

L. Landau
A. Ajiezer
E. Lifshitz



CURSO DE FÍSICA GENERAL

Mecánica
y Física
molecular



Editorial
MIR
Moscu

53
L 22
CDU 530 (075,8) = 60

Traducido del ruso por el Candidato
a Doctor en Ciencias Filológicas
Manuel Gisbert Talens

Impreso en la URSS,
1973
Derechos reservados

На испанском языке

INDICE

9		PRÓLOGO DE LA PRIMERA EDICIÓN RUSA
11	Capítulo I.	MECÁNICA DEL PUNTO
11	§ 1.	Principio de la relatividad del movimiento
13	§ 2.	Velocidad
16	§ 3.	Impulsión
18	§ 4.	Movimiento de reacción
19	§ 5.	Centro de masas
21	§ 6.	Aceleración
23	§ 7.	Fuerza
26	§ 8.	Dimensiones de las magnitudes físicas
30	§ 9.	Movimiento en un campo uniforme
32	§ 10.	Trabajo y energía potencial
35	§ 11.	Ley de la conservación de la energía
38	§ 12.	Energía interna
39	§ 13.	Límites del movimiento
43	§ 14.	Choques de cuerpos elásticos
48	§ 15.	Momento de la impulsión
52	§ 16.	Movimiento en un campo central
56	Capítulo II.	CAMPO
56	§ 17.	Interacción eléctrica
58	§ 18.	Intensidad del campo eléctrico
61	§ 19.	Potencial electrostático
63	§ 20.	Teorema de Gauss
65	§ 21.	Campo eléctrico en los casos más sencillos
69	§ 22.	Campo gravitatorio
73	§ 23.	Principio de equivalencia
75	§ 24.	Movimiento kepleriano
79	Capítulo III.	MOVIMIENTO DEL SÓLIDO
79	§ 25.	Clases de movimiento del sólido
82	§ 26.	Energía del cuerpo sólido en movimiento
85	§ 27.	Momento de impulsión
87	§ 28.	Ecuación del movimiento de un cuerpo que gira
90	§ 29.	Fuerza resultante
92	§ 30.	Giroscopio
95	§ 31.	Fuerzas de inercia
99	Capítulo IV.	OSCILACIONES
99	§ 32.	Movimiento armónico
103	§ 33.	Péndulo
106	§ 34.	Oscilaciones amortiguadas
108	§ 35.	Oscilaciones forzadas
115	§ 36.	Resonancia paramétrica
118	Capítulo V.	ESTRUCTURA DE LA MATERIA
118	§ 37.	Átomos
122	§ 38.	Isótopos
124	§ 39.	Moléculas

129	Capítulo VI. ESTUDIO DE LA SIMETRÍA	
129	§ 40.	Simetría de las moléculas
132	§ 41.	Enantio morfismo
133	§ 42.	Red cristalina
137	§ 43.	Sistemas cristalinos
142	§ 44.	Crupos espaciales
145	§ 45.	Clases cristalinas
147	§ 46.	Redes de los elementos químicos
151	§ 47.	Redes de los compuestos químicos
153	§ 48.	Planos reticulares
156	§ 49.	Caras naturales del cristal
158	Capítulo VII. CALOR	
158	§ 50.	Temperatura
163	§ 51.	Presión
166	§ 52.	Estados de agregación de la materia
168	§ 53.	Gas perfecto (ideal)
172	§ 54.	El gas perfecto en un campo exterior
175	§ 55.	Distribución de Maxwell-Boltzmann
181	§ 56.	Trabajo y cantidad de calor
187	§ 57.	Capacidad calorífica de los gases
190	§ 58.	Cuerpos condensados
195	Capítulo VIII. PROCESOS TERMODINÁMICOS	
195	§ 59.	Proceso adiabático
199	§ 60.	Efecto Joule-Thomson
201	§ 61.	Flujo estacionario
204	§ 62.	Irreversibilidad de los procesos termodinámicos
207	§ 63.	Ciclo de Carnot
210	§ 64.	Naturaleza de la irreversibilidad
212	§ 65.	Entropía
215	Capítulo IX. TRANSICIONES DE FASE	
215	§ 66.	Fases de la materia
219	§ 67.	Ecuación de Clapeyron-Clausius
222	§ 68.	Evaporación
226	§ 69.	Punto crítico
228	§ 70.	Ecuación de Van der Waals
232	§ 71.	Ley de los estados correspondientes
234	§ 72.	Punto triple
237	§ 73.	Modificaciones alotrópicas
241	§ 74.	Transiciones (de fase) de segundo orden
245	§ 75.	Ordenación de los cristales
247	§ 76.	Cristales líquidos
250	Capítulo X. SOLUCIONES	
250	§ 77.	Solubilidad
252	§ 78.	Mezclas de líquidos
254	§ 79.	Soluciones sólidas
256	§ 80.	Presión osmótica
258	§ 81.	Ley de Raoult
261	§ 82.	Ebullición de una mezcla de líquidos
265	§ 83.	Condensación inversa
266	§ 84.	Solidificación de la mezcla de líquidos
269	§ 85.	Regla de las fases
272	Capítulo XI. REACCIONES QUÍMICAS	
272	§ 86.	Calor de reacción
274	§ 87.	Equilibrio químico
276	§ 88.	Ley de acción de masas

282	§ 89.	Electrólitos fuertes
284	§ 90.	Electrólitos débiles
287	§ 91.	Energía de activación
291	§ 92.	Molecularidad de las reacciones
293	§ 93.	Reacciones en cadena
296	Capítulo XII.	FENÓMENOS DE SUPERFICIE
296	§ 94.	Tensión superficial
299	§ 95.	Adsorción
302	§ 96.	Angulo de contacto
305	§ 97.	Fuerzas capilares
308	§ 98.	Tensión del vapor sobre una superficie curva
310	§ 99.	Naturaleza de los fenómenos de recalentamiento y subenfriamiento
312	§ 100.	Coloides
315	Capítulo XIII.	SÓLIDOS
315	§ 101.	Tracción
319	§ 102.	Deformación volumétrica
322	§ 103.	Deslizamiento
326	§ 104.	Plasticidad
330	§ 105.	Defectos en los cristales
334	§ 106.	Naturaleza de la plasticidad
337	§ 107.	Rozamiento de sólidos
341	Capítulo XIV.	DIFUSIÓN Y CONDUCCIÓN DEL CALOR
341	§ 108.	Coefficiente de difusión
343	§ 109.	Conductibilidad térmica
345	§ 110.	Resistencia térmica
349	§ 111.	Tiempo de igualación
351	§ 112.	Recorrido libre
354	§ 113.	Difusión y conducción del calor en los gases
358	§ 114.	Movilidad
360	§ 115.	Difusión térmica
362	§ 116.	Difusión en los sólidos
365	Capítulo XV.	VISCOSIDAD
365	§ 117.	Coefficiente de viscosidad
367	§ 118.	Viscosidad de los gases y de los líquidos
370	§ 119.	Fórmula de Poiseuille
373	§ 120.	Método de semejanza
375	§ 121.	Ley de Stokes
377	§ 122.	Turbulencia
383	§ 123.	Gases enrarecidos
387	§ 124.	Superfluidéz
394		<i>Índice alfabético</i>

PRÓLOGO DE LA PRIMERA EDICIÓN RUSA

El objetivo de este libro es exponer al lector el concepto de los principales fenómenos físicos y de las leyes físicas más importantes. En lo posible, los autores han procurado escribir un libro de pequeño volumen, limitándose solamente a lo principal y omitiendo lo secundario. Por eso, en ninguna de las partes se pretende que la exposición sea total y completa. Las deducciones de las fórmulas solamente se dan para que puedan ayudar al lector a comprender la relación entre los fenómenos. Por ello, las fórmulas se deducen, en lo posible, basándose en los ejemplos más sencillos. Los autores consideran que la deducción sistemática de las fórmulas y ecuaciones se debe exponer en el curso de Física teórica.

Para el manejo de este libro es necesario, además de saber álgebra y trigonometría, tener nociones del Cálculo diferencial y del Álgebra vectorial. Se sobreentiende que se posee nociones de los fundamentales conceptos físicos y químicos, según el programa de segunda enseñanza. Los autores esperan que el libro pueda ser útil para los estudiantes de las facultades de Física de las universidades y de los centros de enseñanza superior, en los que la Física desempeña un papel importante, y también para los profesores de Física de las escuelas e institutos de segunda enseñanza.

Este libro se escribió en 1937, pero, por diferentes causas, se retuvo su edición. Para la presente edición se ha revisado totalmente y se ha completado, pero el plan y el contenido fundamental siguen siendo los mismos.

Por desgracia, debido a la enfermedad como consecuencia de la trágica catástrofe automovilística, nuestro amigo y maestro L. D. Landáu no ha podido tomar parte en la preparación de esta edición. Hemos procurado seguir en todo el espíritu de exposición del material indicado por el maestro.

Además, hemos seguido, en lo posible, los principios antes sentados de elección del material, basándonos para ello, tanto en la variante primitiva del libro,

como en el curso estenográfico de conferencias de Física general expuesto por L. D. Landáu en la Facultad de Física técnica de la Universidad estatal de Moscú, editado por esta universidad en 1948.

Según el plan inicial y para no alterar la coherencia de la exposición, la descripción de los métodos de la investigación experimental de los fenómenos térmicos se debía hacer en un capítulo aparte y al final del libro. Sentimos no haber podido realizar esta parte del plan y, para evitar ulteriores dilaciones, hemos decidido editar el libro sin este capítulo.

A. I. Ajièzer, E. M. Lifshitz

Junio de 1965

§ 1. Principio de la relatividad del movimiento

El concepto fundamental de la *Mecánica* es el de *movimiento*, es decir, el de desplazamiento de un cuerpo con respecto a los demás cuerpos. Claro está que sin estos cuerpos no podríamos hablar de movimiento, ya que éste siempre es relativo. El movimiento absoluto de un cuerpo, sin referencia a ningún otro cuerpo, carece de sentido.

La relatividad del movimiento está vinculada con la relatividad del propio concepto del espacio. Nosotros no podemos hablar de la posición ocupada en el espacio absoluto, independientemente de los cuerpos que se hallan en él, sino solamente de la posición con respecto a determinados cuerpos.

El conjunto de cuerpos que convencionalmente se consideran inmóviles y que con respecto a los mismos se examina el movimiento de los otros cuerpos, en Física se denomina *sistema de referencia* o de *comparación*. El sistema de referencia se puede elegir arbitrariamente de infinitas maneras; con ello, claro está, el movimiento de un cuerpo cualquiera en distintos sistemas de referencia, aparecerá de diferente manera. Si el sistema de referencia está en el mismo cuerpo, éste se hallará en reposo con respecto al sistema, pero se moverá con respecto a otros sistemas, con la particularidad de que en distintos sistemas se moverá de manera diferente, es decir, según distintas trayectorias.

Los diferentes sistemas de referencia son equitativos e igualmente permisibles en el estudio del movimiento de cualquier cuerpo. No obstante, hablando en general, los fenómenos físicos transcurren de distinta manera en los diferentes sistemas de referencia. Por eso hay la posibilidad de distinguir los diferentes sistemas de referencia. En natural elegir el sistema de referencia de manera que los fenómenos de la naturaleza aparezcan en él de la forma más simple.

Sea un cuerpo que se halle tan lejos de los demás, que no sufra ninguna influencia por parte de éstos. Se dice que este cuerpo se *mueve libremente*.

Está claro que, en realidad, las condiciones de movimiento libre pueden tener lugar sólo con mayor o menor grado de exactitud; pero, en principio, se puede uno representar con el alto grado de exactitud que se quiera, que el cuerpo no interacciona con los otros cuerpos.

El movimiento libre, lo mismo que las demás clases de movimiento, aparece de distinta manera en los diferentes sistemas de referencia. Sin embargo, de elegir como sistema de referencia un sistema ligado a un cuerpo cualquiera que se desplace libremente, los movimientos libres de los demás cuerpos aparecerán en este sistema de una manera muy simple: el movimiento será rectilíneo y uniforme o, de otra manera, a velocidad constante en magnitud y dirección. Esto es en esencia la llamada *ley* (principio) *de la inercia*, descubierta por Galileo. El sistema de referencia ligado al cuerpo que se desplaza libremente se denomina *sistema inercial*. El principio de la inercia también se denomina *primera ley de Newton*.

A primera vista puede parecer que la introducción del sistema inercial, como sistema excepcional por sus propiedades, ofrece la posibilidad de determinar el concepto de espacio absoluto y de reposo absoluto con respecto a este sistema. En realidad esto no es así, ya que hay infinitos sistemas inerciales. Efectivamente, si un sistema se desplaza con respecto al sistema inercial a velocidad constante (en magnitud y dirección), también será inercial.

Hay que subrayar que la existencia de sistemas inerciales no es una necesidad puramente lógica. La afirmación de que existen, en principio, sistemas de referencia con respecto a los cuales el movimiento libre de los cuerpos se verifica rectilínea y uniformemente, es una de las leyes fundamentales de la naturaleza.

Al estudiar el movimiento libre, no podemos, claro está, distinguir diferentes sistemas inerciales. Surge la siguiente pregunta: al estudiar otros fenómenos físicos, ¿se puede distinguir en algo un sistema inercial de otro y, de esta manera, destacar uno de los sistemas considerándolo peculiar? Si esta distinción fuera posible, podríamos decir que existen los conceptos de espacio absoluto y reposo absoluto con respecto a este sistema de referencia. Pero tal sistema inercial no existe, ya que todos los fenómenos físicos transcurren de la misma manera en los diferentes sistemas inerciales.

Todas las leyes de la naturaleza tienen el mismo aspecto en todos los sistemas inerciales, los cuales, por lo tanto, no se pueden distinguir entre sí y son equivalentes físicamente.

Esta ley, que es una de las principales de la Física, se denomina *principio de la relatividad* del movimiento y priva de todo sentido a los conceptos de espacio absoluto, reposo absoluto y movimiento absoluto. Como todas las leyes físicas se formulan de la misma manera en todos los sistemas inerciales, mientras que las enunciaciones en los distintos sistemas acelerados (no inerciales) se diferencian, es natural estudiar todos los fenómenos físicos precisamente en los sistemas inerciales. Así lo haremos en adelante, a excepción de los casos en que se especifique particularmente. En realidad, los sistemas de referencia utilizados en los experimentos físicos son inerciales con mayor o menor grado de exactitud. Así, el más corriente es el sistema de referencia relacionado con la esfera terrestre, en la cual vivimos. Este sistema no es inercial debido a la rotación diaria de la Tierra alrededor de su eje y al movimiento de traslación alrededor del Sol. Los distintos puntos de la esfera terrestre efectúan estos movimientos a diferentes, y no constantes, velocidades; por eso, el sistema ligado a la Tierra no es inercial. No obstante, debido a la lentitud relativa de variación de la dirección de las velocidades del movimiento diario de la Tierra alrededor del eje y del movimiento de la Tierra alrededor del Sol, realmente se comete un error muy pequeño, insignificante para una serie de experimentos físicos, al considerar inercial al sistema de referencia «terrestre». Aunque la diferencia entre el movimiento en el sistema terrestre de referencia y en el sistema inercial es muy pequeño, se puede observar, por ejemplo, con ayuda del péndulo de Foucault, cuyo plano de oscilación se desplaza lentamente con respecto a la superficie terrestre (para más detalles V. el § 31).

§ 2.

Velocidad

El estudio de las leyes del movimiento es natural empezarlo con el movimiento de un cuerpo cuyas dimensiones sean suficientemente pequeñas. El movimiento de tal cuerpo se efectúa de la manera más sencilla, ya que podemos no tener en cuenta la rotación del cuerpo ni el desplazamiento relativo de las distintas partes del cuerpo entre sí.

Un cuerpo cuyas dimensiones se puedan despreciar al examinar su movimiento, se denomina *punto material* y es el fundamental objeto de estudio de la Mecánica. Frecuentemente hablaremos del punto material como de una «partícula».

La posibilidad de considerar el movimiento de cierto cuerpo como movimiento del punto material, no sólo viene determinada por las dimensiones absolutas del cuerpo, sino que depende de las condiciones del problema físico planteado. Por ejemplo, al estudiar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, se puede considerar la Tierra como un punto material. Sin embargo, la Tierra no se puede considerar de ninguna de las maneras un punto material al estudiar su rotación diaria alrededor del eje.

La posición del punto material en el espacio se puede determinar completamente con sus tres coordenadas, por ejemplo, con las tres coordenadas cartesianas x , y , z . En este caso se dice que el punto material posee tres *grados de libertad*.

El conjunto de las tres magnitudes x , y , z forma el radio vector r de la partícula, dirigido desde el origen de coordenadas al punto en que se halla la partícula.

El movimiento del punto material lo caracteriza su *velocidad*. En el movimiento uniforme, el valor de la velocidad se determina simplemente como el camino recorrido por la partícula por unidad de tiempo. En el caso general, cuando el movimiento es variado y cambia de dirección, la velocidad de la partícula hay que determinarla como un vector igual al cociente de dividir el vector de desplazamiento infinitamente pequeño ds de la partícula por el correspondiente intervalo de tiempo infinitamente pequeño dt . Por consiguiente, designando con v el vector velocidad, tendremos que

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

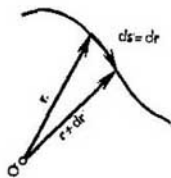


Fig. 1.

La dirección del vector velocidad v coincide con la de ds , es decir, en cada momento, la velocidad va dirigida según la tangente a la trayectoria de la partícula en el sentido del movimiento.

En la fig. 1 se representa la trayectoria del movimiento de un punto material y se indican sus radios vectores r y $r + dr$ en los momentos t y $t + dt$. Aplicando la regla de la composición (suma) de vectores, puede uno convencerse fácilmente de que el despla-

zamiento infinitamente pequeño ds del punto es igual a la diferencia de los radios vectores de la partícula en los momentos inicial y final, $ds = dr$. Por eso, la velocidad v se puede representar de la siguiente forma

$$v = \frac{dr}{dt},$$

es decir, la velocidad es la derivada del radio vector de la partícula móvil con respecto al tiempo. Como las componentes del radio vector r son las coordenadas x, y, z del punto, las componentes o proyecciones de la velocidad sobre los ejes de coordenadas x, y, z serán iguales a las derivadas

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Además de la posición, la velocidad es la magnitud fundamental que caracteriza el estado del movimiento del punto material. El estado de la partícula viene determinado, por consiguiente, mediante seis magnitudes: tres coordenadas y tres componentes de la velocidad.

Establezcamos la relación entre los valores de las velocidades v y v' de un mismo punto material en dos sistemas de referencia distintos K y K' . Si en el tiempo dt el punto material se ha desplazado a una distancia ds respecto al sistema K de referencia, y el sistema K se ha desplazado con respecto al sistema K' a la distancia dS , de la regla de composición de vectores tendremos que el desplazamiento del punto material con respecto al sistema K' será $ds' = ds + dS$. Dividiendo ambas partes de esta igualdad por el intervalo dt de tiempo y designando con V la velocidad del sistema K con respecto al K' , hallamos que

$$v' = v + V.$$

Esta fórmula, que relaciona las velocidades de un mismo punto material en diferentes sistemas de referencia, se denomina *regla de composición de velocidades*.

A primera vista, la regla de composición de velocidades parece completamente evidente. No obstante hay que tener en cuenta que se ha basado en la tácita suposición del transcurso absoluto del tiempo. Efectivamente, hemos considerado que el intervalo de tiempo durante el cual la partícula se desplaza en la magnitud ds en el sistema K , es igual al intervalo de

tiempo durante el cual la partícula se desplaza en la magnitud ds' en el sistema K' . Esta suposición, estrictamente hablando, resulta falsa; pero las consecuencias desprendidas al considerar el tiempo una magnitud no absoluta, empiezan a revelarse solamente cuando las velocidades son muy elevadas, comparables a la de la luz. En particular, a esas velocidades ya no se cumple la regla de composición de velocidades. En adelante examinaremos sólo las velocidades suficientemente pequeñas, cuando la suposición de que el tiempo es absoluto está bien justificada.

La mecánica basada en la suposición del tiempo absoluto se denomina *de Newton* o *clásica*. Solamente esta mecánica estudiaremos nosotros. Las leyes fundamentales de esta mecánica las formuló Newton en su libro «Principios matemáticos de filosofía natural», publicado en 1687.

§ 3. Impulsión

En el movimiento libre del punto material, cuando éste no interacciona con otros cuerpos, su velocidad en los sistemas inerciales permanece invariable. Y al contrario, si los puntos materiales interaccionan entre sí, sus velocidades varían con el tiempo. No obstante, las variaciones de las velocidades de las partículas que interaccionan, no son independientemente completamente, sino que se relacionan entre sí. Para aclarar cómo es esta dependencia introducimos el concepto de *sistema cerrado*, comprendiendo con ello el conjunto de puntos materiales que interaccionan entre sí, pero que no lo hacen con los cuerpos que los rodean. Para el sistema cerrado existe una serie de magnitudes relacionadas con las velocidades y que no varían con el tiempo. Estas magnitudes, naturalmente, desempeñan un papel muy importante en la Mecánica.

Una de estas magnitudes invariables es la *impulsión* (el impulso) *total del sistema*. Esta es la suma vectorial de las impulsiones de cada uno de los puntos materiales que integran el sistema cerrado. El vector de impulsión del punto material se relaciona con la velocidad del mismo de manera muy sencilla: es proporcional a esta velocidad. El coeficiente de proporcionalidad es característico para cada punto material constante y se denomina *masa* del punto material. Designando por p el vector de impulsión de la

partícula y por m su masa, podemos escribir

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

donde \mathbf{v} es la velocidad de la partícula. La suma de los vectores \mathbf{p} , extendida a todas las partículas del sistema cerrado, es la impulsión total del sistema:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots,$$

donde los subíndices representan el número de las diferentes partículas. Esta magnitud no varía con el tiempo:

$$\mathbf{P} = \text{const.}$$

Por lo tanto, la impulsión total de un sistema cerrado se conserva constante. Esta aseveración se denomina *ley (principio) de la conservación de la impulsión*. En el § 15 hablaremos del origen de esta ley.

Como la impulsión es un vector, la ley de la conservación de la impulsión se descompone en tres leyes que expresan la constancia con respecto al tiempo de las tres componentes de la impulsión total.

En la ley de la conservación de la impulsión entra una magnitud nueva: la masa de la partícula. Utilizando esta ley se puede determinar la relación de las masas de las partículas. Efectivamente, supongamos que dos puntos materiales chocan entre sí. Designemos sus masas por m_1 y m_2 . Sean \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 las velocidades de las partículas antes de la colisión y \mathbf{v}'_1 y \mathbf{v}'_2 , después de la misma. Entonces, de la ley de la conservación de la impulsión se desprende que

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2.$$

Designando por $\Delta\mathbf{v}_1$ y $\Delta\mathbf{v}_2$ las variaciones de las velocidades de ambas partículas, escribiremos la ecuación de la siguiente manera:

$$m_1 \Delta\mathbf{v}_1 + m_2 \Delta\mathbf{v}_2 = 0,$$

de donde

$$\Delta\mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \Delta\mathbf{v}_1.$$

Por lo tanto, las variaciones de las velocidades de dos partículas que interaccionan, son inversamente proporcionales a sus masas. Utilizando esta ecuación se puede determinar la relación de las masas en función de la variación de las velocidades de las partículas. Para ello elegiremos arbitrariamente un cuerpo

cualquiera, lo consideraremos de masa unidad y las masas de los demás cuerpos las relacionaremos con la de éste. En Física, como tal unidad de masa se toma, generalmente, el gramo (V. el § 8).

§ 4. Movimiento de reacción

La ley de la conservación de la impulsión es una de las leyes fundamentales de la naturaleza y se revela en una serie de fenómenos. En particular, es la base del movimiento de reacción.

Veamos cómo hallar la velocidad de un cohete en función de la variación de su masa. Sea v la velocidad y M la masa del cohete en cierto momento de tiempo t . Supongamos que en este momento empiezan a salir los gases de escape cuya velocidad respecto al cohete es igual a u . Al cabo del intervalo dt , la masa del cohete habrá disminuido y será igual a $M + dM$, donde $-dM$ es la masa del gas que ha salido, y la velocidad habrá aumentado y será igual a $v + dv$. Comparemos ahora las impulsiones del sistema cohete + gases de escape en los momentos t y $t + dt$. Claro está que la impulsión inicial es Mv . La impulsión del cohete en el momento $t + dt$ es $(M + dM)(v + dv)$, teniendo en cuenta que la magnitud dM es negativa, y la impul-

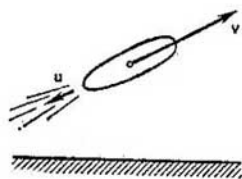


Fig. 2.

sión del gas de escape es $-dM(v-u)$, ya que la velocidad del gas con respecto a la Tierra, evidentemente, es $v-u$ (fig. 2). Según la ley de la conservación de la impulsión debemos igualar las magnitudes de las impulsiones en ambos momentos:

$$Mv = (M + dM)(v + dv) - dM(v - u),$$

de donde, despreciando la magnitud $dM dv$, que es infinitamente pequeña de segundo orden, obtenemos que

$$Mdv + udM = 0,$$

o

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dv}{u}.$$

Consideraremos que la velocidad de salida del gas no varía con el tiempo. Entonces, la última ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$d \ln M = -d \frac{v}{u},$$

de donde

$$\ln M + \frac{v}{u} = \text{const.}$$

El valor de la constante se determina de la condición de que, al iniciar el movimiento el cohete, es decir, cuando $v=0$, la masa del mismo era M_0 , por lo tanto: $\text{const} = \ln M_0$.

Colocando este valor en la ecuación obtenida, hallamos que

$$\ln M + \frac{v}{u} = \ln M_0,$$

y en definitiva

$$v = u \ln \frac{M_0}{M}.$$

Esta fórmula determina la velocidad del cohete en función de la variación de su masa.

§ 5.

Centro de masas

Con la ley de la conservación de la impulsión está relacionada una importante propiedad de la masa: *el principio de conservación de la masa*. Para aclarar el contenido de este principio, examinemos, en un sistema cerrado de partículas, el punto denominado *centro de masas* (centro de inercia) del sistema. Las coordenadas del centro de masas son los valores medios de las coordenadas de las partículas, teniendo en cuenta que la coordenada de cada partícula se considera tantas veces, cuantas unidades de masa haya en la partícula. En otras palabras, si x_1, x_2, \dots designan las coordenadas x de las partículas de masas m_1, m_2, \dots , la coordenada x del centro de masas viene determinada por la fórmula

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}.$$

De manera análoga se pueden escribir las fórmulas para las coordenadas y y z . Todas estas fórmulas se escriben en forma vectorial en una sola expresión para el radio vector \mathbf{R} del centro de masas:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots},$$

donde $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ son los radios vectores de las partículas.

El centro de masas posee una propiedad muy notable y es que se desplaza a velocidad constante, mientras que las distintas partículas que componen el sistema cerrado, pueden moverse a velocidades variables con el tiempo. Efectivamente, examinemos la velocidad de desplazamiento del centro de masas. Esta velocidad es

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}.$$

Pero $\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$ es la velocidad de la primera partícula; $\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$, la de la segunda, etc. Designando estas velocidades por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$, obtenemos

$$\mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}.$$

El numerador de esta expresión es la impulsión total del sistema, que hemos designado por \mathbf{P} . Por eso, definitivamente tenemos

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{M},$$

donde M es la suma de las masas de todas las partículas: $M = m_1 + m_2 + \dots$

Como la impulsión total del sistema se conserva, tampoco variará con el tiempo la velocidad del centro de masas.

Escribiendo la fórmula de la manera siguiente

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V},$$

vemos que la impulsión total del sistema, la velocidad de desplazamiento de su centro de masas y la suma de las masas de todas las partículas que integran el sistema se relacionan de la misma manera que la impulsión, velocidad y masa de una partícula independiente. Nosotros podemos considerar la impulsión total del sistema como la impulsión de

un punto material que se halle en el centro de masas del sistema y de masa igual a la suma de las masas de todas las partículas del mismo. La velocidad del centro de masas se puede considerar como la velocidad de desplazamiento del sistema de partículas, considerado como un todo, y la suma de las masas de las distintas partículas representa la masa de todo el sistema.

De esta manera vemos que la masa de un cuerpo compuesto es igual a la suma de las masas de sus partes. Esta aseveración es muy habitual y puede parecer muy clarividente. No obstante, no es trivial, ni mucho menos, y representa una ley física que es consecuencia de la ley de la conservación de la impulsión.

Como la velocidad del centro de masas de un sistema cerrado de partículas no varía con el tiempo, ligando con su centro de masas un sistema de referencia, obtendremos un sistema inercial de referencia. Este sistema se denomina *sistema del centro de masas*. En este sistema de referencia, la impulsión total del sistema cerrado de partículas, evidentemente, será igual a cero. Al estudiar los fenómenos en un sistema de referencia de esta clase se evitan las complicaciones que aporta el movimiento del sistema de partículas considerado en su totalidad, y se revelan más claramente las propiedades de los procesos internos que se producen en el sistema. Por esta razón, en Física se utiliza frecuentemente el sistema de centro de masas.

§ 6.

Aceleración

En el caso general de movimiento de un punto material, la velocidad varía constantemente en dirección y en magnitud. Supongamos que en el intervalo dt la velocidad ha variado en $d\mathbf{v}$. Si referimos esta variación a la unidad de tiempo, obtendremos el vector *aceleración* del punto material, que designaremos mediante $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Así tenemos que la aceleración determina la variación de la velocidad de la partícula y es igual a la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

Si la dirección de la velocidad no varía, es decir, si el punto material se desplaza en línea recta, la aceleración estará dirigida según esta recta y evidente-

mente será

$$\omega = \frac{dv}{dt}.$$

También es fácil determinar la aceleración en el caso en que la velocidad varíe sólo en la dirección, permaneciendo constante en su magnitud. Este caso tiene lugar en el movimiento uniforme de un punto material según una circunferencia.

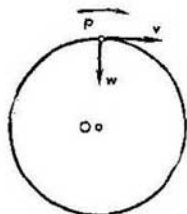


Fig. 3.

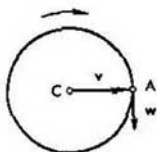


Fig. 4.

Sea v la velocidad de la partícula en un momento determinado (fig. 3). Tracemos el vector v en un diagrama auxiliar a partir de cierto punto C (fig. 4). Si el movimiento de la partícula es uniforme y según una circunferencia, el extremo del vector v (punto A) también se desplazará uniformemente según la circunferencia de radio v , igual al valor absoluto de la velocidad. Está claro que la velocidad de desplazamiento del punto A será la aceleración de la partícula P , ya que el desplazamiento del punto A en el tiempo dt es igual a $d\mathbf{v}$, y, por consiguiente, la velocidad del punto A es igual a $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Esta velocidad, siendo tan-

gente a la circunferencia C , es perpendicular a v . En la figura se designa mediante la letra w . Si construimos el vector w en el punto P , evidentemente, estará dirigido hacia el centro de la circunferencia O . Así, la aceleración de un punto material que se desplaza uniformemente según una circunferencia, va dirigida hacia el centro de la circunferencia, es decir, es perpendicular a la velocidad.

Determinemos la magnitud de la aceleración w . Para ello hay que hallar la velocidad del punto A , que se desplaza según una circunferencia de radio v . En el tiempo T , en que el punto P efectúa una rotación completa según la circunferencia O , el punto A lo

hará según la circunferencia C , es decir, recorrerá un camino igual a $2\pi v$. Por eso, la velocidad del punto A , igual a ω , será

$$\omega = \frac{2\pi v}{T}.$$

Colocando aquí el valor del período $T = \frac{2\pi r}{v}$, donde r es el radio de la trayectoria de la partícula P , obtenemos definitivamente que

$$\omega = \frac{v^2}{r}.$$

Por lo tanto, si la velocidad sólo varía en magnitud, la dirección de la aceleración coincide con la de la velocidad; si la velocidad varía solamente de dirección, los vectores de la velocidad y de la aceleración son perpendiculares entre sí.

En el caso general, cuando la velocidad varía en magnitud y en dirección, la aceleración posee dos componentes: una según la dirección de la velocidad y la otra, perpendicular a la misma. La primera se denomina componente *tangencial* y es igual a la derivada de la magnitud de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\omega_t = \frac{dv}{dt}.$$

La segunda componente de la aceleración, ω_n , se denomina *normal*. Es proporcional al cuadrado de la velocidad de la partícula e inversamente proporcional al radio de curvatura de la trayectoria en el punto considerado.

§ 7.

Fuerza

Si el punto material efectúa un movimiento libre, o sea, no interacciona con los cuerpos que le rodean, conservará su impulsión. Si, por el contrario, la partícula interacciona con los cuerpos que la rodean, su impulsión variará con el tiempo. Por lo tanto podemos considerar la variación de la impulsión del punto material como una medida de la influencia que ejercen sobre él los cuerpos que lo rodean. Cuanto mayor sea esta variación (por unidad de tiempo), más intensa será la influencia. Por eso, para determinar esta influencia es natural considerar la derivada del vector de la impulsión del punto material con respecto al tiempo. Esta derivada se denomina *fuerza*, y es la que actúa sobre el punto material.

Esta definición caracteriza un aspecto de la interacción, a saber, el grado de «reacción» del punto material ante la acción que ejercen sobre el mismo los cuerpos que lo rodean. Pero, por otro lado, al estudiar la interacción del punto material con los cuerpos que lo rodean, se puede relacionar la fuerza de esta interacción con las magnitudes que caracterizan el estado del punto material y el de los cuerpos que lo rodean.

Las fuerzas de interacción entre los puntos materiales (en la Mecánica clásica) dependen sólo de su posición. En otras palabras, las fuerzas que actúan entre las partículas, dependen solamente de la distancia entre éstas, pero no de las velocidades de las mismas.

El carácter de dependencia de las fuerzas con respecto a la distancia entre las partículas, se puede establecer, en muchos casos, partiendo del estudio de los fenómenos físicos que son la base de la interacción entre los puntos materiales.

Designemos por F la fuerza que actúa sobre el punto material considerado. Esta fuerza dependerá de las coordenadas del punto material y, además, de las magnitudes que caracterizan las propiedades y la posición de los cuerpos que lo rodean. Entonces podemos escribir la igualdad de las dos expresiones de la fuerza: la variación de la impulsión del punto material p por unidad de tiempo y F , de donde

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

Esta igualdad se denomina *ecuación del movimiento* del punto material.

Como $p = mv$, la ecuación del movimiento del punto material se puede escribir también de la siguiente manera:

$$m \frac{dv}{dt} = F.$$

De esta manera, la fuerza que actúa sobre un punto material, es igual al producto de la aceleración del punto material por su masa. Esta aseveración es el contenido de la *segunda ley de la mecánica de Newton*. No obstante, hay que subrayar que esta ley adquiere sentido concreto sólo después de establecer la clase de F en función de las coordenadas de la partícula. En este caso, es decir, si se conoce la clase de función de F , la ecuación del movimiento permite, en principio, determinar la dependencia de la velocidad y de las

coordenadas del punto material respecto del tiempo. En otras palabras, nos permite determinar la trayectoria de su movimiento. En este caso, además de la clase de la función F , es decir, de la ley de interacción de la partícula con los cuerpos que la rodean, se deben conocer las denominadas *condiciones iniciales*: posición y velocidad de la partícula en determinado momento tomado en calidad de inicial. Como la ecuación del movimiento determina el incremento de la velocidad de la partícula por cada intervalo de tiempo $dt(dv = \frac{F}{m}dt)$, y como por la velocidad se puede deter-

minar la variación de la posición de la partícula en el espacio ($dr = v dt$), está claro que el conocimiento de la posición y velocidad iniciales de la partícula son suficientes para determinar por completo su movimiento ulterior. Precisamente en esto está el sentido de la afirmación hecha en el § 2 de que el estado mecánico de la partícula viene determinado por las coordenadas y por la velocidad.

La ecuación del movimiento es una ecuación vectorial. Por eso se puede escribir en forma de tres ecuaciones que relacionan las proyecciones de la aceleración y de la fuerza sobre los ejes de coordenadas:

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x, \quad m \frac{dv_y}{dt} = F_y, \quad m \frac{dv_z}{dt} = F_z.$$

Volvamos al sistema cerrado de puntos materiales. Como sabemos, la suma de las impulsiones de estos puntos se conserva constante:

$$p + p_2 + \dots = \text{const.},$$

donde p_i es la impulsión del punto material i . Diferenciemos esta ecuación en función del tiempo:

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} + \dots = 0.$$

Observando que

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i,$$

donde F_i es la fuerza que actúa sobre el punto i , obtenemos que

$$F_1 + F_2 + \dots = 0.$$

De esta manera, la suma de todas las fuerzas de un sistema cerrado es igual a cero.

En particular, si el sistema cerrado posee solamente dos cuerpos, la fuerza con que el primer cuerpo actúa sobre el segundo, debe ser igual en magnitud y de sentido contrario a la fuerza con que el segundo cuerpo actúa sobre el primero. Esta aseveración se denomina *principio de la igualdad de la acción y de la*



Fig. 5.

reacción (o tercera ley de Newton). Como en el caso considerado solamente hay una dirección elegida, la de la recta que une los cuerpos (puntos materiales), las fuerzas F_1 y F_2 estarán dirigidas según esta recta (fig. 5; M_1 y M_2 designan los dos puntos materiales).

§ 8. Dimensiones de las magnitudes físicas

Todas las magnitudes físicas se miden con determinadas unidades. Medir una magnitud cualquiera es determinar la relación existente entre ella y otra magnitud de la misma especie tomada por unidad.

En principio, para cada magnitud física se puede elegir cualquier unidad. No obstante, se puede utilizar la relación entre distintas magnitudes físicas y usar solamente un número limitado de unidades arbitrarias para ciertas magnitudes, tomadas como básicas, y para las demás magnitudes establecer las unidades relacionadas con *las unidades fundamentales*. Esas unidades se denominan *unidades derivadas*.

En Física, como magnitudes fundamentales se han adoptado la longitud, el tiempo y la masa.

En Física, la unidad de longitud es el centímetro (cm), igual a la centésima parte del metro, el cual, en la actualidad se define como la longitud igual a 1 650 763,73 longitudes de onda de la luz correspondiente a determinada línea (a la anaranjada) del espectro del gas criptón.

Primeramente, el metro se había definido como la diezmilionésima parte del cuadrante del meridiano de París, y a base de las mediciones realizadas en 1792, se construyó e hizo el metro patrón. Como la reproducción del metro patrón basada en su definición «natural» tenía muchos inconvenientes, ulteriormente se estableció definir el metro como la longitud de determinado patrón: el metro patrón de platino iridiado que se conserva en la Oficina Internacional

de Pesas y Medidas de París. Sin embargo, en la actualidad se ha renunciado también a esta definición del metro como «medición entre trazos» y se ha admitido la definición indicada arriba del metro «luminoso». Debido a este patrón de unidad de longitud, se ha vuelto al carácter natural, indestructible, de medición de la longitud y, además, hay la posibilidad de elevar notablemente la exactitud de reproducción del metro patrón.

Para medir pequeñas longitudes se utilizan las siguientes unidades: *micra*¹⁾, $1 \mu = 10^{-4}$ cm; *milimicra* *micromilímetro* o *nanometro*, $1 \text{ m } \mu = 10^{-7}$ cm; *Angstrom* (unidad), $1 \text{ \AA} = 10^{-8}$ cm; *fermi* (unidad), $1 \text{ fermi} = 10^{-13}$ cm.

En Astronomía, las distancias se miden en *años de luz*, que es la distancia que recorre la luz en un año. El año de luz es igual a $9,46 \cdot 10^{17}$ cm. La distancia, igual a 3,25 años de luz, o sea, igual a $3,08 \cdot 10^{19}$ cm, se denomina *parsec*. A esta distancia, el diámetro mayor de la órbita de la Tierra subtende $1''$ de arco. En Física, el tiempo se mide en segundos. El segundo (s) en la actualidad se define como una parte de determinado año trópico, a saber, el de 1900. El año trópico es el intervalo de tiempo entre dos pasos sucesivos del Sol por el equinoccio de primavera. La indicación hecha del año 1900 es debida a que la duración del año trópico no es invariable y disminuye aproximadamente 0,5 s cada siglo.

Al principio, el segundo se definía como determinada parte del día solar (la $\frac{1}{86400}$ parte). Pero la rotación diaria de la Tierra no es uniforme y la duración del día no es invariable. Las oscilaciones relativas de la duración del día son aproximadamente de 10^{-7} . Esta magnitud, con el nivel actual de la técnica, es muy elevada para basar la definición de la unidad de tiempo sobre la rotación diaria de la Tierra. Las oscilaciones relativas en la duración del año trópico son menores, pero la definición del segundo basada en la traslación de la Tierra alrededor del Sol, tampoco se debe considerar completamente satisfactoria,

¹⁾ Muchos autores le dan también el nombre de «micrón» a esta unidad; pero como en la última edición (decimonovena, 1970) del Diccionario de la Real Academia Española se dice que *micrón* es la «milionésima parte de un milímetro», o sea, = 1 milimicra, hemos decidido no utilizar este término para evitar confusiones. (N. del T.)

ya que, al utilizarla, no se puede reproducir con suficiente exactitud el «patrón» de la unidad de tiempo. Esta dificultad desaparece solamente si la definición del segundo se basa en los movimientos periódicos que transcurren en los átomos, y no en el movimiento de la Tierra. Entonces el segundo será una unidad física del tiempo tan natural, como lo es el centímetro «luminoso» en la dimensión longitudinal.

En Física, la masa se mide, como ya se ha indicado antes, en gramos. El gramo es la milésima parte de la masa del kilogramo patrón, que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de París. Al principio, la masa del kilogramo se determinó como la de un decímetro cúbico de agua a la temperatura de 4° C, es decir, a la temperatura en que el agua posee la máxima densidad. Sin embargo, mantener esta definición, lo mismo que la definición primitiva del metro, resultó imposible debido al aumento de la exactitud en las mediciones. De conservar las definiciones primitivas, habría que variar continuamente los patrones fundamentales. En la actualidad, se ha establecido que 1 cm³ de agua destilada a la temperatura de 4° C no pesa 1 g, sino 0,999972 g. No obstante, la definición de kilogramo como masa de cierto kilogramo patrón también adolece de los mismos defectos que la definición del metro como medida «entre trazos». Lo más natural sería definir el gramo basándose en la masa de cualquier núcleo atómico, por ejemplo, en la del protón, y no en el kilogramo patrón de masa.

Aclaremos ahora cómo se deducen las unidades derivadas. Veamos algunos ejemplos.

Como unidad de velocidad se podría haber tomado una velocidad arbitraria (por ejemplo, la velocidad media de la Tierra en su traslación alrededor del Sol o la velocidad de la luz) y a esta velocidad, como unidad, referir todas las demás velocidades; pero se puede utilizar la definición de velocidad como la relación entre el camino recorrido y el tiempo, y como unidad de velocidad adoptar la velocidad en que se recorre un centímetro por segundo.

Para esta unidad se utiliza la notación $1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. El símbolo cm/s expresa las *dimensiones* de la velocidad en las unidades fundamentales, centímetro para la longitud y segundo para el tiempo. Las dimensiones de la velocidad se escriben así:

$$[v] = \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Lo mismo tenemos con la aceleración. Por unidad de aceleración se podría tomar cualquier aceleración (por ejemplo, la de la caída del cuerpo libre); pero se puede utilizar la definición de la aceleración como la variación de la velocidad por unidad de tiempo y tomar como unidad de aceleración la que, en un segundo, la velocidad varía en $1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Para esta unidad de aceleración se utiliza la notación $1 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$. El símbolo $\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ expresa las dimensiones de la aceleración:

$$[w] = \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

Determinemos ahora las dimensiones de la fuerza y establezcamos la unidad de fuerza. Para ello utilizaremos la definición de fuerza como producto de la masa por la aceleración. Utilizando para las dimensiones de cualquier magnitud física F la notación $[F]$, obtenemos la siguiente expresión de las dimensiones de la fuerza:

$$[F] = [m] [w] = \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2}.$$

Como unidad de fuerza podemos tomar $1 \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2}$. Esta fuerza se denomina *dina*, y es la fuerza que le comunica a la masa de 1 g la aceleración de $1 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$.

Así, utilizando las relaciones entre distintas magnitudes, se pueden elegir las unidades de todas las magnitudes físicas, partiendo de determinado número de magnitudes tomadas como base y para las cuales se eligen arbitrariamente las unidades. El sistema de unidades físicas cuyas unidades fundamentales son el centímetro, para la longitud, el gramo, para la masa, y el segundo, para el tiempo, se denomina *sistema CGS* (o cgs).

Sin embargo no debe creerse que el haber precisamente tres unidades fundamentales arbitrarias en este sistema, significa que tenga un profundo sentido físico. Esto es debido solamente a la comodidad práctica del sistema erigido sobre estas unidades. En principio se puede constituir un sistema de unidades con otra cantidad de unidades elegidas arbitrariamente (esta cuestión se tratará otra vez en el § 22).

Con las dimensiones se puede operar de la misma manera que si fueran simples magnitudes algebraicas, es decir, se pueden hacer las mismas operaciones que

con los números. Las dimensiones de ambos miembros de cualquier igualdad que contenga diferentes magnitudes físicas, deben ser, evidentemente, iguales. Esto hay que tenerlo en cuenta al verificar las fórmulas.

Por consideraciones físicas, frecuentemente se suele saber que una magnitud física cualquiera puede depender sólo de otras magnitudes determinadas. En muchos de estos casos se logra determinar el carácter de las relaciones buscadas basándose solamente en las razones físicas de las dimensiones. Más abajo veremos ejemplos de esta índole.

