

TERCERA PARTE

VIBRACIONES Y ONDAS

CAPÍTULO XI

Movimiento vibratorio armónico

§ 97. **Vibraciones armónicas simples.** Como demostramos en el § 89, en las deformaciones elásticas que cumplen la ley de Hooke aparece una fuerza dirigida hacia la posición de equilibrio y proporcional a la deformación.

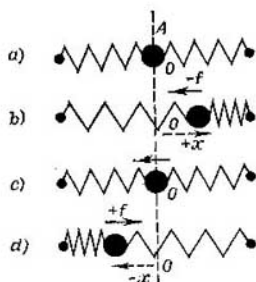


Fig. 241. Oscilaciones de un peso A , sujeto entre dos muelles, respecto a la posición de equilibrio O .

Supongamos que un peso A está sujeto entre dos muelles. Estos dos muelles están tensados por igual y el peso se encuentra en equilibrio en la posición O (fig. 241, a). Desviemos el peso de esta posición de equilibrio hacia la derecha (fig. 241, b) una distancia igual al

segmento $+x$ (consideraremos positivos los segmentos tomados de izquierda a derecha). En estas condiciones, el muelle de la derecha estará comprimido y el de la izquierda estirado, y sobre el peso actuará una fuerza $-f$ dirigida hacia la posición de equilibrio O , cuyo valor numérico será tanto mayor, cuanto mayor sea la desviación x . Bajo la acción de esta fuerza el peso A comienza a moverse hacia la posición de equilibrio con una velocidad cada vez mayor. Al llegar de nuevo a la posición de equilibrio (fig. 241, c), la fuerza f será igual a cero, pero el peso tendrá una reserva de velocidad $-v$,

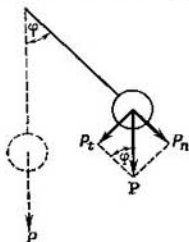


Fig. 242. Oscilaciones de un péndulo.

que le permitirá atravesar la posición de equilibrio y continuar moviéndose hacia la izquierda. Al ocurrir esto, el muelle izquierdo se comprime, el derecho se estira y sobre el peso comienza a actuar una fuerza $+f$ dirigida hacia la derecha, es decir, hacia la posición de equilibrio. Esta fuerza frenará el movimiento del peso hasta que éste se pare. Luego el peso comenzará a moverse en sentido contrario. De esta forma se establece un movimiento vibratorio u oscilatorio del peso A en torno a su posición de equilibrio.

Otro ejemplo de movimiento oscilatorio puede ser el de un péndulo plano (fig. 242). Cuando el hilo del péndulo está en posición vertical, la fuerza de la gravedad P aplicada al peso se equilibra con la tensión del hilo. Pero si el péndulo se desvía de la posición de equilibrio, un ángulo cualquiera φ , solamente una parte de la fuerza de la gravedad P estará compensada por la reacción del hilo, concretamente, la componente P_n de dicha fuerza paralela al hilo. La componente P_t , perpendicular a él y numéricamente igual a $P \sin \varphi$, está dirigida hacia la posición de equilibrio del péndulo y no está equilibrada. Cuando el ángulo φ es pequeño, el seno puede sustituirse por el propio ángulo y P_t será aproximadamente igual a $P\varphi$. La separación del peso del péndulo de su posición de equilibrio se llama *elongación* y se determina por el ángulo φ . Cuando φ es pequeño, la fuerza que hace que el peso vuelva a la posición de equilibrio es proporcional al ángulo φ .

Bajo la influencia de esta fuerza el péndulo entra en movimiento oscilatorio con relación a su posición de equilibrio. En este caso el

movimiento no se produce por una fuerza elástica, sino por la componente de la fuerza de la gravedad P_t dirigida hacia la posición de equilibrio y proporcional (cuando el ángulo φ es pequeño) a la elongación del péndulo. Por consiguiente, esta fuerza es análoga a las fuerzas elásticas y las oscilaciones que produce (cuando los ángulos φ son pequeños) coinciden, por el carácter del movimiento, con las vibraciones debidas a una fuerza elástica.

Las fuerzas, que, sin ser elásticas por su naturaleza, son análogas a éstas por su dependencia de la elongación, se llaman *cuasielásticas*.

Los ejemplos anteriores demuestran que la acción de las fuerzas elásticas o cuasielásticas da lugar al movimiento vibratorio u oscilatorio. Estudiemos más detenidamente este movimiento.

Determinemos la posición de un punto material de masa m por su separación x de la posición de equilibrio, es decir, por su elongación; en la posición de equilibrio $x = 0$. Toda fuerza elástica (o cuasielástica) f se caracteriza por ser proporcional a su elongación x y estar dirigida hacia la posición de equilibrio; por lo tanto, podemos escribir:

$$f = -kx. \quad (1)$$

El signo menos significa que la fuerza está dirigida en sentido contrario a la elongación x ; por ejemplo, si la elongación es hacia arriba, la fuerza actúa hacia abajo; si la separación x es hacia abajo, la fuerza actúa hacia arriba, y así sucesivamente. El coeficiente k es positivo. Por la segunda ley de Newton:

$$mw = f = -kx, \quad (2)$$

donde w es la aceleración del punto material que se estudia.

Esta aceleración w es igual a la segunda derivada de la elongación con respecto al tiempo, es decir, $w = \frac{d^2x}{dt^2}$; para abreviar, designaremos esta segunda derivada poniendo dos puntos sobre la magnitud de la cual se toma, por lo tanto $w = \ddot{x}$. Poniendo esta expresión de w en (2), obtenemos:

$$m\ddot{x} = -kx \quad (3)$$

o

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x. \quad (3a)$$

Como k y m son dos magnitudes positivas, la razón entre ellas puede igualarse al cuadrado de una magnitud ω , es decir, podemos introducir la designación

$$\frac{k}{m} = \omega^2. \quad (4)$$

Esta magnitud ω , por razones que expondremos más adelante, se llama *frecuencia circular o cíclica*.

Poniendo en (3a) este valor de k/m , podemos escribir:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \quad (5)$$

Ahora se nos plantea el problema de determinar el movimiento de un punto del cual sabemos, por la fórmula (5), que su aceleración es proporcional a la elongación x y está dirigida hacia la posición de equilibrio. Para conocer el movimiento de un punto hay que saber su posición en función del tiempo; en nuestro caso hay que determinar la elongación x como función del tiempo t . Por consiguiente, tenemos que hallar una relación entre x y t que cumpla la ecuación (5). No es difícil comprobar que esta relación viene dada por la ecuación:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad (6)$$

donde a y α son dos constantes arbitrarias que pueden hallarse partiendo de las condiciones iniciales. Efectivamente, si tomamos la segunda derivada de x con respecto al tiempo veremos que el valor de \ddot{x} obtenido convierte la ecuación (5) en identidad. El factor a se llama *amplitud*; el argumento $\omega t + \alpha$, *fase*, y la constante α , *fase inicial de la vibración*. Con el mismo derecho podríamos haber tomado la ecuación en la forma:

$$x = a \sin(\omega t + \alpha); \quad (7)$$

en este caso, al determinar la constante α , en cada caso particular encontraríamos un valor distinto del obtenido por la ecuación (6). Pero este valor diferente de la constante α nos daría en cada momento un valor numérico del seno, en la ecuación (7), igual al valor numérico del coseno de la ecuación (6), es decir, los movimientos representados por las ecuaciones (6) y (7) serían idénticos.

Las ecuaciones (6) y (7) reciben el nombre de *ecuaciones del movimiento vibratorio armónico*; pasemos ahora a estudiarlas.

La propiedad fundamental del movimiento vibratorio armónico simple es su periodicidad. Para simplificar, supongamos que la fase inicial es $\alpha = 0$, entonces

$$x = a \cos \omega t. \quad (6a)$$

Cuando $t = 0$ tenemos que $\cos \omega t = +1$, de donde $x = +a$. Convengamos en tomar los valores positivos de la elongación hacia la derecha y los negativos hacia la izquierda de la posición de equilibrio (fig. 243). Entonces, el punto material A , que realiza las oscilaciones armónicas, en el momento en que $t = 0$ se encontrará a una distancia a (hacia la derecha) de la posición de equilibrio. Esta es la elongación máxima del punto hacia la derecha, puesto

que el $\cos \omega t$ no puede ser mayor de $+1$. Al aumentar el tiempo t , comenzará a disminuir el valor del $\cos \omega t$ y el punto se trasladará hacia la izquierda, aproximándose a la posición de equilibrio O . En el momento determinado por la condición de que $\omega t = \frac{\pi}{2}$, es decir, cuando $t = \frac{\pi}{2\omega}$, el punto se encontrará en su posición de equilibrio O . Al seguir aumentando el tiempo, el coseno tomará

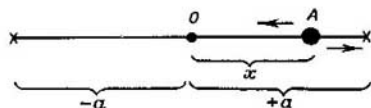


Fig. 243. Separación del punto oscilante de la posición de equilibrio (elongación).

valores negativos y el punto A se desviará hacia la izquierda de la posición O . Cuando $t = \frac{\pi}{\omega}$, el coseno toma el valor de -1 , de donde $x = -a$, es decir, el punto alcanza su posición extrema izquierda. Después comienza a moverse hacia la derecha, vuelve a pasar por O , y en el momento en que $t = T = \frac{2\pi}{\omega}$, vuelve a llegar a la máxima elongación derecha, después de lo cual se repite el movimiento. De esta forma, el punto retorna al estado inicial del movimiento al cabo de un tiempo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (8)$$

Este tiempo T se llama *período de la vibración*. Durante un tiempo igual al período T , el cuerpo A que oscila, pasa por cada punto de su trayectoria dos veces (a excepción de los correspondientes a las elongaciones máximas $x = \pm a$), una vez en una dirección y otra en la contraria.

La magnitud $\omega = \frac{2\pi}{T}$ representa el número de vibraciones u oscilaciones en 2π unidades de tiempo. La magnitud a , llamada *amplitud*, expresa la máxima separación posible del punto vibrante con relación a la posición de equilibrio (elongación máxima).

Cuando $\alpha \neq 0$ tenemos, que en el momento inicial $t = 0$ el punto A se encuentra en el sitio determinado por el valor de $x = a \cos \alpha$. Partiendo de este punto también se puede estudiar el carácter del movimiento durante un período T . Por consiguiente, la fase inicial α determina la posición del punto vibrante en el momento inicial $t = 0$.

Junto con la frecuencia cíclica ω podemos estudiar también la frecuencia ordinaria $\nu = \frac{1}{T}$, que nos da el número de vibraciones por unidad de tiempo. Comparando estas tres magnitudes ω , ν y T , hallamos entre ellas la relación siguiente:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (9)$$

Poniendo estos valores de ω en (6), obtenemos otras dos expresiones del movimiento vibratorio armónico:

$$x = a \cos(2\pi\nu t + \alpha), \quad (6b)$$

$$x = a \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right). \quad (6c)$$

Aplicando la fórmula (4) y la correlación $T = \frac{2\pi}{\omega}$, obtenemos para el período la magnitud

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (10)$$

De esta forma, vemos que el período de la vibración depende exclusivamente de las características dinámicas del problema, es decir, de la masa m y del coeficiente k .

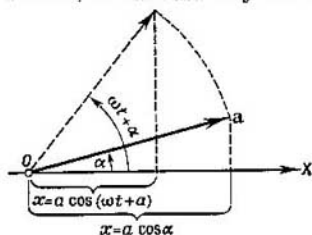


Fig. 244. Representación del movimiento vibratorio armónico como proyección de un vector a , que gira con velocidad angular constante.

En muchos casos relacionados con el estudio del movimiento vibratorio resulta cómodo el procedimiento geométrico de representar la vibración por medio del vector amplitud.

Este procedimiento se reduce a lo siguiente. Tomemos un eje, que llamaremos X (fig. 244) y en él un punto cualquiera O . Apliquemos a este punto, y formando con el eje X un ángulo α igual a la fase inicial de vibración, un vector que, en una escala determinada, sea numéricamente igual a la amplitud a . Como vemos en la figura, la proyección del vector a sobre el eje X nos da la elongación del punto $x = a \cos \alpha$, en la misma escala que la amplitud. Si hacemos que el vector amplitud gire con una velocidad angular ω , en sentido contrario al de las agujas del reloj, llegará un momento t

en que forme con el eje X un ángulo $\omega t + \alpha$ y en el cual su proyección sobre el eje X sea igual a

$$x = a \cos (\omega t + \alpha),$$

es decir, a la elongación del punto vibratorio en el momento t . De aquí podemos sacar la conclusión siguiente: el movimiento vibratorio armónico puede representarse por el movimiento de la proyección del extremo del vector amplitud, aplicado a un punto cualquiera de un eje determinado (formando con él un ángulo igual a la fase inicial), que gira con una velocidad angular ω alrededor de dicho punto. Así se comprende por qué la magnitud ω se llama *frecuencia circular*.

§ 98. Velocidad y aceleración del movimiento vibratorio armónico. Ejemplos. La elongación x de un punto material A que realiza oscilaciones armónicas, según la fórmula (6) del § 97 es igual a

$$x = a \cos (\omega t + \alpha), \quad (1)$$

donde a es la amplitud de la vibración; ω , la frecuencia circular y α , la fase inicial. La velocidad del punto v es igual numéricamente a la derivada con respecto al tiempo de la elongación x , es decir, $v = \frac{dx}{dt}$. Designemos la primera derivada con respecto al tiempo por un punto situado sobre la letra que expresa la magnitud de la cual se toma la derivada. Entonces, derivando, tenemos que

$$v = \dot{x} = -a\omega \operatorname{sen} (\omega t + \alpha). \quad (2)$$

La aceleración del punto A se obtiene tomando la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$w = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = -a\omega^2 \cos (\omega t + \alpha). \quad (3)$$

Introduciendo en las fórmulas (2) y (3), en lugar de ω , el período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, obtenemos

$$v = -\frac{2\pi}{T} a \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha \right), \quad (2a)$$

$$w = -\frac{4\pi^2}{T^2} a \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha \right). \quad (3a)$$

Esta última igualdad, basándonos en la fórmula (1), puede escribirse también como sigue:

$$w = -\frac{4\pi^2}{T^2} x,$$

de donde volvemos a obtener que la aceleración del movimiento vibratorio armónico es proporcional a la elongación x y está dirigida hacia la posición de equilibrio (compárese con la pág. 427).

Por las fórmulas (2a) y (3a) vemos, que la velocidad y la aceleración de un punto que realiza un movimiento vibratorio armónico son funciones periódicas del tiempo, con el mismo período T que tiene la elongación x . Examinemos ahora las variaciones de la velocidad y de la aceleración durante una oscilación. Para ello hagamos una tabla de los valores de v y w , en diferentes momentos, y compáremoslos con los de la elongación x en estos mismos momentos. La fase inicial α volveremos a considerarla igual a cero para mayor facilidad.

En la tabla vemos que la velocidad alcanza sus valores máximos absolutos, $|v|_{\text{máx}} = \frac{2\pi}{T} a$, cuando el punto oscilante A pasa por la posición de equilibrio; en las elongaciones extremas, cuando $x = \pm a$, la velocidad es igual a cero. La aceleración, por el contrario, es igual a cero cuando el punto A pasa por la posición de equilibrio (en este momento la fuerza es igual a cero) y alcanza sus valores máximos absolutos, $|w|_{\text{máx}} = \frac{4\pi^2}{T^2} a$, en las elongaciones extremas. La aceleración siempre está dirigida hacia la posición de equilibrio.

La amplitud de la vibración y la fase inicial, como dijimos antes, se determina partiendo de los datos iniciales. Supongamos que en el momento inicial $t = 0$ conocemos la velocidad v_0 de la partícula y su elongación x_0 . En estas condiciones, poniendo $t = 0$ en las expresiones (1) y (2), tenemos

$$x_0 = a \cos \alpha, \quad v_0 = -a\omega \sin \alpha, \quad (4)$$

o

$$\frac{v_0}{\omega} = -a \sin \alpha. \quad (5)$$

Tabla XIX

Valores de x , v y w para un movimiento armónico en diferentes momentos de tiempo

t	x	v	w
0	$+a$	0	$-\frac{4\pi^2}{T^2} a$
$\frac{1}{4}T$	0	$-\frac{2\pi}{T} a$	0
$\frac{1}{2}T$	$-a$	0	$+\frac{4\pi^2}{T^2} a$
$\frac{3}{4}T$	0	$+\frac{2\pi}{T} a$	0
T	$+a$	0	$-\frac{4\pi^2}{T^2} a$

Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro las expresiones (4) y (5), obtenemos

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = a^2,$$

de donde

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}. \quad (6)$$

Dividiendo la expresión (5) hallada por $x_0 = a \cos \alpha$, obtenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}. \quad (7)$$

Las expresiones (6) y (7) dan la amplitud a y la fase inicial α , determinadas por medio de la elongación inicial x_0 y de la velocidad inicial v_0 . De esta forma vemos, que un punto de masa dada sometido a la acción de una misma fuerza elástica puede realizar vibraciones de distinta amplitud y diferente fase inicial de acuerdo con las condiciones iniciales, pero su período de vibración se conserva siempre igual.

Si un peso colgado de un muelle se separa de su posición de equilibrio, comienza a oscilar con una amplitud que dependerá de la tensión que se le dio al muelle antes de comenzar el movimiento y de la velocidad inicial que se comunicó al peso; el período de la oscilación estará determinado únicamente por la masa m del peso y por la rigidez del muelle k , independientemente de la amplitud.

La fase inicial de la vibración, como hemos visto anteriormente, depende del momento inicial que se elija: como momento inicial puede tomarse, por ejemplo, aquel en el cual la elongación del punto $x_0 = +a$, en este caso, de acuerdo con la correlación (6), tendremos, que $v_0 = 0$, y por la correlación (7) la fase inicial será igual a cero: $\alpha = 0$.

Examinemos varios ejemplos.

Ejemplo 1. Determinar el período de oscilación de un peso $P = 2,5$ kgf, colgado de un muelle, si este último se estira 9 cm cuando se le aplica una fuerza de 3 kgf.

Solución. Para obtener el coeficiente de elasticidad del muelle hay que dividir 3 kgf por la deformación que producen:

$$k = \frac{3}{9} \text{ kgf/cm} = \frac{1}{3} \text{ kgf/cm},$$

después de lo cual hallamos T por la fórmula (10) del § 97

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{P}{gk}} = 2\pi \sqrt{\frac{2,5 \cdot 3}{981}} \text{ s} = 0,55 \text{ s}.$$

Ejemplo 2. Determinar el período de oscilación de un péndulo matemático de longitud l .

Se llama péndulo simple o matemático aquel que tiene un hilo cuyo peso se puede despreciar dentro de las condiciones del problema dado.

S o l u c i ó n. Llamemos m a la masa del peso del péndulo y supongamos que éste se desvía de la vertical un ángulo φ . La fuerza que hace que el peso del péndulo se mueva en dirección a su posición de equilibrio es la componente de la fuerza de la gravedad P_t perpendicular al hilo (fig. 242). De acuerdo con lo dicho en la pag. 427, esta componente P_t , cuando el ángulo de desviación φ es pequeño, es aproximadamente igual a $P\varphi$ y está dirigida hacia la posición de equilibrio, de donde

$$P_t = -P\varphi = -mg\varphi, \quad (8)$$

donde g es la aceleración de la gravedad; el signo menos indica que la fuerza P_t está dirigida en sentido contrario al de los ángulos positivos de elongación φ .

La aceleración tangencial a la trayectoria del peso es igual a $l\ddot{\varphi}$, de donde por la segunda ley de Newton, tenemos:

$$ml\ddot{\varphi} = P_t$$

o por (8)

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\varphi, \text{ de donde } \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi.$$

Designando g/l por medio de ω^2 , obtenemos:

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi.$$

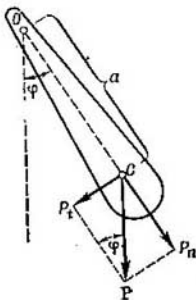


Fig. 245. Oscilaciones de un cuerpo pesado alrededor de un eje O .

Esta ecuación relativa a la elongación angular φ del péndulo es totalmente análoga a la ecuación (5) del § 97. Por consiguiente, φ es una función periódica respecto al tiempo, cuyo período es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (9)$$

La fórmula (9) nos da el período de oscilación de péndulo matemático, que buscábamos, el cual, como vemos, depende exclusivamente de la longitud l del péndulo y de la aceleración de la gravedad g en el lugar dado de la Tierra.

Ejemplo 3. Determinar el período de oscilación alrededor de su eje O (fig. 245) de un cuerpo de peso P , cuyo centro de gravedad C se encuentra situado a una distancia a del eje de rotación. Considerar que los ángulos de desviación φ , respecto a la posición de equilibrio, son pequeños.

S o l u c i ó n. La fuerza de la gravedad P puede considerarse aplicada al centro de gravedad C . Lo mismo que en el ejemplo anterior, el cuerpo se moverá hacia la posición de equilibrio bajo la acción de la componente P_t de la fuerza de la gravedad, la cual, cuando los ángulos φ son pequeños, es aproximadamente

$$P_t = -P\varphi.$$

El momento de esta fuerza con relación al eje de rotación O (véase el § 35), es

$$M = P_t a = -P\varphi a. \quad (10)$$

Bajo la influencia de este momento M el cuerpo adquiere una aceleración angular $\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$ (véase el § 35)

$$\beta = \frac{M}{I},$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo con respecto a eje O . Poniendo en esta expresión en lugar de M su valor, según (10), y $\ddot{\varphi}$ en lugar de β , obtenemos:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{P \cdot a}{I} \varphi.$$

Esta ecuación es totalmente análoga a la ecuación (5) del § 97 o a la ecuación relativa a φ que examinamos en el ejemplo anterior. De aquí se deduce que cuando los ángulos de elongación del cuerpo sean pequeños, éste realizará un movimiento oscilatorio armónico, respecto a su posición de equilibrio, cuyo período será

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Pa}}. \quad (11)$$

Aprovechando la correlación $P = mg$, donde m es la masa del cuerpo, podemos escribir la expresión del período de la forma siguiente:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (11a)$$

Todo cuerpo capaz de oscilar de esta forma respecto a su posición de equilibrio se llama *péndulo compuesto* o *péndulo físico*.

La magnitud

$$L = \frac{I}{ma} \quad (12)$$

suele llamarse *longitud equivalente del péndulo físico*.

Como quiera que en la expresión del momento de inercia I (véase el § 35) entra la masa, la longitud equivalente del péndulo físico L no depende de su masa total, sino únicamente de su forma geométrica y de la distribución de las masas en él.

Poniendo en (11a) el valor de la longitud equivalente del péndulo, obtenemos

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}};$$

de esta forma, la fórmula del período de oscilación del péndulo compuesto o físico toma un aspecto análogo a la del período de oscilación del péndulo simple o matemático [fórmula (9) del ejemplo anterior].

§ 99 Energía del movimiento vibratorio armónico. Supongamos que un punto material de masa m oscila influenciado por una fuerza cuasielástica

$$f = -kx,$$

donde x es la elongación del punto. Al oscilar, el punto material tiene una velocidad y , por consiguiente, una energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2. \quad (1)$$

El punto oscilante tendrá además una energía potencial. La circunstancia de que el punto tenga distinta velocidad en sus distintas posiciones indica, que su energía cinética E_c varía con el tiempo. Es evidente que al mismo tiempo varía también la energía potencial. Esta energía potencial se mide por el trabajo realizado por las fuerzas externas para conseguir una determinada desviación x . Como se demostró en el § 25, el trabajo de la fuerza elástica es numéricamente igual a $kx^2/2$. De esta forma, para la energía potencial E_p obtenemos la expresión:

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2. \quad (2)$$

Poniendo en las fórmulas (1) y (2) los valores de v y x que dan las expresiones (1) y (2) del § 98, obtenemos:

$$E_c = \frac{1}{2} ma^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha), \quad (1a)$$

$$E_p = \frac{1}{2} ka^2 \cos^2(\omega t + \alpha). \quad (2a)$$

La energía cinética E_c es igual a cero allí donde la potencial alcanza un máximo, es decir, en las posiciones en que la desviación es máxima; la energía cinética alcanza su máximo al pasar el punto por la posición de equilibrio, es decir, cuando la energía potencial es igual a cero.

La energía total E del punto vibrante se expresa por la suma de las dos formas de energía, es decir,

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} ma^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2} ka^2 \cos^2(\omega t + \alpha).$$

Como, de acuerdo con la designación adoptada, $m\omega^2 = k$, esta expresión se puede escribir de la forma:

$$E = \frac{1}{2} ka^2 \sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2} ka^2 \cos^2(\omega t + \alpha),$$

de donde

$$E = \frac{1}{2} ka^2, \quad (3)$$

es decir, la energía total E es proporcional al cuadrado de la amplitud de la oscilación y al coeficiente de elasticidad k .

Haciendo uso de la igualdad $k = m\omega^2 = m \frac{4\pi^2}{T^2}$, la fórmula (3) puede escribirse también de la forma siguiente:

$$E = \frac{2\pi^2 m}{T^2} a^2. \quad (4)$$

Por las fórmulas (3) y (4) puede verse que la energía total es constante durante todo el tiempo que dura la vibración, como tenía

que ocurrir de acuerdo con el principio de la conservación de la energía.

En las posiciones correspondientes a la desviación máxima toda la energía pasa a ser potencial, mientras que al atravesar la posición de equilibrio toda la energía pasa a ser cinética; en todas las demás posiciones del punto vibrante existen ambas formas de la energía. La representación gráfica de la energía del movimiento vibratorio fue estudiada en el § 29.

De lo expuesto se deduce, que durante el tiempo que dura el movimiento vibratorio la energía pasa constantemente de potencial a cinética y viceversa. Al ocurrir esto, en cada período T , toda la energía E pasa dos veces a ser energía cinética E_c (al atravesar las dos veces la posición de equilibrio) y dos veces a ser energía potencial E_p (en ambas posiciones extremas). En este sentido podemos hablar de «oscilaciones» de la energía, entendiéndose por esto su paso de cinética a potencial unas veces y de potencial a cinética otras. Por lo que acabamos de decir se ve, que esta «oscilación» de la energía se realiza con un período T' , igual a la mitad del período del propio movimiento vibratorio T .

Examinemos el siguiente ejemplo de determinación de la energía de la vibración.

Determinar la energía de la vibración de un peso, que está colgado de un muelle, por los datos siguientes: el peso se separa 8 cm de la posición de equilibrio en el momento inicial y después se suelta. Sobre el muelle se sabe que sometido a una fuerza de 2 kgf se estira 1 cm.

S o l u c i ó n. Como quiera que en el momento inicial el peso no tiene velocidad ($v_0 = 0$), la amplitud de la oscilación es $a = x_0 = 8$ cm.

El coeficiente de elasticidad k se determina de la forma siguiente:

$$k = \frac{2}{1} \text{ kgf/cm} = 2 \text{ kgf/cm} = 2 \cdot 980 \cdot 10^3 \text{ dinas/cm,}$$

de donde la energía total

$$E = \frac{1}{2} ka^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 980 \cdot 10^3 \cdot 64 \text{ ergios} \cong 6,3 \cdot 10^7 \text{ ergios} = 6,3 \text{ julios.}$$

Como se ve, este resultado no depende de la masa del cuerpo que vibra.

§ 100. Composición de movimientos vibratorios que tienen la misma dirección. Con frecuencia nos encontramos con movimientos en los cuales un cuerpo realiza simultáneamente dos o más oscilaciones. Por ejemplo, si colgamos un peso de un muelle sujeto al techo de un vagón montado sobre ballestas, este peso realizará un movimiento oscilatorio con respecto al punto de sujeción, el cual, a su vez, vibra sobre las ballestas del vagón; de esta forma, el peso realizará un movimiento compuesto de dos vibraciones de una misma dirección.

Veamos qué movimiento resulta al componer estas vibraciones. Empecemos por estudiar la composición de dos vibraciones que

tengan el mismo sentido e igual período, que se realicen con cierta diferencia de fases y que tengan diferentes amplitudes. Tomemos las vibraciones:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad x_2 = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \quad (1)$$

Las frecuencias cíclicas ω de ambas vibraciones son iguales, puesto que supusimos iguales sus períodos.

La elongación x , cuando el cuerpo toma parte simultáneamente en dos vibraciones, se expresa por la suma algebraica de las elongaciones x_1 y x_2 :

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \quad (2)$$

Efectuemos esta suma gráficamente. Representemos ambas vibraciones por sus vectores amplitud (véase el § 97), aplicados a un punto arbitrario O que se encuentre en el eje X (fig. 246). La amplitud a_1

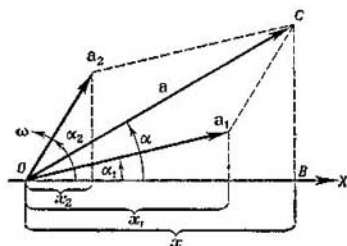


Fig. 246. Suma de vectores representativos de los movimientos vibratorios armónicos de igual período.

se toma en el momento inicial formando un ángulo α_1 con el eje X y la amplitud a_2 formando un ángulo α_2 . Ambas amplitudes giran con la misma velocidad angular ω y en sentido contrario al de las agujas del reloj. Por consiguiente, el ángulo que hay entre los vectores a_2 y a_1 todo el tiempo se conserva igual a $\alpha_2 - \alpha_1$. Como la suma de las proyecciones de dos vectores sobre un eje es igual a la proyección, sobre este mismo eje, del vector resultante de aquéllos, la vibración resultante se puede representar por el vector amplitud a , igual a la suma geométrica de los vectores amplitud a_1 y a_2 , es decir,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2. \quad (3)$$

Observando la fig. 246 vemos que

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (4)$$

El vector amplitud resultante a gira, evidentemente, con la misma velocidad angular que los vectores amplitud de las vibraciones que se componen.

