] = L \cdot T^{-1}. \qquad (2)$$

Dimensiones de la aceleración: partiendo de la relación $w = \frac{v}{t}$, obtenemos que

$$[w] = L \cdot T^{-2}. \qquad (3)$$

Dimensiones de la fuerza: partiendo de la relación $f = mw$ y utilizando las dimensiones ya halladas de la aceleración w, obtenemos

$$[f] = MLT^{-2}. \qquad (4)$$

Dimensiones del trabajo: partiendo de la relación $A = fs$, obtenemos

$$[A] = ML^2T^{-2}. \qquad (5)$$

Las mismas dimensiones tiene la energía.

Dimensiones de la potencia: partiendo de la relación $W = \frac{A}{t}$, obtenemos

$$[W] = ML^2T^{-3}. \qquad (6)$$

No obstante, hay magnitudes físicas cuyas unidades de medición no dependen de las unidades de longitud, tiempo ni masa. Por ejemplo, el ángulo medido mediante la relación de la longitud del arco a la del radio, tiene dimensión cero respecto a las tres unidades fundamentales L, M y T. Para medir el ángulo, se elige por unidad el ángulo central cuya longitud de arco es igual al radio. Esta unidad de medición del ángulo se denomina *radián* (radiante o radial), y es la misma para todos los sistemas. No obstante, los ángulos se miden, además, en grados; en este caso, como unidad de medición del ángulo se ha tomado un ángulo central cuya longitud de arco es igual a $\frac{1}{360}$ parte de la longitud de la circunferencia entera. Por eso, para la univocación de valores, se puede incluir en la fórmula de las dimensiones, el símbolo de la unidad angular*). Designemos este símbolo con la letra Φ. En las fórmulas de las dimensiones de la velocidad, aceleración, fuerza, etc., arriba indicadas, no debe entrar este símbolo, ya que todas estas magnitudes son de dimensión cero respecto al ángulo. Pero si nosotros queremos escribir la dimensión de la velocidad angular $\omega = \frac{\varphi}{t}$, en ésta se puede introducir el símbolo Φ, ya que la unidad de la velocidad angular depende de la unidad en que medimos el ángulo; de esta manera tenemos que

$$]\omega] = \Phi \cdot T^{-1}.$$

Sin embargo, como se ha establecido indicar la dimensión solamente respecto a las unidades de longitud, tiempo y masa, se suele escribir:

$$[\omega] = T^{-1}. \tag{7}$$

De la misma manera obtenemos la dimensión de la aceleración angular

$$[\beta] = T^{-2}. \tag{8}$$

Del examen de las dimensiones de las diferentes magnitudes, a veces se puede indicar el carácter exacto de su comportamiento, si se conoce de antemano su forma aproximada. Por ejemplo, es natural suponer que la velocidad v adquirida por una piedra que cae libremente cerca de la superficie terrestre, deberá ser tanto mayor cuanto mayor sea la altura de la caída h y cuanto mayor sea la aceleración de la gravedad g.

De esta manera, suponiendo que v debe ser proporcional a g y a h elevados a ciertas potencias n_1 y n_2, obtenemos que

$$v = k \cdot g^{n_1} \cdot h^{n_2},$$

donde k es un coeficiente numérico. La dimensión de la velocidad es $[v] = L \cdot T^{-1}$, por consiguiente tal debe ser también la dimensión

---

*) Entre las magnitudes físicas de dimensión cero respecto a la longitud, tiempo y masa, se puede indicar también la temperatura.

de $g^{n_1} \cdot h^{n_2}$. Pero $[g] = LT^{-1}$ y $([h] = L$. De aquí que para que la dimensión del tiempo en ambas expresiones sea la misma, debe realizarse la condición de que $n_1 = \frac{1}{2}$. Pero si $n_1 = \frac{1}{2}$, n_2 también tendrá que ser igual a $\frac{1}{2}$, ya que de lo contrario, no coincidirían las dimensiones de longitud. Por consiguiente vemos que la exigencia de que sean iguales las dimensiones de las magnitudes relacionadas con el signo de igualdad, se cumplirá siendo $n_1 = n_2 = \frac{1}{2}$, es decir:

$$v = k\,(gh)^{1/2} = k\sqrt{gh}.$$

Efectivamente, de la fórmula del movimiento uniformemente acelerado (§ 7), tenemos que

$$v = \sqrt{2gh} \cong 1{,}41\sqrt{gh}.$$

§ 31. Límites de aplicación de la mecánica clásica. Como ya se ha indicado en el § 4, la mecánica clásica se puede aplicar solamente a los cuerpos macroscópicos, es decir, a los cuerpos que constan de gran cantidad de átomos y que se desplazan a velocidades pequeñas respecto a la de la luz. Como la velocidad de la luz es aproximadamente igual a 300 000 km/s, la mecánica clásica es aplicable a todos los cuerpos habituales que se desplazan a las velocidades que prácticamente podemos alcanzar. Sin embargo, observaciones extremadamente exactas sobre ciertos cuerpos celestes (sobre el planeta Mercurio cuya velocidad de traslación por la órbita alrededor del Sol llega a ser de 100 km/s), nos permiten observar cierta discordancia con las deducciones de la mecánica clásica. Estas divergencias se explican mediante la mecánica de la teoría de la relatividad, y se perciben claramente al observar el comportamiento de los átomos, electrones y otras partículas elementales.

La mecánica de grandes velocidades, es decir, de velocidades comparables con la de la luz, se basa en la teoría de la relatividad.

La teoría de la relatividad, como toda teoría que rompe con los viejos conceptos, ha planteado una serie de importantes cuestiones de metodología que hay que resolver. Muchos físicos y filósofos burgueses han intentado utilizar la teoría de la relatividad para fundamentar falsos conceptos idealistas, en particular del relativismo filosófico. Realmente, el contenido de la teoría de la relatividad de ninguna de las maneras nos conduce al relativismo filosófico. La teoría de la relatividad estudia principalmente los fenómenos que se revelan a las velocidades próximas a la de la luz, que existen objetivamente y, por lo tanto, independientemente de nuestra voluntad y, en este sentido, no son «relativos». Lenin, como ya hemos indicado en el § 4, señaló que la nueva física (sobreentendiendo la teoría de la relatividad) nos daba un calco de los movimientos *reales* enormemente rápidos, mientras que la vieja mecánica clásica nos presentaba un calco de los movimientos lentos.

El contenido de la teoría de la relatividad lo analizaremos más detenidamente en el t. III, aquí solamente nos detendremos en algunas de sus consecuencias y las utilizaremos para determinar los límites de aplicación de la mecánica clásica. Empecemos con el análisis de algunas consecuencias cinemáticas de esta teoría. Sea en un sistema de referencia S (fig. 67) un cuerpo m que se desplaza a la

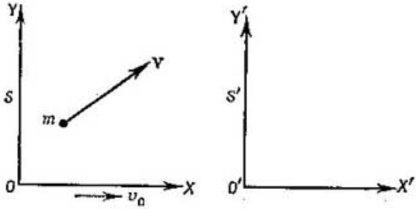


Fig. 67. El sistema S se desplaza a la velocidad v_0 respecto al sistema S'.

velocidad $\mathbf{v}$ respecto al sistema de coordenadas OXY, invariablemente relacionado con el sistema de referencia S. Sea un segundo sistema de referencia S' con su sistema propio de coordenadas $O'X'Y'$ relacionado invariablemente con él, cuyos ejes $O'X'$ y $O'Y'$ consideraremos paralelos a los ejes OX y OY. Supongamos que el sistema S se desplaza respecto al sistema S' en la dirección positiva del eje OX a la velocidad v_0.

En el sistema S un cuerpo m se mueve a la velocidad $\mathbf{v}$, cuyas componentes según los ejes de coordenadas son v_x y v_y. En el sistema S', la velocidad del cuerpo será otra, ya que el sistema S se desplaza respecto al S' a la velocidad v_0.

Según *las concepciones clásicas*, las componentes de las velocidades del cuerpo m según los ejes $O'X'$ y $O'Y'$ del sistema S' son

$$v'_x = v_x + v_0, \quad v'_y = v_y. \tag{1}$$

Estas fórmulas representan la regla habitual de la suma de velocidades.

Según la teoría de la relatividad, la regla de la suma de velocidades es otra, a saber:

$$v'_x = \frac{v_x + v_0}{1 + \frac{v_x v_0}{c^2}}, \qquad v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x v_0}{c^2}}, \tag{2}$$

donde c es la velocidad de la luz. Es fácil comprobar que cuando las velocidades v_0 y v_x son pequeñas respecto a la de la luz, las fórmulas de la teoría de la relatividad (2) pasan a ser iguales a las fórmulas clásicas de la suma de velocidades (1).

Comparemos los resultados que se obtienen según las fórmulas (1) y (2) para unos cuantos casos concretos.

Supongamos que en la cabina de un avión que vuela sobre la Tierra a la velocidad $v_0 = 360$ km/h $= 100$ m/s, se efectúa un disparo según la dirección del vuelo del avión, siendo la velocidad de la bala respecto al avión $v_x = 1000$ m/s. Entonces, según la mecánica clásica, la velocidad de la bala respecto a la Tierra es de

$$v'_x = v_x + v_0 = 100 \text{ m/s} + 1000 \text{ m/s} = 1100 \text{ m/s}.$$

Según la primera fórmula (2) de la teoría de la relatividad:

$$v'_x = \frac{v_x + v_0}{1 + \frac{v_x v_0}{c^2}} = \frac{1100}{1 + \frac{1000 \cdot 100}{(3 \cdot 10^8)^2}} \text{ m/s} = \frac{1100}{1 + 1{,}1 \cdot 10^{-12}} \text{ m/s},$$

o aproximadamente

$$v'_x = 1100\,(1 - 1{,}1 \cdot 10^{-12}) \text{ m/s},$$

de donde se ve que la teoría de la relatividad, en este caso, nos da un resultado que se diferencia del de la clásica aproximadamente en una 10^{-12} parte de la velocidad total. En otras palabras, los resultados de la teoría clásica y los de la teoría de la relatividad, en este caso, prácticamente coinciden.

Si cada una de las velocidades componentes v_0 y v_x es igual a la mitad de la de la luz, c, la velocidad total, según la teoría de la relatividad, será

$$v'_x = \frac{v_x + v_0}{1 + \frac{v_x v_0}{c^2}} = \frac{\frac{1}{2} c + \frac{1}{2} c}{1 + \frac{1}{4} \frac{c^2}{c^2}} = \frac{4}{5} c,$$

en vez de c, como resulta según la fórmula clásica (1). Aquí ya se nota la diferencia de resultados entre las dos teorías. Esta diferencia es mucho mayor si, por ejemplo, cada una de las componentes de las velocidades las suponemos igual a $0{,}9\ c$.

Según la teoría de la relatividad, *la velocidad nunca puede ser mayor que la de la luz en el vacío*. Según las fórmulas (2) obtenemos una velocidad resultante que no es mayor que la velocidad de la luz incluso en el caso de que cada una de las componentes se aproxime cuanto se quiera a la de la luz.

Es importante señalar que, según las fórmulas de la teoría de la relatividad (2), en el sistema de referencia S' varía no sólo la componente v_x de la velocidad dirigida en el sentido del movimiento del sistema S, sino que también varía la componente v_y normal a la velocidad v_0 del sistema S. Según las fórmulas clásicas, v_y es la misma para ambos sistemas. Si las velocidades v_0 y v_x son pequeñas respecto a la de la luz, c, la influencia de v_0 sobre la componente v_y es muy pequeña.

Efectivamente, designemos $\frac{v_0}{c} = \beta$ y $\frac{v_x}{c} = \beta'$; entonces las dos magnitudes β y β' son pequeñas en comparación con la unidad, y la fórmula (2) se puede escribir con valor aproximado:

$$\left.\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x+v_0}{1+\beta\beta'} \cong (v_x+v_0)(1-\beta\beta'), \\ v'_y &= v_y\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\beta'} \cong v_y\left(1-\beta\beta'-\frac{1}{2}\beta^2\right); \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

de esta manera tenemos que el valor de v'_x se aproxima mucho al de $v_x + v_0$, y el de v'_y se diferencia del de v_y solamente en el pequeño miembro de segundo grado respecto a las magnitudes de orden β y β'.

La segunda consecuencia importante, que nosotros vamos a examinar, de la teoría de la relatividad, se reduce a que en el sistema de referencia respecto al cual el cuerpo se desplaza a la velocidad v, la masa de este cuerpo es mayor que en el sistema de referencia respecto al cual el cuerpo está en reposo, a saber:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{3}$$

donde m es la masa del cuerpo en el sistema de referencia respecto al cual se mueve; m_0, la masa en el sistema respecto al cual está en reposo (*masa en reposo*), y la magnitud $\beta = \frac{v}{c}$.

La variación de la masa según la fórmula (3) será muy pequeña mientras la velocidad v lo sea respecto a la de la luz, pero se hace grande cuando la velocidad v es comparable con ésta. Al aproximarse la velocidad v a la c, la magnitud $\beta \to 1$, y la masa m, según

Tabla 1

La masa en función de la velocidad

β	$\frac{m}{m_0}$	β	$\frac{m}{m_0}$
0,005	1,00001	0,90	2,2941
0,010	1,00005	0,95	3,2025
0,10	1,00504	0,98	5,0252
0,50	1,1547	0,99	7,0888
0,80	1,6666	0,995	10,0125
		0,9995	31,6268

la fórmula (3), aumenta indefinidamente. De esto se deduce que si el cuerpo se desplaza con una aceleración continua bajo la acción de una fuerza, su masa aumenta, el trabajo que hay que realizar para acelerar más el cuerpo, también aumenta, y para comunicarle una velocidad igual a la de la luz, hay que realizar un trabajo infinitamente grande; de esta manera tenemos que para los cuerpos cuya masa en reposo es distinta de cero, no se puede conseguir una velocidad igual a la de la luz.