Además del sistema CGS de unidades, frecuentemente se utilizan otros sistemas en los cuales, para la masa y longitud, se toman unas unidades fundamentales mayores que el g y que el cm. El sistema internacional de unidades SI (o MKS) se basa en las siguientes unidades: el metro para la longitud, el kilogramo para la masa y el segundo para el tiempo. La unidad de fuerza de este sistema se denomina *newton* (N o nt):

$$1\text{N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 10^5 \text{ dinas}.$$

En los cálculos técnicos generalmente se mide en otras unidades, en kilogramos fuerza (kgf). Esta es la fuerza con que la Tierra atrae a la masa de 1 kg al nivel del mar y a la latitud de 45°. Esta fuerza es

$$1 \text{ kgf} = 9,8 \cdot 10^5 \text{ dinas} = 9,8 \text{ N}$$

(más exactamente = 980 665 *dinas*).

§ 9. Movimiento en un campo uniforme

Si sobre una partícula, en cada punto del espacio, actúa una fuerza determinada, el conjunto de todas estas fuerzas se denomina *campo de fuerzas*.

En el caso general, las fuerzas del campo pueden variar de un punto a otro del mismo y depender también del tiempo.

Veamos el caso más simple de movimiento de un punto material en un campo uniforme, es decir, cuando las fuerzas del campo tienen en todas partes la misma magnitud, invariables dirección y sentido y no dependen del tiempo. Un campo de éstos es, por ejemplo, el de la atracción de la Tierra en la región que la rodea y de pequeñas dimensiones en comparación con su radio.

De la ecuación del movimiento del punto material tenemos

$$m = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

que, siendo $\mathbf{F} = \text{const}$, nos da que

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m} \mathbf{F}t + \mathbf{v}_0,$$

donde \mathbf{v}_0 es la velocidad inicial del punto material. Así tenemos que en el campo uniforme, la velocidad es una función lineal del tiempo.

La expresión obtenida para \mathbf{v} nos dice que el movimiento del punto material se efectúa en un plano formado por el vector de fuerza \mathbf{F} y el vector de la velocidad inicial \mathbf{v}_0 . Tomemos este plano como el plano de coordenadas x, y , y dirijamos el eje y según la fuerza \mathbf{F} . La ecuación que determina la velocidad \mathbf{v} de la partícula, se descompone en dos ecuaciones, respectivamente, para las proyecciones v_x y v_y de la velocidad:

$$v_y = \frac{F}{m} t + v_{y0}, \quad v_x = v_{x0},$$

donde v_{x0} y v_{y0} son los valores iniciales de las proyecciones de la velocidad.

Recordando que las proyecciones de la velocidad son iguales a las derivadas con respecto al tiempo de las correspondientes coordenadas de la partícula, escribiremos la últimas ecuaciones de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{F}{m} t + v_{y0}, \quad \frac{dx}{dt} = v_{x0}.$$

De donde

$$y = \frac{F}{2m} t^2 + v_{y0}t + y_0,$$

$$x = v_{x0}t + x_0,$$

donde x_0 e y_0 son los valores iniciales de las coordenadas del punto material. Con estas expresiones se determina la trayectoria del movimiento de la partícula. Estas ecuaciones se simplifican, si se establece empezar a contar el tiempo desde el momento en que la proyección de la velocidad v_y es igual a cero; entonces $v_{y0} = 0$. Eligiendo también el origen de coordenadas en el punto donde se halla la partícula en ese momento, tendremos que $x_0 = y_0 = 0$. Por fin, designando por v_0 a la magnitud v_{x0} , que coincide en este momento

con el valor inicial de la velocidad, tenemos que

$$y = \frac{F}{2m} t^2, \quad x = v_0 t.$$

Y eliminando a t ,

$$y = \frac{F}{2mv_0^2} x^2,$$

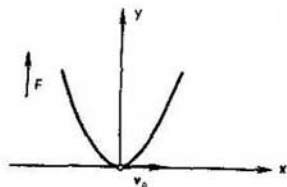


Fig. 6.

es decir, la ecuación de una parábola (fig. 6). Así tenemos que en un campo uniforme, la partícula se desplaza describiendo una parábola.

§ 10. Trabajo y energía potencial

Examinemos el movimiento de un punto material en cierto campo de fuerzas F . Si solicitado por la fuerza F , el punto material recorre un trayecto ds infinitamente pequeño, la magnitud

$$dA = F ds \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo entre los vectores F y ds , se denomina *trabajo* de la fuerza F en el trayecto ds . El producto de las magnitudes absolutas de dos vectores a y b por el coseno del ángulo entre ellos se denomina *producto escalar* de estos vectores y se designa con el símbolo ab . Por eso, el trabajo se puede definir como el producto escalar del vector de fuerza por el vector de desplazamiento de la partícula:

$$dA = F ds.$$

Esta expresión se puede escribir así:

$$dA = F_s ds,$$

donde F_s es la proyección de la fuerza F sobre la dirección de desplazamiento ds de la partícula. Para determinar el trabajo de las fuerzas de un campo en un recorrido finito de la partícula, hay que dividir este recorrido en espacios infinitamente pequeños

ds y, determinado el trabajo en cada espacio elemental, sumar estos trabajos. Esta suma nos dará el trabajo de las fuerzas del campo en todo el trayecto. De la definición de trabajo se deduce, que la fuerza dirigida perpendicularmente al camino recorrido, no produce trabajo. En particular, en el movimiento uniforme de un punto material según una circunferencia, el trabajo de las fuerzas es igual a cero.

El campo estacionario de fuerzas, es decir, el que no depende del tiempo, posee una propiedad excepcional, a saber: si en este campo el punto material se desplaza según una trayectoria cerrada, de modo que en su movimiento el punto regrese a su posición inicial, el trabajo realizado en este caso por las fuerzas del campo será igual a cero.

De esta propiedad se deduce otra aseveración: el trabajo de las fuerzas del campo, al trasladar a la partícula de una posición a otra, no depende del camino recorrido, sino solamente viene determinado por las posiciones de los puntos inicial y final de la traslación. Efectivamente, sean dos puntos 1 y 2. Unámoslos mediante las curvas a y b (fig. 7). Supongamos que la partícula se traslada del punto 1 al 2 según la curva a y después retorna al punto 1 por la curva b . El trabajo total que en este caso efectúan las fuerzas del campo, es igual a cero. Designando por A el trabajo, podemos escribir:

$$A_{1a2} + A_{2b1} = 0.$$

Al variar la dirección del traslado, el trabajo, evidentemente, cambiará de signo, por eso, de la ecuación se deduce que

$$A_{1a2} = -A_{2b1} = A_{1b2},$$

es decir, el trabajo no depende de la curva-trayecto que une los puntos inicial 1 y final 2 del recorrido. Como el trabajo de las fuerzas de un campo no depende del camino recorrido, sino que viene determinado por los puntos extremos del trayecto, está claro que será una magnitud de profundo contenido físico. Con su ayuda se puede determinar una importante característica del campo de fuerzas. Para ello tomemos un punto cualquiera del espacio como origen, designémoslo con la letra O y veamos el trabajo realizado por las fuerzas del campo al trasladarse la partícula desde este punto a un punto cualquiera P . Designemos este trabajo por $-U$. La magnitud U , es decir, el trabajo de traslación de la partícula desde el punto O hasta

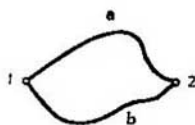


Fig. 7.

el P , tomado con signo contrario, se denomina *energía potencial* de la partícula en el punto P . Esta energía es función de las coordenadas x, y, z del punto P :

$$U = U(x, y, z).$$

El trabajo de las fuerzas del campo A_{12} al trasladarse la partícula desde un punto cualquiera 1 hasta el punto 2 es

$$A_{12} = U_1 - U_2,$$

donde U_1 y U_2 son los valores de la energía potencial en estos puntos. El trabajo es igual a la diferencia de las energías potenciales de los puntos inicial y final del trayecto.

Sean dos puntos P y P' infinitamente próximos. El trabajo de las fuerzas del campo al trasladar la partícula desde el punto P al P' será $-dU$. Por otro lado, este trabajo es igual a $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $d\mathbf{s}$ es el vector trazado desde P hasta P' , que, como ya se ha indicado en el § 2, coincide con la diferencia $d\mathbf{r}$ de los radios vectores de los puntos P' y P . Así llegamos a la igualdad

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU.$$

Esta relación entre la fuerza y la energía potencial es una de las fundamentales de la Mecánica.

Haciendo $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_s ds$, se puede representar esta relación de la manera siguiente:

$$F_s = -\frac{dU}{ds}.$$

Esto significa que la proyección de una fuerza en determinada dirección se obtiene dividiendo una variación infinitamente pequeña dU de la energía potencial en un segmento infinitamente pequeño a lo largo de esta dirección, por la longitud ds de este segmento.

La expresión $\frac{dU}{ds}$ se denomina derivada de U con respecto a la dirección s .

Para aclarar estas relaciones determinemos la energía potencial en un campo uniforme. Tomemos la dirección de la fuerza \mathbf{F} del campo por eje z . Entonces $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F dz$, e igualando esta expresión con la variación de la energía potencial obtenemos que $-dU = F dz$, de donde

$$U = -Fz + \text{const.}$$

Vemos que la energía potencial se determina con la

exactitud de la constante arbitraria. Esta circunstancia tiene carácter general y es debida a la elección arbitraria del punto inicial del campo O , origen desde el cual se empieza a contar el trabajo que se realiza con la partícula. Generalmente, la constante arbitraria de la expresión de U se ha establecido eligiéndola de manera que la energía potencial de la partícula se reduzca a cero cuando la partícula se halla a una distancia infinita de los demás cuerpos.

De las fórmulas que relacionan las proyecciones de la fuerza con la energía potencial, se puede deducir el sentido de la fuerza. Si en cierto sentido la energía potencial aumenta ($\frac{dU}{ds} > 0$), la proyección de la fuerza en esta dirección y sentido será negativa, o sea, la fuerza estará dirigida en el sentido en que la energía potencial disminuye. La fuerza siempre va dirigida hacia donde disminuye la energía potencial.

Como la derivada es igual a cero en los puntos donde la función alcanza el máximo o el mínimo, la fuerza será igual a cero en los lugares de máximo y mínimo de la energía potencial.

§ 11. Ley de la conservación de la energía

El hecho de que el trabajo realizado por las fuerzas de un campo estacionario, al trasladar una partícula de un punto a otro, no dependa del camino recorrido, conduce a una relación muy importante, a la ley (principio) de la conservación de la energía.

Para obtener la expresión de esta ley recordemos que la fuerza \mathbf{F} que actúa sobre la partícula es

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Como la proyección de la aceleración sobre la dirección del movimiento es igual a $\frac{dv}{dt}$, la proyección de la fuerza en esta dirección será

$$F_s = m \frac{dv}{dt}.$$

Determinemos ahora el trabajo de esta fuerza en un trayecto infinitamente pequeño $ds = v dt$:

$$dA = F_s ds = mv dv,$$

o

$$dA = d \left(\frac{mv^2}{2} \right).$$

De esta manera, el trabajo realizado por la fuerza es igual al incremento de la magnitud $\frac{mv^2}{2}$. Esta magnitud se denomina *energía cinética* de la partícula. Por otro lado, el trabajo es igual a la disminución de la energía potencial, $dA = -dU$. Por eso podemos escribir la siguiente igualdad:

$$-dU = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right),$$

es decir,

$$d\left(U + \frac{1}{2}mv^2\right) = 0.$$

Designando con la letra E la suma de esta expresión e integrando, tenemos

$$E = \frac{mv^2}{2} + U = \text{const.}$$

Por consiguiente, la suma de las energías de la partícula (cinética, que depende sólo de la velocidad, y potencial, que sólo depende de las coordenadas), no varía con el desplazamiento de la partícula. Esta suma se denomina *energía total* o simplemente *energía de la partícula*, y la expresión obtenida se denomina *ley de la conservación de la energía*.

El campo de fuerzas por donde se desplaza la partícula, lo crean otros cuerpos. Para que el campo sea estacionario, estos cuerpos deben permanecer inmóviles. Así obtenemos la ley de la conservación de la energía en el caso más sencillo, cuando la partícula se mueve y los demás cuerpos con que ella interactúa, permanecen inmóviles. Pero la ley de la conservación de la energía se puede formular para el caso general, cuando hay varias partículas en movimiento. Si estas partículas forman un sistema cerrado, para ellas también será válida la ley de conservación de la energía, según la cual, la suma de las energías cinéticas de todos los puntos materiales aislados y la energía potencial de interacción no varía con el tiempo, es decir,

$$E = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} + \dots + U(r_1, r_2, \dots),$$

donde m_i es la masa de la partícula i ; v_i , su velocidad, y U , la energía potencial de interacción de las partículas, que depende de sus radios vectores r_i .

La función U está relacionada con las fuerzas que actúan sobre cada partícula, de la misma manera que

ocurre con una partícula en un campo exterior. Precisamente, para determinar la fuerza F_i que actúa sobre la partícula i , hay que examinar la variación de la energía potencial U en un desplazamiento dr_i infinitamente pequeño de esta partícula, permaneciendo inmóviles las demás partículas. El trabajo $F_i dr_i$ realizado en este desplazamiento de la partícula es igual a la correspondiente disminución de la energía potencial.

La ley de la conservación de la energía es válida para cualquier sistema cerrado y, junto con la ley de la conservación de la impulsión, es una de las leyes fundamentales de la Mecánica. Debido a su carácter general, se puede aplicar a todos los fenómenos.

La energía cinética es una magnitud positiva, mientras que la potencial de interacción de las partículas puede ser positiva o negativa. Si la energía potencial de dos partículas se define de manera que sea igual a cero cuando las partículas se hallan a una gran distancia entre sí, el signo de esta energía dependerá del carácter de la interacción de las partículas: de atracción o de repulsión. Como las fuerzas que actúan sobre la partícula siempre van dirigidas hacia el lado de disminución de la energía potencial, el acercamiento de las partículas que se atraen, acarreará una disminución de la energía potencial, la cual, por consiguiente, será una magnitud negativa. Y, por el contrario, la energía potencial de las partículas que se repelen, será positiva.

La energía (y el trabajo) tiene las dimensiones

$$[E] = [m] [v]^2 = \frac{\text{g} \cdot \text{cm}^2}{\text{s}^2}.$$

Por eso, la unidad de energía en el sistema CGS es $1 \frac{\text{g} \cdot \text{cm}^2}{\text{s}^2}$. Esta unidad se denomina *ergio*. El ergio representa el trabajo realizado por la fuerza de 1 dina en el trayecto de 1 cm.

En el sistema SI se utiliza una unidad mayor de energía, denominada *julio* (J). El julio es el trabajo de 1 N en el trayecto de 1 m:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 10^7 \text{ ergios}.$$

Si como unidad de fuerza se utiliza el kilogramo, la correspondiente unidad de energía será el kilográmetro ($\text{kgf} \cdot \text{m}$): trabajo realizado por 1 kgf en el trayecto de 1 m, y se relaciona con el julio mediante la igualdad $1 \text{ kgf} \cdot \text{m} = 9,8 \text{ J}$.

Las fuentes de energía se caracterizan por el trabajo realizado por unidad de tiempo. Este trabajo por unidad de tiempo se denomina *potencia*. Como unidad de potencia se utiliza el *vatio* (W):

$$1W = 1 \frac{J}{s}.$$

El trabajo realizado en una hora por un manantial de energía de 1 W de potencia se denomina *vatio-hora* ($W \cdot h$). Es fácil ver que

$$1W \cdot h = 3,6 \cdot 10^3 J.$$

§ 12. Energía interna

Como se ha explicado en el § 5, para el movimiento de un sistema complejo se puede introducir el concepto de velocidad de desplazamiento del sistema considerado como un todo, comprendiendo por esta velocidad la de desplazamiento del centro de masas del sistema. Esto significa que el movimiento del sistema se puede considerar como compuesto de dos movimientos: el movimiento del sistema considerado como un todo, y el movimiento «interno» de las partículas componentes del sistema con respecto al centro de masas. En correspondencia con ello, la energía E del sistema se puede representar como la suma de la energía cinética del sistema como un todo, que es igual a $\frac{MV^2}{2}$ (siendo M la masa del sistema y V , la velocidad del centro de masas), y de la *energía interna* E_{int} , que comprende la energía cinética del movimiento interno de las partículas y la energía potencial de su interacción:

$$E = \frac{MV^2}{2} + E_{int}.$$

Aunque esta fórmula es evidente por sí misma, exponaremos su deducción directa.

La velocidad de una partícula (i) cualquiera con respecto al sistema inmóvil de referencia se puede escribir como la suma $\mathbf{v}_i + \mathbf{V}$, donde \mathbf{V} es la velocidad del centro de masas del sistema, y \mathbf{v}_i , la velocidad de la partícula respecto al centro de masas. La energía cinética de la partícula es

$$\frac{m_i}{2} (\mathbf{v}_i + \mathbf{V})^2 = \frac{m_i V^2}{2} + \frac{m_i v_i^2}{2} + m_i (\mathbf{V} \mathbf{v}_i).$$

Sumando según todas las partículas, los primeros

términos de la derecha de estas expresiones nos dan $\frac{MV^2}{2}$, donde $M = m_1 + m_2 + \dots$. La suma de los segundos términos nos da la energía cinética total del movimiento interno del sistema. En lo que se refiere a los terceros términos, la suma es igual a cero. Efectivamente, tenemos que

$$m_1 (\mathbf{V}\mathbf{v}_1) + m_2 (\mathbf{V}\mathbf{v}_2) + \dots = \mathbf{V} (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots);$$

pero la expresión encerrada en el paréntesis es la impulsión total del movimiento de las partículas con respecto al centro de masas del sistema, que, por definición, es igual a cero. Por último, sumando la energía cinética y la potencial de interacción de las partículas, hallamos la fórmula buscada.

Utilizando la ley de la conservación de la energía se pueden determinar las condiciones de estabilidad del cuerpo compuesto, es decir, las condiciones en que, una vez cumplidas, el cuerpo compuesto puede descomponerse espontáneamente en sus partes. Veamos, por ejemplo, la descomposición de un cuerpo compuesto en dos partes. Designemos las masas de estas partes por m_1 y m_2 . Sean \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 las velocidades de estas dos partes con respecto al centro de masas del cuerpo compuesto primitivo. Entonces, la ley de la conservación de la energía en este sistema de referencia será

$$E_{int} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + E_{1int} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + E_{2int},$$

donde E_{int} es la energía interna del cuerpo primitivo, y E_{1int} y E_{2int} , las energías internas de ambas partes del cuerpo. Como la energía cinética siempre es positiva, de la igualdad anterior se deduce que

$$E_{int} > E_{1int} + E_{2int}.$$

Esta es la condición de la descomposición del cuerpo en dos partes. Si, por el contrario, la energía interna del cuerpo es menor que la suma de las energías internas de las partes componentes, el cuerpo será estable.

§ 13.

Límites del movimiento

Si el movimiento de un punto material está limitado de manera que pueda desplazarse solamente según una curva determinada, se dice que el movimiento posee un grado de libertad, o que el movimiento es unidimensional. Para establecer la posición de una

partícula, en este caso, es suficiente una sola coordenada, y como tal se puede elegir, por ejemplo, la distancia según la curva, a partir de determinado punto elegido como origen de espacios. Sea x esta coordenada. La energía potencial de la partícula de movimiento unidimensional será función de una sola coordenada: $U=U(x)$.

Según la ley de conservación de la energía tenemos que

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(x) = \text{const},$$

pero como la energía cinética no puede adquirir valores negativos, se deberá cumplir la desigualdad

$$U \leq E.$$

Esta desigualdad indica que la partícula, en su movimiento, puede hallarse solamente en los sitios donde la energía potencial no es superior a la total. Si se igualan estas energías, se obtiene la ecuación

$$U(x) = E$$

para determinar las posiciones límites del punto material.

Veamos unos cuantos ejemplos característicos. Empecemos con la energía potencial cuya función con respecto a la coordenada x , viene representada en la

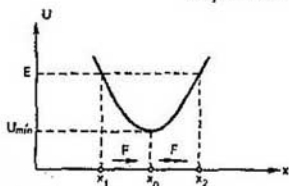


Fig. 8.

fig. 8. Para hallar los límites del movimiento de la partícula en este campo de fuerzas, en función de la energía total E de la partícula, tracemos paralelamente al eje x la recta $U=E$. Esta recta cortará a la curva de la energía potencial $U=U(x)$ en dos puntos, cuyas abscisas serán x_1 y x_2 . Para que pueda realizarse el movimiento es necesario que la energía potencial no sea mayor que la total. Esto significa que el movimiento de la partícula de energía E solamente se puede efectuar entre los puntos x_1 y x_2 , mientras que en la región de la derecha de x_2 y de la izquierda de x_1 la partícula de energía E no puede hallarse.

El movimiento con que la partícula permanece en la región finita del espacio, se denomina *finito*; si la partícula puede alejarse cuanto se quiera, se dice que el movimiento es *infinito*.

La región de los movimientos finitos dependerá evidentemente de la energía. En el ejemplo considerado, ésta disminuirá con la disminución de la energía tendiendo hacia un punto, el x_0 , cuando $E = U_{\text{mín.}}$.

En los puntos x_1 y x_2 , la energía potencial es igual a la total; por eso, en estos puntos, la energía cinética y, con ella, la velocidad de la partícula son iguales a cero. En el punto x_0 , la energía potencial es mínima, mientras que la cinética y la velocidad poseen el valor máximo. Como la fuerza F se relaciona con la energía potencial mediante la igualdad $F = -\frac{dU}{dx}$,

entre los puntos x_0 y x_2 será negativa, y entre los puntos x_0 y x_1 , positiva. Esto quiere decir que entre los puntos x_0 y x_2 la fuerza estará dirigida hacia el lado en que x disminuye, es decir, hacia la izquierda, mientras que entre los puntos x_0 y x_1 , estará dirigida hacia la derecha.

Por eso, si la partícula empieza a moverse desde el punto x_1 , donde la velocidad es igual a cero, bajo la acción de la fuerza dirigida hacia la derecha, se acelerará gradualmente y alcanzará la velocidad máxima en el punto x_0 . Desplazándose después por la región desde x_0 hasta x_2 , bajo la acción de la fuerza, dirigida ahora hacia la izquierda, la partícula frenará su movimiento hasta alcanzar la velocidad cero en el punto x_2 , después de lo cual empezará el movimiento en sentido contrario, desde el punto x_2 hacia el x_0 . Esto se repetirá continuamente. En otras palabras, la partícula realizará un movimiento periódico de período igual al doble tiempo invertido por la partícula en desplazarse desde el punto x_1 hasta el x_2 .

En el punto x_0 , la energía potencial alcanzará el valor mínimo y la derivada de U con respecto a x será igual a cero; por eso, en este punto la fuerza será igual a cero y, por consiguiente, el punto x_0 es el de estado de equilibrio de la partícula. Esta posición, evidentemente, es la de *equilibrio estable*, ya que al desviar la partícula de la posición de equilibrio, en el ejemplo considerado, surge una fuerza que tiende a volver la partícula a la posición de equilibrio. Esta propiedad la poseen solamente los puntos de mínima energía potencial, y no los de máxima, aunque en

estos últimos la fuerza también es igual a cero. Si desviamos la partícula hacia uno u otro lado a partir del punto de máxima energía potencial, la fuerza que surge en ambos casos, alejará a la partícula de este punto. Por eso, el sitio donde la energía potencial alcanza el máximo, será la posición de *equilibrio inestable*.

Veamos ahora el movimiento de una partícula en un campo más complejo, cuya curva de energía potencial viene representada en la fig. 9. Esta curva tiene mínimo y máximo. Si la partícula posee la energía E , el movimiento de la misma en este campo será posible en dos regiones: en la *I*, entre los puntos x_1 y x_2 , y

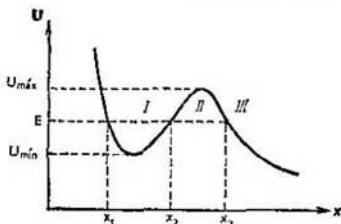


Fig. 9.

en la *III*, a la derecha del punto x_3 , (en estos puntos la energía potencial coincide con la total). El movimiento en la primera región se efectuará de la misma manera que en el ejemplo arriba indicado, y será de carácter oscilatorio. Sin embargo, el movimiento en la región *III* será infinito, ya que la partícula se puede alejar lo que se quiera hacia la derecha del punto x_3 . Si, en este caso, la partícula empieza su movimiento desde el punto x_3 , donde la velocidad es igual a cero, solicitada por la fuerza, que aquí va dirigida hacia la derecha, se acelerará uniformemente. En el infinito, la energía potencial será igual a cero y la velocidad de la partícula adquirirá el valor de $v_{\infty} = \sqrt{2mE}$. Si, por el contrario, la partícula se desplaza desde el infinito hacia el punto x_3 , su velocidad disminuirá uniformemente y en el punto x_3 se reducirá a cero. En este punto, la partícula deberá volver atrás y alejarse otra vez hacia el infinito. La partícula no puede penetrar en la región *I* por impedirlo la región *II* situada entre los puntos x_2 y x_3 . Esta región tampoco da posibilidad a la partícula que oscila entre los puntos x_1 y x_2 , de penetrar en la región *III*, donde también puede haber movimiento con la energía E . Esta región prohibida se denomina *barrera*

de potencial, y la región I, pozo de potencial. Con el aumento de la energía de la partícula en el caso considerado, la anchura de la barrera disminuye y, por último, cuando $E \geq U_{\text{máx}}$, la barrera desaparece. En este caso desaparece también la región del movimiento oscilatorio y el movimiento de la partícula se hace infinito.

Así vemos que el movimiento de una partícula en un mismo campo de fuerzas puede ser tanto finito como infinito, en función de la energía de la partícula.

Esta circunstancia puede ilustrarse también en el ejemplo del movimiento en un campo cuya curva de

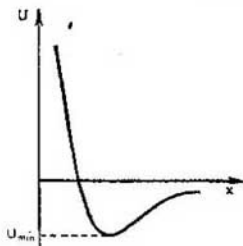


Fig. 10.

energía potencial viene representada en la fig. 10. En este caso, a las energías positivas les corresponde un movimiento infinito, y a las negativas ($U_{\text{min}} < E < 0$), un movimiento finito.

En general, si la energía potencial se reduce a cero en el infinito, el movimiento con energía negativa será siempre finito, ya que en el infinito, la energía potencial cero supera a la energía total; por eso la partícula no puede alejarse al infinito.

§ 14. Choques de cuerpos elásticos

Las leyes de conservación de la energía y de la impulsión pueden utilizarse para establecer las relaciones entre distintas magnitudes en las colisiones de los cuerpos.

En Física, por *choques* se entienden los procesos de interacción entre los cuerpos en el sentido lato de la palabra, y no en el literal de contacto de los cuerpos. Los cuerpos que chocan entre sí a una distancia infinita son libres. Al pasar los cuerpos uno cerca del otro interactúan entre sí y, como resultado de ello,

pueden originarse los procesos más diferentes: los cuerpos pueden unirse, pueden surgir nuevos cuerpos y, por último, puede ocurrir un *choque elástico* en el cual los cuerpos, después de cierto acercamiento, se alejan de nuevo sin variar el estado interno de los mismos. El choque acompañado de variación del estado interno de los cuerpos, se denomina *inelástico*. En las condiciones habituales, los choques de los cuerpos corrientes casi siempre son inelásticos en mayor o menor grado, aunque sólo sea porque van acompañados de cierto calentamiento, es decir, de transformación de parte de su energía cinética en calor. No obstante, en Física, el concepto de choque elástico desempeña un papel muy importante, ya que con esta clase de colisiones se tropieza frecuentemente en los experimentos físicos en el campo de los fenómenos atómicos. Incluso las colisiones habituales frecuentemente se pueden considerar elásticas con un grado bastante elevado de exactitud.

Veamos el choque elástico de dos partículas de masas m_1 y m_2 . Designemos las velocidades de las partículas de antes y después del choque, respectivamente, por \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 y \mathbf{v}'_1 , \mathbf{v}'_2 . Consideremos que una de las partículas, sea m_2 , antes del choque estaba en reposo, es decir, $\mathbf{v}_2 = 0$.

Como en el choque elástico las energías internas de las partículas no varían, podemos prescindir de ellas al aplicar la ley de conservación de la energía, es decir, considerarlas iguales a cero. Como antes y después del choque se supone que las partículas no interactúan, o sea, que son libres, la ley de conservación de la energía se reducirá a la conservación de la energía cinética:

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

(el factor común $1/2$ lo hemos omitido).

Sin embargo, la ley de conservación de la impulsión se expresa mediante la igualdad vectorial

$$m_1 \mathbf{v}_1 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2.$$

Es muy sencillo el caso en que la masa de la partícula, que al principio se halla en reposo, es considerablemente superior a la de la partícula que la embiste, es decir, cuando $m_2 \gg m_1$. De la fórmula

$$\mathbf{v}'_2 = \frac{m_1}{m_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1)$$

se desprende que cuando $m_2 \gg m_1$, la velocidad \mathbf{v}'_2

será muy pequeña. Análoga deducción se puede sacar también de la energía de esta partícula que al principio estaba en reposo, ya que el producto $m_2 v_2'^2$ será inversamente proporcional a la masa m_2 . De esto se puede deducir que la energía de la primera partícula (de la que embiste) no varía de resultados del choque, es decir, no varía el valor absoluto de la velocidad de esta partícula. De esta manera, al chocar una partícula ligera con una pesada, puede variar solamente la dirección de la velocidad de la partícula ligera, mientras que la magnitud de la velocidad permanece invariable.

Si las masas de las partículas que chocan son iguales las leyes de conservación adquieren la forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2', \\ v_1^2 &= v_1'^2 + v_2'^2. \end{aligned}$$

La primera igualdad indica que los vectores \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_1' y \boldsymbol{v}_2' forman un triángulo, y de la segunda se desprende que este triángulo es rectángulo y la hipotenusa es \boldsymbol{v}_1 . Así, al chocar partículas de masas iguales, se separarán en ángulo recto (fig. 11).

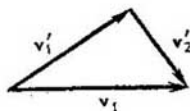


Fig. 11.

Veamos ahora el choque «central» de dos partículas. Como resultado del mismo, ambas partículas se desplazarán a lo largo de una misma recta, que coincidirá con la dirección de la partícula que embiste. En este caso, en la ley de conservación de la impulsión podemos sustituir los vectores de las velocidades por sus magnitudes, es decir, escribirla así:

$$m_2 v_2' = m_1 (v_1 - v_1').$$

Añadiéndole la ley de conservación de la energía, según la cual

$$m_2 v_2'^2 = m_1 (v_1^2 - v_1'^2),$$

se puede expresar v_1' y v_2' en función de v_1 . Dividiendo la segunda igualdad por la primera obtenemos $v_2' = v_1 + v_1'$, y, por consiguiente,

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

La partícula que embiste (la primera) continuará desplazándose en el mismo sentido o en sentido contrario, según que su masa m_1 sea mayor o menor que la de la partícula en reposo inicial m_2 . Si las masas m_1 y m_2 son iguales, $v_1' = 0$, y $v_2' = v_1$, es decir, como

si ambas partículas intercambiasen las velocidades. Si $m_2 \gg m_1$, $v_1' = -v_1$ y $v_2' = 0$.

En el caso general, el choque conviene examinarlo en el sistema del centro de masas de las partículas que chocan. En este sistema, la impulsión total de las partículas, tanto antes como después del choque, es igual a cero. Por eso, si designamos las impulsiones de la primera partícula de antes y después del choque por p y p' , las de la segunda partícula de antes y después del choque serán $-p$ y $-p'$.

Igualando las sumas de las energías cinéticas de las partículas de antes y después del choque, hallamos que debe realizarse la igualdad $p^2 = p'^2$, es decir, la magnitud de las impulsiones de las partículas permanece invariable. De esta manera, lo único que se produce en el choque es un giro de las impulsiones

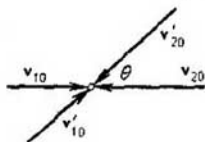


Fig. 12.

de las partículas, variación de sus sentidos sin variar las magnitudes. Junto con las impulsiones varían de la misma manera las velocidades de las partículas: giran sin variar de magnitud y permanecen en sentido opuesto, como se indica en la fig. 12 (el subíndice «cero» de las velocidades es para indicar que se refieren al sistema del centro de masas).

En lo que se refiere al ángulo de giro de la velocidad, éste no se determina solamente mediante las leyes de conservación de la impulsión y de la energía, sino que depende también del carácter concreto de la interacción de las partículas y de la disposición mutua al chocar.

Para aclarar el carácter de la variación de las velocidades en el sistema inicial de referencia σ , como se dice, sistema de *laboratorio* o sistema en reposo (en el cual una de las partículas antes del choque estaba en reposo), se aplica el siguiente procedimiento gráfico. Tracemos el vector $O\vec{1}$, igual a la velocidad v_{10} de la primera partícula en el sistema del centro de masas (fig. 13). Esta velocidad se relaciona con la v_1 de la misma partícula en el sistema de referencia de laboratorio (que es al mismo tiempo la velocidad relativa de ambas partículas) mediante la igualdad

$v_{10} = v_1 - V$, donde

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

es la velocidad del centro de masas. Restando obtenemos la fórmula

$$v_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1.$$

La velocidad de la primera partícula después del choque v'_{10} se obtiene girando la velocidad v_{10} en cierto ángulo θ , es decir, puede representarse por cualquier radio \vec{OI}' de la circunferencia de la fig. 13. Para pasar al sistema de referencia de laboratorio hay que añadir a todas las velocidades la velocidad V del centro de masas. En la fig. 13 viene representada por el vector \vec{AO} . El vector \vec{AI} coincide entonces con la velocidad v_1 de la partícula que embiste antes del choque, y el vector \vec{AI}' nos da la velocidad buscada de la misma partícula después del choque. Una construcción análoga se puede hacer para la velocidad de la segunda partícula.

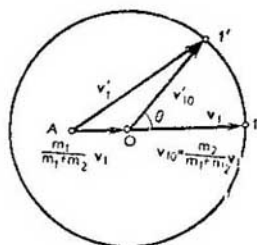


Fig. 13.

En la fig. 13 se supone que $m_1 < m_2$, así que el punto A está en el interior de la circunferencia. En este caso, el vector \vec{AI}' , es decir, la velocidad v'_{10} , puede tener una dirección cualquiera.

Si $m_1 > m_2$, el punto A estará fuera de la circunferencia (fig. 14). En este caso, el ángulo φ entre las velocidades de la partícula antes y después del choque (en el sistema de laboratorio) no puede superar cierto valor máximo, correspondiente al caso en que la recta AI' es tangente a la circunferencia. Además, el lado AI' del triángulo $AI'O$ será perpendicular al

lado OI' , de manera que

$$\text{sen } \varphi_{\text{máx}} = \frac{OI'}{AO} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Observamos también que la velocidad de la partícula después del choque, no puede ser menor que cierto valor mínimo, que se alcanza cuando el punto

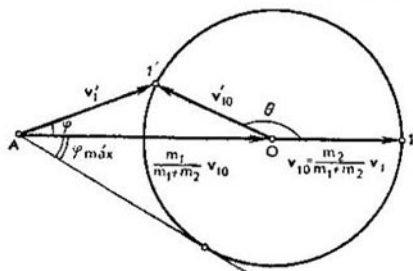


Fig. 14.

I' de la fig. 13 (o de la 14) está diametralmente opuesto al punto I . Este caso corresponde al choque directo de las partículas y el valor mínimo de la velocidad es

$$v'_{1 \text{ mín}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1.$$

§ 15.

Momento de la impulsión

Además de la energía y de la impulsión, para cualquier sistema cerrado se conserva otra magnitud vectorial denominada *momento de la impulsión* (*cantidad de movimiento angular*, *momento angular*, *momento cinético* o *momento dinámico*). Esta magnitud es la suma de los momentos de los distintos puntos materiales, que se determinan de la siguiente manera.

Supongamos que el punto material tiene una impulsión \mathbf{p} y su posición con respecto a un origen de espacios cualquiera O viene determinada por el radio vector \mathbf{r} . Entonces, el momento \mathbf{L} de este punto material será un vector de magnitud

$$L = r p \text{ sen } \theta$$

(donde θ es el ángulo entre \mathbf{p} y \mathbf{r}) y de dirección perpendicular al plano que pasa por las direcciones de \mathbf{p} y \mathbf{r} . Esta última condición no determina por

completo el sentido de L , ya que puede ser «hacia arriba» o «hacia abajo». Se ha establecido determinar el sentido de la siguiente manera: si nos representamos un tornillo que gire en el sentido de r hacia p , este tornillo se desplazará según el sentido de L (fig. 15). La magnitud L se puede representar de otra manera más clara, si se observa que el producto $r \text{ sen } \theta$ es la longitud h_p de la perpendicular trazada desde el punto O sobre la dirección de la impulsión de la partícula

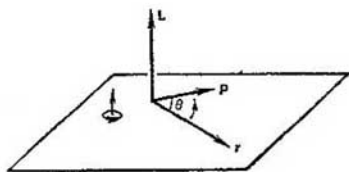


Fig. 15.

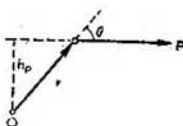


Fig. 16.

(fig. 16). Frecuentemente esta distancia se denomina *brazo* de la impulsión respecto del punto O . El momento de la partícula es igual al producto del brazo por la magnitud de la impulsión

$$L = ph_p.$$

La definición dada del vector L coincide exactamente con el conocido concepto del álgebra vectorial de *producto vectorial*: el vector L determinado de los vectores r y p según las reglas indicadas, es el producto vectorial de r y p , y se escribe de la siguiente manera:

$$L = [rp]$$

$$\text{o, como } p = mv,$$

$$L = m[rv].$$

Con esta fórmula se determina el momento de una partícula. El momento del sistema de partículas es la suma

$$L = [r_1 p_1] + [r_2 p_2] + \dots$$

de los momentos de las distintas partículas. Para cualquier sistema cerrado, esta suma permanece constante con el tiempo. Esto es el *principio de conservación del momento* (de la impulsión).

Observemos que en la definición de momento de la impulsión figura el origen de espacios O elegido arbi-

trariamente y desde el cual se cuentan los radios vectores de las partículas. Aunque la magnitud y dirección del vector L dependan de la elección de este punto, es fácil ver que esta indeterminación no tiene importancia en la definición del principio de conservación del momento. Efectivamente, si desplazamos el punto O a una distancia a dada (en magnitud y dirección), en esta misma magnitud variarán los radios vectores de las partículas; por lo tanto, al momento de la impulsión se le aumentará la magnitud

$$[a\mathbf{p}_1] + [a\mathbf{p}_2] + \dots = [a(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots)] = [a\mathbf{p}],$$

donde \mathbf{P} es la impulsión total del sistema. Pero, en el sistema cerrado, \mathbf{P} es una magnitud constante. Por consiguiente vemos que la variación del origen de coordenadas no se refleja en la magnitud del momento total de la impulsión del sistema cerrado. Como regla se ha establecido determinar el momento de la impulsión del sistema de partículas eligiendo como origen de espacios de los radios vectores el centro de masas del sistema. Así lo consideraremos en adelante. Determinemos la derivada con respecto al tiempo del momento de la impulsión de la partícula. Según la regla de diferenciación de un producto tenemos que

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}\mathbf{p}] = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{p} \right] + \left[\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right].$$

Como $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ es la velocidad \mathbf{v} de la partícula, y $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, el primer término será $m[\mathbf{v}\mathbf{v}]$ y es igual a cero, ya que el producto vectorial de cualquier vector por sí mismo es igual a cero. En el segundo término, la derivada $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ es, como sabemos, la fuerza \mathbf{F} que actúa sobre la partícula; por lo tanto

$$\frac{dL}{dt} = [\mathbf{r}\mathbf{F}].$$

El producto vectorial $[\mathbf{r}\mathbf{F}]$ se denomina *momento de una fuerza* (con respecto al punto considerado O). Lo designaremos mediante la letra K :

$$K = [\mathbf{r}\mathbf{F}].$$

Análogamente a lo dicho arriba sobre el momento de la impulsión, se puede decir que la magnitud del momento de una fuerza es igual al producto de la magnitud de la fuerza F por su «brazo» h_F , es decir, por la

longitud de la perpendicular bajada desde el punto O sobre la dirección en que actúa la fuerza,

$$K = Fh_p.$$

Así tenemos que la velocidad de variación del momento de la impulsión del punto material es igual al momento de la fuerza que actúa sobre el punto material:

$$\frac{dL}{dt} = K.$$

El momento total de la impulsión de un sistema cerrado se conserva, lo cual significa que la derivada con respecto al tiempo de la suma de los momentos que entran en el sistema de partículas, es igual a cero:

$$\frac{d}{dt} (L_1 + L_2 + \dots) = \frac{dL_1}{dt} + \frac{dL_2}{dt} + \dots = 0.$$

De donde

$$K_1 + K_2 + \dots = 0.$$

Vemos que en el sistema cerrado, no sólo la suma de las fuerzas que actúan sobre las partículas (V. el § 7), sino incluso la de los momentos de las fuerzas es igual a cero. La primera de estas aseveraciones es equivalente al principio de conservación de la impulsión, y la segunda, al de conservación del momento de la impulsión.

Hay una estrecha relación entre estas propiedades del sistema cerrado y las propiedades fundamentales del propio espacio.

El espacio es *homogéneo*. Por lo tanto, las propiedades del sistema cerrado no dependen de su posición en el espacio. Supongamos que un sistema de partículas sufre un desplazamiento infinitamente pequeño en el espacio y todas las partículas del sistema se desplazan en el mismo a igual distancia y en la misma dirección. Designemos por dR al vector de este desplazamiento. Sobre la partícula i se efectuará un trabajo igual a $F_i dR$. La suma de todos estos trabajos deberá ser igual a la variación de la energía potencial del sistema; pero la independencia de las propiedades del sistema respecto de la posición que ocupe en el espacio significa que esta variación es igual a cero. Por consiguiente deberá verificarse que

$$F_1 dR + F_2 dR + \dots = (F_1 + F_2 + \dots) dR = 0.$$

Como esta igualdad debe cumplirse para cualquier dirección del vector dR , se deduce que la suma de las fuerzas $F_1 + F_2 + \dots$ debe ser igual a cero.

Así vemos que el origen del principio de conservación de la impulsión está relacionado con la propiedad de homogeneidad del espacio.

Análoga relación hay entre el principio de conservación del momento de la impulsión y otra propiedad fundamental del espacio, la de su *isotropía*, es decir, la equivalencia de todas las direcciones en el mismo. Debido a esta isotropía, las propiedades de un sistema cerrado no varían al hacer girar el sistema como un todo, y, por consiguiente, el trabajo realizado en tal giro deberá ser igual a cero. Se puede demostrar que de esta condición se deduce la igualdad a cero de la suma de los momentos de las fuerzas de un sistema cerrado (en el § 28 volveremos a tratar esta cuestión).

§ 16. Movimiento en un campo central

El principio de conservación del momento de la impulsión se cumple para un sistema cerrado, pero no para las distintas partículas que lo componen. No obstante puede ocurrir que se cumpla para una partícula que se desplace por un campo de fuerzas. Para ello es necesario que el campo sea central. Se denomina *campo central* el campo en que la energía potencial de la partícula es una función sólo de la distancia r a determinado punto, centro del campo: $U=U(r)$. En este campo, la fuerza que actúa sobre la partícula también depende sólo de la distancia r y, en cada punto del espacio, está dirigida a lo largo del radio trazado desde el centro del campo hasta este punto.

Aunque la partícula que se desplaza por un campo de estos no representa un sistema cerrado, para ella se cumple el principio de conservación del momento de la impulsión, si se determina el momento con respecto al centro del campo. Efectivamente, como la dirección de la fuerza que actúa sobre la partícula pasa por el centro del campo, el brazo de la fuerza con respecto a este punto será igual a cero; por consiguiente, el momento de la fuerza será igual a cero. De acuerdo con la ecuación $\frac{dL}{dt}=K$, tendremos que $L=\text{const.}$

Como el momento $L=m[rv]$ es perpendicular a la dirección del radio vector r , y como la dirección de L es const., se desprende que al desplazarse la partícula, su radio vector debe permanecer siempre en el mismo plano, en el plano perpendicular a la dirección de L . Por consiguiente, en un campo central, las

partículas se desplazan según órbitas planas, órbitas que se hallan en los planos que pasan por el centro del campo.

Al principio de conservación del momento de la impulsión, siendo el movimiento uno de estos movimientos «planos», se le puede dar una forma más clara. Para ello hacemos

$$L = m [r\mathbf{v}] = m \left[r \frac{d\mathbf{s}}{dt} \right] = m \frac{[r d\mathbf{s}]}{dt},$$

donde $d\mathbf{s}$ es el vector de desplazamiento del punto material en el tiempo dt . Geométricamente, la magnitud del producto vectorial de dos vectores es, como se sabe, el área del paralelogramo que ellos forman. El área del paralelogramo formado por los vectores $d\mathbf{s}$ y \mathbf{r} , es dos veces mayor que la del sector infinitamente

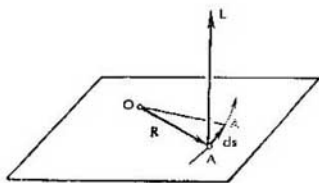


Fig. 17.

estrecho OAA' (fig. 17) barrido por el radio vector del punto móvil en el tiempo dt . Designando esta área por dS , se puede escribir la magnitud del momento de la impulsión así:

$$L = 2m \frac{dS}{dt}.$$

La magnitud $\frac{dS}{dt}$ se denomina *velocidad areolar*.

Así tenemos que el principio de conservación del momento de la impulsión se puede formular como constancia de la velocidad areolar: el radio vector del punto móvil barre iguales áreas en tiempos iguales. Esta aseveración así formulada se denomina *segunda ley de Kepler*, ley de las áreas (de Kepler) o principio de conservación de las áreas.

El problema del movimiento por un campo central es especialmente importante porque comprende el del movimiento relativo de dos puntos materiales que interaccionan entre sí, llamado *problema de los dos cuerpos*.