El ángulo α , formado por el vector amplitud resultante con el eje X en el momento inicial, como vemos en la fig. 246, es igual a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{a_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + a_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}. \quad (5)$$

La oscilación resultante vendrá expresada por la proyección del vector amplitud a sobre el eje X , es decir, será igual a

$$x = x_1 + x_2 = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (6)$$

Vemos, pues, que el movimiento resultante es una vibración armónica de la misma dirección y período que las vibraciones componentes. La amplitud a y la fase inicial α de la vibración resultante se determinan respectivamente por medio de las amplitudes y de las fases iniciales de las vibraciones componentes, por las fórmulas (4) y (5).

Tiene importancia advertir, que, de acuerdo con la fórmula (4), la amplitud de la oscilación resultante a depende de la diferencia de fases $\alpha_2 - \alpha_1$ de las vibraciones componentes. Como el coseno no puede ser mayor que $+1$ ni menor que -1 , por la fórmula (4) vemos, que la amplitud resultante a no puede ser mayor que la suma ni menor que la diferencia de las amplitudes componentes a_1 y a_2 , es decir, que tiene que estar comprendida entre los límites

$$a_1 + a_2 \geq a \geq |a_2 - a_1|.$$

Si la diferencia de fases de las vibraciones componentes es igual a cero o a $2k\pi$, siendo k un número entero, el coseno de la diferencia de las fases será igual a $+1$, y por la fórmula (4) obtendremos

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2,$$

de donde

$$a = a_1 + a_2,$$

es decir, la amplitud de la oscilación resultante a es igual a la suma de las amplitudes de las vibraciones componentes a_1 y a_2 , cuando la diferencia de fases $\alpha_2 - \alpha_1 = 2k\pi$, siendo $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Si la diferencia de fases de las vibraciones componentes es igual a un múltiplo impar de π , el coseno de dicha diferencia será igual a -1 , y para la amplitud a obtendremos por (4), el valor:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2,$$

de donde

$$a = |a_2 - a_1|.$$

Tomamos aquí el valor absoluto de la diferencia $a_2 - a_1$, porque la amplitud a , por su propio significado, solamente puede ser una magnitud positiva.

De lo expuesto se deduce, que la *amplitud de la oscilación resultante* a es igual al valor absoluto de la diferencia de amplitudes de las vibraciones componentes a_2 y a_1 , cuando la diferencia de las fases es $\alpha_2 - \alpha_1 = (2k + 1)\pi$, siendo $k = 0, 1, 2, \dots$

Supongamos ahora que las vibraciones que se componen tienen la misma dirección pero períodos distintos. Entonces, en el diagrama vectorial del movimiento vibratorio (fig. 247) los vectores amplitud componentes a_1 y a_2 giran con distintas velocidades y, por consiguiente, el ángulo que forman entre sí no es constante, sino que varía

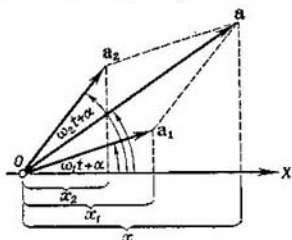


Fig. 247. Suma de vectores representativos de los movimientos vibratorios armónicos de períodos distintos.

con el tiempo. Como consecuencia de esto varía también la magnitud de la amplitud resultante a .

Supongamos que las vibraciones componentes tienen unas frecuencias cíclicas ω_1 y ω_2 . Como la diferencia de fases de las vibraciones componentes es variable, podemos tomar en calidad de momento inicial aquel en que las fases iniciales de las dos vibraciones sean iguales, es decir, representar las oscilaciones en la forma:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha), \quad x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha), \quad (7)$$

donde se supone que $\omega_2 > \omega_1$.

La diferencia de fases de las amplitudes componentes será igual a $(\omega_2 - \omega_1)t$. Poniendo este valor de la diferencia de fases en la fórmula (4), en lugar de $\alpha_2 - \alpha_1$, obtenemos la siguiente expresión del cuadrado de la amplitud resultante

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t. \quad (8)$$

De esta forma, la magnitud de la amplitud a de la oscilación resultante varía con el tiempo con un período determinado.

La velocidad angular con que gira el vector amplitud resultante, en este caso, no es constante, y, por lo tanto, el movimiento resultante *no es una vibración armónica*.

Estudiemos especialmente el resultado de la composición de dos vibraciones de igual amplitud $a_1 = a_2$, cuyos períodos y, por consiguiente, frecuencias cíclicas se diferencien entre sí muy poco.

Suponiendo $a_1 = a_2$ en la fórmula (8), obtenemos:

$$a^2 = 2a_1^2 [1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t] = 4a_1^2 \cos^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$$

o

$$a = \left| 2a_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right|. \quad (9)$$

Aquí, lo mismo que en la pág. 438 tomamos los valores absolutos de las magnitudes de la derecha, porque la amplitud es una magnitud positiva en esencia. El período del valor absoluto del coseno es igual a π ; por consiguiente, el período τ de la variación del valor absoluto de la amplitud será igual al tiempo durante el cual el argumento del coseno varía en π , es decir, τ se determina por la condición:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau = \pi,$$

de donde

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (10)$$

La frecuencia ν de variación de la amplitud, o sea, la magnitud inversa del período τ , es igual

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1, \quad (10a)$$

es decir, la frecuencia ν de variación de la amplitud de la vibración resultante es igual a la diferencia de frecuencias $\nu_2 - \nu_1$ de las vibraciones componentes. El ángulo que forma la amplitud resultante con el eje X , como vemos en la fig. 247, es igual a $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha$; por consiguiente, el vector amplitud resultante gira en este caso con una velocidad angular constante, igual a la semisuma de las frecuencias cíclicas de las vibraciones componentes. El movimiento resultante podemos obtenerlo tomando la proyección del vector amplitud resultante sobre el eje X , de donde la elongación resultante x será

$$x = a \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha \right)$$

o por la fórmula (9)

$$x = \left| 2a_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right| \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha \right). \quad (11)$$

Como supusimos que ω_2 se diferencia poco de ω_1 , la magnitud $\omega' = \omega_2 - \omega_1$ será pequeña en comparación con la magnitud $\omega_1 + \omega_2$, de donde tenemos: que la vibración resultante (11) puede considerarse como un movimiento vibratorio armónico que se realiza con una frecuencia cíclica de $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ y cuya amplitud a no perma-

nece constante, sino que varía periódicamente con el tiempo de acuerdo con la correlación (9). El período τ de variación de la amplitud a viene dado por la fórmula (10). Gráficamente, este género de vibraciones está representado en la fig. 248. La amplitud de esta vibración unas veces aumenta y otras disminuye; este fenómeno se conoce con el nombre de *pulsación*.

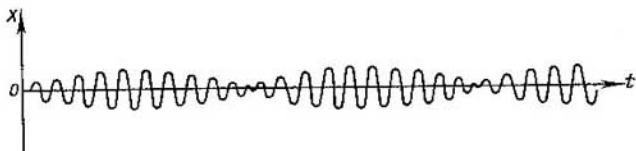


Fig. 248. Pulsación.

§ 101. Composición de movimientos vibratorios perpendiculares entre sí. Estudiemos ahora el resultado de la composición de dos movimientos vibratorios cuyas direcciones sean perpendiculares entre sí. Supongamos primeramente que el punto material realiza simultáneamente dos vibraciones perpendiculares entre sí y de igual período. Sean las direcciones correspondientes a dichas vibraciones las señaladas por los ejes OX y OY .

Las ecuaciones de las vibraciones serán:

$$x = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad y = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2), \quad (1)$$

donde a_1 y a_2 , y α_1 y α_2 son respectivamente las amplitudes y las fases de las vibraciones primera y segunda.

Determinemos la ecuación de la trayectoria del punto, para lo cual eliminaremos el tiempo en las ecuaciones (1).

Escribamos la ecuación (1) de la forma

$$\frac{x}{a_1} = \cos \omega t \cdot \cos \alpha_1 - \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} \alpha_1, \quad (2)$$

$$\frac{y}{a_2} = \cos \omega t \cdot \cos \alpha_2 - \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} \alpha_2. \quad (2a)$$

Multiplicando (2) por $\cos \alpha_2$ y (2a) por $\cos \alpha_1$, y restándolas miembro a miembro, obtenemos

$$\frac{x}{a_1} \cos \alpha_2 - \frac{y}{a_2} \cos \alpha_1 = \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Multiplicando (2) por $\operatorname{sen} \alpha_2$ y (2a) por $\operatorname{sen} \alpha_1$, y restándolas miembro a miembro, obtenemos

$$\frac{x}{a_1} \operatorname{sen} \alpha_2 - \frac{y}{a_2} \operatorname{sen} \alpha_1 = \cos \omega t \cdot \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro las dos últimas ecuaciones, hallamos la ecuación de la trayectoria:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (3)$$

Esta es la ecuación de una elipse, cuyas características vienen determinadas por el valor de la diferencia de fases $\alpha_2 - \alpha_1$. Estudiemos varios casos particulares. Supongamos que la diferencia de fases $\alpha_2 - \alpha_1$ de las oscilaciones componentes es igual a cero, es decir,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha.$$

La ecuación de la trayectoria (3) tomará en este caso la forma:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} = 0 \quad \text{o} \quad \left(\frac{x}{a_1} - \frac{y}{a_2}\right)^2 = 0,$$

de donde

$$\frac{x}{y} = \frac{a_1}{a_2},$$

es decir, obtenemos la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas y que forma con el eje OX un ángulo cuya tangente es igual a a_2/a_1 (fig. 249, a).

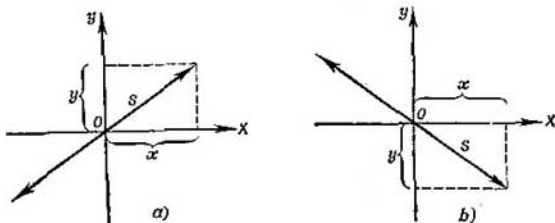


Fig. 249. De la composición de dos movimientos vibratorios perpendiculares entre sí, con fases iguales u opuestas, resulta un movimiento armónico a lo largo de una recta.

Por esta recta realiza el punto vibraciones armónicas, puesto que su posición sobre la recta viene dada por el segmento s , igual a

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a_1^2 \cos^2(\omega t + \alpha) + a_2^2 \cos^2(\omega t + \alpha)} = \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cos(\omega t + \alpha); \end{aligned}$$

por consiguiente, el período de la vibración resultante es igual al de las vibraciones componentes, y la amplitud a de la resultante es igual a

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Supongamos ahora que la diferencia de fases $\alpha_2 - \alpha_1$ de las vibraciones componentes es igual a π , es decir,

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \pi.$$

La ecuación de la trayectoria (3) tomará en este caso el aspecto:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{2xy}{a_1 a_2} = 0, \text{ de donde } \frac{x}{y} = -\frac{a_1}{a_2}.$$

Esta ecuación también representa una recta situada como se muestra en la figura 249.b; el punto realiza por esta recta oscilaciones armónicas de la misma amplitud que en el caso anterior.

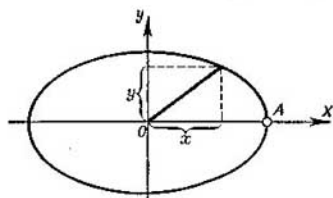


Fig. 250. Obtención de un movimiento elíptico por composición de dos movimientos vibratorios armónicos perpendiculares entre sí.

Si la diferencia de fases $\alpha_2 - \alpha_1$ de las vibraciones componentes es igual a $\pi/2$ ó $3\pi/2$, la ecuación de la trayectoria toma la forma:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1. \quad (4)$$

Esta es la ecuación de una elipse referida a los ejes OX y OY (fig. 250). Si la diferencia de fases $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, el punto se mueve por la elipse siguiendo la dirección de las agujas del reloj. Esto puede demostrarse escribiendo la ecuación de las oscilaciones componentes de la forma siguiente:

$$x = a_1 \cos(\omega t + \alpha),$$

$$y = a_2 \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -a_2 \sin(\omega t + \alpha).$$

En un momento determinado el argumento de ambas expresiones es igual a cero; en este momento el punto vibrante se encuentra en A (fig. 250); en el momento siguiente el argumento aumenta y, por consiguiente, x será positiva e y negativa; el punto irá hacia abajo y se moverá en el sentido de las agujas del reloj. Cuando la diferencia de fases de las vibraciones componentes es igual a $3\pi/2$, razonando de manera análoga se puede demostrar que el punto se moverá por la elipse en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Cuando la diferencia de fases cambia de signo, el punto invierte el sentido de su movimiento por la elipse. Por ejemplo, cuando $\alpha_2 -$

$-\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ obtenemos un movimiento en sentido contrario al de las agujas del reloj, mientras que si $\alpha_2 - \alpha_1 = -\frac{3\pi}{2}$, el sentido del movimiento del punto coincidirá con el de las agujas. Es evidente, que cuando las amplitudes sean iguales la elipse se transformará en una circunferencia.

De esta forma, dos oscilaciones armónicas perpendiculares entre sí

$$\begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= a \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

que pueden escribirse también de la forma

$$x = a \cos \omega t, \quad y = -a \sin \omega t, \quad (5a)$$

dan al componerse un movimiento uniforme siguiendo una circunferencia de radio a con una velocidad angular ω , en el sentido de las agujas del reloj.

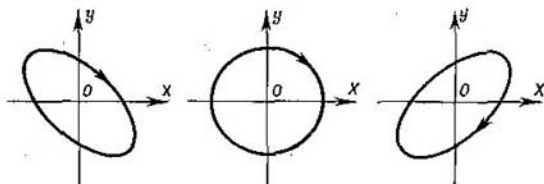


Fig. 251. Diferentes tipos de trayectorias que se producen al componer dos movimientos vibratorios armónicos perpendiculares entre sí de un mismo período.

Y al contrario, todo movimiento uniforme que se realice siguiendo una circunferencia de radio a , en el sentido de las agujas del reloj y con una velocidad angular ω , puede descomponerse en dos oscilaciones armónicas perpendiculares entre sí como las representadas por las fórmulas (5) ó (5a).

Del mismo modo, dos vibraciones armónicas perpendiculares entre sí:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \cos \left(\omega t + \frac{3\pi}{2} \right) = a \sin \omega t \quad (6)$$

dan al componerse un movimiento circular uniforme, de radio a y velocidad angular ω , en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Todos los demás valores de la diferencia de fases, a excepción de $\pm\pi/2$ y $\pm 3\pi/2$, dan elipses no reducidas a los ejes OX y OY . En la fig. 251 se representan algunas de las formas de las trayectorias que pueden resultar de la composición de dos movimientos vibratorios armónicos perpendiculares entre sí que tengan el mismo período.

De lo anteriormente expuesto se deduce que el movimiento de un punto por una elipse también puede descomponerse en dos vibraciones perpendiculares entre sí, cuyas fases se diferencien según la forma de la elipse y la dirección del movimiento del punto.

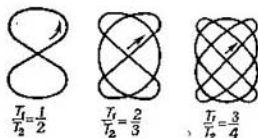


Fig. 252. Diferentes tipos de trayectorias que se producen al componer dos movimientos vibratorios armónicos perpendiculares entre sí y de períodos distintos (figuras de Lissajous).

Si las vibraciones perpendiculares entre sí tienen períodos distintos, las trayectorias que se obtienen al componerlas tienen formas más complicadas. En la fig. 252 están representadas las trayectorias correspondientes a algunos casos particulares; estas trayectorias reciben el nombre de *figuras de Lissajous*.

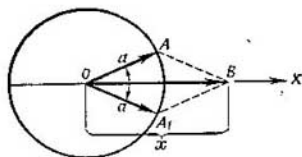


Fig. 253. Composición de dos vibraciones circulares representadas por los vectores OA y OA_1 que giran en sentidos opuestos.

Finalmente estudiemos la posibilidad de descomponer la vibración rectilínea de un punto en dos «vibraciones circulares». Para explicar esto, fijémonos en la fig. 253. Supongamos que un punto, a partir de su posición de equilibrio O , se desvía al mismo tiempo en dos direcciones. Una de estas desviaciones está representada por el vector OA y la otra por el vector OA_1 , numéricamente igual a OA . Llamemos a la longitud de cada uno de estos vectores elongación. La elongación resultante será igual a la suma geométrica de las dos componentes; por consiguiente, la posición del punto vibrante estará determinada por el punto B de la fig. 253. Supongamos que los vectores elongación giran alrededor del punto O en dos direcciones contrarias, pero con igual velocidad angular ω ; en este caso la elongación resultante tendrá la dirección de la recta OB , que llamaremos eje X . La distancia del punto B a la posición de equilibrio O estará determinada en un momento dado por la magnitud x , la cual, como puede verse en la figura, es igual a

$$x = 2a \cos(\omega t + \alpha),$$

es decir, la elongación resultante es de por sí una vibración armónica cuya amplitud es igual al doble del radio de la circunferencia que

recorren los extremos de los vectores OA y OA_1 . El período de la oscilación es igual al período de giro de los vectores elongación.

De aquí se deduce, que la elongación puede considerarse en el movimiento armónico rectilíneo como la suma geométrica de dos vectores elongación, que giran en sentidos contrarios y con una velocidad angular igual a la frecuencia cíclica ω de la vibración. La magnitud de estos vectores es igual a la mitad de la amplitud de la vibración y en cada momento dado están situados simétricamente con relación a la recta que sirve de trayectoria al punto.

§ 102. Oscilaciones amortiguadas. En la práctica, toda vibración de un punto material que no sea mantenida por energía exterior, se amortigua, es decir, su amplitud disminuye a medida que pasa el tiempo. Este amortiguamiento se debe a las fuerzas que frenan el movimiento vibratorio, como, por ejemplo, la de rozamiento en el punto de suspensión cuando se trata de un péndulo, o la de la resistencia que opone el medio. Para analizar esta cuestión hay que escribir la ecuación que expresa la segunda ley de Newton, teniendo en cuenta la resistencia. Nosotros nos limitaremos a estudiar el caso en que un punto realiza vibraciones rectilíneas en un medio viscoso. La resistencia del medio depende de la velocidad con que se mueve el punto y, como vimos en el § 42, cuando dicha velocidad es pequeña puede considerarse proporcional a ella y dirigida en sentido contrario. Por consiguiente, la resistencia del medio puede suponerse igual a $-rx$, donde r es una magnitud constante denominada *coeficiente de resistencia*. Esta fuerza se suma a la fuerza elástica $-kx$, de donde la fuerza total que actúa sobre el punto será $f = -kx - rx$ y, por consiguiente, la segunda ley de Newton puede escribirse de la forma siguiente:

$$m\ddot{x} = -kx - rx. \quad (1)$$

Dividiendo los dos miembros de esta ecuación por la masa m , obtenemos

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}\dot{x}. \quad (1a)$$

Haciendo

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \text{y} \quad \frac{r}{m} = 2\beta, \quad (2)$$

donde ω_0^2 y β son magnitudes positivas, podemos escribir la ecuación (1a) de la forma

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x}. \quad (1b)$$

A la ecuación (1b) puede dársele la forma que vimos en el § 97. Para ello introducimos una nueva variable z , ligada a x por la ecuación:

$$x = z \cdot e^{-\beta t}. \quad (3)$$

Realicemos un cambio de variables en la ecuación (1b) valiéndonos de las igualdades:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= e^{-\beta t} \cdot \dot{z} - \beta e^{-\beta t} \cdot z; \\ \ddot{x} &= e^{-\beta t} \cdot \ddot{z} - 2\beta e^{-\beta t} \cdot \dot{z} + \beta^2 e^{-\beta t} z.\end{aligned}$$

Poniendo estos valores de \dot{x} y \ddot{x} en la ecuación (1b) y simplificando todos sus términos en $e^{-\beta t}$, obtenemos

$$\ddot{z} - 2\beta \dot{z} + \beta^2 z = -\omega_0^2 z + 2\beta^2 z - 2\beta \dot{z}.$$

o

$$\ddot{z} = -(\omega_0^2 - \beta^2) z. \quad (4)$$

Suponiendo que la resistencia del medio es tan pequeña que $\omega_0^2 > \beta^{2*}$, tendremos que $\omega_0^2 - \beta^2$ será una magnitud positiva que podremos representar por $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2$, después de lo cual la ecuación (4) tomará la forma:

$$\ddot{z} = -\omega^2 z. \quad (4a)$$

La ecuación (4a) coincide con la (5) del § 97, cuya solución conocemos. Por esto, por analogía, podemos escribir la solución de la ecuación (4a) de la forma:

$$z = a_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (5)$$

donde a_0 y α son constantes que deben determinarse de acuerdo con las condiciones iniciales. Repitiendo los razonamientos expuestos en el § 97, llegamos a la conclusión de que z varía periódicamente y de que el período de la variación es

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

y, poniendo en lugar de ω su valor $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (6)$$

Utilizando las expresiones (2), el período T también puede representarse de la forma:

$$T = \frac{2\pi m}{\sqrt{km - \frac{1}{4}r^2}}. \quad (6a)$$

*) Cuando la resistencia del medio es mayor, $\beta^2 > \omega_0^2$, y entonces, como puede demostrarse, el movimiento deja de ser periódico. Pero nosotros no estudiaremos este caso.

Poniendo en la solución (5) en lugar de z su valor, obtenemos, por la fórmula (3), la ecuación del movimiento de un punto sometido a la acción de una fuerza elástica en un medio que ofrece resistencia:

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (7)$$

fórmula que puede presentarse también como

$$x = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (7a)$$

Esta solución representa una vibración cuya amplitud $a = a_0 e^{-\beta t}$ disminuye al transcurrir el tiempo.

El período de la oscilación $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ en un medio que ofrece resistencia es mayor que el período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ de un punto de igual masa m , sometido a la acción de una misma fuerza elástica $f = -kx$, pero que se encuentre en un medio que no ofrezca resistencia.

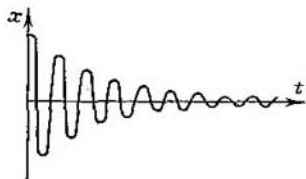


Fig. 254. Vibraciones amortiguadas.

El diagrama de x en función del tiempo se representa en la fig. 254. Como puede verse, la vibración se amortigua con el tiempo.

En estos amortiguamientos de tipo oscilante el logaritmo de la relación entre dos valores sucesivos de la amplitud, separados entre sí por un tiempo igual al período T , se llama *decremento logarítmico*. Llamando λ a este decremento, por definición, tendremos que

$$\lambda = \ln \frac{a_0 e^{-\beta t}}{a_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T}, \text{ es decir, } \lambda = \beta T. \quad (8)$$

Poniendo en la fórmula (7), en lugar de β , el decremento logarítmico λ obtenido por la fórmula (8) y, en lugar de ω , el período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ obtenemos otra expresión de las vibraciones amortiguadas:

$$x = a_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}} \cos \left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha \right), \quad (7b)$$

donde el período T se determina por la fórmula (6) ó (6a).

El decremento logarítmico λ puede hallarse directamente por medio de observaciones, midiendo los valores de las amplitudes a_1 y a_2 de dos oscilaciones consecutivas, en cuyo caso, por definición,

tendremos que:

$$\lambda = \ln \frac{a_1}{a_2}.$$

Conociendo λ y valiéndonos de la correlación

$$r = 2\beta m = 2 \frac{\lambda}{T} m,$$

podemos determinar el coeficiente de resistencia r .

Según la fórmula (7) las vibraciones no cesan totalmente hasta que no transcurra un plazo de tiempo infinitamente grande. Pero en realidad cesan dentro de un plazo finito, puesto que cuando la magnitud de las amplitudes llega a ser del mismo orden que las dimensiones de los átomos no es posible que existan vibraciones en un sistema macroscópico tomado en su conjunto. Cuando existe amortiguamiento, la energía comunicada al sistema al separarlo de su posición de equilibrio se va gastando paulatinamente en el trabajo que se realiza para vencer las fuerzas de rozamiento. Si se quiere que las vibraciones se mantengan hay que comunicar constantemente al sistema energía del exterior.

El péndulo de reloj puede servir de ejemplo de un sistema cuyas oscilaciones, a pesar de las fuerzas de rozamiento, conservan invariable la amplitud gracias a la energía que reciben. El mecanismo de escape del reloj empuja al péndulo de una manera acompasada con sus oscilaciones. La energía que se le comunica al ocurrir esto se toma de un muelle que se desenrolla o de una pesa que cae.

Todo sistema de esta especie, que mantenga invariable la amplitud de sus vibraciones, recibe el nombre de *sistema autooscilador*.

Para formarnos una idea más concreta de las vibraciones amortiguadas, resolvamos los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 1. El decremento logarítmico de las oscilaciones de un péndulo es igual a $\lambda = 0,02$. Determinar cuántas veces menor será la amplitud después de 100 oscilaciones completas de dicho péndulo.

Solución. En el momento inicial, cuando $t = 0$, la amplitud de la oscilación será

$$a = a_0 e^{-\beta t} = a_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}}$$

igual a a_0 .

Después de 100 oscilaciones, es decir, en el momento en que $t = 100 T$, la amplitud de la oscilación será

$$a_{100} = a_0 e^{-\lambda \cdot 100}, \text{ de donde } \frac{a_0}{a_{100}} = \frac{1}{e^{-\lambda \cdot 100}} = e^{\lambda \cdot 100} = e^2 \approx 7,4,$$

es decir, al cabo de 100 oscilaciones la amplitud disminuye en 7,4 veces.

Ejemplo 2. Hallar el decremento logarítmico de las oscilaciones amortiguadas de un péndulo, cuya longitud es $l = 50$ cm, si en 8 minutos pierde el 99% de su energía.

Solución. Llamemos a la energía de la oscilación del péndulo E_0 en el momento inicial y E'_t después de transcurrir un tiempo $t = 8 \text{ min} =$

= 480 s. Entonces, de acuerdo con las condiciones del ejemplo

$$\frac{E_t}{E_0} = \frac{1}{100}.$$

Y como la energía de las oscilaciones es directamente proporcional al cuadrado de las amplitudes, tendremos que

$$\frac{a_t}{a_0} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}.$$

La amplitud en el momento inicial, en que $t = 0$, es igual a a_0 ; la amplitud al cabo de un tiempo t es igual a $a_t = a_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}}$, siendo T el período de oscilación del péndulo, de donde $\frac{a_t}{a_0} = e^{-\lambda \frac{t}{T}} = \frac{1}{10}$, y el decremento logarítmico buscado del amortiguamiento será $\lambda = \frac{T}{t} \ln 10$. Teniendo en cuenta que este amortiguamiento es muy débil, el período de oscilación T puede expresarse aproximadamente por medio de la fórmula ordinaria del período, es decir,

$$T \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

de donde

$$\lambda \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\ln 10}{t} = 0,0068.$$

§ 103. Vibraciones forzadas. Estudiemos ahora las vibraciones de un punto material sobre el que actúa, además de la fuerza elástica y las de resistencia, una fuerza periódica complementaria. Un ejemplo de este tipo puede ser el de un peso, que estando colgado de un muelle, recibe impulsos a intervalos iguales de tiempo. Supongamos que esta fuerza excitatriz complementaria f_1 varía con el tiempo según la ley del seno o del coseno, es decir, que puede expresarse, por ejemplo, por la fórmula

$$f_1 = H \cos \omega t. \quad (1)$$

Esta suposición se reduce a admitir que dicha fuerza varía periódicamente y que su período es $T = \frac{2\pi}{\omega}$; la magnitud H recibe el nombre de amplitud de la fuerza y representa su valor máximo.

En este caso, la ecuación que expresa la segunda ley de Newton se escribe de la forma siguiente:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + H \cos \omega t; \quad (2)$$

el segundo miembro de esta igualdad es la suma de las fuerzas elásticas $-kx$, de la resistencia del medio $-r\dot{x}$ y de la excitación $H \cos \omega t$. Escribamos esta ecuación en la forma

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x} + h \cos \omega t, \quad (2a)$$

donde ω_0 y β tienen el mismo significado que en el § 102 [fórmula (2)] y h es igual a la razón de la amplitud de la fuerza a la masa del punto

$$h = \frac{H}{m}. \quad (3)$$

Cuando no existe fuerza excitatriz ($h \cos \omega t = 0$) ni de rozamiento, el punto vibra con una frecuencia circular ω_0 (*oscilaciones libres o propias*).