Para apreciar la influencia de la velocidad sobre la masa utilicemos la tabla I, donde se dan los valores m/m_0 para diferentes β.

De la tabla I se ve que, al principio, la masa m aumenta muy lentamente con la velocidad, y empieza a aumentar rápidamente sólo a velocidades próximas a la de la luz. Si $\beta = 0{,}01$, es decir, a la velocidad $v = 0{,}01\,c = 3\,000$ km/s, la masa m se diferencia de la de reposo m_0 solamente en un 0,005%. A la velocidad v igual a la mitad de la de la luz, c, la masa m es mayor que la de reposo m_0 aproximadamente en un 15,5%. A la velocidad de $v = 0{,}9\,c$, la masa ya es más de dos veces mayor que la masa en reposo m_0. La medición de la masa de los electrones que se desplazan a grandes velocidades (véase el t. II) confirma con exactitud la fórmula (3).

Según la dinámica de la teoría de la relatividad, la cantidad de movimiento de un cuerpo

$$K = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{4}$$

En este caso la fuerza se determina, como antes, como una magnitud física igual a la variación del vector de la cantidad de movimiento en la unidad de tiempo. La ley de la conservación de la cantidad de movimiento se cumple exactamente si la cantidad de movimiento la expresamos según la fórmula (4).

Para velocidades v pequeñas respecto a la de la luz, c, la magnitud β es pequeña en comparación con la unidad, y la fórmula (3) se puede escribir, conservando aproximadamente su valor, así:

$$m = m_0\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right). \tag{3a}$$

Multiplicando y dividiendo la ecuación de la energía cinética de un cuerpo, $E_c = \frac{m_0 v^2}{2}$, por c^2, tomará la forma:

$$E_c = \frac{1}{2}c^2 m_0 \beta^2 = c^2\left[m_0\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right) - m_0\right],$$

de donde, según la (3a):

$$E_c = c^2(m - m_0). \tag{5}$$

En la dinámica de la teoría de la relatividad se demuestra que esta fórmula (5), que hemos deducido como aproximada para los valores de $v \ll c$, en realidad es exacta para velocidades cualesquiera, por mucho que se aproximen a la de la luz. La fórmula (5) se puede escribir:

$$m = m_0 + \frac{E_c}{c^2}, \tag{5a}$$

es decir, la masa m de un cuerpo en movimiento es mayor que su masa m_0 en reposo en la magnitud E_c/c^2. Esta consecuencia permite una interpretación muy importante: podemos considerar que la masa del cuerpo ha aumentado porque en él ha surgido energía cinética, que la aparición de la energía cinética E_c va acompañada de un aumento de la masa del cuerpo en la magnitud E_c/c^2. La teoría de la relatividad generaliza esta deducción afirmando que la variación de cualquier energía en la magnitud E está relacionada con la variación de la masa en la magnitud m igual a

$$m = \frac{E}{c^2}. \tag{6}$$

Y viceversa, al variar la masa del sistema en la magnitud m, surge una cantidad de energía $E = mc^2$.

Así tenemos que a cada ergio de energía le corresponde una masa $m = \frac{1}{(3 \cdot 10^{10})^2}\, g \cong 1{,}1 \cdot 10^{-21}$ g. Como se ve, esta masa es extremadamente pequeña. Una instalación de potencia igual a 2 000 000 kW (la potencia de la central hidroeléctrica de Kúibyshev) elabora en una hora aproximadamente $7{,}2 \cdot 10^{19}$ ergios de energía, que, según la fórmula (6), corresponden a una masa de $7{,}2 \cdot 10^{19} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-21}$ g $= 8{,}0 \cdot 10^{-2}$ g, es decir, unos 0,080 g. De aquí se ve que a las cantidades de energía que técnicamente se pueden conseguir, les corresponden masas completamente despreciables. No obstante, en los procesos relacionados con la transformación de los elementos, las variaciones de las masas debidas a los cambios de energía, son ya notables (véase el t. III).

La igualdad (6) expresa la correlación general entre la energía y la masa. El sentido de esta igualdad ha sido sometido a numerosas tergiversaciones idealistas; así, por ejemplo, se ha afirmado que de ella se deduce la posibilidad de la «transformación» de la masa en energía y viceversa, o que la ley de la conservación de la energía tiene lugar solamente para la suma de las masas y energías del sistema, y que la masa y la energía, por separado, no se conservan. Todas estas deducciones son completamente falsas y en fin de cuentas llevan al divorcio del concepto de energía respecto al concepto de la materia, es decir, al idealismo. En la realidad, las magnitudes físicas de masa y energía son unas de las características más fundamentales de las formas concretas de la materia en movimiento con que opera la física. Para un sistema completamente aislado se conserva tanto su masa como su energía. La ecuación (6) señala la profunda relación mutua entre estas dos magnitudes, indica que es imposible variar una de ellas sin variar al mismo tiempo y en cantidad proporcional la otra.

Pasemos ahora a las restricciones de los conceptos de la mecánica clásica debidas *a las dimensiones de los cuerpos*. Como se ha indicado, para todos *los cuerpos macroscópicos*, es decir, para los cuerpos que constan de gran cantidad de átomos, la mecánica clásica es aplicable prácticamente con gran exactitud. Sin embargo, ciertas *partículas elementales* por separado, por ejemplo, electrones, revelan propiedades diferentes de las que en general se atribuyen a la «partícula», en el sentido que damos a esta palabra en mecánica. Por lo común, hablando de «partícula» sobreentendemos que respecto a ella se puede responder a dos preguntas: 1) ¿dónde se halla? y 2) ¿a qué velocidad se desplaza? Las respuestas a estas dos preguntas, es decir, las coordenadas de la partícula x, y, z y el vector velocidad $\mathbf{v}$ de la misma para cada instante determinan la trayectoria de la partícula y el carácter de su movimiento según esta trayectoria. Los experimentos, sin embargo, como veremos (véase el t. III), nos demuestran que el haz de electrones revela una propiedad particular (la difracción), característica, desde el punto de vista de los conceptos habituales, para la difusión de las ondas. Con respecto al proceso ondulatorio, no se puede formular la pregunta sobre el lugar donde se halla la onda, en el mismo sentido que se formula respecto a la partícula. Efectivamente, las ondas abarcan todo el espacio en que se difunden, por ejemplo, toda la superficie del mar; se puede hablar solamente de dónde se hallan las crestas (elevaciones) o los valles (depresiones) de las ondas, teniendo en cuenta que para las olas de la superficie del mar, serán familias de curvas y no puntos determinados con tres coordenadas. El hecho experimentalmente puesto de manifiesto de que el electrón (lo mismo que cualquiera otra partícula elemental) no es «partícula» en el sentido habitual de la palabra, nos lleva a la deducción de que los conceptos que se aplican a la partícula, no se pueden aplicar intactos a los electrones. El análisis de los datos experimentales realizado *por la mecánica cuántica* demuestra que la indicación de las coordenadas del electrón, x, y y z, (respuesta a la pregunta de dónde se halla el electrón) y al mismo tiempo de su velocidad $\mathbf{v}$ (respuesta a la pregunta de a qué velocidad y en qué sentido se desplaza éste) es cosa que no se puede hacer más que con cierto grado de aproximación. Cuanto menor sea la indeterminación Δx de la coordenada del electrón x, con mayor indeterminación Δv_x se conocerá la componente de su velocidad v_x. El grado de posible aproximación lo determina la mecánica cuántica, que es precisamente la que afirma que entre las «tolerancias» Δx y Δv_x hay la relación

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geqslant \frac{h}{m}, \tag{7}$$

donde m es la masa de la partícula, y h una constante denominada *constante de Planck*, cuyo valor es:

$$h = 6{,}624 \cdot 10^{-27} \text{ ergios} \cdot \text{s}.$$

La relación (7) que, desde el punto de vista de la mecánica cuántica tiene carácter general, se denomina *principio de incertidumbre (o de indeterminación) de Heisenberg*.

El sentido físico de este principio de incertidumbre se expondrá detalladamente en el t. III. Aquí solamente señalaremos que una serie de físicos burgueses, de esta relación sacan falsas deducciones idealistas, asegurando que es imposible la descripción objetiva en el carácter de espacio-tiempo de las propiedades de los electrones. En realidad, de lo que se trata no es de la imposibilidad de describir objetivamente las propiedades de los electrones, sino de que las propiedades reales de los electrones que existen objetivamente son diferentes de las propiedades de los puntos materiales («partículas») de la mecánica clásica. El electrón (lo mismo que cualquiera otra partícula elemental) se puede considerar sólo de modo aproximado como una «partícula» de la mecánica clásica. El principio de incertidumbre indica los límites de aplicación de los conceptos de la mecánica clásica.

Debido a la pequeñez de la constante de Planck, la incertidumbre en las coordenadas y en la velocidad se refleja solamente en las partículas elementales. Empecemos por considerar una partícula de polvo de masa $m = 10^{-12}$ g y supongamos que determinamos su coordenada x con una incertidumbre del orden $\Delta x = 10^{-6}$ cm (es decir, de $0{,}01\mu$); entonces la incertidumbre en la componente de la velocidad Δv_x, según la (7), deberá ser del orden:

$$\Delta v_x \sim \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{10^{-12} \cdot 10^{-6}} \, \frac{\text{cm}}{\text{s}} \approx 10^{-8} \text{ cm/s},$$

es decir, la incertidumbre en la velocidad Δv_x es despreciable. En otras palabras, la coordenada y la velocidad de una partícula de polvo muy pequeña se puede medir prácticamente con la exactitud que se quiera; la partícula de polvo es una «partícula» en el sentido habitual de la palabra.

Veamos ahora un electrón cuya trayectoria hemos fijado de la siguiente manera: el electrón ha atravesado un diafragma por un pequeño orificio d de 0,01 cm de diámetro, y después de chocar con una pantalla fosforescente ha producido en ella un destello momentáneo (los rápidos electrones son capaces de producir esta clase de destellos, «centelleo»), cuya posición también la hemos fijado con una exactitud de 0,01 cm.

Así tenemos en este caso que, para el electrón, $\Delta x \cong 10^{-2}$ cm, de donde, según la (7), sabiendo que la masa del electrón es $m =$

$= 9 \cdot 10^{-28}$ g, obtenemos la incertidumbre en la velocidad:

$$\Delta v_x \sim \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-2}} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cong 7 \cdot 10^2 \text{ cm/s}.$$

Aquí, la incertidumbre en la velocidad, en valores absolutos, es sensible; sin embargo, si tenemos en cuenta que la velocidad del mismo electrón en esta clase de experimentos es muy considerable, del orden de 10^8 cm/s, vemos que la incertidumbre que se deduce de la relación (7), es aproximadamente de 0,001% de la velocidad. En otras palabras: en las condiciones indicadas, el electrón aún se puede considerar una «partícula», cuya posición y velocidad se pueden determinar simultánea y prácticamente con gran exactitud. Los experimentos de esta clase sirvieron al principio para revelar las propiedades de los electrones; por eso, al principio, se había creado la idea de los electrones como «partículas» a las cuales se les pueden aplicar los conceptos clásicos.

Veamos, por fin, el electrón moviéndose por el interior del átomo. Como las dimensiones del mismo átomo son magnitudes del orden de 10^{-8} cm, con esta exactitud por lo menos se debe fijar la posición del electrón:

$$\Delta x \cong 10^{-8} \text{ cm},$$

de donde, según la (7),

$$\Delta v_x \sim \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-8}} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cong 7 \cdot 10^8 \text{ cm/s}.$$

Como la misma velocidad del electrón en el átomo es una magnitud del orden de 10^8 cm/s, el resultado obtenido indica que si se ha fijado la posición del electrón en el interior del átomo, su velocidad en este caso es incierta; en otras palabras, el electrón en el interior del átomo de ninguna manera se puede considerar ya como «partícula». Efectivamente, los intentos de considerar el movimiento de los electrones en el interior de los átomos desde el punto de vista de la mecánica clásica conducen a manifiestas contradicciones. Lo mismo ocurre con otros fenómenos donde desde el punto de vista clásico habría que determinar la posición del electrón con una «precisión atómica». Todos estos fenómenos los describe exactamente la mecánica cuántica.

CAPITULO IV

Fuerzas de gravitación

§ 32. Fuerzas de gravitación. Todos los cuerpos se atraen mutuamente. Los fenómenos como la caída de los cuerpos sobre la Tierra, el movimiento de la Luna según una órbita alrededor de la Tierra, de los planetas alrededor del Sol, etc., se producen merced a las

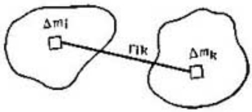


Fig. 68. Volúmenes elementales de los cuerpos que se atraen.

fuerzas gravitacionales. La ley que rige las fuerzas gravitacionales la formuló Newton en 1687. *Según la ley de la gravitación universal de Newton: dos cuerpos cualesquiera se atraen mutuamente con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.* Designando las masas de los cuerpos que se atraen por m_1 y m_2, y la distancia entre ellos por r, la fuerza de atracción será:

$$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1}$$

donde k es una constante determinada denominada *constante de gravitación*; su valor depende de las unidades de medición de la fuerza f, de la masa m y de la distancia r.