Veamos este movimiento en el sistema del centro de masas de ambas partículas. En este sistema de referencia, la impulsión total de las partículas es igual a cero:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0,$$

donde \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 son las velocidades de las partículas. Introduzcamos la velocidad relativa de las partículas

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

De estas dos ecuaciones se pueden obtener fácilmente las fórmulas

$$\mathbf{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v},$$

que expresan la velocidad de cada partícula en función de la velocidad relativa de las mismas.

Colocando estos valores en la expresión de la energía total de las partículas

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(r),$$

donde $U(r)$ es la energía potencial mutua de las partículas en función de su distancia relativa r (es decir, de la magnitud absoluta del vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$), después de sencillas simplificaciones obtenemos que

$$E = \frac{m v^2}{2} + U(r), \text{ donde } m \text{ representa la magnitud}$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

denominada *masa reducida* de las partículas.

Vemos que la energía del movimiento relativo de dos partículas es la misma que si una partícula de masa m se desplazara a la velocidad $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ por un campo cen-

tral exterior de energía potencial $U(r)$. En otras palabras, el problema del movimiento de dos partículas se reduce al problema del movimiento de una partícula «reducida» por un campo exterior.

Si este último problema está resuelto (es decir, si se ha hallado la trayectoria $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ de la partícula «reducida»), se pueden hallar directamente las trayectorias reales de las dos partículas m_1 y m_2 según las fórmulas

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r},$$

que relacionan los radios vectores r_1 y r_2 de las partículas con respecto al centro de masas con la distancia mutua entre ellas $r = r_1 - r_2$ (estas fórmulas se deducen de la igualdad $m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$ y corresponden a las fórmulas análogas indicadas más arriba para las velocidades $v_1 = \frac{dr_1}{dt}$ y $v_2 = \frac{dr_2}{dt}$). De lo cual se deduce

que ambas partículas se desplazarán con respecto al centro de masas trazando trayectorias geométricamente semejantes y que se diferenciarán sólo por sus dimensiones, inversamente proporcionales a las masas de las partículas:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

En su movimiento, las partículas siempre se hallarán en los extremos de cierta recta que pasa por el centro de masas.

§ 17. Interacción eléctrica

En el capítulo anterior hemos definido el concepto de fuerza y hemos relacionado a ésta con la energía potencial. Ahora pasamos al examen concreto de algunas de las interacciones que son la base de distintos fenómenos físicos.

Una de las más importantes clases de interacciones de la naturaleza es la *interacción eléctrica*. En particular, las fuerzas que actúan en los átomos y moléculas, fundamentalmente son de origen eléctrico; por eso, esta interacción determina principalmente la estructura interna de los diferentes cuerpos.

Las fuerzas de interacción eléctrica están relacionadas con la existencia de una característica física especial de las partículas: *con la carga eléctrica*. Los cuerpos que no llevan carga eléctrica, no interaccionan eléctricamente entre sí.

Si los cuerpos se pueden considerar puntos materiales, la fuerza de interacción eléctrica de los mismos es proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Este postulado se denomina *ley de Coulomb*. Designando por F la fuerza de interacción eléctrica, por e_1 y e_2 , las cargas de los cuerpos y por r , la distancia entre los mismos, se puede escribir la ley de Coulomb así;

$$F = \text{const} \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

La fuerza F está dirigida según la recta que une las cargas y, como enseña la experiencia, en unos casos puede causar atracción, y en otros, repulsión de los cuerpos cargados. Por eso se habla de cargas de diferentes signos: los cuerpos con cargas del mismo signo se repelen, y los de cargas de distintos signos, se atraen. En este caso, el signo positivo de la fuerza en la ley de Coulomb expresa repulsión, y el negativo, atracción. Qué cargas hay que considerar precisamente positivas y cuáles negativas es indiferente, y la elección de los signos adoptada en la Física es convencional, establecida históricamente. Un sentido

incondicional lo tiene solamente la diferencia de los signos de las cargas. Si nosotros considerásemos positivas todas las cargas negativas y, viceversa, no habría ninguna variación en las leyes físicas.

Como nosotros nos encontramos por primera vez con las cargas y aún no tenemos una unidad para su medición, podemos considerar el coeficiente de proporcionalidad de la ley de Coulomb $F = \frac{e_1 e_2}{r^2}$ igual a la unidad; con ello establecemos una unidad determinada de carga, a saber: la carga que interacciona con otra carga igual y que se halla a la distancia de un centímetro de la primera, con la fuerza de una dina. Esta unidad se denomina *unidad electrostática de carga*. El sistema de unidades, basado en esta elección del coeficiente constante de la ley de Coulomb, se denomina *sistema electrostático*, o sistema CGSE. En este sistema, las dimensiones de la carga son

$$[e] = ([F] [r]^2)^{1/2} = \left(\frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2} \text{cm}^2 \right)^{1/2} = \\ = \text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-1}.$$

En el sistema de unidades SI se utiliza una unidad de carga mayor, denominada *culombio* y de valor 1 culombio = 1C = $3 \cdot 10^9$ unidades CGSE de carga. Conociendo la expresión de la fuerza de interacción eléctrica, se puede hallar la energía potencial mutua de dos cargas eléctricas e_1 y e_2 . Si la distancia entre las cargas aumenta en dr , se producirá un trabajo $dA = -\frac{e_1 e_2}{r^2} dr$. Por otro lado, este trabajo será igual a la pérdida de energía potencial U ; por consiguiente,

$$-dU = \frac{e_1 e_2}{r^2} dr = -e_1 e_2 d\left(\frac{1}{r}\right),$$

de donde

$$U = \frac{e_1 e_2}{r}.$$

Hablando estrictamente, aquí habría que añadir un sumando de valor constante, que igualaríamos a cero a fin de que la energía potencial se redujese a cero al alejar infinitamente las cargas una de otra. Así, la energía potencial de interacción de dos cargas es inversamente proporcional a la distancia entre las mismas.

§ 18. Intensidad del campo eléctrico

Como en la ley de Coulomb entra el producto de las cargas, la fuerza con que cierta carga e_1 actúa sobre otra carga e se podrá expresar así:

$$F = eE,$$

donde E es un vector que viene determinado solamente por la carga e_1 y la distancia r entre las cargas e y e_1 , sin depender de la magnitud de la carga e . Este vector se denomina *intensidad del campo eléctrico*, o, como con frecuencia se dice, campo eléctrico creado por la carga e_1 . Su magnitud es

$$E = \frac{e_1}{r^2}$$

y va dirigido según la recta que une el punto donde se halla la carga e_1 , con el punto donde se halla la carga e . Se puede decir, que la fuerza con que la carga e_1 actúa sobre la e , es igual al producto de esta carga por la intensidad del campo eléctrico creado por la carga e_1 , en el lugar en que se halla la carga e .

Así encontramos otra manera de describir la interacción eléctrica. En lugar de decir que la partícula 1 atrae o repele a la 2, decimos que la primera partícula, poseyendo una carga eléctrica e_1 , crea en el espacio que la rodea un campo especial de fuerzas, campo eléctrico, mientras que la 2 no interacciona directamente con la 1, sino que sobre ella actúa el campo creado por ésta. Estos dos métodos de descripción aparecen aquí con una diferencia puramente formal. En realidad, no es así, y el concepto de campo eléctrico no tiene carácter formal ni mucho menos. El estudio de los campos eléctricos (y magnéticos) variables con el tiempo demuestra que pueden existir sin cargas eléctricas y son una realidad física independiente de la misma categoría que las partículas existentes en la naturaleza. No obstante, estas cuestiones se saleen de los límites de las nociones fundamentales de las interacciones de las partículas que se exponen aquí al estudiar las leyes de sus movimientos.

El campo eléctrico creado por muchas cargas eléctricas, y no por una sola, se determina basándose en la siguiente propiedad fundamental de las interacciones eléctricas: la interacción eléctrica entre dos cargas no depende de la presencia de una tercera carga.

De esto se puede deducir que si hay muchos cuerpos cargados, el campo creado por ellos es igual a la suma

vectorial de los campos eléctricos creados por cada carga independientemente. En otras palabras, los campos eléctricos creados por distintas cargas se superponen simplemente sin que haya interacción en ellos. Esta propiedad excepcional del campo eléctrico se denomina propiedad de *superposición*.

No hay que creer que la propiedad de superposición del campo eléctrico es consecuencia directa de la propia existencia de la interacción eléctrica. En realidad, esta propiedad fundamental del campo eléctrico es una ley de la naturaleza. Hay que señalar que esta propiedad no sólo la posee el campo eléctrico. Esta propiedad desempeña un papel importantísimo en la Física.

Apliquemos esta propiedad de superposición a la determinación del campo eléctrico de un cuerpo compuesto a distancias lejanas del mismo. Si las cargas de las partículas que lo componen son e_1, e_2, \dots , los campos que crean las partículas a la distancia r serán

$$E_1 = \frac{e_1}{r^2}, \quad E_2 = \frac{e_2}{r^2}, \dots$$

A grandes distancias del cuerpo se puede considerar que las distancias desde las distintas partículas son iguales y la dirección desde estas partículas al punto considerado, la misma. Por consiguiente, utilizando la propiedad de superposición para hallar el campo total E creado por el cuerpo, podemos simplemente determinar la suma algebraica de los campos E_1, E_2, \dots :

$$E = \frac{e_1 + e_2 + \dots}{r^2}.$$

Vemos que el campo de un cuerpo compuesto no se diferencia del de una simple partícula de carga

$$e = e_1 + e_2 + \dots$$

En otras palabras, la carga de un cuerpo compuesto es igual a la suma de las cargas de las partículas componentes y no depende de la posición mutua ni del movimiento. Esto se denomina *ley de conservación de la carga*.

En el caso general, al variar en magnitud y en dirección de un punto a otro, el campo eléctrico posee un carácter complejo. Para su representación gráfica se pueden utilizar *las líneas eléctricas de fuerza*. Estas

son líneas que, en cada punto del espacio poseen la dirección del campo eléctrico que actúa en este punto. Si el campo lo crea una carga, las líneas de fuerza tendrán la forma de rectas que salen del punto donde se halla la carga, o que convergen en el mismo punto, según sea positiva o negativa la carga (fig. 1).

De la misma definición de líneas de fuerza está claro que por cada punto del espacio (en el que no hay carga eléctrica) solamente pasa una línea de fuerza en la dirección del campo eléctrico que actúa en este punto.

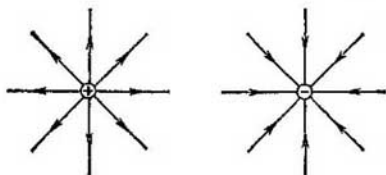


Fig. 1.

En otras palabras, las líneas de fuerza no se cortan en los puntos del espacio que no poseen cargas.

Las líneas eléctricas de fuerza de un campo uniforme no pueden ser cerradas. Efectivamente, al desplazarse una carga a lo largo de una línea de fuerza, las fuerzas del campo realizan un trabajo positivo, ya que las fuerzas están dirigidas constantemente a lo largo del trayecto. Por eso, si existiesen líneas de fuerza cerradas, el trabajo de las fuerzas del campo al desplazar la carga a lo largo de una de esas líneas volviendo al punto de origen, sería diferente de cero, lo cual contradice el principio de conservación de la energía.

Por consiguiente, las líneas de fuerza necesariamente deben empezar en un sitio y terminar en otro, o alejarse al infinito. Los puntos del principio o del fin de las líneas de fuerza son las cargas que crean el campo. En lo que se refiere al infinito, la línea de fuerza no puede tener ambos extremos en el infinito. En caso contrario, al transportar la carga a lo largo de esta línea del infinito al infinito, las fuerzas del campo realizarían cierto trabajo, en contradicción con el postulado de que, en ambos extremos del trayecto, la energía potencial es igual a cero.

Por eso, uno de los extremos de la línea de fuerza debe ser obligatoriamente una carga, el otro extremo puede hallarse en el infinito o en una carga de signo contrario.

Como ilustración, en la fig. 2 se representa un campo de dos cargas de signo contrario $+e_1$ y $-e_2$. La figura corresponde al caso en que e_1 es mayor que e_2 . Con

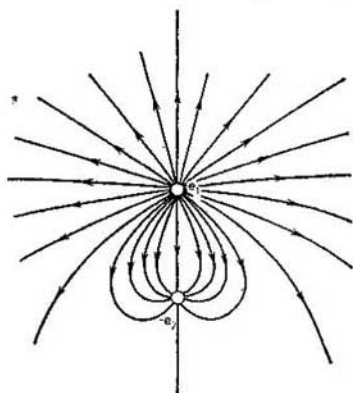


Fig. 2.

ello se ve que la parte de las líneas de fuerza que salen de $+e_1$, terminan en la carga $-e_2$, y la otra parte se pierde en el infinito.

§ 19.

Potencial electrostático

Lo mismo que la fuerza, la energía potencial U de la carga e que se halla en un campo eléctrico cualquiera, es proporcional a la magnitud de esta carga, es decir,

$$U = e\varphi.$$

La magnitud φ de esta ecuación es la energía potencial de la carga unidad y se denomina *potencial del campo eléctrico*.

Comparando esta definición con la de la intensidad del campo ($\mathbf{F} = e\mathbf{E}$, donde \mathbf{F} es la fuerza que actúa sobre la carga e) y recordando la relación general entre la fuerza y la energía potencial $F_s = -\frac{dU}{ds}$ (V. el § 10), vemos que la intensidad y el potencial del campo poseen relaciones análogas:

$$E_s = -\frac{d\varphi}{ds}.$$

La energía potencial de dos cargas e_1 y e_2 que se hallan a la distancia r , es igual, como sabemos, a

$$U = \frac{e_1 e_2}{r}.$$

Por lo tanto, el potencial creado por la carga e_1 a la distancia r de la misma será

$$\varphi = \frac{e_1}{r}.$$

Al alejarse de la carga, este potencial disminuye, es decir, es inversamente proporcional a la distancia. Si el campo no lo crea una carga, sino muchas cargas e_1, e_2, \dots , del principio de superposición se desprende que el potencial de este campo en cualquier punto del espacio vendrá determinado por la fórmula

$$\varphi = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \dots,$$

donde r_i es la distancia desde el punto considerado hasta la carga e_i .

Al desplazarse la carga e desde el punto del espacio de potencial φ_1 hasta el de potencial φ_2 , el trabajo de las fuerzas del campo es igual al producto de la carga por la diferencia de potencial entre los puntos inicial y final del trayecto:

$$A_{12} = e(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Los puntos del espacio en que el potencial tiene el mismo valor forman cierta superficie. Esta clase de superficies se dice que son *equipotenciales*.

Al desplazarse la carga según una superficie equipotencial, el trabajo realizado por las fuerzas del campo es igual a cero, lo cual quiere decir que la fuerza es perpendicular al desplazamiento. Por consiguiente se puede afirmar que la intensidad del campo eléctrico en cada punto del espacio es perpendicular a la superficie equipotencial que pasa por este punto. En otras palabras, las líneas de fuerza son perpendiculares a las superficies equipotenciales. Por ejemplo, en el caso de una carga puntual, las líneas de fuerza son rectas que pasan por la carga, y las superficies equipotenciales, superficies de esferas concéntricas de centro en la carga.

Las dimensiones del potencial eléctrico son:

$$[\varphi] = \frac{[U]}{[e]} = \text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La magnitud $1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ es la unidad de potencial en el sistema CGSE. En el SI se utiliza otra unidad 300 veces menor, que se denomina *voltio*:

$$1 \text{ V} = \frac{1}{300} \text{ unid. CGSE de potencial.}$$

Si la carga de un culombio pasa de un punto a otro del campo, cuya diferencia de potencial es igual a un voltio, el trabajo realizado por las fuerzas del campo será igual a $3 \cdot 10^9 \frac{1}{300} = 10^7$ ergios, es decir, a un julio:

$$1 \text{ C} \cdot \text{V} = 1 \text{ J.}$$

§ 20.

Teorema de Gauss

Introduzcamos ahora el importante concepto de *flujo del campo eléctrico*. Para hacerlo más comprensible y claro supongamos que el espacio ocupado por el campo está lleno de líquido imaginario, cuya velocidad en cada punto del espacio coincide en magnitud con la intensidad del campo eléctrico. El volumen de este líquido que pasa a través de una superficie cualquiera por unidad de tiempo, será el flujo del campo eléctrico a través de esta superficie.

Determinemos el flujo del campo eléctrico creado por la carga puntual e , a través de una superficie esférica de radio r y de centro en esta carga. Según la ley de Coulomb, en este caso la intensidad del campo es $E = e/r^2$. Por lo tanto, la velocidad del líquido supuesto también será igual a e/r^2 , y el flujo del líquido será igual al producto de la velocidad por la magnitud $4\pi r^2$, área de la superficie esférica. Por consiguiente, el flujo del campo será

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi e.$$

Vemos que este flujo no depende del radio de la esfera, sino que viene determinado solamente por la carga. Se puede demostrar que, si se sustituye la esfera por cualquier superficie cerrada que circunscriba a la carga, el flujo del campo eléctrico a través de la misma no varía y también será igual a $4\pi e$. Subrayamos que esta importante circunstancia es una consecuencia específica del hecho de que en la ley de Coulomb figura la proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia, precisamente.

Veamos ahora el flujo del campo eléctrico creado por una serie de cargas, y no por una sola. Este flujo se

puede determinar utilizando la propiedad de superposición del campo eléctrico. Está claro que el flujo del campo a través de una superficie cerrada cualquiera será igual a la suma de los flujos de las diferentes cargas que se hallan en el interior de esta superficie. Como cada uno de estos flujos es igual a la carga multiplicada por 4π , el flujo total del campo eléctrico a través de la superficie cerrada será igual a la suma algebraica de las cargas del interior de la superficie, multiplicada por 4π . Esta aseerción se denomina *teorema de Gauss*.

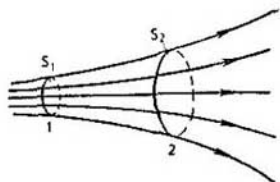


Fig. 3.

Si no hay cargas en el interior de la superficie, o si la suma de las cargas es igual a cero, el flujo del campo eléctrico a través de esta superficie es igual a cero. Examinemos un estrecho haz de líneas de fuerza limitado por una superficie formada también por líneas de fuerza (fig. 3). Cortemos este haz o, como en adelante diremos, tubo de fuerza con dos superficies equipotenciales 1 y 2 y determinemos el flujo del campo a través de la superficie cerrada formada por la superficie lateral del tubo de fuerza y las superficies equipotenciales 1 y 2. Si en el interior de esta superficie cerrada no hay cargas, el flujo total a través de ella será igual a cero. Por otro lado, el flujo a través de la superficie lateral del tubo, evidentemente, será también igual a cero; por eso, los flujos a través de las superficies 1 y 2 deben ser iguales. Nuestro haz de líneas de fuerza, para mayor claridad, podemos considerarlo semejante al chorro de un líquido.

Designemos las intensidades del campo en las secciones 1 y 2 por E_1 y E_2 , y las áreas de estas secciones, por S_1 y S_2 . Como el tubo de fuerza del campo se ha supuesto muy estrecho, podemos considerar constantes E_1 y E_2 en las secciones 1 y 2. Por eso podemos escribir la igualdad de flujos a través de las superficies 1 y 2 de la siguiente forma:

$$S_1 E_1 = S_2 E_2$$

(como el campo es perpendicular a la superficie equipotencial, el flujo será igual simplemente al producto de la intensidad del campo por el área de la superficie). Como el número N_1 de líneas de fuerza que pasan a través de la sección S_1 , es igual al número N_2 de líneas de fuerza que atraviesan la superficie S_2 , se puede escribir

$$\frac{N_1}{S_1 E_1} = \frac{N_2}{S_2 E_2}.$$

Las magnitudes $n_1 = N_1/S_1$ y $n_2 = N_2/S_2$ representan el número de líneas de fuerza por unidad de área de las superficies 1 y 2, ortogonales a las líneas de fuerza. De esta manera vemos que la densidad o concentración de las líneas de fuerza es proporcional a la intensidad del campo:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{E_1}{E_2}.$$

Por consiguiente, la representación gráfica del campo con la ayuda de las líneas de fuerza no sólo indica la dirección y sentido del campo, sino que también nos permite juzgar la magnitud que posee. Donde las líneas de fuerza sean más densas, la intensidad del campo eléctrico será mayor; donde las líneas de fuerza sean más claras, el campo será menos intenso.

§ 21.

Campo eléctrico en los casos más sencillos

El teorema de Gauss, en una serie de casos, nos da la posibilidad de determinar el campo creado por cuerpos compuestos cargados, si sus cargas están dispuestas con bastante simetría.

Como primer ejemplo determinemos el campo de una esfera cargada simétricamente. El campo de esta esfera estará dirigido según los radios de la misma y dependerá solamente de la distancia al centro de la misma. Partiendo de ello, es fácil calcular el campo fuera de la esfera. Para lo cual se determina el flujo del campo a través de la superficie esférica de radio r , cuyo centro coincide con el de la esfera cargada. Este flujo, evidentemente, será igual a $4\pi r^2 E$. Por otro lado, según el teorema de Gauss, es igual a $4\pi e$, donde e es la carga de la esfera. Por consiguiente $4\pi r^2 E = 4\pi e$, de donde

$$E = \frac{e}{r^2}.$$

Así tenemos que el campo fuera de la esfera coincide

con el de la carga puntual igual a la carga de la esfera y situada en el centro de la esfera. En correspondencia con ello, el potencial de este campo también coincidirá con el del campo de la carga puntual:

$$\varphi = \frac{e}{r}.$$

El campo en el interior de la esfera depende de cómo están distribuidas las cargas en la misma. Si las cargas están sólo en la superficie de la esfera, el campo en el interior de la misma será igual a cero.

Si la carga está distribuida uniformemente por todo el volumen de la esfera con una densidad ρ (ρ representa la carga por unidad de volumen de la esfera), el campo en el interior de la esfera se puede hallar mediante el teorema de Gauss aplicado a la superficie esférica de radio r situada en el interior de la esfera:

$$E4\pi r^2 = 4\pi e_r,$$

donde e_r es la carga situada en el interior de la superficie esférica. Esta carga es igual al producto de la densidad de carga por el volumen de la esfera de radio r , es decir, $e_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$. Por consiguiente,

$$4\pi r^2 E = 4\pi \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$$

de donde

$$E = \frac{4\pi}{3} \rho r.$$

Vemos que el campo en el interior de una esfera uniformemente cargada según el volumen, es proporcional a la distancia hasta centro, y fuera de la esfera,

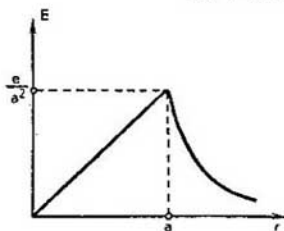


Fig. 4.

inversamente proporcional al cuadrado de esta distancia. En la fig. 4 se representa la dependencia del campo de una esfera de éstas con respecto a la distancia hasta el centro de la misma (a representa el radio de la esfera).

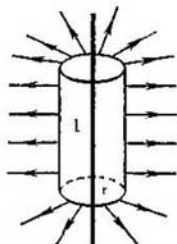


Fig. 5.

Como segundo ejemplo determinemos el campo de un hilo recto cargado y cuyas cargas están uniformemente distribuidas a lo largo del mismo. Suponiendo que la longitud del hilo es bastante grande, podemos despreciar la influencia de los extremos, es decir, considerarlo de longitud infinita. A juzgar por la simetría, está claro que el campo creado por este hilo no puede tener componentes a uno u otro lado a lo largo del hilo (ya que ambos lados son equivalentes por completo), o sea, que en cada punto debe estar dirigido perpendicularmente al hilo. Basándose en ello, es fácil determinar el campo del hilo. Para ello examinemos el flujo del campo a través de una superficie cilíndrica de radio r y de longitud l y cuyo eje coincida con el hilo (fig. 5). Como el campo es perpendicular al eje, el flujo a través de las bases del cilindro será igual a cero. Por lo tanto, el flujo total del campo a través de la considerada superficie se reducirá al flujo a través de la superficie lateral del cilindro. Este flujo, evidentemente, será igual a $E \cdot 2\pi r l$. Por otro lado, según el teorema de Gauss, será igual a $4\pi e$, donde e es la carga de la longitud l del hilo. Si designamos por q la carga por unidad de longitud del hilo, tendremos que $e = ql$. Por consiguiente,

$$2\pi r l E = 4\pi e = 4\pi q l,$$

de donde

$$E = \frac{2q}{r}.$$

Así vemos que el campo, creado por un hilo uniformemente cargado, es inversamente proporcional a la distancia r del hilo.

Determinemos el potencial de este campo. Como el campo E en cada punto está dirigido según el radio, su proyección radial E_r coincidirá con la magnitud total E . Basándonos en la relación común entre la intensidad y el potencial, tenemos que

$$-\frac{d\varphi}{dr} = E = \frac{2q}{r},$$

de donde

$$\varphi = -2q \ln r + \text{const.}$$

Vemos que en el caso dado, el potencial depende del logaritmo de la distancia al hilo. Para determinar la constante de esta fórmula no se puede utilizar la condición de reducción a cero del potencial en el

infinito, ya que esta expresión se reduce al infinito cuando $r \rightarrow \infty$. Esta circunstancia se debe a la suposición de la longitud infinita del hilo y significa que la fórmula obtenida puede utilizarse únicamente para distancias r pequeñas en comparación con la longitud real del hilo.

Determinemos también el campo de un plano infinito cargado uniformemente. Basándonos en la simetría, es evidente que el campo estará dirigido perpendicularmente al plano y tendrá los mismos valores (pero de sentido opuesto) a distancias iguales por ambos lados del mismo.

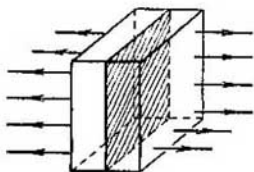


Fig. 6.

Examinemos el flujo del campo a través de la superficie cerrada de un paralelepípedo rectangular (fig. 6), con dos caras paralelas al plano cargado, el cual divide en dos partes iguales al paralelepípedo (en el dibujo se ha rayado la parte del plano comprendida en el interior del paralelepípedo). El flujo será distinto de cero solamente a través de estas caras. Por eso, según el teorema de Gauss,

$$2SE = 4\pi e = 4\pi S\sigma,$$

donde S es el área de la cara, y σ , la carga por unidad de superficie del plano (densidad superficial de carga). Así tenemos que

$$E = 2\pi\sigma.$$

Vemos que el campo de un plano infinito no depende de la distancia a este plano. En otras palabras, el plano cargado crea a ambos lados del mismo un campo eléctrico uniforme. El potencial de un plano cargado uniformemente es una función lineal de la distancia x del mismo,

$$\varphi = -2\pi\sigma x + \text{const.}$$

§ 22. Campo gravitatorio

Además de la interacción eléctrica, en la naturaleza desempeña una función muy importante la *interacción gravitatoria*. Esta interacción la poseen todos los cuerpos, independientemente de que lleven cargas eléctricas o de que sean neutros, y viene determinada sólo por las masas del cuerpo. La interacción gravitatoria es la atracción mutua de todos los cuerpos; siendo proporcional al producto de las masas la fuerza de esta interacción.

Si los cuerpos pueden considerarse puntos materiales, la fuerza de interacción gravitatoria es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los cuerpos y proporcional al producto de sus masas. Designando las masas de los cuerpos por m_1 y m_2 y la distancia entre los mismos por r , la fuerza de gravitación entre ellos puede determinarse así:

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

donde G es un coeficiente universal de proporcionalidad independiente de la naturaleza de los cuerpos que interaccionan; el signo menos indica que la fuerza F es siempre de atracción. Esta fórmula expresa la *ley de la gravitación de Newton*.

La magnitud G se denomina *constante de gravitación*. Está claro que G es la fuerza con que se atraen dos puntos materiales de masa igual a un gramo y que se hallan a la distancia de un centímetro. Las dimensiones de la constante de gravitación son

$$[G] = \frac{[F][r]^2}{[m]^2} = \frac{(\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}) \text{cm}^2}{\text{g}^2} = \frac{\text{cm}^3}{\text{g} \cdot \text{s}^2}$$

y es igual a

$$G = 6,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g} \cdot \text{s}^2}.$$

El valor tan pequeño de G indica que la fuerza de gravitación puede ser considerable sólo en el caso de grandes masas. Por esta causa, la gravitación no desempeña ningún papel en la mecánica de los átomos y moléculas. Con el aumento de la masa aumenta el papel de la gravitación, y el movimiento de tales cuerpos como la Luna, los planetas, lo mismo que los satélites viene determinado completamente por las fuerzas de gravitación.

La expresión matemática de la ley de la gravitación de Newton para los puntos materiales es análoga a la de la ley de Coulomb para las cargas puntuales. Ambas fuerzas, tanto la de gravitación como la eléctrica, son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre los puntos materiales, teniendo en cuenta que el papel de la masa en la gravitación lo desempeña la carga en la interacción eléctrica. No obstante, a diferencia de las fuerzas eléctricas, que pueden ser tanto de atracción como de repulsión, las fuerzas de gravitación son siempre de atracción.

Hemos considerado que el coeficiente de proporcionalidad de la ley de Coulomb es igual a la unidad y con ello hemos establecido la unidad de carga. Está claro que se podría proceder de manera análoga con la ley de la gravitación de Newton. Precisamente, si considerásemos la constante de gravitación igual a la unidad, con ello estableceríamos cierta unidad de masa. Esta unidad, evidentemente, se derivaría de las unidades cm y s , y su dimensión con respecto a éstas sería $\frac{\text{cm}^3}{\text{s}^2}$. Esta nueva unidad de masa es la masa que comunica a otra masa igual a ella, y que se halla a 1 cm de distancia, una aceleración de 1 cm/s^2 . Designando esta unidad por μ , podríamos escribir

$$G = 6,67 \cdot 10^{-9} \frac{\text{cm}^3}{\text{g} \cdot \text{s}^2} = 1 \frac{\text{cm}^3}{\mu \cdot \text{s}^2},$$

de donde $\mu = 1,5 \cdot 10^7 \text{ g} = 15 \text{ toneladas}$. Está claro, que esta nueva unidad es incómoda y por eso no se utiliza. No obstante, vemos que, en principio, se puede establecer un sistema de unidades en que las únicas unidades arbitrarias sean sólo las de longitud y tiempo, y para todas las demás, incluyendo la de masa, serían derivadas. Un sistema de unidades de esta clase no se utiliza en la práctica, pero la posibilidad de establecerlo nos demuestra una vez más lo convencional del sistema CGS.

Disponiendo de la expresión de la fuerza de gravitación entre dos partículas materiales, es fácil hallar su energía potencial U . Efectivamente, escribiendo la relación general

$$-\frac{dU}{dr} = F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

que enlaza los valores U y F , hallamos que

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r},$$

teniendo en cuenta que hemos supuesto igual a cero la constante arbitraria de U , para que la energía potencial se redujera a cero al alejarse las partículas a una distancia infinita. Esta fórmula es análoga a la

$$U = \frac{e_1 e_2}{r}$$

para la energía potencial de la interacción eléctrica. Hemos expuesto las fórmulas de la fuerza y de la energía potencial de la interacción gravitatoria de dos puntos materiales; pero estas fórmulas son justas para las fuerzas de atracción entre dos cuerpos cualesquiera, si la distancia entre ellos es grande en comparación con sus dimensiones. Para los cuerpos de forma esférica, las fórmulas son justas para cualesquiera distancias entre los cuerpos (en este caso r es la distancia entre los centros de las esferas).

La proporcionalidad de la fuerza de atracción de un campo con respecto a la masa de la partícula sobre la cual actúa, ofrece la posibilidad de introducir el concepto de *intensidad del campo gravitatorio* (o *campo de atracción*), de manera parecida a como lo hemos hecho para el campo eléctrico. Efectivamente, la fuerza F que actúa sobre una partícula de masa m la representaremos así:

$$F = mg,$$

donde la intensidad del campo g es una magnitud que depende sólo de la masa y de la posición de los cuerpos que crean el campo.

Como el campo gravitatorio se subordina a la ley de Newton, matemáticamente análoga a la de Coulomb para el campo eléctrico, para aquél también será justo el teorema de Gauss. La diferencia solamente consistirá en que, en lugar de la carga, en el teorema de Gauss figurará, en este caso, el producto de las masas por la constante de gravitación. Por consiguiente, el flujo del campo gravitatorio a través de una superficie cerrada será igual a $-4\pi mG$, donde m es la suma de todas las masas que se hallan en el interior de esta superficie, y el signo menos es debido al carácter de atracción de las fuerzas gravitatorias.

Utilizando este teorema se puede determinar, por ejemplo, la intensidad del campo gravitatorio en el interior de una esfera homogénea. Este problema corresponde exactamente al examinado en el § 21 sobre la esfera uniformemente cargada. Aprovechando el resultado obtenido allí podemos escribir directa-

mente

$$g = \frac{4\pi}{3} G\rho r,$$

donde ρ es la densidad de la masa de la esfera. La fuerza de gravitación (gravedad) que actúa sobre un cuerpo cerca de la superficie terrestre, se denomina peso P del cuerpo. La distancia del cuerpo al centro de la Tierra es $R+z$, donde R es el radio de la Tierra, y z , la altura del cuerpo sobre la superficie de la misma. Si la altura z es muy pequeña en comparación con R , se puede despreciar y, entonces, el peso del cuerpo será

$$P = G \frac{mM}{R^2},$$

donde M es la masa de la Tierra.

Si representamos la fórmula de la manera siguiente:

$$P = mg,$$

tendremos que

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

La magnitud constante g , en este caso, se denomina *aceleración (de la fuerza) de la gravedad*. Esta es la aceleración de la caída libre del cuerpo en el campo de atracción de la Tierra.

A las alturas z en las que la fuerza de la gravedad puede considerarse constante, la energía potencial del cuerpo se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$U = Pz = mgz.$$

Esto se ve de la fórmula general obtenida en el § 10 para la energía potencial en un campo uniforme, si se tiene en cuenta también que, en el caso considerado, la fuerza va dirigida hacia abajo, es decir, en sentido de la disminución de z .

La aceleración de la fuerza de la gravedad g , en realidad, no es la misma en los distintos puntos de la superficie terrestre, ya que ésta no tiene exactamente la forma esférica. Además, hay que tener en cuenta que, debido a la rotación de la Tierra alrededor de su eje, surge una fuerza centrífuga, que actúa en sentido opuesto al de la de atracción. Por eso hay que introducir el concepto de aceleración aparente¹ de la

¹ Los autores la denominan «efectiva» (N. del T.)

fuerza de la gravedad, la cual es menor que la aceleración de la fuerza de la gravedad de la Tierra considerada en reposo. Esta aceleración, en los polos terrestres es $g=983,2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$, y en el ecuador, $g=978,0 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$.

A veces, el valor g figura en la definición de las unidades de medición de las magnitudes físicas (por ejemplo, de la fuerza y del trabajo). Para estos fines, convencionalmente se utiliza el valor estándar

$$g = 980,665 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2},$$

que se aproxima mucho a la aceleración de la fuerza de la gravedad a la latitud de 45° .

Principio de equivalencia

La proporcionalidad de la fuerza de la gravitación con respecto a la masa de la partícula sobre la cual actúa ($F=mg$), tiene gran importancia en Física. Como la aceleración adquirida por la partícula es igual a la fuerza que actúa sobre ella, dividida por la masa, la aceleración w que experimenta la partícula en un campo gravitatorio coincidirá con la intensidad de este campo:

$$W = g.$$

es decir, no dependerá de la masa de la partícula. En otras palabras, el campo gravitatorio posee una propiedad excepcional: todos los cuerpos, independientemente de sus masas, adquieren en el campo igual aceleración (esta propiedad la descubrió Galileo en sus experimentos sobre la caída de los cuerpos en el campo de gravedad de la Tierra).

Análogo comportamiento de los cuerpos observaríamos en el espacio en el cual sobre los cuerpos no actúa ninguna fuerza exterior, si examinásemos su movimiento desde el punto de vista de un sistema de referencia acelerado (no inercial). Representémoslos, por ejemplo, un cohete que se desplaza libremente por el espacio interestelar, donde se pueden despreciar las fuerzas de gravitación que actúan sobre el cohete. En el interior de este cohete los objetos estarán «suspensos», permaneciendo inmóviles con respecto al cohete. Si el cohete adquiere una aceleración w , los objetos del interior «caerán» al suelo con una aceleración $-w$. De la misma manera se comportarían

los cuerpos en el interior de un cohete que se desplazara sin aceleración, si sobre éste actuase un campo gravitatorio uniforme de intensidad — w , dirigida hacia el suelo del cohete. Ninguna clase de experimentos nos permitiría distinguir si nos hallamos en un cohete que se desplaza con aceleración, o que se halla en un campo gravitatorio uniforme.

Esta analogía entre el comportamiento de los cuerpos en un campo gravitacional y en un sistema de referencia acelerado es el contenido del llamado *principio de equivalencia* (el sentido fundamental de esta analogía se aclara por completo en la teoría de la gravitación basada en la teoría de la relatividad).

En el razonamiento expuesto hemos hablado de un cohete que se desplaza por un espacio libre de campo gravitacional. Estos razonamientos se pueden «invertir» considerando que el cohete se desplaza por un campo gravitatorio, digamos, por el campo de gravitación de la Tierra. El cohete que se mueve libremente (es decir, sin motores) por este campo, adquiere una aceleración igual a la intensidad del campo g . En este caso, el cohete representa un sistema de referencia acelerado, en el cual la influencia de la aceleración en el movimiento con respecto al cohete, de los cuerpos que se hallan en el mismo, compensa precisamente la influencia del campo gravitacional. Como resultado surge el estado de «ingravedez», es decir, en el cohete los objetos se comportan como si se hallasen en un sistema inercial de referencia fuera de campo gravitatorio alguno. Así, estudiando el movimiento con respecto a un sistema acelerado elegido de antemano (en el caso considerado, con respecto al cohete que se mueve aceleradamente), se podría «excluir» el campo gravitatorio. Esta circunstancia es, claro está, otro aspecto del mismo principio de equivalencia.

El campo gravitatorio que, al parecer, surge en el cohete que se mueve con aceleración, es uniforme en todo el volumen del cohete, su intensidad en todas partes es igual a la misma magnitud: — w . Sin embargo, los verdaderos campos gravitatorios no son uniformes. Por eso, la «exclusión» del verdadero campo gravitatorio pasando a un sistema de referencia acelerado, puede hacerse únicamente en pequeñas extensiones del espacio, en las cuales el campo varía tan poco, que con bastante exactitud puede considerarse uniforme. En este sentido puede decirse que la equivalencia del campo gravitatorio y del sistema acelerado de referencia tiene carácter «local».

§ 24. Movimiento kepleriano

Examinemos el movimiento de dos cuerpos que se atraen mutuamente según la ley de la gravitación de Newton. Primeramente, supongamos que la masa de uno de los cuerpos M es considerablemente mayor que la del otro m . Si la distancia r entre los cuerpos es grande en comparación con las dimensiones de los mismos, el problema se reducirá al del movimiento de un punto material m por un campo gravitatorio central creado por el cuerpo M , que se puede considerar inmóvil.

En este campo, el movimiento más sencillo es el uniforme según una circunferencia de centro en el centro del campo (es decir, en el centro del cuerpo M). En este caso, la aceleración va dirigida hacia el centro de la circunferencia y es igual, como se sabe, a v^2/r , donde v es la velocidad del punto m . La aceleración multiplicada por la masa m será igual a la fuerza que actúa sobre la partícula por parte del cuerpo M :

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2},$$

de donde

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Utilizando esta fórmula, en particular, se puede determinar la velocidad de un satélite artificial terrestre (spútnik) que se desplace no lejos de la superficie de la Tierra. En este caso, sustituyendo r por el radio R de la Tierra y recordando que $\frac{MG}{R^2}$ es la aceleración de la fuerza de la gravedad g , obtenemos la siguiente expresión de la velocidad del satélite, llamada *velocidad orbital*,

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}.$$

Colocando aquí $g \approx 980 \frac{cm}{s^2}$, $R = 6500$ km, hallamos que $v_1 = 8 \frac{km}{s}$. La fórmula obtenida para v nos permite establecer la relación entre el radio de la órbita, r , y el periodo T . Suponiendo

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

hallamos que

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3.$$

Vemos que los cuadrados de los períodos de rotación son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas. Esta relación se denomina *tercera ley de Kepler*, en honor al astrónomo J. Kepler, que, observando el movimiento de los planetas a principios del siglo XVII, enunció empíricamente las leyes fundamentales del movimiento de dos cuerpos bajo la influencia de la interacción gravitatoria (este movimiento se denomina *kepleriano* o no perturbado). Estas leyes (la segunda ley, que establece la constancia de la velocidad areolar en el movimiento por un campo central, se ha examinado en el § 16) han desempeñado un papel muy importante en el descubrimiento de la ley de la gravitación universal de Newton.

Determinemos ahora la energía de la partícula m . Su energía potencial es, como sabemos,

$$U = -\frac{GmM}{r}.$$

Añadiéndole a U la energía cinética $\frac{mv^2}{2}$, hallamos la energía total de la partícula

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r},$$

que no varía con el tiempo.

En el movimiento según una circunferencia tenemos que

$$mv^2 = \frac{GmM}{r},$$

por eso,

$$E = -\frac{mv^2}{2} = -\frac{GmM}{2r}.$$

Vemos que en el movimiento según una circunferencia, la energía total de la partícula es negativa. Esto se halla en concordancia con los resultados del § 13, según los cuales, si la energía potencial en el infinito se reduce a cero, el movimiento será finito cuando $E < 0$, e infinito, cuando $E \geq 0$.

Hemos examinado el movimiento circular más sencillo solicitado por la fuerza gravitatoria

$$F = -\frac{GmM}{r^2}.$$

No obstante, en un campo de éstos, el movimiento de la partícula puede efectuarse no sólo según una cir-

cunferencia, sino también por una elipse, hipérbola o parábola. Para todas estas secciones cónicas, uno de los focos (para la parábola, el único) se halla en el punto de aplicación de la fuerza (en esto consiste la *primera ley de Kepler*). Es evidente que a las órbitas elípticas les corresponderán valores negativos de la energía total de la partícula, $E < 0$ (ya que el movimiento es finito). A las órbitas hiperbólicas cuyas ramas se pierden en el infinito, les corresponderán valores positivos de energía total, $E > 0$, y, por último, en el movimiento según una parábola, $E = 0$. Esto significa que en el movimiento según una parábola, la velocidad de la partícula en el infinito es igual a cero.

Utilizando la fórmula de la energía total de la partícula, es fácil hallar la velocidad mínima que hay que comunicar al satélite artificial para que se desplace según una órbita parabólica, es decir, que salga de la esfera de la atracción terrestre. Suponiendo $r = R$ en la fórmula

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r}$$

e igualando E a cero, hallamos esta velocidad, que se denomina *velocidad de escape*,

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{GM}{R}} = \sqrt{2gR}$$

Comparándola con la fórmula de la velocidad orbital, vemos que

$$v_2 = \sqrt{2}v_1 = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Aclaremos cómo se determinan los parámetros de las órbitas elípticas. El radio de la órbita circular se puede expresar en función de la energía de la partícula:

$$r = \frac{\alpha}{2|L|},$$

donde se ha hecho $\alpha = GmM$. En el movimiento de la partícula según una elipse, con esta misma fórmula se determina el semieje mayor de la elipse a ,

$$a = \frac{\alpha}{2|L|}.$$

El semieje menor b de la elipse depende no sólo de la energía, sino también del momento L ,

$$b = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}.$$

Cuanto menor sea el momento L , más alargada estará la elipse (siendo la energía la misma).

El período de rotación según la elipse sólo depende de la energía y se expresa en función del semieje mayor de la elipse:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{\alpha} a^3.$$

Hasta ahora hemos examinado el caso en que la masa de uno de los cuerpos M es considerablemente mayor que la del otro m , y hemos supuesto por ello que el cuerpo M permanecía inmóvil. Claro está que, en

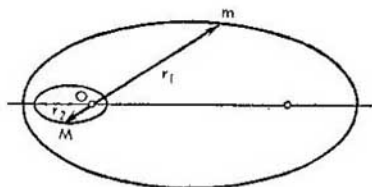


Fig. 7.

realidad, se mueven los dos cuerpos; además, en el sistema de centro de masas, ambos describen trayectorias geoméricamente semejantes: cónicas con foco común en el centro de masas. En la fig. 7 se representa esta clase de elipses geoméricamente semejantes, cuyas dimensiones son inversamente proporcionales a las masas de los cuerpos. Las expresiones indicadas más arriba para los semiejes a y b se refieren, en este caso, a la trayectoria de la partícula «reducida» y sólo hay que sustituir en ellas el valor m por

$$\mu = \frac{mM}{m+M},$$

conservando el valor anterior de $\alpha = GmM$.

§ 25. Clases de movimiento del sólido

Hasta ahora hemos estudiado el movimiento de los cuerpos que, en las condiciones dadas, podían considerarse puntos materiales. Ahora pasamos al estudio de los movimientos en los cuales son de considerable importancia las dimensiones finitas de los cuerpos. Además consideraremos que los cuerpos son *sólidos*. En Mecánica se entiende por sólido el cuerpo en que la posición relativa de las partes entre sí no varía durante el movimiento. Este cuerpo, en su movimiento, actúa como un todo, como un sistema invariable. El movimiento más simple de un sólido es aquel en que el cuerpo se desplaza paralelamente a sí mismo. Este movimiento se denomina de *traslación*. Si, por ejemplo, se desplaza suavemente una brújula por un plano horizontal, la aguja conservando constante la dirección del sur al norte, efectuará con ello un movimiento de traslación.

En el movimiento de traslación del cuerpo sólido, todos sus puntos tienen la misma velocidad y describen trayectorias de igual forma, aunque distanciados entre sí.

Otra clase de movimiento simple del sólido es el de *rotación* alrededor de un eje. En la rotación, los distintos puntos del cuerpo describen circunferencias que se hallan en planos perpendiculares al eje de giro o de rotación.