Intentemos ahora hallar la solución de la ecuación (2a), suponiendo que

$$x = a \cos (\omega t + \alpha); \quad (4)$$

dicho de otro modo, vamos a buscar la solución suponiendo que como resultado de la acción de todas las fuerzas se obtiene una vibración cuyo período es igual al de la fuerza excitatriz. Poniendo la función (4) en la ecuación (2a), hallamos las magnitudes a y α , partiendo de la condición de que dicha ecuación ha de convertirse en identidad. Por la expresión (4) hallamos los valores siguientes de las derivadas primera y segunda de x respecto a t .

$$\dot{x} = -a\omega \sin (\omega t + \alpha), \quad \ddot{x} = -a\omega^2 \cos (\omega t + \alpha);$$

poniendo estos valores de \dot{x} y \ddot{x} en la ecuación (2a) obtenemos $-a\omega^2 \cos (\omega t + \alpha) = -\omega_0^2 a \cos (\omega t + \alpha) + 2\beta a \omega \sin (\omega t + \alpha) + h \cos \omega t$ o representando la función trigonométrica del argumento complejo en forma desarrollada:

$$\begin{aligned} -a\omega^2 (\cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha) = \\ = -\omega_0^2 a (\cos \omega t \cdot \cos \alpha - \sin \omega t \cdot \sin \alpha) + \\ + 2\beta a \omega (\sin \omega t \cdot \cos \alpha + \cos \omega t \cdot \sin \alpha) + h \cos \omega t. \end{aligned}$$

Para que esta ecuación se transforme en identidad es necesario que los coeficientes de $\cos \omega t$ y de $\sin \omega t$ sean iguales en ambos miembros; por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} -a\omega^2 \cos \alpha = -a\omega_0^2 \cos \alpha + 2\beta a \omega \sin \alpha + h, \\ a\omega^2 \sin \alpha = a\omega_0^2 \sin \alpha + 2\beta a \omega \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\circ \quad \left. \begin{aligned} a(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \alpha - 2\beta a \omega \cdot \sin \alpha = h, \\ a(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \alpha + 2\beta a \omega \cdot \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

De la segunda ecuación (5) obtenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (6)$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones (5) y sumándolas, tenemos

$$a^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2] = h^2,$$

de donde

$$a = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (7)$$

Las expresiones (6) y (7) determinan respectivamente la fase y la amplitud de las *vibraciones forzadas estabilizadas**.

Si sobre un cuerpo en reposo comienza a actuar una fuerza excitatriz $f_1 = H \cos \omega t$, aquél empezará a realizar vibraciones forzadas

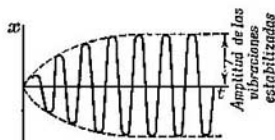


Fig. 255. Crecimiento de la amplitud de las vibraciones forzadas con el tiempo.

cuyas amplitudes irán aumentando hasta llegar al valor que determina la igualdad (7). La fig. 255 representa el aumento que experimentan con el tiempo las amplitudes de las vibraciones forzadas. En cuanto estas vibraciones se estabilizan, cesa el aumento de las amplitudes.

Por las fórmulas (6) y (7) vemos, que la amplitud a y la fase α de las vibraciones forzadas dependen de la correlación que existe entre la frecuencia ω de la fuerza excitatriz y la frecuencia ω_0 de las oscilaciones propias del punto. Las vibraciones, en términos generales, no coinciden «en fase» con la fuerza, es decir, la máxima elongación del punto no coincide con el momento en que la fuerza es máxima. Por la fórmula (6) vemos, que cuando la resistencia del medio es igual a cero, es decir, $\beta = 0$, las vibraciones y la fuerza tienen las mismas fases; en todos los demás casos la fase $\alpha \neq 0$. La expresión que ofrece más interés es la (7), que da las amplitudes de las vibraciones forzadas. La amplitud de la oscilación es proporcional a la amplitud de la fuerza. Cuando varía la frecuencia ω de la fuerza excitatriz, permaneciendo constante la frecuencia ω_0 de la oscilación propia, la amplitud de las oscilaciones forzadas también varía. Puede demostrarse que la amplitud de las vibraciones forzadas tiene un máximo cuando la frecuencia de la fuerza excitatriz ω_{res} satisface la correlación

*) En la teoría de las ecuaciones diferenciales se demuestra, que para hallar la solución general de la ecuación (2a) es necesario sumar las soluciones de la ecuación (4) y de la ecuación $\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x}$; no obstante, la solución de esta última ecuación, como demostramos en el § 102, representa de por sí unas vibraciones amortiguadas que, con el tiempo, dejan de representar un papel importante. Por el contrario, la solución de (4) no es amortiguada y se cumple mientras existe la fuerza excitatriz f_1 .

$\omega_{\text{res}}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$ *). Este máximo da lugar al llamado *fenómeno de la resonancia*. Basándonos en la correlación obtenida tenemos, que la frecuencia de resonancia ω_{res} será igual a

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (8)$$

Al mismo tiempo, por la fórmula (7), la amplitud máxima (de resonancia) alcanza el valor

$$a_{\text{res}} = \frac{h}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (9)$$

Si la resistencia del medio es igual a cero, es decir, $\beta = 0$, la amplitud máxima se obtiene cuando

$$\omega_{\text{res}} = \omega_0,$$

es decir, cuando la frecuencia de la fuerza excitatriz ω se hace igual a la frecuencia ω_0 de las oscilaciones propias; en este caso la amplitud de las vibraciones forzadas se hace infinita. Cuando el valor de β es diferente de cero, la amplitud nunca llega al ser igual al infinito y su máximo se obtiene para los valores de ω_{res} menores de ω_0 . En la fig. 256 se muestra cómo las amplitudes de las vibraciones forzadas dependen de la frecuencia de la fuerza excitatriz, para distintos valores de β . Como puede verse, cuanto mayor es el coeficiente de amortiguamiento β , menos agudamente se manifiesta el máximo de la amplitud.

Las curvas de la fig. 256 se llaman *curvas de resonancia*. Estas curvas tienen un máximo tanto más alto y agudo cuanto menor es el amortiguamiento β del sistema resonante. Como en realidad β siempre es distinta de cero, con la resonancia es imposible que se produzcan amplitudes infinitas.

Veamos además la dependencia que existe entre la fase de las vibraciones forzadas α y la frecuencia [fórmula (6)]. Cuando $0 \leq \omega < \omega_0$ la tangente toma valores negativos y, por consiguiente, se obtienen para α las siguientes desigualdades: $0 \geq \alpha > -\frac{\pi}{2}$ ó $\pi \geq \alpha > \frac{\pi}{2}$. Suponiendo que en la primera de las ecuaciones (5) $\omega = 0$, hallamos: $a\omega_0^2 \cos \alpha = h$, y como quiera que a y h son positivas, cuando $\omega = 0$ obtenemos que el $\cos \alpha$ debe ser mayor que

*) Para convencerse de esto hay que hallar un mínimo del denominador de la expresión (7). Con este fin, igualamos a cero la derivada de dicho denominador:

$$-2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot 2\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

Y como ω no es igual a cero (puesto que a $\omega = 0$ corresponde un máximo), tendremos que el denominador de la expresión (7) alcanzara un mínimo para

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2.$$

cero. Esta condición nos obliga a elegir una sola de las dos desigualdades, es decir, $0 \geq \alpha > -\frac{\pi}{2}$. De esta forma, cuando $0 \leq \omega \leq \omega_0$, la diferencia de fases α es negativa, es decir, la fase de las vibraciones forzadas se retrasa respecto a la de la fuerza excitatriz. Este retraso de fase aumenta a medida que el valor de ω se aproxima al de la frecuencia de resonancia ω_{res} . Cuando se produce la resonancia,

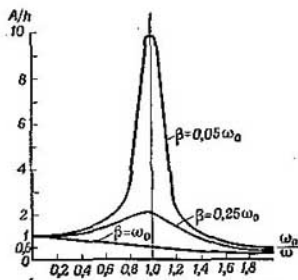


Fig. 256. Relación entre las amplitudes de las vibraciones forzadas y la frecuencia de la fuerza excitatriz, para diferentes coeficientes de amortiguamiento.

es decir, cuando $\omega = \omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, según la fórmula (6), la fase de las vibraciones forzadas viene determinada por la correlación:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{\frac{\omega_0^2 - 2\beta^2}{\beta}}$$

En los casos de resonancia aguda, β es pequeña, y para la $\operatorname{tg} \alpha$ obtenemos aproximadamente

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\omega_0}{\beta}$$

Como la magnitud ω_0/β es grande, la fase α se aproxima a $-\frac{\pi}{2}$.

Cuando $\omega = \omega_0$, la fase $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Si $\omega > \omega_0$ la tangente del ángulo α

es positiva y, por consiguiente, $\alpha < -\frac{\pi}{2}$, es decir, el retraso de fase aumenta todavía más. Cuando las frecuencias de la fuerza excitatriz son mucho mayores que las de las oscilaciones propias ω_0 , la fase α , aunque sigue siendo negativa, tiende a $-\pi$. La relación entre α y la razón ω/ω_0 se muestra gráficamente en la fig. 257 referida a dos valores distintos de β : la curva 1 corresponde al valor menor de β (pequeño amortiguamiento) y la 2, al valor mayor de β (gran amortiguamiento).

En las proximidades de la resonancia, donde $\alpha \cong -\pi/2$, la fuerza es positiva durante todo el tiempo que dura el movimiento, desde la elongación máxima negativa hasta la elongación máxima positiva, y es negativa durante el movimiento inverso; de forma, que dicha fuerza hace que aumente constantemente la amplitud de las vibraciones. Este aumento de amplitudes tiene lugar hasta que la totalidad del trabajo de la fuerzas externas se gaste en vencer las fuerzas de rozamiento que dan lugar a que se amortigüen las vibraciones. En

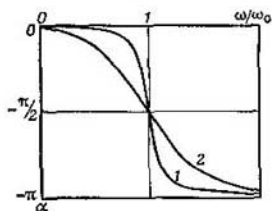


Fig. 257. Relación entre la fase de las vibraciones forzadas y la frecuencia de la fuerza excitatriz.

estas condiciones, las amplitudes alcanzan el valor correspondiente a las vibraciones forzadas estabilizadas.

El trabajo de la fuerza exterior es máximo cuando la diferencia de fases es igual a $-\frac{\pi}{2}$, es decir, cuando la frecuencia se aproxima a la de resonancia. Para los demás desplazamientos de fase esta fuerza actúa unas veces como aceleradora y otras como retardadora del movimiento. Cuando $\alpha = 0$ ó $\alpha = -\pi$ la fuerza acelera el movimiento durante la mitad del tiempo y lo retarda durante la otra mitad, es decir, en total no realiza ningún trabajo.

De esto se deduce que, fuera del campo de la resonancia, la fuerza exterior sólo realiza un trabajo insignificante, pero al producirse la resonancia aumenta el trabajo. Este efecto se revela especialmente cuando la resonancia es aguda. En este caso β es pequeña y, como se ve en la fig. 257, es suficiente que la magnitud ω varíe desde un valor poco menor que ω_0 hasta otro poco mayor de ω_0 , para que α varíe desde un valor próximo a $\alpha = 0$ hasta otro próximo a $\alpha = -\pi$. En este sentido se puede decir que la diferencia de fases entre la fuerza y la elongación se invierte al pasar la frecuencia por el valor $\omega_0 \cong \omega_{res}$.

El fenómeno de la resonancia desempeña un gran papel en muchos procesos físicos y en la técnica. En algunos casos este fenómeno resulta perjudicial. Veamos lo que ocurriría, por ejemplo, con un motor provisto de una excéntrica y sujeto a un soporte capaz de efectuar vibraciones elásticas. Al funcionar el motor se produciría una fuerza periódica que agitaría el soporte y provocaría en él vibraciones forzadas. Al producirse la resonancia, el motor comunicaría al soporte

una energía considerable y la amplitud de las vibraciones de este último podría llegar a alcanzar unas dimensiones peligrosas para su resistencia. Si el número de revoluciones del motor siguiera aumentando, cambiaría la diferencia de fases existente entre la fuerza que agitaba el soporte y los desplazamientos de éste; el trabajo de agitación del soporte, producido por el motor, disminuiría y con ello aumentaría todavía más su número de revoluciones, cosa también perniciosa, puesto que puede dar lugar a que se estropee el propio motor.

Una forma peculiar de resonancia es la llamada *resonancia paramétrica*. Las vibraciones de un sistema pueden ser producidas no sólo por la acción de fuerzas excitatrices como las que acabamos de estudiar, sino también a causa del cambio periódico de uno de sus parámetros, que en las vibraciones libres permanece constante. Por ejemplo, en un sistema mecánico las vibraciones pueden producirse como resultado de la variación del momento de inercia, de las dimensiones, de la tensión, etc. La amplitud de las vibraciones llega al máximo cuando existe una relación determinada entre la frecuencia ν_p de variación del parámetro y la frecuencia media de las oscilaciones propias $\bar{\nu}_0$. Esta relación es $\nu_p/\bar{\nu}_0 \approx 2/k$, donde k es un número entero, es decir, cuando $\nu_p/\bar{\nu}_0$ toma uno de los valores 2, 1, 1/2, 1/3, etc.

Las condiciones apropiadas para la resonancia paramétrica se producen tanto más fácilmente, cuanto mayor es la variación del parámetro y menores son las pérdidas de energía del sistema (rozamiento, resistencia). Lo más frecuente es que la resonancia paramétrica se produzca cuando $\nu_p/\bar{\nu}_0 = 2$. Como ejemplo sencillo de resonancia paramétrica puede servir el del balanceo de un columpio, cuando los que se mecen se agachan al compás de las oscilaciones de aquél. Al agacharse, la longitud equivalente del péndulo físico, que representa de por sí el columpio, varía periódicamente. Otro ejemplo de resonancia paramétrica nos lo ofrece la excitación de vibraciones que se producen en una cuerda variando periódicamente su tensión. Si la frecuencia de la variación periódica de la tensión se aproxima al doble de la frecuencia de las vibraciones propias de la cuerda, en ésta se producen fuertes vibraciones transversales, a pesar de que las fuerzas exteriores (la tensión) actúan a lo largo de ella. Las vibraciones que se producen a causa de la resonancia paramétrica pueden ser perjudiciales, por ejemplo, en las máquinas que tienen órganos móviles pueden dar lugar a la destrucción de sus cojinetes.

Examinemos un ejemplo sobre vibraciones forzadas.

Ejemplo. Un cuerpo cuya masa es de 400 g está colgado de un muelle. Bajo la acción de un peso de 40 gf el muelle se estira 1 cm. El decremento logarítmico de las vibraciones del cuerpo es $\lambda = 1,57$. Determinar cuál es el período

de la oscilación en que se produce la resonancia y la amplitud correspondiente de resonancia, sabiendo que la amplitud de la fuerza excitatriz es igual a $H = 200$ gf.

S o l u c i ó n. Cuando el amortiguamiento es pequeño $\omega \cong \omega_0$ y, por consiguiente, el decremento logarítmico $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \beta \cong \frac{2\pi}{\omega_0} \beta$. Poniendo en la fórmula (8), en lugar de β , su valor aproximado en función de λ , obtenemos para la frecuencia de resonancia el valor

$$\omega_{\text{res}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2};$$

en nuestro caso

$$\omega_{\text{res}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1,57}{\pi} \right)^2} \cong 0,94\omega_0;$$

de donde

$$T_{\text{res}} = \frac{1}{0,94} T_0$$

o

$$T_{\text{res}} = 1,07T_0,$$

donde T_{res} es el período en que se produce la resonancia y T_0 es el período de oscilaciones propias del cuerpo colgado del muelle. Según los datos del ejemplo:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{400}{40 \cdot 981}} \text{ s} \cong 0,63 \text{ s}.$$

Por lo tanto, la resonancia se produce cuando el período

$$T_{\text{res}} = 1,07 \cdot 0,63 \text{ s} \cong 0,67 \text{ s}.$$

Poniendo en la fórmula (9) en lugar de h su valor H/m y en lugar de β el decremento logarítmico λ , obtenemos

$$a_{\text{res}} = \frac{\frac{H}{m}}{\omega_0^2 \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2}},$$

de donde, aplicando los datos numéricos hallamos que $a_{\text{res}} \cong 10$ cm.

§ 104. Representación de tipos oscilatorios cualesquiera por medio de vibraciones armónicas. Hasta ahora hemos estudiado en lo fundamental el movimiento armónico simple, es decir, el movimiento en que la elongación x de la partícula vibrante se expresa por la fórmula

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad (1)$$

o lo que es lo mismo (véase la pág. 428)

$$x = a \sin(\omega t + \alpha'), \quad (1a)$$

donde a es la amplitud de la vibración, ω es la frecuencia circular y α y α' son las fases iniciales. Estas vibraciones se representan gráficamente por una senoide.

Pero las vibraciones reales sólo pueden aproximarse más o menos a las sinusoidales propiamente dichas, puesto que toda vibración real va acompañada de su amortiguamiento (véase el § 102). Además, son muy frecuentes los casos en que las vibraciones tienen, en general, un carácter más complejo. No obstante, el estudio de las vibraciones armónicas tiene mucha importancia, ya que las vibraciones complejas pueden considerarse compuestas de vibraciones armónicas.

Vimos con anterioridad (§ 100) que cuando se componen dos movimientos vibratorios armónicos x_1 y x_2 , que tienen una misma dirección

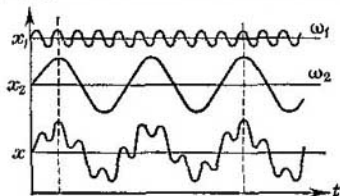


Fig. 258. Composición de dos movimientos vibratorios armónicos cuyas frecuencias son ω_1 y ω_2 .

e igual frecuencia ω_1 , la vibración resultante es también un movimiento vibratorio armónico. Pero esto solamente ocurre cuando se componen vibraciones de una misma frecuencia. Si los dos movimientos armónicos que se componen tienen *frecuencias diferentes*, la oscilación resultante tiene un carácter más complicado. En el renglón superior de la fig. 258 está representado gráficamente un movimiento vibratorio armónico de frecuencia ω_1 y amplitud a_1 determinadas (sobre el eje de ordenadas se toman las elongaciones x_1 y sobre el de abscisas el tiempo). En el renglón intermedio se representa otra vibración armónica x_2 cuya frecuencia ω_2 es 4,5 veces menor que la frecuencia ω_1 del primer movimiento y cuya amplitud $a_2 = 2,5 a_1$. Finalmente, en el renglón de abajo está representada la vibración compuesta de las dos primeras; la elongación x del punto que realiza esta vibración compuesta es igual en cada momento dado a

$$x = x_1 + x_2.$$

Podríamos plantearnos el problema inverso, es decir, dada una vibración compleja considerarla como una suma de armónicas y determinar cuáles son éstas. En el caso de la oscilación compleja representada en el renglón inferior de la fig. 258 podremos descomponerla en las armónicas representadas en los otros dos renglones de la misma figura.

En el § 100 estudiamos el fenómeno conocido con el nombre de pulsación. Este fenómeno consiste en que si dos vibraciones $x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha)$ y $x_2 = a_1 \cos(\omega_2 t + \alpha)$, cuyas frecuencias ω_1 y ω_2 se diferencian poco entre sí, sumándolas dan una vibración de frecuen-

cia $\omega = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2)$ cuya amplitud a varía según la ley

$$a = \left| 2a_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right|. \quad (2)$$

Recíprocamente podemos decir, que una vibración compleja cuya amplitud varíe de acuerdo con la ley (2) puede descomponerse en dos movimientos vibratorios armónicos puros cuyas frecuencias serán ω_1 y ω_2 .

Análogamente podemos imaginar otra vibración compleja cuya amplitud varíe lentamente (en comparación con el período de las propias vibraciones) según otra ley cualquiera. Este tipo de vibraciones se conoce con el nombre de *vibraciones moduladas*. Estas vibraciones moduladas no son armónicas, pero se pueden descomponer en una serie de movimientos de este tipo. Tomemos como ejemplo la vibración

$$x = a \cos \omega_0 t,$$

cuya amplitud varía de acuerdo con la ley

$$a = a_1 + a_2 \cos \omega t,$$

donde a_1 y a_2 son constantes, con la particularidad de que $a_2 < a_1$ y $\omega \ll \omega_0$. Esta ley significa que la amplitud a varía con el tiempo entre los valores $a_1 + a_2$ y $a_1 - a_2$. Poniendo el valor dado de a en la expresión de x , obtenemos:

$$x = (a_1 + a_2 \cos \omega t) \cdot \cos \omega_0 t = a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos \omega t \cdot \cos \omega_0 t$$

$$x = a_1 \cos \omega_0 t + \frac{a_2}{2} \cos (\omega_0 + \omega) t + \frac{a_2}{2} \cos (\omega_0 - \omega) t, \quad (3)$$

es decir, que la vibración modulada que estudiamos puede descomponerse en una suma de tres armónicas cuyas frecuencias serán ω_0 , $\omega_0 + \omega$ y $\omega_0 - \omega$ y a las cuales corresponderán respectivamente las amplitudes a_1 , $a_2/2$ y $a_2/2$.

El resultado de la composición de dos vibraciones armónicas depende de sus frecuencias, amplitudes y fases iniciales. Según cuales sean los valores de las frecuencias, fases y amplitudes, las vibraciones compuestas que se obtengan pueden ser muy diversas. Aún es más complejo el carácter de las vibraciones que se obtienen al componer tres o más armónicas. Y, recíprocamente, una vibración de carácter muy complejo puede descomponerse en un número determinado de vibraciones armónicas de diferentes amplitudes y frecuencias.

En la teoría de las series trigonométricas se demuestra, que toda función periódica de período 2π

$$x = F(\omega t)$$

puede representarse en forma de serie trigonométrica ilimitada

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \dots + \left. \begin{array}{l} \\ + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots \end{array} \right\} \quad (4)$$

Esta serie se llama *serie de Fourier**); los coeficientes $A_0, A_1, A_2, A_3 \dots$ y $B_1, B_2, B_3 \dots$ para este tipo de $F(\omega t)$ se calculan por medio de fórmulas determinadas.

Si la función es par, es decir, si conserva su valor cuando se cambia el signo del argumento por el contrario

$$F(-\omega t) = F(\omega t),$$

todos los coeficientes B_1, B_2, B_3, \dots son iguales a cero y, por lo tanto, el desarrollo en serie toma la forma siguiente:

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \dots \quad (5)$$

Si la función es impar, es decir, si dicha función cambia de signo al cambiar el signo del argumento

$$F(-\omega t) = -F(\omega t),$$

todos los coeficientes $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ son iguales a cero y el desarrollo en serie toma la forma:

$$x = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (6)$$

Como vemos, hablando en términos generales, cualquier vibración periódica puede representarse matemáticamente como una suma de armónicas, cuyas frecuencias son múltiplos de $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$, etc.

En la parte baja de la fig. 259 está representada una vibración parecida a una línea quebrada; más arriba se ven las cuatro sinusoides en que puede descomponerse. Analíticamente, esta descomposición tiene la forma:

$$x = 10a \sin \omega t - 1,5a \sin 3\omega t + 0,6a \sin 5\omega t - 0,3a \sin 7\omega t. \quad (7)$$

En este desarrollo $B_1 = 10a, B_3 = -1,5a, B_5 = 0,6a$ y $B_7 = -0,3a$; todos los demás coeficientes B_i son iguales a cero.

*) De una forma más general se demuestra, que cualquier función $y = F(x)$, que satisfaga las llamadas condiciones de Dirichlet y que venga dada en un intervalo comprendido entre $-l$ y $+l$, puede representarse en forma de serie:

$$y = A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{l} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + A_3 \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots + \left. \begin{array}{l} \\ + B_1 \sin \frac{\pi x}{l} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + B_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \end{array} \right\} \quad (4a)$$

El resultado del desarrollo de una oscilación compleja en serie de Fourier puede representarse escribiendo todas aquellas frecuencias cuyas amplitudes son diferentes de cero y los valores de las amplitudes correspondientes. Es preferible hacer esta anotación gráficamente, tomando sobre el eje de abscisas la escala de las frecuencias

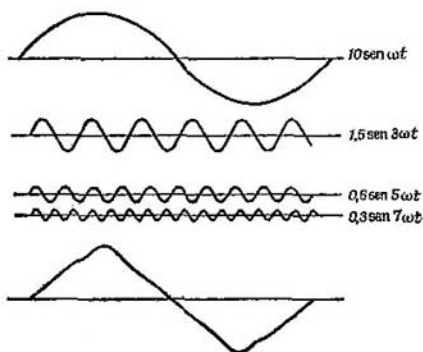


Fig. 259. Descomposición de un movimiento vibratorio complejo en una serie de movimientos vibratorios armónicos.

y trazando en los sitios correspondientes de este eje líneas verticales cuya longitud, en escala determinada, represente su amplitud. Este diagrama suele llamarse *espectro* de la oscilación. En la fig. 260



Fig. 260. Espectro de la vibración compleja representada en la fig. 258.

se muestra el espectro de la vibración compleja del renglón inferior de la fig. 258. Como quiera que esta vibración puede descomponerse en dos sinusoides cuyas frecuencias son ω_1 y $\omega_2 = \frac{\omega_1}{4,5}$ y cuyas amplitudes son a_1 y $a_2 = 2,5 a_1$, su espectro se representa por dos líneas verticales, a las que corresponden respectivamente las abscisas ω_1 y $\frac{\omega_1}{4,5}$, de las cuales la segunda tiene una longitud 2,5 veces mayor que la primera.

En la fig. 261 se muestra el espectro de la vibración compleja representada en la fig. 259. De acuerdo con la descomposición (7),

este espectro consta de cuatro líneas cuyas frecuencias son ω , 3ω , 5ω y 7ω ; las longitudes respectivas de estas líneas, en una escala determinada, son iguales a 10; 1,5; 0,6 y 0,3 unidades de longitud.

La representación de las vibraciones complejas por medio de este tipo de espectros no es completa, puesto que solamente da las frecuencias y las amplitudes de las vibraciones armónicas componentes,



Fig. 261. Espectro de la vibración compleja representada en la fig. 259.

omitiendo sus fases iniciales; no obstante, son muchos los casos en que es suficiente conocer la frecuencia y la amplitud.

Hasta ahora hemos estudiado la descomposición en armónicas de oscilaciones complejas, que tienen carácter periódico. Pero el movimiento vibratorio puede tener carácter aperiódico. Como ejemplo podemos citar la vibración amortiguada representada en la fig. 254. La amplitud de esta vibración se amortigua continuamente de tal manera, que cualquier estado determinado del movimiento puede producirse una vez y no repetirse más. Este movimiento no es periódico ni puede desarrollarse en serie de Fourier con una serie discontinua de frecuencias ω , 2ω , 3ω , ... No obstante, puede descomponerse en una multitud infinita de movimientos vibratorios armónicos, con la particularidad de que las frecuencias de las vibraciones «contiguas» se diferenciarán entre sí infinitamente poco y las amplitudes ΔA_i de las distintas vibraciones elementales serán también infinitamente pequeñas*).

A este tipo de vibraciones no corresponde ya gráficamente un espectro formado por líneas aisladas («espectro de rayas»), sino un espectro continuo, lo que denota la existencia de vibraciones con «todas» las frecuencias. Para representar gráficamente un espectro continuo volvamos a tomar como abscisas las frecuencias ω y como ordenadas la razón $\Delta A_i/\Delta\omega_i$. La curva así construida nos dará el diagrama de «distribución de las amplitudes» por frecuencias en el espectro continuo de la vibración compuesta de que se trata. En la fig. 262, a se vuelve a representar la vibración amortiguada y en la 262, b la «distribución de las amplitudes» por frecuencias en el espectro continuo de esta misma vibración. Las ordenadas de este diagrama multiplicadas por el intervalo de frecuencias correspondiente $\Delta\omega_i$, dan la amplitud media de las vibraciones en dicho intervalo. Como puede verse en la fig. 262, b, la curva tiene un máximo, que es tanto más agudo cuanto más débil es el amortiguamiento.

Para otros movimientos no periódicos se obtienen espectros continuos con distinta distribución de amplitudes por frecuencias.

*) Matemáticamente esto corresponde a la representación de la función en forma de la integral de Fourier:

$$F(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) \cos \alpha(\theta - \omega t) d\theta.$$

Veamos ahora qué significado físico tiene la descomposición de un movimiento inarmónico en sus componentes armónicas, es decir, de qué forma pueden descubrirse en la práctica estas componentes (armónicas). Supongamos que un proceso determinado depende del tiempo y esta dependencia se expresa por una función $f(t)$, que puede

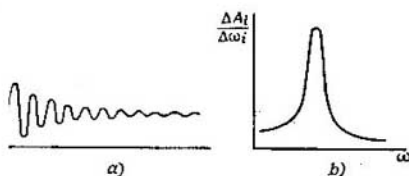


Fig. 262. Vibración amortiguada (a) y distribución de las amplitudes en su espectro (b).

desarrollarse en serie de Fourier. Admitamos, por ejemplo, que este desarrollo puede representarse de la forma:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t). \quad (8)$$

Ambos miembros de esta ecuación son matemáticamente idénticos, es decir, que el conjunto de las armónicas no se diferencia de la función $f(t)$.

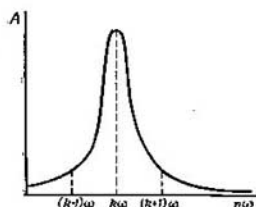


Fig. 263. Amplitudes de las vibraciones forzadas.

Para registrar un término *aislado* de la serie (8) (es decir, una armónica aislada) hay que hacer un experimento en condiciones que permitan descubrirla. Esto se puede conseguir, por ejemplo, de la siguiente manera: supongamos que la función $f(t)$ caracteriza la fuerza excitatriz que actúa sobre un sistema (resonador) capaz de realizar vibraciones forzadas (§ 103). Supongamos también que este resonador tiene una frecuencia propia de oscilación (frecuencia de resonancia) que coincide con la frecuencia $k\omega$ de una de las armónicas de la serie (8). Si la curva de resonancia del resonador es tan aguda

que las frecuencias de las armónicas contiguas ($k \pm 1$) ω se encuentran en un campo de amplitudes muy pequeñas de las vibraciones forzadas (fig. 263), el resonador sólo realizará prácticamente vibraciones de frecuencia $k\omega$, con una amplitud proporcional a la de la armónica $k\omega$ correspondiente de la serie (8). Variando la frecuencia de resonancia del resonador (es decir, sintonizándolo), se pueden crear sucesivamente las condiciones necesarias para registrar las demás armónicas componentes (8).