La ley de Newton, según la definición dada, es justa solamente si las dimensiones de los cuerpos son muy pequeñas respecto a las distancias entre ellos r.

En caso de que las dimensiones de los cuerpos sean comparables con la distancia que los separa, se debe dividir cada cuerpo en elementos (fig. 68); para cada par de elementos es justa la ley de la gravitación de Newton, de modo que la fuerza de atracción entre el elemento i del primer cuerpo y del elemento k del segundo será

$$\Delta f_{ik} = k\frac{\Delta m_i \cdot \Delta m_k}{r_{ik}^2}.$$

La fuerza total de acción mutua se expresa como la suma vectorial de todas las fuerzas elementales $\Delta \mathbf{f}_{ik}$:

$$\mathbf{f}=\sum_{i,\,k} \Delta \mathbf{f}_{ik}{}^{*}).$$

El resultado de este cálculo es muy diferente para los cuerpos de distintas formas; es muy sencillo para el caso de atracción de esferas homogéneas: dos esferas homogéneas se atraen con una fuerza $f = k\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, donde m_1 y m_2 son las masas de las esferas y r *la distancia entre sus centros*. Esta expresión que coincide con la fórmula (1), es justa para cualquiera que sea la distancia entre las esferas.

En los siglos XVIII y XIX muchos físicos mantenían la falsa concepción idealista de la gravitación como cierta «acción a distancia» sin ninguna función del espacio intermedio.

En realidad, cualquier cuerpo origina en el espacio de alrededor cambios, formando *un campo gravitatorio*, que representa en sí un aspecto particular de la materia (compárese con lo que se dice en el t. II sobre el cämpo electromagnético). La atracción mutua de los cuerpos es originada por la acción recíproca con sus campos gravitatorios.

De la ley de la gravitación universal se deduce, que en la superficie de la Tierra, todos los cuerpos deben caer con la misma aceleración. Efectivamente, la aceleración adquirida por un cuerpo de masa m es:

$$w=\frac{f}{m},$$

donde f es la fuerza con que el cuerpo es atraído por la Tierra.

Según la ley de Newton:

$$f=k\,\frac{mM_T}{R_T^2},$$

donde M_T es la masa de la Tierra y R_T el radio del globo terrestre, de donde

$$w=k\,\frac{mM_T}{R_T^2}\,\frac{1}{m}=k\,\frac{M_T}{R_T^2},$$

pero, como la masa de la Tierra y su radio son magnitudes constantes, obtenemos que todos los cuerpos de la superficie de la Tierra, independientemente de sus masas, caen con la misma aceleración

$$g_0=k\,\frac{M_T}{R_T^2}. \tag{2}$$

---

*) Como los elementos en que se dividen los cuerpos deben ser infinitamente pequeños, en la realidad, el problema se reduce a una integración.

Aquí se trata de la caída libre de los cuerpos sin que actúen las fuerzas de resistencia, y entre ellas la resistencia del aire. Tampoco se tiene en cuenta que la fuerza de la gravedad depende de la latitud del lugar (véase el § 23).

La fuerza con que cualquier cuerpo de masa m es atraído hacia la Tierra, depende de la altura h en que el cuerpo se halla sobre la superficie de la misma. Según la ley de la gravitación de Newton, el cuerpo es atraído hacia la Tierra con la fuerza:

$$f = k\frac{mM_T}{R_2},$$

donde R es la distancia desde el centro de la Tierra hasta el cuerpo. Como $R = R_T + h$, tenemos que

$$f = k\frac{m \cdot M_T}{(R_T + h)^2}.$$

La fuerza f es el peso P_h del cuerpo a la altura h. Designando el peso del cuerpo en la misma superficie de la Tierra por P_0 tenemos

$$P_0 = k\frac{m \cdot M_T}{R_T^2}, \quad \text{de donde} \quad \frac{P_h}{P_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2};$$

como prácticamente la altura h siempre es muy pequeña en comparación con el radio de la Tierra R_T, aproximadamente se considera que

$$\frac{P_h}{P_0} = \frac{1}{1 + 2\frac{h}{R_T}} = 1 - 2\frac{h}{R_T}.$$

El radio del globo terrestre es $R_T = 6370$ km, de donde para una montaña de 6,4 km de altura, tenemos que

$$\frac{P_h}{P_0} = 1 - \frac{2}{1000} = 1 - 0{,}002,$$

es decir, el peso del cuerpo en esta montaña se diferenciará solamente en un 0,2% de su peso al nivel del mar. Aunque la variación de las fuerzas de la gravedad con la distancia puede ser notada observando el peso del cuerpo en la superficie de la Tierra, no sirve, por su pequeñez, para la comprobación exacta de la ley de la proporcionalidad inversa de las fuerzas de la gravedad al cuadrado de la distancia entre los cuerpos. Newton estableció esta proporcionalidad observando el movimiento de la Luna. Razonaba de la siguiente manera: si la ley de la gravitación es justa en la forma en que se da en la fórmula (1), la fuerza con que la Tierra atrae a la Luna será:

$$f = k\frac{M_L M_T}{R^2},$$

donde M_L es la masa de la Luna y R su distancia hasta la Tierra. De aquí que la aceleración de la Luna en dirección a la Tierra sea

$$w_n = \frac{f}{M_L} = k\frac{M_T}{R^2}.$$

Introduciendo aquí la expresión para g_0 según la (2), obtenemos

$$w_n = g_0 \frac{R_T^2}{R^2}.$$

Esta sería la aceleración centrípeta de la Luna, si se moviera alrededor de la Tierra según una órbita circular. De las observaciones astronómicas se sabe que la distancia de la Tierra a la Luna es 60 veces mayor que el radio de la Tierra, de donde

$$w_n = \frac{g_0}{60^2} = \frac{981}{3600} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 0{,}27 \ \text{cm/s}^2.$$

Por otro lado, esta misma aceleración centrípeta se puede calcular cinemáticamente:

$$w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{RT^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

donde v es la velocidad lineal de la Luna en su órbita; T, el período de giro alrededor de la Tierra igual a 27 días 7 horas y 43 minutos, lo cual suma 2 360 580 s. Con estos datos y sabiendo que $R = 60 \cdot R_T = 60 \cdot 6370$ km, obtenemos

$$w_n = \frac{4\pi^2 \cdot 60 \cdot 6370 \cdot 10^5}{(2\,360\,580)^2} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 0{,}27 \ \text{cm/s}^2.$$

De esta manera, ambos métodos de cálculo de la aceleración centrípeta de la Luna dan resultados que coinciden, lo cual sirve para confirmar la veracidad de la fórmula (1).

El primero en medir el valor de la **constante de gravitación** k fue Cavendish en 1798 mediante una balanza de torsión. El aparato

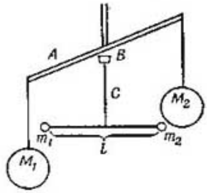


Fig. 69. Esquema del experimento de Cavendish.

que utilizó Cavendish viene representado esquemáticamente en la fig. 69. Del brazo horizontal (fleje) A iban fijas en dos varillas, dos bolas de plomo M_1 y M_2 de 158 kg de masa cada una. Debajo del fleje, en el cabezal fijo B iba sujeto un delgado hilo C del que colgaba una ligera varilla l en cuyos extremos llevaba colgadas dos esferitas de plomo m_1 y m_2. En los experimentos de Cavendish, las masas de estas esferitas eran de 730 g cada una. Al girar el fleje A, las bolas grandes se acercaban a las pequeñas y las atraían. Esta atracción se podía observar por el giro de la varilla l que llevaba las esferitas m_1 y m_2. Conociendo las propiedades elásticas del hilo C, se podía medir la fuerza de atracción y con ello determinar el valor de la constante de gravitación k. Ulteriormente se repitieron varias veces los experimentos de Cavendish. En la actualidad, para la constante k se toma el valor:

$$k = 6{,}685 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{g}\cdot\mathrm{s}^2;$$

de aquí se deduce, según la fórmula (1), que dos bolitas de 1 g de masa cada una y dispuestas de manera que la distancia de sus centros igual a 1 cm, se atraen con una fuerza de $6{,}685 \cdot 10^{-8}$ dinas.

La constante k no es simplemente un número, sino que tiene dimensiones; estas dimensiones de k las determinamos de la relación:

$$k = \frac{f \cdot r^2}{m_1 \cdot m_2}.$$

de donde

$$[k] = \frac{[f]\cdot[r^2]}{[m^2]} = \frac{MLT^{-2}\cdot L^2}{M^2} = L^3M^{-1}T^{-2},$$

de aquí que en el sistema CGS, k se mida en $\mathrm{cm}^3/\mathrm{g}\cdot\mathrm{s}^2$.

Estas dimensiones de la constante k las hemos obtenido estableciendo de antemano la unidad de fuerza y sus dimensiones mediante la segunda ley de Newton: $f = mw$. No obstante, se puede hacer al revés: suponer en la fórmula (1) de la ley de la gravitación universal, que la constante $k = 1$, y considerarla como magnitud sin dimensiones, pero introduciendo una nueva constante k' en la segunda ley de Newton y escribir su fórmula de la siguiente manera:

$$f = k\ mw. \tag{3}$$

Entonces, utilizando el sistema CGS, tomamos por unidad de fuerza la fuerza con que se atraen dos bolitas de 1 g de masa cada una cuando la distancia entre sus centros es igual a 1 cm. Esta unidad de fuerza es igual a $6{,}685 \cdot 10^{-8}$ dinas.

Las dimensiones de la fuerza, en este caso, se expresan así:

$$[f] = \frac{[m]\cdot[m]}{[r^2]} = M^2L^{-2},$$

en lugar de las dimensiones habituales $[f] = MLT^{-2}$. La constante k' en la segunda ley de Newton (que se puede denominar «constante dinámica») tendrá las dimensiones:

$$[k'] = \frac{[f]}{[m]\cdot[w]} = \frac{M^2L^{-2}}{MLT^{-2}} = L^{-3}MT^2,$$

y su valor numérico resultará igual a:

$$k' = \frac{1}{6{,}685 \cdot 10^{-8}}\ \frac{\mathrm{g}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{cm}^3} = 1{,}496 \cdot 10^7\ \mathrm{g}\cdot\mathrm{s}^2/\mathrm{cm}^3.$$

De esta manera, partiendo de distintas leyes podemos obtener diferentes sistemas CGS de unidades. Las dimensiones de unas mismas magnitudes físicas, pueden resultar diferentes en distintos sistemas. El sistema CGS corriente se puede denominar «dinámico», y el sistema de unidades CGS en que la unidad de fuerza y sus dimensiones se establecen basándose en la ley de la gravitación, se puede denominar «*gravitacional*» («*gravitatorio*»). En ambos sistemas, las unidades de medición de la velocidad, aceleración y de otras magnitudes cinemáticas, son iguales; pero las unidades de medición de la fuerza, de la energía, del trabajo, de la potencia, del momento de fuerzas, etc., son distintas. En mecánica se usa solamente uno de los sistemas, el «dinámico», sin embargo, en el estudio de la electricidad y del magnetismo, como veremos en el t. II, se emplean dos sistemas *CGS* diferentes, los denominados «electrostático» y «electromagnético».

Conociendo la constante k de gravitación podemos determinar la masa y la densidad de la Tierra y las de otros cuerpos celestes.

Utilizando la fórmula (2), tenemos

$$M_T = \frac{g_0 R_T^2}{k},$$

de donde, conociendo los valores numéricos de la aceleración de la gravedad g_0, del radio de la Tierra R_T y de la constante de gravitación k, determinamos directamente la masa de la Tierra, para la cual obtenemos el valor de $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{27}$ g.

La densidad media de la esfera terrestre la hallamos de la ecuación

$$\bar{d} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3},$$

de donde calculamos el valor de $\bar{d} = 5{,}5$ g/cm³.

La masa de un astro central a cuyo alrededor gira un satélite, puede determinarse de la siguiente manera. Sea M_c la masa del astro central, M_i la del satélite y R_i la distancia entre ellos. La fuerza de atracción f crea la aceleración centrípeta del satélite y es

$$f = M_i w_n,$$

de donde

$$k \cdot \frac{M_i M_c}{R_i^2} = M_i \frac{4\pi^2 R_i}{T_i^2}, \tag{4}$$

donde T_i es el período de traslación del satélite. De aquí tenemos que

$$M_c = \frac{4\pi^2}{k} \cdot \frac{R_i^3}{T_i^2},$$

es decir, sabiendo el radio de la órbita del satélite y el período de traslación, podemos determinar la masa del astro central. Así, sabiendo el radio de la órbita terrestre y la duración del año, encontramos la masa del Sol $M_S = 1{,}98 \cdot 10^{33}$ *g*.

De la fórmula (4) también se deduce que:

$$\frac{R_i^3}{T_i^2} = \frac{kM_S}{4\pi^2};$$

la magnitud de la derecha tiene valor constante para todos los satélites que giran alrededor del astro central dado. De aquí que: los cuadrados de los tiempos de traslación de los satélites (planetas) alrededor del astro central (Sol) son proporcionales a los cubos de sus distancias al astro central (Sol). Esta ley respecto a los planetas fue establecida por Kepler y se denomina *tercera ley de Kepler*.