Si en el tiempo dt el cuerpo gira el ángulo $d\varphi$, el trayecto ds recorrido en este tiempo por un punto cualquiera P del cuerpo será, evidentemente, $ds = r d\varphi$, donde r es la distancia desde el punto P hasta el eje de rotación. Dividiendo ds por dt hallamos la velocidad del punto P :

$$v = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

La magnitud $\frac{d\varphi}{dt}$ es la misma para todos los puntos del cuerpo y es el desplazamiento angular del cuerpo por unidad de tiempo. Esta magnitud se denomina

velocidad angular del cuerpo, que nosotros designaremos con la letra Ω .

De esta manera tenemos que la velocidad de los distintos puntos de un cuerpo sólido que gira alrededor de cierto eje, viene determinada por la fórmula

$$v = r\Omega,$$

donde r es la distancia desde el punto hasta el eje de rotación, y la velocidad es proporcional a esta distancia.

Hablando en general, la magnitud Ω varía con el tiempo. Si la rotación es uniforme, es decir, si se realiza a una velocidad angular constante, sabiendo el periodo de rotación T , se puede determinar Ω :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

La rotación se caracteriza por la dirección del eje de rotación y por la magnitud de la velocidad angular. Estas se pueden unir introduciendo el vector Ω de velocidad angular, el cual tiene la dirección del eje de giro y la magnitud de la velocidad angular. De los dos sentidos del eje de rotación, se ha convenido considerar que el vector de la velocidad angular tiene el sentido determinado por la llamada regla del sacacorchos, es decir, el sentido en que avanza el sacacorchos (de giro a derechas) que gira junto con el cuerpo sólido.

El análisis de los movimientos más simples del cuerpo sólido, de traslación y de rotación, es particularmente importante, porque cualquier movimiento del sólido se reduce a estos movimientos.

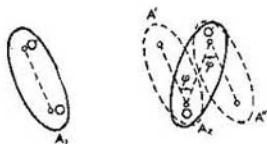


Fig 1.

Expliquemos esto en el ejemplo del cuerpo que se desplaza paralelamente a un plano. Veamos dos posiciones consecutivas del cuerpo A_1 y A_2 (fig. 1). De la posición A_1 a la A_2 , el cuerpo se puede trasladar de la siguiente manera: en primer lugar, de la posición A_1 se traslada paralelamente a la A' , de manera que un punto determinado O llegue a ocupar su posición final; haciendo después girar el cuerpo

alrededor del punto O un determinado ángulo φ , el cuerpo pasará a ocupar la posición final A_2 . Vemos que el desplazamiento total del cuerpo se compone de movimiento de traslación, que desplaza al cuerpo de la posición A_1 a la A' , y de rotación alrededor del punto O , que definitivamente traslada al cuerpo a la posición A_2 . Está claro que el punto O , en este caso, es completamente arbitrario. De la misma manera se podría haber hecho el desplazamiento paralelo desde la posición A_1 hasta la A'' , en el cual, cualquier otro punto O' , y no el O , ocupase su posición final y, después, girar el cuerpo alrededor del punto O' hasta que ocupe la posición A_2 . Es esencial notar que en estos casos, el ángulo de rotación será el mismo que en el caso del giro alrededor del punto O mientras que la distancia recorrida por los puntos O y O' será diferente.

El ejemplo examinado demuestra, y en realidad esto es una regla general, que cualquier movimiento de un cuerpo sólido se puede representar como el conjunto del movimiento de traslación de todo el cuerpo a la velocidad de un punto O cualquiera, y de rotación alrededor del eje que pasa por este punto. En este caso, la velocidad de traslación (que designaremos por V) depende del punto que se haya elegido como básico; mientras que la velocidad angular Ω no depende de esta elección: cualquiera que sea la elección del punto O , el eje de rotación que pasa por el punto tendrá la misma dirección y la magnitud de la velocidad angular Ω será la misma. En este sentido se puede decir que la velocidad angular Ω tiene carácter «absoluto», es decir, se puede hablar de la velocidad angular de rotación de un cuerpo sólido sin indicar por qué punto precisamente pasa el eje de rotación. La velocidad de traslación, sin embargo, no posee este carácter «absoluto».

Generalmente, como punto «básico» O se elige el centro de masas del cuerpo. En este caso, la velocidad V de traslación es la de desplazamiento del centro de masas. Las ventajas de esta elección se aclaran en el siguiente párrafo.

Cada uno de los vectores V y Ω viene determinado por los valores de sus tres componentes (con respecto a determinado sistema de coordenadas). Por eso sólo es necesario conocer seis magnitudes independientes para saber la velocidad de cualquier punto del sólido. Basándose en ello se dice que el sólido es un sistema mecánico con seis *grados de libertad*.

§ 26. Energía del cuerpo sólido en movimiento

La energía cinética del sólido con movimiento de traslación se determina fácilmente. Como todos los puntos del cuerpo, en este movimiento, tienen la misma velocidad, la energía cinética será simplemente

$$E_{\text{cin.}} = \frac{1}{2} MV^2,$$

donde V es la velocidad del cuerpo y M , su masa total. Esta es la misma expresión de la energía del punto material de masa M que se desplazara a la velocidad V . Está claro que el movimiento de traslación del sólido no se diferencia en nada del movimiento del punto material.

Determinemos ahora la energía cinética del cuerpo que gira. Para ello supongámoslo dividido en diferentes partes elementales tan pequeñas, que las podamos considerar puntos materiales en movimiento. Si m_i es la masa del elemento i y r_i su distancia hasta el eje de rotación, la velocidad será $v_i = r_i \Omega$, donde Ω es la velocidad angular del cuerpo. La energía cinética de este elemento es $\frac{1}{2} m_i v_i^2$ y sumando estas energías obtenemos la energía cinética del cuerpo:

$$\begin{aligned} E_{\text{cin.}} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots = \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots). \end{aligned}$$

La suma entre paréntesis depende de la forma, dimensiones y distribución de las masas del cuerpo en cuestión, y también de la posición del eje de rotación. Esta magnitud, que caracteriza al cuerpo sólido y al eje de rotación elegido, se denomina *momento de inercia* del cuerpo con respecto al eje considerado. Designémoslo con la letra I :

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$$

Si el cuerpo sólido es continuo, hay que dividirlo en un número infinito de partes infinitamente pequeñas; entonces, la suma de la fórmula anterior se sustituye por la integración. Indiquemos como ejemplo, que el momento de inercia de una esfera sólida, maciza (de masa M y radio R), con respecto al eje que pasa por su centro, es $I = \frac{2}{5} MR^2$; el momento de inercia de una barra delgada (de longitud l) con respecto al eje que pasa por el centro de la barra perpendicularmente a su longitud, es $I = \frac{1}{12} Ml^2$.

De este modo, la energía cinética de un cuerpo en rotación puede expresarse de la siguiente manera:

$$E_{\text{cin.}} = \frac{I\Omega^2}{2}.$$

Esta expresión, formalmente se parece a la de la energía del movimiento de traslación, diferenciándose en que, en lugar de la velocidad V , tenemos la velocidad angular Ω , y en lugar de la masa, el momento de inercia. En este caso tenemos el primer ejemplo en que, en la rotación, el momento de inercia desempeña un papel análogo al de la masa en el movimiento de traslación.

La energía cinética de un sólido cualquiera en movimiento se puede representar como la suma de las energías de traslación y de rotación, si en el modo de distinguir los dos movimientos del párrafo anterior, se elige el punto básico O en el centro de masas del cuerpo. Entonces el movimiento de rotación será el movimiento de los puntos del cuerpo con respecto a su centro de masas, consiguiendo así una analogía completa con la división del movimiento del sistema de las partículas en el movimiento del sistema como un todo y en el movimiento «interno» de las partículas con respecto al centro de masas, división estudiada en el § 12. Allí vimos que la energía del sistema también se dividía en las dos partes correspondientes. El papel de movimiento «interno» lo desempeña ahora la rotación del cuerpo alrededor del centro de masas. Por eso, para la energía cinética de un cuerpo cualquiera, en movimiento, tenemos que

$$E_{\text{cin.}} = \frac{MV^2}{2} + \frac{I_0\Omega^2}{2}.$$

El subíndice «0» del momento de inercia indica que se toma con respecto al eje que pasa por el centro de masas.

No obstante hay que observar que esta fórmula, así expuesta, solamente tiene sentido práctico real, si en el proceso del movimiento, el eje de rotación conserva una dirección constante en el cuerpo. En caso contrario, el momento de inercia debe tomarse en distintos instantes de tiempo con respecto a diferentes ejes, es decir, deja de ser una magnitud constante.

Veamos ahora un cuerpo sólido que gire alrededor de cierto eje Z que no pase por el centro de masas. La energía cinética de este movimiento será $E_{\text{cin.}}$

$= \frac{1}{2} I \Omega^2$, donde I es el momento de inercia con respecto al eje Z . Por otro lado, este movimiento se puede considerar como el conjunto de un movimiento de traslación de velocidad V del centro de masas y de un movimiento de rotación (con la misma velocidad angular Ω) alrededor del eje que pasa por el centro de masas paralelamente al eje Z . Si a es la distancia del centro de masas al eje Z , su velocidad será $V = a\Omega$. Por eso, la energía cinética del cuerpo se puede representar también de la siguiente manera:

$$E_{\text{cin.}} = \frac{MV^2}{2} + \frac{I_0 \Omega^2}{2} = \frac{1}{2} (Ma^2 + I_0) \Omega^2.$$

Comparando las dos expresiones hallamos que

$$I = I_0 + Ma^2.$$

Esta fórmula relaciona el momento de inercia del cuerpo respecto de cualquier eje, con el momento de inercia respecto de otro eje paralelo al primero y que pasa por el centro de masas. Está claro que I siempre será mayor que I_0 . En otras palabras, dada la dirección del eje, el valor mínimo del momento de inercia será el correspondiente al eje que pase por el centro de masas.

Si el cuerpo sólido se desplaza por un campo gravitatorio, la energía total E será igual a la suma de las energías cinéticas y potencial. Examinemos como ejemplo el movimiento de una esfera por un plano inclinado (fig. 2). La energía potencial de la esfera será Mgz , donde M es la masa de la esfera y z , la altura de su centro. La ley de conservación de la energía se expresará de la siguiente manera:

$$E = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0 \Omega^2 - Mgz = \text{const.}$$

Supondremos que la esfera rueda sin resbalar. Entonces la velocidad v del punto de contacto con el plano inclinado será igual a cero. Por otro lado, esta velocidad está compuesta de la velocidad V de traslación hacia abajo, según el plano, junto con la esfera considerada como un todo, y de la velocidad dirigida en sentido contrario (hacia arriba según el plano) del punto en su rotación alrededor del centro de la esfera. Esta última velocidad es igual a ΩR , donde R es el radio de la esfera. De la igualdad $v = V - \Omega R = 0$, tenemos que

$$\Omega = \frac{V}{R}.$$

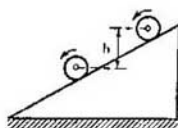


Fig. 2.

Colocando este valor en la expresión de la ley de conservación de la energía y considerando que, en el momento inicial de tiempo, la velocidad de la esfera era igual a cero, hallamos la velocidad del centro de masas de la esfera en el momento en que haya descendido la magnitud h :

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I_0}{MR^2}}}$$

Esta velocidad, como era de esperar, es menor que la de la caída libre del punto material o que la del cuerpo sin rotación que cae desde la misma altura h , ya que la disminución de la energía potencial Mgh se ha invertido no solamente en el aumento de la energía cinética del movimiento de traslación, sino también en el aumento de la energía cinética de la rotación de la esfera.

§ 27. Momento de impulsión ¹

En el movimiento de rotación de un cuerpo, el momento de su impulsión desempeña un papel análogo al de la impulsión en el movimiento del punto material. En el caso más simple de un cuerpo que gire alrededor de un eje fijo, este papel lo desempeña la componente del momento a lo largo del eje (llamémosle eje Z).

Para calcular esta magnitud, dividamos el cuerpo en diferentes partes elementales, como al calcular la energía cinética. El momento de impulsión de un elemento aislado (el i) es $m_i [R_i v_i]$, donde R_i es el radio vector de este elemento contado a partir de cierto punto O del eje Z , con respecto al cual se determina el momento (fig. 3). Como cada punto del cuerpo se desplaza alrededor del eje de rotación según una circunferencia, la velocidad v_i será tangente a esta circunferencia.

Descompongamos el vector R_i en dos vectores, de los cuales uno estará dirigido a lo largo del eje, y el otro (r_i), perpendicular al eje. Entonces, el producto $m_i |r_i v_i|$ nos dará precisamente la parte del momento de impulsión que va dirigida paralelamente al eje Z (recordamos que el producto vectorial de dos vectores

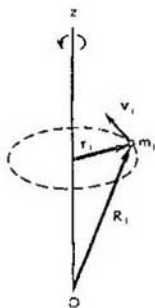


Fig. 3.

¹ Hemos creído conveniente conservar aquí el término «momento de impulsión», al que los autores dan preferencia, aunque en la literatura española es más frecuente el de «momento cinético», «momento de rotación» y «momento angular». (N. del T.)

es perpendicular al plano que pasa por estos vectores). Como los vectores \mathbf{r}_i y \mathbf{v}_i son perpendiculares entre sí (el radio de la circunferencia y la tangente a la misma), la magnitud del producto $[\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i]$ es simplemente $r_i v_i$, donde r_i es la distancia del elemento m_i al eje de rotación. Por último, como $v_i = \Omega r_i$, llegamos a la conclusión de que la componente del momento de impulsión del elemento m_i según el eje de rotación es igual a $m_i r_i^2 \Omega$. Sumando

$$m_1 r_1^2 \Omega + m_2 r_2^2 \Omega + \dots,$$

obtenemos la proyección buscada L_Z del momento total de impulsión del cuerpo sobre el eje Z . Esta magnitud se denomina *momento de impulsión del cuerpo con respecto al eje dado*.

Sacando fuera del paréntesis al factor común Ω , entre paréntesis obtenemos una suma que coincide precisamente con la expresión del momento de inercia I . Así, definitivamente:

$$L_Z = I\Omega,$$

es decir, el momento angular del cuerpo es igual al producto de la velocidad angular por el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación. Obsérvese la analogía de esta expresión con la de $m\mathbf{v}$ para la impulsión de la partícula, en que, en lugar de la velocidad \mathbf{v} , tenemos la velocidad angular, y el papel de la masa otra vez lo desempeña el momento de inercia.

Si sobre el cuerpo no actúan fuerzas externas, el momento angular del cuerpo permanece constante: el cuerpo gira «por inercia» a una velocidad angular constante Ω . En este caso, la constancia de Ω se desprende de la constancia de L_Z por considerar invariable al propio cuerpo en su giro, es decir, por la invariabilidad de su momento de inercia. Si la posición relativa de las partes del cuerpo (y, con ello, el momento de inercia) varía, en la rotación libre también variará la velocidad angular, de manera que el producto $I\Omega$ se conserve constante. Si, por ejemplo, sobre un taburete que gira con pequeño rozamiento, hay un hombre con pesas en las manos, al extender los brazos aumentará su momento de inercia, con lo cual disminuirá la velocidad angular de la rotación, puesto que el producto $I\Omega$ se ha de conservar constante.

§ 28. Ecuación del movimiento de un cuerpo que gira

La ecuación del movimiento del punto material relaciona, como sabemos, la velocidad de variación de su impulsión con la fuerza que actúa sobre el mismo (V. el § 7). El movimiento de traslación de un sólido se diferencia muy poco del punto material, y la ecuación de ese movimiento encerrará la misma relación entre la impulsión total del cuerpo $P=MV$ y la fuerza total F que actúa sobre el mismo:

$$\frac{dP}{dt} = M \frac{dV}{dt} = F.$$

En el movimiento de rotación, un papel análogo lo desempeña la ecuación que relaciona la velocidad de variación del momento de impulsión del cuerpo con el momento de las fuerzas que actúan sobre el mismo. Aclaremos cómo es esta relación, teniendo en cuenta que otra vez nos limitaremos al simple caso de rotación del cuerpo alrededor de un eje fijo determinado (el eje Z).

El momento de impulsión del cuerpo con respecto al eje de rotación ya lo hemos determinado. Veamos ahora las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Está claro que las fuerzas paralelas al eje de rotación, pueden desplazar al cuerpo solamente a lo largo de este eje, pero no pueden causar la rotación del cuerpo. Por consiguiente podemos no prestar atención a estas fuerzas y considerar solamente las que están en el plano perpendicular al eje de rotación.

El momento K_z de tal fuerza F con respecto al eje Z vendrá dado por la magnitud del producto vectorial $[rF]$, donde r es el vector distancia desde el eje hasta el punto de aplicación de la fuerza. Según la definición del producto vectorial tenemos que

$$K_z = Fr \operatorname{sen} \theta,$$

donde θ es el ángulo entre F y r (en la fig. 4, el eje Z es perpendicular al plano del dibujo y pasa por el punto O ; A es el punto de aplicación de la fuerza). Se puede escribir de otra manera:

$$K_z = h_F F,$$

donde $h_F = r \operatorname{sen} \theta$ es el brazo de la fuerza con respecto al eje (la distancia desde el eje hasta la dirección de la fuerza).

Según la relación establecida en el § 15 entre la velocidad de variación del momento de impulsión y el

momento de las fuerzas que actúan, podemos escribir ahora la igualdad

$$\frac{dL_z}{dt} = K_z \quad \text{o} \quad I \frac{d\Omega}{dt} = K_z.$$

Esta es la ecuación del movimiento del cuerpo que gira. La derivada $\frac{d\Omega}{dt}$ se puede denominar *aceleración angular*. Vemos que viene determinada por el momento de la fuerza que actúa sobre el cuerpo, de la misma manera que la aceleración del movimiento de traslación viene determinada por la propia fuerza.

Si sobre el cuerpo actúan varias fuerzas, por el signo K_z entenderemos, claro está, la suma de los momentos de estas fuerzas. Con ello hay que tener en cuenta el origen vectorial de la magnitud K_z y dotar de signos contrarios a los momentos de las fuerzas que tiendan a hacer girar el cuerpo en sentidos opuestos alrededor del eje. El signo positivo lo tendrán los momentos de las fuerzas que tiendan a hacer girar al cuerpo en el sentido en que se ha establecido contar el ángulo φ de rotación del cuerpo alrededor del eje (φ es el ángulo cuya derivada con respecto al tiempo es la velocidad angular de rotación del cuerpo:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}).$$

Señalemos también que en el sólido, sin variar las propiedades del movimiento, se puede desplazar de cualquier manera el punto de aplicación de la fuerza a lo largo de la dirección en que actúa. Está claro que, en este desplazamiento, no varía el brazo de la fuerza y, por consiguiente, tampoco el momento.

La condición de equilibrio de un cuerpo que puede girar alrededor de un eje consiste, evidentemente, en la igualdad a cero de la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre el mismo. Esta es la llamada *ley de equilibrio*. Un caso particular de esta ley es el conocido principio del brazo de palanca, que establece la condición de equilibrio de la barra que puede girar alrededor de uno de sus puntos.

Hay una relación sencilla entre el momento de la fuerza que actúa sobre el cuerpo y el trabajo realizado por la misma al hacerlo girar. El trabajo producido por la fuerza F al hacer girar el cuerpo alrededor de un eje un ángulo $d\varphi$ infinitamente pequeño (fig. 4), es igual al producto del desplazamiento $ds = r d\varphi$ del punto A de aplicación de la fuerza, por la compo-

nente $F_s = F \sin \theta$ de la fuerza según la dirección del movimiento

$$F_s ds = Fr \sin \theta d\varphi = K_Z d\varphi.$$

Vemos que el momento de la fuerza con respecto al eje coincide con el trabajo por unidad de desplazamiento angular realizado por la misma. Por otro lado, el trabajo invertido en el cuerpo es igual a la pérdida

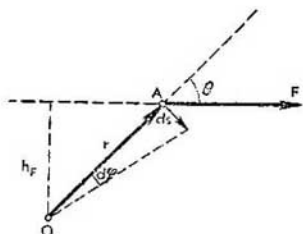


Fig. 4.

de la energía potencial de éste. Por consiguiente se puede escribir que $K_Z d\varphi = -dU$, de donde

$$K_Z = -\frac{dU}{d\varphi}.$$

Por consiguiente, el momento de la fuerza es igual a la derivada de la energía potencial con respecto al ángulo de giro del cuerpo alrededor del eje considerado, tomada con signo contrario. Observemos la analogía entre esta expresión y la fórmula $F = -\frac{dU}{dx}$, que relaciona la propia fuerza con la variación de la energía potencial, al desplazarse un punto material, o en el desplazamiento de traslación del cuerpo.

Es fácil convencerse de que la ecuación del movimiento del cuerpo que gira se halla, como era de esperar, en concordancia con la ley de conservación de la energía. La energía total del cuerpo es

$$E = \frac{I\Omega^2}{2} + U,$$

y su conservación viene expresada mediante la igualdad

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{I\Omega^2}{2} + U \right) = 0.$$

Según la regla de diferenciación de una función de función tenemos que

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -K_z \Omega.$$

La derivada de $\frac{d}{dt} \Omega^2 = 2\Omega \frac{d\Omega}{dt}$. Poniendo estos valores en la expresión anterior y reduciendo el factor común Ω , obtenemos de nuevo la conocida ecuación $\frac{d\Omega}{dt} = K_z$.

Al final del § 15 se dijo que hay relación entre la ley de conservación del momento de la impulsión de un sistema cerrado y la isotropía del espacio. El establecimiento de esta relación se reduce a la demostración de que la reducción a cero de la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan en el sistema, es una consecuencia de la invariabilidad de las propiedades del sistema cerrado en cualquier giro, considerado como un todo (es decir, como si el sistema fuese un cuerpo sólido). Si aplicamos la relación $\frac{dU}{d\varphi} = -K_z$

a la energía potencial interna del sistema, considerando que K_z es el momento total de las fuerzas que actúan sobre todas sus partículas, veremos que la condición de invariabilidad de la energía potencial al girar el sistema cerrado alrededor de cualquier eje, efectivamente expresa igualdad a cero del momento total de las fuerzas.

§ 29. Fuerza resultante

Si sobre un sólido actúan muchas fuerzas, el movimiento del cuerpo depende solamente de la suma de todas las fuerzas y de la suma de sus momentos. Esta circunstancia nos permite a veces sustituir el conjunto de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, por una fuerza, que en tal caso se denomina *resultante*. Está claro que, en magnitud y dirección, la fuerza resultante será igual a la suma de todas las fuerzas, y su punto de aplicación se ha de elegir de manera que su momento sea igual al momento total de todas las fuerzas. El caso más importante de este género es la composición de fuerzas paralelas. En particular, a este caso se refiere la composición de las fuerzas de la gravedad que actúan sobre distintas partes del cuerpo sólido. Determinemos en un cuerpo cualquiera el momento total de las fuerzas de la gravedad con respecto a un eje horizontal arbitrariamente elegido (eje Z en la

fig. 5). La fuerza de la gravedad que actúa sobre el elemento m_i del cuerpo es igual a $m_i g$, y su brazo es la coordenada x_i de este elemento. Por lo tanto, el momento total de todas las fuerzas es

$$K_Z = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + \dots$$

La magnitud de la fuerza resultante será igual al peso total del cuerpo $(m_1 + m_2 + \dots) g$, y si designamos la

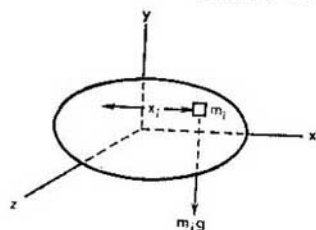


Fig. 5.

coordenada de su punto de aplicación por X , el mismo momento K_Z se escribirá así:

$$K_Z = (m_1 + m_2 + \dots) g X.$$

Igualando las dos expresiones hallamos que

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}.$$

Pero esto es la coordenada x del centro de masas del cuerpo.

De esta manera vemos que todo el conjunto de fuerzas de la gravedad que actúan sobre un cuerpo se puede sustituir por una fuerza igual a su peso total y aplicada a su centro de masas. Debido a ello, el centro de masas del cuerpo frecuentemente se denomina *centro de gravedad*.

Un sistema de fuerzas paralelas no se puede reducir a una fuerza resultante, si la suma de las fuerzas es igual a cero. La acción de tal conjunto de fuerzas se puede reducir al denominado *par de fuerzas*: dos fuerzas de igual magnitud y de sentido opuesto. Es fácil comprender que la suma K_Z de los momentos de estas dos fuerzas con respecto a cualquier eje Z , perpendicular al plano de su acción, es la misma e igual al producto de la magnitud F por la distancia h entre las direcciones de ambas fuerzas (*brazo del par*):

$$K_Z = Fh.$$

La acción del par de fuerzas sobre el movimiento del cuerpo depende solamente de este llamado *momento del par*.

§ 30. Giroscopio

En el § 27 hallamos la proyección L_z del momento de impulsión del cuerpo sobre el eje de rotación. Para el cuerpo que gira alrededor de un eje fijo, es esencial solamente esta proyección del vector L . Su simple relación de dependencia con respecto a la velocidad angular de rotación ($L_z = I\Omega$), conduce a que todo el movimiento tenga también un carácter sencillo. Si el eje de rotación no está fijo, hay que considerar todo el vector L en su dependencia del vector de la velocidad angular Ω . Pero esta dependencia es más compleja: las componentes del vector L son direcciones lineales de las componentes de Ω , pero las direcciones de estos vectores, en general, son distintas. Esta circunstancia complica considerablemente el carácter del movimiento del cuerpo.

Veamos aquí solamente un ejemplo del movimiento del cuerpo de eje de rotación que se orienta libremente, el llamado *giroscopio*, es decir, un cuerpo de simetría axial que gira rápidamente alrededor de su eje geométrico.

En esta rotación, el vector L del momento (lo mismo que el vector Ω de la velocidad angular) estará dirigido según el eje del cuerpo. Esto es evidente sin necesidad de calcularlo, simplemente por consideraciones simétricas: debido al movimiento de simetría axial, no hay ninguna otra dirección elegida en que pueda ser dirigido el vector L .

Mientras sobre el giroscopio no actúe ninguna fuerza exterior, su eje conservará la misma dirección en el espacio: debido a la ley de conservación del momento, la dirección (y la magnitud) del vector L permanecerá invariable. Si al giroscopio le aplicamos fuerzas exteriores, su eje empezará a inclinarse. Este movimiento del giroscopio, que es precisamente el que nos interesa, se denomina *precesión*.

La variación de la dirección del eje del giroscopio representa un giro de éste con respecto a otro eje, de manera que el vector de la velocidad angular total ya no estará dirigido según el eje geométrico del cuerpo. Tampoco coincidirá en este caso con la dirección del mismo eje (ni con la dirección de Ω)

el vector del momento L . No obstante, si la rotación fundamental del giroscopio es bastante rápida y las fuerzas exteriores no muy grandes, la velocidad de rotación del eje del giroscopio será relativamente pequeña y el vector Ω y, con él, el L , casi coincidirán con la dirección del eje del giroscopio. Por eso, sabiendo cómo varía el vector L , sabremos cómo se mueve aproximadamente el eje del giroscopio. La variación del momento se determina mediante la ecuación

$$\frac{dL}{dt} = K,$$

donde K es el momento de las fuerzas aplicadas al cuerpo.

Supongamos, por ejemplo, que a los extremos del eje del giroscopio (eje z en la fig. 6) se aplica un par de fuerzas F actuando en el plano yz . Entonces, el

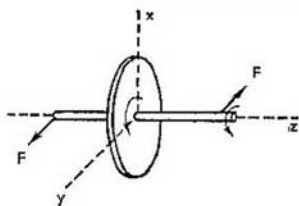


Fig. 6.

momento K del par estará dirigido según el eje x y en el mismo sentido estará dirigida la derivada dL/dt . En otras palabras, el momento L y, con él, el eje del giroscopio se inclinarán hacia el lado del eje x .

De esta manera tenemos que la aplicación al giroscopio de una fuerza origina un giro de su eje en la dirección perpendicular a la de la fuerza.

Un ejemplo de giroscopio es el trompo o la peonza apoyado en un punto, el inferior. (En los razonamientos que siguen se ha despreciado el rozamiento del trompo en el punto de apoyo.) El trompo está solicitado por la fuerza de la gravedad, que es de sentido constante: vertical hacia abajo. Esta fuerza es igual al peso del trompo $P=Mg$ (M es la masa del cuerpo) y está aplicada en el centro de gravedad del trompo (punto C en la fig. 7). La magnitud de su momento con respecto al punto O de apoyo es $K=Pl \sin \theta$ (siendo l la distancia OC y θ , el ángulo entre el eje de la

peonza y la vertical) y la dirección es siempre perpendicular al plano que pasa por el eje del trompo y por la vertical. Bajo la acción de este momento, el vector L (y con él el eje del trompo) girará conservando constante su magnitud y el ángulo θ que forma con la vertical, es decir, describiendo un cono alrededor de esta dirección.

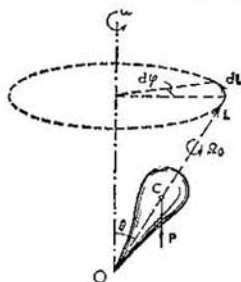


Fig. 7.

Es fácil determinar la velocidad angular de la precesión del trompo. Designémosla por ω para diferenciarla de la velocidad angular de la rotación propia del trompo alrededor de su eje, que designaremos por Ω_0 .

En el intervalo de tiempo dt infinitamente pequeño, el vector L adquiere un incremento perpendicular a sí mismo $dL = K dt$, que se halla en el plano horizontal. Dividiéndolo por la magnitud de la proyección del vector L sobre este plano, obtenemos el ángulo $d\varphi$, que gira esta proyección en el tiempo dt :

$$d\varphi = \frac{K}{L \operatorname{sen} \theta} dt.$$

La derivada $d\varphi/dt$ es, evidentemente, la buscada velocidad angular de la precesión. De esta manera,

$$\omega = \frac{K}{L \operatorname{sen} \theta}.$$

Colocando aquí los valores $K = Mgl \operatorname{sen} \theta$ y $L = I\Omega_0$ (donde I es el momento de inercia del trompo con respecto a su eje), obtenemos definitivamente

$$\omega = \frac{Mgl}{I\Omega_0}.$$

Recordamos que la rotación del trompo se efectúa con

bastante rapidez. Ahora podemos puntualizar esta condición: debe efectuarse que $\Omega_0 \gg \omega$. Como

$$\frac{\omega}{\Omega_0} = \frac{Mgl}{I\Omega_0^2}.$$

vemos que la condición indicada significa que la energía potencial del trompo en el campo de la gravedad ($Mgl \cos \theta$) debe ser pequeña en comparación con su energía cinética ($1/2 I\Omega^2$).

§ 31.

Fuerzas de inercia

Hasta ahora hemos estudiado el movimiento de los cuerpos con respecto a los sistemas inerciales de referencia. Solamente en el § 23 se ha hablado de un sistema de referencia que efectúa un movimiento de traslación acelerado (cohete que se desplaza con aceleración). Hemos comprobado que, desde el punto de vista del observador que se mueve junto con el cohete, el sistema de referencia acelerado (no inercial) se percibe como el surgimiento de un campo de fuerzas equivalente a un campo uniforme de gravedad. Estas fuerzas complementarias que surgen en los sistemas de referencia acelerados se denominan *fuerzas de inercia*. Su propiedad característica común es la proporcionalidad a la masa del cuerpo sobre que actúan. Precisamente esta propiedad las hace análogas a las fuerzas de gravitación.

Veamos ahora cómo transcurre el movimiento con respecto a un sistema de referencia giratorio y qué fuerzas de inercia aparecen aquí. Este sistema de referencia es, por ejemplo, la propia Tierra. Debido a la rotación diaria de la Tierra, el sistema de referencia ligado a ella, rigurosamente hablando, es acelerado, aunque las fuerzas de inercia que surgen son relativamente pequeñas por la lenta rotación de la Tierra.

Para simplificar supongamos que el sistema de referencia es un disco que gira uniformemente (a la velocidad angular de Ω) y veamos el movimiento más simple efectuado sobre el disco: el de una partícula que se desplaza uniformemente según el borde del disco. Designemos la velocidad de esta partícula con respecto al disco por v_{ac} . (el subíndice «ac» indica que el sistema de referencia es acelerado). La velocidad de esta misma partícula con respecto al observador inmóvil (sistema de referencia inercial) v_i será igual, evidentemente, a la suma de v_{ac} . y

de la velocidad de los puntos del borde del propio disco. Esta última es igual a Ωr , donde r es el radio del disco. Por eso,

$$v_i = v_{ac.} + \Omega r.$$

Es fácil determinar la aceleración ω_i de la partícula con respecto al sistema de referencia inercial. Como la partícula se desplaza uniformemente según la circunferencia de radio r a la velocidad v_i , tendremos que

$$\omega_i = \frac{v_i^2}{r} = \frac{v_{ac.}^2}{r} + 2\Omega v_{ac.} + \Omega^2 r.$$

Multiplicando esta aceleración por la masa m de la partícula, hallamos la fuerza F que actúa sobre la partícula en el sistema inercial de referencia,

$$F = m\omega_i.$$

Veamos ahora cómo considerará este movimiento el observador que se halla en el disco y que lo considera inmóvil. Para él, la partícula también se mueve uniformemente por la circunferencia de radio r , pero su velocidad es igual a $v_{ac.}$. Por eso, la aceleración de la partícula con respecto al disco será

$$\omega_{ac.} = \frac{v_{ac.}^2}{r}$$

y estará dirigida hacia el centro del disco. Considerando el disco inmóvil, el observador multiplicará $\omega_{ac.}$ por la masa de la partícula y dirá que este producto es la fuerza $F_{ac.}$, que actúa sobre la partícula.

$$F_{ac.} = m\omega_{ac.}$$

Observando que

$$\omega_{ac.} = \omega_i - 2\Omega v_{ac.} - \Omega^2 r,$$

y teniendo en cuenta que $m\omega_i = F$, obtenemos que

$$F_{ac.} = F - 2m\Omega v_{ac.} - m\Omega^2 r.$$

De esta manera vemos que, con respecto a un sistema de referencia giratorio sobre la partícula, además de la «verdadera» fuerza F , actuarán dos fuerzas complementarias: $-m\Omega^2 r$ y $-2m\Omega v_{ac.}$. La primera de estas fuerzas de inercia se denomina *centrífuga*, y la segunda, *fuerza de Coriolis*. Los signos negativos indican que, en el caso considerado, estas dos fuerzas están dirigidas en el sentido contrario adonde se halla el eje de rotación del disco.

La fuerza centrífuga no depende de la velocidad $v_{ac.}$, es decir, existe, incluso cuando la partícula está inmóvil con respecto al disco. Para la partícula que se halla a la distancia r del eje de rotación del sistema de referencia, esta fuerza siempre será igual a $m\Omega^2 r$ y estará dirigida según el radio y en sentido opuesto adonde se halla el eje de rotación.

Al introducir el concepto de fuerza centrífuga, podemos introducir también el de *energía centrífuga* como el de energía potencial de la partícula en el campo de las fuerzas centrífugas. Según la fórmula general que relaciona la fuerza con la energía potencial, tenemos que

$$-\frac{dU_{centrif.}}{dr} = m\Omega^2 r,$$

de donde

$$U_{centrif} = -\frac{m\Omega^2 r^2}{2} + \text{const.}$$

Es natural elegir la constante de integración igual a cero, es decir, considerar la energía potencial a partir del valor en el eje de rotación ($r=0$), donde la fuerza centrífuga es igual a cero.

La fuerza centrífuga puede alcanzar enormes valores en las centrifugadoras especiales. Pero en la Tierra es insignificante. La mayor está en el ecuador, donde, para la partícula de masa igual a 1 g, es

$$m\Omega^2 R = 1 \cdot \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}\right)^2 \cdot 6,3 \cdot 10^8 \text{ dinas} = 3,3 \text{ dinas}$$

($R=6,3 \cdot 10^8$ cm es el radio de la Tierra). Esta fuerza disminuye el peso del cuerpo en 3,3 dinas por cada gramo, o sea, aproximadamente en 0,3 % del peso del cuerpo.

La segunda fuerza de inercia, la fuerza de Coriolis, por su carácter se diferencia marcadamente de todas las fuerzas que hemos tratado hasta ahora. Solamente actúa sobre la partícula que se mueve con respecto al sistema de referencia considerado y depende de la velocidad de este movimiento. Al mismo tiempo, esta fuerza resulta que no depende de la posición de la partícula con respecto al sistema de referencia. En el ejemplo examinado más arriba, la magnitud de esta fuerza es $2m\Omega v_{ac.}$ y va dirigida desde el eje de giro del disco hacia fuera. Se puede demostrar que, en el caso general, la fuerza de inercia de Coriolis que actúa sobre una partícula que se desplaza a

cualquier velocidad v_{ac} , con respecto a un sistema giratorio de referencia, cuya velocidad angular sea Ω , es igual a

$$2m [v_{ac} \Omega].$$

En otras palabras, es perpendicular al eje de rotación y a la velocidad de la partícula y de magnitud igual a $2mv_{ac}\Omega \sin \theta$, donde θ es el ángulo entre v_{ac} , y Ω . Al variar el sentido de la velocidad v_{ac} , por el contrario, cambia también el sentido de la fuerza de Coriolis por el opuesto.

Como la fuerza de Coriolis siempre es perpendicular a la dirección del movimiento de la partícula, no realiza ningún trabajo con ella. En otras palabras, solamente desvía la dirección del movimiento de la partícula, pero no varía la magnitud de su velocidad. Aunque la fuerza de Coriolis que actúa en la Tierra es generalmente muy pequeña, acarrea ciertos efectos específicos. Debido a esta fuerza, el cuerpo que cae libremente no lo hace exactamente según la vertical, sino que se desvía un poco hacia oriente. No obstante, esta desviación es muy insignificante. El cálculo demuestra, por ejemplo, que la desviación, al caer un cuerpo desde una altura de 100 m (a la latitud de 60°), es aproximadamente de 1 cm.

Con la fuerza de Coriolis está relacionado el comportamiento del *péndulo de Foucault*, que en su tiempo fue una de las demostraciones de la rotación de la Tierra. Si no existiera la fuerza de Coriolis, el plano de oscilación del péndulo que oscila junto a la superficie de la Tierra, permanecería invariable (con respecto a la Tierra). La acción de esta fuerza produce una rotación del plano de oscilación alrededor de la vertical a una velocidad angular igual a $\Omega \sin \varphi$, donde Ω es la velocidad angular de rotación de la Tierra y φ , la latitud del lugar de suspensión del péndulo. La fuerza de Coriolis desempeña un papel importante en los fenómenos meteorológicos. Por ejemplo, los alisios, vientos que soplan de los trópicos al ecuador, si la Tierra no girase, deberían desplazarse estrictamente de norte a sur (en el hemisferio septentrional) o de sur a norte (en el meridional); pero debido a la acción de la fuerza de Coriolis se desvían hacia el occidente.

§ 32. Movimiento armónico

En el § 13 hemos visto que el movimiento unidimensional de una partícula en un pozo de potencial es periódico, es decir, se repite a iguales intervalos de tiempo. Este intervalo de tiempo que tarda en volver a repetirse el movimiento, se denomina *período* del movimiento. Si T es el período del movimiento, en los instantes t y $t+T$, la partícula ocupa una misma posición y posee la misma velocidad.

La magnitud inversa del período se denomina *frecuencia*. La frecuencia, que designaremos por ν ,

$$\nu = \frac{1}{T},$$

determina cuántas veces por segundo se repite el movimiento. Las dimensiones de esta magnitud, evidentemente, serán 1/s. La unidad de medición de la frecuencia correspondiente a un período de 1 s., se denomina hertz (Hz) o ciclo por segundo (c/s): $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

Está claro que existe infinidad de clases de movimientos periódicos. Las funciones periódicas más sencillas son las trigonométricas del seno y del coseno. Por eso, el movimiento periódico más simple será el movimiento en que las coordenadas del punto material varíen según la ley

$$x = A \cos(\omega t + \alpha),$$

donde A , ω y α son determinadas magnitudes constantes. Este movimiento periódico se denomina *movimiento oscilatorio armónico*.

El sentido físico de las magnitudes A y ω es elemental. Como el período del coseno es igual a 2π , el período T del movimiento se relaciona con ω mediante la ecuación

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

De aquí se ve que ω se diferencia de la frecuencia ν en el factor 2π :

$$\omega = 2\pi\nu.$$

La magnitud ω se denomina *frecuencia angular* (*circular*) o *pulsación*. En Física, para caracterizar las oscilaciones se utiliza generalmente esta magnitud y suele llamarse simplemente frecuencia.

Como el valor máximo del coseno es la unidad, el valor máximo de la coordenada x será A . Este valor máximo se denomina *amplitud* de la oscilación. La magnitud x varía entre los límites desde $-A$ hasta A .

El argumento del coseno, $\omega t + \alpha$, se denomina *fase* de la oscilación siendo α la *fase inicial* (en el momento $t=0$).

La velocidad de la partícula es

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \alpha).$$

Vemos que la velocidad también varía según una ley armónica, pero que en lugar del coseno tenemos el seno. Escribiendo esta expresión de la forma siguiente

$$v = A\omega \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

podemos decir que la variación de la velocidad «adelanta (avanza) en fase» a la variación de la coordenada en la magnitud $\frac{\pi}{2}$. Mientras que la amplitud de la velocidad es igual a la del desplazamiento multiplicada por la frecuencia ω .

Determinemos ahora cuál debe ser la fuerza que actúa sobre la partícula, para que ésta efectúe un movimiento oscilatorio armónico. Para ello hallemos la aceleración de la partícula en este movimiento:

$$w = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

Esta magnitud varía según la misma ley que la coordenada de la partícula, pero con una diferencia π de fase. Multiplicando w por la masa de la partícula m y observando que $A \cos(\omega t + \alpha) = x$, nos da la siguiente expresión de la fuerza:

$$F = -m\omega^2 x.$$

De esta manera, para que la partícula realice oscilaciones armónicas, la fuerza que actúa sobre ella, debe ser proporcional al desplazamiento de la partícula y debe estar dirigida en sentido opuesto a este desplazamiento. Un ejemplo simple es el siguiente: la fuerza que actúa sobre un cuerpo por parte de un resor-

te extendido (contraído) es proporcional al alargamiento (o contracción) de éste y siempre estará dirigida de manera que el resorte tienda a recobrar su longitud normal. Esta fuerza se denomina fuerza de *restitución o recuperadora*.

Esta dependencia de la fuerza con respecto a la posición de una partícula de esta naturaleza, se encuentra frecuentemente en los problemas físicos. Si cualquier cuerpo se halla en una posición de equilibrio estable (supongamos que sea en el punto $x=0$) y lo desplazamos un poco de esta posición a uno u otro lado, surge una fuerza F que tiende a restituir el cuerpo a su posición de equilibrio. Como función de la posición x del cuerpo, la fuerza $F=F(x)$ se representará por cierta curva que corte el origen de coordenadas: en el punto $x=0$, la fuerza $F=0$, y a ambos lados de este punto, la fuerza tendrá signos opuestos. En un pequeño intervalo de valores x , esta curva puede representarse aproximadamente como un segmento de recta, de modo que la fuerza resulte proporcional a la magnitud del desplazamiento x . Así, si el cuerpo ha sufrido una pequeña desviación con respecto a la posición de equilibrio y después se le ha dejado a su libre albedrío, al volver a la posición de equilibrio se produce un movimiento de oscilación armónica.

Los movimientos en que el cuerpo se desplaza poco con respecto a la posición de equilibrio, se denominan *oscilaciones pequeñas*. Como se ve, estas pequeñas oscilaciones son movimientos armónicos. La frecuencia de estas oscilaciones viene determinada por la rigidez de fijación del cuerpo, la cual caracteriza la relación entre la fuerza y el desplazamiento. Si la fuerza se relaciona con el desplazamiento mediante la relación

$$F = -kx,$$

donde k es un coeficiente denominado *rigidez*, comparando esta expresión con la de la fuerza del movimiento oscilatorio armónico, $F = -m \omega^2 x$, vemos que la frecuencia de la oscilación es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Recalquemos que la frecuencia resulta depender sólo de las propiedades del sistema oscilatorio (de la rigidez de fijación del cuerpo y de la masa del mismo), pero no de la amplitud de la oscilación. Un mismo cuerpo, realizando oscilaciones de diferente amplitud,

las hace con la misma frecuencia (oscilaciones isócronas). Esta es una propiedad muy importante de las oscilaciones pequeñas. Por el contrario, la amplitud de las oscilaciones no viene determinada por las propiedades del mismo sistema, sino por las condiciones iniciales de su movimiento, es decir, del «empujón» inicial que ha sacado al sistema del estado de equilibrio. Las oscilaciones de un sistema que después de recibir un impulso inicial se abandona a sí mismo, se denominan *oscilaciones propias*.

Es fácil hallar la energía potencial de la partícula oscilante, observando que

$$\frac{dU}{dx} = -F = kx.$$

De aquí que

$$U = \frac{kx^2}{2} + \text{const.}$$

Eligiendo la constante de manera que la energía potencial sea igual a cero en la posición de equilibrio ($x=0$), obtenemos definitivamente

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

es decir, la energía potencial es proporcional al cuadrado del desplazamiento de la partícula.

Sumando las energías potencial y cinética hallamos la energía total de la partícula oscilante

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2(\omega t + \alpha),$$

o sea,

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

Por consiguiente, la energía total es proporcional al cuadrado de la amplitud de oscilación. Obsérvenos que las energías cinética y potencial varían según $\sin^2(\omega t + \alpha)$ y $\cos^2(\omega t + \alpha)$ respectivamente, así que, cuando una aumenta, la otra disminuye. En otras palabras, el proceso de la oscilación está relacionado con el paso periódico de la energía potencial a cinética y viceversa. El valor medio (por período de oscilación) de las energías potencial y cinética es el mismo e igual cada uno de ellos a $E/2$.