Fenómenos de este tipo tienen lugar en los instrumentos que se utilizan para determinar la composición espectral de algunos procesos físicos, como, por ejemplo, las perturbaciones luminosas o sonoras y las oscilaciones eléctricas.

§ 105. Representación de los procesos vibratorios por medio de números complejos. Por la teoría de los números complejos sabemos, que todo número complejo expresado en la forma $\xi = a \cdot e^{i\varphi}$ (donde a y φ son números reales; e , es la base de los logaritmos naturales; $i = \sqrt{-1}$, puede representarse de la forma $a (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$. Por lo tanto,

$$\xi = a \cdot e^{i\varphi} = a (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi), \quad (1)$$

donde la parte real del número complejo ξ , que nosotros designaremos por $|\xi|$, vendrá expresada de la forma siguiente:

$$|\xi| = a \cos \varphi. \quad (2)$$

Esta última correlación tiene carácter de identidad, por consiguiente, en lugar de la función trigonométrica $a \cos \varphi$ podemos considerar la parte real del número complejo $\xi = a \cdot e^{i\varphi}$. Esta sustitución es de por sí completamente formal y no nos da nada nuevo. Pero la cuestión está en lo siguiente: si con una serie de números complejos ξ hacemos determinadas operaciones matemáticas (sumas, restas, multiplicaciones, derivaciones, integraciones, etc.) y después separamos la parte real de la imaginaria, obtenemos el mismo resultado que si hiciéramos operaciones análogas con las funciones trigonométricas correspondientes. Esta peculiaridad permite sustituir las operaciones trigonométricas, que exigen un trabajo relativamente grande, por operaciones más simples con funciones exponenciales. Por esta razón, el empleo de funciones con exponentes imaginarios, en lugar de las funciones trigonométricas correspondientes, es muy cómodo para el cálculo.

Como vimos anteriormente, una expresión de la forma

$$x = a \cos (\omega t + \alpha)$$

representa un movimiento vibratorio armónico de amplitud a , frecuencia circular ω y fase inicial α ; la magnitud t es el tiempo, contado a partir de un determinado momento inicial.

Basándonos en lo expuesto, está claro que este movimiento armónico también puede representarse como la parte real $|\xi|$ de un número complejo

$$\xi = a \cdot e^{i(\omega t + \alpha)}.$$

Ya hemos visto que para resolver muchos problemas basta conocer el cuadrado de la amplitud, es decir, la magnitud a^2 , puesto que la energía de la vibración es proporcional a a^2 ; mientras que el valor de la fase inicial α puede no interesar. Es fácil demostrar, que para hallar a^2 no es necesario separar, de hecho, la parte real de la imaginaria en el número complejo de la forma (3), sino que es sufi-

ciente formar la expresión $\xi\xi^*$, donde ξ^* es un número complejo conjugado de ξ . (Recordemos, que recibe el nombre de número complejo conjugado de otro, el que se obtiene de este último mediante el cambio de signo de todas las unidades imaginarias i). Según esto, el número complejo conjugado de ξ , expresado por la fórmula (3), será:

$$\xi^* = ae^{-i(\omega t + \alpha)}. \quad (3a)$$

Formando la expresión $\xi\xi^*$, obtenemos:

$$\xi\xi^* = ae^{i(\omega t + \alpha)} \cdot ae^{-i(\omega t + \alpha)} = a^2, \quad (4)$$

es decir, que $\xi\xi^*$ nos da directamente el cuadrado de la amplitud.

Generalizando la expresión (3) podemos suponer que la magnitud a también es compleja; en este caso no puede expresar directamente la amplitud real de la vibración, puesto que esta amplitud es siempre una magnitud real. No obstante, empecemos por esclarecer qué sentido físico tiene esta «amplitud compleja». Para esto supongamos que $a = a_0 e^{i\alpha_0}$, donde a_0 y α_0 son números reales, entonces

$$\xi = a_0 e^{i\alpha_0} \cdot e^{i(\omega t + \alpha)}$$

o

$$\xi = a_0 e^{i(\omega t + \alpha + \alpha_0)}. \quad (4a)$$

Separando la parte real de la imaginaria, obtenemos:

$$|\xi| = a_0 \cos(\omega t + \alpha + \alpha_0), \quad (5)$$

donde puede verse que $|\xi|$ representa de por sí un movimiento oscilatorio armónico, cuya amplitud es a_0 , que tiene una fase inicial $\alpha + \alpha_0$. De esta forma, el valor complejo de la amplitud indica que la fase inicial ha variado en α_0 . Es fácil comprobar que, en este caso, $\xi\xi^*$ da también el cuadrado de la amplitud real: $\xi\xi^* = a_0^2$.

Para que quede clara la comodidad que ofrece la utilización de los números complejos para representar los movimientos vibratorios armónicos, resolvamos un problema de composición de dos armónicas. Sean estas dos vibraciones $x_1 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$ y $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ y consideremos que tienen una misma frecuencia ω y que se realizan a lo largo de una misma recta. (Este problema fue resuelto en el § 100 por el procedimiento de la suma de los vectores amplitud). Utilizando los números complejos, obtenemos:

$$x_1 = a_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)}, \quad x_2 = a_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)}.$$

La vibración resultante será:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} + a_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)}.$$

El cuadrado de su amplitud a^2 lo obtenemos multiplicando el segundo miembro de esta expresión por su magnitud conjugada:

$$a^2 = [a_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} + a_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)}] [a_1 e^{-i(\omega t + \alpha_1)} + a_2 e^{-i(\omega t + \alpha_2)}],$$

de donde

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 (e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} + e^{-i(\alpha_2 - \alpha_1)}),$$

pero por la fórmula (1)

$$e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} + e^{-i(\alpha_2 - \alpha_1)} = 2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

de donde

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

lo que coincide con la fórmula (4) del § 100.

Ondas

§ 106. Propagación de las ondas en un medio elástico. Sea un punto vibrante que se encuentra en un medio cuyas partículas están enlazadas entre sí. En estas condiciones, la energía de las vibraciones del punto puede transmitirse a los puntos que lo rodean haciendo que vibren. El fenómeno de la propagación de las vibraciones en un medio se llama *onda*. Un ejemplo de formación de ondas lo tenemos cuando lanzamos una piedra sobre la superficie del agua. La región de la superficie del agua que resulta perturbada directamente por la caída de la piedra comienza a vibrar y esta vibración se propaga de esta región a la siguiente, con lo cual obtenemos en dicha superficie una

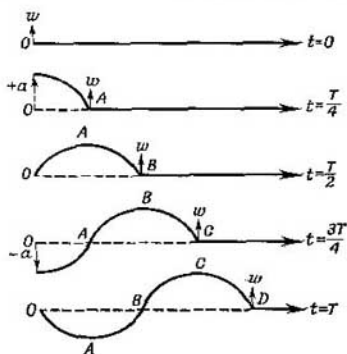


Fig. 264. Esquema de propagación de una onda transversal.

onda. Otro ejemplo de formación de ondas puede conseguirse cogiendo una cuerda por uno de sus extremos y haciendo con la mano movimientos oscilatorios. En este caso las oscilaciones también se propagan a lo largo de la cuerda, es decir, la onda avanza por la cuerda.

Advirtamos desde el primer momento, que al propagarse las oscilaciones las partículas vibrantes no se desplazan a medida que avanza la onda, sino que continúan vibrando en torno a sus posiciones de equilibrio.

Si las partículas vibran siguiendo trayectorias que coinciden con la directa de propagación, la onda se llama *longitudinal*; si la vibración de las partículas es perpendicular a esta dirección, la onda se llama *transversal*.

En la fig. 264 se muestra el esquema de la propagación de una onda transversal. Los cinco renglones de esta figura representan las posiciones de las partículas del medio en los sucesivos momentos. El primer renglón muestra la posición de las partículas en el momento inicial, es decir, cuando $t = 0$; en él todas las partículas ocupan su posición de equilibrio, aunque la partícula O del extremo ha recibido una aceleración w dirigida hacia arriba. El segundo renglón da la posición de las partículas al cabo de un cuarto de período: la partícula O ha alcanzado su máxima elongación hacia arriba, mientras

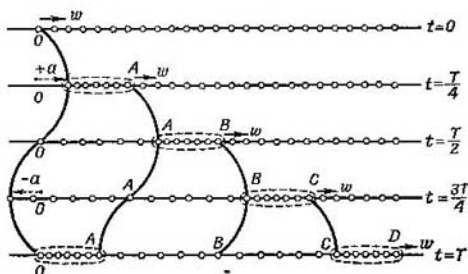


Fig. 265. Esquema de propagación de una onda longitudinal.

que la partícula A solamente ha adquirido una aceleración w dirigida también hacia arriba. El tercer renglón representa las posiciones correspondientes al cabo de medio período: la partícula O atraviesa su posición de equilibrio moviéndose hacia abajo y la partícula A ha alcanzado su separación máxima hacia arriba, mientras que la B acaba de adquirir una aceleración w dirigida hacia arriba. El cuarto renglón nos ofrece la posición de las partículas al transcurrir tres cuartos de período: la partícula O ha alcanzado su desviación máxima inferior, la A atraviesa su posición de equilibrio moviéndose hacia abajo, la B ha alcanzado su elongación máxima hacia arriba y la C adquiere una aceleración w también hacia arriba. Finalmente, en el quinto renglón se dan las posiciones de las partículas al cabo de un período completo: la partícula O atraviesa otra vez su posición de equilibrio, pero moviéndose hacia arriba; la partícula A ha alcanzado su desviación máxima inferior; la B pasa por la posición de equilibrio hacia abajo; la C ha alcanzado su elongación máxima hacia arriba y la D ha adquirido una aceleración w también hacia arriba. De esta misma forma se puede seguir observando la propagación de la onda.

En la fig. 265 se da un esquema semejante de la propagación de una onda longitudinal. La única diferencia consiste en que la desvia-

ción de las partículas ocurre en la misma dirección que tiene la propagación de la onda. Como puede verse en la fig. 265, en la onda longitudinal se observan aproximaciones y separaciones de las partículas entre sí, como consecuencia de lo cual se producen condensaciones (en las regiones agrupadas en la figura) y dilataciones o enrarecimientos; el proceso de propagación de la onda va acompañado de un desplazamiento de las regiones de condensación y dilatación.

El hecho de que las ondas que se propagan en un medio sean longitudinales o transversales depende de las propiedades elásticas de dicho medio.

Si al desplazarse una capa del medio con relación a otra se producen fuerzas elásticas que tienden a hacer volver la capa desplazada a su posición de equilibrio, en este medio pueden propagarse las ondas transversales (este medio, en términos generales, es el que forman los cuerpos sólidos). Si en el medio no se producen fuerzas elásticas al desplazarse unas capas paralelamente con respecto a otras, en este medio no pueden formarse ondas transversales. Por ejemplo, los gases y los líquidos son medios en los cuales las ondas transversales no se propagan (esto no se refiere a la superficie de los líquidos, en la cual pueden propagarse ondas transversales, aunque su carácter es más complicado, puesto que sus partículas se mueven describiendo trayectorias circulares o elípticas cerradas). Cuando en el medio aparecen fuerzas elásticas al producirse deformaciones por compresión o tensión, en este medio se pueden propagar las ondas longitudinales. Por ejemplo, en los líquidos y en los gases sometidos a compresión se produce un aumento de presión, cuya fuerza, como vimos anteriormente, representa el papel de fuerza elástica en las deformaciones por compresión. En los líquidos y en los gases sólo se propagan las ondas longitudinales. En los cuerpos sólidos pueden producirse tanto ondas longitudinales como transversales.

La velocidad de propagación de las ondas longitudinales V , como demuestra la teoría (véase el § 111), es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del coeficiente de elasticidad α del medio y de su densidad ρ :

$$V = \sqrt{\frac{1}{\alpha\rho}}.$$

Esta correlación puede sustituirse aproximadamente por la siguiente:

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

donde E es el módulo de Young del medio.

La velocidad de propagación de las ondas transversales depende del módulo de rigidez N :

$$V = \sqrt{\frac{N}{\rho}}.$$

La distancia a que una fase determinada de la vibración se propaga durante un período se llama *longitud de onda* y se designa con la letra λ .

En la fig. 266 se muestra una serie de puntos separados entre sí por la distancia λ .

En esta figura se ve claramente que *la longitud de onda es la distancia mínima entre dos puntos que se encuentran en fase iguales*. Por velocidad de propagación de la onda se entiende su *velocidad de fase*, es decir, la velocidad con que se propaga una fase dada de la vibración; por ejemplo: en el momento $t = 0$ el punto O de la



Fig. 266. La distancia que media entre los puntos más próximos que vibran en fases iguales determina la longitud de onda λ .

fig. 264 estaba en su fase inicial, es decir, salía de su posición de equilibrio; al cabo de un tiempo T , el que se encuentra en la fase inicial es el punto D , separado del O por una distancia λ . Por consiguiente, la fase inicial, durante un tiempo igual al período T , se propagó a una distancia igual a la longitud de onda λ . De aquí obtenemos para la velocidad de fase que

$$V = \frac{\lambda}{T}. \quad (1)$$

Supongamos que el punto que emite las vibraciones (centro de perturbación, centro de vibración o foco) se mueve en un medio continuo. Las vibraciones de este centro se propagan en todas las direcciones. *El lugar geométrico de los puntos a que llega la vibración en un momento determinado se llama frente de onda*. En este mismo medio puede distinguirse también *el lugar geométrico de los puntos que vibran en las mismas fases*; el conjunto de estos puntos *forma una superficie de igual fase (o de concordancia de fase)* o como suele decirse, *una superficie de onda*. Es evidente, que el frente de onda es un caso particular de la superficie de onda. Si el medio es isótropo, la vibración del centro se propaga por igual en todos los sentidos y, en este caso, el frente de onda y las superficies de concordancia de fase son superficies esféricas, cuyos centros coinciden con el de vibración. Es evidente que el radio del frente de onda representa de por sí un segmento cuya longitud es igual a la distancia a que se propagan las vibraciones de la fase dada durante un tiempo t , transcurrido desde el momento en que empezó a vibrar el punto situado en el centro, de donde

$$r = Vt,$$

donde V es la velocidad de propagación de las ondas.

La forma del frente de onda determina el tipo de ésta, por ejemplo, se llama onda plana aquella cuyo frente es plano.

Las direcciones en que se propaga la vibración se llaman *rayos*. Cuando el medio es isótropo, los rayos son normales al frente de onda; si el frente de onda es esférico, los rayos siguen la dirección de los radios.

§ 107. Principio de Huygens. Para la solución de muchos problemas tiene gran importancia disponer de un método que permita construir el frente de onda correspondiente a un momento determinado, conociendo dicho frente en un momento anterior. Este método fue expuesto por Huygens en 1690 y lleva el nombre de *principio de Huygens*.

Huygens expuso su principio sin demostrarlo rigurosamente. Se limitó a comparar los resultados de la construcción geométrica con

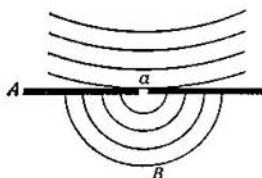


Fig. 267. Un orificio pequeño de un obstáculo se convierte en una nueva fuente de ondas.

los empíricos. Fue mucho después cuando, basándose en la teoría general de la elasticidad, pudo demostrarse el principio de Huygens. Para formarnos una idea clara de este método hagamos el siguiente experimento: figurémonos que sobre la superficie del agua se propaga una onda de forma arbitraria. Interpongamos en el camino que sigue esta onda un obstáculo *A* que tenga un orificio *a*, cuyas dimensiones sean pequeñas en comparación con la longitud de onda λ (fig. 267). La onda, al llegar hasta el obstáculo *A*, se refleja, pero el orificio *a* se transforma en origen de nuevas vibraciones que se propagan por el lado opuesto del obstáculo. Cualquiera que sea la forma de la onda primitiva, las que parten del orificio serán siempre ondas semicirculares *B*. El orificio será una especie de nuevo centro de vibraciones, a partir del cual las ondas se propagan hacia adelante en todas direcciones. Este experimento hace pensar, que cada punto del medio, al cual llega el frente de onda, puede considerarse como un nuevo origen de vibraciones. De aquí se deduce la esencia del principio de Huygens. Supongamos que en un momento cualquiera conocemos el frente de la onda *AB* (fig. 268) que llega en las direcciones indicadas por las flechas. Para construir el nuevo frente, que corresponda a un momento separado del primero por un tiempo *t*, hay que tomar cada uno de los puntos del frente primitivo como centro independiente de las oscilaciones que se propagan. Sobre cada uno

de estos puntos construimos una superficie de onda elemental, la cual será una superficie hemisférica de radio $r = Vt$. La envolvente A_1B_1 de todas estas superficies de onda elementales nos dará el nuevo frente de onda.

Apliquemos el método de Huygens a la construcción de superficies de onda de casos particulares. Supongamos que en un momento cualquiera una onda tiene forma de esfera con radio R (fig. 269) y se propaga a partir de un centro de vibraciones; en torno a cada punto del frente de onda tracemos una superficie elemental hemisférica. La envolvente de todas estas superficies de onda elementales tendrá la forma de una superficie esférica cuyo radio será $R_1 = R + Vt$. Los rayos, como ya dijimos, partirán del centro y tendrán las direcciones de los radios de la esfera. Es decir, el frente de una onda esférica que se propaga es una esfera cuyo radio aumenta constantemente; cuando los radios son muy grandes, los sectores del frente de onda pueden considerarse planos. En la fig. 270 se muestra un sector

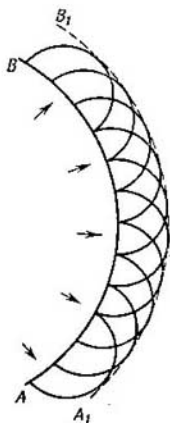


Fig. 268. Construcción del nuevo frente de onda por el procedimiento de Huygens.

de frente de onda plano AB . Tomando todos los puntos de este frente como centros de vibración independientes y trazando en torno a ellos hemisferios elementales, obtendremos una superficie envolvente que

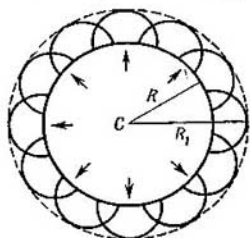


Fig. 269. Construcción del frente de una onda esférica, que se propaga a partir de un punto C , por el procedimiento de Huygens.

tendrá la forma de plano paralelo al AB . Los rayos, es decir, las direcciones en que se propagan las vibraciones, serán rectas perpendiculares al plano de frente. De aquí sacamos la conclusión de que una onda plana, al propagarse en un medio isótropo, sigue siendo plana y sus rayos forman un haz de rectas paralelas. En un medio

homogéneo isótropo el frente de onda, al avanzar, sigue siendo geoméricamente semejante a sí mismo.

Veamos ahora lo que ocurre con una onda plana si en el camino de su propagación encuentra un obstáculo A con un orificio a , cuyas dimensiones son mayores que la longitud de onda λ (fig. 271). El frente plano BB' , al llegar al obstáculo A , se refleja en él, pero los puntos correspondientes al orificio a se convierten en centros de vibración independientes. En torno a cada uno de estos puntos se forma una superficie de onda hemisférica elemental; la envolvente de estas superficies de onda nos da el frente de onda por la otra parte del orificio. En la fig. 271 puede verse que este frente, formado al otro lado del orificio, deja de ser plano y únicamente su parte central es paralela al frente primitivo; en sus extremos el frente se curva y los rayos cambian de dirección. Para calcular totalmente esta desviación de los ra-

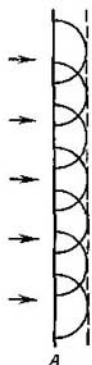


Fig. 270. Construcción del frente de una onda plana por el procedimiento de Huygens.

ayos, que se conoce con el nombre de *difracción*, hay que componer las oscilaciones que llegan de los diferentes puntos del orificio, teniendo en cuenta sus fases. Más adelante examinaremos

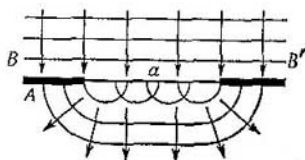


Fig. 271. Desviación de la onda al pasar por el orificio de un obstáculo (difracción de la onda).

con mayor detenimiento el fenómeno de la difracción. Pero por ahora dejemos sentado, que cuanto menor es el orificio, tanto mayor es la desviación de los rayos. Cuando las dimensiones de este orificio son menores que la longitud de onda, el hueco del orificio hace de centro único de vibración y genera una onda hemisférica, como tuvo lugar en el experimento que sirvió de base al principio de Huygens (fig. 267).

§ 108. Ecuación de la onda. Veamos de qué forma se puede caracterizar analíticamente el proceso ondulatorio.

Comencemos por imaginarnos unas ondas que avanzan a lo largo de una recta cualquiera, por ejemplo, a lo largo de una cuerda, uno de cuyos extremos se mantiene en estado de vibración. Llamemos x

a la elongación de los puntos. El proceso ondulatorio podrá considerarse conocido si sabemos en cada momento el valor de x para cada uno de los puntos de la recta, a lo largo de la cual se propaga la onda. En otras palabras, hay que conocer la elongación del punto x como función del tiempo y de las coordenadas de las posiciones de equilibrio de los puntos.

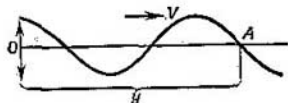


Fig. 272. Ilustración para deducir la ecuación de la onda.

Tomemos como origen de coordenadas el punto O de la recta (fig. 272), que hace de centro de vibración. Supongamos que las vibraciones de este punto O se realizan según la ley

$$x = a \cos \omega t, \quad (1)$$

donde a es la amplitud de las oscilaciones, ω es la frecuencia circular y t es el tiempo, contado desde el momento inicial de la vibración.

Tomemos sobre la recta un punto cualquiera A que se encuentre a una distancia y del origen de coordenadas. Las vibraciones, al propagarse a partir de O , llegarán al punto A al cabo de un tiempo

$$\tau = \frac{y}{V}, \quad (2)$$

siendo V la velocidad de propagación de la onda. De esta forma, el punto A comenzará a vibrar cuando el O lleve vibrando un tiempo τ . Considerando que las ondas que se propagan a lo largo de la recta no se amortiguan, obtenemos, que el punto A , cuando la onda llega hasta él, comienza a oscilar con una amplitud a y con una frecuencia circular ω , es decir, su elongación x vendrá expresada por

$$x = a \cos \omega t' \quad (3)$$

donde t' es el tiempo, contado desde el momento en que el punto A comienza a vibrar. Pero como el punto A , como ya hemos dicho, comienza a vibrar cuando el O lleva vibrando un tiempo τ , resulta que $t' = t - \tau$; poniendo este valor de t' en (3), obtenemos que

$$x = a \cdot \cos \omega (t - \tau),$$

o, poniendo en lugar de τ su valor según (2)

$$x = a \cdot \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right). \quad (4)$$

Esta expresión da el valor de la elongación x como función del tiempo t y de la distancia y del punto A al centro de vibración O ;

ésta es pues la ecuación que buscábamos de la onda que se propaga a lo largo de la recta OA .

La ecuación (4) es la ecuación de la *onda plana* que se propaga en la dirección y . Efectivamente, en este caso cualquier plano AB (fig. 273) perpendicular a la dirección y representa una superficie de fases iguales y, por consiguiente, todos sus puntos, en un mismo momento t , tienen la misma elongación x . Esta elongación depende exclusivamente de la distancia y que hay desde el plano hasta el origen de coordenadas O .

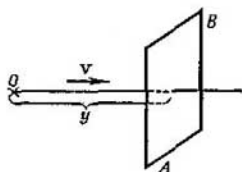


Fig. 273. Superficie de fases iguales de una onda plana.

Si suponemos una onda plana que se propague en sentido contrario al que seguimos al medir la distancia y , en la expresión (4) tendremos que sustituir y por $-y$, con lo cual la ecuación de esta onda tomará la forma:

$$x = a \cos \omega \left(t + \frac{y}{v} \right). \quad (4a)$$

La expresión (4) puede transformarse aplicando la correlación (1) del § 106, según la cual $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda}$, donde λ es la longitud de la onda que se propaga; en este caso

$$x = a \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{y}{\lambda} \right),$$

o si en lugar de la frecuencia circular ω introducimos la frecuencia ordinaria $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, tendremos que

$$x = a \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{y}{\lambda} \right). \quad (5)$$

Analicemos en el ejemplo de la onda que se propaga a lo largo de la recta (fig. 272) las consecuencias que pueden sacarse de la ecuación (4). El proceso ondulatorio es un proceso doblemente periódico: el argumento del coseno en la fórmula (4) depende de dos variables, es decir, del tiempo t y de la coordenada y . Por lo tanto, la onda tiene doble periodicidad, en el espacio y en el tiempo. Para un momento dado t , la ecuación (4) da la distribución de las elongaciones x de las partículas en función de sus distancias y al origen de coordenadas; las partículas que vibran influidas por la onda que avanza, en un momen-

lo dado t se encuentran formando una cosinusoide. Una partícula dada, que se caracterice por un valor determinado de y , realiza con el tiempo un movimiento vibratorio armónico:

$$x = a \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right) = a \cos (\omega t - \alpha), \text{ donde } \alpha = \frac{\omega y}{V} = 2\pi \frac{y}{\lambda}. \quad (6)$$

La magnitud α es constante para un punto dado y representa la *fase inicial* de la vibración de dicho punto.

Dos puntos que se caractericen respectivamente por las distancias y_1 e y_2 al origen de coordenadas, tendrán una diferencia de fase:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi \frac{y_2 - y_1}{\lambda}. \quad (7)$$

De aquí se deduce, que dos puntos alejados entre sí por una distancia igual a la longitud de onda λ , es decir, dos puntos para los cuales $y_2 - y_1 = \lambda$, tendrán una diferencia de fase $\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi$; en todo momento dado t , las elongaciones x de estos puntos serán iguales en magnitud y sentido; los puntos de este tipo se dice que vibran *en concordancia de fase o sincrónicamente*.

Para los puntos que se encuentran entre sí a una distancia $y_2 - y_1 = \frac{\lambda}{2}$, es decir, de una semilongitud de onda, la diferencia de fase $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$; estos puntos vibran, como suele decirse, *en fases opuestas*, es decir, en todo momento sus elongaciones son iguales entre sí en valor absoluto, pero tienen signos contrarios: si uno de los puntos se desvía hacia arriba, el otro lo hace hacia abajo, y viceversa.

Las ondas que acabamos de estudiar, que se propagan a lo largo de una recta, son un caso particular de ondas. En los medios elásticos pueden producirse ondas de otro tipo, como, por ejemplo, ondas esféricas.

Las ondas esféricas tienen una amplitud inversamente proporcional a la distancia r del centro de vibración. La elongación en función de las coordenadas y del tiempo puede expresarse como:

$$x = \frac{a}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{V} \right). \quad (8)$$

La superficie de fases iguales (superficie de onda) en un momento dado se determina por la ecuación $r = \text{const.}$, es decir, es una esfera de radio r . Por esta razón, las ondas de este tipo se llaman «esféricas».

§ 109. **Interferencia de ondas.** En un medio pueden propagarse al mismo tiempo vibraciones procedentes de distintos centros de vibración.

Si dos trenes de ondas distintos, procedentes de centros diferentes, concurren simultáneamente en una región cualquiera y después

* La diferencia de distancias $y_2 - y_1$ suele llamarse diferencia de marcha. (N. del T.)

vuelven a separarse, cada uno de ellos continúa propagándose lo mismo que si no hubiera encontrado en su camino al otro. Este fenómeno de la propagación independiente de las ondas se conoce con el nombre de *principio de la superposición*; este principio es muy característico en la propagación de los movimientos ondulatorios.

El principio de la superposición es fácil de comprobar lanzando dos piedras al agua. Después de que las ondas circulares (que se producen alrededor de los lugares en que cayeron las piedras) se atraviesan mutuamente y vuelven a separarse, aparecen de nuevo como

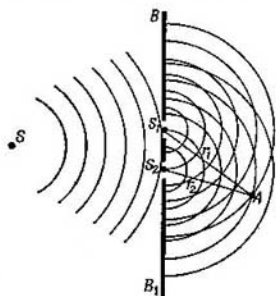


Fig. 274. Superposición de las ondas procedentes de los orificios s_1 y s_2 .

círculos regulares, cuyos centros se encuentran en los puntos de caída de las piedras. Este hecho fue señalado por Leonardo de Vinci, el cual escribió sobre esto: «Lanza al mismo tiempo dos piedras a una superficie amplia y tranquila de agua, de forma que caigan a cierta distancia una de otra. Verás cómo alrededor de los sitios en que cayeron las piedras se forman dos grupos de ondas circulares; estas ondas, al avanzar, se encuentran y los círculos de cada grupo pasan a través de los del otro».

En la región en que concurren las ondas sus vibraciones se superponen unas a otras y se produce una composición (*interferencia*) de ondas. Como resultado de esta composición, en unos sitios se producen vibraciones más fuertes, mientras que en otros son más débiles. En cada punto del medio la vibración resultante será igual a la suma de las vibraciones que llegan a dicho punto.