§ 33. Masa de inercia y masa de gravitación. Trabajo de la fuerza de la gravedad. La magnitud física de masa entra en dos leyes fundamentales e independientes una de la otra: en la segunda ley de Newton, $f = mw$, y en la ley de la gravitación universal,

$$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

En la segunda ley de Newton, la masa caracteriza las propiedades de inercia de los cuerpos. En la ley de la gravitación universal, la masa caracteriza la capacidad de los cuerpos de crear campos de gravitación y de estar sometidos a la acción de estos campos.

Se puede plantear la pregunta de si las masas que figuran en ambas leyes son una misma magnitud o dos magnitudes diferentes de algún modo relacionadas entre sí. De esta manera precisamente han surgido en el transcurso de la historia los conceptos de la masa *de inercia*, que figura en la segunda ley de Newton, y de la masa *de gravitación*, que figura en la ley de la gravitación universal. La experiencia nos demuestra que ambas masas, si es que en general hay algún sentido en distinguirlas, son proporcionales.

Ante todo, esto se deduce del hecho de que la aceleración g_0 del cuerpo que cae libremente, es igual para todos los cuerpos. La medición exacta de la aceleración g_0 de un cuerpo que cae libremente, es difícil de realizar en la realidad; pero la observación de las oscilaciones de los péndulos permite medir g_0 con gran exactitud. Ya el mismo Newton indicó que la proporcionalidad entre las masas de inercia y de gravitación se cumplía con una exactitud de $\frac{1}{1000}$. Bessel realizó experimentos con péndulos de los materiales más diferentes y llegó a la misma conclusión con una exactitud de $\frac{1}{60\,000}$. Ulteriormente se ha demostrado que la misma proporcionalidad se cumple para las sustancias radiactivas.

Con gran exactitud, la proporcionalidad entre las masas de gravitación y de inercia la demostró Eötvös en 1894 con una balanza de torsión. La idea de los experimentos de Eötvös está en lo siguiente: en la superficie de la esfera terrestre, la dirección de la fuerza de la gravedad P_φ se determina como la fuerza resultante de la atracción del cuerpo hacia el centro de la Tierra y de la fuerza de inercia centrífuga (véase el § 23). La primera fuerza se debe a la masa de gravitación del cuerpo, la segunda a su masa de inercia. Si estas dos masas no son proporcionales, la dirección de la fuerza de la gravedad P_φ deberá divergir en los distintos cuerpos. Eötvös fijó en un extremo del fleje de la balanza de torsión una masa determinada de platino, y en el otro, el cuerpo a experimentar. El instrumento se orientaba de manera que el fleje tuviese una dirección determinada, por ejemplo, la de oriente hacia occidente. Después se hacía girar el instrumento en 180°.

Al girarlo, en el caso de que las masas de inercia y de gravitación no fuesen proporcionales, debería surgir un par de fuerzas y el fleje debería girar un poco. En la realidad no se observó ninguna desviación que pasara de $6 \cdot 10^{-4}$ segundos de arco; las pequeñísimas desviaciones observadas tenían carácter casual. La proporcionalidad de ambas masas se observó con una exactitud de 1/200 000 000.

De esta manera, de todos los experimentos se deduce *la imposibilidad de diferenciar las masas de gravitación y de inercia: los experimentos demuestran que operamos con diferentes manifestaciones de una misma magnitud física, a saber, de la masa*. Le teoría de la gravitación de Einstein ha confirmado este punto de vista. De esta manera, en la actualidad, la cuestión de la existencia de dos magnitudes físicas supuestamente diferentes: de la masa de inercia y de la masa de gravitación, solamente es de interés histórico.

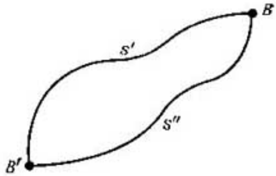


Fig. 70. El trabajo de las fuerzas de la gravedad no depende de la forma de los trayectos s' y s''.

Como se ha indicado en el § 32, cualquier cuerpo origina un campo de gravitación en el espacio que lo rodea. En particular, uno de estos campos lo crea la esfera terrestre. Como las fuerzas de gravitación originadas por la esfera terrestre se denominan fuerzas de la gravedad, el campo que circunda a la Tierra, se puede llamar también *campo (de las fuerzas) de la gravedad*. Cerca de la superficie de la Tierra prácticamente la fuerza de la gravedad es constante; en este caso se dice que el campo de la gravedad es homogéneo.

Como se ha indicado en el § 27, *el trabajo en el campo de la gravedad no depende de la forma ni de la longitud del trayecto, sino solamente de la diferencia de alturas entre el punto inicial y el final del movimiento.*

Si del punto B pasamos al B' primeramente siguiendo el trayecto s' y, después, el s'' (fig. 70), los trabajos A' y A'' realizados en estos dos casos, según lo dicho, deben ser iguales: $A' = A''$; al desplazarse desde el punto B' al B siguiendo el trayecto s'' se efectuará un trabajo $A''' = -A''$. Por consiguiente, si recorremos el trayecto cerrado pasando primeramente del punto B al B' por el trayecto s' y después volvemos del punto B' al B por el trayecto s'', en total se realizará el trabajo:

$$A_{BB'B} = A' + A''' = A' - A'' = 0.$$

El mismo resultado se obtiene si examinamos la variación de la energía potencial, que tampoco varía en el movimiento de ida y vuelta. Por lo tanto, *al realizar un movimiento por el campo de la gravedad según un trayecto cerrado, el trabajo total es igual a cero.*

La deducción sacada de que el trabajo depende solamente de la posición de los puntos inicial y final del trayecto y no depende de la forma de éste, es justa también para un campo heterogéneo de la gravedad.

Examinando dos cuerpos de masa m_1 y m_2 que se atraen según la ley de la gravitación universal:

$$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

se puede demostrar que la energía potencial de un cuerpo respecto al otro será

$$E_p = -k\frac{m_1 m_2}{r}. \qquad (1)$$

El signo menos es debido a que la energía potencial de dos cuerpos distanciados infinitamente uno del otro ($r = \infty$) se ha convenido en considerarla igual a cero; pero en este caso la energía potencial tiene el valor máximo, ya que para separar los cuerpos hay que realizar un trabajo positivo con fuerzas exteriores, y al acercarse los cuerpos su energía potencial disminuye, por lo tanto, adquiere valores menores de cero, es decir, negativos.

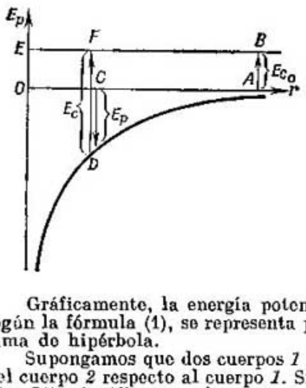


Fig. 71. La energía potencial de dos cuerpos que se atraen según la ley de Newton, viene representada por una hipérbola.

Gráficamente, la energía potencial de los cuerpos gravitatorios, expresada según la fórmula (1), se representa por la curva de la fig. 71. Esta curva es una rama de hipérbola.

Supongamos que dos cuerpos *1* y *2* se atraen. Examinaremos el movimiento del cuerpo *2* respecto al cuerpo *1*. Si la energía total de los cuerpos es igual a E (fig. 71), significa que el cuerpo *2*, cuando se hallaba a una distancia infinitamente grande del cuerpo *1*, se desplazaba a la velocidad v_0 determinada por la igualdad:

$$E_{c_0} = \frac{m_2 v_0^2}{2} = E, \quad \text{de donde } v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m_2}}.$$

La energía cinética E_{c_0} viene representada por el segmento AB. Al disminuir r (el cuerpo *2* se acerca al *1*), la energía potencial empieza a disminuir y adquiere valor negativo; la energía cinética aumenta y al mismo tiempo aumenta la velocidad del cuerpo *2*. Para una distancia determinada r representada por el segmento OC, la energía cinética viene representada por el segmento DF; este segmento va dirigido desde abajo hacia arriba, lo cual corresponde al signo positivo de la energía cinética. La energía potencial la representa el segmento CD. Este segmento va dirigido hacia abajo, lo cual corresponde al valor negativo de la energía potencial.

La suma de las energías cinética y potencial $E_c + E_p$ durante todo el tiempo permanece constante e igual a la energía total E:

$$E_c + E_p = E. \tag{2}$$

Considerando el cuerpo *1* inmóvil, obtenemos que

$$E_c = \frac{m_2 v^2}{2},$$

donde v es la velocidad del segundo cuerpo respecto al primero cuando la distancia entre ellos es igual a r. Utilizando esta expresión de E_c y de las ecuaciones (1) y (2), obtenemos:

$$\frac{m_2 v^2}{2} - k\frac{m_1 m_2}{r} = E,$$

de donde

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_2} + k\frac{2m_1}{r}} = \sqrt{v_0^2 + k\frac{2m_1}{r}}. \tag{3}$$

Si el cuerpo *2*, hallándose a una distancia infinita del cuerpo *1*, tuviese la velocidad $v_0 = 0$, tendríamos que

$$v = \sqrt{k\frac{2m_1}{r}}. \tag{3a}$$

Veamos el caso de un cuerpo sólido de masa m que cae desde el infinito a la Tierra con una velocidad inicial $v_0 = 0$. Entonces, según la fórmula (3a), al alcanzar la superficie de la Tierra, tendrá la velocidad

$$v = \sqrt{k\frac{2M_T}{R_T}},$$

donde M_T es la masa de la Tierra y R_T su radio. Colocando aquí $k = 6{,}685 \times 10^{-8}$ cm/g·s², $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{27}$ g, y $R_T = 6{,}37 \cdot 10^8$ cm, obtenemos:

$$v = \sqrt{6{,}685 \cdot 10^{-8}\frac{2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{27}}{6{,}37 \cdot 10^8}}\ \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 11{,}2 \cdot 10^5\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Así tenemos que un cuerpo que cae sobre la superficie de la Tiera desde el infinito, debido a la atracción de la Tierra, alcanza la velocidad de 11,2 km/s. Y viceversa, para que un cuerpo lanzado desde la superficie de la Tierra verticalmente hacia arriba no caiga otra vez a la Tierra (despreciando la resistencia del aire), sino que se aleje al infinito, hay que comunicarle una velocidad de 11,2 km/s. Esta velocidad se denomina *velocidad de escape o velocidad de liberación.*

CAPITULO V

Movimiento del sólido

§ 34. Movimiento del sólido. El movimiento de un cuerpo sólido viene determinado por las fuerzas *exteriores* aplicadas al mismo. En el cuerpo sólido son muy característicos sobre todo los movimientos de traslación y de rotación (véase el § 12). En el movimiento de traslación, todos los puntos del sólido se desplazan a igual velocidad $\mathbf{v}$ y con igual aceleración $\mathbf{w}$. Si mentalmente dividimos el sólido en elementos de masa Δm_i, para cada uno de estos elementos, según la segunda ley de Newton, tendremos la relación:

$$\Delta m_i \cdot \mathbf{w} = \mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i, \tag{1}$$

donde $\mathbf{f}_i$ es una fuerza interna (es decir, procedente de otros elementos del mismo cuerpo sólido), y $\mathbf{F}_i$ es la fuerza exterior que actúa sobre el elemento dado. Según la tercera ley de Newton, la suma de todas las fuerzas internas es igual a cero; por consiguiente, sumando las ecuaciones (1) establecidas para todos los elementos, obtenemos

$$\sum \Delta m_i \cdot \mathbf{w} = \sum \mathbf{F}_i, \quad \text{o} \quad M \cdot \mathbf{w} = \mathbf{F}, \tag{2}$$

donde $M = \Sigma \Delta m_i$ es la masa de todo el cuerpo, y $\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_i$ es la suma vectorial de todas las fuerzas exteriores. El vector $\mathbf{F}$ se denomina *vector resultante (principal) de las fuerzas exteriores.*

La ecuación (2) permite determinar la aceleración del movimiento de traslación del sólido conociendo la masa M del mismo y el vector principal $\mathbf{F}$ de las fuerzas exteriores. De esta manera tenemos que *el estudio del movimiento de traslación de un sólido se puede sustituir por el estudio del movimiento de un punto material de masa igual a la del sólido y solicitado por una fuerza igual al vector resultante de las fuerzas exteriores.*

En movimientos más complicados (no de traslación simple) los distintos puntos del sólido tienen diferentes velocidades $\mathbf{v}_i$ y aceleraciones $\mathbf{w}_i$. Sin embargo, mentalmente se puede dividir el sólido en elementos tan pequeños, que en los límites de cada uno de ellos, la velocidad y la aceleración permanezcan constantes. Entonces, para cada elemento tendremos que

$$\Delta m_i \cdot \mathbf{w}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i.$$

Sumando estas igualdades establecidas para todos los elementos del sólido y observando que tenemos de nuevo $\Sigma \mathbf{f}_i = 0$, obtenemos

$$\sum \Delta m_i \cdot \mathbf{w}_i = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}, \tag{3}$$

donde $\mathbf{F}$, como antes, es el vector resultante de las fuerzas exteriores. Pero la ecuación (3) no se puede equiparar con la (2), ya que, en el caso de la (3), las aceleraciones $\mathbf{w}_i$ son distintas para los diferentes elementos.