§ 33.

Péndulo

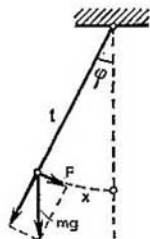


Fig. 1.

Como ejemplo de pequeñas oscilaciones veamos las del *péndulo simple*, punto material suspendido de un hilo en el campo de gravedad de la Tierra.

Desviemos el péndulo de la posición de equilibrio un ángulo φ y determinemos la fuerza que en este caso actúa sobre el péndulo. La fuerza total que actúa sobre el péndulo será mg , donde m es la masa del péndulo y g la aceleración de la gravedad. Descompongamos esta fuerza en dos (fig. 1): una a lo largo del hilo y la otra perpendicular al mismo. La primera compensa la tensión del hilo y la segunda origina el movimiento del péndulo. Esta componente será, sin duda,

$$F = -mg \operatorname{sen} \varphi.$$

En el caso de pequeñas oscilaciones, el ángulo φ es pequeño, y se puede considerar que $\operatorname{sen} \varphi$ es igual aproximadamente al propio ángulo φ , de manera que $F \approx -mg\varphi$. Observando que $l\varphi$ (donde l es la longitud del péndulo) es el camino x recorrido por el punto material, escribiremos

$$F = -\frac{mg}{l} x.$$

De aquí se ve que la rigidez, en el caso de pequeñas oscilaciones del péndulo, es $k=mg/l$. Por eso la frecuencia angular del péndulo será

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

El período de las oscilaciones del péndulo será

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Señalemos que la longitud del péndulo de período $T=1$ s (para el valor estándar de la aceleración de la gravedad, V. la pág. 73) es $l=24,8$ cm.

El período del péndulo en función de la longitud del mismo y de la aceleración de la fuerza de gravedad se puede determinar simplemente por las unidades dimensionales. Disponemos de las magnitudes m , l , g , que caracterizan al sistema mecánico considerado, cuyas dimensiones son

$$[m] = g, \quad [l] = \text{cm}, \quad [g] = \text{cm/s}^2.$$

El período T puede depender solamente de estas magnitudes. Como de todas estas magnitudes la dimensión

de g la contiene solamente m , mientras que la dimensión de la magnitud buscada $\{T\}=\text{s}$ no contiene g , está claro que T no puede depender de m . De las dos magnitudes restantes, l y g , se puede excluir la dimensión cm (que T no contiene) haciendo l/g . Por último, extrayendo la raíz $\sqrt{l/g}$, obtenemos la magnitud de dimensión s . Hay que tener en cuenta que de los razonamientos indicados está claro que este es el único método de formar esta magnitud. Por eso podemos afirmar que el período T debe ser proporcional a $\sqrt{l/g}$. Claro está que con este método no se puede determinar el coeficiente de proporcionalidad.

Hasta ahora hemos hablado de oscilaciones pequeñas como oscilaciones de un punto material; pero los resultados obtenidos, en realidad, corresponden también a oscilaciones de sistemas más complejos.

Como ejemplo veamos las oscilaciones de un cuerpo sólido que, solicitado por la fuerza de la gravedad, pueda girar alrededor de un eje horizontal. Este cuerpo se denomina *péndulo compuesto* o *físico*.

En el § 28 hemos visto que las leyes del movimiento de un cuerpo que gira, formalmente no se diferencian de las leyes del movimiento del punto material, teniendo en cuenta que el papel de coordenada x lo desempeña el ángulo φ de rotación del cuerpo; el papel de la masa, el momento de inercia I (con respecto al eje de rotación), y en lugar de la fuerza F hay que hablar del momento de la fuerza K_z .

En este caso, el momento de la fuerza de la gravedad con respecto al eje de rotación (de suspensión) es $K_z = -mga \sin \varphi$, donde m es la masa del cuerpo; a , la distancia del centro de gravedad C al eje de rotación (que pasa por el punto O perpendicularmente al plano del dibujo de la fig. 2); φ , el ángulo de inclinación de la línea OC con respecto a la vertical; y el signo menos indica que el momento K_z tiende a disminuir el ángulo φ . A pequeñas oscilaciones, el ángulo φ es pequeño, así que $K_z \approx -mga \varphi$. Comparando esta expresión con la de la fuerza recuperadora, $F = -kx$, de las oscilaciones de un punto material, vemos que el papel de la rigidez k lo desempeña la magnitud mga . Por consiguiente, por analogía con la fórmula $\omega = \sqrt{k/m}$ se puede escribir la siguiente expresión de la frecuencia angular del péndulo compuesto:

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}}$$

Comparando esta expresión con la fórmula de la frecuencia angular del péndulo simple ($\omega = \sqrt{g/l}$), vemos que las propiedades del movimiento del péndulo compuesto coinciden con las del movimiento del péndulo simple de longitud

$$l = \frac{I}{ma}.$$

Esta magnitud se denomina *longitud equivalente* del péndulo compuesto o longitud del péndulo (simple) sincrónico del (péndulo) compuesto.

Escribiendo $I = I_0 + ma^2$ (donde I_0 es el momento de inercia del péndulo con respecto al eje horizontal que pasa por el centro de gravedad), representare-

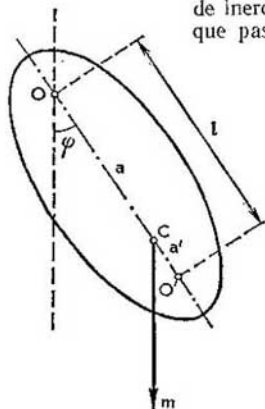


Fig. 2.

mos la longitud equivalente de la siguiente forma:

$$l = a + \frac{I_0}{ma}.$$

De esta expresión se puede sacar la interesante conclusión siguiente. Marquemos en la recta OC (fig. 2) el segmento $OO' = l$. Supongamos ahora que el péndulo se suspende del eje que pasa por O' . La longitud equivalente del péndulo obtenido de esta manera será

$$l' = a' + \frac{I_0}{ma'}.$$

Pero $a' = l - a = I_0/ma$, por consiguiente, $l' = l$. De esta manera tenemos que las longitudes equivalentes y, por lo tanto, los períodos de oscilación de los péndulos suspendidos de los ejes que se hallen entre sí a la distancia l , son iguales.

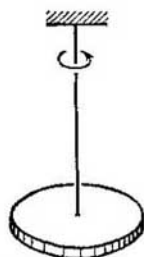


Fig. 3.

Veamos por último el *péndulo de torsión* (vibraciones torsionales u oscilaciones de torsión de un disco suspendido de un hilo elástico flexible a la torsión) (fig. 3). El momento de las fuerzas de elasticidad que surgen al torcer el hilo y que tienden a restituir el disco a la posición inicial, es proporcional al ángulo φ de torsión del disco: $K_z = -k\varphi$, donde k es un coeficiente constante que depende de las propiedades del hilo. Si el momento de inercia del disco (con respecto a su centro) es igual a I_a , la frecuencia angular será

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I_a}}.$$

§ 34. Oscilaciones amortiguadas

Hasta ahora hemos estudiado el movimiento de los cuerpos (incluidas las oscilaciones) como si se realizasen sin obstáculo alguno. Sin embargo, si el movimiento se realiza en un medio cualquiera, éste ofrecerá cierta resistencia al movimiento, tendiendo a frenarlo. La interacción del cuerpo con el medio es un proceso complejo que, al fin y al cabo, se reduce a la transformación de la energía del cuerpo en movimiento, en calor, o, como se dice en Física, en *dissipación de la energía*. Este proceso ya no es puramente mecánico y su estudio minucioso exige el auxilio de otras partes de la Física. Desde el punto de vista mecánico se puede describir introduciendo una fuerza complementaria que surge como resultado del propio movimiento y va dirigida en sentido opuesto al movimiento. Esta fuerza se denomina *fuerza de rozamiento*. A velocidades suficientemente pequeñas, esta fuerza es proporcional a la velocidad del cuerpo,

$$F_r = -bv,$$

donde b es una constante positiva que caracteriza la interacción del cuerpo con el medio, y el signo «menos» indica que la fuerza tiene sentido contrario al de la velocidad.

Aclaremos cómo influye el rozamiento en el movimiento oscilatorio. Para ello consideraremos que la fuerza de rozamiento es tan pequeña, que la pérdida de energía del cuerpo (durante un período de la oscilación) originada por ella es relativamente pequeña.

La pérdida de energía del cuerpo será el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento. En el tiempo dt , este trabajo, y la pérdida de la energía dE , es igual al producto de la fuerza F_r por el desplazamiento del cuerpo, $dx = v dt$:

$$dE = F_r dx = -bv^2 dt,$$

de donde

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2 = -\frac{2b}{m} \frac{mv^2}{2}.$$

En nuestra suposición de que la fuerza de rozamiento es pequeña, podemos aplicar esta fórmula a la pérdida media de energía durante un periodo, sustituyendo también en este caso la energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$, por su valor medio. Pero en el § 32 hemos visto que el valor medio de la energía cinética de un cuerpo que oscila, es igual a la mitad de su energía total E . Por consiguiente se puede escribir

$$\frac{dE}{dt} = -2\gamma E,$$

donde $\gamma = b/2m$. Así vemos que la velocidad de disminución de la energía es proporcional a la propia energía.

Escribiendo esta relación de la siguiente manera

$$\frac{dE}{E} = d(\ln E) = -2\gamma dt,$$

hallamos que $\ln E = -2\gamma t + \text{const}$, de donde, definitivamente,

$$E = E_0 e^{-2\gamma t},$$

donde E_0 es el valor de la energía en el momento inicial ($t=0$).

Así tenemos que la energía de la oscilación disminuye, debido al rozamiento, según una ley exponencial. Junto con la energía disminuye la amplitud de oscilación A . Como la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, tendremos que

$$A = A_0 e^{-\gamma t}.$$

La magnitud γ determina el grado de disminución de la amplitud y se denomina *constante* (factor o coeficiente) *de amortiguamiento*. En el tiempo $\tau = 1/\gamma$, la amplitud disminuye e veces. Este tiempo se denomina (tiempo de) *duración* de las oscilaciones. La

suposición hecha más arriba de que la fuerza de rozamiento es pequeña, significa que τ se supone grande en comparación con el período $T=2\pi/\omega$ de oscilaciones, es decir, en este tiempo se produce un gran número, $n=\tau/T$, de oscilaciones. La magnitud inversa de n , se denomina *decremento* o *decrecimiento logarítmico* de la oscilación.

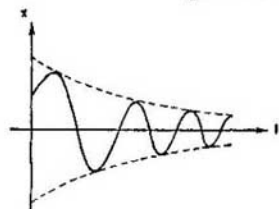


Fig. 4.

En la fig. 4 se representa el gráfico de la dependencia del desplazamiento con respecto al tiempo de las oscilaciones amortiguadas

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha).$$

La línea de trazos representa el amortiguamiento de la amplitud.

El rozamiento también influye en la frecuencia de las oscilaciones, puesto que al frenar el movimiento, aumenta el período, es decir, disminuye la frecuencia de las oscilaciones. Sin embargo, si el rozamiento es pequeño, esta variación es muy pequeña (por eso arriba no la hemos tenido en cuenta). Se puede demostrar que la variación relativa de la frecuencia es proporcional al cuadrado de la pequeña relación γ/ω . Y viceversa, si el rozamiento es grande, el movimiento se frena de manera tan considerable, que el amortiguamiento se produce sin oscilación, y, como se dice, hay *sobreamortiguamiento* o que el amortiguamiento es *aperiódico*.

§ 35. Oscilaciones forzadas

En todo sistema oscilatorio real siempre se producen unos u otros procesos de rozamiento. Por eso, las oscilaciones libres que surgen en el sistema bajo la acción de la impulsión inicial, se amortiguan con el tiempo.

Para producir en un sistema oscilaciones no amortiguadas, hay que compensarle la pérdida de energía debida al rozamiento. Esta compensación se puede

realizar mediante fuentes externas (en relación con el sistema oscilatorio) de energía. El caso más simple es cuando sobre el sistema actúa una fuerza alterna externa F_{ext} , que varía con el tiempo según la siguiente ley armónica

$$F_{\text{ext.}} = F_0 \cos \omega t$$

de frecuencia ω (para diferenciarla de esta frecuencia, designaremos la frecuencia angular de las oscilaciones propias por ω_0). Solicitadas por esta fuerza, en el sistema surgen oscilaciones al compás de la variación de la fuerza. Estas oscilaciones se denominan *forzadas*. En este caso, el movimiento del sistema representará, estrictamente hablando, una superposición de ambas oscilaciones: propias, de frecuencia ω_0 y forzadas, de frecuencia ω .

Nosotros ya hemos estudiado las oscilaciones libres. Veamos ahora las oscilaciones forzadas y determinemos su amplitud. Escribamos estas oscilaciones de la siguiente manera

$$x = B \cos (\omega t - \beta),$$

donde B es la amplitud y β , un desfase, por ahora desconocido, entre la fuerza externa, denominada fuerza impulsante, y las oscilaciones originadas por la misma. Hemos escrito β con el signo menos, es decir, como retardo en fase, porque, como veremos más abajo, así es efectivamente.

La aceleración ω del cuerpo que realiza oscilaciones forzadas, viene determinada por la acción simultánea de tres fuerzas: fuerza recuperadora, $-kx$; fuerza externa, F_{ext} ; y fuerza de rozamiento $F_r = -bv$. Por eso,

$$m\omega = -kx - bv + F_{\text{ext.}}$$

Dividiendo esta ecuación por la masa m , recordando que $k/m = \omega_0^2$, y designando de nuevo $b/m = 2\gamma$, la escribiremos así:

$$\omega = -\omega_0^2 x - 2\gamma v + \frac{1}{m} F_{\text{ext.}}$$

Utilicemos ahora un método gráfico muy cómodo de representación de las oscilaciones basado en que la magnitud $x = B \cos \varphi$ (donde φ es la fase de la oscilación) se puede considerar geoméricamente (en un dibujo auxiliar, *diagrama vectorial*) como la proyección, sobre el eje horizontal, de un radio vector de

longitud B y que forma con el eje el ángulo φ . Para evitar incompreensiones subrayamos que estos «vectores» no tienen nada que ver con el concepto de vector como magnitud física.

Cada término de esta igualdad representa una magnitud que varía periódicamente con la misma frecuencia ω , pero con distintas diferencias de fase. Veamos, por ejemplo, el instante $t=0$, cuando la fase de la fuerza externa, $F_{\text{ext.}} = F_0 \cos \omega t$, es igual a cero, de manera que la magnitud $F_{\text{ext.}}/m$ se representa por

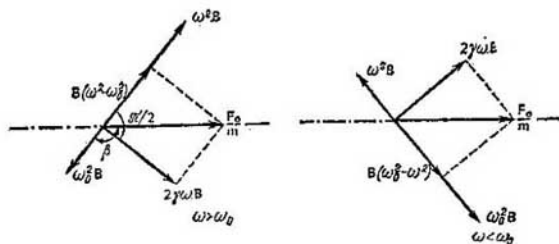


Fig. 5.

un vector horizontal de longitud F_0/m (fig. 5). La magnitud $\omega_0^2 x = \omega_0^2 B \cos(\omega t - \beta)$ oscilará con un retraso de fase de β , y se representará por un vector de longitud $\omega_0^2 B$, que ha girado un ángulo β (contra las agujas del reloj) con respecto al vector de la fuerza. La aceleración ω (como hemos visto en el § 32) tiene una amplitud $\omega^2 B$ y es de signo contrario al de la coordenada x ; por eso, en este gráfico se representa por un vector opuesto a x . Por último, la velocidad v tiene una amplitud ωB y adelanta a x en un ángulo $\pi/2$ de fase; la magnitud $2\gamma v$ se representa por un vector de longitud igual a $2\gamma\omega B$, perpendicular al vector x .

Según la igualdad

$$\frac{F_{\text{ext.}}}{m} = \omega + \omega_0^2 x - 2\gamma v,$$

la oscilación de la magnitud $F_{\text{ext.}}/m$ debe coincidir con la suma de las oscilaciones de los tres términos de la derecha de la igualdad. En nuestro gráfico esto expresa que la suma de las proyecciones horizontales de los tres últimos vectores debe coincidir con F_0/m . Para ello, evidentemente, la suma vectorial de estos tres vectores debe ser igual al vector $F_{\text{ext.}}/m$. En el dibujo (en el cual se han representado por se-

parado los casos $\omega > \omega_0$ y $\omega < \omega_0$ se ve que esta igualdad se cumple, si

$$(2\gamma\omega B)^2 + B^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2.$$

De donde hallamos la amplitud buscada de las oscilaciones

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

De los mismos gráficos se puede determinar la diferencia de fase β . No vamos a exponer aquí las correspondientes expresiones y solamente señalaremos que el ángulo de retardo de las oscilaciones de x con respecto a la fuerza impulsante es agudo u obtuso, respectivamente, cuando $\omega < \omega_0$ u $\omega > \omega_0$.

Vemos que la amplitud de las oscilaciones forzadas es proporcional a la amplitud de la fuerza impulsante F_0 y depende considerablemente de la relación entre la frecuencia de esta fuerza, ω , y la frecuencia propia del sistema, ω_0 . Si el amortiguamiento γ es pequeño, la amplitud de las oscilaciones alcanza el valor máximo aproximadamente cuando coinciden las frecuencias ω y ω_0 , o sea, en la denominada *resonancia*. Este valor máximo es

$$B_{\text{máx.}} = \frac{F_0}{2m\omega_0\gamma}.$$

Este valor es inversamente proporcional a la constante de amortiguamiento γ . Por esta causa, en la resonancia no hay que despreciar el rozamiento del sistema, incluso si es muy pequeño.

Es interesante comparar el valor de $B_{\text{máx.}}$ con el desplazamiento que sufriría el cuerpo solicitado por una fuerza constante (estática) igual a F_0 . Este desplazamiento (designémoslo por $B_{\text{est.}}$) se puede obtener de la fórmula general de B suponiendo que $\omega = 0$: $B_{\text{e. t.}} = F_0/m\omega_0^2$. La relación entre el desplazamiento de resonancia y el estático es

$$\frac{B_{\text{máx.}}}{B_{\text{est.}}} = \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

Así vemos que el aumento relativo de la amplitud de las oscilaciones en la resonancia (con respecto al desplazamiento estático) viene determinado por la relación entre la frecuencia de las oscilaciones pro-

pías y la constante de amortiguamiento. Para los sistemas de débil amortiguamiento esta relación puede ser muy grande. Esto explica el enorme valor del fenómeno de resonancia en la Física y en la técnica. Se utiliza ampliamente, si se quiere ampliar la oscilación, y se hace todo lo posible por evitarlo, si la resonancia puede originar un aumento indeseable de las oscilaciones.

El origen de la ampliación de resonancia de las oscilaciones se puede explicar, si prestamos atención a la correlación entre las fases de la fuerza impulsante F_{ext} y de la velocidad v . Si $\omega \neq \omega_0$, entre ellas hay determinada diferencia. Por eso, durante cierto intervalo de tiempo de cada periodo, la fuerza E_{ext} tiene sentido opuesto al de la velocidad, es decir,

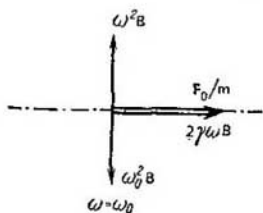


Fig. 6.

como tendiendo a frenar el movimiento, en lugar de acelerarlo. Mientras que en la resonancia, las fases de la fuerza y de la velocidad coinciden (V. el diagrama vectorial de la fig. 6), de manera que la fuerza siempre actúa en el sentido del movimiento «empujándolo» continuamente.

Cerca de la resonancia, es decir, cuando la diferencia $|\omega - \omega_0|$ es pequeña en comparación con la frecuencia de resonancia ω_0 , la fórmula de la amplitud de las oscilaciones forzadas puede representarse de una manera más simple. Escribiendo en el numerador $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)$, podemos sustituir la suma $\omega + \omega_0$ por su valor aproximado de $2\omega_0$, y ω por ω_0 en el término $4\gamma^2\omega^2$. Con lo cual obtenemos que

$$B = \frac{F_0}{2m\omega_0 \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}}$$

Esta fórmula se puede escribir así:

$$B = \frac{B_{\text{máx.}} \gamma}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}}$$

donde $B_{\text{máx.}} = \frac{F_0}{2m\omega_0\gamma}$ es el valor máximo de la amplitud en la resonancia.

En la fig. 7 se representan las curvas de resonancia que corresponden a esta fórmula: amplitud de las oscilaciones en función de la frecuencia para diferentes valores de la constante de amortiguamiento γ (el eje de las ordenadas expresa la relación $B/B_{\text{máx.}}$). Mientras la magnitud absoluta de la diferencia $\omega - \omega_0$ es pequeña en comparación con γ , la amplitud B se diferencia poco del valor máximo. Una considerable disminución de la amplitud ocurre cuando $|\omega - \omega_0| \sim \gamma$. Basándose en ello se dice que la «anchura de banda» de la curva de resonancia es del orden de la magnitud de γ . Sin embargo, la altura máxima (a la F_0 dada) es inversamente proporcional a γ . Por eso,

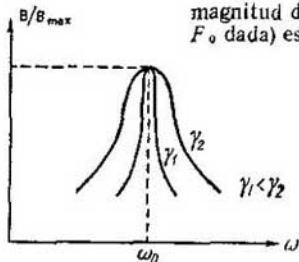


Fig. 7.

cuanto menor sea el amortiguamiento, más agudo será el máximo de resonancia y más alta y estrecha la curva de la misma.

Más arriba hemos dicho que el movimiento de un sistema oscilatorio solicitado por una fuerza externa periódica, es una superposición de oscilaciones forzadas y propias. Si despreciamos por pequeño el amortiguamiento de las oscilaciones propias, tendremos una superposición de dos oscilaciones armónicas de frecuencias ω y ω_0 y amplitudes A y B . Cerca de la resonancia, las frecuencias ω y ω_0 tendrán valores aproximados, es decir, la diferencia $\Omega = |\omega - \omega_0|$ es pequeña en comparación con ω y ω_0 . Aclaremos el carácter del movimiento resultante que se produce en este caso.

Para ello utilicemos el diagrama vectorial, en el que cada oscilación se representa por un vector, A y B en la fig. 8. Con el tiempo, a medida que varían las fases de las oscilaciones, estos vectores giran uniformemente a las velocidades angulares ω_0 y ω (en el transcurso de un período T , el vector realiza una

rotación completa, es decir, gira un ángulo 2π ; su velocidad angular es $2\pi/T$, es decir, coincide con la frecuencia angular, pulsación, de la oscilación). La oscilación total viene representada por la suma geométrica de ambos vectores por el vector C . La

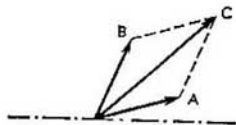


Fig. 8.

longitud de este vector, a diferencia de las de los vectores A y B , no será constante, sino que variará con el tiempo, ya que, debido a la diferencia de velocidades angulares ω_0 y ω , el ángulo entre los vectores A y B varía. Está claro que la variación de la longitud de C se verificará entre los límites desde $C_{\max.} = A + B$, cuando el sentido de los vectores coincide, hasta $C_{\min.} = |A - B|$, cuando los sentidos son opuestos. Esta variación se produce periódicamente a la frecuencia Ω (esta magnitud es igual a la velocidad angular de rotación relativa de los vectores A y B entre sí).

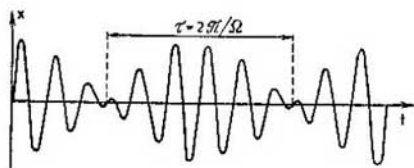


Fig. 9.

En el caso considerado de frecuencias ω_0 y ω de valores próximos, los vectores A y B giran rápidamente y, al mismo tiempo, lo hacen lentamente el uno con respecto al otro. En este caso, la variación del vector resultante C se puede considerar como una rotación uniforme a la misma frecuencia $\omega_0 \approx \omega$ (despreciando la diferencia entre ω_0 y ω) y, al mismo tiempo, con una lenta variación (a la frecuencia Ω) de su longitud. En otras palabras, el movimiento resultante representa una oscilación que varía lentamente la amplitud.

El fenómeno de variación periódica de la resultante de la amplitud, al superponer oscilaciones de fre-

cuencias de valor próximo, se denomina *pulsación*, y la magnitud Ω , frecuencia de pulsación o de batido. En la fig. 9 se representan las pulsaciones cuando $A=B$.

§ 36. Resonancia paramétrica

Las oscilaciones no amortiguadas pueden excitarse no sólo solicitadas por una fuerza periódica externa, sino también por una variación periódica de los parámetros del sistema oscilatorio. Esta excitación de las oscilaciones se denomina *resonancia paramétrica*. Como ejemplo podemos citar el balanceo en el columpio de una persona que regularmente se acucilla y se levanta, variando periódicamente con ello la posición del centro de gravedad.

Para aclarar el mecanismo de esta excitación de las oscilaciones, recurramos a un ejemplo sencillo, al péndulo cuya longitud de la cuerda de suspensión a través de una polea, se puede variar tirando de ella o cediéndola (fig. 10). Supongamos que cada vez que pasa por la posición de equilibrio (vertical), la fuerza externa F tira del péndulo, desplazándolo a una pequeña altura a (pequeña en comparación con la longitud l del péndulo), y en cada posición extrema la cuerda desciende la misma distancia a . Por consiguiente, en cada periodo el péndulo se habrá alargado dos veces y otros tantas se habrá contraído; en otras palabras, la frecuencia de variación periódica del parámetro (longitud del péndulo) será dos veces mayor que la frecuencia de las oscilaciones propias. Como el alargamiento de la cuerda se efectúa en la posición inclinada del péndulo, la altura a que desciende será $a \cos \varphi_0$ (φ_0 es la amplitud de oscilación del péndulo), menor que la altura a a que se eleva cuando se tira de la cuerda. Por eso, a cada elevación y descenso de la cuerda, la fuerza externa que acciona la cuerda realiza un trabajo contra la fuerza de la gravedad igual a

$$mga(1 - \cos \varphi_0) \approx \frac{1}{2} mga \varphi_0^2$$

(como el ángulo φ_0 se supone pequeño, el $\cos \varphi_0 \approx 1 - \frac{1}{2} \varphi_0^2$). Además, la fuerza externa F realiza un trabajo contra la fuerza centrífuga (que estira la cuerda) igual a $\frac{mv_0^2}{l}$ (v_0 es la velocidad máxi-

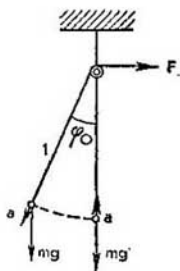


Fig. 10.

ma del péndulo) en la posición inferior del péndulo e igual a cero en las posiciones extremas del mismo (en estas posiciones, la velocidad del péndulo es igual a cero). Por consiguiente, el trabajo total de la fuerza externa por periodo de oscilación del péndulo es

$$A = 2 \left(\frac{1}{2} m g a \psi_0^2 + \frac{m v_0^2}{l} a \right).$$

Pero $v_0 = l \psi_0 \omega$, donde $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ es la frecuencia de las oscilaciones del péndulo; por eso

$$A = 6 \frac{a}{l} \frac{m v_0^2}{2}.$$

Vemos que el trabajo realizado por la fuerza externa del péndulo es positivo y proporcional a la energía de éste. Por eso, la energía del péndulo aumentará sistemáticamente obteniendo un pequeño incremento en cada periodo, proporcional a la propia energía y a la magnitud $\frac{a}{l}$.

En esto está la explicación de la resonancia paramétrica. La variación periódica de los parámetros de un sistema oscilatorio (de frecuencia doble que la propia del sistema) acarrea un aumento sistemático de la energía media E , siendo proporcional a E la velocidad de este aumento:

$$\frac{dE}{dt} = 2\kappa E,$$

donde κ es una constante (pequeña). Esta relación es de la misma clase que la de las oscilaciones amortiguadas, pero con la diferencia de que la derivada $\frac{dE}{dt}$ es positiva, y no negativa. Esto significa que la energía (y con ella la amplitud) de las oscilaciones aumenta exponencialmente con el tiempo.

En la realidad, claro está, siempre hay cierto rozamiento, que origina el amortiguamiento de las oscilaciones. Por eso, para que efectivamente haya una excitación paramétrica, el coeficiente (factor) de amplificación κ debe ser superior a cierto valor mínimo, igual a la constante de amortiguamiento debido al rozamiento.

Hemos estudiado la excitación de las oscilaciones de un sistema solicitado por acciones externas periódicas. No obstante, hay sistemas oscilatorios en los que las oscilaciones se excitan a costa de un manan-

tial continuo de energía, y no por fuerzas periódicas. Este manantial compensa continuamente la pérdida de energía del sistema, pérdida que produce el amortiguamiento de las oscilaciones. Ejemplo de esta clase de sistema es el reloj mecánico, en el cual el manantial de energía es un resorte arrollado (cuerda) o pesa elevada.

ESTRUCTURA DE LA MATERIA

§ 37. Atomos

Aquí no se intenta exponer minuciosamente las cuestiones de la Física atómica. Procuraremos exponer las nociones fundamentales de la estructura de la materia, imprescindibles para el estudio ulterior. Como se sabe, todos los cuerpos constan de un pequeño número de sustancias simples, *elementos químicos*. La partícula más pequeña de cualquier elemento es *el átomo*.

Las masas de los átomos son muy pequeñas. Por eso es conveniente medirlas en unidades especiales, y no en gramos. Como tal unidad sería natural elegir la masa del átomo más ligero, la del hidrógeno. No obstante, como patrón de los pesos atómicos se utiliza el átomo de oxígeno, más cómodo para los fines químicos que el de hidrógeno. El átomo de oxígeno es aproximadamente 16 veces más pesado que el de hidrógeno, y como unidad de peso atómico se ha tomado la 1/16 parte de la masa del átomo de oxígeno (esta definición se concretará algo más en el § 38). La masa de cualquier elemento expresada en estas unidades se denomina *peso atómico* del elemento y se designa generalmente con la letra *A*. El peso atómico del hidrógeno es igual a 1,008.

La masa del átomo en gramos es proporcional al peso atómico. Por lo tanto será evidente que, si se toma un número de gramos de cualquier elemento igual al peso atómico, denominado *átomo-gramo* del elemento, el número de átomos contenido en esta cantidad de materia será el mismo para todos los elementos. Este número se denomina *número de Avogadro* y es

$$N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}.$$

Está claro que la masa de un átomo de peso atómico *A* será

$$m_A = \frac{A}{N_0} = 1,66 \cdot 10^{-24} A \text{ g.}$$

Aunque el átomo es la menor partícula del elemento, posee una estructura compleja. El átomo consta de núcleo (*núcleo atómico*) relativamente pesado y car-

gado positivamente, y de *electrones*, partículas negativas mucho más ligeras que se mueven alrededor del núcleo formando las llamadas *capas electrónicas* del átomo. Los núcleos de los distintos átomos se diferencian entre sí; pero los electrones son absolutamente iguales.

La masa del electrón es tan pequeña en comparación con la del núcleo, que prácticamente toda la masa del átomo está concentrada en el núcleo. El núcleo más ligero es el del átomo de hidrógeno, llamado *protón*, que es aproximadamente 2000 veces (exactamente 1837 veces) más pesado que el electrón. En magnitud absoluta, la masa del electrón es

$$m = 9,11 \cdot 10^{-28} \text{ g.}$$

Al mismo tiempo hay que señalar que el núcleo ocupa solamente una parte insignificante del volumen del átomo. Los radios de los átomos, es decir, los radios de las regiones alrededor del núcleo por las que se mueven los electrones, es del orden de 10^{-8} cm. Mientras que los radios de los núcleos son decenas de millares más pequeños, entre 10^{-13} y 10^{-12} cm. La magnitud absoluta de la carga del electrón es $e = 4,80 \cdot 10^{-10}$ unid. CGSE de carga = $1,60 \cdot 10^{-19}$ C.

En muchos casos se suele operar con el producto de la carga del electrón por el número de Avogadro, es decir, con la carga de un «electrón gramo». Este producto se denomina *faraday* o *constante de Faraday*, y es $F = eN_0 = 9,65 \cdot 10^4$ C.

Desde el punto de vista eléctrico, el átomo en su totalidad es neutro: su carga total es igual a cero. En otras palabras, la carga positiva del núcleo se compensa exactamente con la carga negativa de los electrones que lo circundan. Esto significa que la carga del núcleo es múltiple de la carga del electrón. Se puede decir que la magnitud de la carga del electrón representa *una carga elemental*: la carga de todas las partículas existentes en la naturaleza es múltiple de la del electrón. Esto es una de las propiedades físicas fundamentales de la materia.

La carga del núcleo expresada en unidades de carga del electrón se denomina *número atómico* del elemento y generalmente se designa con la letra *Z*. Como la carga del núcleo viene exactamente compensada por la de los electrones, el número *Z* será al mismo tiempo el número de electrones de la capa electrónica del

átomo. Todas las propiedades de los átomos que se revelan en las condiciones habituales, vienen determinadas completamente por las capas electrónicas. A estas se refieren, por ejemplo, las propiedades químicas y ópticas de la materia. Por ello está claro que el número atómico representa la característica fundamental del átomo, que determina en alto grado sus propiedades. La disposición de los elementos en el sistema periódico de Mendeléyev es precisamente una distribución según el orden creciente de los números atómicos: el número atómico coincide con el número de orden de posición del elemento en esta tabla.

Las fuerzas de interacción que determinan la estructura del átomo, son fundamentalmente fuerzas de interacción eléctrica de los electrones con el núcleo y entre sí: los electrones son atraídos por el núcleo y se repelen entre sí. Otras fuerzas (las magnéticas) desempeñan en el átomo un papel secundario. La carga del núcleo y, por lo tanto, el campo eléctrico por el que se mueven los electrones, viene determinado por el número atómico, y en ello se revela una vez más el papel fundamental de este número en las propiedades del átomo.

En el átomo no desempeña en absoluto ningún papel la interacción gravitatoria. Efectivamente, la energía de interacción eléctrica, por ejemplo, entre dos electrones a la distancia r uno del otro, es e^2/r , mientras que la de la interacción gravitatoria es igual a Gm^2/r , siendo la relación de estas dos magnitudes

$$\frac{Gm^2}{e^2} = 2,3 \cdot 10^{-43}.$$

Este número es tan pequeño, que hablar de interacción gravitatoria no tiene ningún sentido.

Las propiedades de los átomos de ninguna manera se pueden describir con ayuda de la Mecánica clásica. Esta Mecánica ni siquiera puede explicar el propio hecho de la existencia del átomo como una formación estable, y no digamos ya la estructura del mismo. La Mecánica clásica resulta completamente inaplicable al movimiento de las partículas de masa tan pequeña como la de los electrones, y que tiene lugar en regiones tan pequeñas del espacio como las de las dimensiones del átomo. Los fenómenos atómicos se pueden comprender basándose solamente en las leyes de otra Mecánica, distinta por completo, la llamada Mecánica cuántica.

Bajo la influencia de unas u otras acciones exteriores, el átomo puede perder uno o más electrones de su capa electrónica. Entonces la partícula neutra se transforma en una partícula cargada, en un *ion* positivamente cargado. La energía que hay que invertir para extraer el primer electrón de la capa exterior del átomo se denomina *potencial de ionización* del átomo.

En los fenómenos atómicos, para medir la energía se utiliza una unidad especial, porque el ergio resultaría una unidad muy grande para estos fines. Esta unidad es la energía adquirida por un electrón al pasar por un campo eléctrico de diferencia de potencial igual a un voltio, y se denomina *electrón-voltio* (eV). Como el trabajo realizado por el campo eléctrico es igual al producto de la magnitud de la carga por la diferencia de potencial, y 1 voltio es la 1/300 parte de la unidad CGSE de potencial, el electrón-voltio será

$$1 \text{ eV} = 4,80 \cdot 10^{-10} \frac{1}{300} \text{ ergios} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ ergios.}$$

El potencial de ionización del átomo también se mide en electrón-voltios. Este potencial varía entre los límites desde el potencial menor, igual a 3,89 eV para el átomo del cesio, hasta el mayor, igual a 24,6 eV para el átomo del helio. El potencial de ionización del átomo del hidrógeno es de 13,6 eV.

Si examinamos el potencial de ionización del átomo como una función del número atómico, veremos que esta función posee un carácter periódico específico. Aumenta de manera más o menos monótona en cada período de la tabla de Mendeléyev, alcanzando el valor máximo en el átomo del gas noble, decayendo después al principio del período siguiente. Esta es una de las principales revelaciones de las propiedades periódicas de los átomos, que ha dado a la tabla de los mismos la denominación de sistema periódico. La magnitud del potencial de ionización caracteriza la energía de enlace de los electrones orbitales del átomo. Los electrones interiores, que se mueven por el interior de la capa del átomo, poseen una energía de enlace considerablemente mayor. La energía necesaria para extraer los electrones más profundos de la capa, alcanza, en los átomos pesados, la cifra de 10^4 — 10^5 eV.

Junto con los iones cargados positivamente puede haber iones atómicos negativos, es decir, iones en los cuales el átomo ha adquirido un electrón de más.

No obstante, no todos los átomos aislados, ni mucho menos, son capaces de formar un sistema estable al adquirir un electrón de más: no todos los átomos poseen la denominada *afinidad electrónica*. Solamente los átomos de los elementos del grupo de los halógenos (F, Cl, Br, I), el hidrógeno y los del grupo del oxígeno (O, S, Se, Te) pueden formar iones negativos. La afinidad electrónica de estos elementos es distinta: la mayor la poseen los halógenos, y la menor, el hidrógeno, donde la energía de enlace del ion negativo es aproximadamente de 0,1 eV.

Se ha establecido designar los iones con el símbolo del elemento químico con el signo $+o-$ en la parte derecha superior, repetido tantas veces como cargas tenga el ion: H^+ , Cl^- , etc. (en lugar de los signos $+o-$ se utilizan puntos y comas: H^+ , Cl').

§ 38.

Isótopos

Los núcleos atómicos son formaciones complejas que constan de muchas partículas. Estas partes componentes del núcleo son los protones, núcleo del átomo de hidrógeno, y los llamados *neutrones*, partículas de masa que casi coincide con la del protón, pero que se diferencia de éste por no poseer carga eléctrica. El número total de protones y neutrones del núcleo se denomina *número de masa*. Como la carga del núcleo la determinan los protones que contiene, al expresarla en cargas elementales e , será igual al número de protones; en otras palabras, el número de protones del núcleo coincide con el número atómico Z . El resto de las partículas del núcleo son los neutrones. Las partículas del núcleo se mantienen juntas debido a fuerzas específicas de naturaleza no eléctrica. Esta interacción es extremadamente elevada y la energía de enlace de las partículas del núcleo se mide en decenas de millones de electrón-voltios, es decir, es enorme en comparación con la de enlace de los electrones en el átomo. Por esta causa, en todos los fenómenos que no sean de origen atómico, los núcleos atómicos no sufren variación alguna interna y funcionan simplemente como partículas de masa y carga determinadas.

Ya se ha indicado que las propiedades del átomo vienen determinadas fundamentalmente por la carga del núcleo, mientras que la masa del mismo desempeña un papel relativamente secundario. Esta circunstancia se revela claramente en los átomos de igual número

atómico, pero de masas nucleares diferentes. Resulta que los átomos de cada uno de los elementos químicos no son iguales: poseyendo el mismo número de electrones, pueden tener distintos núcleos, que se diferencian en la masa, siendo de igual carga. Esta variedad de un mismo elemento se denomina *isótopo*. Todos los isótopos del elemento considerado son químicamente idénticos y muy afines por sus propiedades físicas. El número de isótopos que hay en estado natural en los distintos elementos es diferente; varía desde uno (en el Be, F, Na, Al y otros) hasta diez en el estaño¹¹.

Los elementos con que operamos en la Tierra son mezclas de diferentes isótopos en determinadas proporciones. Generalmente, los pesos atómicos de los elementos químicos que figuran en la tabla, son los pesos atómicos medios de estas mezclas (que frecuentemente se denominan pesos atómicos químicos), y no los pesos atómicos exactos de determinado isótopo. Los pesos atómicos de los isótopos se acercan mucho a los números enteros, números de masa, diferenciándose de ellos en centésimas e incluso en milésimas de unidad, mientras que los pesos atómicos medios (químicos) pueden diferenciarse, claro está, de los números enteros en cualquier magnitud.

En relación con ello hay que puntualizar la definición expuesta en el párrafo anterior sobre la unidad de peso atómico como la 1/16 parte del peso atómico del oxígeno. El oxígeno tiene tres isótopos: O^{16} , O^{17} y O^{18} (el peso atómico, mejor dicho, el número de masa del isótopo se ha establecido indicarlo en forma de exponente del símbolo químico del elemento). El más difundido de estos isótopos es el O^{16} , mientras que los isótopos O^{17} y O^{18} están en las mezclas naturales solamente en cantidades de 0,04 y 0,2% respectivamente. Aunque estas cantidades son relativamente insignificantes, son valiosas en la determinación exacta de los pesos atómicos.

Se ha establecido determinar los pesos atómicos medios de las mezclas naturales de los isótopos comparándolos con el peso atómico del oxígeno natural, considerado igual exactamente a 16 (esta escala de pesos atómicos a veces se denomina química). Para deter-

¹¹ Para evitar incomprendiones subrayamos que aquí se habla solamente de los isótopos existentes en estado natural. Artificialmente se pueden obtener también otros isótopos, cuyos núcleos son inestables y se desintegran espontáneamente.

minar los pesos atómicos exactos de los distintos isótopos en la física nuclear, es natural partir del peso atómico de un isótopo determinado: se ha establecido considerar igual a 16 el peso atómico del isótopo O^{16} . La unidad de esta escala (que se denomina física) es 0,027% menor que la química.

La utilización de dos escalas de los pesos atómicos lleva consigo determinadas incomodidades. Debido a ello, en la actualidad se ha recomendado pasar a una nueva escala única, en la cual los pesos atómicos se determinarán con relación al peso atómico del isótopo C^{12} del carbono, tomado igual a 12. El paso a esta escala acarrea sólo insignificantes variaciones (un aumento de 0,0043%) de los pesos atómicos habituales, químicos.

El primer elemento del sistema periódico, el hidrógeno, posee dos isótopos naturales: junto al isótopo fundamental de peso atómico 1 hay otro isótopo de peso atómico igual a 2. En el hidrógeno natural hay solamente un átomo de H^2 por cada 6000 átomos H^1 , aproximadamente. El isótopo «pesado» de hidrógeno generalmente se designa con un símbolo especial D y se denomina *deuterio*; el núcleo del átomo de este isótopo se denomina *deuterón*. Como la relación de las masas de los dos isótopos de hidrógeno es igual a 2, es decir, es relativamente elevada, la diferencia entre sus propiedades físicas es más considerable que en los isótopos de otros elementos, en los que la diferencia relativa de las masas de los átomos es mucho menor. Así, «el agua pesada», D_2O , en cuya composición entra el isótopo pesado del hidrógeno, se hiela a la temperatura de $3,8^\circ C$, en lugar de $0^\circ C$, y hierve a $101,4^\circ C$, en vez de $100^\circ C$.

Indiquemos, además, que el siguiente elemento, el helio, tiene también dos isótopos: He^3 y He^4 . De ellos, el más corriente, el más extendido, es el isótopo He^4 . Los átomos del He^3 se encuentran en el helio natural en una cantidad aproximada de un átomo por cada 10^8 de átomos de He^4 . El isótopo He^3 , no obstante, puede obtenerse artificialmente en grandes cantidades con los métodos de la física nuclear.

§ 39.

Moléculas

Los átomos de los distintos elementos pueden unirse entre sí formando *moléculas*. Tanto las fuerzas de interacción entre los átomos que acarrear la formación de moléculas (esta interacción se denomina quí-

mica), como las que actúan en el propio átomo, tienen fundamentalmente origen eléctrico. Pero la formación de moléculas, lo mismo que la estructura de los átomos, pertenece a la categoría de los fenómenos cuánticos, que no se pueden explicar en la Mecánica clásica. Aquí solamente describiremos ciertas propiedades fundamentales de esta interacción, sin detenernos en su naturaleza.

La molécula más simple es la diatómica, que consta de dos átomos iguales o distintos. La interacción de los átomos que conduce a la formación de esta molécula, se caracteriza por una energía potencial, cuya

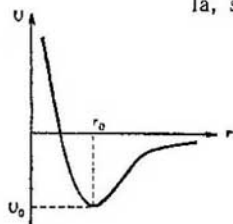


Fig. 1.

representación gráfica se da en la fig. 1. En este gráfico, la energía potencial U de interacción de los dos átomos se da en función de la distancia r entre los mismos (más exactamente, de la distancia entre los núcleos de los átomos). Esta función tiene un mínimo bastante profundo y marcado a cierto valor $r = r_0$. A distancias menores, la curva sube bruscamente; esta región corresponde a una fuerte repulsión de los átomos debido, principalmente, a las fuerzas de repulsión de Coulomb de los núcleos que se aproximan, mientras que a grandes distancias los átomos se atraen. La distancia r_0 corresponde a la posición mutua de equilibrio estable de los núcleos en la molécula. En realidad, los núcleos no ocupan rigurosamente estas posiciones, sino que realizan oscilaciones alrededor de ellas. No obstante, la amplitud de estas oscilaciones generalmente es muy pequeña. La profundidad U_0 del pozo de potencial caracteriza la solidez del enlace de los átomos en la molécula (estrictamente hablando, el valor exacto de la *energía de enlace* que habría que invertir para separar los átomos, se diferencia algo de U_0 debido a la energía de las oscilaciones de los núcleos).

Como ilustración, en la tabla se dan los valores de r_0 (en angströms, $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$) y U_0 (en electrón-voltios) de algunas moléculas diatómicas.