Oftoce especial interés el caso en que los focos oscilan con la misma frecuencia, en la misma dirección y están en la misma fase o con diferencia de fase constante. Estos focos se llaman *coherentes*. Como veremos más adelante, en este caso la vibración resultante tiene en cada punto del medio una amplitud constante en el tiempo, que depende de las distancias que hay desde dicho punto hasta los focos de vibraciones. Este género de composición se llama *interferencia de focos coherentes*.

Los focos de vibraciones coherentes se pueden conseguir, por ejemplo, de la forma siguiente: tomamos un foco puntual S (fig. 274) del que se propaga una onda esférica. En el camino que sigue esta onda interponemos un obstáculo BB_1 con dos orificios puntuales s_1 y s_2 , situados simétricamente con relación al foco S . Los orificios s_1 y s_2 , de acuerdo con el principio de Huygens, se convierten en focos independientes de vibraciones, con la particularidad de que oscilarán con la misma amplitud y en la misma fase, puesto que distan lo mismo del foco S . Por la parte derecha del obstáculo BB_1 se propagarán dos ondas hemisféricas y en cada uno de los puntos del medio se producirán vibraciones que serán el resultado de la composición de estas dos ondas. Examinemos este resultado en un punto cualquiera A , que se encuentre respectivamente a las distancias r_1 y r_2 de los focos s_1 y s_2 . Las vibraciones llegan al punto A con cierta diferencia de fase, que depende de la diferencia de distancias (de marcha) r_2 y r_1 .

Las vibraciones de los focos s_1 y s_2 tienen la misma fase y pueden representarse de la forma:

$$x_1 = a_0 \cos \omega t, \quad x_2 = a_0 \cos \omega t.$$

Por lo tanto, las vibraciones que llegan al punto A procedentes respectivamente de los focos s_1 y s_2 , según la fórmula (8) del § 108, se expresarán:

$$x_1 = a_1 \cos 2\pi \left(vt - \frac{r_1}{\lambda} \right), \quad x_2 = a_2 \cos 2\pi \left(vt - \frac{r_2}{\lambda} \right),$$

donde $v = \frac{\omega}{2\pi}$ es la frecuencia de las vibraciones. De acuerdo con (8) del § 108, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{r_2}{r_1}$. Pero si $|r_2 - r_1| \ll r_1$, podemos considerar que, aproximadamente, $a_1 \approx a_2$.

La diferencia de fases de las vibraciones que se componen en el punto A será

$$\Delta\alpha = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}. \quad (1)$$

En el § 100 vimos, que la amplitud de la vibración resultante depende de la diferencia de fases de las componentes, con la particularidad de que si la diferencia de fases es igual a cero o múltiplo de 2π , la amplitud tiene un valor máximo, igual a la suma de las amplitudes de las vibraciones componentes. Si la diferencia de fases es igual a un número impar de π , la amplitud tiene un valor mínimo, igual a la diferencia de las amplitudes componentes. Por consiguiente, el hecho de que en el punto A se obtenga un máximo o un mínimo de la vibración depende de la diferencia de fase $\Delta\alpha$ con que llegan a él ambas vibraciones. La condición para que se produzca una amplitud máxima en el punto A , según lo expuesto, podrá expresar-

se así:

$$\Delta\alpha = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi, \quad (2)$$

donde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, de donde el máximo de las vibraciones tendrá lugar cuando

$$|r_2 - r_1| = k\lambda, \quad (2a)$$

es decir, *la amplitud máxima se obtiene en los puntos en que la diferencia de marcha de los rayos es igual a cero o a un número entero de longitudes de onda.*

La condición de amplitud mínima en el punto A se reduce a que

$$\Delta\alpha = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm (2k + 1)\pi, \quad (3)$$

donde otra vez $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, de donde la diferencia de marcha de los rayos deberá ser igual a

$$|r_2 - r_1| = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (3a)$$

es decir, *la amplitud mínima se obtiene en los puntos en que la diferencia de marcha de los rayos es igual a un número impar de semilongitudes de onda.*

Cuando la diferencia de fase tiene valores intermedios entre $\pm 2k\pi$ y $\pm(2k + 1)\pi$, donde k es un número en-

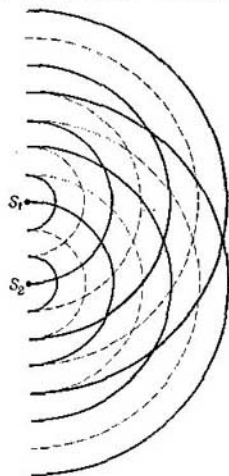


Fig. 275. Interferencia de ondas.

tero, se produce un efecto medio de reforzamiento o de atenuación de la vibración.

De esta forma, como resultado de la superposición de dos ondas en el medio se producen vibraciones cuya amplitud es diferente en los distintos puntos del medio, pudiendo producirse en cada uno de estos puntos una amplitud máxima o mínima, o de valor intermedio, según el valor que tenga la diferencia de distancias del punto a los focos coherentes (diferencia de marcha).

En la fig. 275 se muestran dos trenes de ondas interferentes; las elevaciones o crestas de las ondas se representan por líneas de trazo continuo y las depresiones por líneas de trazo punteado.

En los puntos de intersección de dos crestas o de dos depresiones se encuentran los máximos de la vibración, mientras que en los sitios en que se cortan una cresta y una depresión se producen mínimos.

La formación de este género de máximos y mínimos por interferencia se puede observar sin dificultad cuando se propagan dos trenes de ondas por la superficie del agua.

§ 110. Ondas estacionarias. Un ejemplo particular del resultado de la interferencia de dos ondas es el de las denominadas *ondas estacionarias*, las cuales se producen por la superposición de dos ondas planas, de la misma amplitud, que se propagan en sentidos contrarios.

Supongamos que dos ondas de igual amplitud se propagan, una en la dirección positiva del eje y y la otra en la negativa. En la fig. 276

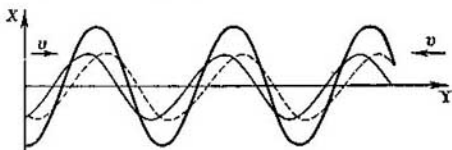


Fig. 276. Composición de dos ondas que se propagan en sentidos opuestos.

una de las ondas se representa con línea continua de trazo fino y la otra con línea punteada; la onda resultante se representa con una línea de trazo grueso. Si el origen de coordenadas se toma en un punto en el cual las ondas que se propagan en sentido contrario tienen igual fase y contamos el tiempo de forma que las fases iniciales resulten iguales a cero, las ecuaciones de las ondas planas podrán escribirse de la forma siguiente: la de la onda que avanza en el sentido positivo del eje y será

$$x_1 = a \cos 2\pi \left(vt - \frac{y}{\lambda} \right),$$

y la de la onda que se propaga en el sentido negativo,

$$x_2 = a \cos 2\pi \left(vt + \frac{y}{\lambda} \right).$$

La composición de estas dos ondas da:

$$[x = x_1 + x_2 = a \cos 2\pi \left(vt - \frac{y}{\lambda} \right) + a \cos 2\pi \left(vt + \frac{y}{\lambda} \right),$$

o abriendo los paréntesis que contienen los valores de los argumentos de los cosenos y simplificando,

$$x = 2a \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right) \cdot \cos 2\pi vt. \quad (1)$$

El factor $2\pi vt$ indica, que en todos los puntos del medio se producen vibraciones, cuya frecuencia ν es igual que la de las vibraciones de las ondas de sentidos opuestos que se superponen.

El factor $2a \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right)$, que no depende del tiempo, expresa la amplitud A de la vibración resultante, o mejor dicho, la amplitud, como magnitud esencialmente positiva, será igual al valor absoluto de este factor, es decir,

$$A = \left| 2a \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right) \right|. \quad (2)$$

Por consiguiente, la amplitud de las vibraciones depende de las coordenadas y , que determinan la posición de los puntos del medio. Las vibraciones que se producen en estas condiciones se llaman *ondas estacionarias*. En unos puntos determinados la amplitud de la onda estacionaria es igual a la suma de las amplitudes de las dos componentes; estos puntos se llaman *vientres*; en otros puntos la amplitud resultante es igual a cero; estos puntos se llaman *nodos* de la onda estacionaria.

Determinemos las coordenadas de los puntos correspondientes a los vientres y nodos. La amplitud determinada por la igualdad (2) es máxima en aquellos puntos para los cuales

$$\left| \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda} \right) \right| = 1.$$

En estos puntos, según (2),

$$A = 2a.$$

De aquí se deduce que la posición de los vientres vendrá determinada por la condición

$$2\pi \frac{y}{\lambda} = \pm k\pi,$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots$. Por consiguiente, las coordenadas de los vientres serán

$$y = \pm k \frac{\lambda}{2}, \quad (3)$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots$.

La distancia entre dos vientres contiguos se obtiene hallando la diferencia que hay entre dos valores de y , determinados por la fórmula (3) y correspondientes a dos valores consecutivos de k , de donde

$$y_{k+1} - y_k = \frac{\lambda}{2},$$

es decir, la distancia entre dos vientres contiguos es igual a la semilongitud de las ondas cuya interferencia da lugar a la onda estacionaria. Evidentemente, en los sitios que corresponden a los vientres las vibraciones de las ondas se realizan siempre en una fase.

En los nodos la amplitud de la vibración resultante es igual a cero, de donde, por la fórmula (2), la condición para que se produzcan los nodos será:

$$\cos\left(2\pi\frac{y}{\lambda}\right) = 0 \quad \text{ó} \quad 2\pi\frac{y}{\lambda} = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente, las coordenadas de los nodos serán:

$$y = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}, \quad (4)$$

lo que quiere decir, que la distancia de un nodo al vientre más próximo será:

$$(2k+1)\frac{\pi}{4} - k\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4},$$

es decir, los nodos y los vientres se encuentran separados entre sí por un cuarto de longitud de onda. Los nodos se forman en aquellos sitios en que las vibraciones de las dos ondas se realizan siempre en fases opuestas.

Tiene importancia advertir, que a pesar de que según la fórmula (1) la vibración resultante se realiza en todos los puntos en una fase independiente, al parecer, de la posición de éstos (puesto que el factor $\cos 2\pi vt$ no depende de y), en realidad, cuando la fase de la vibración pasa por un nodo, se invierte. Esto se explica porque el factor $\cos\left(2\pi\frac{y}{\lambda}\right)$, que determina la amplitud, cuando pasa por cero, es decir, en el nodo, *cambia de signo*; como resultado de esto, si en un momento determinado por un lado del nodo la elongación x es positiva, por el otro lado será negativa.

Puesto que en un momento dado el factor $\cos 2\pi vt$ tiene para todos los puntos igual valor, todos los puntos que se encuentran entre dos vientres vibran en la misma fase, es decir, que alcanzan al mismo tiempo sus elongaciones máximas, pasan al mismo tiempo por la posición de equilibrio, etc. Los puntos que se encuentran a ambos lados de un mismo nodo vibran en fases opuestas, es decir, alcanzan simultáneamente sus elongaciones máximas, pero con signo contrario, pasan al mismo tiempo por la posición de equilibrio, pero con velocidades de sentidos opuestos, etc. En la fig. 277 *a* y *b* se muestra esquemáticamente la vibración de los puntos de una onda estacionaria transversal; en ella se señala la posición de dichos puntos en dos momentos separados por un semiperíodo.

Cuando la onda estacionaria es longitudinal, la elongación de los puntos es paralela al eje y . En la fig. 278 *a* y *b* se da la posición de los puntos de una onda estacionaria longitudinal en dos momentos separados por un semiperíodo. En esta figura puede verse cómo en los nodos, donde la velocidad de vibración de los puntos es igual a cero, se obtiene una variación más brusca de la densidad del medio:

las partículas unas veces se acercan al nodo por ambos lados y otras se separan de él.

Las ondas estacionarias suelen producirse por la interferencia de una onda que avanza con la onda reflejada que ella misma produce. Por ejemplo, si el extremo de una cuerda se sujeta en un punto fijo y le damos al otro extremo una sacudida de arriba abajo con la

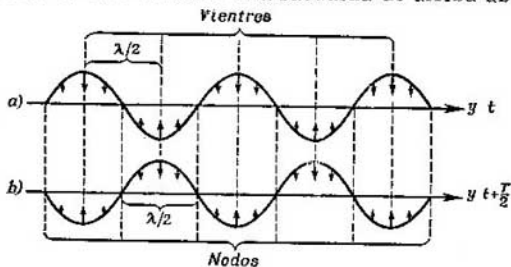


Fig. 277. Esquema de las vibraciones de una onda estacionaria transversal.

mano, la onda que se produce se propaga a lo largo de la cuerda y al llegar al punto de sujeción se refleja. La onda reflejada interferirá con la que avanza y formará con ella una onda estacionaria. Los

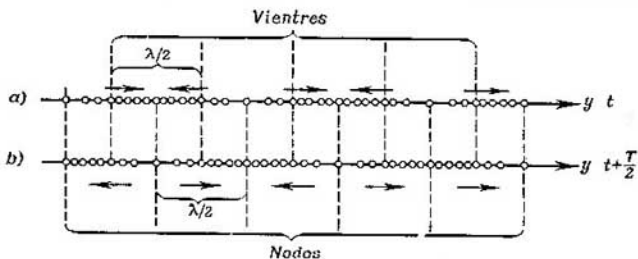


Fig. 278. Esquema de las vibraciones de una onda estacionaria longitudinal.

puntos nodales, que permanecen en reposo, se encontrarán entre sí a una distancia igual a la mitad de la longitud de la onda que avanza; en el punto de sujeción de la cuerda, es decir, en el límite, donde se produce la reflexión de la onda, se origina un nodo.

En general, en la superficie (límite) de reflexión se puede producir un nodo o un vientre; esto depende de la relación que exista entre las densidades de los medios. Si el medio en que tiene lugar la reflexión es más denso que aquel en que se propaga la onda, en la super-

ficie de separación entre ellos se produce un nodo. Si, por el contrario, el medio en que se produce la reflexión es menos denso que aquel en que se propaga la onda, en la superficie de separación entre ellos se produce un vientre.

El hecho de que en la superficie de reflexión del medio más denso se produzca un nodo se explica, porque la onda, al reflejarse en el medio más denso, invierte su fase en el punto de reflexión; en estas condiciones, en la superficie de separación se producen dos ondas de sentidos contrarios, lo que da lugar a la formación de un nodo.

Como la fase se invierte a una distancia igual a una semilongitud de onda, este hecho suele llamarse «pérdida de media onda».

Cuando la onda se refleja en un medio menos denso, no cambia de fase y, por lo tanto, no se produce la pérdida de media onda. Gracias a esto, las fases de la onda incidente y de la reflejada son iguales en la superficie de separación de los medios y, en este sitio, se produce un vientre, como resultado de la composición de dos vibraciones de la misma fase.

El cambio de la fase cuando la onda se refleja en la superficie de separación de un medio más denso y la conservación de la fase cuando la reflexión tiene lugar en la superficie de separación con un medio menos denso, se demuestra en la teoría de la elasticidad basándose en las condiciones generales que existen en la superficie de separación de un medio más denso y la conservación de la fase basándose en las condiciones generales que existen en la superficie de separación de dos medios elásticos.

§ 111. Dinámica de la propagación de las vibraciones en un medio elástico. El tipo de ondas aptas para propagarse en un medio, como dijimos anteriormente, depende de las propiedades elásticas de dicho medio. Se propagan aquellas

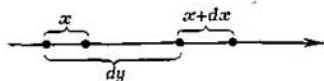


Fig. 279. Ilustración para deducir la expresión de la velocidad de propagación de una onda longitudinal.

vibraciones cuyo tipo está condicionado por el desplazamiento que provoca la deformación elástica del medio. Si el medio puede deformarse únicamente por compresión (gaseoso o líquido), las ondas que se propagan en él son longitudinales, mientras que si el medio se puede deformar tanto por compresión como por cizallamiento, en él pueden propagarse ondas longitudinales y transversales. Por ahora examinaremos solamente las ondas longitudinales.

Consideremos una serie de puntos, pertenecientes a un medio continuo, que se encuentren en una recta a lo largo de la cual se propaga una onda longitudinal.

Llamemos x a la separación de un punto cualquiera de esta recta de su posición de equilibrio (elongación), e y a la distancia que separa los puntos, medida a lo largo de esta misma recta.

Veamos lo que ocurre con dos puntos cuyas posiciones de equilibrio se encuentran entre sí a una distancia dy . Supongamos que las elongaciones de

estos puntos en un momento dado son x y $x + dx$ (fig. 279). Por consiguiente, al desplazarse los puntos, la distancia dy varía en la magnitud dx .

La relación entre la variación que experimenta la elongación dx y la magnitud de la distancia inicial entre los puntos dy , es decir, la razón dx/dy , se llama *deformación relativa* y la designaremos con la letra s , por lo tanto

$$s = \frac{dx}{dy}. \quad (1)$$

Cuando $s = \frac{dx}{dy} > 0$ la distancia entre los puntos aumenta, es decir, *el medio se dilata*.

Cuando $s = \frac{dx}{dy} < 0$ la distancia entre los puntos disminuye, es decir, *el medio se condensa*.

Teniendo en cuenta la ecuación de la onda

$$x = a \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right), \quad (2)$$

donde ω es la frecuencia circular y V es la velocidad de propagación de la onda, podemos establecer una relación entre la deformación relativa dx/dy y la velocidad de los puntos vibrantes dx/dt ; efectivamente, llamando v a la velocidad de los puntos, tenemos:

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega \left(t - \frac{y}{V} \right).$$

La deformación relativa s viene determinada por

$$s = \frac{dx}{dy} = \frac{a\omega}{V} \sin \omega \left(t - \frac{y}{V} \right).$$

Comparando estas dos expresiones obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = -V \frac{dx}{dy},$$

de donde puede verse, que la deformación del medio dx/dy tiene un valor absoluto máximo en los puntos en que la velocidad de las partículas vibrantes dx/dt es máxima, es decir, en aquellas regiones en que los puntos pasan por sus posiciones de equilibrio.

De la ecuación de la onda (2) se puede obtener también otra correlación que nos hará falta más adelante. Tomando las segundas derivadas de x respecto a las variables t e y , obtenemos

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right); \\ x'' &= \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{a\omega^2}{V^2} \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right), \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = V^2 \frac{d^2x}{dy^2}, \quad (3)$$

es decir, la segunda derivada de la elongación respecto al tiempo es proporcional a la segunda derivada de la elongación respecto a la coordenada, con la particularidad de que el coeficiente de proporcionalidad es el cuadrado de la velocidad V de propagación de la onda.

La ecuación (3) ha sido obtenida diferenciando la ecuación de la onda (2). Recíprocamente podemos decir, que una onda periódica pura a la que corresponde una cosinusoide (2) satisfará la ecuación diferencial (3).

Pero en realidad también es solución de la ecuación diferencial (3) toda una serie de otras funciones. Estas funciones determinan la propagación en el medio de una perturbación ondulatoria de forma arbitraria con una velocidad V .

Por lo tanto, la ecuación diferencial (3), en su forma más general da la propagación del movimiento ondulatorio. La expresión (3) se denomina *ecuación de la onda*.

Para hallar la velocidad de propagación de una onda en un medio elástico utilicemos la ley de Hooke.

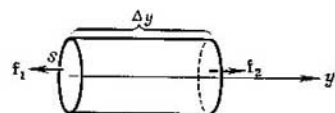


Fig. 280. Ilustración para deducir la expresión de la velocidad de propagación de una onda longitudinal.

Esta ley (véase el § 89), establecida para las deformaciones de un medio continuo, demuestra que la fuerza elástica es proporcional a la *deformación relativa*. Si tomamos, por ejemplo, una porción de medio continuo, cuya longitud sea Δy y su sección transversal S , cuando esté alargado o comprimido en una magnitud dx , por la ley de Hooke la fuerza elástica será igual a

$$f = \frac{1}{\alpha} \frac{dx}{dy} S,$$

donde α es el coeficiente de elasticidad.

Veamos qué fuerzas actúan sobre una porción elemental aislada de un medio continuo, en el cual se propaga una onda longitudinal a lo largo del eje y . Para esto tomemos de dicho medio una porción cilíndrica, elegida de tal manera, que su generatriz sea paralela al eje y y tenga una longitud Δy , y que la sección transversal del cilindro sea igual a S . Supongamos que, en el momento en que hacemos nuestra observación, la porción cilíndrica está alargada por la acción de las fuerzas f_1 y f_2 (fig. 280) aplicadas a las bases del cilindro. Si tomamos como origen del eje y su punto de intersección con la base izquierda del cilindro, la fuerza f_1 , por la ley de Hooke será igual a

$$f_1 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dx}{dy} \right)_0 S,$$

donde el subíndice 0 indica que la deformación relativa dx/dy se calcula para el valor de $y = 0$, es decir, en los puntos de la base izquierda del cilindro.

La fuerza que actúa sobre la base derecha, por esta misma ley será

$$f_2 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dx}{dy} \right)_{\Delta y} S,$$

donde dx/dy se calcula en los puntos de la base derecha.

La magnitud dx/dy es una determinada función $F(y)$, que puede desarrollarse en serie de Maclaurin:

$$F(y) = F_0(0) + F'(0)\Delta y + \dots$$

Limitándonos a las magnitudes de primer orden de pequeñez con respecto a Δy , obtenemos

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{\Delta y} = \left(\frac{dx}{dy}\right)_0 + \left[\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)\right]_0 \Delta y.$$

Como las fuerzas f_1 y f_2 están dirigidas en sentidos contrarios, sobre la porción elemental actúa también la diferencia

$$f = f_2 - f_1 = \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{dx}{dy}\right)_{\Delta y} - \left(\frac{dx}{dy}\right)_0 \right] S = \frac{1}{\alpha} \times \frac{d^2x}{dy^2} \Delta y S.$$

Por la acción de esta fuerza la porción elemental recibe una aceleración d^2x/dt^2 , la cual, por la segunda ley de Newton, es igual a la fuerza dividida por la masa del elemento; esta masa es igual al producto de la densidad ρ del medio por el volumen del elemento $\Delta y S$; por consiguiente

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\alpha \rho \Delta y S} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} \Delta y S \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\alpha \rho} \frac{d^2x}{dy^2}. \quad (4)$$

La fórmula (4) da la relación entre la segunda derivada d^2x/dt^2 de la elongación respecto al tiempo y la segunda derivada d^2x/dy^2 de la elongación respecto a la coordenada; esta relación ya fue deducida por nosotros en la fórmula (3), con la particularidad de que la magnitud V , que allí figura, representa la velocidad de propagación de la onda. Comparando estas dos expresiones vemos, que la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en un medio determinado viene expresada por su densidad y el coeficiente de elasticidad en la correlación siguiente

$$V^2 = \frac{1}{\alpha \rho} \quad \text{o} \quad V = \sqrt{\frac{1}{\alpha \rho}}. \quad (5)$$

Para el elemento cilíndrico que hemos tomado, el coeficiente de elasticidad es $\alpha = \frac{1}{E}$, donde E es el módulo de Young (véase el § 89). Esta relación permite escribir la fórmula (5) de la forma:

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (5a)$$

que coincide con la que dimos en la pág. 469.

Sin embargo, cuando el espacio sometido a compresión o tensión es ilimitado, cada una de sus porciones elementales sufre además una presión o un alargamiento lateral producido por los elementos contiguos, lo que da lugar a una relación más compleja entre el coeficiente de elasticidad del medio α y el módulo de Young. Esta relación es

$$\alpha = \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{(1 - \sigma)E},$$

donde σ es el coeficiente (módulo) de Poisson. De donde la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en un medio elástico continuo es igual a

$$V = \sqrt{\frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \cdot \frac{E}{\rho}}. \quad (5b)$$

Como quiera que el coeficiente de Poisson es una magnitud del orden de $1/4$, el factor $\frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}$ se aproxima a la unidad, y, por lo tanto, cuando el medio es continuo puede emplearse la fórmula (5a) como aproximada. De esta

forma, resulta que la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en un medio elástico es directamente proporcional a la raíz cuadrada del módulo de Young e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad del medio.

De forma análoga se puede demostrar, que la velocidad de propagación de las ondas transversales en un medio elástico es igual a

$$v = \sqrt{\frac{N}{\rho}}, \quad (6)$$

donde N es el módulo de rigidez.

Esta fórmula coincide con la expuesta en la pag. 469.

§ 112. **Energía de la onda.** Figurémonos una onda que se propaga a lo largo del eje y y que viene dada por la ecuación

$$x = a \cos \omega \left(t - \frac{y}{v} \right). \quad (1)$$

La energía de la parte del medio en que se propaga esta onda se compone de la energía cinética E_c y de la energía potencial E_p . Supongamos que el volumen de esta parte del medio es igual a τ ; llamemos m a su masa y v a la velocidad con que se desplazan sus partículas; en estas condiciones, la energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2;$$

teniendo en cuenta que $m = \rho \tau$, donde ρ es la densidad del medio, y hallando la expresión de la velocidad por (1), tenemos que

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega \left(t - \frac{y}{v} \right),$$

escribamos la expresión de la energía cinética E_c de la forma:

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \tau a^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{y}{v} \right). \quad (2)$$

La energía potencial de un sólido sometido a una deformación relativa ($\Delta L/L$), como dijimos en el § 89 [fórmula (6)], es igual a

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{ES}{L} \right) \cdot \Delta L^2.$$

Introduciendo en lugar del módulo de Young E el coeficiente de elasticidad $\alpha = \frac{1}{E}$ y multiplicando y dividiendo la parte derecha de la expresión por L , obtenemos que

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 \cdot LS.$$

El producto LS representa el volumen τ del cuerpo deformado; la deformación relativa $\Delta L/L$ puede representarse de la forma dx/dy donde dx es la diferencia de las elongaciones de las partículas que se

encuentran entre sí a una distancia dy , entonces

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \tau.$$

Hallemos la expresión dx/dy por (1):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a\omega}{V} \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{y}{V} \right),$$

y escribamos la expresión de la energía potencial de la forma:

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \frac{a^2 \omega^2 \tau}{V^2} \operatorname{sen}^2 \omega \left(t - \frac{y}{V} \right). \quad (3)$$

Comparando las expresiones (2) y (3) vemos, que la energía cinética y la potencial varían en una misma fase, es decir, alcanzan al mismo tiempo un máximo o un mínimo. En esto se distingue considerablemente la energía de la parte afectada por la onda de la energía de la vibración de un punto aislado, en el cual, cuando la energía cinética alcanza un máximo, la potencial tiene un mínimo y viceversa. Para un punto aislado, la reserva total de energía vibratoria se mantiene constante. Cuando la vibración se produce en un medio, cada uno de los elementos de su volumen está relacionado con el medio circundante y la energía de una parte de este medio puede trasladarse a otra. Por esta razón, la energía total de la parte del medio en que se propaga la onda no permanece constante.

Calculemos la energía total E del elemento de volumen τ del medio; sumando las expresiones (2) y (3), obtenemos

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha V^2} + \rho \right) a^2 \omega^2 \tau \operatorname{sen}^2 \omega \left(t - \frac{y}{V} \right).$$

Como por la fórmula (5) del § 111 la velocidad de propagación V de la onda en un medio elástico es

$$V = \sqrt{\frac{1}{\alpha \rho}},$$

la expresión de la energía total E puede escribirse de la forma

$$E = \rho a^2 \omega^2 \tau \operatorname{sen}^2 \omega \left(t - \frac{y}{V} \right). \quad (4)$$

Por lo tanto, la energía de la parte del medio en que se propaga la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud de la vibración, al cuadrado de la frecuencia y a la densidad del medio.

Introduzcamos ahora el concepto de densidad de la energía ε , que definiremos como la razón de la energía contenida en un elemento de volumen τ a la magnitud de dicho volumen:

$$\varepsilon = \frac{E}{\tau} = \rho a^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega \left(t - \frac{y}{V} \right). \quad (5)$$

La densidad de la energía en un punto dado, lo mismo que la propia energía, es una magnitud variable. Cada semiperíodo la energía toma su valor ini-

cial. Como el valor medio del cuadrado del seno durante un período es igual a $1/2$, de acuerdo con (5), el valor medio de la densidad de la energía será:

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2. \quad (6)$$

Partiendo de la base de que la energía no permanece localizada en una parte dada, sino que se traslada por el medio, podemos introducir el concepto de *flujo de energía*. Entenderemos por flujo de energía a través de una superficie, la magnitud numéricamente igual a la cantidad de energía que pasa por la superficie dada en la unidad de tiempo.

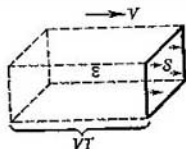


Fig. 281. La energía que pasa por la superficie S durante un tiempo T es la contenida en el volumen del paralelepípedo VTS .

Tomemos una superficie S , perpendicular a la dirección de la velocidad V de una onda; por esta superficie pasará, durante un tiempo igual a un período T , una cantidad de energía igual a la contenida en un paralelepípedo de sección transversal S y de longitud VT (fig. 281); esta cantidad de energía será igual al valor medio de la densidad de la energía $\bar{\epsilon}$, tomado durante un período, multiplicado por el volumen del paralelepípedo VTS , de donde

$$E = \bar{\epsilon} \cdot VTS.$$

El flujo medio de energía \bar{P} podemos obtenerlo dividiendo esta expresión por el tiempo T que dura el paso de la energía por la superficie S :

$$\bar{P} = \bar{\epsilon} \cdot VS. \quad (7)$$

Poniendo aquí el valor de $\bar{\epsilon}$ dado por (6), hallamos:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 VS.$$

De esta forma, el flujo medio de energía que pasa por una superficie perpendicular a la dirección de la propagación de las vibraciones es igual a la densidad media de la energía multiplicada por la velocidad de propagación de la onda y por el área de la superficie.