Introduzcamos cierta aceleración $\mathbf{w}_C$ determinada por la igualdad

$$\mathbf{w}_C = \frac{\sum \Delta m_i \cdot \mathbf{w}_i}{M}, \tag{4}$$

donde M es la masa de todo el sólido. Entonces, multiplicando ambos miembros de la ecuación (4) por M y utilizando la ecuación (3), obtenemos que

$$M \cdot \mathbf{w}_C = \mathbf{F}. \tag{5}$$

Se puede demostrar (véase lo escrito con letra menuda) que $\mathbf{w}_C$ es la aceleración de cierto punto C, cuyas coordenadas x_C, y_C y z_C se determinan mediante las coordenadas de los elementos independientes del sólido x_i, y_i y z_i de las relaciones:

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta m_i}{M}; \quad y_C = \frac{\sum y_i \Delta m_i}{M}; \quad z_C = \frac{\sum z_i \Delta m_i}{M}. \tag{6}$$

El punto C se denomina *centro de masas* (o centro de inercia). El centro de masas coincide con el centro de aplicación de la resultante de las fuerzas de la gravedad (centro de gravedad). De la ecuación (5) se deduce que *el centro de masas de un sólido se desplaza como un punto material de masa igual a la del sólido, solicitado por una fuerza igual a la del vector resultante de las fuerzas exteriores.* Si este vector resultante es igual a cero, el centro de masas está en reposo o se desplaza con movimiento rectilíneo y uniforme. Las fuerzas internas no pueden variar la velocidad del centro de masas.

Demostremos que, en realidad, el centro de masas cuyas coordenadas vienen determinadas por las ecuaciones (6), se desplaza con una aceleración que se determina de la ecuación (4). Para ello utilicemos las relaciones que indican que las proyecciones de la aceleración sobre los ejes de coordenadas vienen expresadas por las derivadas segundas respecto al tiempo de las coordenadas del punto cuya aceleración estudiamos.

Tomando las derivadas segundas de x_C, y_C y z_C, obtenemos que las proyecciones de la aceleración del centro de masas sobre los ejes de coordenadas son:

$$\left.\begin{aligned} w_{Cx} &= \frac{d^2x_C}{dt^2} = \frac{\sum \Delta m_i \frac{d^2x_i}{dt^2}}{M} = \frac{\sum \Delta m_i \cdot w_{xi}}{M}; \\ w_{Cy} &= \frac{d^2y_C}{dt^2} = \frac{\sum \Delta m_i \frac{d^2y_i}{dt^2}}{M} = \frac{\sum \Delta m_i \cdot w_{yi}}{M}; \\ w_{Cz} &= \frac{d^2z_C}{dt^2} = \frac{\sum \Delta m_i \frac{d^2z_i}{dt^2}}{M} = \frac{\sum \Delta m_i \cdot w_{zi}}{M}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

donde w_{xi}, w_{yi} y w_{zi} son las proyecciones de la aceleración del elemento i sobre los ejes de coordenadas. Como la misma aceleración $\mathbf{w}_C$ es la suma geométrica de sus componentes según los ejes, de la ecuación (7) se deduce que $\mathbf{w}_C$ coincide con la fórmula (4).

§ 35. Rotación del sólido. Momento de fuerza y momento de inercia. Al estudiar la rotación de un sólido desde el punto de vista dinámico, junto al concepto de fuerza se introduce *el concepto de momento de fuerza* y junto al concepto de masa, *el concepto de momento de inercia*. Para aclarar el sentido del concepto de momento de una

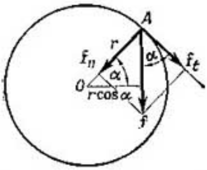


Fig. 72. Rotación del punto A según una circunferencia.

fuerza y momento de inercia examinemos primeramente el movimiento de un punto material A de masa m mantenido en una circunferencia de radio r mediante un enlace o ligadura cualquiera (fig. 72). Supongamos que sobre el punto A actúa una fuerza $\mathbf{f}$ de magnitud constante. Entonces el punto A adquiere una aceleración tangencial constante w_t determinada por la componente tangencial f_t:

$$f_t = f\cos\alpha = mw_t. \tag{1}$$

La componente normal de la fuerza $\mathbf{f}$ junto con la reacción de la ligadura crea una aceleración normal.

Introduciendo la aceleración angular $\beta = \frac{w_t}{r}$, la ecuación (1) se transforma en

$$f\cos\alpha = mr\cdot\beta;$$

multiplicando los dos miembros por r, obtenemos:

$$fr\cos\alpha = mr^2\cdot\beta. \tag{2}$$

El producto $r\cos\alpha$, brazo de la fuerza o brazo de palanca, es igual a la longitud de la perpendicular a la dirección de la fuerza trazada desde el punto O (fig. 72). La magnitud

$$M = fr\cos\alpha, \tag{3}$$

que es igual al producto de la intensidad de la fuerza f por la distancia del punto O (centro de momentos o de rotación) en la dirección de la fuerza se denomina *momento central de la fuerza (momento de la fuerza respecto al punto O).*

La magnitud

$$I = mr^2, \tag{4}$$

que es igual al producto de la masa m del punto A por el cuadrado de su distancia al punto O (centro de momentos o de rotación), se denomina *momento de inercia del punto A respecto al punto O (o momento central de inercia)*.

Utilizando los conceptos de momento de la fuerza M y de momento de inercia I podemos escribir la ecuación (2) de la siguiente manera:

$$M = I\beta. \tag{5}$$

Comparando las ecuaciones (1) y (5) vemos que la aceleración angular β está relacionada con el momento de la fuerza M y con el momento de inercia I, de la misma manera que la aceleración

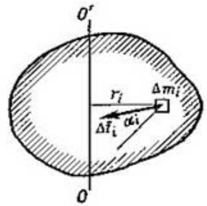


Fig. 73. Descomposición de un sólido que gira, en partes elementales.

lineal w_t está relacionada con la fuerza f_t y con la masa m del punto A. En la descripción del movimiento de rotación por medio de la aceleración angular β, el papel de fuerza lo desempeña el momento de la fuerza M, y el papel de masa m, el momento de inercia I. El punto A, solicitado por fuerzas de momentos iguales, adquiere iguales aceleraciones angulares β. Por consiguiente, *diferentes fuerzas* **f** *son equivalentes, en el sentido de la rotación que originan, si son iguales sus momentos.* Diferentes puntos materiales solicitados por iguales momentos de fuerza, adquieren iguales aceleraciones angulares, si son iguales sus momentos de inercia. De esta manera tenemos que *los puntos materiales con diferentes masas m, son equivalentes, en el sentido de la aceleración angular adquirida, si son iguales sus momentos de inercia.*

Pasemos ahora al estudio del sólido que gira alrededor de un eje fijo OO' (fig. 73).

Para caracterizar la capacidad de una fuerza de originar una rotación alrededor de un eje dado se introduce el concepto *de momento de una fuerza respecto a un eje (momento axil, axial o áxico)*. Está claro que la fuerza que actúa según una dirección que corta al eje, no puede originar ninguna rotación alrededor del mismo. También es evidente que una fuerza paralela a un eje no origina ninguna rotación alrededor del mismo. El *momento de una fuerza respecto a un eje lo origina sólo la componente de la fuerza que está en un plano perpendicular al eje.* Por eso, al elegir en el sólido un elemento pequeño de masa Δm_i, consideraremos sólo la componente de la fuerza que actúa sobre este elemento y que está en el plano perpendicular al eje de rotación OO'. Designemos esta componente por $\Delta \mathbf{f}_i$.

Supongamos que la fuerza $\Delta \mathbf{f}_i$ forma un ángulo α_i con la tangente a la trayectoria de la masa Δm_i. Consideremos que el ángulo α_i es agudo. Entonces, para este elemento se puede escribir la ecuación (2):

$$\Delta f_i r_i \cos\alpha_i = \Delta m_i r_i^2 \beta,$$

donde β es la aceleración angular del elemento.

Las mismas ecuaciones se pueden escribir para todos los demás elementos, y después sumarlos:

$$\sum_i \Delta f_i r_i \cos\alpha_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \cdot \beta;$$

la aceleración angular β es constante para todos los elementos, por lo tanto se puede sacar fuera del signo de la suma:

$$\sum_i \Delta f_i r_i \cos\alpha_i = \beta \sum_i \Delta m_i r_i^2. \tag{6}$$

La magnitud $M = \sum_i \Delta f_i r_i \cos\alpha_i$ es la suma de los momentos de las fuerzas que actúan en todos los elementos del sólido, es decir, es el momento total M de las fuerzas que actúan en el sólido respecto al eje de rotación OO'. Hay que tener en cuenta que el producto $\Delta f_i r_i \cos\alpha_i$ se ha de tomar con el signo más, si el punto de aplicación de la fuerza $\Delta \mathbf{f}_i$ gira alrededor del eje en la dirección en que actúa la fuerza $\Delta \mathbf{f}_i$, y con signo menos, en el caso contrario. La magnitud

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2, \tag{7}$$

igual a la suma de los momentos de inercia de los elementos en que hemos dividido el cuerpo, se denomina *momento de inercia de un sólido respecto a un eje dado OO'.**) Teniendo en cuenta este momento

---

*) En la realidad, los elementos de las masas deben tomarse infinitamente pequeños y entonces, la suma se sustituye por una integración, y para los momentos de inercia obtenemos la ecuación:

$$I = \int r^2\, dm.$$

Introduciendo la densidad del cuerpo ρ y teniendo en cuenta que $dm = \rho\, dV$, donde dV es el volumen elemental, tenemos que:

$$I = \int \rho r^2\, dV; \tag{7a}$$

la integración debe abarcar todo el volumen V del sólido.

total de las fuerzas M y el momento de inercia I, escribiremos la ecuación (6) de la siguiente manera:

$$M = I\beta, \tag{6a}$$

es decir, para un cuerpo sólido que gira alrededor de un eje, llegamos a la misma ecuación que para un punto material que gira alrededor de un centro [ecuación (5)].

La aceleración angular β adquirida por un sólido es:

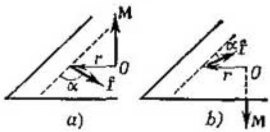
$$\beta = \frac{M}{I},$$

es decir, es directamente proporcional al momento de fuerzas M aplicado e inversamente proporcional al momento de inercia I. Comparando la ecuación (6a) con la (1), que expresa la segunda ley de Newton, vemos que en la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo, tiene lugar una relación análoga a la expresada por aquella ley, con la diferencia de que en vez de aceleración lineal, tenemos aceleración angular, en vez de una fuerza, el momento de una fuerza, y en vez de masa, el momento de inercia.

De la ecuación (6a) se deduce que si el momento de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, es igual a cero, la aceleración angular β también será igual a cero, es decir, el sólido girará a constante velocidad angular ω, si su momento de inercia I permanece constante*). En el caso particular de $\omega = 0$, el cuerpo estará en reposo.

Como hemos visto (§ 13), la velocidad angular ω y la aceleración angular β pueden considerarse vectores. El momento de una fuerza f respecto a un punto puede considerarse también como un vector, y a la ecuación (6a) se le puede dar un carácter vectorial.

Fig. 74. El momento de la fuerza **f** respecto al punto O lo define el vector **M**.



Veamos la fuerza **f** (fig. 74, *a*), cuyo momento respecto al punto O queremos determinar. Está claro que la característica completa del momento la componen 1) el valor numérico del momento, que es igual a $fr \cos \alpha$; 2) el plano en que están la fuerza **f** y el punto O; 3) la dirección en que la fuerza actúa. Todas estas tres características se pueden expresar mediante *un vector* **M**, si:

---

*) El momento de inercia de un sólido que gira alrededor de un eje fijo puede cambiar solamente en el caso de que las distintas partes del sólido no estén ligadas rígidamente unas con otras. Para este caso, la fórmula (6a) no es valedera, ya que se ha deducido suponiendo que las componentes de las fuerzas, dirigidas según las ligaduras, se compensan con las reacciones de las ligaduras, y no originan desplazamiento de unas partes del cuerpo respecto a las otras, como tendría lugar en el caso de ligaduras no rígidas.

1) la intensidad del vector **M** la hacemos igual a $fr \cos \alpha$, 2) lo trazamos perpendicularmente al plano en que están la fuerza **f** y el punto O, y 3) lo dirigimos de manera que su sentido esté relacionado unívocamente con el de la fuerza. Para ello utilizaremos otra vez la regla del sacacorchos (véase el § 13 y la fig. 28): el sentido del vector **M** se determina según el movimiento de traslación (avance) del sacacorchos situado en el punto O, si el sentido de rotación de su manilla coincide con el de la fuerza que actúa. Entonces, para el caso representado en la fig. 74, *a*, el vector **M** estará dirigido hacia arriba, y en el caso representado en la fig. 74, *b*, hacia abajo. El vector **M** es el vector del momento de la fuerza.

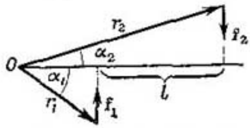


Fig. 75. El momento del par no depende de la posición del punto O respecto al cual se toma.