Molécula	H ₂	O ₂	Cl ₂	N ₂
r_0	0,75	1,2	2,0	1,1
U_0	4,5	5,1	2,5	7,4

La molécula diatómica se puede representar como un halterio (pesa de gimnasia) de longitud r_0 . Las moléculas pluriatómicas tienen una forma más compleja. En la fig. 2 se representan las posiciones de los núcleos de los átomos de algunas moléculas triatómicas (la distancia entre ellos se indica en angströmes). Unas moléculas de estas tienen forma de triángulo

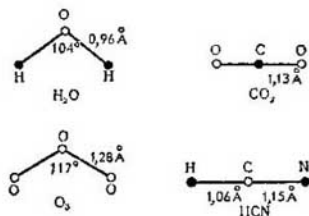


Fig. 2.

(las de agua, H₂O, ozono, O₃); en otras los átomos se sitúan a lo largo de una recta (las moléculas del bióxido de carbono, CO₂, del ácido cianhídrico, CNH). En el § 40 aduciremos unos cuantos ejemplos de moléculas más complejas.

Vemos que, en las moléculas, la distancia entre los núcleos es del orden de 10⁻⁸ cm, es decir, del mismo orden que las dimensiones de los propios átomos. En otras palabras, los átomos en las moléculas se han «pegado». Por eso, estrictamente hablando, en la molécula no se pueden delimitar las capas electrónicas de los distintos átomos. Aunque las regiones internas de las capas electrónicas, al unirse los átomos en moléculas, varían poco, el movimiento de los electrones orbitales puede variar considerablemente, y, en este caso, parece que los átomos «colectivizan» a estos electrones.

En algunas moléculas, las zonas exteriores de las capas electrónicas se rehacen de tal manera, que alrededor de unos núcleos hay, como término medio,

menos electrones, y, alrededor de otros, más electrones que los correspondientes a los átomos neutros; como si estas moléculas constasen de iones (por ejemplo, la molécula de ClK consta del ion positivo K^+ y del negativo Cl^-). En otros casos (por ejemplo, en los de H_2 , O_2 , ClH), los átomos de la molécula permanecen eléctricamente neutros, como término medio. No obstante, esta diferencia tiene sólo un carácter cuantitativo, y entre las dos situaciones extremas indicadas puede haber diferentes casos intermedios. Una propiedad característica de la interacción química de los átomos es la *saturación* , con la cual, los átomos que se enlazan de esta manera, pierden la capacidad de hacerlo con otros átomos.

Las distintas moléculas también interaccionan entre sí debido a las fuerzas de *Van der Waals* . Esta interacción se diferencia de la de los átomos, que causa la formación de la molécula.

Hablando en general, la interacción de dos moléculas no se puede representar simplemente en forma de curva funcional $U=U(r)$, como se ha hecho arriba para los átomos, ya que la posición mutua de las moléculas se caracteriza por una mayor cantidad de parámetros: además de la distancia r entre las moléculas, también influye su orientación mutua. Pero si concebimos la interacción de las moléculas como una especie de interacción media en todas sus posibles orientaciones, también se puede representar en forma de una curva de éstas.

Esta curva se parece a la de interacción de los átomos en la molécula, en el sentido de que, a grandes distancias, las moléculas se atraen, y a pequeñas, se repelen. Las fuerzas de atracción entre las moléculas disminuyen rápidamente con el aumento de la distancia entre ellas. Con más rapidez aumentan las fuerzas de repulsión al acercarse las moléculas, de manera que éstas, al acercarse, se comportan como cuerpos sólidos impenetrables entre sí. La profundidad del mínimo de la curva de energía potencial intermolecular es muy pequeña, alcanzando décimas e, incluso, centésimas de electrón-voltio (V. el § 68), mientras que la profundidad del pozo de potencial de la curva de interacción química es de varios electrón-voltios. Otra diferencia considerable entre ambas clases de interacción consiste en que las fuerzas de Van der Waals, a diferencia de las químicas, no poseen la propiedad de saturación. La interacción molecular por las fuerzas de Van der Waals existe entre todas las moléculas,

de manera que si dos moléculas se aproximan debido a esta interacción, continúan atrayendo también a otras moléculas. Por eso, las fuerzas de atracción molecular no cuasan la formación de «moléculas gigantes», sino que sólo contribuyen a la tendencia general de todas las moléculas de acercarse entre sí. Esta tendencia se realiza al pasar la sustancia a un estado condensado, líquido o sólido.

§ 40. Simetría de las moléculas

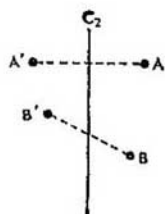


Fig. 1.

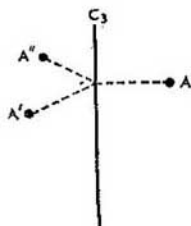


Fig. 2.

La simetría desempeña en la Física un papel fundamental. Es una de las principales características cualitativas de uno u otro objeto físico y, en muchos casos, influye de manera decisiva en el carácter de los fenómenos que se producen en este objeto.

Nosotros empezaremos con el estudio de la simetría que puedan tener las moléculas por separado. En el estudio de la simetría se distinguen diferentes elementos, denominados *elementos de simetría*, los cuales pasamos a determinar inmediatamente. Se dice que una molécula posee un *eje de simetría* de orden n , si coincide consigo misma al girar alrededor de este eje un ángulo de $2\pi/n$, donde n es un número entero cualquiera: $n=2, 3, 4, \dots$ (se ha convenido designar simbólicamente tal eje con la letra C y el subíndice n , C_n). Así, la posesión de un eje de simetría de segundo orden (C_2) significa que la molécula coincide consigo misma al realizar un giro de 180° ; en otras palabras, además de cada uno de los átomos A, B, \dots , la molécula posee otros átomos iguales A', B', \dots , ubicados con respecto a los átomos A, B, \dots y al eje, como se indica en la fig. 1. Si la molécula posee un eje de simetría de tercer orden, coincidirá consigo misma al girar un ángulo de 120° y 240° ; en cuyo caso, por cada átomo A de la molécula, ésta tendrá otros dos átomos A' y A'' iguales al primero y dispuestos como se indica en la fig. 2.

La molécula posee *plano de simetría*, si coincide consigo misma al reflejarse en este plano como espejo (este elemento de simetría se designa con el símbolo σ). Esto significa que en la molécula, a cada átomo A le corresponde otro igual A' situado en la continuación de la perpendicular trazada desde el punto A sobre el plano y a la misma distancia del plano (fig. 3).

Además de la reflexión especular en el plano, se puede introducir el concepto de «reflexión en un punto», que conduce a un nuevo elemento de simetría: *centro de simetría* (o *centro de inversión*). Este elemento se designa con el símbolo i . Si la molécula posee el centro

de simetría en cierto punto i (fig. 4), a cada átomo A le corresponderá otro átomo igual A' situado en la continuación de la recta trazada desde el punto A al i , siendo la distancia $A'i$ igual a la Ai .

Finalmente, el último tipo de elementos de simetría es el *eje de inversión* (*eje de rotación reflexiva, de giro*

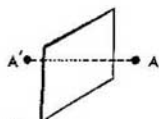


Fig. 3.

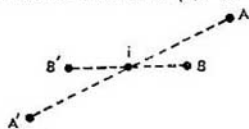


Fig. 4.

reflejo o giroides) de orden n (se representa con el símbolo S_n). La molécula posee esta simetría, si coincide consigo misma al girar alrededor de cierto eje un ángulo $2\pi/n$, reflejándose después en un plano perpendicular a este eje. El orden n del eje de inversión puede ser solamente un número par (si n es impar, por ejemplo, $n=3$, repitiendo la inversión 6 veces, se comprueba fácilmente que el eje S_3 , en realidad, se ha reducido a la combinación de dos elementos de simetría independientes: un eje de simetría C_3 y un plano de simetría σ perpendicular al primero). Así, si una molécula posee un eje de inversión de 4º orden, a cada átomo A le corresponden tres átomos iguales al primero A' , A'' , A''' , situados como se indica en la fig. 5. Está claro que la presencia de tal eje expresa la presencia también de un eje de simetría de orden dos veces inferior; en el caso considerado, del eje C_2 .

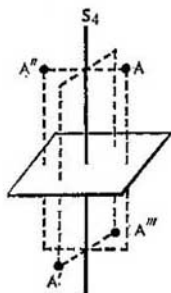


Fig. 5.

Señalemos que el eje de inversión binario es equivalente a un centro de simetría situado en el punto de intersección del eje con el plano en que se efectúa la reflexión. Por eso, S_2 no es un nuevo elemento de simetría.

Estos son los elementos de simetría de las moléculas. Veamos algunos ejemplos que demuestren cómo surgen las diferentes combinaciones de estos elementos determinativos de la simetría de la molécula.

La molécula de agua, H_2O , tiene la forma de un triángulo isósceles (fig. 6). Su simetría consta de un eje binario (altura del triángulo) y dos planos de simetría perpendiculares entre sí y que pasan por este eje. La molécula del amoniaco, NH_3 , tiene la forma de una pirámide regular de base triangular (tetraedro) con el átomo N en el vértice y los átomos H en los ángulos de la base (hay que decir que esta pirámide es bastante

plana: su altura es aproximadamente 4 veces menor que la longitud de la arista de la base). Su simetría se compone de un eje vertical ternario (fig. 7) y tres planos de simetría que pasan por el eje y que forman entre sí ángulos de 60° ; cada plano pasa por la altura y por uno de los átomos de H.

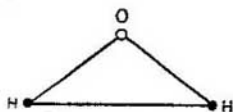


Fig. 6

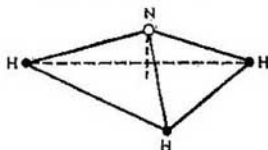


Fig. 7.

Mayor número de elementos de simetría posee la molécula de benceno, C_6H_6 , cuyos átomos están en un plano formando un hexágono regular (fig. 8). El plano de los átomos será, evidentemente, el plano de simetría de la molécula. Además, la molécula posee un eje de simetría senario, que pasa por el centro del hexágono perpendicularmente al plano; centro de simetría, que es el del hexágono; seis ejes binarios, tres de los cuales unen los átomos opuestos diametralmente y los otros tres dividen en dos partes iguales los lados opuestos del hexágono (en la fig. 8 se repre-

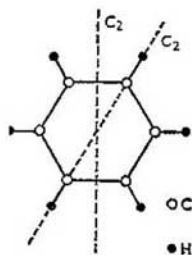


Fig. 8.

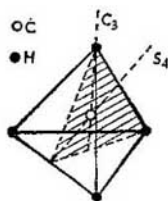


Fig. 9.

sentan estos ejes uno de cada clase), y, por último, seis planos trazados por estos ejes C_2 perpendicularmente al plano del dibujo nos dan seis planos de simetría. Veamos, además, la molécula del metano, CH_4 , que es un tetraedro regular (figura de cuatro caras iguales formadas por triángulos equiláteros). Los átomos H se hallan en los cuatro vértices del tetraedro, y el C, en el centro del mismo (fig. 9). Esta molécula tiene 4

ejes ternarios de simetría y cada uno pasa por uno de los vértices y por el centro del tetraedro; tres ejes cuaternarios de inversión, que dividen en dos partes iguales las aristas opuestas del tetraedro, y, por último, seis planos de simetría y cada uno de ellos pasa por una de las aristas y por el punto medio de la opuesta (en la fig. 9 se muestra un elemento de simetría de cada una de estas clases).

§ 41. Enantiomorfismo

Este fenómeno está relacionado con cierta asimetría de la molécula. Si reflejamos una molécula bastante asimétrica en un cristal, obtendremos una molécula semejante a la primera; pero que no coincide con ella. Esto ocurre, por ejemplo, con la molécula CHClBrI obtenida sustituyendo tres átomos H de la molécula del metano, CH_4 , por tres distintos átomos Cl, Br y I.

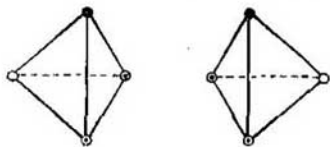


Fig. 10.

En la fig. 10 se representan dos moléculas de éstas, que se obtienen una de la otra por reflexión especular sobre el plano vertical (en la figura no se indican los átomos C). Está claro que estas moléculas no pueden coincidir entre sí mediante giro alguno, y, en este sentido, no son idénticas.

Tales moléculas semejantes entre sí, pero no idénticas, que se obtienen una de la otra por reflexión especular, se denominan *enantiomorfos* o *estereoisómeros*. Uno de los enantiomorfos se denomina *dextrógiro* y el otro, *levógiro*.

No todas las moléculas, ni mucho menos, pueden poseer enantiomorfos (estereoisómeros). El tenerlos o no depende de la simetría de la molécula. Así, si la molécula posee aunque sólo sea un plano de simetría, su reflexión especular será idéntica a ella misma: se diferenciarán solamente en un giro en el espacio alrededor de determinado eje. Por eso, por ejemplo, no poseen enantiomorfos ni la propia molécula, muy simétrica, CH_4 , ni tampoco la molécula CH_2Cl_2 , que es mucho menos simétrica, ni incluso la

CH_2ClBr , que tiene un plano de simetría, aunque no más.

Tampoco tienen enantiomorfos las moléculas con centro de simetría o, en general, con cualquier eje de inversión.

Los enantiomorfos resultan completamente iguales casi en todas las propiedades físicas. La diferencia entre ellos se revela, en particular, en determinados fenómenos que surgen al atravesar la luz por las soluciones de estas sustancias (por esta causa, los enantiomorfos o estereoisómeros se denominan también *isómeros* o *estereoisómeros ópticos*).

La diferencia entre los enantiomorfos se revela sensiblemente al reaccionar con otras moléculas también asimétricas. La reacción entre enantiomorfos dextrógiros de ambas sustancias transcurre de la misma manera que la reacción entre los levógiros de las mismas; estos dos procesos se diferencian entre sí solamente por la reflexión especular y, por consiguiente, no pueden diferenciarse por las propiedades físicas. Lo mismo se tiene en la reacción del enantiomorfo dextrógiro con el levógiro y en la del levógiro con el dextrógiro, que transcurren de la misma manera. Sin embargo, el proceso de la reacción de los dos primeros casos se diferencia considerablemente del proceso de la reacción de los dos segundos casos. En ello reside la diferencia principal de los enantiomorfos entre sí.

Si en la reacción química entre dos sustancias simétricas (que no poseen enantiomorfos) se forman moléculas asimétricas, la reflexión especular no puede variar el producto de la reacción, ya que no varía las sustancias primitivas. Esto significa que, como resultado de la reacción, se obtiene una mezcla de cantidades iguales de ambos enantiomorfos.

§ 42.

Red cristalina

La propiedad fundamental de los cristales es la regularidad de la distribución de los átomos en ellos. Esta simetría de disposición interna de los átomos en los cristales, que no la simetría de la forma externa, es la que vamos a estudiar.

Se dice que el conjunto de los puntos en que están dispuestos los átomos (mejor dicho, los núcleos atómicos), es la *red cristalina*, y estos puntos se denominan *nudos* de la red. Al estudiar la simetría de la red, ésta se puede suponer ilimitada en el espacio, abstra-

yéndonos de los límites del cristal, los cuales no tienen nada que ver con la estructura de la red como tal.

La característica fundamental de la red cristalina es la periodicidad espacial de su estructura: como si el cristal constase de partes que se repiten. Con tres familias de planos paralelos se puede dividir la red cristalina en paralelepípedos exactamente iguales conteniendo la misma cantidad de átomos dispuestos de la misma manera. El cristal es el conjunto de estos paralelepípedos desplazados entre sí paralelamente, esto es, si la red cristalina como un todo se desplaza paralelamente a lo largo de una arista cualquiera del paralelepípedo, a una distancia igual a un múltiplo de la longitud de esta arista, la red cristalina coincidirá consigo misma. Estos desplazamientos se denominan *traslaciones*, y la simetría de la red correspondiente a estos desplazamientos se denomina *simetría de traslación*.

El paralelepípedo de volumen mínimo con cuya repetición se puede construir toda la red cristalina, se denomina *celdilla* o *paralelepípedo elemental* del cristal. Esta celdilla, sus dimensiones, forma y disposición de los átomos en ella, determina completamente la estructura del cristal. Las magnitudes y direcciones de las tres aristas de la celdilla elemental definen a tres vectores denominados *periodos de identidad*, *distancias nodales* o *intervalos de fila* de la red, y es la distancia mínima a que se puede desplazar para que coincida consigo misma.

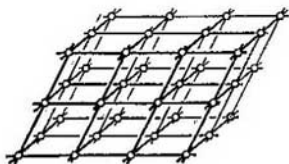


Fig. 11.

Si en un vértice (nudo) de una celdilla elemental cualquiera hay un átomo, evidentemente habrá esta misma clase de átomos en los demás vértices de esta celdilla y de las demás celdillas de la red. El conjunto de estos átomos iguales e igualmente distribuidos se denomina *red de Bravais* del cristal dado (fig. 11). Esta red representa, digamos, el esqueleto de la red cristalina, en el cual se plasma toda la simetría de traslación,

es decir, toda la periodicidad de la red. Todos sus átomos pueden hacerse coincidir entre sí mediante una u otra traslación de la red.

No hay que creer que los átomos de la red de Bravais comprenden absolutamente todos los átomos del cristal; es más, no es obligatorio que comprendan incluso todos los átomos de una misma clase. Aclaremos esta importante circunstancia con un ejemplo, en el que, para mayor claridad, consideraremos una red plana, que es más fácil de representar en el dibujo, y no la espacial, que es la que en realidad posee el cristal.

Sea una red de átomos iguales, que en la fig. 12, *a* se representan por puntos. Es fácil ver que, aunque

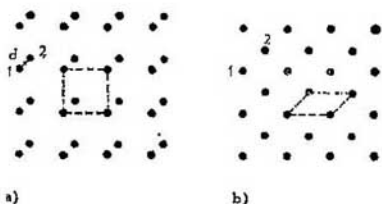


Fig. 12.

todos estos átomos son de la misma clase, en el sentido cristalográfico no tienen el mismo valor, es decir, no son *equivalentes*. Efectivamente, la igualdad de la disposición de todos los átomos de la red de Bravais significa que si un átomo cualquiera de la red tiene, a cierta distancia y en determinada dirección, un átomo vecino, los demás átomos de la red de Bravais tendrán también vecinos iguales en las mismas direcciones y a iguales distancias. En este sentido está claro que los puntos del tipo 1 de la fig. 12, *a* no se han dispuesto como los del tipo 2. El punto 1 tiene el vecino 2 a la distancia d , pero el 2 no tiene vecino a esta misma distancia y en la misma dirección. Por eso, los puntos 1 y 2 no son equivalentes entre sí y no forman juntos ninguna red de Bravais. Los puntos de cada uno de estos tipos por separado forman redes de Bravais desplazadas entre sí a la distancia d .

Si desplazamos los átomos 2 al centro de los cuadrados formados por los puntos 1 (fig. 12, *b*), todos los átomos serán equivalentes; el átomo 2 tendrá un vecino 1 a la misma distancia (y en la misma dirección) a que el átomo 1 tiene el vecino 2. En esta estructura,

todos los átomos juntos forman una red única de Bravais.

De lo dicho se deduce claramente que, en el caso general, el cristal es un conjunto de varias redes de Bravais introducidas una en otra. Cada una de ellas corresponde a determinada clase y disposición de los átomos, teniendo en cuenta que todas estas redes, consideradas simplemente como sistemas de puntos, son idénticas. Si todos los átomos de un cristal forman una red de Bravais, cada celdilla elemental contiene un átomo solamente. Así, en la fig. 12, *b*, cada celdilla (en la red plana es un paralelogramo) contiene un átomo, el 1 ó el 2. En este sentido observemos que, al contar el número de átomos correspondientes a una celdilla, hay que considerarle solamente un vértice, mientras que los demás vértices se consideran pertenecientes a las celdillas vecinas.

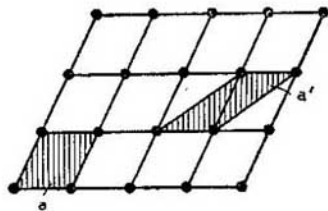


Fig. 13.

Si la red cristalina se compone de varias redes de Bravais, la celdilla elemental contendrá varios átomos, uno por cada red de Bravais. Así, en la red representada en la fig. 12, *a* la celdilla elemental contiene dos átomos: un átomo del tipo 1 y otro del tipo 2.

La división del cristal en paralelepípedos fundamentales, celdillas elementales, no es unívoca. La celdilla elemental, en principio, se puede elegir de infinitas maneras. Para aclarar esto recurramos de nuevo al dibujo que representa una red plana (fig. 13). Está claro que con la misma razón podemos considerar celdilla elemental el paralelogramo *a*, que el *a''*. A pesar de esta diversidad, lo importante es que la celdilla elemental, de cualquier modo que la elijamos, contendrá el mismo número de átomos y tendrá el mismo volumen (en la red plana, la misma superficie, ya que las áreas de los paralelogramos *a* y *a''*, de iguales base y altura, son iguales). Efectivamente, analicemos los átomos de una misma especie y dispo-

sición. De lo anterior está claro que en cada celdilla hay un átomo de éstos; por eso, el número de celdillas en un volumen V del cristal será igual al número N de estos átomos; por consiguiente, el volumen de una celdilla será $v=V/N$, independientemente del modo de elección.

§ 43. Sistemas cristalinos

La red de Bravais es una característica muy importante del cristal y la clasificación de los distintos grupos de simetría de los cristales se basa, ante todo, en la clasificación de los diferentes tipos de redes de Bravais. Todas las redes de Bravais tienen simetría de traslación. Pero, además de esta simetría, pueden poseer también los elementos de simetría de que se habló en el § 40, o sea, diferentes ejes y planos de simetría. Precisamente de esta simetría se habla en la clasificación que se expone a continuación.

Así, cada nudo de la red de Bravais es centro de simetría. Efectivamente, a cada átomo de la red le corresponde otro átomo situado en la recta que pasa por el nudo y el primer átomo de manera que la distancia de ambos átomos al nudo es la misma. Por eso, cualquier red de Bravais posee centro de simetría. Pero las redes de Bravais pueden tener simetrías mayores. Un cuerpo de dimensiones finitas, una molécula, en principio, puede poseer un eje de simetría de cualquier orden. En contraposición a ello, una estructura periódica, la red cristalina, solamente puede tener ejes de simetría de muy pocos órdenes: 2° , 3° , 4° y 6° . Efectivamente, en una red, un eje de simetría, por ejemplo, de 5° orden significaría que en la red se podría hallar un plano con nudos que formasen un pentágono regular. Pero esto es absurdo, ya que el plano se puede llenar sin espacios libres solamente con triángulos, cuadrados o hexágonos regulares. Para demostrar esto, veamos un punto cualquiera en un plano en el cual concurren las aristas de los polígonos que llenen este plano. Como se ha de llenar sin rendijas, el ángulo del polígono (ángulo entre dos lados vecinos) debe ser igual a una parte entera de 2π , es decir, debe ser igual $2\pi/p$, donde p es un número entero cualquiera. Por otra parte, se sabe que el ángulo de un polígono regular de n ángulos es igual a $\pi(n-2)/n$. Por eso

$$\frac{\pi(n-2)}{n} = \frac{2\pi}{p},$$

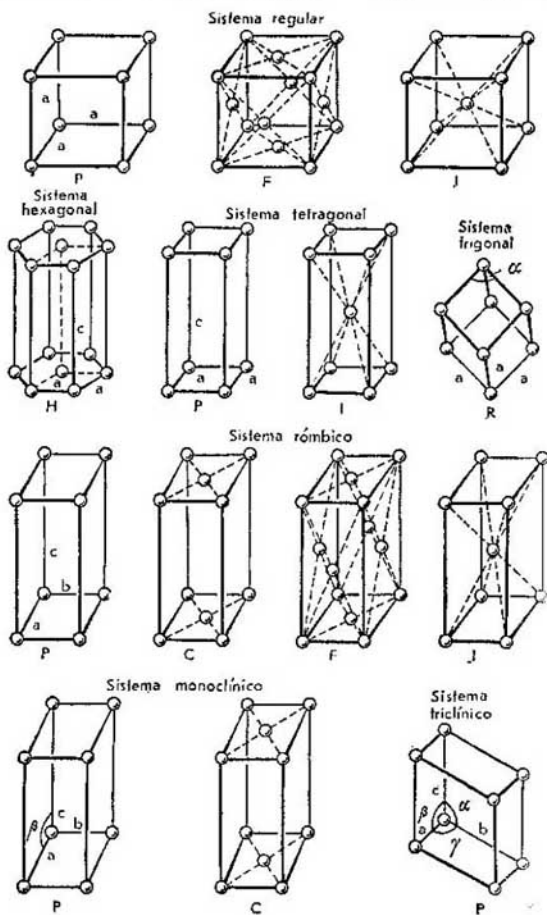


Fig. 14.

de donde se ve que la magnitud

$$\frac{2n}{n-2}$$

debe ser un número entero. Pero esto tiene lugar solamente cuando $n=3, 4, 6$.

Así vemos que en las redes no puede haber, ni mucho menos, toda clase de simetrías. De aquí que haya solamente muy pocos grupos de simetría de las redes de Bravais. Estos grupos se denominan *sistemas cristalinos*. Expongámoslos aquí.

1. Sistema regular o cúbico. La red de Bravais más simétrica es la que posee la simetría del cubo (en lugar de enumerar los ejes y planos de simetría de la red, indicaremos simplemente la figura geométrica, en el caso dado, el cubo, que también posee la misma simetría).

Se obtiene esta red colocando los átomos en los vértices (nudos) de las celdillas cúbicas. Pero este no es el único modo de construir la red de Bravais de simetría del cubo. Está claro que no infringiremos la simetría del cubo, si colocamos un átomo en los centros de todas las celdillas cúbicas, ya que todos los átomos, los de los vértices y los de los centros de las celdillas cúbicas, tendrán igual disposición mutua, (tienen los mismos vecinos), es decir, pertenecen todos a una misma red de Bravais. Se puede construir también una red cúbica de Bravais añadiendo un átomo en los centros de cada una de las caras.

Así tenemos que hay tres diferentes redes de Bravais que se refieren al sistema cúbico. Estas redes se denominan respectivamente *simple* o *primitiva*, *de malla centrada* y *de caras centradas* (y se designan con los símbolos *P*, *I* y *F*). En la fig. 14 se indica la disposición de los átomos en las celdillas de estas redes. La celdilla cúbica de la red simple de Bravais es al mismo tiempo la celdilla elemental, mientras que las celdillas de las redes *I* y *F* no son elementales; cosa clara ya del simple hecho de que en estas celdillas hay más de un átomo. En la fig. 15 se representan (con líneas gruesas) las celdillas elementales de los tres tipos de redes cúbicas. En la celdilla cúbica de malla centrada hay dos átomos (por ejemplo, los átomos *I* y *I'* de la fig. 15), y en la de caras centradas, cuatro átomos (los átomos *I*, *I'*, *I''* y *I'''* del dibujo); los demás átomos hay que considerarlos de las celdillas vecinas. De esto se deduce que los volúmenes de las celdillas elementales de las redes de mallas centra-

das y de caras centradas son respectivamente iguales a $a^2/2$ y a $a^3/4$, donde a es la longitud de la arista del cubo fundamental.

La magnitud a , denominada *constante de la red*, es el único parámetro numérico que caracteriza a la red cúbica.

Las celdillas elementales de las redes de mallas centradas y de caras centradas poseen una forma que no tiene la simetría del cubo, que es propia de la red. En este sentido, la representación de la estructura del cristal

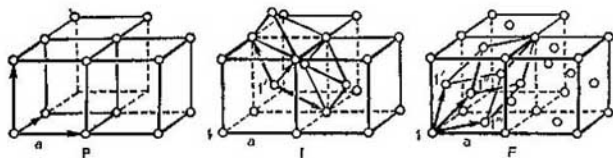


Fig. 15.

mediante celdillas, no revela tan claramente su simetría, como si la representáramos mediante celdillas cúbicas no elementales. Por eso, generalmente se caracteriza la disposición de los átomos en el cristal con relación a estas últimas celdillas. En este caso se utiliza un sistema de coordenadas rectangulares de ejes X, Y, Z a lo largo de las aristas de la celdilla cúbica, y como unidad de medición se toma la constante a . Así, el átomo que se halla en el centro del cubo, se caracteriza por tres coordenadas $1/2, 1/2$ y $1/2$; las coordenadas $1/2, 1/2$ y 0 se refieren al átomo que se halla en el centro de la cara que coincide con el plano XY , y así sucesivamente.

2. Sistema tetragonal o cuadrático. Si se alarga el cubo a lo largo de una de las aristas, se obtiene una figura geométrica menos simétrica: un prisma rectangular cuadrado. Su simetría responde a la de la red de Bravais del sistema tetragonal.

Hay dos tipos de estas redes: simple y de malla centrada (las celdillas se representan también en la fig. 14). A primera vista parece que se podría construir una red de la misma simetría añadiendo a la celdilla simple un átomo en el centro de cada una de las bases del prisma (fig. 16). Pero es fácil ver que esta red se reduciría de nuevo a la red tetragonal simple de Bravais eligiendo sencillamente otra celdilla prismática cuadrada fundamental, es decir, no obtendríamos nada nuevo. Efectivamente, uniendo los átomos de los centros de las bases de dos celdillas vecinas con



Fig. 16.

los de los vértices (como se indica en la fig. 16), obtendríamos un nuevo prisma que no se diferenciaría, por su simetría, del prisma primitivo, pero con átomos solamente en los vértices. Por una causa análoga no hay red tetragonal de Bravais de caras centradas, pues se reduciría a la de malla centrada. La red tetragonal se caracteriza por tener dos constantes: la longitud de la arista de la base, a , y la altura c de la celdilla prismática.

3. Sistema rómbico u ortorrómbico. Si estiramos el cubo a lo largo de dos de sus aristas, pero de diferente manera, obtenemos un paralelepípedo rectangular con aristas de tres longitudes distintas. La simetría de esta figura corresponde a la de la red del sistema rómbico.

Hay cuatro tipos de redes rómbicas de Bravais: simple, de malla centrada, de caras centradas y de bases centradas (la última se designa con el símbolo C). En la fig. 14, lo mismo que para los demás sistemas, se representan los paralelepípedos fundamentales de las redes rómbicas de forma correspondiente a toda la simetría del sistema. Estos paralelepípedos fundamentales también coinciden con la celdilla elemental solamente en el caso de la red simple de Bravais. Tres parámetros caracterizan la red rómbica: las longitudes a , b y c de las aristas de la celdilla prismática. Estas magnitudes se eligen como unidades de longitud de los tres ejes de coordenadas rectangulares dirigidos según las correspondientes aristas de la celdilla.

4. Sistema monoclinico. Este sistema posee una simetría inferior. La simetría corresponde a la de la figura que se obtiene de un paralelepípedo rectangular, si se le «inclina» en la dirección de una de las aristas. Esto es un paralelepípedo rectangular de base arbitraria. A este sistema pertenecen dos redes de Bravais (la P y la C de la fig. 14).

Cuatro parámetros caracterizan la red monoclinica: las longitudes a , b y c de las aristas de la celdilla y el ángulo β entre dos aristas (los demás ángulos son rectos). En este sistema, para determinar la posición de los átomos también se utiliza un sistema de coordenadas de ejes dirigidos según tres aristas de la celdilla. Este sistema de coordenadas ya no será rectangular, sino oblicuo.

5. Sistema triclinico. Este sistema corresponde a la simetría de un paralelepípedo oblicuo arbitrario. Esta es la simetría ínfima (solamente posee el centro

de simetría). A este sistema pertenece solamente un tipo de red de Bravais, el *P*, caracterizado por las longitudes a , b , c de tres aristas de la celdilla y los ángulos α , β , γ entre ellas.

Algo aislados se mantienen otros dos sistemas cristalinos más.

6. Sistema hexagonal. Las redes de este sistema poseen una simetría muy elevada, correspondiente a la del prisma rectangular hexagonal regular. La red de Bravais de este sistema (designada con el símbolo *H*) se puede realizar de una manera solamente; los nudos se hallan en los vértices de prismas hexagonales y en los centros de las bases hexagonales.

Dos parámetros determinan la red hexagonal: la longitud del lado de la base, a , y la altura c de la celdilla prismática. La celdilla elemental de esta red es un paralelepípedo de base romboidal (en la fig. 14 se indica con líneas de trazos). Las aristas de esta celdilla elemental (la altura c y dos lados a de la base con un ángulo de 120° entre ellos) se eligen como ejes de coordenadas para describir la posición de los átomos de la red.

7. Sistema trigonal o romboédrico. Este sistema corresponde a la simetría del romboedro, figura que se obtiene extendiendo o comprimiendo un cubo en la dirección de una de sus diagonales espaciales (sin variar la longitud de sus aristas). Todas las caras son rombos iguales. En la única red posible de Bravais de este sistema (símbolo *R*), los nudos se hallan en los vértices de romboedros. Dos parámetros caracterizan a esta red: la longitud a de las aristas de la celdilla y el ángulo α entre ellas (cuando $\alpha=90^\circ$, el romboedro se transforma en cubo).

Aquí se termina la enumeración de las distintas redes de Bravais. Vemos que solamente hay siete grupos de simetrías de las redes de Bravais, siete sistemas cristalinos. A estos sistemas les corresponden 14 tipos diferentes de redes de Bravais.

Los sistemas cristalinos son la clasificación fundamental de los cristales y se indican en primer lugar al caracterizar las propiedades del cristal. Las frecuentes expresiones de «cristal hexagonal», «cristal cúbico», etc., utilizadas para abreviar, se deben entender como indicación al sistema cristalino a que pertenece (y no, por ejemplo, a la forma externa de uno u otro modelo).

Indiquemos también que los cristales de los sistemas trigonal, hexagonal y tetragonal (cuyas redes vienen

caracterizadas por dos parámetros) se denominan *monoaxiles*, y los de los sistemas triclínico, monoclínico y rómbico, *biaxiles*.

§ 44. Grupos espaciales

Las examinadas redes de Bravais son un conjunto de átomos equivalentes, es decir, de átomos iguales y dispuestos de igual manera. Se ha subrayado que la red de Bravais, hablando en general, no comprende todos los átomos del cristal, y la red real se puede representar como un conjunto de redes de Bravais introducidas una en otra. Aunque todas estas redes son idénticas, la simetría del conjunto, es decir, la del cristal real, puede diferenciarse considerablemente de la de una red de Bravais.

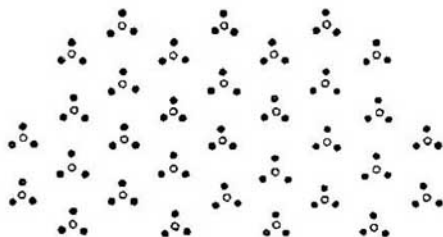


Fig. 17.

Ilustremos esta importante circunstancia con un ejemplo, recurriendo de nuevo, para mayor claridad, a la representación de la red plana «hexagonal» de Bravais. En la fig. 17, los circulitos en blanco representan los nudos de la red plana «hexagonal» de Bravais. Por cada nudo de esta red pasa (perpendicularmente al plano del dibujo) un eje senario de simetría. Supongamos que sobre esta red se superponen otras tres redes de la misma clase y cuyos nudos sean los circulitos negros de la fig. 17. Está claro que en la red real resultante obtenida, los ejes de simetría serán ternarios y no senarios. Así vemos que la complejidad de la red real conduce a una disminución de su simetría en comparación con la de la red de Bravais.

En las redes cristalinas reales hay que considerar también la posibilidad de que surjan elementos de simetría especiales, consistentes en combinaciones de rotaciones o reflexiones con traslaciones paralelas.

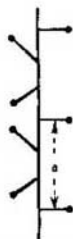


Fig. 18.

Estos nuevos elementos son los *ejes helicoidales* o de *tornillo* y los *planos de deslizamiento y reflexión*. La red poseerá un eje helicoidal de orden n , si coincide consigo misma al girar alrededor del eje un ángulo de $2\pi/n$, desplazándose al mismo tiempo a lo largo de este eje una distancia determinada. Para ilustrar esta simetría, en la fig. 18 se ha representado una cadena lineal de átomos (que suponemos infinita a ambos lados) que posee un eje helicoidal ternario. Esta estructura es periódica de período a : coincide consigo misma al realizar un giro de 120° alrededor del eje desplazándose al mismo tiempo a lo largo del eje a la distancia $a/3$. Si la red coincide consigo misma al reflejarla sobre cierto plano desplazándola al mismo tiempo a una distancia determinada según este mismo plano, se dice que la red posee un plano de deslizamiento y reflexión.

Así tenemos que el cristal real posee determinada simetría de traslación, caracterizada por el tipo de red de Bravais, y puede poseer, además, ejes de simetría simples y helicoidales, ejes de inversión y planos de simetría simples y de deslizamiento y reflexión. Todos estos elementos pueden unirse entre sí en distintas combinaciones.

El conjunto de todos los elementos de simetría de la red cristalina real se denomina *grupo espacial*. El grupo espacial determina de la manera más completa la simetría de la disposición de los átomos en el cristal, es decir, la simetría de su estructura interna. Resulta que existen en total 230 grupos espaciales distintos, que los determinó E. S. Fiódorov. Se ha establecido distribuir estos grupos por los sistemas cristalinos según la red de Bravais con que se realizan. Naturalmente no vamos a describir aquí todos los grupos espaciales; solamente indicaremos cómo se distribuyen por los diferentes sistemas:

Triclínico	2	Tetragonal	68
Monoclínico	13	Hexagonal	45
Rómbico	59	Regular	36
Trigonal	7		

En el § 41 se ha descrito el fenómeno de enantiomorfismo de las moléculas. Este fenómeno ocurre también en los cristales. Efectivamente, existen cristales cuyas redes son reflexiones especulares unas de otras y, al mismo tiempo, no pueden hacerse coincidir unas con otras mediante desplazamiento alguno en el

espacio. Como en las moléculas, el enantiomorfismo de los cristales puede ser posible sólo en los casos en que la red cristalina no posea ningún elemento de simetría que contenga reflexión en cualquier plano. Un ejemplo de esta clase de estructuras son los cristales del cuarzo corriente, que pertenecen al sistema trigonal (es la modificación del cuarzo que existe a temperaturas habituales).

§ 45. Clases cristalinas

Hay muchos fenómenos físicos en los que la estructura atómica de la materia no se revela directamente. Al estudiar estos fenómenos, la sustancia se puede considerar como un medio continuo, abstrayéndonos de su estructura interna. Estos fenómenos son, por ejemplo, la dilatación térmica de los cuerpos, las deformaciones de los cuerpos bajo la acción de fuerzas exteriores, etc. Las propiedades de la sustancia como medio continuo se denominan *propiedades macroscópicas*.

Las propiedades macroscópicas del cristal son diferentes en distintas direcciones. Por ejemplo, la propiedad de pasar la luz a través del cristal depende de la dirección del rayo; la dilatación térmica del cristal, hablando en general, es distinta en diferentes direcciones; la deformación del cristal depende de la orientación de las fuerzas externas, etc. El origen de esta dependencia de las propiedades respecto de la dirección es debido, evidentemente, a la estructura del cristal. Por ejemplo, está claro que la extensión de un cristal cúbico según la dirección paralela a las aristas de las celdillas de la red se efectuará de diferente manera que la extensión según la diagonal de estas celdillas.

La dependencia de las propiedades físicas del cuerpo respecto de la dirección se denomina *anisotropía*. Se puede decir que el cristal representa un medio anisótropo. En este sentido, los cristales se diferencian de los medios *isótropos* (líquidos y gases), cuyas propiedades son las mismas en todas las direcciones. Aunque las propiedades del cristal son distintas en diferentes direcciones, hay que señalar que en determinadas direcciones pueden resultar iguales; estas direcciones serán equivalentes. Así, por ejemplo, si un cristal posee centro de simetría, a cada una de las direcciones le corresponderá otra dirección opuesta equivalente. Si el cristal posee plano de simetría, a cada dirección le corresponderá otra equivalente que



Fig. 19.

se obtenga de la primera mediante una reflexión especular en el plano de simetría (fig. 19), etc.

Está claro que «la simetría de las direcciones» del cristal, y con ello, la simetría de sus propiedades macroscópicas, la determinan los ejes y planos de simetría. En este caso, la simetría de traslación es insignificante, ya que el desplazamiento paralelo de la red no altera las direcciones de la misma; por eso, para las propiedades macroscópicas del cristal no es esencial qué red de Bravais posee éste precisamente (de entre las posibles del sistema dado). Desde este punto de vista es indiferente qué eje de simetría posee el cristal: simple o helicoidal, del orden dado se sobreentiende. De la misma manera no importa si el plano de simetría es simple o es de deslizamiento y reflexión.

Hay un número limitado, 32 precisamente, de posibles combinaciones de planos y ejes de simetría que pueden determinar la simetría de las direcciones del cristal. Estas combinaciones, tipos de simetría macroscópica del cristal como medio anisótropo, se denominan *clases cristalinas*.

De lo dicho se ve claramente la relación entre grupo espacial y clase del cristal. Esta última se obtiene del grupo espacial, si se ignoran en el grupo todas las traslaciones y no se distinguen los ejes simples y helicoidales, ni los planos simples y de deslizamiento. Las clases cristalinas, lo mismo que los grupos espaciales, se distribuyen por los distintos sistemas según la red de Bravais con que puedan realmente aparecer en los cristales. En este caso resulta que al sistema triclínico pertenecen 2 clases; al monoclinico, 3; al rómbico, 3; al tetragonal, 7; al regular, 5; al trigonal, 5, y al hexagonal, 7 (no obstante, hay que observar que todas las clases del sistema trigonal pueden realizarse tanto en la red trigonal como en la hexagonal de Bravais).

Entre las clases correspondientes al sistema dado de simetría, hay una clase que posee la simetría completa del sistema; las demás clases poseen una simetría inferior, es decir, tienen menos elementos de simetría que el sistema correspondiente.

Como ejemplo de relación entre las propiedades macroscópicas del cristal con la simetría, veamos la dilatación térmica del mismo.

Un cuerpo isotrópico, líquido o gas, al calentarlo se dilata por igual en todas las direcciones; por eso lo caracteriza un sólo coeficiente de dilatación térmica.

Es fácil ver que lo mismo ocurre en los cristales cúbicos. Efectivamente, el cristal del sistema regular, al dilatarse debe seguir siendo cristal del mismo sistema, es decir, su red permanecerá semejante a sí misma; por consiguiente, este cristal debe dilatarse por igual en todas las direcciones, es decir, como un cuerpo isótropo. Mientras tanto, el cristal tetragonal, permaneciendo tetragonal al dilatarse, la relación entre la altura c y la anchura a de la celdilla no es obligatorio que permanezca invariable. Por eso, el cristal se dilata de manera diferente según la altura que según las direcciones perpendiculares a esta altura de la celdilla. En otras palabras, la dilatación térmica del cristal tetragonal (y lo mismo ocurre con todos los cristales uniaxiales) la determinan dos coeficientes. Y la dilatación térmica de los cristales biaxiales la caracterizan tres coeficientes, que determinan la dilatación según tres ejes.

§ 46. Redes de los elementos químicos

Al pasar a la descripción de la estructura de algunos cristales reales, recordemos que, aunque para abreviar hemos hablado de la disposición de los átomos en los nudos de la red, sería más exacto hablar de la disposición de los núcleos atómicos. Los átomos de la red cristalina no se pueden considerar puntos, ni mucho menos, ya que llenan en grado considerable el volumen de la red, de modo que parece que los átomos vecinos entran en contacto unos con otros. En este caso hay que tener en cuenta que, lo mismo que en las moléculas, las regiones externas de sus capas electrónicas se deforman considerablemente y «se colectivizan», a diferencia de las capas de los átomos aislados. Por eso, la manera más exacta y completa de describir la estructura del cristal consiste en determinar la distribución de la «densidad electrónica» según todo el volumen de la red.

Empecemos por la estructura cristalina de los elementos químicos. Se conocen unas 40 especies diferentes de redes formadas por los elementos, entre ellas las hay muy complejas. Así, una de las modificaciones del manganeso cristaliza según la red cúbica de malla centrada de Bravais y contiene 58 átomos por celdilla cúbica (29 átomos por celdilla elemental). Una de las modificaciones del azufre posee una red rómbica de caras centradas de Bravais con 128 átomos por celdilla (32 átomos por celdilla elemental). No

obstante, la mayoría absoluta de los elementos cristaliza en redes relativamente simples.

Unos veinte elementos forman cristales cúbicos en los que todos los átomos constituyen una red de Bravais de caras centradas; entre ellos, muchos metales (Ag, Au, Cu, Al y otros), y los cristales de los gases nobles. En los cristales de unos quince elementos (metales), los átomos forman una red de Bravais cúbica de malla centrada; entre ellos, los cristales de los metales alcalinos (Li, Na, K). Al mismo tiempo tenemos que ningún elemento forma la red cúbica simple.

Para aclarar las causas de esta preferencia por las estructuras de mallas y caras centradas, analicemos el problema del empaquetamiento de esferas iguales, que, aunque este problema, por su sentido físico, no le atañe directamente, se le asemeja en su planteamiento.

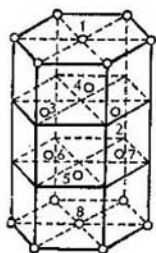
Veamos primeramente el empaquetamiento en forma de una red cúbica simple. En esta red se tocan entre sí las esferas que se hallan en los vértices vecinos de las celdillas cúbicas. Por eso, la arista a del cubo es igual al diámetro d de las esferas. Como a cada celdilla cúbica de esta red le corresponde sólo una esfera, podemos decir que a cada esfera le corresponderá un volumen de $a^3 = d^3$. Mientras que el volumen de la propia esfera es igual a $\frac{4\pi}{3} \frac{d^3}{8} = 0,52 d^3$, es decir, solamente es el 52% volumen de la celdilla.