La cantidad de energía que pasa en la unidad de tiempo por la unidad de superficie se llama *densidad del flujo* \bar{U} . Como según esta definición $\bar{U} = \frac{\bar{P}}{S}$, aplicando la fórmula (7), obtenemos:

$$\bar{U} = \bar{\epsilon} \cdot V, \quad (8)$$

es decir, la densidad del flujo es igual a la densidad media de la energía multiplicada por la velocidad de propagación de la onda.

Como la velocidad V es un vector, la densidad del flujo de energía también puede considerarse como un vector dirigido en el sentido de la propagación de la onda. Este vector fue introducido por primera vez por el profesor N. A. Umov (1845-1915) de la Universidad de Moscú, y por esto recibe el nombre de *vector de Umov*.

Demostremos ahora que si tenemos una onda esférica que se propaga desde un foco puntual, la densidad media del flujo de energía será inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco.

Tomemos un foco puntual de vibraciones y tracemos una esfera de radio R con centro en dicho foco. La onda, y la energía relacionada con ella, se propagarán siguiendo sus radios, es decir, perpendicularmente a la superficie de la esfera. Durante un período T , por la superficie de la esfera pasará una energía $\bar{P}T$, siendo \bar{P} el flujo de energía que pasa por dicha superficie. La densidad del flujo \bar{U} podemos obtenerla dividiendo esta energía por el área de la superficie esférica y por el tiempo:

$$\bar{U} = \frac{\bar{P} \cdot T}{4\pi R^2 T} = \frac{\bar{P}}{4\pi R^2}.$$

Si el medio no absorbe las vibraciones y en el proceso ondulatorio estabilizado el flujo de energía \bar{P} es constante y no depende del radio R con que se traza la esfera, la última ecuación demuestra que la densidad media del flujo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco puntual.

La correlación que hemos deducido, como ya dijimos, es justa mientras el medio no sea absorbente; en otras palabras, para nuestro análisis supusimos que la energía del movimiento ondulatorio no se transforma en ninguna otra forma de energía. Pero en realidad una parte de la energía del movimiento vibratorio se transforma frecuentemente en energía interna del medio. Este hecho se produce porque en todo medio mecánico existe frotamiento interno. La cantidad total de energía que transporta la onda depende de su distancia al foco: cuanto más distante esté del foco la superficie de la onda, tanto menor será la energía que posea. La energía es proporcional al cuadrado de la amplitud; por consiguiente, la amplitud de la vibración disminuye a medida que se propaga la onda. Para establecer la ley de la disminución de la amplitud supongamos que, al pasar por una capa de espesor dy , la disminución relativa de la amplitud $-\frac{da}{a}$ es proporcional a dy , es decir, escribamos la ecuación

$$-\frac{da}{a} = \kappa dy,$$

donde κ es una magnitud constante que depende de la naturaleza del medio.

Es evidente que esta última expresión puede escribirse de la forma

$$d(\ln a) = -d(\kappa y).$$

Si las diferenciales de dos magnitudes son iguales entre sí, estas magnitudes sólo se diferencian en una magnitud aditiva constante C , de donde

$$\ln a = -\kappa y + C;$$

la constante C se determina por la condición de que, cuando $y = 0$, la magnitud de $\ln a$, igual a $\ln a_0$, debe ser igual a C , por lo tanto

$$\ln a = \ln a_0 - \kappa y, \text{ de donde } a = a_0 e^{-\kappa y}. \quad (9)$$

Esta expresión da la disminución de la amplitud a a medida que la onda se propaga en la dirección del eje y ; a_0 es el valor de la amplitud cuando $y = 0$.

La ecuación de una onda plana en un medio absorbente, sobre la base de la fórmula (9), será:

$$x = a_0 e^{-\kappa y} \cdot \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right). \quad (10)$$

Determinemos también la disminución de la energía de la onda al aumentar la distancia. Llamemos \bar{e}_0 a la densidad media de la energía cuando $y = 0$ y

$\bar{\varepsilon}_y$ a esta misma magnitud a una distancia y ; entonces, por las correlaciones (6) y (9), obtendremos:

$$\bar{\varepsilon}_y = \bar{\varepsilon}_0 e^{-2\kappa y}. \quad (11)$$

Designemos 2κ por la letra k y escribamos la última fórmula de la forma

$$\bar{\varepsilon}_y = \bar{\varepsilon}_0 e^{-ky} \quad (11a)$$

La magnitud k se llama *coeficiente de absorción*.

§ 113. **Efecto Doppler.** Estudiemos ahora la relación que existe entre las vibraciones emitidas por un foco y las percibidas por un receptor registrador cualquiera cuando el uno se mueve con respecto al otro. Para esto, y con objeto de que las vibraciones puedan propagarse desde el foco hasta el receptor en forma de ondas, tanto aquél como éste deberán sumergirse en un medio elástico continuo. Supongamos que el foco A emite vibraciones de período T , de modo que el número de vibraciones emitidas en la unidad de tiempo es $\nu = \frac{1}{T}$.

Supongamos también que un receptor determinado percibe las vibraciones y que el número de éstas en la unidad de tiempo es igual a ν' . Veamos qué relación existe entre ν' y ν en los diferentes casos que pueden presentarse de movimiento del receptor y del foco emisor con respecto al medio que propaga las ondas. Para simplificar, admitamos que este movimiento se realiza siguiendo la línea recta que une entre sí el receptor con el foco.

En las fórmulas que vamos a emplear introduciremos unas reglas determinadas sobre los signos de las velocidades del foco y del receptor. Convencionalmente consideraremos positiva la velocidad u del foco, con respecto al medio, cuando aquél se aproxime al receptor. Si el foco se aleja del receptor su velocidad será considerada negativa. Análogas condiciones servirán para determinar el signo que tenga la velocidad v del receptor con respecto al medio: cuando se aproxime al foco consideraremos su velocidad positiva y cuando se aleje, negativa. La velocidad con que se propaga la vibración en el medio será designada con la letra V .

Analicemos el primer caso: el receptor registrador A y el foco B están en reposo con relación al medio, es decir, $u = 0$ y $v = 0$. Si las vibraciones pasan constantemente junto al receptor, éste recibirá en una unidad de tiempo tantas vibraciones como ondas pasen junto a él en este tiempo. Como quiera que la onda recorre en la unidad de tiempo una distancia V , el número de vibraciones recibidas por el receptor será igual a

$$\nu' = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{VT} = \frac{1}{T} = \nu$$

es decir, obtendremos un resultado evidente: el número de vibraciones percibidas por el receptor en la unidad de tiempo es igual al número de vibraciones emitidas por el foco en este mismo tiempo.

Segundo caso: el receptor registrador se mueve con relación al medio con una velocidad v : el foco permanece inmóvil, es decir, $u = 0$.

Supongamos primero que el receptor se mueve en dirección al foco, es decir, de acuerdo con la regla convenida $v > 0$. En este caso, junto al receptor pasarán más ondas en la unidad de tiempo que cuando dicho receptor se encontraba en reposo respecto al medio. Efectivamente, como el receptor se mueve al encuentro de las ondas, ocurrirá lo mismo que si las ondas pasasen junto al receptor con una velocidad igual a la suma de las velocidades de la onda V y del receptor v . El número de ondas que pasa junto al receptor en la unidad de tiempo será igual a:

$$v' = \frac{V+v}{\lambda} = \frac{V+v}{VT},$$

de donde, como $\frac{1}{T} = \nu$, tenemos:

$$v' = \left(1 + \frac{v}{V}\right) \nu, \quad (1)$$

es decir, el número de ondas percibidas por el receptor es $\left(1 + \frac{v}{V}\right)$ veces mayor que el de ondas emitidas por el foco.

Si el receptor se aleja del foco, según la regla convencional de los signos, su velocidad $v < 0$. En este caso el número de vibraciones ν' percibidas por el receptor también viene expresado por la fórmula (1), pero como v/V será menor que cero, ν' resultará menor que ν , es decir, el número de vibraciones percibidas por el receptor será menor que el de vibraciones emitidas por el foco.

Esta variación del número de vibraciones registradas cuando el receptor o el foco se mueven con respecto al medio, recibe el nombre de *efecto Doppler*.

Si la velocidad v del receptor es igual a la de la onda, sus traslaciones serán simultáneas y el número de vibraciones percibidas en la unidad de tiempo será igual a cero. Si la velocidad del receptor es mayor que la de las ondas, estas últimas se irán quedando rezagadas y el receptor marcará que las ondas van a su encuentro.

Analícemos el tercer caso: el foco se mueve con una velocidad u respecto al medio; el receptor permanece inmóvil, es decir, $v = 0$.

Supongamos primeramente que el foco se mueve hacia el receptor: $p > 0$.

Como la velocidad de propagación de las ondas depende únicamente de las propiedades del medio, durante un período de la vibración avanzará una longitud de onda λ , independientemente de que el foco se mueva o no respecto al medio; pero durante este tiempo el foco recorre una distancia uT (fig. 282) en la misma dirección que la onda, por lo tanto, la longitud de onda resultará igual a

$$\lambda' = \lambda - uT = VT - uT = (V - u) T;$$

de donde el número de vibraciones percibidas por el receptor en la unidad de tiempo aumentará, a causa de la disminución de la longitud de onda, y será igual a

$$v' = \frac{V}{\lambda'} = \frac{V}{(V-u)T} \text{ o } v' = \frac{V}{V-u} v, \quad (2)$$

es decir, el número de vibraciones percibidas por el receptor aumenta en la proporción de $\frac{V}{V-u}$.

Si el foco se aleja del receptor ($u < 0$), se produce un aumento de la longitud de onda en la magnitud $\Delta\lambda = uT$, y, como resultado, el receptor percibirá menor número de vibraciones: $v' < v$.

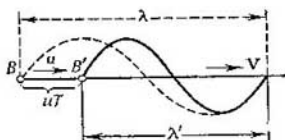


Fig. 282. Disminución de la longitud de onda cuando el foco se mueve en la misma dirección en que se propagan las ondas.

El cuarto caso es el más general: en él se supone que tanto el receptor como el foco se mueven simultáneamente con respecto al medio en que se propagan las ondas ($u \neq 0$ y $v \neq 0$).

El movimiento del foco da lugar a que la longitud de la onda emitida varíe y se haga igual a

$$\lambda' = \lambda - uT.$$

El movimiento del receptor hace que el número de vibraciones percibidas por él en la unidad de tiempo resulta multiplicado por $\frac{V+v}{V}$; estas dos causas determinan que el número de vibraciones percibidas por el receptor resulte igual a

$$v' = \frac{V+v}{\lambda - uT} = \frac{V+v}{V-u} \cdot \frac{1}{T} \text{ o } v' = \frac{V+v}{V-u} v. \quad (3)$$

Es decir, v' depende de diferente modo de la velocidad del receptor v y de la del foco u respecto al medio.

Si las velocidades v y u no tienen la dirección de la recta que une el receptor con el foco hay que tomar sus componentes sobre esta línea.

La variación que experimenta el número de vibraciones a causa del movimiento del foco o del receptor es fácil de notar cuando se perciben sonidos. La frecuencia de las vibraciones sonoras determina el tono del sonido: cuanto mayor es el número de vibraciones en la unidad de tiempo, tanto más alto es el tono. Cuando una locomotora a gran velocidad pasa pitando junto a un observador, éste

nota perfectamente cómo el tono del pitido varía en el momento en que la locomotora, después de pasar, comienza a alejarse.

§ 114. Velocidad de grupo. Hasta ahora, al hablar de la velocidad de propagación de las ondas nos hemos referido a la velocidad de fase, es decir, a la velocidad con que se propagan las superficies de igual fase o superficies de onda. En la ecuación de la onda plana

$$x = a \cos \omega \left(t - \frac{r}{V} \right) \quad (1)$$

la magnitud V es la velocidad de fase, es decir, la velocidad a que se propaga en el medio una superficie de onda, que es el lugar geométrico de los puntos que vibran en una misma fase. De esto podemos convencernos basándonos en los razonamientos siguientes.

En la expresión (1) r es un segmento, tomado en la dirección en que se propagan las ondas planas, que determina la posición de la superficie de onda

Fig. 283. Onda formada por una sola cresta.



(fig. 273). La condición de la continuidad de las fases en el tiempo se reduce a la condición de que el argumento del coseno en la expresión (1) sea constante, es decir, a que

$$\omega \left(t - \frac{r}{V} \right) = \text{const.},$$

o, como la frecuencia circular ω es una magnitud constante, a que se cumpla la condición

$$t - \frac{r}{V} = \text{const.}$$

Llamando τ al valor de esta magnitud constante para la superficie de onda dada, tendremos

$$t - \frac{r}{V} = \tau.$$

Evidentemente, τ estará determinada por el momento a partir del cual se cuenta el tiempo t ; como para $r = 0$ suponemos $t = 0$, tendremos que admitir que la constante τ es igual a cero, de donde

$$t - \frac{r}{V} = 0 \quad \text{y} \quad V = \frac{r}{t},$$

es decir, V es la velocidad con que aumenta el segmento r con el tiempo, o dicho de otro modo, la velocidad a que se traslada el plano de fases iguales.

Rayleigh fue el primero en demostrar que en las ondas, junto con el concepto de velocidad de fase, debía introducirse el de la llamada *velocidad de grupo*.

La velocidad de grupo se refiere al caso de la propagación de ondas de carácter complejo no cosinusoidal en un medio en el cual la velocidad de fase con que se propagan las ondas cosinusoidales depende de su frecuencia. La velocidad de fase de las ondas depende de sus frecuencias y esta dependencia se llama *dispersión de las ondas*.

Figurémonos que en la superficie del agua se produce una onda, formada por una sola cresta (fig. 283), que se propaga en una dirección determinada. De

acuerdo con lo dicho en el § 104, esta vibración compleja puede descomponerse en un grupo de vibraciones armónicas puras. Si todas las vibraciones armónicas se propagan por la superficie del agua con la misma velocidad, con esta misma velocidad se propagará también la vibración compuesta por ellas. Pero si las velocidades de las distintas ondas cosinusoidales son diferentes, la diferencia de fases entre ellas cambiará constantemente y la cresta que se forma como resultado de su composición cambiará constantemente de forma y avanzará con una velocidad distinta de la de todas las ondas componentes.



Fig. 284. Segmento de cosinusoide.

Toda onda real se diferencia de la cosinusoide ideal, aunque sólo sea por el hecho de que esta última no está limitada por el tiempo. En la pág. 463 vimos, que toda vibración amortiguada se compone de una multitud innumerable de vibraciones armónicas. Por el teorema de Fourier todo segmento de cosinusoide (fig. 284) también puede descomponerse en una multitud innumerable de cosinusoides ideales no limitadas en el tiempo. Por lo tanto, toda onda real representa de por sí una superposición (grupo) de cosinusoides innumerables y su

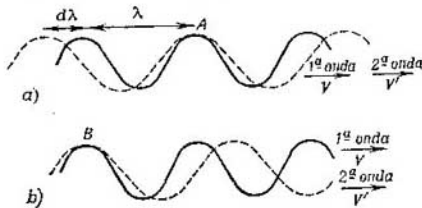


Fig. 285. Ilustración para deducir la expresión de la velocidad de grupo.

velocidad de propagación en un medio dispersante es diferente de la velocidad de fase de las ondas componentes. Esta velocidad de propagación de las ondas reales en un medio dispersante es la que se llama *velocidad de grupo*. Las ondas reales solamente se propagan con una velocidad igual a la de fase de sus componentes cosinusoidales en aquellos medios en que no existe dispersión.

Deduzcamos la expresión analítica de la velocidad de grupo. Para simplificar, supongamos que el grupo consta solamente de dos ondas, cuyas longitudes se diferencian poco entre sí: la 1ª tiene una longitud de onda λ y se propaga con una velocidad V y la 2ª tiene una longitud de onda $\lambda' = \lambda + d\lambda$ y se propaga con una velocidad

$$V' = V + \frac{dV}{d\lambda} d\lambda. \quad (2)$$

La posición relativa de ambas ondas en un momento determinado se representa en la fig. 285, a. Las crestas de ambas ondas coinciden en el punto A; en este punto se encuentra un máximo de las vibraciones resultantes. Supongamos que $V' > V$; en este caso, la segunda onda adelantará a la primera. Al cabo de un lapso determinado τ la adelantará en un segmento igual a $d\lambda$, y como resultado de esto las ondas no coincidirán ya en el punto A, sino en el B (fig. 285, b). El sitio correspondiente al máximo de la vibración compuesta

resulta desplazado hacia atrás, en un segmento λ , con relación a la primera onda. De aquí se deduce que la velocidad de propagación del máximo de las ondas resultantes, con relación al medio, es menor que la velocidad de propagación de la primera onda en una magnitud λ/τ . Esta velocidad de propagación del máximo de la vibración compuesta es la velocidad de grupo; designándola por U , tendremos que

$$U = V - \frac{\lambda}{\tau}. \quad (3)$$

Como la velocidad de la segunda onda respecto a la primera es igual a $V' - V$,

$$\tau = \frac{d\lambda}{V' - V};$$

poniendo en esta fórmula en lugar de V' su valor según (2), obtenemos:

$$\tau = \frac{d\lambda}{\left(V + \frac{dV}{d\lambda} d\lambda\right) - V} = \frac{d\lambda}{dV}.$$

Poniendo esta expresión de τ en (3) hallamos la velocidad de grupo

$$U = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}. \quad (4)$$

Por la fórmula (4) vemos, que la velocidad de grupo U se diferencia tanto más de la velocidad de fase V , cuanto mayor es $dV/d\lambda$, es decir, cuanto más

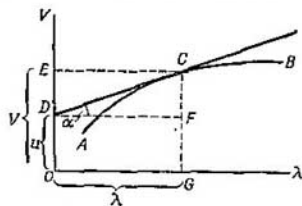


Fig. 286. Procedimiento gráfico de hallar la velocidad de grupo.

depende la velocidad de propagación de la longitud de onda. Cuando $\frac{dV}{d\lambda} > 0$ la velocidad de grupo $U < V$ y cuando $\frac{dV}{d\lambda} < 0$ tenemos que $U > V$. De esta forma, la velocidad de grupo U puede ser mayor o menor que la velocidad de fase V . La velocidad de grupo es menor que la de fase cuando $\frac{dV}{d\lambda} > 0$, es decir, cuando las ondas más largas se propagan más de prisa que las cortas; este caso se conoce con el nombre de dispersión normal.

Para los medios en que no existe dispersión, $\frac{dV}{d\lambda} = 0$ y $U = V$, es decir, de acuerdo con lo dicho anteriormente, la velocidad de grupo es igual a la de fase.

Para hallar la velocidad de grupo puede utilizarse el método gráfico siguiente: supongamos que la curva AB (fig. 286) expresa la relación de dependencia entre la velocidad de propagación de la onda V y la longitud de onda λ . Por el punto C , correspondiente a un valor dado de λ , trazamos la tangente CD .

Entonces, para el segmento CF tendremos

$$CF = DF \cdot \operatorname{tg} \alpha = \lambda \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

pero

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dV}{d\lambda},$$

de donde

$$CF = \lambda \cdot \frac{dV}{d\lambda}.$$

En la figura vemos que

$$DO = EO - ED,$$

pero

$$EO = V$$

y

$$ED = CF = \lambda \frac{dV}{d\lambda},$$

de donde

$$DO = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}.$$

Comparando esta expresión con la fórmula (4), vemos que, en nuestro diagrama, el segmento DO representa precisamente la velocidad de grupo U .

En la fig. 286 pueden establecerse fácilmente las correlaciones que acabamos de estudiar: si la velocidad de las ondas V aumenta con λ (a este caso se refiere la figura), el punto D se encuentra más bajo que el E , por consiguiente, la velocidad de grupo $U < V$. Si la velocidad V disminuye al aumentar λ , no es difícil comprender que el punto D estará más alto que el E , lo que corresponderá a la correlación $U > V$. Finalmente, si las ondas de todas las longitudes se propagan con igual velocidad, la relación entre V y λ se representará en el diagrama por una recta paralela al eje λ . En este caso, E y D coincidirán y, por consiguiente, coincidirán también la velocidad de grupo U y la de fase V .

Vibraciones acústicas

§ 115. **Vibraciones acústicas y su propagación.** En el aire, como en todos los demás gases, las vibraciones se propagan formando ondas longitudinales. Cuando a nuestro órgano auditivo (oído) llegan vibraciones cuya frecuencia se encuentra comprendida entre los límites de 20 a 20 000 vibraciones por segundo, producen en él la sensación específica del sonido.

Como unidad de frecuencia se admite la de un movimiento vibratorio, en el cual, durante un segundo, se realiza una vibración completa; esta unidad de frecuencia lleva el nombre del físico alemán Hertz y se llama *herzio* (o abreviado Hz)*. Por ejemplo, un movimiento vibratorio en el cual se realizan 2 vibraciones en 1 s, tiene la frecuencia de 2 Hz, y un movimiento con 10 vibraciones en 1 s, tendrá una frecuencia de 10 Hz.

De esta forma, las vibraciones que se encuentran entre los límites de 20 y 20 000 Hz tienen la propiedad de producir la sensación de sonido y, por esto, constituyen un grupo especial de vibraciones u oscilaciones que se denominan *sonoras* o *acústicas* o simplemente *sonidos*.

Esta agrupación de los movimientos vibratorios que se realizan entre los límites de 20 y 20 000 Hz está relacionada con las peculiaridades fisiológicas del órgano auditivo humano, el cual percibe únicamente las vibraciones que tienen estas frecuencias. Pero desde el punto de vista físico, las vibraciones de 10 ó 30 000 Hz, por ejemplo, no se diferencian en nada específico de las vibraciones de 20 a 20 000 Hz. Por esta razón, en Física suelen considerarse como vibraciones sonoras, en general, las vibraciones elásticas que se propagan en forma de movimientos ondulatorios en los gases, líquidos y sólidos o que producen en regiones limitadas de estos cuerpos ondas estacionarias. Las vibraciones elásticas que tienen frecuencias mayores de 20 000 Hz reciben el nombre de *ultrasonidos* y las que tienen frecuencias menores de 20 Hz se llaman *infrasonidos*.

* En lugar de Hz suele emplearse la expresión, «ciclos por segundo» (c/s) (N. del T.)

Como quiera que el medio principal en que se propagan las vibraciones sonoras es el aire, empezaremos por estudiar la velocidad de propagación de las ondas elásticas longitudinales en los gases.

En el § 106 se dio la siguiente expresión de la velocidad de propagación de las ondas elásticas longitudinales en un medio continuo

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1)$$

donde E es el módulo de Young del medio y ρ es su densidad. Por definición, el módulo de Young de una varilla elástica en deformación es

$$E = \frac{p_n}{\frac{\Delta L}{L}}$$

donde p_n es el esfuerzo o carga unitaria, es decir, una magnitud numéricamente igual a la fuerza aplicada por unidad de área transversal, y $\Delta L/L$ es el alargamiento relativo. Cuando se trata de una columna de gas p_n debe ser sustituido por la sobrepresión Δp que hace que se comprima el gas. La deformación lineal relativa $\Delta L/L$ puede sustituirse por la deformación volumétrica relativa $\Delta V/V$, puesto que suponemos que la columna de gas se comprime únicamente a lo largo de su longitud, sin que varíe su sección transversal. Así pues

$$E = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}. \quad (2)$$

Suponiendo que las variaciones de la presión y del volumen son infinitesimales, podemos designarlas por dp y dV . Al hacer esto debemos tener en cuenta que al aumento de la presión (dp positivo) corresponde una disminución del volumen, es decir, un dV negativo. Por esto escribiremos la fórmula (2) de la forma:

$$E = -\frac{dp}{\frac{dV}{V}} \quad \text{o} \quad E = -V \frac{dp}{dV}. \quad (2a)$$

Las vibraciones sonoras son tan rápidas, que la compresión y expansión del gas se pueden considerar adiabáticas, por lo que la variación del estado del gas satisface la ecuación (fórmula) de Poisson:

$$pV^\gamma = \text{const},$$

donde γ es la razón de los calores específicos a presión y volumen constantes, $\gamma = C_p/C_v$ (véase el § 49).

Derivando la fórmula de Poisson, obtenemos:

$$V^\gamma dp + \gamma V^{\gamma-1} p dV = 0, \quad \text{de donde} \quad \frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V}.$$

Poniendo este valor de dp/dV en la fórmula (2a), hallamos

$$E = \gamma p;$$

finalmente, poniendo este valor de E en la expresión (1) de las vibraciones sonoras, obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \quad (3)$$

Poniendo aquí en lugar de la densidad ρ su valor en función de la presión p , la temperatura del gas T y su peso molecular μ (véase el § 45)

$$\rho = \frac{p\mu}{RT},$$

donde R es la constante de los gases, hallamos-que

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (4)$$

De esta forma, la velocidad de propagación de las ondas sonoras en un gas dado es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta T y no depende de la presión p del gas.

Para distintos gases, en igualdad de condiciones, la velocidad del sonido es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de sus pesos moleculares.

En la tabla XX se dan los valores de la velocidad del sonido

Tabla XX
Velocidad del sonido v en los gases a 0°C

Gas	Velocidad del sonido en m/s
Aire	331
Oxígeno	315
Hidrógeno	1263
Anhidrido carbónico . .	258

en algunos gases, a la temperatura de 0°C .

La gran velocidad del sonido en el hidrógeno se debe a su pequeño peso molecular.

En la propagación de las ondas sonoras en la atmósfera desempeña un gran papel la falta de homogeneidad de ésta. La velocidad del sonido depende de la temperatura del aire y de su grado de humedad. El viento también influye en la velocidad de propagación de las ondas sonoras. Finalmente, las ondas se reflejan en el límite que separa dos medios en los cuales su velocidad es distinta. Puede ob-

servarse la reflexión de los sonidos en las nubes y en los límites de la niebla.

Todos sabemos que los sonidos se perciben mejor a favor del viento que contra él. Este fenómeno se debe al gradiente de velocidad del viento, y no a la propia velocidad, puesto que esta última es generalmente pequeña en comparación con la velocidad del sonido. La velocidad del viento junto a la superficie de la Tierra es menor que a cierta altura. Esto hace que los rayos sonoros que avanzan contra el viento se tuerzan hacia arriba. La mala audición en contra del viento se explica por el hecho de que los rayos sonoros pasan por encima de la cabeza del observador.

Un fenómeno semejante se produce a causa de la existencia del gradiente de temperatura del aire. El sonido se propaga con más rapidez en el aire templado que en el frío. De aquí se deduce, que si la temperatura disminuye a medida que nos alejamos de la superficie de la Tierra, la velocidad del sonido también disminuirá con la altura y los rayos sonoros se desviarán hacia arriba. Este caso corresponde al gradiente de temperatura que tiene lugar a mediodía cuando hace sol y calor y la superficie de la Tierra se calienta mucho. En estas condiciones suele oírse mal. Pero por las tardes, cuando el cielo está despejado y la Tierra se enfría rápidamente, ocurre lo contrario, es decir, se enfrían las capas de aire próximas a la Tierra, mientras que la temperatura de las capas más altas aumenta, lo que da lugar a que los rayos sonoros que van hacia arriba se tuerzan hacia abajo. Esto explica por qué se oye mejor por las tardes.

Finalmente, por la falta de homogeneidad de la atmósfera se explica la formación de las llamadas zonas de silencio, que suelen observarse cuando se propagan a grandes distancias sonidos fuertes, por ejemplo, el ruido de explosiones. La explosión se oye a distancias relativamente cortas y a grandes distancias (de centenares de kilómetros), pero en medio existe una región donde la explosión no se oye.

En la expresión de la velocidad del sonido (4) entra la razón de los calores específicos $\gamma = C_p/C_v$ lo que da la posibilidad de determinar el valor numérico de esta relación en los gases midiendo la velocidad del sonido en ellos.

Detengámonos aún en otros factores característicos de la propagación de las ondas sonoras en los gases. En cada uno de los puntos de un medio en que se propaga una onda longitudinal sonora las condensaciones y enrarecimientos se suceden entre sí. Por consiguiente, la presión del gas unas veces aumenta con respecto a la inicial y otras disminuye. La diferencia máxima de la presión, con relación a la normal, se llama amplitud del sonido; esta amplitud suele medirse en barias.

Como esta presión complementaria varía constantemente en la onda, su valor medio es igual a cero. No obstante, cuando se trata

de ondas muy fuertes hay que tener en cuenta los efectos que dependen del cuadrado o de las potencias más altas de la elongación. Las vibraciones de este género se determinan con ecuaciones no lineales y, por esta razón, se llaman *vibraciones no lineales*. Para ellas la presión media no es igual a cero. Una onda de este tipo, al reflejarse en un obstáculo, ejerce presión sobre él. La magnitud de esta presión del sonido, como demuestra la teoría, es igual a

$$p = \frac{1}{2} \bar{e}' (\gamma + 1),$$

donde \bar{e}' es la densidad media de la energía de la onda estacionaria que se forma junto al obstáculo y γ es la razón de los calores específicos C_p/C_v .

La presión del sonido fue estudiada experimentalmente en el laboratorio por el insigne físico ruso P. N. Lébedev (1866-1912), el cual planteó en su forma general el problema de la presión ejercida al absorberse y reflejarse las ondas (véase el t. III).