Considerando el ángulo $\angle\ \mathbf{r}, \mathbf{f}$ entre los vectores **r** y **f**, tenemos que $\alpha = \angle\ \mathbf{r}, \mathbf{f} - \frac{\pi}{2}$, de donde la intensidad del momento de la fuerza **f** será:

$$M = f \cdot r \cdot \operatorname{sen} (\angle\ \mathbf{r}, \mathbf{f}).$$

Por consiguiente, considerando lo dicho en el § 13 sobre el producto vectorial, tenemos que el momento de la fuerza **f** se expresa por un producto vectorial:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}, \qquad (3a)$$

donde **r** es el radio vector trazado desde el punto O, con respecto al cual se toma el momento, hasta el punto de aplicación de la fuerza **f**.

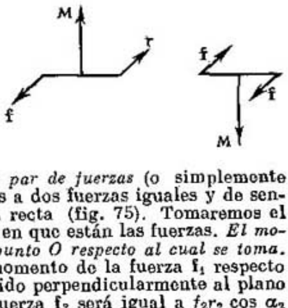


Fig. 76. El momento del par viene determinado por el vector **M**.

Veamos además, el momento denominado *par de fuerzas* (o simplemente *momento de un par*). Se denomina par de fuerzas a dos fuerzas iguales y de sentido contrario que no actúan según una misma recta (fig. 75). Tomaremos el momento del par respecto a un punto del plano en que están las fuerzas. *El momento de un par no depende de la posición del punto O respecto al cual se toma.* Tomemos un punto arbitrario O (fig. 75). El momento de la fuerza $\mathbf{f}_1$ respecto al punto O será igual a $f_1 r_1 \cos \alpha_1$ y estará dirigido perpendicularmente al plano del dibujo hacia nosotros. El momento de la fuerza $\mathbf{f}_2$ será igual a $f_2 r_2 \cos \alpha_2$ y estará dirigido perpendicularmente al plano del dibujo por detrás del plano del dibujo. Por lo tanto, los momentos $f_1 r_1 \cos \alpha_1$ y $f_2 r_2 \cos \alpha_2$ van en sentido opuesto y, por consiguiente, el momento resultante de las dos fuerzas que forman el par, es igual a

$$M = f_2 r_2 \cos \alpha_2 - f_1 r_1 \cos \alpha_1.$$

Las fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ son de igual intensidad. Designemos su valor común por f, y la diferencia $r_2 \cos \alpha_2 - r_1 \cos \alpha_1$ por l (l se denomina *brazo del par o brazo de palanca* y es la distancia entre las rectas según las cuales actúan las fuerzas), entonces

$$M = fl. \qquad (8)$$

La intensidad del momento de un par **M** es igual al producto de la intensidad de una de las fuerzas f por *el brazo del par* l. La dirección del vector del momento del par está relacionada con la de las fuerzas que forman el par según la regla del sacacorchos (fig. 76).

Utilizando el vector del momento de fuerzas, se puede escribir la ecuación (6a) en forma vectorial:

$$\mathbf{M} = I \cdot \boldsymbol{\beta}. \tag{9}$$

Si $\mathbf{M} = 0$, es decir, si no hay momento de fuerzas que actúe sobre el sólido, $\boldsymbol{\beta} = 0$, lo cual significa que el vector de la velocidad angular ω es constante, es decir, que el sólido no sólo gira a velocidad constante, según su intensidad, sino que incluso la dirección del eje de rotación permanece constante.

§ 36. Momentos de inercia de algunos cuerpos. Veamos los momentos de inercia de algunos cuerpos respecto a ejes determinados. Como

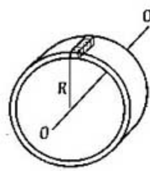


Fig. 77. Determinación del momento de inercia de un cilindro hueco de paredes delgadas.

ejemplo simple veamos el momento de inercia *de un cilindro hueco de paredes delgadas* (anillo) (fig. 77) de masa m y radio R respecto a su eje de simetría OO'. Dividamos el cilindro en elementos en

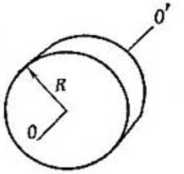


Fig. 78. El momento de inercia de un cilindro macizo respecto al eje OO' es igual a $\frac{1}{2}\ mR^2$.

forma de franjas limitadas por las generatrices del cilindro (una de estas franjas viene rayada en la fig. 77). Debido al pequeño espesor de las paredes del cilindro, se puede considerar que todas las partes de una misma franja se hallan a la misma distancia R del eje OO'. Por lo tanto, el momento de inercia de una franja es $\Delta I = \Delta m_i R^2$, donde Δm_i es la masa de la franja. El momento de inercia de todo el cilindro será:

$$I = \sum_i \Delta m_i R^2 = R^2 \sum_i \Delta m_i,$$

pero $\sum \Delta m_i$ es la masa m de todo el cilindro de donde

$$I = mR^2.$$

Respecto a cualquier otro eje, el momento de inercia del mismo cilindro será diferente.

A continuación se dan los momentos de inercia de algunos cuerpos sin explicar el cálculo, ya que este cálculo se basa en la integración.

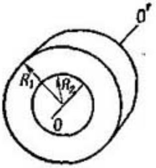


Fig. 79. El momento de inercia de un cilindro hueco de paredes gruesas respecto al eje OO' es igual a $\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$.

El momento de inercia *de un cilindro macizo* (disco) respecto a su eje (fig. 78) es:

$$I=\frac{1}{2}mR^2. \tag{2}$$

El momento de inercia *de un cilindro hueco de paredes gruesas* respecto a su eje (fig. 79) es:

$$I=\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2), \tag{3}$$

donde R_1 y R_2 son sus radios interior y exterior.

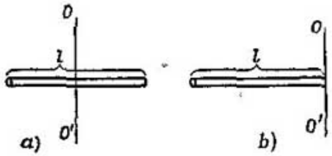


Fig. 80. El momento de inercia de una barra respecto al eje OO' perpendicular a su longitud y que pasa por su centro, es igual a $\frac{1}{12}ml^2$, y el momento respecto l eje perpendicular que pasa por uno de los extremos, es igual a $\frac{1}{3}ml^2$.

El momento de inercia *de una barra de longitud l respecto al eje que pasa por el centro de la barra* perpendicularmente a la longitud (fig. 80, *a*), es:

$$I=\frac{1}{12}ml^2. \tag{4}$$

El momento de inercia *de una barra de longitud l respecto al eje que pasa por un extremo de la barra* perpendicularmente a su longitud (fig. 80, *b*) es:

$$I=\frac{1}{3}ml^2. \tag{5}$$

El momento de inercia *de una esfera respecto a un eje que pasa por su centro es:*

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \tag{6}$$

Las dimensiones del momento de inercia se determinan de la relación

$$I = mr^2,$$

de donde

$$[I] = [m] \times [r^2] = ML^2.$$

Así tenemos que en el sistema CGS, el momento de inercia se mide en $g \cdot cm^2$, en el sistema técnico, en (unidades técn. de masa)$\cdot m^2$.

En el sistema de unidades MKS, el momento de inercia se expresa en $kg \cdot m^2$, ya que en este sistema se toma el kilogramo por unidad de masa, y el metro por unidad de longitud.

Veamos un ejemplo de determinación de la aceleración angular dados el momento de fuerzas y el momento de inercia.

E j e m p l o. A una rueda de radio $R = 0{,}5$ m con un momento de inercia $I = 20$ kg$\cdot$m^2, se le aplica un momento de fuerzas constante $M = 5$ kgm. Hallar: 1) la aceleración angular y 2) la velocidad lineal de los puntos de la llanta al cabo de 10 segundos (la velocidad inicial se considera igual a cero).

S o l u c i ó n. La aceleración angular de la rueda es

$$\beta = \frac{M}{I}.$$

Para el cálculo utilizaremos el sistema técnico de unidades, entonces $I = \frac{20}{9{,}8}$ unid. técn., de donde

$$\beta = \frac{5 \cdot 9{,}8}{20} s^{-2} = 2{,}45 \ s^{-2}.$$

La velocidad angular al cabo del tiempo t contando a partir del principio del movimiento será

$$\omega = \beta t,$$

y la velocidad lineal de los puntos de la llanta

$$v = \omega R = 2{,}45 \cdot 0{,}5 \cdot 10 \text{ m/s} = 12{,}25 \text{ m/s}.$$

Si para un cuerpo cualquiera se conoce su momento de inercia respecto a un eje que pase por el centro de gravedad, se puede hallar fácilmente el momento de inercia respecto a cualquier eje paralelo al primero.

Este paso de un momento de inercia a otro se realiza según el siguiente teorema: *el momento de inercia respecto a cualquier eje de rotación es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo al primero y que pase por el centro de gravedad, más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia del centro de gravedad al eje de rotación.*

Como ejemplo, determinemos el momento de inercia de una esfera respecto a una de sus tangentes.

Según el teorema anterior:

$$I_t = I_C + ma^2,$$

donde I_t es el momento de inercia respecto a una tangente; I_C, el momento de inercia respecto a un eje que pase por el centro de gravedad; m, la masa de la esfera y a, la distancia desde la tangente hasta el centro de la esfera. Como para la esfera $a = R$, e $I_C = \frac{2}{5} mR^2$, tenemos que

$$I_t = \frac{2}{5} mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5} mR^2.$$

§ 37. Momento de la cantidad de movimiento (momento cinético). Veamos primeramente un punto material de masa m que gira según una circunferencia de radio r (fig. 72). Para este punto se cumple la ecuación:

$$f \cos\alpha = mw_t, \tag{1}$$

donde f es la fuerza aplicada al punto, y w_t la componente tangencial de la aceleración. Supongamos que la fuerza f es de intensidad constante y forma un mismo ángulo α con la tangente a la circunferencia en todos los puntos del trayecto.

Entonces, $w_t = \Delta v/\Delta t$, y la ecuación (1) se transforma en:

$$f \cos\alpha \cdot \Delta t = m\Delta v.$$

Multiplicando por r los dos miembros de esta ecuación, obtenemos

$$fr \cos\alpha \cdot \Delta t = rm\Delta v. \tag{2}$$

La magnitud $fr \cos\alpha$ es el momento M de la fuerza f respecto al centro de rotación O; además, debido a la constancia de la masa m y del radio r, el término $rm\Delta v$ se puede escribir $\Delta\,(rmv)$.

Entonces la ecuación (2) toma la forma:

$$M\Delta t = \Delta\,(rmv)\,. \qquad (3$$

Si el momento M no es constante, la ecuación (3) hay que tomarla en un intervalo de tiempo Δt tan pequeño, que en el transcurso del mismo se pueda considerar que lo es. Para un intervalo finito de tiempo, se puede operar con la intensidad media del momento de fuerzas $\overline{M}$, entonces

$$\overline{M}\Delta t = \Delta\,(rmv). \tag{3a}$$

La magnitud $p = rmv$ se denomina *momento de la cantidad de movimiento* (*momento cinético o momento dinámico*) de un punto material que gira según una circunferencia, y $\overline{M}\Delta t$ momento (impulsión o impulso) angular, que a veces también se llama *impulsión* (*impulso*) *del momento de la fuerza*. La ecuación (3) dice que *la variación del momento de la cantidad de movimiento numéricamente es igual al momento angular aplicado*. Esta ecuación es análoga a la (4) del § 17, que expresa la relación entre la variación de la cantidad de movimiento y el impulso de una fuerza.

El concepto de momento de cantidad de movimiento p de un punto material lo hemos utilizado para el caso particular del movimiento de un punto material según una circunferencia cuando su velocidad es todo el tiempo perpendicular al radio **r**. En el caso general del movimiento de un punto material, su momento de cantidad de movimiento respecto a un centro O es una magnitud numéricamente igual al producto de la cantidad de movimiento del punto mv por la distancia del centro O en la dirección de la velocidad **v** del punto (el vector **v** se traza desde el lugar en que en el instante dado se encuentra el punto material). El momento de la cantidad de movimiento es un vector, cuya dirección y sentido vienen determinados por la regla del sacacorchos: el vector **p** es perpendicular al plano en que están el vector velocidad **v** y el centro O, y va dirigido en el sentido del movimiento de avance del sacacorchos, cuando la manilla de éste gira en el sentido desde el vector **r** (radio vector del punto) hacia el vector **v**. De esta manera tenemos que el vector del momento de la cantidad de movimiento viene determinado por el producto vectorial $\mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, y la ecuación (3), en el caso general, se debe escribir también en forma vectorial:

$$\mathbf{M}\Delta t = \Delta\mathbf{p},$$

donde $\Delta\mathbf{p}$ es la diferencia vectorial de los momentos de cantidad de movimiento $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$.

La ecuación (3) se puede generalizar también para el caso de un cuerpo sólido que gira alrededor de un eje fijo. Para ello dividimos el cuerpo en elementos de masa Δm_i, como lo hemos hecho en el § 35.