En el sentido de densidad de empaquetamiento resulta más ventajosa la red cúbica de malla centrada. En este caso, los vecinos más próximos que deben tocarse entre sí, son los átomos de los vértices y del centro de la celdilla. Como la diagonal espacial del cubo es igual a $a\sqrt{3}$, debe cumplirse la igualdad $d = a\sqrt{3}/2$, de donde el volumen de la celdilla cúbica será $a^3 = 8d^3/3\sqrt{3}$. Pero a cada celdilla cúbica de malla centrada le corresponden dos esferas, mientras que el volumen de la celdilla elemental que contiene una esfera, es de $4d^3/3\sqrt{3}$. Es fácil calcular que la esfera llena el 68% de este volumen.

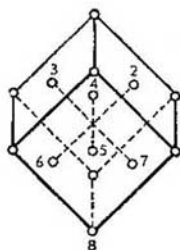
Por fin resulta que el empaquetamiento más ventajoso es el de la red cúbica de caras centradas (por esta causa se denomina *empaquetamiento denso cúbico* o *red cúbica compacta*). En este caso, la esfera cuyo centro se halla en el centro de la cara, debe tener contacto con las esferas cuyos centros se hallan en los vértices

del cubo. Por eso, la longitud de la arista del cubo es $a = d\sqrt{2}$. El volumen de la celdilla elemental es 4 veces menor que el del cubo e igual a $\frac{a^3}{4} = \frac{d^3}{\sqrt{2}}$; la esfera ocupa ya en este caso el 73^o/₁₀₀ este volumen.

Si se mira esta red en dirección de la diagonal del cubo, resulta que puede describirse diciendo que consta de capas consecutivas, en cada una de las cuales los nudos (centros de las esferas) forman una red de triángulos regulares (fig. 20, a). En cada capa siguiente, los



a)



b)

Fig. 20.

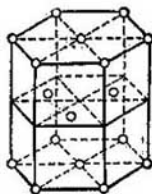


Fig. 21.

nudos se ubican sobre los centros de los triángulos de la capa anterior, teniendo en cuenta que hay tres especies de capas que se alternan consecutivamente (en la fig. 20, a y b con cifras se indica la correspondencia entre los nudos de estas capas y los de la celdilla cúbica).

Pero un empaquetamiento tan denso se podrá hacer, evidentemente, alternando sólo dos especies de capas (fig. 21). En este caso se obtiene una red hexagonal con dos átomos en la celdilla elemental. Esta red se denomina *empaquetamiento denso hexagonal* o *red hexagonal compacta*. En el modelo con esferas, la relación de la altura de la celdilla prismática c de esta red (distancia entre las capas iguales más próximas) y la longitud a de la arista de la base debe ser igual a $c/a = 1,63$, como se puede calcular fácilmente.

Este tipo de red hexagonal compacta la poseen quince elementos (metales): Mg, Cd, Zn, Ni y otros. En la mayoría de los casos, la relación de los ejes de estos cristales está muy próxima al valor ideal de 1,63; pero hay excepciones: la relación c/a del Cd y del

Zn es aproximadamente de 1,9, es decir, la red está más alargada según la altura del prisma, que en el caso del empaquetamiento denso de las esferas. Esta circunstancia conduce a que estos cristales posean una anisotropía más marcada.

Las tres clases de redes descritas son las más difundidas entre los elementos. Además hay redes específicas, en las cuales cristalizan muy pocos elementos. Veamos, a grandes rasgos, algunas de ellas.

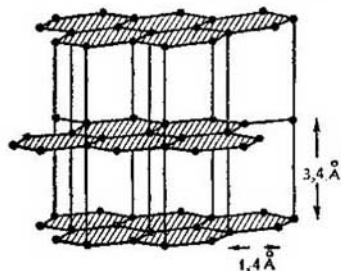


Fig. 22.

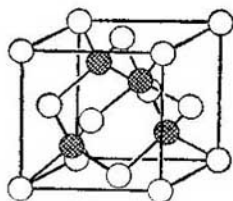


Fig. 23.

La modificación más extendida del carbono, el grafito, posee una red hexagonal, en la que, excepto el grafito, no cristaliza ningún otro elemento. Esta red tiene carácter laminar: consta de capas planas paralelas en las que los átomos se ubican en los vértices de hexágonos regulares (fig. 22). La distancia entre las capas vecinas es 2,3 veces mayor que la distancia entre los átomos dentro de la capa. Con ello se explica la facilidad de exfoliación del grafito.

Otra modificación del carbono, el diamante, posee una red cúbica, que se puede representar como formada por dos redes de Bravais de caras centradas desplazadas entre sí a una distancia igual a la cuarta parte de la diagonal del cubo. De resultas de ello, cada átomo de carbono se halla cercado por cuatro átomos vecinos, que se hallan a la misma distancia del primero, ubicados en los vértices de los tetraedros. Esta red se representa en la fig. 23 (tanto los círculos oscuros como los blancos representan átomos de carbono, pero que forman diferentes redes de Bravais). Los homólogos del carbono, el silicio y el germanio, también poseen la red del tipo del diamante.

Un carácter interesante tiene la red del bismuto. Esta red pertenece al sistema trigonal, pero es notable por

aproximarse mucho a la del regular. La red del bismuto se puede considerar como una red cúbica simple ligeramente deformada: un cubo un tanto aplastado según la diagonal (de manera que se convierte en romboedro) y, además, con unos pequeños desplazamientos complementarios de los átomos.

Todas las redes descritas de los elementos tienen el denominado carácter *atómico*: en ellas no se pueden distinguir las moléculas por separado. Sin embargo, algunos elementos cristalizan en *redes moleculares*. Así, por ejemplo, el hidrógeno, el nitrógeno, el oxígeno y los halógenos (F, Cl, Br, I) forman redes que parecen construidas de moléculas diatómicas: pares de átomos que entre sí se hallan mucho más cerca que de los demás pares.

§ 47. Redes de los compuestos químicos

Las redes cristalinas de los compuestos químicos revelan casi la misma diversidad que los propios compuestos químicos. Aquí describiremos solamente algunos de los ejemplos más simples.

Una de las estructuras más difundidas es la red del tipo del cloruro sódico ClNa (sal común). Es una red cúbica en la que la mitad de los nudos está ocupada por átomos de Na, y la otra mitad, por átomos de Cl

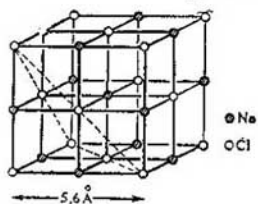


Fig. 24.

(fig. 24). Cada átomo de Na está simétricamente rodeado de seis átomos Cl, y viceversa. La red de Bravais del ClNa es una red cúbica de caras centradas. En cada celdilla elemental hay dos átomos: uno de Na y otro de Cl.

La disposición de los átomos en la red cristalina se ha establecido describiéndola mediante coordenadas, eligiendo el sistema de coordenadas como se ha indicado en el § 43. En este caso es suficiente indicar solamente la posición de un mínimo número de átomos de los cuales se puede determinar la posición de los

demás añadiéndole uno u otro período de identidad de la red. Así, por ejemplo, la estructura del ClNa se describe mediante las siguientes coordenadas de dos átomos con respecto a los ejes de la celdilla cúbica: Na $(0, 0, 0)$, Cl $(1/2, 1/2, 1/2)$. Las coordenadas de los demás átomos se obtienen de éstas sumándoles (o restándoles) cierto número de períodos de identidad que, como tales, se pueden elegir, por ejemplo, las distancias desde el origen de coordenadas hasta los centros de tres caras del cubo (los puntos de coordenadas $(0, 1/2, 1/2)$ $(1/2, 0, 1/2)$, $(1/2, 1/2, 0)$).

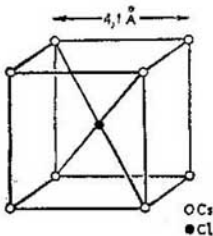


Fig. 25.

También está muy difundida la red del tipo del cloruro de cesio, ClCs (fig. 25). Posee una red cúbica simple de Bravais. En los vértices de las celdillas cúbicas se hallan los átomos de una especie y, en los centros, los de otra especie.

Recordemos también la red del tipo de la blenda de cinc, ZnS . Se obtiene de la red del diamante descrita en el § 46, llenando los nudos de las dos redes de Bravais de caras centradas, introducidas una en otra, (círculos oscuros y blancos de la fig. 23) con distintos átomos: de Zn y de S . Cada átomo de Zn según los vértices del tetraedro, está rodeado de cuatro átomos de S , y viceversa. La posición de los átomos en la celdilla cúbica se determina mediante las siguientes coordenadas: Zn $(0, 0, 0)$, S $(1/4, 1/4, 1/4)$. Una particularidad característica de las redes arriba descritas es la imposibilidad de distinguir en ellas grupos independientes de átomos, que son las moléculas de la composición. Todo el cristal parece ser una molécula gigante.

La distribución de los electrones en estas redes es de tal manera, que alrededor de unos átomos hay, como término medio, más electrones que debería haber en el átomo neutro, y alrededor de otros átomos, menos.

Estas redes se pueden describir de manera bastante adecuada como constituidas de iones; por eso se denominan *iónicas*. Así tenemos que la red del ClNa consta de iones positivos Na^+ y negativos Cl^- . Hay también redes de compuestos químicos en las que pueden distinguirse moléculas aisladas como grupos de átomos muy próximos (a esta clase, en particular, corresponden muchos cristales orgánicos). Pero la división de los cristales en atómicos y moleculares tiene, en alto grado, un carácter condicional, y entre ellos puede haber diferentes casos intermedios. En este sentido, como ejemplo característico se puede aducir la red de I_2Cd , que tiene una estructura como si fuera laminar. Cada capa de átomos Cd está interpuesta entre dos capas contiguas de átomos de I; mientras que estas capas «triples» están alejadas entre sí a gran distancia. Aunque esta última circunstancia recuerda la composición molecular de esta sustancia, es imposible distinguir moléculas aisladas en el interior de cada capa.

§ 48.

Planos reticulares

Al estudiar los cristales, frecuentemente hay necesidad de examinar distintos planos que los cortan. Puede ser un plano que represente una faceta (cara) natural del cristal; pueden ser planos de determinadas propiedades físicas; por ejemplo, cuando se escinde un cristal con un cuchillo, generalmente la escisión tiene lugar según determinados planos del cristal, que se distinguen por sus propiedades. Por último, el estudio de los distintos planos de la red se efectúa por los métodos del análisis estructural mediante rayos X.

Está claro que pueden poseer sentido físico solamente los planos que pasan por los átomos del cristal (es decir, por los nudos de la red). Estos planos precisamente son los que vamos a estudiar: se denominan *planos reticulares* o *redes planas*.

En el § 43 ya se ha indicado que al estudiar los cristales se utiliza un sistema de coordenadas (oblicuas, en el caso general), cuyo ejes están relacionados de manera determinada con las aristas de la celdilla de la red de Bravais, midiéndose las coordenadas en las unidades de longitud a , b y c , que son las longitudes de estas aristas (distintas entre sí, en el caso general).

Designemos las coordenadas por las letras x , y y z . Las coordenadas de los nudos de la red de Bravais se representarán por números enteros (o números enteros y mitades; pero esta circunstancia no altera nada los razonamientos ulteriores). La ecuación general del plano es

$$lx + my + nz = k$$

(tanto en las coordenadas rectangulares como en las oblicuas). Si l , m , n y k son números enteros, esta igualdad considerada como una ecuación con tres magnitudes x , y , z desconocidas, tiene infinidad de soluciones de números enteros. En otras palabras, en el plano hay infinidad de nudos de la red, es decir, tenemos un plano reticular.

Es fácil aclarar el sentido de los números l , m y n . Haciendo $y=z=0$ en la ecuación, obtenemos $x=k/l$, que es la coordenada del punto en que el plano corta al eje x . De manera análoga hallamos que los segmentos que corta el plano en los ejes y y z son respectivamente iguales a k/m y k/n . Por consiguiente, las longitudes de los segmentos que corta el plano en los tres ejes se relacionarán entre sí de la siguiente manera:

$$\frac{1}{l} : \frac{1}{m} : \frac{1}{n},$$

es decir, son inversamente proporcionales a los números l , m , n . Recordemos que se trata de longitudes medidas en unidades a , b y c ; en las unidades corrientes, estas longitudes se relacionarán entre sí de la siguiente manera:

$$\frac{a}{l} : \frac{b}{m} : \frac{c}{n}.$$

Así vemos que los números l , m y n determinan la dirección del plano, su orientación con respecto a los ejes de la red, mientras que el número k no depende de la dirección del plano, sino de la distancia del mismo hasta el origen de coordenadas. Atribuyéndole al número k diferentes valores enteros, obtenemos (para los valores dados de l , m y n) una familia de planos reticulares paralelos. A nosotros nos interesa la dirección del plano reticular y no su posición en la red. En este sentido, el plano viene determinado completamente por los tres números l , m y n , pudiéndose reducir estos números dividiéndolos por el máximo común divisor, ya que con

ello no cambiará, evidentemente, la dirección del plano. Estos números l , m y n , determinados de esta manera, se denominan *índices del plano reticular* o *índices de Miller* y se escriben entre paréntesis curvilíneos, (lmn) .

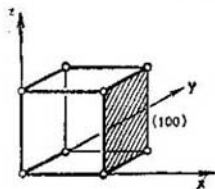


Fig. 26.

Como ejemplo, veamos algunos planos de la red cúbica.

El plano perpendicular al eje x (fig. 26) corta en los ejes los segmentos de longitud $1, \infty, \infty$. Los valores inversos de estas magnitudes son $1, 0, 0$, de modo que los índices del plano serán (100) . De manera análoga, los índices de los planos perpendiculares a los ejes y y z serán (010) y (001) respectivamente. El conjun-

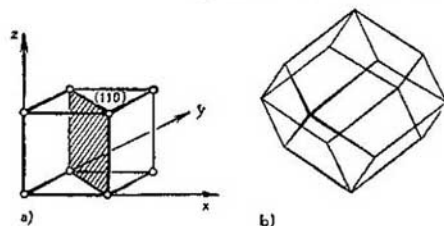


Fig. 27.

to de planos de esta clase limita un cuerpo de forma cúbica; por eso frecuentemente se denominan *caras del cubo*.

El plano diagonal paralelo al eje z corta segmentos iguales en los ejes x , e y (fig. 27, a) por eso tiene los índices (110) . Estos planos diagonales se denominan *caras del rombododecaedro*, según el nombre del dodecaedro limitado por planos de este género (fig. 27, b). El plano diagonal del cubo (fig. 28, a) corta segmentos iguales en los tres ejes de coordenadas; por lo tanto tiene los índices (111) . Esta clase de planos se denominan *caras del octaedro*, según el poliedro regular de ocho caras triangulares que forman (el oc-

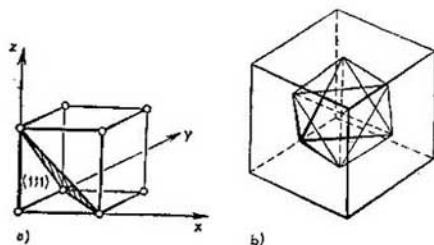


Fig. 28. taedro de la fig. 28, *b* se obtiene uniendo entre sí los centros de las seis caras del cubo).

§ 49. Caras naturales del cristal

Los planos que limitan el cristal natural, pasan siempre por los átomos de su red: por eso son planos reticulares. La dirección de las distintas caras del cristal y los ángulos que forman entre sí, están relacionados con la estructura de la red, por eso son propiedades características de la sustancia dada.

Veamos dos caras cualesquiera de un cristal que tengan los índices (lmn) y $(l'm'n')$. Designemos por A, B, C y A', B', C' las longitudes de los segmentos cortados por estas caras (planos) en los ejes de coordenadas. Según lo dicho en el § 48, las razones de estas longitudes (medidas en unidades corrientes de longitud) son

$$A:B:C = \frac{a}{l} : \frac{b}{m} : \frac{c}{n}, \quad A':B':C' = \frac{a}{l'} : \frac{b}{m'} : \frac{c}{n'}.$$

Dividiendo la primera relación por la segunda obtenemos:

$$\frac{A}{A'} : \frac{B}{B'} : \frac{C}{C'} = \frac{l'}{l} : \frac{m'}{m} : \frac{n'}{n}.$$

Multiplicando los números l, m y n por su mínimo común múltiplo, la parte de la derecha de esta relación se reducirá a una relación de tres números enteros. Así vemos que la relación entre los segmentos cortados en los ejes por cualquier cara del cristal, expresados en segmentos cortados por otra cara y considerados segmentos unidad, son siempre relaciones de tres números enteros. Esta regla se denomina *ley de la racionalidad* (de los índices).

Las superficies de las caras de los cristales iónicos deben contener necesariamente iones de distintos signos. Los planos reticulares que contienen iones de un mismo signo, no pueden ser caras del cristal. Esto nos permite aclarar, en una serie de casos, las particularidades de la cristalización de diferentes sustancias.

Veamos, por ejemplo, el cristal ClNa , cuya red se representa en la fig. 24. En el dibujo se ve la disposición de los iones Na^+ y Cl^- en los planos (100) y (111) de esta red. Vemos que el plano (111) (plano diagonal delimitado con líneas de trazos en la fig. 24) pasa por los iones de una especie; por eso este plano no puede ser cara del cristal y, por consiguiente, la sal gema no puede cristalizar en forma de octaedros. Al mismo tiempo vemos que en el plano (001) (cara del cubo de la fig. 24) están esparcidos regular y alternativamente en ambas direcciones iones de diferente signo; por eso el ClNa puede cristalizar en cubos.

Por el contrario, en la red del ClCs (fig. 25), los planos (100) contienen iones de un mismo signo; por lo tanto, esta sustancia no puede cristalizar en cubos. El carácter de las caras exteriores del cristal, lo mismo que cualquier propiedad macroscópica, está relacionado con la clase cristalina del cristal. Por eso, el estudio de la forma de los cristales naturales, en principio, da la posibilidad de establecer la clase de simetría del mismo. En la práctica puede haber dificultad en ello debido a las formas irregulares causadas por unas u otras condiciones casuales de crecimiento del cristal. En este caso, la formación artificial de nuevas superficies del cristal atacándolo químicamente, es decir, sometiendo la cara del cristal a la acción de un reactivo, puede dar información complementaria.

§ 50. Temperatura

En todos los cuerpos existentes en la naturaleza se produce un movimiento constante de las partículas que los componen. Este movimiento es universal: se mueven las moléculas, se mueven los átomos en el interior de las moléculas. Su rasgo característico es el desorden en mayor o menor grado del movimiento. Este movimiento se denomina *movimiento térmico*. En él se encierra la naturaleza del calor y de los fenómenos térmicos.

Aunque al hablar del movimiento térmico, generalmente, se tiene en cuenta el que se produce a escalas atómicas (o, como se dice en este caso, a escalas microscópicas), hay que señalar que este movimiento pueden tener partículas mucho mayores, macroscópicas. El llamado *movimiento browniano*, movimiento caótico de las partículas suspendidas en el líquido, y que se puede observar en el microscopio, es un ejemplo conocido de esta clase de movimiento.

Si se ponen en contacto dos cuerpos, los átomos chocarán entre sí y se transmitirán energía mutuamente. Así, al ponerse en contacto dos cuerpos, la energía pasa de uno al otro; en este caso, el cuerpo que pierde energía se dice que está más caliente, y el que la adquiere, menos caliente. Este paso de energía continúa hasta que no se establezca determinado estado denominado de *equilibrio térmico*.

Para caracterizar el grado de calentamiento de los cuerpos se utiliza el concepto de *temperatura*. La determinación cuantitativa de esta magnitud se podría dar, en principio, utilizando cualquiera propiedad del cuerpo que dependa del grado de calentamiento del mismo. Por ejemplo, se podría determinar la escala de temperaturas simplemente mediante el volumen de la columna de mercurio que se halle en equilibrio térmico con el cuerpo considerado. Sin embargo está claro que esta escala de temperaturas, siendo arbitraria completamente, no puede tener ningún sentido físico más o menos profundo. La temperatura determinada de esta manera sería extremadamente incómoda para describir otros fenómenos térmicos. Por

consiguiente, ante todo hay que establecer una escala de temperaturas que tenga sentido físico y que no dependa del carácter casual de una u otra sustancia, digamos, del mercurio y del vidrio de que se ha hecho el recipiente que contiene el mercurio.

En Física, como escala de temperaturas se utiliza la llamada *escala termodinámica, absoluta o de Kelvin*, estrechamente relacionada con las propiedades térmicas más generales de los cuerpos. Su definición exacta no se puede dar aquí, porque exige un análisis teórico de los fenómenos térmicos que se sale del marco de este libro. En lugar de ello, caracterizaremos esta escala por ciertas propiedades «secundarias».

Está claro que la definición física de la temperatura se debe basar en una magnitud física caracterizadora del estado del cuerpo, que automáticamente sea igual en dos cuerpos cualesquiera que se hallen en equilibrio térmico entre sí. Resulta que esta propiedad excepcional la posee la energía cinética media del movimiento de traslación de las partículas (moléculas o átomos) del cuerpo. Si estos valores medios de energía para las partículas de dos cuerpos son iguales, no se producirá ningún traspaso, en total, de energía de un cuerpo a otro, aunque al ponerse en contacto estos cuerpos ciertas partículas intercambiarán energía de uno u otro lado.

Por esta causa, la energía cinética media del movimiento de traslación de las partículas en el interior del cuerpo se puede elegir como medida de la temperatura. Se ha establecido determinar la temperatura T como las $2/3$ partes de esta energía

$$T = \frac{2}{3} \frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{1}{3} \overline{mv^2}.$$

Aquí, m es la masa de la partícula, v , la velocidad y la raya sobre la expresión indica que se debe tomar el valor medio (el valor medio se puede entender como el valor medio de la energía de diferentes partículas del cuerpo en un mismo momento temporal, o como el valor medio de la energía de una misma partícula en distintos momentos temporales; estas dos definiciones son completamente equivalentes).

Según la definición dada, la temperatura tiene dimensiones de energía, por eso se puede medir en las mismas unidades que la energía, por ejemplo, en ergios. No obstante, como unidad de temperatura, el ergio resulta excesivamente incómodo, ante todo, porque

la energía del movimiento térmico de las partículas es insignificante en comparación con el ergio. Además, se sobreentiende que la medición directa de la temperatura como energía de las partículas prácticamente sería muy difícil.

Por estas causas, en Física se utiliza una unidad convencional y cómoda para medir la temperatura, *el grado*. El grado se define como la centésima parte de la diferencia entre las temperaturas de ebullición y de congelación del agua pura a la presión atmosférica.

El coeficiente que determina qué parte del ergio contiene un grado se denomina *constante de Boltzmann* y generalmente se designa con la letra *k*. Esta constante es

$$k = 1,38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{ergios}}{\text{grado}}$$

Vemos que, efectivamente, el grado es muy pequeño en comparación con el ergio. Para caracterizar la magnitud del grado indiquemos, además, a qué es igual la energía cinética total por grado de las partículas de una molécula gramo de sustancia. Esta energía se obtiene multiplicando por *k* el número de Avogadro, N_0 :

$$kN_0 = 1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ ergios} = 8,31 \text{ J.}$$

Indiquemos también a qué es igual el coeficiente que relaciona el grado con el electrón-voltio, unidad de energía que se usa generalmente en la Física de los fenómenos atómicos:

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV} &= 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ ergios} = \\ &= \frac{1,60 \cdot 10^{-12}}{1,38 \cdot 10^{-16}} \text{ grados} = 11\,600 \text{ grados.} \end{aligned}$$

El adelante designaremos con la letra *T* la temperatura en grados; mientras que la medida en ergios será igual a kT , así que la expresión arriba indicada hay que escribirla de la siguiente manera

$$kT = \frac{1}{3} \overline{mv^2}.$$

Como la energía cinética es una magnitud positiva, también lo será la temperatura *T*. No obstante subrayamos que esta cualidad de la temperatura no debe considerarse como una ley de la naturaleza: es simplemente una consecuencia de la propia definición de la temperatura.

Como ya se ha indicado, la escala de temperaturas determinada de esta manera se denomina absoluta. El cero de temperatura de esta escala es la temperatura a que cesa el movimiento térmico. La escala de la temperatura absoluta que se cuenta a partir de este llamado *cero absoluto*, se denomina también *escala de Kelvin*, y los grados de esta escala se designan con el símbolo $^{\circ}\text{K}$.

Además de la escala de Kelvin, en la práctica se usa ampliamente otra escala, en la que la temperatura se cuenta a partir del punto de fusión del hielo, que se ha convenido considerar de temperatura igual a cero. Esta escala se denomina *escala de Celsius* (centígrada), y los grados de esta escala se designan con el símbolo $^{\circ}\text{C}$.

Para pasar de la temperatura de una escala a la de la otra hay que saber a qué es igual la temperatura absoluta de fusión del hielo. Según las modernas mediciones, esta temperatura es igual a $273,15^{\circ}\text{K}$. En otras palabras, según la escala de Celsius, el *cero absoluto* está en la temperatura de $-273,15^{\circ}\text{C}$.

En adelante designaremos con la letra T la temperatura absoluta, y la de la escala de Celsius, si se necesita, con la letra t . Esta claro que $T = t + 273,15^{\circ}$. Frecuentemente se dice que uno u otro experimento se ha realizado a la temperatura de la habitación, sobrentendiendo la temperatura de 20°C (es decir, de $\approx 293^{\circ}\text{K}$). Es útil señalar que esta temperatura, medida en electrón-voltios, corresponde aproximadamente a $1/40$ eV.

Para caracterizar la velocidad del movimiento térmico de las partículas se puede utilizar la raíz cuadrada de la magnitud $\overline{v^2}$, que entra en la expresión que determina la temperatura. Generalmente, esta magnitud se denomina *velocidad eficaz* (valor cuadrático medio) y se designa con el símbolo v_T :

$$v_T = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Esta fórmula, según la masa que se le considere, determina la velocidad eficaz del átomo, de la molécula o de la partícula del movimiento browniano. Al aplicarla a las moléculas, es conveniente dar a la fórmula otro aspecto multiplicando y dividiendo la expresión del interior del radical por el número de Avogadro, observando que el producto mN_0 es el

peso molecular μ de la sustancia:

$$v_T = \sqrt{\frac{3N_A kT}{\mu}} = 15.8 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{T}{\mu}} \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Así, la velocidad eficaz de la molécula del hidrógeno (H_2 , $\mu=2$) a la temperatura de la habitación es igual a

$$1.9 \cdot 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}, \text{ es decir, es de unos } 2 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Vemos que la velocidad eficaz es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa de la partícula. Esta última circunstancia es la causa de que el movimiento térmico, muy intenso en las moléculas del cuerpo y que aún se nota en las pequeñas partículas microscópicas que realizan el movimiento browniano, no se note en absoluto en los cuerpos macizos.

Volvamos de nuevo a la definición de temperatura dada más arriba. Hay que subrayar que esta definición se basa en la mecánica clásica. La relación cuantitativa expresada entre la temperatura y la energía del movimiento térmico de las partículas es justa dentro de los límites en que la mecánica clásica puede describir este movimiento. Resulta que, a medida que baja la temperatura, disminuye la energía de las partículas, y las condiciones de aplicación de la mecánica clásica, en un momento dado, se infringen y la mecánica clásica debe sustituirse por la cuántica. Cuanto menor sea la masa de las partículas y cuanto mayor sea el grado de restricción del movimiento de la partícula por las fuerzas que las solicitan, tanto antes se producirá esta sustitución. Así, por ejemplo, las moléculas del gas efectúan el movimiento de traslación prácticamente como partículas libres; por consiguiente, este movimiento siempre se puede examinar en la mecánica clásica. El movimiento de los átomos en el interior de las moléculas tiene carácter de pequeñas oscilaciones en «el pozo de potencial» alrededor de determinadas posiciones de equilibrio; en este caso, la mecánica clásica deja muy pronto de poder aplicarse al estudio de este movimiento (volveremos a tratar esta cuestión en los §§ 57 y 58). Arriba hemos indicado que a la temperatura del cero absoluto cesa el movimiento térmico. Esta aseveración no quiere decir, ni mucho menos, que cesa en general todo movimiento de las partículas en el interior del cuerpo. Según la mecánica cuántica, el movimien-

to de las partículas nunca cesa por completo. Incluso en el cero absoluto debe conservarse cierto movimiento oscilatorio de los átomos en el interior de la molécula, o de oscilaciones de los átomos alrededor de los nudos de la red cristalina del cuerpo sólido. Este movimiento, que se denomina *oscilación* o *vibración del punto cero*, es un fenómeno cuántico. La energía de este movimiento es una magnitud característica para «cuantizar» uno u otro objeto de estudio. La comparación de la energía del movimiento térmico de las partículas con la energía de su movimiento «cero» puede servir de criterio de aplicabilidad de la mecánica clásica; esta última se puede utilizar para describir el movimiento térmico de las partículas, si la energía de éstas es relativamente grande en comparación con la «energía cero».

El ejemplo más notable de «movimiento del punto cero» que se conserva por completo, incluso en el cero absoluto, es el de las partículas más ligeras, electrones, en los átomos. El movimiento de los electrones en el interior de los átomos siempre tiene carácter puramente cuántico. Debido a la energía relativamente grande que posee, la temperatura del cuerpo sólo influye en un grado muy insignificante. Únicamente a muy elevadas temperaturas, de muchos millares de grados, el movimiento térmico de los átomos se refleja sensiblemente en las capas electrónicas.

§ 51.

Presión

Debido al movimiento térmico de las partículas, el gas (o el líquido) presiona sobre las paredes del recipiente que lo contiene. Las moléculas del gas, al chocar con las paredes del recipiente, le transmiten cierta impulsión, y la variación de la impulsión del cuerpo (por segundo) determina la fuerza que actúa sobre el mismo.

Si referimos la fuerza con que el gas (o el líquido) actúa sobre la pared, a la unidad de superficie de ésta, obtendremos la magnitud de la *presión* ejercida sobre la pared del recipiente.

Designaremos la presión con la letra p . La dimensión de la presión es la de la fuerza dividida por la de la superficie. Se puede expresar de distintas maneras:

$$[p] = \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2} = \frac{\text{ergios}}{\text{cm}^2} = \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}^2}.$$

Prestemos atención a que la dimensión de la presión

coincide con la de la energía por unidad de volumen. En el sistema CGS, la unidad de medición de la presión es $1 \frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}$, que es la fuerza con que 1 dina actúa sobre la superficie de 1 cm^2 ¹⁾. Sin embargo, esta unidad es muy pequeña. La unidad 10^6 veces mayor se denomina *bar*:

$$1 \text{ bar} = 10^6 \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2} = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

La presión con que la fuerza de 1 kgf actúa sobre una superficie de 1 cm^2 se denomina *atmósfera técnica* (at):

$$1 \text{ at} = 1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = 0,981 \text{ bares.}$$

A diferencia de esta definición, se denomina *atmósfera normal o física* (atm) la presión de una columna de mercurio de 760 mm (a determinada densidad del mercurio y valor estándar de la aceleración de la fuerza de la gravedad). Esta unidad es

$$1 \text{ atm} = 1,013 \text{ bares} = 1,033 \text{ at.}$$

Indiquemos también que la presión correspondiente a 1 mm de la columna de mercurio es

$$1 \text{ mm Hg} = 1,333 \cdot 10^{-3} \text{ bares.}$$

Las propiedades de los cuerpos en su conjunto, sin entrar en detalles de la estructura molecular (con la que, en realidad, están relacionadas estas propiedades), se denominan *propiedades macroscópicas*. La temperatura y la presión son importantísimas magnitudes que caracterizan el estado macroscópico de los cuerpos. El volumen del cuerpo (que designaremos con la letra V) también es una de estas magnitudes. Sin embargo, estas tres magnitudes no son independientes. Si, por ejemplo, cierta cantidad de gas se encierra en un recipiente de volumen determinado y el gas posee determinada temperatura, automáticamente se hallará a una presión determinada; variando el volumen o la temperatura, alteraremos la presión del gas.

Así tenemos que, de tres magnitudes p , V y T , solamente dos se pueden asignar arbitrariamente, determinándose la tercera como una función de las dos primeras. Se puede decir que las propiedades térmicas del cuerpo se determinan por completo si se conocen dos magnitudes cualesquiera de éstas.

¹⁾ Esta unidad en español se denomina *baria* (N. del T.)

La dependencia funcional que relaciona entre sí la presión, el volumen y la temperatura del cuerpo, se denomina *ecuación de estado* del cuerpo en cuestión y es una de las relaciones más importantes que caracterizan las propiedades térmicas del cuerpo.

Solamente en el caso de los cuerpos más simples se puede establecer teóricamente el aspecto de esta dependencia funcional (V. el § 53). Por eso, en la práctica hay que recurrir a las mediciones experimentales, cuyos resultados se pueden representar gráficamente. Como se trata de una dependencia mutua entre tres magnitudes, ésta se representaría de la manera más completa mediante cierta superficie en un sistema de coordenadas de tres dimensiones, en cuyos ejes se midiesen las magnitudes p , V y T . Sin embargo, como en la práctica la representación espacial es incómoda, generalmente se suele representar mediante gráficos planos, expresando en ellos las familias de curvas representativas de las secciones de la superficie según una serie de planos paralelos a uno u otro plano coordenado. Así, cortando la superficie con planos paralelos al plano coordenado p , V (es decir, perpendiculares al eje T), obtenemos una familia de curvas que representan la dependencia entre la presión y el volumen del cuerpo a distintos valores dados de la temperatura; estas curvas se denominan *isotermas*. De manera análoga se puede construir la familia de isobaras, curvas que representan la dependencia entre V y T a valores dados de p , y la familia de isócoras, curvas de dependencia entre p y T a valores dados de V .

Ya se ha indicado en el § 50 que el intercambio de energía entre dos cuerpos en contacto continúa hasta que se establece el equilibrio térmico, en el cual la temperatura de los cuerpos es igual. En general, el estado de *equilibrio térmico* de un sistema de cuerpos se denomina el estado en que en el sistema no se produce ningún proceso térmico espontáneo y todas las partes del sistema están en reposo relativo entre sí, sin efectuar ningún movimiento de los denominados macroscópicos (a diferencia del movimiento térmico microscópico de las partículas en el interior de los cuerpos). Ahora podemos añadir que en el estado de equilibrio deben ser iguales no sólo las temperaturas de todos los cuerpos en contacto, sino también las presiones; en el caso contrario, sobre el cuerpo actuarían fuerzas de valor diferente de cero y los cuerpos adquirirían movimiento.

En las condiciones normales, la presión de los cuerpos es positiva, es decir, está dirigida de manera que el cuerpo tiende a dilatarse. No obstante, esto no es obligatorio y el cuerpo puede hallarse también en estados de presiones negativas: en estos estados parece como si el cuerpo estuviera «dilatado» y por eso tiende a comprimirse. El estado «dilatado» de un líquido se puede conseguir introduciéndolo limpio y caliente en un tubo capilar de paredes gruesas y soldándolo después. Al enfriarse el tubo capilar, cuyas paredes se contraen con más lentitud que el propio líquido, éste debería ocupar solamente parte del volumen del tubo capilar; sin embargo resulta que se pega a las paredes y «se dilata» por todo el volumen del tubo capilar. Otro método: el líquido se introduce en un tubo capilar de vidrio abierto por ambos extremos y se le hace girar rápidamente alrededor del centro. Las fuerzas centrífugas extienden el líquido, que, al alcanzar la velocidad de rotación determinada magnitud, «se rompe» y es expelido del tubo. Con estos métodos se consiguen presiones negativas considerables: para el agua (a la temperatura ambiente) se llega a alcanzar 280 atm; para el alcohol, 40 atm; para el benceno, 160 atm, etc. Se puede decir que estos valores caracterizan «la resistencia a la tracción» o «la tensión de rotura» de un líquido.

§ 52. Estados de agregación de la materia

Para caracterizar de manera más general las propiedades térmicas de los cuerpos se utiliza el concepto de *estados de agregación*: gaseoso, líquido y sólido. Debido al gran enrarecimiento de la sustancia en estado gaseoso, las moléculas se hallan relativamente a gran distancia entre sí: a grandes distancias en comparación con las propias dimensiones. Por eso, la interacción de las moléculas del gas desempeña un papel secundario, ya que la mayor parte del tiempo, las moléculas se desplazan libremente y sólo chocan entre sí de tarde en tarde. En el líquido, las distancias entre las moléculas son comparables a las dimensiones de las mismas, de modo que se hallan en constante y fuerte interacción y el movimiento térmico tiene un carácter muy complejo.

En condiciones habituales, los líquidos y los gases se diferencian tanto por su densidad, que no representa ninguna dificultad distinguirlos. Sin embargo, en realidad, la diferencia entre estos dos estados no

es cualitativa, sino cuantitativa; ésta reside en la magnitud de la densidad y, debido a ello, en la diferencia de intensidad de interacción de las moléculas. Esta falta de diferencia cualitativa entre estos dos estados se revela claramente, sobre todo, en que el paso del estado denominado líquido al gaseoso, o viceversa, se puede realizar, en principio, continuamente, de manera que en ningún momento se pueda indicar dónde ha terminado un estado y dónde ha empezado el otro (en el § 69 se hablará de ello con más detalle).

La diferencia entre los líquidos y los llamados *cuerpos sólidos amorfos* (no cristalinos) también es de carácter cuantitativo. A estos cuerpos amorfos pertenecen el vidrio, diferentes resinas (por ejemplo, la colofonia), etc. Aquí tampoco hay diferencia cualitativa, lo cual se revela claramente en el posible paso continuo de un estado a otro. En este caso, el paso se efectúa mediante un simple calentamiento. Así, por ejemplo, al calentar el vidrio, éste se ablanda gradualmente transformándose, al fin y al cabo, en un cuerpo completamente líquido. Este proceso es perfectamente continuo y no tiene ningún «momento de paso» determinado. Según la densidad, el cuerpo amorfo se diferencia muy poco del líquido obtenido del mismo. La diferencia cuantitativa principal entre estos dos estados del cuerpo amorfo es la de la magnitud de las viscosidades, es decir, la de las «fluidedades» (en el § 118 volveremos a tratar esta cuestión). La propiedad general de los gases, líquidos y sólidos amorfos es la distribución desordenada de las moléculas en ellos. Este desorden acarrea la isotropía de los cuerpos: igualdad de propiedades en todos los sentidos. Esta propiedad de isotropía diferencia cualitativamente los cuerpos amorfos (isótropos) de los anisótropos, *cuerpos sólidos cristalinos*, en los cuales los átomos están distribuidos regularmente. El movimiento térmico de los átomos de los sólidos son pequeñas oscilaciones alrededor de determinadas posiciones de equilibrio. En los cristales, estas posiciones son los nudos de la red cristalina (en este sentido, en el capítulo anterior no nos hemos expresado con perfecta exactitud al hablar de los nudos como de puntos en que se hallan los núcleos atómicos, y no como puntos alrededor de los cuales se efectúan las oscilaciones de los mismos). Aunque en los sólidos, el movimiento térmico está más «ordenado» que en los gases o en los líquidos (los átomos no se alejan

mucho de los nudos), también es caótico en el sentido de que las amplitudes y las fases de los distintos átomos son diferentes y no están relacionadas entre sí de ninguna manera.

Casi todos los cuerpos sólidos son cristalinos. No obstante, raramente representan cristales individuales regulares en todo el volumen, a sea, los denominados *monocristales*; éstos se forman solamente en condiciones especiales de crecimiento.

Generalmente, los cuerpos sólidos cristalinos existen en forma de *policristales*, como lo son, por ejemplo, todos los metales. Estos cuerpos son el conjunto de una enorme cantidad de pequeños cristales individuales, denominados *granos* o *cristalitos*, frecuentemente de dimensiones microscópicas; así, por ejemplo, las dimensiones de los granos de los metales generalmente son del orden de 10^{-5} — 10^{-3} cm (y dependen considerablemente del modo de obtención y elaboración del metal).

La mutua disposición y la orientación de los distintos granos en la sustancia policristalina generalmente son bastante desordenadas. Debido a ello, esta sustancia, considerada en escalas grandes en comparación con las dimensiones de los granos, resulta isótropa. Como claramente se deduce de lo dicho, esta isotropía de los cuerpos policristalinos es solamente de carácter secundario, en contraposición a la anisotropía de su verdadera naturaleza molecular, que se revela en la anisotropía de los distintos granos.

Bajo la acción de una u otra elaboración o aplicación de métodos especiales de cultivo, se puede obtener un material policristalino en el que los granos tengan preferentemente cierta orientación cristalográfica. En estos casos se dice que hay *textura*. En los metales la textura puede surgir debido a la deformación en los distintos métodos de elaboración en frío. Las propiedades de estos materiales revelan naturalmente el fenómeno de anisotropía.

§ 53.

Gas perfecto (ideal)

Las propiedades térmicas más simples las posee el gas que esté tan enrarecido, que la interacción entre las moléculas prácticamente no desempeña ningún papel. Este gas en el cual se puede despreciar la interacción de las moléculas, se denomina *gas perfecto (ideal)*. No obstante no hay que considerar que la interacción de las moléculas del gas perfecto no existe en absoluto.

Al contrario, las moléculas chocan entre sí y estas colisiones son esenciales en el establecimiento de determinadas propiedades térmicas del gas. Pero las colisiones son tan raras, que la mayor parte del trayecto las moléculas lo recorren como si fueran partículas libres.

Reduzcamos la ecuación de estado del gas perfecto, es decir, la dependencia entre la presión, volumen y temperatura del mismo. Para ello supongamos que el gas está encerrado en un recipiente de forma de paralelepípedo rectangular y consideraremos que las paredes del mismo son «refractorias ideales»: éstas reflejan las moléculas que chocan con ellas, formando el mismo ángulo con que las moléculas inciden sobre la pared, sin variar las magnitudes de las velocidades. (En la fig. 1, v , y v' son las velocidades de la molécula antes y después de la colisión; tienen la misma magnitud y forman el mismo ángulo α con la pared.). Estas suposiciones se hacen para simplificar el razonamiento. Está claro que las propiedades internas del gas como tal no pueden, en realidad, depender ni de la forma del recipiente ni de las propiedades de sus paredes.

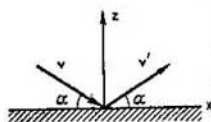


Fig. 1.

Determinemos la presión del gas en una cara del paralelepípedo. Para ello hay que determinar la impulsión transmitida a esta cara en un segundo por las moléculas que chocan con ella. Como en la colisión varía solamente la componente v_z de la velocidad perpendicular a la superficie de la pared y esta variación se reduce solamente al cambio de signo, la impulsión transmitida en una colisión será igual a $mv_z - (-mv_z) = 2mv_z$, donde m es la masa de la molécula. Desplazándose libremente, la molécula recorre la distancia entre las paredes opuestas (designémosla por h) en el intervalo de tiempo h/v_z , de manera que volverá a la primera pared al cabo del tiempo $2h/v_z$. Por consiguiente, en el transcurso de un segundo cada molécula choca con la pared dada $v_z/2h$ veces y le transmite una impulsión igual a $2mv_z \frac{v_z}{2h} = mv_z^2/h$. La fuerza total F_z que actúa sobre la pared es la impulsión adquirida por ésta en un segundo de parte de todas las moléculas del gas,

$$F_z = \frac{1}{h} \sum mv_z^2,$$

donde el signo Σ expresa la suma según todas las moléculas.

Si el número de moléculas del recipiente es igual a N , esta suma se puede escribir como un producto de N por el valor medio $\overline{mv_z^2}$. Pero como todas las direcciones con respecto al propio gas son completamente equivalentes, tendremos que $\overline{mv_x^2} = \overline{mv_y^2} = \overline{mv_z^2}$, y como $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$, resulta que

$$\overline{mv_z^2} = \frac{1}{3} \overline{mv^2}.$$

Por lo tanto,

$$F_z = \frac{1}{h} \frac{N}{3} \overline{mv^2}.$$

Sustituyendo aquí F_z por pS , siendo p la presión del gas y S el área de la cara, y observado que hS es el volumen V del paralelepípedo, obtenemos que

$$pV = \frac{1}{3} N \overline{mv^2} = \frac{2}{3} N \frac{\overline{mv^2}}{2}.$$

Pero según la definición de la temperatura, el valor medio de la energía cinética de la molécula es igual a $\frac{3}{2} kT$; por lo tanto, definitivamente obtenemos la siguiente ecuación de estado del gas perfecto:

$$pV = NkT.$$

Esta ecuación es de carácter universal: en ella no entra ninguna magnitud que dependa de la naturaleza del gas. Esto es una consecuencia natural al desprestigiar la interacción de las moléculas, privándole así al gas de su «individualidad».

Si se toman dos gases perfectos diferentes que se hallen en iguales volúmenes a presiones y temperaturas iguales, la cantidad de moléculas de ambos gases será la misma. Esta es la llamada *ley de Avogadro*. En particular, en un centímetro cúbico de cualquier gas ideal en condiciones normales, es decir, a la temperatura de 0°C y presión de 1 atm, hay

$$L = \frac{pV}{kT} = \frac{1,013 \cdot 10^6 \cdot 1}{1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 273} = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ moléculas}$$

(este número se denomina *número de Loschmidt*). El número N de moléculas de un gas se puede escribir así $N = \nu N_0$, donde ν es el número de moléculas-gramo (mol) del gas, y N_0 , el número de Avogadro. Entonces, la ecuación de estado adquiere el aspecto

$$pV = \nu RT,$$

donde $R = kN_0$ es la denominada *constante de los gases*. En particular, para un mol de gas tenemos que $pV = RT$.

Multiplicando los valores k y N_0 hallamos que

$$R = 8,314 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{grad} \cdot \text{mol}} = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{gr ad} \cdot \text{mol}}$$

(si como unidad de energía se utiliza la caloría, tendremos que R con gran exactitud es igual a $2 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{grad}}$); la palabra *mol* como símbolo de dimensión significa 1 molécula — gramo.