§ 116. *Interferencia de las ondas sonoras.* En las ondas sonoras se pueden descubrir fácilmente los fenómenos característicos de las interferencias, descritos en al § 109. Un experimento muy sencillo

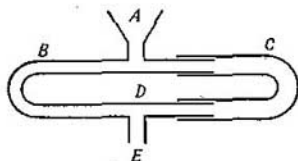


Fig. 287. Tubo para estudiar interferencia del sonido (tubo o trombón de Quincke).

sobre interferencias de sonidos puede realizarse con el tubo representado esquemáticamente en la fig. 287. El generador del sonido se coloca en el embudo *A*, adaptado al tubo. El tubo se bifurca formando dos ramas *ABD* y *ACD*. El codo *ACD* está hecho de forma que los tubos entran unos dentro de otros y gracias a esto pueden alargarse o acortarse. Las vibraciones sonoras llegan hasta el extremo del tubo *E* por dos caminos: uno, por el codo *ABD* y otro, por el codo *ACD*. Cuando la longitud de estos dos codos no es la misma, entre las ondas que llegan por ellos al punto *E* existe una diferencia de marcha $r_2 - r_1$. Si esta diferencia de marcha es igual a un número par de semilongitudes de onda, es decir, si $r_2 - r_1 = 2k \frac{\lambda}{2}$, donde k es un número entero, de acuerdo con lo expuesto en la pág. 477, el sonido que se percibe en el punto *E* se refuerza en comparación con el que se oiría si pasase por un solo codo. Pero cuando la diferencia de marchas da un número impar de semiondas, es decir, cuando $r_2 - r_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$, se observa una debilitación del sonido.

Este tubo puede emplearse para medir la longitud de las ondas emitidas por una fuente de sonido dada. Para esto hay que medir la magnitud en que hay que desplazar el tubo C para conseguir pasar de una debilitación del sonido a la siguiente. La variación de la longitud del codo da la longitud de onda λ . Este procedimiento de medir la longitud de las ondas sonoras se basa en el fenómeno de la interferencia, por lo que recibe el nombre de *método de interferencia*. El tubo representado en la fig. 287 es el más simple de los aparatos análogos a los *interferómetros* que se utilizan en óptica para la medición de las longitudes de las ondas luminosas.

En la práctica este tubo sólo puede emplearse para medir longitudes de ondas sonoras del intervalo medio, puesto que a las vibraciones acústicas extremas corresponden ondas demasiado largas o demasiado cortas. Efectivamente, en el aire, donde la velocidad del sonido es $V = 331$ m/s, a las vibraciones sonoras más lentas, cuya frecuencia es de $\nu = 20$ Hz, corresponde una longitud de onda $\lambda = 331/20$ m = 16,5 m, mientras que a las vibraciones más rápidas, cuya frecuencia es $\nu = 2 \cdot 10^4$ Hz, corresponde una longitud de onda $\lambda = 1,65$ cm. A la frecuencia media $\nu = 500$ Hz corresponde $\lambda = 66,2$ cm.

Si el sonido que llega al embudo A es complejo, con una diferencia de marcha determinada $r_2 - r_1$ se debilitan aquellas vibraciones para las cuales esta diferencia sea igual a un número impar de semiondas, es decir, $\lambda/2$; $3\lambda/2$; $5\lambda/2$, etc. Como resultado, de la oscilación compleja se elimina toda una serie de sus componentes armónicas, y el carácter de dicha vibración varía. De esta forma, el tubo hace las veces de filtro acústico con respecto a las vibraciones de frecuencias determinadas.

Un caso particular es el de la interferencia de dos ondas cuyas frecuencias y amplitudes son iguales pero que avanzan *en sentidos contrarios, una al encuentro de la otra*. En este caso, como indicamos en la pág. 480, se forman *ondas estacionarias*. La formación de estas ondas estacionarias se puede apreciar directamente cuando el sonido se refleja en una pared. Para esto hay que utilizar una fuente que emita ondas de una longitud determinada, las cuales deben ser suficientemente cortas para que la distancia entre los vientres contiguos no sea grande. Acercando la cabeza a la pared o alejándola de ella se puede escuchar el reforzamiento del sonido en los sitios en que el cambio de densidad es más brusco, es decir, en los sitios en que se encuentran los nodos.

Kundt propuso un procedimiento muy gráfico para observar las ondas estacionarias. Construyó un aparato consistente en un tubo de vidrio, de tres o cuatro centímetros de diámetro, cuyos extremos se cierran con dos tapones bien ajustados A y C (fig. 288).

El tapón C tiene en su centro un orificio por el que entra apretadamente una varilla metálica, la cual lleva sujeta en su extremo

un disco de corcho *B* que no roza con las paredes del tubo. Frotando esta varilla con un trozo de piel empolvada en colofonia, se provocan en ella vibraciones longitudinales, las cuales dan lugar a una onda estacionaria que tendrá un nodo en el lugar de sujeción de la varilla y vientres en sus extremos. El disco de corcho *B* comenzará a vibrar y hará que vibre el aire contenido en el tubo. De esta forma se producirá una onda, que avanzará por el tubo e interferirá con la que retrocede después de reflejada en el extremo *A*. Si la longitud del

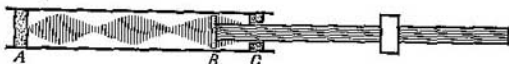


Fig. 288. Experimento de Kundt para estudiar las ondas estacionarias.

tubo contiene exactamente un número entero de semiondas, se obtendrán en él ondas estacionarias con nodos en los extremos. Dentro del tubo se echan limaduras de corcho, las cuales se dispersan en los sitios correspondientes a los vientres y se agrupan en los nodos. Con esto se consigue hacer visibles directamente los sitios en que se forman los nodos y los vientres. La distancia entre dos nodos (o dos vientres) contiguos representa la mitad de la longitud de la onda sonora provocada en el tubo. Por lo tanto, el tubo de Kundt puede servir también para medir la longitud de las ondas sonoras.

La formación de los nodos y vientres puede observarse también en las placas sonoras. En ellas se observa la formación de las llamadas *líneas nodales*. Para esto se toma una lámina de latón soportada por su centro y se pasa un arco de violín por su borde. La lámina se espolvorea con un poco de arena fina. Las vibraciones hacen que esta arena se disperse en los sitios que corresponden a los vientres y que se agrupe alrededor de las líneas nodales. En la placa se forman figuras complicadas que permiten hacerse una idea del tipo de las vibraciones. En la fig. 289 se representan varias de estas figuras correspondientes a una serie de casos particulares. El tipo de la vibración depende del punto de la placa que se roce con el arco, pero puede cambiar si se toca dicha placa con un dedo. En el sitio de excitación se forma un vientre, mientras que en el punto de la placa que se toca con el dedo comienza una línea nodal. Las demás líneas se distribuyen simétricamente por la placa. Si se toca con el dedo un ángulo de la placa y se pasa el arco por el centro de uno de los lados de la misma, se obtiene la figura que representa la fig. 289, *a*. En ella las líneas nodales están dispuestas diagonalmente. Si, por el contrario, tocamos con el dedo el centro de uno de los lados de la placa y pasamos el arco cerca de un ángulo, obtendremos la segunda figura (fig. 289, *b*). Tocando simultáneamente un ángulo y un lado de la placa y excitando

con el arco el centro de otro lado, se consigue una disposición más complicada de las líneas nodales (fig. 289, c).

El estudio del tipo de las líneas nodales tiene importancia práctica, puesto que sirve para determinar el carácter de las vibraciones que se producen en las membranas de los teléfonos y de otros aparatos acústicos.

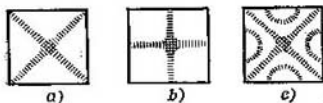


Fig. 289. Líneas nodales.

§ 117. Audición. El hombre percibe los sonidos por medio del órgano del oído. La anatomía de este órgano se representa esquemáticamente en la fig. 290. En los huesos temporales 1 del cráneo se aloja un órgano especial, el caracol 2, que constituye una pequeña cavidad ósea (de cerca de 0,2 cm³ de capacidad) llena de un líquido (endolinfa). Dentro del caracol se encuentra el órgano de Corti.

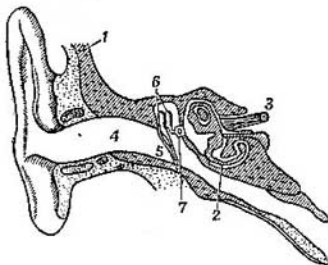


Fig. 290. Corte del oído humano.

Este órgano tiene unas fibras a las que llegan los extremos del nervio acústico 3. La longitud y tensión de estas fibras es diferente, por lo que resuenan con distintas frecuencias. Las vibraciones acústicas llegan por el conducto auditivo 4 hasta la membrana del tímpano 5, y, desde aquí, a través de una cadena de huesecillos (martillo, yunque y estribo) se transmiten a la base de la ventana oval 7, que conduce a la cavidad del caracol. Cuando los sonidos tienen una frecuencia determinada, producen vibraciones de resonancia en determinadas fibras del órgano de Corti y éstas estimulan a su vez los correspondientes extremos nerviosos, los cuales transmiten la excitación al cerebro. Si el sonido es complejo resulta excitada toda una serie de extremos nerviosos y, por consiguiente, el hombre percibe clara y distintamente los sonidos componentes de aquél.

La facultad de distinguir la dirección en que se propaga un sonido radica en que el hombre tiene dos oídos (*efecto binaural*). Esta sen-

sación de la dirección de las ondas acústicas se produce porque los centros cerebrales son capaces de discernir la diferencia de fases de las vibraciones que llegan a cada uno de los oídos. Cuando los sonidos son de alta frecuencia, el juicio sobre la dirección que siguen puede producirse como resultado de la diferencia de amplitudes con que ambos oídos perciben dichos sonidos. En la audición subjetiva se distinguen tres características del sonido: 1) *el tono o altura*, 2) *el timbre* y 3) *la intensidad*.

El tono del sonido depende de la frecuencia: cuanto mayor es la frecuencia más alto es el sonido.

El timbre se debe al carácter de las vibraciones; las vibraciones acústicas solamente en casos excepcionales son armónicas puras, por regla general tienen un carácter más complicado (véase el § 118). La composición de estas vibraciones es la que determina el timbre del sonido.

La intensidad objetiva, o, como suele decirse también, el volumen del sonido, depende de la cantidad de energía que transporta la onda sonora, en la unidad de tiempo, a través de la unidad de superficie tomada perpendicularmente a la dirección en que se propaga.

Esta cantidad de energía es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda y al cuadrado de su frecuencia. De aquí se deduce, que la intensidad de un sonido de tono dado es proporcional al cuadrado de su amplitud. Sin embargo, esta valoración objetiva de la intensidad del sonido no se corresponde con la subjetiva, basada en la sensación directa. Esto se explica por el hecho de que nuestro oído no es igualmente sensible a los sonidos de tonos distintos, es decir, de frecuencia diferente.

La cantidad de energía transportada, en la unidad de tiempo, a través de la unidad de superficie tomada perpendicularmente a la dirección en que se propagan las ondas, como indicamos en la pág. 490, se determina por el vector de Umov \vec{U} :

$$\vec{U} = \bar{\epsilon}V,$$

donde $\bar{\epsilon}$ es la densidad media de la energía de la onda y V su velocidad de propagación. Por lo tanto, la intensidad del sonido viene determinada por el vector de Umov, es decir, se puede medir en unidades objetivas, por ejemplo, en unidades del sistema CGS, en ergios/cm² s. Para esto puede utilizarse la correlación que existe entre la presión acústica y la densidad media de la energía $\bar{\epsilon}$. En la pág. 503 indicamos que, cuando su potencia es suficiente, la onda sonora ejerce sobre cualquier obstáculo una presión p , que viene determinada por la densidad media de la energía $\bar{\epsilon}'$ de la onda estacionaria que se forma junto a dicho obstáculo. De aquí se deduce, que, midiendo la presión p en el obstáculo, se puede medir también la densidad media de la energía de la onda estacionaria $\bar{\epsilon}'$. La densidad media de la energía $\bar{\epsilon}$ de la onda que avanza será dos veces menor que $\bar{\epsilon}'$. Sin embargo, desde el punto de vista experimental, la medición directa de la presión acústica presenta considerables dificultades. Por esta razón se sigue un procedimiento algo indirecto. Rayleigh demostró que sobre un disco situado en el campo de una onda acústica, y sometido a la presión acústica, debe actuar

un par de fuerzas. Para medir este par se cuelga un disco muy ligero de un hilo fino provisto de un espejito. El par de fuerzas que hace girar al disco se calcula por la desviación que sufre un rayo de luz que se refleja en el espejito. De este modo se obtiene la densidad media de la energía de la onda acústica y, después, por medio del vector de Umov, la intensidad del sonido. Este procedimiento también requiere mediciones muy delicadas y en la práctica sirve únicamente para medir sonidos muy potentes. Generalmente se emplea para graduar aparatos electroacústicos (fonómetros), que sirven para medir la intensidad de los sonidos.

Para que una onda acústica produzca la sensación de sonido es necesario que la intensidad de ésta supere una magnitud mínima determinada, llamada *umbral de audición*. Los sonidos cuya intensidad es inferior al umbral de audición no son perceptibles para el

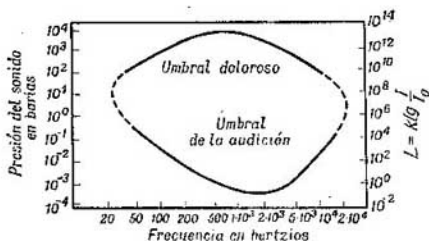


Fig. 291. Sensibilidad del oído.

oído: son demasiado débiles. El umbral de audición es diferente para distintas frecuencias. La sensibilidad máxima del oído humano corresponde a las vibraciones cuyas frecuencias se encuentran comprendidas entre 1 000 y 3 000 Hz; para esta zona de frecuencias el umbral de audición alcanza una magnitud del orden de 10^{-8} ergios/cm²s. Esta sensibilidad es mucho menor cuando las frecuencias son más bajas o más altas. Las vibraciones cuya frecuencia es menor de 20 Hz o mayor de 20 000 Hz, cualquiera que sea su intensidad, no pueden ser percibidas como sonoras.

Las vibraciones de intensidad muy grande (del orden de centenas de millares de ergios/cm² s) dejan también de ser audibles, provocan en el oído una presión molesta y hasta una sensación dolorosa. La magnitud máxima de la intensidad del sonido, pasada la cual se produce la sensación de dolor antedicha, recibe el nombre de *umbral doloroso*. Este umbral es algo diferente para las distintas frecuencias. Entre el umbral de audición y el umbral doloroso se extiende el *campo de audición* representado en la fig. 291.

La intensidad subjetiva del sonido no puede medirse cuantitativamente con exactitud. No obstante, la intensidad de las sensaciones puede valorarse basándose en la *ley psicofísica de Weber—Fechner*, según la cual, la sensación es función lineal del logaritmo

de la excitación. Sobre la base de esta ley logarítmica se establece una escala de niveles de la intensidad del sonido. Es natural que se tome como cero el nivel del umbral de audición I_0 . Convencionalmente se toma como nivel nulo (o intensidad umbral) el correspondiente a $I_0 = 10^{-9}$ ergios/cm² s, es decir, algo menor que el umbral de audición para una frecuencia de 1 000 Hz. Aceptado esto, por la ley de Weber-Fechner, la sensación que produce un sonido determinado L será proporcional al logaritmo de la reacción entre su intensidad I y la de este mismo sonido en el umbral de audición I_0 :

$$L = k \lg \frac{I}{I_0}, \quad (1)$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad. La magnitud L se suele llamar *nivel* de la intensidad del sonido*). Suponiendo $k = 1$, elegimos de hecho una unidad determinada de nivel del sonido; esta unidad recibe el nombre de *bel*.

Por lo tanto:

$$L = \lg \frac{I}{I_0} \text{ beles.} \quad (2)$$

Como divisor del bel se usa el decibel, que es diez veces menor, es decir,

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0} \text{ decibeles.}$$

La tabla XXI, que da los valores aproximados del nivel de las intensidades de los sonidos más frecuentes, permite formarse una idea más exacta de la característica de dichas intensidades. No obstante, hay que tener en cuenta también que la sensibilidad del oído depende de la frecuencia del sonido.

Nivel de algunos sonidos

Tabla XXI

Sonido	Nivel en decibeles	Intensidad del sonido ergios en $\frac{\text{cm}^2\text{s}}$	Amplitud de la presión en barías
Murmullo leve	30	$1 \cdot 10^{-6}$	$0,4 \cdot 10^{-3}$
Ruido de pasos	40	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-2}$
Conversación en voz alta	70	$1 \cdot 10^{-2}$	0,4
Ruidos de una calle animada	90	1	6,4
Fortísimo de orquesta	100	$1 \cdot 10^1$	$2,0 \cdot 10$
Ruido de un motor de aviación a 3 m de distancia	130	$1 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^3$

*) Algunos autores la designan con el nombre de «sensación» y otros con el de «sonoridad relativa». (N. del T.)

En la tabla XXI puede verse que la energía correspondiente a los sonidos ordinarios es muy pequeña. Para mayor ilustración podemos citar el ejemplo siguiente: si 2 000 personas hablasen continuamente durante hora y media, la energía producida por sus voces apenas bastaría para hacer hervir un vaso de agua.

Para caracterizar objetivamente el timbre del sonido de una vibración acústica compleja hay que desintegrarla en sus componentes armónicas, es decir, determinar su espectro. Esta descomposición puede hacerse utilizando el fenómeno de la resonancia. Si dos diapasones, cuyas vibraciones propias tengan frecuencias iguales, se colocan a cierta distancia uno del otro y se hace que uno de ellos vibre enérgicamente, en el segundo se producen vibraciones más débiles. Para convencerse de esto basta interrumpir de improviso las vibraciones del primer diapason, apretándolo con la mano, por ejemplo. Entonces se percibirá claramente el débil sonido que emite el segundo diapason. Si la frecuencia de las vibraciones propias del segundo diapason es distinta de las del primero, el fenómeno antedicho se manifestará tanto más débilmente cuanto mayor sea la diferencia que existe entre las respectivas frecuencias de las vibraciones propias. Este fenómeno se explica por el hecho de que la onda acústica que emite el primer diapason, al encontrarse con el segundo, excita en él vibraciones forzadas. Estas vibraciones forzadas alcanzan su amplitud máxima cuando se produce la resonancia. Si el amortiguamiento de las vibraciones del segundo diapason es pequeño, la resonancia se produce prácticamente al coincidir las frecuencias de las vibraciones propias de los diapasones, en cuyo caso el fenómeno de la resonancia tendrá un carácter suficientemente agudo (véase la pág. 456). Basándose en la resonancia puede realizarse el análisis de una vibración compleja. Para esto se procede del modo siguiente: se toma un gran número de diapasones cuyas vibraciones propias tengan frecuencias distintas ω_i y poco amortiguamiento. La vibración acústica compleja solamente provocará vibraciones forzadas de amplitud apreciable en aquellos diapasones que tengan vibraciones propias cuyas frecuencias ω_i coincidan con las frecuencias ω_h de las componentes del sonido que se analiza.

Para el análisis de los sonidos se pueden emplear, en lugar de diapasones, otros sistemas cualesquiera cuyas vibraciones propias tengan frecuencias determinadas y poco amortiguamiento. Helmholtz fue el primero en analizar los sonidos y utilizó para ello resonadores huecos llenos de aire. Estos resonadores tienen la forma de una esfera metálica con paredes delgadas provista de dos aberturas, una mayor a y otra menor b (en la fig. 292 se ve la sección longitudinal del resonador). La abertura principal a sirve para que entren por ella las vibraciones acústicas en la cavidad del resonador, y la abertura pequeña b , para introducirla en la oreja y poder determinar, a oído, la intensidad de las vibraciones forzadas.

La frecuencia de las vibraciones propias de los resonadores de Helmholtz ω_0 es aproximadamente igual a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{d}{V}},$$

donde d es el diámetro de la abertura a , y V , el volumen de la cavidad del resonador.

Cualquier tono simple, de los que componen el sonido complejo que se estudia, excitará con mayor intensidad aquel resonador cuyas vibraciones propias tengan una frecuencia ω_0 más próxima a la suya.

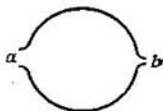


Fig. 292. Resonador esférico de Helmholtz.

De esta forma, el espectro del sonido complejo puede determinarse «escuchándolo» sucesivamente a través de una serie de resonadores y apreciando a oído la intensidad de las vibraciones forzadas que en ellos excita.

La técnica moderna permite estudiar la composición de los sonidos por medio de procedimientos electroacústicos más perfectos, pero que se basan también en el estudio de las vibraciones forzadas.

§ 118. Fuentes de sonidos. Obtención de ultrasonidos. Todo cuerpo vibrante puede servir de fuente de ondas elásticas en el medio que lo rodea, es decir, puede servir de fuente de un sonido. El estudio de las fuentes de sonido tiene gran importancia debido a la difusión alcanzada por la radio y el cine sonoro, en los cuales se utilizan altavoces, y también porque sirve de base a la teoría y a la técnica de la construcción de instrumentos musicales. Pero como estas cuestiones tienen un carácter especial, solamente nos detendremos a estudiar algunas de las fuentes más simples de ondas sonoras.

Veamos cómo se comporta una cuerda de longitud l sujeta por ambos extremos. Cuando se hace que vibre esta cuerda, se producen en ella ondas estacionarias, con la particularidad de que en cada uno de sus extremos se encuentra un nodo; en la parte central de la cuerda se forma un vientre (fig. 293, a). A esta vibración le corresponde una frecuencia ω_1 determinada. Pero junto a la onda indicada se puede producir una onda estacionaria con tres nodos: dos en los extremos y uno en el centro (fig. 293, b). La frecuencia ω_2 correspondiente a esta segunda vibración será dos veces mayor que la ω_1 de la primera. De la misma forma pueden producirse ondas estacionarias con cuatro nodos (fig. 293, c), cuya frecuencia $\omega_3 = 3\omega_1$, y, en general, ondas estacionarias con $k + 2$ nodos (contando los que se

forman en los extremos sujetos), cuyas vibraciones tendrán una frecuencia $\omega_k = (k + 1) \omega_1$.

De esta forma, una misma cuerda puede emitir vibraciones acústicas no sólo del tono fundamental ω_1 , sino también de sus armónicos (sobretonos), con frecuencias $\omega_k = (k + 1) \omega_1$, donde k es

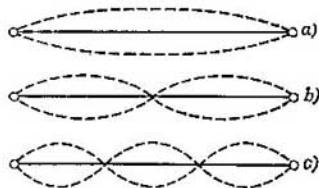


Fig. 293. Ondas estacionarias en una cuerda sujeta por sus dos extremos.

un número entero. En general, cuando vibra una cuerda se forma una serie de ondas estacionarias y, por consiguiente, esta cuerda emite, además del tono fundamental, varios armónicos, cuyas intensidades son considerablemente menores que las de las vibraciones de la frecuencia fundamental. El espectro de las vibraciones (véase la pág. 457) de un grupo de este tipo está formado por una serie de rayas correspondiente a las frecuencias $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots$

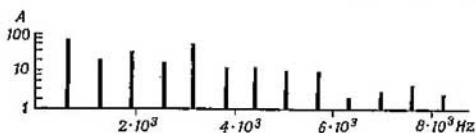


Fig. 294. Espectro acústico de un violín con tono fundamental de 640 Hz.

En la fig. 294 se muestra el espectro acústico de un violín con tono fundamental de 640 Hz; en la 295, el de las vibraciones de un clarinete con tono fundamental de 64 Hz, y en la 296, el de las de un piano de cola de 256 Hz; en esta última figura puede verse cómo junto al espectro de rayas existe una zona de espectro continuo.

A los ruidos corresponde tan sólo un espectro continuo.

En calidad de ejemplo, en la fig. 297 se muestra el espectro del ruido de un mechero de Bunsen.

La intensidad del sonido emitido depende de la amplitud de las vibraciones del sistema sonoro. No obstante, en algunos casos la fuente de vibraciones no produce un sonido intenso aunque las amplitudes sean considerables. Por ejemplo, si una cuerda tensa entre dos sujetadores duros se golpea, el sonido que emite es muy débil. Lo mismo ocurre si se golpea un diapasón teniéndolo sujeto

con la mano. Esto se explica por el hecho de que en estos casos la cuerda vibrante o las ramas del diapason únicamente producen a su alrededor corrientes de aire cerradas, en forma de remolinos, y no las condensaciones y dilataciones del medio que dan lugar a las ondas

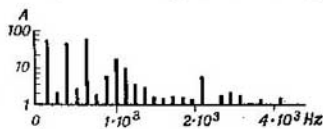


Fig. 295. Espectro acústico de un clarinete con tono fundamental de 64 Hz.

longitudinales. La ligazón del sistema vibrante con el aire que lo circunda es insuficiente y por esto la emisión es débil. Para que esta emisión aumente hay que crear unas condiciones que dificulten la formación de torbellinos. Por esto, para aumentar la sonoridad,

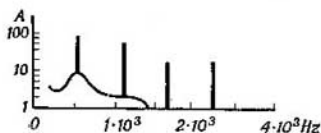


Fig. 296. Espectro acústico de un piano de cola con tono fundamental de 256 Hz.

los diapasones se montan sobre cajas de madera (cajas de resonancia) y las cuerdas de los instrumentos musicales (violines, violonchelos, etc.) se sujetan sobre la tabla de armonía. Las vibraciones de estas cuerdas se transmiten a la gran superficie de la tabla de armonía,

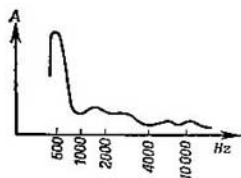


Fig. 297. Espectro acústico de un mechero de Bunsen.

en torno a la cual no es posible que se formen corrientes de aire cerradas. Junto a esta tabla es donde se generan las ondas de condensación y dilatación que hacen que el sonido sea intenso. La tapa del piano de cola desempeña este mismo papel.

El aumento de la emisión explica también la mayor intensidad de los sonidos cuando resuenan los sistemas. Un experimento sencillo de este tipo puede hacerse de la manera siguiente: se toma un diapason, se hace que suene y se coloca sobre la boca de un recipiente alto y estrecho (fig. 298) que contenga un poco de agua. Si se va añadiendo

agua paulatinamente, llega un momento en que la intensidad del sonido aumenta considerablemente. Este fenómeno se explica del modo siguiente: cuando la columna de aire que hay sobre el agua de la vasija tiene una altura adecuada, entra en resonancia con las vibraciones del diapasón y su amplitud aumenta mucho. En la boca

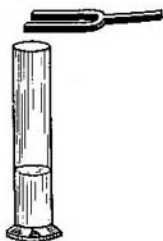


Fig. 298. Resonancia de la columna de aire que hay sobre el agua.

del recipiente se producen alternativamente condensaciones y dilataciones, las cuales rompen los remolinos de aire que se forman alrededor de las ramas del diapasón y, por consiguiente, aumenta la emisión de sonido.

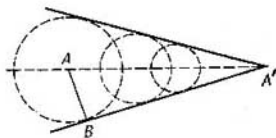


Fig. 299. Generación de una onda balística.

Finalmente, examinemos una onda acústica de tipo especial, que se forma junto a los cuerpos que se mueven en un medio *con velocidad supersónica* (para el aire esta velocidad debe ser mayor de 330 m/s). Todo cuerpo que se mueve en un medio a esta velocidad provoca en él la formación de una onda de choque que recibe el nombre de *onda balística*. La condensación del medio no puede en estas condiciones propagarse por delante del cuerpo que avanza, por lo cual, el frente de la onda se forma detrás de él. Cada uno de los puntos del medio junto al cual pasó el cuerpo puede considerarse como una fuente de ondas esféricas que se propagan con la velocidad del sonido en el medio dado. La envolvente de estas ondas esféricas (fig. 299) tiene la forma de un cono. Supongamos que el cuerpo recorre el segmento AA' en un tiempo t ; durante este mismo tiempo la onda sonora se propagará en torno al punto A a una distancia $AB = Vt$, donde V es la velocidad del sonido. De donde se deduce, que el

ángulo en el vértice del cono φ vendrá determinado por la relación

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{AB}{AA'} = \frac{V}{v}, \quad (1)$$

donde v es la velocidad del cuerpo. De esta forma, la onda balística tiene un frente en forma de cono cuyo ángulo de abertura se determina por la igualdad (1). La onda así formada no tiene carácter periódico, pero es de por sí una región de compresión que se propaga a la velocidad del sonido. Producen ondas de este tipo los proyectiles modernos de artillería o a reacción y también los aviones que vuelan a velocidades supersónicas. La impresión que producen estas ondas es la de un golpe seco. A parte de esto, los proyectiles provocan otras vibraciones (que producen sonidos silbantes o aullantes), debidas a las desigualdades de sus superficies. Todas estas vibraciones se observan después de pasar el proyectil, ya que, como éste se mueve a más velocidad que el sonido, adelanta a las ondas que se propagan.