Para cada elemento se cumplirá la igualdad:

$$\Delta f_i \cdot r_i \cos\alpha_i \Delta t = r_i \Delta m_i \Delta v_i,$$

o, como $\Delta v_i = \Delta\omega \cdot r_i$,

$$\Delta f_i \cdot r_i \cos\alpha_i \Delta t = \Delta m_i r_i^2 \cdot \Delta\omega.$$

Sumando estas expresiones para todos los elementos del sólido, obtenemos:

$$\sum_i \Delta f_i \cdot r_i \cos\alpha_i \Delta t = \sum \Delta m_i r_i^2 \cdot \Delta w,$$

o, como $\sum_i \Delta f_i r_i \cos\alpha_i = M$ es el momento de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, y $\sum_i \Delta m_i r_i^2 = I$ es el momento de inercia del mismo

$$M\Delta t = I\Delta\omega.$$

Si el momento de fuerzas M no es constante, conviene tomar su valor medio en el intervalo de tiempo Δt; entonces.

$$\overline{M}\Delta t = I\Delta\omega.$$

Como el momento de inercia de un sólido respecto a un eje dado es una magnitud constante, la última ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\overline{M}\Delta t = \Delta(I\omega), \tag{4}$$

donde en el segundo miembro tenemos la magnitud $I\omega$. La magnitud $M\Delta t$ se denomina *momento (impulso o impulsión) angular de las fuerzas aplicadas al sólido*, y la magnitud $I\omega$ *es el momento de la cantidad de movimiento del sólido que gira alrededor de un eje fijo.* Según la ecuación (4), *la variación del momento de la cantidad de movimiento de un sólido, es igual numéricamente al momento angular de las fuerzas que tiene aplicadas.*

Hemos deducido la ecuación (4) suponiendo constante el momento de inercia, pero esta ecuación es justa también cuando el momento de inercia varía durante el movimiento. En este caso, la variación del momento de la cantidad de movimiento $\Delta (I\omega)$ se determina por el momento angular de las fuerzas aplicadas.

De las fórmulas (3) y (4) se deduce que *si no hay momento de fuerzas* ($M = 0$), *el momento de la cantidad de movimiento es constante.* Esta consecuencia se conoce *por principio (ley) de la conservación del momento de la cantidad de movimiento (o principio de la conservación del momento cinético).*

En el caso particular del movimiento del punto material según una circunferencia, siendo $M = 0$, de la (3) resulta que:

$$mvr = \text{const.} \tag{5}$$

En el caso general del movimiento de un punto material, si $M = 0$

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const.} \tag{6}$$

Para un sólido, siendo $M = 0$, de la (4) se deduce que:

$$I \cdot \omega = \text{const.} \tag{7}$$

En el caso de un momento de inercia invariable, no habiendo fuerzas exteriores, la velocidad angular del sólido que gira permanece constante; este resultado ya lo hemos obtenido directamente de la fórmula (6a) del § 35.

Si el momento de inercia varía sin intervención de fuerzas exteriores, también empezará a variar la velocidad angular ω de tal manera, que el producto $I\omega$ sea constante: si el momento de inercia I aumenta, la velocidad angular ω disminuye, y viceversa.

La conservación del momento de la cantidad de movimiento puede demostrarse con un hombre de pie en un taburete que pueda girar sin rozamiento alrededor de su eje vertical («taburete de Zhukovski»). Supongamos que a un hombre con los brazos extendidos y sujetando en las manos unas pesas (fig. 81), se le comunica junto con el taburete un movimiento de rotación con una velocidad angular ω. En este caso el hombre tiene determinado momento de cantidad de movimiento $I\omega$, que, siendo cero el momento de las fuerzas exteriores, debe conservarse. Si el hombre baja los brazos, su momento de inercia disminuye y, por consiguiente, aumenta la velocidad angular. Si el hombre levanta de nuevo los brazos, la velocidad angular ω recobra su valor primitivo.

El momento de la cantidad de movimiento $\mathbf{P} = I\boldsymbol{\omega}$ es una magnitud *vectorial* que tiene la misma dirección que el vector velocidad angular ω. Por lo tanto, la ecuación (4) también tendrá carácter vectorial:

$$\mathbf{M}\Delta t = \Delta\mathbf{P}, \qquad (8)$$

donde $\Delta\mathbf{P} = I\boldsymbol{\omega}_2 - I\boldsymbol{\omega}_1$ es *una diferencia vectorial* de momentos de cantidad de movimiento $I\boldsymbol{\omega}$. En esta forma, la ecuación es completamente análoga a la (4) del § 17,

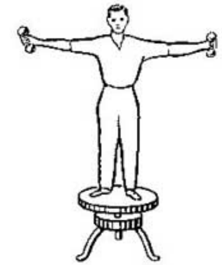


Fig. 81. Al bajar los brazos con las pesas, el hombre empieza a girar con más rapidez.

que para el punto material expresa la relación entre la variación del vector cantidad de movimiento y el vector impulso de las fuerzas. La ecuación (8) se puede aplicar, no sólo al caso de rotación de un sólido alrededor de un eje fijo, sino al caso general de movimiento arbitrario del sólido, si generalizamos como corresponde el concepto de momento de la cantidad de movimiento. La ecuación (8) se puede también aplicar a un sistema de cuerpos, pero en este caso hay que entender por $\mathbf{P}$ el vector resultante de los momentos de cantidad de movimiento y por $\mathbf{M}$ el vector resultante del impulso de las fuerzas.

El principio de la conservación del momento de la cantidad de movimiento para un sistema de dos cuerpos, se puede demostrar poniendo en manos del hombre que está en el taburete giratorio, una rueda de llanta maciza (fig. 82). Si el hombre del taburete primeramente estaba en reposo y, después, manteniendo el eje de la rueda verticalmente hace girar la rueda, él mismo, junto con el taburete, empezará a girar hacia el lado opuesto. Esto es debido a que la fuerza que el hombre aplica a la rueda, es interna y, por lo tanto, el momento total de la

Fig. 82. Al hacer girar la rueda, el hombre empieza a girar en sentido contrario.

cantidad de movimiento, que al principio era igual a cero, sigue siendo cero. Este experimento es análogo al experimento del hombre que corre sobre una carretilla (§ 18), el cual demuestra la conservación de la cantidad de movimiento del sistema.

De la ecuación (8) se deduce que si no hay fuerzas exteriores ($M = 0$), el momento de la cantidad de movimiento **P** se conserva, y no sólo en intensidad, sino también en dirección. Esto último se puede demostrar recurriendo de nuevo al hombre del taburete que tiene en las manos una rueda que gira: cualquier cambio de dirección del eje de la rueda (por ejemplo en 90° ó 180°) siendo constante el número de vueltas de la rueda, acarreará una variación de la velocidad angular del mismo hombre en el taburete.

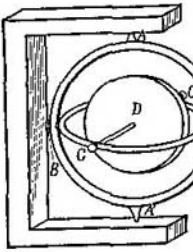


Fig. 83. El giroscopio en una suspensión cardán.

§ 38. Giroscopios (giróstatos). La propiedad del sólido que gira de conservar la dirección del eje de rotación y el carácter de las fuerzas que actúan de parte del eje en los apoyos bajo influencia exterior, se utiliza para distintos fines técnicos. Los cuerpos macizos y simétricos que giran a gran velocidad angular, empleados en la técnica, se denominan *giroscopios* (*peonzas*). La propiedad del giroscopio de conservar invariable el eje de rotación, siendo cero el momento de las fuerzas exteriores, se puede demostrar con ayuda *de la suspensión cardán.*

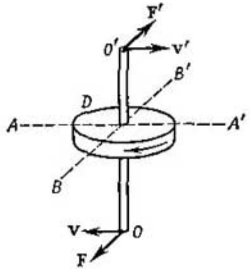


Fig. 84. Si hay un par de fuerzas **F** y **F'** que tienden a hacer girar el giroscopio alrededor del eje AA', el giroscopio realizará un movimiento de rotación alrededor del eje BB' perpendicular al AA'.

La suspensión cardán (fig. 83) consta de dos anillos, de los cuales el exterior gira libremente alrededor del eje que pasa por los pivotes AA', y el interior, alrededor del eje perpendicular al anterior y que pasa por los pivotes BB'. El eje CC' del giroscopio D se apoya en el anillo interior de la suspensión cardán, lo cual le asegura la posibilidad de girar libremente en el espacio en cualquier dirección. Si se hace girar rápidamente el giroscopio, el eje de rotación conservará invariable su dirección sea cual fuere el giro o la posición del soporte.

Si a un giroscopio en rotación se le aplica un par de fuerzas que tiendan a hacerlo girar alrededor del eje perpendicular a su eje de rotación, el giroscopio empezará a girar alrededor del tercer eje perpendicular a los dos primeros. Sea, por ejemplo, el giroscopio D girando alrededor del eje OO' en el sentido que indica la flecha (fig. 84). Supongamos que se aplica al giroscopio un par de fuerzas **F** y **F'** perpendiculares al plano del dibujo y que tienden a hacer girar el giroscopio alrededor del eje AA'; en este caso, el extremo superior del eje del giroscopio O' se inclinará hacia la derecha, y el inferior, hacia la izquierda (según indican las flechas v′ y v), es decir, el giroscopio girará alrededor del eje BB', que es perpendicular al plano del dibujo.

De la fig. 84 se ve que, *debido al efecto giroscópico, el giroscopio tiende a orientar su eje de giro de manera que forme un ángulo mínimo con el eje de rotación forzosa AA' y que ambos giros se realicen en una misma dirección.*

Estas propiedades, a primera vista paradójicas, del giroscopio son fácilmente comprensibles basándose en el siguiente razonamiento:

Sea un giroscopio que gira según se indica en la fig. 85, y sobre el cual actúa un par de fuerzas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$ del mismo sentido que las fuerzas aplicadas al giroscopio de la fig. 84. Entonces, el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ estará dirigido hacia abajo, y el momento $\mathbf{M}$ del par de fuerzas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$ (que están en el plano perpendicular al del dibujo) estará dirigido según la recta AA' hacia la izquierda. Según lo indicado en la pág. 140, entre el momento del par de fuerzas $\mathbf{M}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\beta}$ considerada como vector, existe la siguiente relación:

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\mathbf{M}}{I},$$

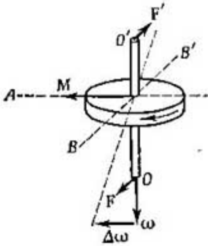


Fig. 85. Esquema para explicar el efecto giroscópico.

donde I es el momento de inercia del cuerpo a que se aplica el par de fuerzas con el momento $\mathbf{M}$; por lo tanto, la aceleración $\boldsymbol{\beta}$ tiene la misma dirección y sentido que $\mathbf{M}$. De aquí que en un pequeño intervalo de tiempo Δt, la variación de la velocidad angular vendrá representada por el vector $\Delta\boldsymbol{\omega}$, paralelo al vector $\mathbf{M}$, es decir, situado en el plano del dibujo y dirigido hacia la izquierda. Esto significa que el eje de rotación del giroscopio virará alrededor del eje BB' en el sentido de las agujas del reloj.

Las fuerzas aplicadas a las ligaduras que mantienen el eje, son iguales a $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$, pero van dirigidas en sentido contrario y se denominan *fuerzas giroscópicas*. Por ejemplo, si el extremo O' del giroscopio que gira según indica la

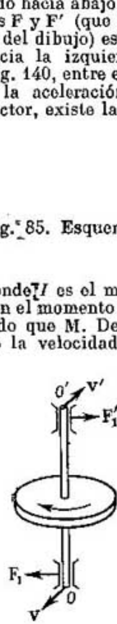


Fig. 86. Las fuerzas giroscópicas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_1'$, están aplicadas a las ligaduras que mantienen el eje de rotación del giroscopio.

flecha de la fig. 86, se desplaza hacia atrás por el otro lado del plano del dibujo, y el extremo O hacia delante, el eje ejercerá sobre los cojinetes una presión en el sentido indicado por las flechas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}'$. Se puede demostrar que el momento de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_1'$ se expresa por el producto vectorial del momento de la cantidad de movimiento del giroscopio $I\boldsymbol{\omega}$ por el vector de la velocidad angular de inclinación de su eje $\boldsymbol{\omega}'$:

$$\mathbf{M}=I\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}'. \tag{1}$$

Las fuerzas giroscópicas surgen en el movimiento del trompo (peón) corriente. En la posición inclinada del trompo que gira, la componente P_2 de la fuerza de la gravedad (fig. 87) tiende a inclinar más el eje del trompo; pero gracias al efecto giroscópico, el eje OO' se inclina en dirección perpendicular (indicada por la flecha v) y empieza a desplazarse (movimiento de precesión) de manera que su eje se mueve engendrando una superficie cónica. Debido a la precesión, el trompo no se cae. La acción de las fuerzas giroscópicas se puede demostrar también con ayuda del llamado giroscopio de palanca (de Fessell). La varilla B (fig. 88) puede girar respecto al soporte A en dirección vertical y horizontal. En un extremo de la varilla se fija el giroscopio D. Si el giroscopio está equilibrado por el peso P, este equilibrio se conserva al girar el giroscopio. Si P es más pesado que el giroscopio, no origina una inclinación hacia abajo de la varilla B, sino que la hace girar en el plano horizontal.

Los giroscopios encuentran diferentes aplicaciones en la física y en la técnica. En 1852, Foucault intentó utilizar el giroscopio para demostrar la rota-

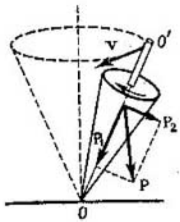


Fig. 87. Precesión de la peonza.

ción de la Tierra. El efecto giroscópico se aplica ampliamente en los cañones rayados. El rayado helicoidal del cañón de una pieza de artillería comunica al proyectil un rápido movimiento de rotación alrededor de su eje y lo transforma en un giroscopio con un gran momento propio de cantidad de movimiento. Gracias a ello, el momento de las fuerzas que surge debido a la resistencia del aire,

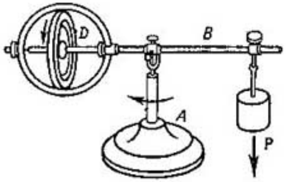


Fig. 88. Giroscopio de palanca.

no causa desviación del proyectil, sino solamente origina una precesión alrededor de la tangente a la trayectoria. Los giroscopios se utilizan también para regular el movimiento de los torpedos. El giroscopio se puede utilizar como brújula (aguja giroscópica).