Si la presión del gas se mide en atmósferas y el volumen, en litros,

$$R = 0,082 \frac{\text{l} \cdot \text{atm}}{\text{grad} \cdot \text{mol}}.$$

Utilizando este valor es fácil determinar el volumen de la molécula-gramo del gas a la presión de 1 atm y a la temperatura de 0° C:

$$V = \frac{RT}{p} = \frac{0,082 \cdot 273}{1} = 22,4 \text{l}.$$

A temperatura constante, el producto del volumen por la presión de determinada cantidad de gas es una magnitud constante

$$pV = \text{const}, \text{ siendo } T = \text{const}.$$

Esta es la conocida *ley de Boyle — Mariotte*. De la ecuación de estado del gas perfecto también se desprende que, si cierta cantidad de gas se halla a presión constante, el volumen será proporcional a la temperatura absoluta del gas:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}, \text{ siendo } p = \text{const},$$

donde V y V_0 son los volúmenes del gas a las temperaturas T y T_0 .

Análogamente

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0}, \text{ siendo } V = \text{const}.$$

Estas importantes relaciones indican que la escala absoluta de temperaturas puede construirse utilizando las propiedades de los gases perfectos sin medir las velocidades ni las energías de las moléculas. Si T_0 es la temperatura de fusión del hielo y, en lugar

de la temperatura absoluta T del gas, se introduce la temperatura t según la escala de Celsius ($T=273+t$), la relación indicada entre el volumen y la temperatura del gas adquiere la forma:

$$V = V_0 \left(1 + \frac{t}{273} \right), \text{ siendo } p = \text{const.}$$

Esta es la conocida *ley de Gay — Lussac*, según la cual, al aumentar la temperatura en 1° , el volumen del gas aumenta en $1/273$ parte de su volumen a 0°C . Al deducir la ecuación de estado del gas perfecto, no se ha considerado que todas las moléculas sean iguales; por consiguiente, esta ecuación sirve para el caso en que el gas sea una mezcla de distintos gases perfectos, siendo de nuevo un resultado natural al despreciar la interacción de las moléculas. En este caso hay que considerar que N es el número total de moléculas del gas, es decir, la suma de los números de moléculas de los distintos gases: $N = N_1 + N_2 + \dots$, donde N_i es el número de moléculas del gas i . Escribiendo la ecuación de estado de la forma

$$pV = N_1 kT + N_2 kT + \dots$$

y observando que si todo el volumen lo ocupasen solamente las moléculas del gas i , la presión p_i satisfaría la relación $p_i V = N_i kT$, se llega a la conclusión de que

$$p = p_1 + p_2 + \dots$$

es decir, la presión de una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones que efectuarían los distintos gases de la mezcla al ocupar todo el volumen (*ley de Dalton*). Las presiones p_1, p_2, \dots se denominan *presiones parciales* de los gases correspondientes.

§ 54.

El gas perfecto en un campo exterior

Examinemos un gas perfecto que se halle en un campo cualquiera de fuerzas, por ejemplo, en el de la gravedad. Como en este caso sobre las moléculas del gas actúan fuerzas exteriores, la presión del gas no será la misma en todas partes, sino que variará de un punto a otro.

Para mayor sencillez, veamos el caso en que las fuerzas del campo tienen una dirección invariable, la cual la elegimos como eje z . Sean dos superficies de 1 cm^2 orientadas perpendicularmente al eje z y a una distancia dz entre sí. Si las presiones del gas en

las superficies son respectivamente p y $p+dp$, la diferencia de presiones, evidentemente, deberá ser igual a la fuerza total que actúa sobre las partículas del gas comprendidas dentro del volumen de un paralelepípedo de área de base igual a 1 cm^2 y altura igual a dz . Esta fuerza es igual a $Fndz$, donde n es la densidad de moléculas (es decir, el número de las mismas por unidad de volumen), y F , la fuerza que actúa sobre una molécula en el punto de ordenada z . Por lo tanto

$$dp + nF dz.$$

La fuerza F está relacionada con la energía potencial de la molécula $U(z)$ mediante la ecuación $F = -\frac{dU}{dz}$, así que

$$dp = -n dz \frac{dU}{dz} = -n dU.$$

Como el gas se supone perfecto, $pV = NkT$. Observando que $N/V = n$, esta ecuación se puede escribir así: $p = nkT$. Supongamos que la temperatura del gas en distintos puntos es la misma. Entonces

$$dp = kT dn.$$

Igualando esta ecuación con la obtenida más arriba $dp = -n dU$, hallamos que

$$\frac{dn}{n} = d(\ln n) = -\frac{dU}{kT}.$$

De donde

$$\ln n = -\frac{U}{kT} + \text{const},$$

y definitivamente,

$$n = n_0 e^{-U/kT}.$$

Aquí n_0 es una constante que expresará, evidentemente, la densidad de moléculas en el punto $U=0$. La fórmula obtenida, que relaciona la variación de la densidad del gas con la energía potencial de las moléculas del mismo, se denomina *distribución de Boltzmann*. La presión se diferencia de la densidad en el factor constante kT , por consiguiente, esta ecuación es justa también para la presión:

$$p = p_0 e^{-U/kT}.$$

En el caso del campo de gravedad en las proximidades de la superficie terrestre, la energía potencial de la molécula a la altura z es $U = mgz$, donde m es la masa de la molécula. Por eso, considerando la temperatura del gas independiente de la altura, la presión p a la altura z estará relacionada con la presión p_0 en la superficie de la Tierra mediante la relación

$$p = p_0 e^{-mgz/hT}.$$

Esta fórmula se denomina *fórmula barométrica*, y es más cómodo representarla de la siguiente manera:

$$p = p_0 e^{-\mu gz/RT},$$

donde μ es el peso molecular del gas y R , la constante de los gases.

Esta fórmula también se puede aplicar al caso de la mezcla de gases. Como las moléculas de los gases perfectos no interactúan entre sí, cada gas se puede examinar independientemente, es decir, una fórmula análoga se puede aplicar a la presión parcial de cada gas.

Cuanto mayor sea el peso molecular del gas, con mayor rapidez disminuirá la presión con la altura. Por eso, la atmósfera, con el aumento de la altura se enriquece cada vez más de gases ligeros. El oxígeno, por ejemplo, disminuye con mayor rapidez que el nitrógeno. No obstante, hay que tener en cuenta que la aplicación de la fórmula barométrica a la atmósfera real está muy limitada, ya que la atmósfera no se halla en realidad en equilibrio térmico y la temperatura varía con la altura.

De la distribución de Boltzmann se puede sacar una conclusión interesante, si se aplica a la atmósfera a distancias cualesquiera de la Tierra. A grandes distancias de la superficie terrestre, U ya no será el valor mgz , sino el valor exacto de la energía potencial de la partícula:

$$U = -G \frac{Mm}{r},$$

donde G es la constante de gravitación; M , la masa de la Tierra; y r , la distancia desde el centro de la Tierra (V. el § 22). Colocando esta energía en la distribución de Boltzmann nos da la siguiente expresión para la densidad del gas:

$$n = n_\infty e^{GMm/hTr},$$

donde ahora hemos designado por n_∞ la densidad del

gas en el lugar donde $U=0$ (es decir, a una distancia infinita de la Tierra). Suponiendo aquí r igual al radio de la Tierra R , se halla la relación entre la densidad de la atmósfera en la superficie de la Tierra, n_0 , y la del infinito n_∞ :

$$n_\infty = n_0 e^{-GMm/RhT}.$$

Según esta fórmula, la densidad de la atmósfera a una distancia infinita de la Tierra, debería ser diferente de cero. Sin embargo, esta conclusión es absurda, ya que la atmósfera es de origen terrestre y una cantidad finita de gas no puede distribuirse por un volumen infinito sin desaparecer en ninguna parte la densidad. Se ha llegado a esta conclusión por suponer tácitamente que la atmósfera se halla en estado de equilibrio térmico, lo cual no corresponde a la realidad. Pero este resultado indica que el campo gravitatorio no puede, en general, retener el gas en estado de equilibrio, por lo tanto la atmósfera debe dispersarse continuamente en el espacio. En el caso de la Tierra, esta dispersión es extremadamente lenta, y durante el tiempo de existencia de la Tierra, no se ha perdido parte alguna perceptible de la atmósfera. Pero, por ejemplo, en el caso de la Luna con su campo de gravedad mucho más débil, la pérdida de la atmósfera ha transcurrido mucho más rápidamente y, de resultas de ello, la Luna ya no tiene atmósfera en la actualidad.

§ 55.

Distribución de Maxwell-Boltzmann

La velocidad eficaz v_r representa cierta característica media del movimiento térmico de las partículas. En realidad, distintas partículas se desplazan a diferentes velocidades y se puede plantear la cuestión de la distribución de las moléculas según las velocidades: ¿cuántas moléculas del cuerpo (como término medio) poseen unas u otras velocidades?

Resolvamos este problema para el gas ideal que se halla en estado de equilibrio térmico. Para ello consideremos una columna de gas en un campo uniforme de gravedad. Primeramente, nos interesaremos por la distribución de las moléculas según los valores solamente de la componente (vertical) v_z de la velocidad. Designemos mediante la expresión

$$n f(v_z) dv_z$$

el número de moléculas por cm^3 del gas, en las cuales el valor de esta componente está comprendido en un

intervalo infinitamente pequeño entre v_z y $v_z + dv_z$. Aquí n es el número total de moléculas en el volumen dado, de manera que la función $f(v_z)$ determina la parte del número de moléculas con uno u otro valor v_z . Veamos las moléculas de velocidad comprendida en el intervalo dv_z que se hallan en una capa infinitamente delgada (de espesor dz) de gas a la altura z . El volumen de esta capa coincidirá con el valor dz (si el área de la sección de la columna de gas es 1 cm^2); por consiguiente el número de moléculas que examinamos es igual a

$$n(z) f(v_z) dv_z dz,$$

donde $n(z)$ es la densidad del gas a la altura z . Al desplazarse como moléculas libres (en el gas perfecto se pueden despreciar las colisiones), estas moléculas, con el tiempo pasarán a otra altura z' ocupando una capa de espesor dz' y adquiriendo una velocidad de valor comprendido en el intervalo entre cierta velocidad v'_z y $v'_z + dv'_z$. La invariabilidad del número de estas moléculas se expresará mediante la igualdad

$$n(z) f(v_z) dv_z dz = n(z') f(v'_z) dv'_z dz'.$$

Si el movimiento se efectúa en un campo de gravedad, las componentes horizontales (v_x, v_y) de la velocidad no varían, y la variación de v_z se determina del principio de conservación de la energía, según el cual

$$\frac{mv_z^2}{2} + mgz = \frac{mv_z'^2}{2} + mgz'.$$

Diferenciando esta igualdad (dados los valores constantes de z y z'), obtenemos la relación

$$v_z dv_z = v'_z dv'_z$$

entre los intervalos dv_z y dv'_z , en los cuales se hallan las velocidades verticales de las moléculas consideradas a las alturas z y z' . Los espesores de las capas dz y dz' se relacionan entre sí mediante la igualdad

$$\frac{dz}{v_z} = \frac{dz'}{v'_z},$$

que expresa simplemente que durante el tiempo $dt = dz/v_z$, en el cual la molécula atraviesa la capa dz a la altura z , en la altura z' recorrerá la distancia $dz' = v'_z dt$. Multiplicando término por término estas dos igualdades hallamos que

$$dv_z dz = dv'_z dz'.$$

Por eso, en la condición indicada más arriba de constancia del número de moléculas, las diferenciales de ambos lados de la igualdad se eliminan entre sí y nos da

$$n(z) f(v_z) = n(z') f(v'_z).$$

De aquí y con ayuda de la fórmula barométrica hallamos que

$$\frac{f(v_z)}{f(v'_z)} = \frac{n(z)}{n(z')} = e^{-\frac{mg}{kT}(z-z')}.$$

Recordando ahora que

$$mg(z-z') = \frac{mv_z'^2}{2} - \frac{mv_z^2}{2},$$

obtenemos que

$$f(v_z) e^{\frac{mv_z^2}{2kT}} = f(v'_z) e^{\frac{mv_z'^2}{2kT}},$$

es decir, este producto es constante, independiente de v_z . En otras palabras, la función $f(v_z)$ tiene el aspecto siguiente

$$f(v_z) = \text{const } e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}.$$

Prestemos atención a que la aceleración de la fuerza de la gravedad no ha entrado en esta fórmula. Así era de esperar, ya que el mecanismo del establecimiento de la distribución de las moléculas del gas según las velocidades, se basa en las colisiones de las moléculas entre sí, sin tener ninguna relación con el campo exterior. Esto último ha desempeñado solamente un papel secundario en la deducción expuesta: al introducir este campo, se ha relacionado la distribución según las velocidades con la ya conocida distribución de Boltzmann.

Hemos hallado la distribución de equilibrio de las moléculas según los valores de una sola componente de sus velocidades. La parte de moléculas que poseen al mismo tiempo determinados valores de las tres componentes de la velocidad, se obtendrá, evidentemente, multiplicando las partes de moléculas que posean determinados valores de cada una de las componentes por separado. En otras palabras, la función total de distribución tiene el aspecto siguiente:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \text{const } e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}.$$

Sumando los exponentes y observando que la suma $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ es el cuadrado v^2 de la magnitud absoluta de la velocidad, obtenemos definitivamente que

$$f = \text{const } e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Así tendremos que el número dN de moléculas del gas cuyas componentes de la velocidad están en los intervalos entre v_x, v_y, v_z y $v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z$, es

$$dN = \text{const } e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z$$

(el coeficiente constante, const , se determina de la condición de que el número total de moléculas con todos los valores posibles de las velocidades, sea igual al número considerado N de moléculas del gas. Aquí no se dará el valor de este coeficiente). La fórmula obtenida se denomina *distribución de Maxwell — Boltzmann* o *distribución de Maxwell*.

Prestemos atención a la analogía entre esta fórmula y la distribución de Boltzmann para la densidad de un gas según el espacio en un campo exterior: en ambos casos tenemos la expresión exponencial de aspecto.

$$e^{-\frac{\epsilon}{kT}},$$

donde ϵ es la energía de la molécula: energía cinética $\frac{mv^2}{2}$ en el caso de distribución según las velocidades, o la energía potencial $U(x, y, z)$ en el campo exterior en el caso de distribución según el espacio. Esta expresión frecuentemente se denomina *factor de Boltzmann*.

Conocidas las tres componentes v_x, v_y, v_z , se determina la dirección y la magnitud de la velocidad de la molécula. Pero la distribución de las moléculas según la dirección de la velocidad es simplemente uniforme: en todas las direcciones, como término medio, se desplaza el mismo número de moléculas.

Esto se deduce de la distribución de Maxwell — Boltzmann, en la cual figura solamente la magnitud absoluta de la velocidad v . Pero esto se ve claramente de antemano, ya que si la distribución de las velocidades según las direcciones fuese no uniforme, en el gas habría cierta dirección preferente del movimiento de las moléculas, lo cual significaría que el gas

no está en reposo, sino que se desliza en cierta dirección.

La distribución de Maxwell se puede transformar de manera que responda directamente a la pregunta sobre cual es la distribución de las moléculas del gas en valores absolutos de las velocidades, independientemente de la dirección. Para ello hay que sumar el número de moléculas que se diferencien en las magnitudes de las componentes de la velocidad v_x, v_y, v_z , siendo igual la suma $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Esto es fácil de hacer utilizando la siguiente analogía geométrica. Aplicando un sistema de coordenadas cuyos ejes expresen los valores de v_x, v_y, v_z , tendremos que el producto $dv_x dv_y dv_z$ representará el volumen de un paralelepípedo infinitamente pequeño de lados dv_x, dv_y, dv_z . Debemos sumar todos estos volúmenes elementales que están a la misma distancia del origen de coordenadas (está claro que v representará la longitud del «radio vector» en estas coordenadas). Estos volúmenes llenarán una capa esférica comprendida entre dos esferas concéntricas de superficies infinitamente próximas y de radios v y $v+dv$ respectivamente. El volumen de esta capa es igual al producto del área de la superficie esférica $4\pi v^2$ por el espesor dv de la capa.

Así, sustituyendo en la fórmula de la distribución de Maxwell—Boltzmann el producto $dv_x dv_y dv_z$ por $4\pi v^2 dv$, hallamos el número de moléculas de velocidades comprendidas en el intervalo de v y $v+dv$:

$$dN = \text{const } e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv.$$

La expresión que en esta fórmula está delante de dv , representa el número de moléculas por in-

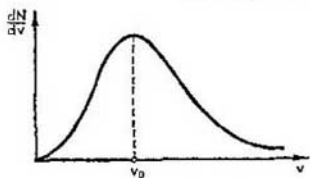


Fig. 2.

tervalo unidad de velocidades. Como función de v , este valor tendrá el aspecto representado en la fig. 2. Será igual a cero cuando $v=0$; alcanzará el máximo cuando $v=v_0$ y después disminuirá rápidamente hacia cero con el ulterior aumento de la velo-

cidad. El máximo de la curva corresponde al valor $v_0 = \sqrt{2kT/m}$, que es un poco menor que el de la velocidad eficaz v_T determinado en el § 50.

Como distintas moléculas poseen diferentes velocidades, al determinar las características medias es esencial de qué magnitud precisamente se ha de tomar el valor medio. Así, el valor medio del primer grado de la velocidad \bar{v} no coincide, ni mucho menos, con la velocidad $v_T = \sqrt{\bar{v}^2}$ (que frecuentemente se denomina también cuadrática media para subrayar su origen). Con la distribución de Maxwell — Boltzmann se puede demostrar que $\bar{v} = 0,92 v_T$.

La distribución de Maxwell — Boltzmann deducida aquí para el gas monoatómico, en realidad se puede obtener también basándose en consideraciones teóricas más generales y tiene carácter universal. Es justa para el movimiento térmico de las moléculas y de los átomos de cualquier cuerpo. No obstante hay que subrayar que la distribución de Maxwell — Boltzmann se basa en la Mecánica clásica. Por eso su aplicación será justa cuando no se trate de fenómenos cuánticos, lo mismo que, en general, la aplicación de la Mecánica clásica al movimiento térmico.

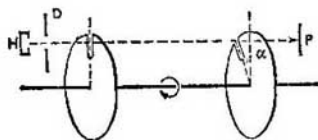


Fig. 3.

El estudio experimental de la distribución de las velocidades del movimiento térmico se efectúa mediante diferentes métodos, utilizando *los haces moleculares*. Estos últimos se obtienen introduciendo moléculas evaporadas de una sustancia que se calienta en un horno especial, en una cámara en la cual se ha hecho un vacío de tal grado, que las moléculas se introduzcan en ella prácticamente sin sufrir colisiones.

Uno de estos métodos se basa en la idea del selector mecánico de velocidades, que consiste en lo siguiente: en un espacio en el cual se ha hecho el vacío, giran dos discos circulares montados en un árbol común (a la distancia l) con ranuras radiales desplazadas entre sí en cierto ángulo α (fig. 3). Sobre estos discos se dirige desde el horno H , a través del diafragma D , el haz molecular. La molécula que pasa por la ranura

del primer disco a la velocidad v , alcanzará el segundo disco al cabo del tiempo $t=l/v$. Durante este tiempo, el disco girará un ángulo $\Omega t = \Omega l/v$, donde Ω es la velocidad angular de rotación. Por eso, a través de la ranura del segundo disco pasarán (y dejarán huella en la pantalla P) solamente las moléculas cuyas velocidades satisfagan la igualdad $\Omega l/v = \alpha$. Variando la velocidad de rotación de los discos y midiendo la densidad de las colisiones o bombardeo en la pantalla, se determina la relación de partículas y qué velocidad poseen.

La comprobación experimental de la distribución de Maxwell — Boltzmann se ha efectuado también observando la desviación del haz molecular en un campo de gravedad. Los átomos de cesio calentados en

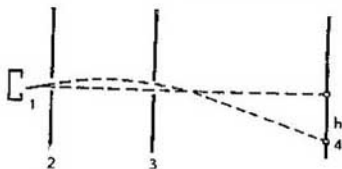


Fig. 4.

el horno 1 (fig. 4) salen despedidos por el orificio del horno y van a parar a una cámara en que se ha hecho el vacío. El delgado haz aislado por los diafragmas 2 y 3 se desvía hacia abajo debido al campo de gravedad, y lo capta el detector, delgado alambre caliente, horizontal de tungsteno 4, que se puede colocar a diferentes distancias h por debajo del eje del aparato (los átomos de cesio, después de incidir en el alambre lo abandonan de nuevo en forma de iones positivos, que recoge una placa cargada negativamente). La desviación h del átomo depende de su velocidad v (esta desviación, en los experimentos ha sido de décimas de milímetro, siendo la longitud del camino del haz igual a 2 m). Midiendo la intensidad del haz a diferentes distancias h , se halla la distribución de los átomos del haz según las velocidades.

Al dilatarse, el cuerpo desplaza los cuerpos que lo rodean, es decir, produce un trabajo.

Veamos, por ejemplo, el gas que se halla en un recipiente cilíndrico tapado por un émbolo. Si el gas, al di-

latarse, desplaza al émbolo a una distancia infinitamente pequeña dh , realizará un trabajo dA igual al producto Fdh , donde F es la fuerza con que el gas actúa sobre el émbolo. Pero, según la definición de la presión $F=pS$, donde p es la presión del gas y S , el área del émbolo. Por eso $dA=pSdh$. Observando que el producto Sdh es el aumento del volumen del gas dV , hallamos definitivamente que

$$dA = p dV.$$

Esta simple e importante fórmula determina el trabajo en el proceso elemental de un cambio infinitamente pequeño del volumen del cuerpo. Se ve que este trabajo depende solamente de la presión del cuerpo y de la variación total de su volumen; pero no depende de su forma.

Para evitar incomprensiones hay que decir que esta aseveración no se refiere a los cuerpos sólidos, V. el § 101.

El trabajo dA es positivo al dilatarse el cuerpo ($dV > 0$), en cuyo caso el cuerpo realiza un trabajo actuando sobre el medio que lo rodea. Por el contrario, al comprimirse el cuerpo ($dV < 0$), el trabajo lo realizan los cuerpos que lo rodean actuando sobre el primero. En nuestra definición, el dA de este caso corresponde al trabajo negativo.

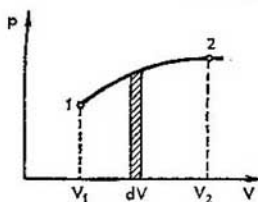


Fig. 5.

El trabajo producido en uno u otro proceso permite una interpretación geométrica clara, si se representa el proceso gráficamente mediante una curva en coordenadas p, V . Supongamos, por ejemplo, que la curva 1—2 de la fig. 5 representa la variación de la presión del gas al dilatarse. Al aumentar el volumen en dV , el trabajo realizado por el gas será igual a pdV , es decir, al área del rectángulo rayado infinitamente estrecho. Por eso, el trabajo total realizado por el gas al dilatarse desde el volumen V_1 hasta el volumen V_2 , será la suma de los trabajos elementales dA

y se representará por el área $12V_2V_1$ comprendida debajo de la curva y limitada por las dos líneas verticales extremas. De esta manera, el área del diagrama nos da directamente el trabajo realizado por el cuerpo en el proceso examinado.

Frecuentemente se opera con *procesos cíclicos*, en los que el cuerpo adquiere el estado inicial. Supongamos, por ejemplo, que en el gas se produce el proceso representado por la curva cerrada $1a2b1$ de la fig. 6. En el trayecto $1a2$, el gas se dilata y produce el trabajo representado por el área de la superficie de

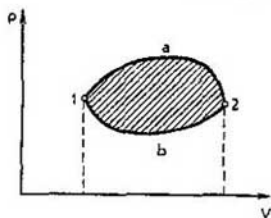


Fig. 6.

debajo de la curva $1a2$. En el trayecto $2b1$, el gas se comprime, por lo tanto, se efectúa un trabajo negativo y de magnitud igual al de la superficie de debajo de la curva $2b1$. El trabajo total realizado por el gas será igual, por consiguiente, a la diferencia de estas dos áreas, es decir, se representará por el área de la superficie rayada comprendida en la curva cerrada.

El trabajo total A realizado por el cuerpo al dilatarse desde cierto volumen V_1 hasta el volumen V_2 , se expresa de manera muy simple en el proceso que transcurre a presión constante. Evidentemente, en este caso tendremos que

$$A = p(V_2 - V_1).$$

Determinemos también el trabajo realizado en la dilatación isotérmica de un gas perfecto. Para una molécula-gramo de gas, la presión es $p = RT/V$; por consiguiente:

$$dA = p dV = \frac{RT}{V} dV = RT d \ln V,$$

y como la temperatura T permanece constante, se puede escribir $dA = d(RT \ln V)$. De esto se desprende que el trabajo A es igual a la diferencia de los valo-

res de las magnitudes $RT \ln V$ al final y al principio del proceso, es decir:

$$A = RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Si el cuerpo no recibe de fuera ninguna energía, el trabajo de dilatación se realiza a expensas de la energía interna. Esta energía, que designaremos con la letra E , comprende la energía cinética del movimiento térmico de los átomos de la sustancia y la energía potencial de interacción mutua de los átomos.

Sin embargo, la variación de la energía interior del cuerpo en un proceso no coincide con el trabajo realizado. El caso es que el cuerpo puede adquirir (o ceder) energía directamente de otros cuerpos, sin necesidad de efectuar trabajo mecánico. La energía adquirida de esta manera se denomina *cantidad de calor*. Consideraremos que esta magnitud es positiva, si el cuerpo adquiere calor, y negativa, si lo cede.

De esta manera tenemos que la variación infinitamente pequeña de la energía interna del cuerpo se compone de dos partes: aumenta a costa de la cantidad de calor adquirido por el cuerpo (que designaremos por dQ) y disminuye a costa del trabajo dA realizado por el cuerpo. Por consiguiente podemos escribir

$$dE = dQ - p dV.$$

Esta importante relación expresa el principio de conservación de la energía en los procesos térmicos (o, como en este caso se denomina, *primer principio de la Termodinámica*).

Hay que subrayar que el trabajo y la cantidad de calor dependen no sólo del estado inicial y final del cuerpo, sino también del trayecto por donde se ha efectuado la variación del estado del cuerpo. Por esta razón no se puede hablar de «la cantidad de calor encerrada en el cuerpo», ni considerar el efecto térmico del proceso como la diferencia de estas cantidades de los estados inicial y final. Lo absurdo de tal concepto se revela sobre todo con evidencia en el proceso cíclico, en el cual el cuerpo vuelve al estado inicial; mientras que la cantidad total de calor absorbido (o cedido) no es igual a cero, ni mucho menos.

Solamente la energía interna E es, como se dice, *una función del estado*: en cada estado determinado, el cuerpo posee determinada energía. Por eso, la variación total de la energía en el proceso también es una mag-

nitud que depende solamente de los estados inicial y final (es la diferencia $E_2 - E_1$ de energías de estos estados). La división de esta variación de energía en cantidad de calor Q y en trabajo A no es unívoca y depende del camino seguido al pasar del estado inicial al final. En particular, en el proceso cíclico, la variación total de energía es igual a cero, mientras que la cantidad de calor Q absorbida por el cuerpo y el trabajo A realizado por el mismo son distintos de cero y se relacionan entre sí mediante la igualdad $Q=A$. En las mediciones térmicas, como unidad de cantidad de calor se ha utilizado hasta hace poco una unidad especial de energía, la *caloría (cal)*. La definición de esta unidad como la cantidad de calor necesaria para elevar 1° la temperatura de 1 g de agua, no es bastante exacta, ya que la capacidad calorífica de la propia agua depende en algo de la temperatura. Debido a ello, ha habido distintas definiciones de caloría, que se diferencian algo, cuantitativamente, entre sí. La correspondencia aproximada entre caloría y julio es la siguiente:

$$1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J.}$$

Si al absorber una cantidad dQ de calor, la temperatura del cuerpo se eleva en dT , la relación

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

se denomina *capacidad calorífica* del cuerpo. No obstante, esta definición es insuficiente, ya que el calor necesario para calentar un cuerpo no sólo depende de la variación de la temperatura, sino también de otras condiciones en que se efectúa el calentamiento; hay que indicar qué ocurre con otras propiedades del cuerpo, además de la temperatura. Debido a esta plurivalencia puede haber distintas definiciones de capacidad calorífica.

Las más usadas en Física son las llamadas *capacidad calorífica a volumen constante* C_V y *capacidad calorífica a presión constante* C_p , que determinan la cantidad de calor al calentar un cuerpo manteniendo invariable el volumen o la presión respectivamente. Si el volumen permanece constante, $dV=0$ y $dQ=dE$, es decir, todo el calor se invierte en elevar la energía interna del cuerpo. Por eso podemos escribir

$$C_V = \left(\frac{dE}{dT} \right)_V.$$

El subíndice V de la derivada indica que la derivación se efectúa a valor constante de V . Esta indicación es necesaria, porque la energía del cuerpo depende no sólo de la temperatura, sino también de otras magnitudes que caracterizan el estado del cuerpo, y el resultado de la derivación depende de qué magnitud de éstas precisamente se supone constante.

Si al calentar un cuerpo la presión permanece constante, el calor se invertirá no sólo en el aumento de la energía interna, sino también en la realización de trabajo. En este caso la cantidad de calor se puede escribir así:

$$dQ = dE + p dV = d(E + pV),$$

ya que $p = \text{const.}$ Vemos que esta cantidad de calor resulta igual a la variación de la magnitud

$$W = E + pV.$$

Esta magnitud se denomina *entalpía* (también se utilizan las denominaciones de *calor total* y *contenido térmico* o *calorífico*). Esta magnitud es una función determinada del estado del cuerpo, lo mismo que lo es la energía. Así tenemos que la capacidad calorífica a presión constante puede ser expresada como la derivada

$$C_p = \left(\frac{dW}{dT} \right)_p.$$

La capacidad calorífica C_p siempre es mayor que la C_v :

$$C_p > C_v.$$

A primera vista puede parecer que esta desigualdad está relacionada simplemente con el trabajo que ha de realizar el cuerpo dilatándose al calentarse (a presión constante). Sin embargo esto no es así, y la desigualdad se refiere de la misma manera a los cuerpos que se dilatan al calentarse, que a los (pocos) cuerpos cuyo volumen disminuye al calentarlos. En realidad es consecuencia de uno de los principios generales del estudio del calor, que consiste en lo siguiente:

La acción exterior que saca al cuerpo del estado de equilibrio térmico, estimula procesos en éste que tienden a contrarrestar esta acción debilitando el resultado de la misma. Así, por ejemplo, el calentamiento del cuerpo estimula los procesos relacionados con la absorción de calor, y viceversa, el enfriamiento

contribuye a que tengan lugar procesos en que se desprende calor. Esto es el denominado *principio de Le Chatelier-Braun*.

Supongamos que al cuerpo que se halla en equilibrio con el medio exterior, se le comunica cierta cantidad de calor, de manera que el volumen del cuerpo permanezca invariable, elevándose la temperatura cierta magnitud $(\Delta T)_V$. Como resultado de este calentamiento variará también la presión del cuerpo, de modo que se alterará la condición de equilibrio, según la cual la presión del cuerpo debe ser igual a la del medio que lo rodea. Según el principio de Le Chatelier-Braun, el restablecimiento del equilibrio, que acarrearía el restablecimiento de la presión inicial, debe ir acompañado de cierto enfriamiento. En otras palabras, la variación de la temperatura $(\Delta T)_p$ del cuerpo a presión constante, resulta menor que la variación $(\Delta T)_V$ a volumen constante (siendo la misma la cantidad de calor comunicada al cuerpo). Pero esto significa que para una misma variación de la temperatura se necesita más calor cuando la presión es constante, que cuando el volumen es constante.

En adelante recurriremos reiteradas veces al principio de Le Chatelier-Braun cuando se trate de la variación de dirección o sentido de una magnitud al variar otra.

§ 57. Capacidad calorífica de los gases

Como se supone que las moléculas del gas perfecto no interaccionan, la variación de la distancia media entre ellas al variar el volumen del gas, no debe influir en la energía interna de éste. En otras palabras, la energía interna del gas perfecto es una función solamente de la temperatura, y no del volumen o de la presión. De esto se deduce que la capacidad calorífica del gas $C_V = \frac{dE}{dT}$ también depende sólo de la temperatura.

Lo mismo tenemos con la capacidad calorífica $C_p = \frac{dW}{dT}$; además hay que tener en cuenta que entre estas

dos capacidades caloríficas del gas hay una relación muy simple.

Sea una molécula-gramo de un gas. La correspondiente capacidad calorífica se denomina *calor específico molar* (designémoslo con la letra minúscula c). Teniendo en cuenta la ecuación de estado $pV = RT$, la función térmica de un mol de gas está relacionada con

la energía interna mediante la ecuación

$$W = E + pV = E + RT.$$

Diferenciando esta igualdad en función de la temperatura, se obtiene que

$$c_p = c_v + R,$$

es decir, la diferencia de los calores específicos molares del gas, $c_p - c_v$, es igual a la constante de los gases

$$R = 8,3 \frac{\text{J}}{\text{grad} \cdot \text{mol}} = 2 \frac{\text{cal}}{\text{grad} \cdot \text{mol}}.$$

Es fácil hallar el calor específico molar de un gas monoatómico (como lo son los gases nobles). En este caso, la energía interna del gas es la suma de las energías cinéticas del movimiento de traslación de las partículas. Como, según la propia definición de temperatura, la energía cinética media de una partícula es igual a $\frac{3}{2} kT$, la energía interna de un mol de gas será

$$E = \frac{3}{2} N_0 kT = \frac{3}{2} RT.$$

Por consiguiente, el calor molar

$$c_v = \frac{3}{2} R = 12,5 \frac{\text{J}}{\text{grad} \cdot \text{mol}}, \quad c_p = \frac{5}{2} R = 20,8 \frac{\text{J}}{\text{grad} \cdot \text{mol}}.$$

Observemos que estos valores no dependen en absoluto de la temperatura.

En adelante veremos que en muchos procesos, el papel de característica importante del gas lo desempeña la relación de los calores específicos c_p y c_v , generalmente designada mediante la letra γ :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

Para los gases monoatómicos

$$\gamma = \frac{5}{3} = 1,67.$$

El calor específico de los gases pluriatómicos es de origen más complejo que el de los gases monoatómicos. La energía interna de los primeros se compone de las energías cinéticas del movimiento de traslación y de rotación de las moléculas y de la energía de los átomos que oscilan en el interior de la molécula. Con ello,

cada uno de estos tres movimientos aporta algo al calor específico del gas.

A propósito de ello, volvamos a la definición de temperatura dada en el § 50. Como la molécula en su movimiento de traslación tiene tres grados de libertad, se puede decir que a cada uno de ellos le corresponde una energía cinética media de $\frac{kT}{2}$. Según la Mecánica

clásica, este mismo resultado se obtendría, en general, para todos los grados de libertad de la molécula relacionados tanto con el movimiento de traslación, como con el de rotación y oscilación de los átomos en ella. Sabemos también que en el movimiento de oscilación, el valor medio de la energía potencial es igual al valor medio de la energía cinética. Por eso, según la Mecánica clásica, la energía potencial térmica de cada grado oscilatorio de libertad de los átomos en el interior de la molécula sería también igual a $\frac{kT}{2}$. Como

resultado se obtendría que cualquier gas debería poseer un calor específico constante, independiente de la temperatura, determinado enteramente por el número de grados de libertad de la molécula (y, por consiguiente, por el número de átomos de la misma). Sin embargo, en realidad, el movimiento oscilatorio de los átomos en el interior de la molécula repercute en el calor específico del gas solamente a temperaturas bastante elevadas. El caso es que este movimiento conserva el carácter de «oscilación del punto cero», no sólo a bajas temperaturas, sino también a temperaturas relativamente elevadas. La razón de ello se halla en la magnitud relativamente grande de la energía de estas oscilaciones del punto cero. La energía «del punto cero», por naturaleza, no depende de la temperatura, por consiguiente no se refleja en el calor específico. Así tenemos que en las moléculas de los gases diatómicos (nitrógeno, oxígeno, hidrógeno y otros), las oscilaciones intramoleculares de los átomos «se incorporan» completamente al movimiento sólo a temperaturas de varios millares de grados. A menores temperaturas, su aportación en el calor específico disminuye rápidamente y ya a la temperatura de la habitación prácticamente no influye en el calor específico.

La energía del punto cero de rotación de las moléculas es muy pequeña. Por eso, la Mecánica clásica se puede aplicar a este movimiento muy pronto: para las moléculas diatómicas ya se puede aplicar a unos cuan-

tos grados de Kelvin (a excepción del gas más ligero, hidrógeno, que necesita una temperatura de unos 80° K).

A temperaturas próximas a la del ambiente, el calor específico de los gases diatómicos está relacionado, por lo tanto, sólo con los movimientos de traslación y de rotación de las moléculas y se aproxima mucho al valor teórico constante (basado en la Mecánica clásica):

$$c_V = \frac{5}{2} R = 20,8 \frac{\text{J}}{\text{grad} \cdot \text{mol}}, \quad c_P = \frac{7}{2} R = 29,1 \frac{\text{J}}{\text{grad} \cdot \text{mol}}.$$

La relación de los calores específicos es $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$.

Señalemos que «en la región cuántica», las energías medias de los movimientos térmicos de traslación y de oscilación del gas (y con ellos, el calor específico del gas) resultan dependientes no sólo de la temperatura, sino también de las propiedades «individuales» de las moléculas: de sus momentos de inercia y de la frecuencia de las oscilaciones.

Precisamente por esta causa, estas energías, a diferencia de la energía del movimiento de traslación, no pueden servir para definir directamente la temperatura.

Un carácter mucho más complejo posee el calor específico de los gases poliatómicos. Los átomos de una molécula poliatómica pueden realizar distintos tipos de oscilaciones con diferentes energías «del punto cero». Con el aumento de la temperatura, estas oscilaciones, una tras otra, se «incorporan» gradualmente al movimiento térmico con lo cual aumenta el calor específico del gas. No obstante, puede que no lleguen a incorporarse todas las oscilaciones, ya que a elevadas temperaturas puede iniciarse la desintegración de las moléculas.

Recordemos de nuevo que todo lo dicho se refiere al gas considerado perfecto. A grandes compresiones, cuando las propiedades del gas se hacen sensiblemente diferentes de las del gas perfecto, varía también el calor específico debido a la aportación de la interacción de las moléculas en la energía interna del gas.

§ 58.

Cuerpos condensados

La sencillez de las propiedades térmicas del gas perfecto, que permite una ecuación de estado común para todos los gases, se debe al pequeño papel desempeñado por la interacción de las moléculas del gas. Sin em-

bargo, en los cuerpos condensados, la interacción de las moléculas desempeña un papel primordial, debido a lo cual, las propiedades térmicas de estos cuerpos tienen un carácter individual mucho mayor y resulta imposible establecer una ecuación de estado más o menos común.

Los cuerpos condensados, en oposición a los gases, poseen una compresibilidad muy pequeña. Para caracterizar la compresibilidad de la sustancia se utiliza generalmente *el coeficiente de compresibilidad*, definido como

$$\alpha = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dp} \right)_T;$$

la derivada del volumen con respecto a la presión se toma a temperatura constante, es decir, caracteriza el proceso de compresión isotérmica (esta derivada es negativa: al aumentar la presión, el volumen disminuye y el signo menos es para obtener una magnitud positiva). Está claro que α tiene dimensiones inversas a las de la presión.

Como ejemplo aduzcamos los valores del coeficiente de compresibilidad (por baria) de algunos líquidos (a la temperatura ambiente y presión atmosférica):

Mercurio	$0,4 \cdot 10^{-5}$ barias ⁻¹
Agua	$4,9 \cdot 10^{-5}$ "
Alcohol	$7,6 \cdot 10^{-5}$ "
Eter	$11,5 \cdot 10^{-5}$ "

El coeficiente de compresibilidad de la mayoría de los cuerpos sólidos es menor aún:

Diamante	$0,16 \cdot 10^{-6}$ barias ⁻¹
Hierro	$0,61 \cdot 10^{-6}$ "
Cobre	$0,76 \cdot 10^{-6}$ "
Aluminio	$1,4 \cdot 10^{-6}$ "
Vidrio	$2,7 \cdot 10^{-6}$ "
Cesio	$62 \cdot 10^{-6}$ "

Para compararlo veamos a qué es igual la compresibilidad del gas. En la compresión isotérmica, el volumen del gas disminuye inversamente proporcional a la presión según la ecuación $V = RT/p$. Colocando esta expresión en la del coeficiente α definida más arriba y diferenciando, obtenemos que

$$\alpha = \frac{1}{p}.$$

A la presión de una baria, la compresibilidad del gas $\kappa=1$ baria⁻¹.

Otra magnitud utilizada para caracterizar las propiedades térmicas de los cuerpos condensados, es el *coeficiente de dilatación térmica*, que es

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dT} \right)_p;$$

donde el subíndice p de la derivada indica que el calentamiento del cuerpo se efectúa a presión constante. La mayoría de los cuerpos se dilatan al calentarlos (el coeficiente α es positivo). Esto es completamente natural, ya que se intensifica el movimiento térmico y con ello como si se empujase a las moléculas. Sin embargo hay excepciones de esta regla. Así, por ejemplo, en el intervalo de temperaturas desde 0° C hasta 4° C, el agua, al calentarse disminuye de volumen. También se comprime al calentar el helio líquido a temperaturas inferiores a 2,19° K (el llamado helio II, V. el § 74).

Aduzcamos como ejemplo los coeficientes de dilatación térmica de varios líquidos (a la temperatura ambiente):

Mercurio	1,8 · 10 ⁻⁴ grad ⁻¹
Agua	2,1 · 10 ⁻⁴ ..
Alcohol	10,8 · 10 ⁻⁴ ..
Eter	16,3 · 10 ⁻⁴ ..

Para comparación recordemos que el coeficiente de dilatación térmica de los gases se halla colocando el valor $V=RT/p$ en la ecuación de α , obteniendo así que $\alpha=1/T$, lo cual, siendo $T=293^\circ$ K, nos da que $\alpha=3,4 \cdot 10^{-4}$.

El coeficiente de dilatación térmica de los cuerpos sólidos es menor aún:

Hierro	3,5 · 10 ⁻⁵ grad ⁻¹
Cobre	5,0 · 10 ⁻⁵ ..
Vidrio	2,4—3,0 · 10 ⁻⁵ ..

Es muy pequeño, sobre todo, el coeficiente de dilatación térmica del invar, aleación de 64% de hierro y 36% de níquel ($\alpha=3 \cdot 10^{-6}$), y del cuarzo fundido ($\alpha=1,2 \cdot 10^{-6}$). Estos materiales se utilizan ampliamente para preparar las partes de los instrumentos en que se quiera evitar variaciones de las dimensiones al oscilar la temperatura.

En el § 45 se ha indicado que la dilatación térmica de los cristales (no cúbicos) transcurre de distinta manera según las diferentes direcciones. Esta diferencia puede ser muy considerable. Así, por ejemplo, en la dilatación térmica del cristal de zinc, las dimensiones lineales según la dirección del eje hexagonal aumentan 4,5 veces más rápidamente que en las direcciones perpendiculares a este eje.

El calor específico de los cuerpos condensados, como el de los gases, generalmente aumenta con la temperatura.

El calor específico del cuerpo sólido está relacionado con la energía de los átomos, que realizan oscilaciones térmicas pequeñas alrededor de las posiciones de equilibrio. Al aumentar la temperatura, este calor específico tiende hacia determinado límite, correspondiente al estado en que las oscilaciones de los átomos se pueden analizar con ayuda de la Mecánica clásica. Como todo el movimiento de los átomos tiene carácter oscilatorio, a cada uno de los tres grados de libertad debería corresponderle una energía media igual a kT : a la razón de $\frac{kT}{2}$ por cada una de las energías medias cinética y potencial (como se ha explicado en el párrafo anterior). En total, la energía media correspondiente a un átomo del cuerpo sólido debería ser igual a $3kT$.

Sin embargo, este límite nunca se alcanza en compuestos más o menos complejos, ya que antes de alcanzarlo se funde o se descompone la sustancia. Para muchos elementos, el valor límite del calor específico se alcanza a las temperaturas corrientes, así que el calor específico de un átomo-gramo de un elemento sólido es aproximadamente

$$c = 3R = 25 \frac{\text{J}}{\text{grad} \cdot \text{mol}} = 6 \frac{\text{cal}}{\text{grad} \cdot \text{mol}}$$

(esta relación expresa la denominada *ley de Dulong y Petit*).

Hablando de calor específico de un cuerpo sólido, a sabiendas no hemos diferenciado el calor específico a presión constante del calor específico a volumen constante. Generalmente, el calor específico que se mide es el correspondiente a presión constante, pero en general, la diferencia entre el c_p y el c_v de los cuerpos sólidos es muy pequeña (así, por ejemplo, en el hierro tenemos que $\gamma = c_p/c_v = 1,02$). Esto se debe a que el coeficiente de dilatación térmica de los cuerpos sólidos es muy pequeño.

El caso es que hay una relación general que liga la diferencia de las capacidades caloríficas $C_p - C_v$ con el coeficiente α de dilatación térmica y la compresibilidad κ de cualquier cuerpo:

$$C_p - C_v = \frac{T\alpha^2}{\rho\kappa}$$

(aquí ρ es la densidad de la sustancia y C_p y C_v , los calores específicos, es decir, las capacidades caloríficas de 1 g de sustancia); así vemos que la diferencia $C_p - C_v$ es proporcional al cuadrado del coeficiente α .

Al bajar la temperatura, disminuye el calor específico del cuerpo sólido y tiende a cero en el cero absoluto. Esto es consecuencia del postulado general, denominado *teorema (del calor) de Nernst* según el cual, a temperaturas suficientemente bajas, todas las magnitudes que caracterizan al cuerpo condensado, dejan de depender de la temperatura del mismo.

En particular, al acercarse al cero absoluto, dejan de depender de la temperatura, la energía y la entalpía del cuerpo; por eso tienden a cero los calores específicos C_p y C_v , que son las derivadas de estas magnitudes según la temperatura.

Del teorema de Nernst se desprende también que cuando $T \rightarrow 0$, tiende también a cero el coeficiente de dilatación térmica, ya que el volumen del cuerpo deja de depender de la temperatura.