Para producir los ultrasonidos suele utilizarse el llamado efecto piezoeléctrico (véase el t. II). Este efecto consiste en que ciertos cristales al ser introducidos en un campo eléctrico experimentan una deformación mecánica. Para conseguir vibraciones ultrasónicas se utilizan cristales de cuarzo (cuarzo piezoeléctrico). Si a una lámina de cuarzo tallada convenientemente con respecto a sus ejes cristalográficos se aplica una tensión eléctrica alterna, por medio de unos revestimientos metálicos, la lámina comienza a vibrar. Estas vibraciones se hacen particularmente intensas cuando la frecuencia de la corriente eléctrica aplicada coincide con la de las vibraciones mecánicas propias de la lámina (fenómeno de la resonancia). Elijiendo debidamente las dimensiones de la lámina se pueden conseguir vibraciones ultrasónicas con frecuencias de centenas de millones de hertzios.

Las ondas ultrasónicas, debido a su pequeña longitud, son menos propensas que las sonoras a sufrir desviaciones (difracción; pág. 473). Esto permite obtener haces de ondas ultrasónicas bien dirigidas.

En la actualidad los ultrasonidos se utilizan mucho en la técnica, especialmente para señales submarinas dirigidas, para detectar objetos sumergidos y para determinar la profundidad del mar (*eco-sonda* o *sonar*). Las láminas de cuarzo, de igual espesor, después de talladas de manera especial, se esmerilan entre sí formando mosaicos y se pegan entre dos planchas gruesas de acero. Haciendo llegar a estas planchas una corriente eléctrica alterna, todo el sistema se convierte en una poderosa fuente de ultrasonidos.

El eco-sonda o sonar se basa en lo siguiente: un foco de ultrasonidos sumergido en el agua lanza verticalmente hacia abajo un rayo sonoro, el cual, al llegar al fondo, se refleja en él y retorna al punto de partida. Conociendo la velocidad de propagación del sonido en el agua y el tiempo que transcurre desde que se lanza la señal

ultrasonica hasta que regresa (por observación del eco), no es difícil calcular la profundidad.

Para la recepción del eco también se utiliza el cuarzo piezoeléctrico. Las vibraciones sonoras, al llegar a dicho cuarzo provocan en él vibraciones elásticas, lo que hace que en la superficie opuesta del mismo se generen cargas eléctricas, las cuales pueden ser recogidas y medidas con aparatos eléctricos correspondientes.

Las ondas ultrasónicas sirven para transmisión de señales en el agua, porque en ella se propagan sin absorción sensible, pero en el aire se amortiguan mucho, por lo cual no son aptas para transmitir señales a través del aire.

El empleo técnico moderno del ultrasonido es muy variado. Se utiliza para descubrir defectos ocultos en las piezas metálicas (defectoscopios ultrasónicos), para medir huelgos, espesores, etc. Algunas aplicaciones están relacionadas con las acciones mecánicas que producen los ultrasonidos potentes en el medio en que se propagan. Así, por ejemplo, con los ultrasonidos se pueden trabajar superficies metálicas y no metálicas, taladrar orificios, limpiar piezas, etc. Los ultrasonidos influyen también en muchos procesos físico-químicos y en el desarrollo de las reacciones químicas.

§ 119. Reflexión y absorción de las ondas sonoras. Cuando una onda sonora llega al límite entre dos medios diferentes, una parte de ella se refleja en dicho límite y otra penetra en el segundo medio y continúa propagándose en él. Las ondas, al propagarse en un medio cualquiera, se debilitan poco a poco, debido a que la energía de las vibraciones se convierte en otras formas de la energía.

Los fenómenos de reflexión y absorción de las ondas sonoras juegan un gran papel en la propagación de los sonidos dentro de locales cerrados. Cuando se proyectan salones de actos, salas de conciertos, aulas o teatros, hay que tener muy en cuenta la posibilidad de que se produzcan reflexiones múltiples de las ondas sonoras en las paredes, en el techo, etc. De estas reflexiones dependen las propiedades acústicas del local.

En la actualidad existe una rama especial de la técnica que se llama *Arquitectura Acústica*.

En los locales de dimensiones medianas una onda acústica sufre varios centenares de reflexiones sucesivas en las paredes y el techo antes de que su energía descienda hasta el umbral de audición. En los grandes locales las ondas reflejadas hacen que un sonido pueda oírse durante varios segundos después de interrumpir su emisión. Un amortiguamiento demasiado lento del sonido empeora las propiedades acústicas del local, dando lugar a una «sonoridad» exagerada, con lo cual, cada parte de un contexto coherente (por ejemplo, cada sílaba de un discurso) resulta estorbada por las vibraciones anteriores aún no amortiguadas. Pero un amortiguamiento excesivamente rápido también es perjudicial desde el punto de vista

acústico, puesto que entonces los sonidos nos llegan demasiado débiles y «secos». Para el amortiguamiento hay un valor óptimo.

Cuando se calculan las propiedades acústicas de un local se parte del llamado tiempo de reverberación, que es el necesario para que la energía del sonido disminuya hasta la millonésima parte de su valor inicial ($W = 10^{-6}W_0$).

Como quiera que el amortiguamiento es diferente para ondas de distintas frecuencias, la reverberación se determina para una frecuencia de 512 Hz. El tiempo óptimo de reverberación varía según sea el fin a que se destinan los locales, por ejemplo, para las salas de conciertos, aulas, etc., el tiempo óptimo de reverberación es una magnitud del orden de 1 s.

Llamando W_0 a la densidad de la energía sonora en el momento inicial (dentro del local); α al coeficiente de absorción al reflejarse, y n , al número de reflexiones en la unidad de tiempo, tendremos, que la disminución de la densidad de la energía dW en un tiempo dt será

$$dW = -\alpha n W dt.$$

Escribamos esta expresión de la forma:

$$\frac{dW}{W} = -\alpha n dt,$$

que, a su vez, puede escribirse de la forma:

$$d(\ln W) = -\alpha n dt.$$

Como ya dijimos en una ocasión (véase la pag. 491), si las diferenciales de dos magnitudes son iguales entre sí, las propias magnitudes sólo pueden diferenciarse en una constante aditiva:

$$\ln W = -\alpha n t + C. \quad (1)$$

Cuando $t = 0$, de acuerdo con las condiciones, $W = W_0$, por lo tanto tendremos que

$$C = \ln W_0,$$

y, por consiguiente, la igualdad (1) tomará el aspecto:

$$\ln \frac{W}{W_0} = -\alpha n t,$$

de donde

$$W = W_0 e^{-\alpha n t}. \quad (2)$$

Es decir, la densidad de la energía sonora disminuye con el tiempo según una ley exponencial.

Por el cálculo de probabilidades puede hallarse que el número de reflexiones que experimenta una onda acústica en 1 s, suponiendo que las ondas se propaguen en todos los sentidos posibles, es igual a

$$n = \frac{vS}{4V},$$

donde v es la velocidad del sonido, S es el área de las superficies del local y V , el volumen del mismo.

Poniendo este valor de n en (2), obtenemos

$$W = W_0 e^{-\frac{\alpha v S}{4V} t}. \quad (3)$$

De donde vemos, que el amortiguamiento no sólo depende de los factores geométricos S y V , sino también del coeficiente de absorción α .

Para hallar el tiempo de reverberación, suponemos que en (3)

$$\frac{W}{W_0} = 10^{-6},$$

entonces

$$t = -\frac{4V}{\alpha v S} \ln 10^{-6}.$$

Poniendo en esta fórmula en lugar de v el valor de la velocidad del sonido en el aire, obtenemos que

$$t = 0,163 \frac{V}{\alpha S}. \quad (4)$$

En la tabla XXII se dan los valores del coeficiente de absorción (para la frecuencia de 512 Hz) de algunos materiales.

Tabla XXII

Coefficiente de absorción de las ondas sonoras

Material	α
Hormigón	0,015
Pared de ladrillos enfucida	0,025
Techo de tablas encalado	0,034
Alfombras	0,20
Fieltro (de 2,5 cm de espesor situado a 8 cm de la pared)	0,78

Como puede verse en esta tabla, el coeficiente de absorción varía mucho para los distintos materiales. La «sonoridad» de los locales con suelos y paredes de hormigón depende del escaso valor que tiene α para este material. De la misma manera, la «mudez» de los locales con paredes tapizadas se debe al valor relativamente grande de α para las alfombras y tapices.

INDICE ALFABETICO

- Absorción** 422
 -- de los sonidos 516, 518
Acceleración 28
 -- angular 46
 -- centrípeta (normal) 43
 -- media 31
 -- en el movimiento curvilíneo 40
 -- en el movimiento uniformemente variado 27
 -- en el movimiento vibratorio armónico 431
 -- tangencial 44
Adiabática 305
Adsorción 422
Amplitud 428
 -- del sonido 502
Angulo de contacto 363
Anisotropía 385
Arquitectura acústica 516
Atmósfera física 184
 -- técnica 184
Atomo-gramo 180
Audición 506
Avenarius 274
- Baria** 184
Bél 509
Boltzmann 345
Bomba de condensación 254
Bomba de difusión 254
 -- rotatoria de aceite 252
 -- de vacío 251, 253
Bernoulli 196
Bessel 132
Born 391
- Caballo de vapor** 96
Caída de los cuerpos 30
Calor 288, 293
 -- específico 206
 -- -- su dependencia de la temperatura 211, 413
- Calor específico de los gases** 206
 -- -- de los gases diatómicos 209
 -- -- de los gases monoatómicos 209
 -- -- de los gases poliatómicos 210
 -- -- de un gas a presión constante 207
 -- -- de un gas a temperaturas bajas y altas 211
 -- -- de un gas a volumen constante 206
 -- -- molar o calor molecular 206
 -- latente de vaporización 372
 -- de vaporización 372
Caloría 207, 293
Campo de la fuerza de la gravedad 133
 -- del vector velocidad 158
Cantidad de calor 293
 -- de calor reducida 342
 -- de movimiento 61, 62
Capacidad calorífica de los cuerpos sólidos 411, 420
Capacidad calorífica de los cuerpos líquidos 420
Capilaridad 362
Carga de rotura 401
Cavendish 129
Centro de curvatura 41
 -- de masas 137
Ciclo 303
 -- de Born-Haber 393
 -- de Carnot 316
 -- Diesel 329
 -- directo 303
 -- inverso 304
 -- de un motor de combustión interna 326
 -- de una máquina de vapor 324
 -- de un motor pulsorreactor 330
Cinemática 22
Cinemática del sistema invariable 45
Claustius 196, 295
Coefficiente de absorción 492, 517
Coefficiente de conductividad de los gases 243

- Coeficiente de contracción lateral en la tracción longitudinal 398
 — crítico 279
 — de difusión 236
 — de dilatación 186, 409
 — de dilatación cúbica 410
 — de dilatación lineal 409
 — de elasticidad 395
 — de rozamiento 60
 — de rozamiento estático 60
 — de tensión superficial 354
 — de viscosidad 169
 Coherencia 477
 Compás (brújula) giroscópico 152
 Composición de las vibraciones 436
 Composición de las vibraciones perpendiculares entre sí 442
 Conductividad térmica de los gases 243
 — de los gases a bajas temperaturas 248
 Conservación de la energía 106, 292
 — del momento de la cantidad de movimiento 148
 — del momento de la cantidad de movimiento del líquido 164
 Constante de Boltzmann 199
 — de los gases 192
 — de gravitación 126, 130
 — de Planck 415
 — de Sutherland 230
 Continuidad del filete 160
 Corrección de Van der Waals 260, 263, 265
 Relaciones de Boltzmann entre la entropía y la probabilidad del estado 345
 Corriente laminar del líquido 171
 — turbulenta de un líquido 171
 Convección 243
 Cristal 385
 Cuerpo amorfo 385
 — cristalino 385
 — isótropo 385
 — macroscópico 20
 — microcristalino 387
 — policristalino 387
 — sólido 385
 Cuerpo sólido invariable 45
 Curva balística 39
 Curvatura de una línea 40
 — de las superficies 361
 Choque de esferas elásticas 101
 — de esferas inelásticas 72
 — de moléculas 228
 Dalton 202
 Decibel 509
 Decremento logarítmico 449
 Defectoscopio ultrasónico 516
 Deformación 394
 — de cizallamiento 397
 — de compresión unilateral 394
 — de los cuerpos cristalinos 405
 — de los cuerpos elásticos 394
 — de los cuerpos sólidos 394
 — permanente 402
 — plástica 402
 — de torsión 398
 — de tracción longitudinal 394
 Densidad 16
 — de la energía 489
 — del gas 193
 — relativa del gas 193
 — de la Tierra 131
 Desigualdad de Clausius 341
 Desplazamiento de las partículas brownianas 183, 223
 Diagrama del indicador 325
 Diámetro de la molécula 229, 269
 Difracción 473
 Difusión de los gases 235
 Dimensiones de las magnitudes físicas 113
 Dina 63
 Dinámica 53
 Disociación 378
 Disolución 375
 Dispersión de las ondas 495
 Distribución de las partículas por alturas 221
 Ebullición 373
 Eco-sonda 515
 Ecuación de Bernoulli 162
 — de estado 191
 — del movimiento vibratorio armónico 428
 — de la onda 473, 485
 — de Poisson 308
 — de Van der Waals 259, 261
 — de Van der Waals en magnitudes reducidas 276
 Efecto binaural 506
 — Doppler 492
 — giroscópico 150
 — Joule-Thomson 280
 Einstein 20, 83
 Eje cristalográfico 410
 — de rotación 46
 Elasticidad retardada 405⁷
 Elongación 426
 Energía 106

- Energía de la acción intermolecular 279
- acústica 508, 510
 - cinética 98, 100
 - cinética de las moléculas 199
 - cinética de rotación 153
 - correspondiente a un grado de libertad 205
 - interna del gas 203, 279
 - interna de los cuerpos 297
 - del movimiento vibratorio armónico 435
 - de la onda 488
 - potencial 103, 104
 - potencial de los cuerpos que se atraen según la ley de Newton 134
 - potencial de un cuerpo elástico deformado 113, 396
 - potencial de la red cristalina 390
- Engels* 21, 296, 298
- Entropía 343
- Estívos* 132
- Equilibrio de sistemas 299
- Equipartición de la energía 205
- Equivalencia de la masa y la energía 121
- Equivalente mecánico del calor 291, 292
- Ergio 95
- Escala centígrada (de Celsius) de temperaturas 186
- empírica de temperaturas 186
 - de intensidad del sonido 507
 - de Kelvin (absoluta) de temperaturas 190
 - termodinámica de temperaturas 323
- Escalar 33
- Esfera de acción molecular 351
- Espacio recorrido en el movimiento uniforme 24
- — en el movimiento uniformemente variado 29
 - — en el movimiento variado 27
- Espectro acústico 512
- Espectros de los sonidos 512
- de las vibraciones 462
- Estado crítico de la substancia 270
- de equilibrio 300
 - no equilibrado 299
- Estados correspondientes 278
- Estenio 63
- Estructura de los líquidos 348, 419
- Evaporación de los líquidos 372
- Expansión de una gota 369
- Fase 428
- inicial 428, 476
- Faraday* 11
- Fiódorov* 388
- Fenómeno casual 334
- Fenómenos de transporte en los gases 235
- Figuras de Lissajous 446
- Física estadística 288
- Flotación 367
- Fluctuación 339
- Flujo de energía 490
- Foco caliente 304
- frío 304
- Fok* 83
- Formación de las gotas 357
- Fórmula barométrica 222
- de Clapeyron-Clausius 375
 - fundamental de la teoría cinética de los gases 199
 - de Laplace 362
 - de Mendeléiev-Clapeyron 192
 - de Poiseuille 178
 - de Van't Hoff 378
- Fórmulas de las dimensiones 113
- Foucault* 152
- Frecuencia cíclica 428
- circular 428
 - de las vibraciones 428
- Frenkel* 349, 351
- Frente de la onda 470
- Fuente de sonidos 511
- Fuerza 55
- centrífuga 76, 81
 - centripeta 75, 81
 - de Coriolis 85
 - cuasielástica 427
 - de la gravedad 126, 133
 - de inercia 80
 - normal 75
 - potencial 103
 - de rozamiento 58
 - de sustentación 176
 - tangencial 75
- Fuerzas de acción intermolecular 262
- giroscópicas 151
 - de inercia 78, 80
 - de inercia en un sistema de movimiento circular 81
 - internas 73
 - del movimiento curvilíneo 75
- Función de distribución 215
- Fusión de los cuerpos sólidos 386, 415
- Galilei* 19, 68
- Gas ideal (perfecto) 188
- real 259

- Gases ultraenrarecidos 257
 Giroscopio (giróstató) 150
Golitsin 203
 Gradiente de densidad 236
 — de temperatura 243
 — de velocidad 169, 241
 Grado de libertad 204
 Gramo-fuerza 64
 Gramo-masa 15, 65
 Gravitación 126
Gross 415
- Haz atómico** 232
 — molecular 231
 Hectovatio-hora 96
 Helio I 170
 Helio II 170
Helmholtz 510
Hertz 41, 499
 Hertzio 499
 Hidrodinámica 158
- Impulsión de una fuerza** 63.
 Impulso angular 148
 Indicador 325
 Infrasonidos 499
 Intensidad del sonido 507
 Interferencia 477
 — de ondas 477
 — del sonido 503
 Inyector o trompa de agua 163
Ioffe 408
 Isobara 189
 Isocora 189
 Isoterma del anhídrido carbónico 271
 — de Boyle-Mariotte 185
 — de Van der Waals 270
- Joule** 280, 291
Julio 95
- Kamerlingh-Onnes* 286
Kapitsa 170, 286
Kelvin 191
Kepler 131
 Kilogrametro 95
 Kilogramo-fuerza (kilogramo-peso) 64
 Kilogramo-masa 16, 63
 Kilojulio 95
 Kilovatio 96
 Kilovatio-hora 96
 Kundt, método de 504
- Lébedev* 503
 Lenin 10, 14, 20
 Ley de Avogadro 192
 — de la aceleración (segunda ley de Newton) 55, 61
 — de la gravitación universal de Newton 126
 — de Boyle-Mariotte 184
 — de la conservación de la cantidad de movimiento 72
 — de la distribución de Boltzmann 221
 — de distribución de las velocidades de Maxwell 213, 217
 — de Dulong y Petit 412
 — de Gay-Lussac 186
 — de Hooke 394
 — de Joule y Kopp 414
 — de Raoult 381
 — de Stokes 174
 — de Weber-Fechner 508
 Linde, máquina de 284
 Línea de corriente del líquido 158
 Licuación de los gases 277
 Licuefacción de los vapores 272
 Límite de elasticidad 401
 Línea nodal 506
 Líquido 348
 — «estirado» 273
 — ideal o perfecto 158
 — recalentado 387
 — sobrefundido 387
 — viscoso 168
 Líquidos que mojan 363
Lomonósov 196, 289
 Longitud de onda 470, 476
- Mandelshtam* 415
 Manómetro de McLeod 256
 — de mercurio 255
 — térmico 258
 Máquina de Atwood 67
 — frigorífica 305
 — térmica 303
 — de vapor 324
 Masa 56
 Masa del átomo 182
 — — su dependencia de la velocidad 120, 123
 — gravitatoria 132
 — en reposo 120
 — del Sol 131
 — de la Tierra 131
Mayer 295
Maxwell 11, 213
 Mecánica cuántica 20, 123
 Medición de las magnitudes físicas 12

- Medio continuo 158
Mendelêiev 11, 192, 274
 Menisco 364
 Metro 15
 Modulación de las vibraciones 460
 Módulo de elasticidad 395
 — de rigidez 398
 — de Young 395
 Mol 181
 Molécula 180
 Molécula-gramo 180
 Momento de la cantidad de movimiento 146, 149
 — de una fuerza 138, 139
 — de inercia 140, 143
 — de un par 142
 Monocristal 387
 Motor de combustión interna 326
 — pulsorreactor 166, 330
 Móvil perpetuo de primera especie 294
 — — de segunda especie 345
 Movimiento 20
 — browniano 183, 224
 — de un cuerpo pesado, lanzado formando ángulo con el horizonte 38
 — curvilíneo 36
 — de los líquidos 158
 — de un líquido viscoso 168
 — de la Luna 128
 — molecular 182
 — rectilíneo uniforme 23
 — rectilíneo uniformemente variado 27
 — rectilíneo variado 25
 — de rotación 46
 — del sistema invariable (cuerpo sólido) 136
 — térmico de los gases 195
 — térmico de los líquidos 349, 420
 — térmico de las moléculas 182, 195
 Movimiento térmico en los sólidos 408
 — de traslación 46
 — vibratorio armónico 425
- Nadiózhdin* 274
Newton 19, 53, 127
 — primera ley de 53
 — segunda ley de 55, 61
 — tercera ley de 69
Newton 63
 Nivel del sonido 509
 Nudo 481
 Número de Avogadro 223, 340
 — de Loschmidt 200
 — de moléculas en la unidad de volumen 200
- Oclusión 422
 Oído 506
Olzseski 284
 Onda balística 514
 Ondas estacionarias 480, 504
 — longitudinales 467
 — transversales 467
 Opalescencia 273
 Orden de largo alcance (u ordenación lejana) 421
 Ordenación próxima 421
- Parámetro 291, 299
 Par de fuerzas 142
 Película monomolecular 371
 Péndulo 426
 — balístico 108
 — físico 435
 — matemático 433
 Pérdida de media onda 484
 Período 47
 — de la oscilación del péndulo 434
 — de las vibraciones 429
Perrin 222
 Peso 65, 66
 — atómico 180
 — su dependencia de la altura 128
 — su dependencia de la latitud 81
 — molecular 180
Pictet 283
 Poise 169
 Policristal 387
 Polímero 387
Popov 12
 Potencia 94, 95
 Presión 184
 — crítica 273, 283
 — debida a la curvatura de la superficie del líquido 358
 — interna del gas 261
 — interna en los líquidos 352
 — molecular 348
 — osmótica 379
 — parcial 201
 — reducida 277
 — del vapor saturado 272, 379
 Primer principio de la Termodinámica 294
 Principio clásico de la relatividad 68
 Principio de D'Alembert 80
 — de Huygens 471
 — de la igualdad de la acción y de la reacción 69
 — de incertidumbre (de Heisenberg) 124, 195
 — de la inercia (primera ley de Newton) 53, 54

- Probabilidad 335
 Producto vectorial 51
 Propagación de las ondas elásticas 484
 proyectil cohete 166
 Pulsación 442
 Pulverizador 163
 Punto crítico 273
 — de inversión 282
 — material 21
 — triple 419
- Radio de acción molecular 351
 — de curvatura 41
 Recorrido libre 229
 Red atómica 389
 — cristalina 388
 — heteropolar 388
 — homopolar 389
 Reflexión de los sonidos 516
 Regla del sacacorchos 50
 Regulador centrífugo 77
 Regularidad estadística 336
 Relatividad del movimiento 21
 Rendimiento de una máquina térmica
 303, 316, 322
 — de una máquina de vapor 326
 — de un motor de combustión interna
 328, 330
 — de un motor pulsorreactor 331
 Representación gráfica de la energía
 110
 — de las vibraciones por medio de
 números complejos 465
 Resonador de Helmholtz 510
 Resonancia 454
 Resonancia paramétrica 457
 — de las vibraciones 454
 Reverberación 517
 Rozamiento 58
 — estático 58
 — interno 168, 239
 — interno a bajas presiones 248
 Rumford 291
- Sección eficaz de las moléculas 229
 Segundo 16
 Segundo principio de la Termodinámica
 315
 Sentido estadístico del segundo prin-
 cipio de la Termodinámica 334
 Serje de Fourier 461
 Sistema absoluto de unidades 17
 Sistema acelerado 78
 — autooscilador 450
 — de comparación (o de referencia) 21
 — inercial 53
- Sistema internacional de unidades (SI)
 15
 — MKS (de unidades) 17
 — técnico de unidades 17
 — de unidades 16
 Sonido 499
 Stern 234
 Stoliétov 12, 274
 Sublimación 419
 Sustancia termométrica 186
 Superfluidez 170
 Superposición de ondas 477
 Suspensión cardán 150
- Tabique semipermeable 377
 Temperatura 186
 — de cero absoluto 191
 — crítica 273, 283
 — reducida 277
 Tensión superficial 353
 Teorema de Nernst 347
 Teoría atómica 179
 — cinética de los gases 194
 — cinético-molecular 195
 — cuántica de la capacidad calori-
 fica 206
 — general de la relatividad 83
 — de los líquidos de Frenkel 349, 422
 — mecánica del calor 289
 — de la relatividad 20, 117
 Tercer principio de la Termodinámica
 347
 Termodinámica 287
 Termos 249
 Thomson 280, 295
 Tiempo de relajación 422
 Timbre del sonido 508
 Tonelada-fuerza 64
 Tonelada-masa 15
 Tono (altura) del sonido 508
 Torr (mm de la columna de mercurio)
 184
 Trabajo 91, 96
 — de la fuerza de la gravedad 133
 — de las fuerzas elásticas 98, 396
 — de un momento de fuerzas, 153
 — al variar el volumen del gas 301,
 311
 Trampa de mercurio 255
 Transformación adiabática 305
 — de la energía 296
 — equilibrada 300
 — irreversible 300, 331
 — politrópica 308
 — reversible 300, 331
 Trayectoria 36
 Tsiolkovski 166
 Tubo de corriente del líquido 159

- Ultrasonidos 499, 515
 Umbral de audición 508
Umov 490
 Unidad técnica de masa 64
 Unidades de medición 14
- V**
 Vacío 250
 — preliminar 254
 Vapor saturado 272
 Variación adiabática del volumen del gas 307
 — isotérmica del volumen del gas 307
 Vasija de Dewar 249
 Vatio (Watt) 96
 Vector 33
 — principal de las fuerzas 136
 — de *Umov* 490, 507
 Velocidad 23
 — angular 46
 — angular como vector 50
 — cuadrática de las moléculas 198, 201, 216
 — de escape 135
 — de fase 470, 495
 — de grupo 495
 — más probable de las moléculas 213
 — media 25
 — media aritmética de las moléculas 216
 — de las moléculas determinada experimentalmente 233
- Velocidad del movimiento curvilíneo 37
 — del movimiento rectilíneo uniforme 22
 — del movimiento uniformemente variado 29
 — del movimiento variado 26
 — del movimiento vibratorio armónico 431
 — orbital 85
 — de propagación de las ondas 469, 485, 501
 — del sonido 501
 Vibración propia 452
 Vibraciones 431
 Vibraciones acústicas 499
 — amortiguadas 447
 — forzadas 451
 — inarmónicas 458
 — de torsión 400
 Vientre 481
 Viscosidad 169
 Viscosímetro 178
 Volumen crítico 273
 — de la molécula 266
 — molecular 188
 — reducido 277
- Zayonchevski* 274
Zhukovski (*Ioukovsky*) 176
 Zona de silencio 502

A nuestros lectores:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a Editorial «Mir», Rizhski per, 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

*Este año la editorial MIR publicará
la obra de Yu. Rozanov «Procesos aleatorios»*

Yu. ROZANOV!

Procesos aleatorios

Este libro está destinado para la enseñanza inicial de la teoría de probabilidades y de los procesos aleatorios. En él se exponen los conceptos fundamentales y los métodos modernos de la teoría de probabilidades. En los modelos elementales se estudian las propiedades más características de los distintos tipos de procesos aleatorios. Se examinan las tareas teórico-probabilísticas, que tienen interés para sus aplicaciones. En la exposición del material se utilizan, fundamentalmente, los «métodos probables directos», que facilitan el desarrollo de la intuición en probabilidades que juega un papel no poco importante en la solución de las tareas teórico-probabilísticas.

El libro comprende cuatro capítulos: el primero se dedica a la introducción a los conceptos fundamentales de la teoría de probabilidades, el segundo trata las distribuciones de probabilidades, en el tercer capítulo se exponen algunos modelos de procesos aleatorios, y el cuarto — algunas tareas de pronosticación filtrado y regulación de los procesos aleatorios.

Formato 14,3 × 21,5 cm. Encuadernado en tela con sobrecubierta. 275 págs. con figuras.

En 1973 Mir reeditara

I. Bronsh téin, K. Semendíáev MANUAL DE MATEMÁTICAS Formato 11,5 × 17,5 cm. Encuadernado en tela con sobrecubierta, 696 págs.

B. Demidovich PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Formato 14,3 × 21,5 cm. Encuadernado en tela con sobrecubierta, 438 págs. con figuras.

A. Fersman. GEOQUÍMICA RECREATIVA Formato 17,5 × 22 cm. Encuadernado en tela con sobrecubierta, 484 págs. con ilustraciones

A. Kiselev, M. Krasnov, G. Makarenko PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. Formato 14,5 × 22,5 cm. Encuadernado en tela con sobrecubierta, 220 págs. con figuras.

M. Kuznetsov FUNDAMENTOS DE ELECTROTECNIA. Formato 14,5 × 22 cm. Encuadernado en tela, 560 págs. con figuras.

L. Landau, Yu. Rumer QUE ES LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD. Formato 13 × 19,5 cm. En rústica con sobrecubierta, 64 págs. con figuras.

A. Malajov. HACIA EL CENTRO DE LA TIERRA. Formato 10,5 × 16,5 cm. En rústica con sobrecubierta, 168 págs. con figuras.

Yu. Perelmán MATEMATICAS RECREATIVAS. Formato 13 × 16,5 cm. En rústica, 200 págs. con figuras.

A. Strugatski, B. Strugatski CATACLISMO EN IRIS. Formato 10,6 × 18,5 cm. En rústica con sobrecubierta, 96 págs. con figuras.

F. Ziguel LOS TESOROS DEL FÍRMAMENTO. Formato 10,6 × 17,5 cm. En rústica, 316 págs. con figuras.