La aguja giroscópica (brújula giroscópica o compás giroscópico) es un trompo que gira rápidamente (hasta 30 000 r.p.m.) flotando en un recipiente con mercurio. Gracias a la rotación de la Tierra, el eje del giroscopio tiende a colocarse paralelamente al eje de rotación de la Tierra, es decir, en el plano del meridiano. En la actualidad, los giroscopios se utilizan en diferentes instrumentos de navegación aérea (por ejemplo, en el «horizonte artificial»): Grandes giroscopios se utilizan para disminuir el balanceo de las naves.

Los efectos giroscópicos también pueden influir perniciosamente en los mecanismos que tienen piezas macizas que giran a gran velocidad, por ejemplo, la turbina de un barco. Al virar éste, se origina una presión complementaria en los cojinetes debida a las fuerzas giroscópicas que surgen en este caso.

El vector de la velocidad angular del viraje del barco ω' en este caso es perpendicular al vector de la velocidad angular de la propia turbina ω; por lo tanto, la intensidad del momento girostático M', según la fórmula (1), es:

$$M' = I\omega\omega'.$$

Si la distancia entre los cojinetes es l, el momento será $M' = F_1 l$, donde F_1 es la fuerza de la presión complementaria sobre los cojinetes. De aquí que

$$F_1 = \frac{I\omega\omega'}{l}.$$

Si el momento de la cantidad de movimiento de la turbina es grande ($I\omega$ es grande) y si el barco vira con gran rapidez (es decir, ω' es grande), las fuerzas F_1 pueden alcanzar valores suficientes para destruir los cojinetes.

§ 39. Energía cinética de un sólido que gira. Determinemos el trabajo que realiza el momento M de las fuerzas al girar el sólido un determinado ángulo φ alrededor de un eje fijo OO' (fig. 89). Sea la fuerza f, aplicada al sólido, tangente a la trayectoria del punto de aplicación, y de momento respecto al eje OO' igual a $M = fr$. Al girar el sólido un ángulo $\Delta\varphi$, el punto A de aplicación de la fuerza se traslada recorriendo un arco de longitud Δs, de donde el trabajo realizado por la fuerza f será:

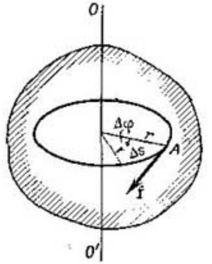


Fig. 89. Trabajo de las fuerzas que causan una rotación.

$$\Delta A = f \cdot \Delta s,$$

pero $\Delta s = r\Delta\varphi$, donde $\Delta\varphi$ es el ángulo de giro del sólido; por consiguiente:

$$\Delta A = fr \cdot \Delta\varphi$$

o, como $fr = M$ es el momento de la fuerza f

$$\Delta A = M \cdot \Delta\varphi; \qquad (1)$$

de esta manera tenemos que el trabajo realizado al girar el sólido un ángulo $\Delta\varphi$, es igual al producto del momento de la fuerza por el ángulo de giro.

En el caso de que el momento M sea constante, el trabajo realizado al girar el cuerpo un ángulo finito φ, será:

$$A = M \cdot \varphi. \qquad (2)$$

Si el momento M de la fuerza es variable, hay que determinar, según la fórmula (1), el trabajo elemental ΔA, y obtener el trabajo total A sumando los elementales.

Veamos ahora un sólido que gira a una velocidad angular dada ω alrededor de un eje fijo. La energía cinética del elemento i del sólido será:

$$\Delta E_{ci} = \frac{\Delta m_i \cdot v_i^2}{2},$$

donde Δm_i es la masa de este elemento y v_i es su velocidad lineal.

Como $v_i = r_i\omega$, tenemos que

$$\Delta E_{ci} = \frac{\Delta m_i \cdot r_i^2\omega^2}{2}.$$

La energía cinética de rotación de todo el sólido será igual a la suma de las energías cinéticas de los distintos elementos:

$$E_c = \sum \frac{\Delta m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum \Delta m_i r_i^2,$$

pero según la fórmula (7) del § 35, $\sum \Delta m_i r_i^2 = I$ es el momento de inercia del sólido (respecto al eje de rotación), por lo tanto

$$E_c = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{3}$$

Así tenemos que la energía cinética de rotación de un sólido alrededor de un eje fijo se expresa por una fórmula análoga a la que determina la energía cinética de un punto material, sólo que la función de la masa m la desempeña el momento de inercia I, y la de la velocidad lineal, la velocidad angular ω.

Hemos estudiado el caso de rotación de un sólido alrededor de un eje fijo OO'. Examinemos ahora el caso particular del movimiento de un sólido cuando el eje de rotación pasa por el centro de masas y se desplaza paralelamente a sí mismo. Sea $\mathbf{v}_i$ la velocidad lineal de un elemento del cuerpo de masa Δm_i y $\mathbf{v}_C$ la velocidad lineal del centro de masas del sólido respecto al mismo sistema de coordenadas. Sea, además, la velocidad $\mathbf{v}_i'$ del volumen elemental del sólido respecto al centro de masas; entonces tenemos que

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_C. \tag{4}$$

La energía cinética del volumen elemental ΔE_{ci} será

$$\Delta E_{ci} = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2)}{2},$$

o, según la (4)

$$\Delta E_{ci} = \frac{\Delta m_i v_C^2}{2} + \frac{\Delta m_i v_i'^2}{2} + \Delta m_i (v_{Cx}v_{ix}' + v_{Cy}v_{iy}' + v_{Cz}v_{iz}').$$

Obtenemos la energía cinética de todo el sólido sumando las energías cinéticas de todos sus elementos:

$$E_c = \sum \frac{\Delta m_i v_C^2}{2} + \sum \frac{\Delta m_i v_i'^2}{2} + \sum \Delta m_i (v_{Cx}v_{ix}' + v_{Cy}v_{iy}' + v_{Cz}v_{iz}'). \tag{5}$$

El primer término del segundo miembro de esta ecuación es, como fácilmente se ve, la energía cinética de la masa m, igual a la masa de todo el sólido que se mueve junto con el centro de las masas: $\frac{mv_C^2}{2}$. Razonando análogamente a como se ha hecho anteriormente, vemos que el segundo término es igual a la energía cinética de rotación de un sólido respecto a un eje de rotación que pase por su centro de masas $\frac{I\omega^2}{2}$. El tercer término, como se puede demostrar, es igual a cero. Efectivamente, examinemos el producto $\Delta m_i v_{Cx} v'_{ix}$. Observando que, según la (4), $v'_{ix} = v_{ix} - v_{Cx}$, lo descomponemos de la forma siguiente

$$\Delta m_i v_{Cx} v'_{ix} = \Delta m_i v_{ix} v_{Cx} - \Delta m_i v_{Cx}^2. \tag{6}$$

Llamando las coordenadas del centro de masas x_C, y_C, z_C y las del elemento i del sólido x_i, y_i, z_i: tendremos que $v_{Cx} = \dot{x}_C$ y $v_{ix} = \dot{x}_i$ (los puntos sobre las letras designan la primera derivada respecto al tiempo). Utilizando estas ecuaciones en la (6) obtenemos:

$$\Delta m_i v_{Cx} v'_{ix} = \Delta m_i \dot{x}_C \dot{x}_i - \Delta m_i \dot{x}_C^2. \tag{7}$$

Sumando la (7) para todos los elementos del sólido, obtenemos

$$\sum \Delta m_i v_{Cx} v'_{ix} = \dot{x}_C \sum \Delta m_i \dot{x}_i - m\dot{x}_C^2.$$

Pero según la fórmula (6) del § 34, $\sum \Delta m_i \dot{x}_i = m\dot{x}_C$, de donde hallamos que

$$\sum \Delta m_i v_{Cx} v'_{ix} = 0.$$

Lo mismo obtenemos para las otras dos componentes de las velocidades según los respectivos ejes, por lo tanto:

$$\sum \Delta m_i (v_{Cx} v'_{ix} + v_{Cy} v'_{iy} + v_{Cz} v'_{iz}) = 0.$$

Después de esto, la ecuación (5) se transforma en:

$$E_c = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

es decir, *la energía cinética total de un sólido es igual a la suma de la energía cinética de la masa m de todo el sólido concentrada en el centro de masas, y de la energía cinética de su rotación respecto al eje que pasa por este centro.*

Veamos unos cuantos ejemplos de determinación de la energía cinética de un cuerpo sólido en rotación.

Ejemplo 1. Un volante que junto con el árbol tiene un momento de inercia de 200 kgm², gira haciendo 180 r.p.m. Dos minutos después de que ha dejado de actuar sobre el volante el momento de rotación, el volante se para frenado por las fuerzas de rozamiento de los cojinetes. Considerando constante el rozamiento de los cojinetes, determinar el momento de las fuerzas de rozamiento.

Solución. El trabajo de las fuerzas de rozamiento de los cojinetes se efectúa a costa de la energía cinética del volante:

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = M\varphi,$$

donde ω_0 es la velocidad angular inicial del volante; I, su momento de inercia; φ, el ángulo que gira el volante hasta pararse, y M, el momento buscado de las fuerzas de rozamiento de los cojinetes. Considerando el movimiento de rotación del volante uniformemente retardado, tenemos que $\varphi = \frac{\omega_0}{2} t$, donde t es el tiempo que tarda en pararse el volante. Por lo tanto:

$$M = \frac{I\omega_0}{t}.$$

La velocidad angular es $\omega_0 = 2\pi n_0$, donde $n_0 = 180$ r.p.m. $= 3$ revoluciones por segundo, de donde

$$M = \frac{200 \cdot 2\pi \cdot 3}{9{,}8 \cdot 120} \text{ kgm} = 3{,}2 \text{ kgm}.$$

Ejemplo 2. ¿Qué parte de la energía cinética total representa la energía cinética de rotación de los siguientes cuerpos que se desplazan rodando: a) un aro, b) un cilindro macizo, y c) una esfera?

Solución. En la rodadura sin resbalamiento, la velocidad lineal de la llanta del sólido respecto a su centro es igual a su velocidad de traslación v. Por lo tanto, para *el aro*, que tiene $I = mR^2$ y $v = \omega R$, obtenemos que la energía cinética de su rotación en la rodadura E_{rot} será

$$E_{\text{rot}} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

La energía cinética total E_c es la suma de la energía cinética de rotación E_{rot} y de la energía cinética del movimiento de traslación $\frac{mv^2}{2}$, por lo tanto:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} + E_{\text{rot}} = mv^2, \text{ de donde } E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} E_c. \tag{8}$$

Para *el cilindro macizo*:

$$I = \frac{1}{2} mR^2, \text{ de donde } E_{\text{rot}} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{4};$$

la energía total:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} + E_{\text{rot}} = \frac{3}{4} mv^2, \text{ de donde } E_{\text{rot}} = \frac{1}{3} E_c. \tag{9}$$

Para *la esfera:*

$$I = \frac{2}{5} mR^2, \text{ de donde } E_{\text{rot}} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{5} mv^2;$$

la energía total:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{5} mv^2 = \frac{7}{10} mv^2, \quad E_{\text{rot}} = \frac{2}{7} E_c. \tag{10}$$

Ejemplo 3. Por un plano inclinado de altura h ruedan: a) un aro, b) un cilindro macizo, y c) una esfera. Hallar las velocidades que adquieren al final del plano inclinado. Comparar estas velocidades con las velocidades que adquiriría el sólido de desplazarse por el plano sin rozamiento.

Solución. La energía cinética total del cuerpo que rueda es:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right) v^2.$$

Como la energía cinética surge a costa de la energía potencial $E_p = mgh$, tenemos que

$$\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{R^2}\right)v^2 = mgh, \text{ de donde } v=\sqrt{\frac{2mgh}{m+\frac{1}{R^2}}},$$

o

$$v=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{mR^2}}}, \tag{11}$$

Como la velocidad del sólido que resbala sin rozamiento por un plano inclinado de altura h es

$$v=\sqrt{2gh},$$

se ve que para el sólido que rueda sin rozamiento, esta velocidad es $\sqrt{1+\frac{I}{mR^2}}$ veces menor. (Aquí I es el momento de inercia del sólido, m, su masa y R, su radio).

Para *el aro*, en el que $I = mR^2$, tenemos

$$v=\sqrt{gh},$$

es decir, la velocidad que adquiere rodando por un plano inclinado es $\sqrt{2} = 1{,}41$ veces menor que la del sólido que resbala sin rozamiento.

Para *el cilindro macizo*, $I = \frac{1}{2}\, mR^2$, de donde

$$v=2\sqrt{\frac{gh}{3}},$$

es decir, $\sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}23$ veces menor que la del sólido que resbala sin rozamiento.

Para *la esfera* $I = \frac{2}{5}\, mR^2$, de donde

$$v=\sqrt{\frac{10gh}{7}},$$

es decir, $\sqrt{\frac{7}{5}} = 1{,}18$ veces menor que la del cuerpo que resbala sin rozamiento.