

# **CURSO DE FÍSICA GENERAL**

**I. V. SAVÉLIEV**

**EDITORIAL  
MIR  
MOSCÚ**

**1**









И. В. САВЕЛЬЕВ

**КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

**ТОМ I. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА**

МОСКВА •НАУКА•

# CURSO DE FÍSICA GENERAL

I. V. SAVÉLIEV

I

MECÁNICA  
FÍSICA MOLECULAR

Traducido al español  
por el ingeniero  
Antonio Ballesteros Elías

EDITORIAL MIR · MOSCÚ

Impreso en la URSS

На испанском языке

#### A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URRS.

© Издательство «Наука». 1982

© Traducción al español. Editorial Mir. 1984



# ÍNDICE

Prólogo . . . . .	9
Recomendaciones metodológicas . . . . .	11
Introducción . . . . .	14
<b>PRIMERA PARTE</b>	
<b>FUNDAMENTOS FÍSICOS DE MECÁNICA</b>	
<b>CAPÍTULO I. CINEMÁTICA</b> . . . . . 19	
1. Movimiento mecánico . . . . .	19
2. Cierta información acerca de los vectores . . . . .	22
3. Velocidad . . . . .	38
4. Aceleración . . . . .	45
5. Cinemática del movimiento de rotación . . . . .	48
<b>CAPÍTULO II. DINÁMICA DE UN PUNTO MATERIAL</b> . . . . . 534	
6. Mecánica clásica. Límites de su aplicación . . . . .	53
7. Primera ley de Newton. Sistemas inerciales de referencia . . . . .	54
8. Masa y cantidad de movimiento de un cuerpo . . . . .	55
9. Segunda ley de Newton . . . . .	57
10. Unidades y dimensiones de las magnitudes físicas . . . . .	59
11. Tercera ley de Newton . . . . .	62
12. Principio de relatividad de Galileo . . . . .	64
13. Fuerzas . . . . .	66
14. Fuerzas elásticas . . . . .	67
15. Fuerzas de rozamiento . . . . .	71
16. Fuerza de gravedad y peso . . . . .	74
17. Aplicación práctica de las leyes de Newton . . . . .	77
<b>CAPÍTULO III. PRINCIPIOS DE CONSERVACIÓN</b> . . . . . 79	
18. Magnitudes que se conservan . . . . .	79
19. Energía cinética . . . . .	80
20. Trabajo . . . . .	82
21. Fuerzas conservativas . . . . .	86
22. Energía potencial en un campo exterior de fuerzas . . . . .	90
23. Energía potencial de interacción . . . . .	96
24. Principio de conservación de la energía . . . . .	101
25. Energía de la deformación elástica . . . . .	103
26. Condiciones de equilibrio de un sistema mecánico . . . . .	105
27. Principio de conservación de la cantidad de movimiento . . . . .	107
28. Choque de dos cuerpos . . . . .	109
29. Principio de conservación del momento de la cantidad de movimiento . . . . .	112
30. Movimiento en un campo central de fuerzas . . . . .	118
31. Problema de los dos cuerpos . . . . .	123

<b>CAPÍTULO IV. SISTEMAS NO INERCIALES DE REFERENCIA</b>	<b>125</b>
32. Fuerzas de inercia . . . . .	125
33. Fuerza centrífuga de inercia . . . . .	127
34. Fuerza de Coriolis . . . . .	130
35. Principios de conservación en sistemas no inerciales de referencia	136
<b>CAPÍTULO V. MECÁNICA DEL SÓLIDO</b>	<b>138</b>
36. Movimiento de un sólido . . . . .	138
37. Movimiento del centro de masas de un sólido . . . . .	140
38. Rotación de un sólido alrededor de un eje inmóvil . . . . .	141
39. Momento de inercia . . . . .	147
40. Concepto de tensor de inercia . . . . .	152
41. Energía cinética de un sólido en rotación . . . . .	159
42. Energía cinética de un sólido durante el movimiento plano . . . . .	163
43. Aplicación de las leyes de dinámica del sólido . . . . .	164
44. Giroscopios . . . . .	170
<b>CAPÍTULO VI. GRAVITACIÓN UNIVERSAL</b>	<b>178</b>
45. Ley de la gravitación universal . . . . .	178
46. Campo gravitatorio . . . . .	180
47. Principio de equivalencia . . . . .	185
48. Velocidades cósmicas . . . . .	188
<b>CAPÍTULO VII. MOVIMIENTO VIBRATORIO</b>	<b>191</b>
49. Generalidades sobre las vibraciones . . . . .	191
50. Vibraciones pequeñas . . . . .	192
51. Números complejos . . . . .	196
52. Ecuaciones diferenciales lineales . . . . .	198
53. Vibraciones armónicas . . . . .	201
54. El péndulo . . . . .	206
55. Diagrama vectorial . . . . .	209
56. Pulsaciones . . . . .	211
57. Composición de vibraciones perpendiculares entre sí . . . . .	212
58. Vibraciones amortiguadas . . . . .	216
59. Autovibraciones . . . . .	221
60. Vibraciones forzadas . . . . .	222
61. Resonancia paramétrica . . . . .	228
<b>CAPÍTULO VIII. MECÁNICA RELATIVISTA</b>	<b>229</b>
62. Teoría especial de la relatividad . . . . .	229
63. Transformaciones de Lorentz . . . . .	233
64. Corolarios de las transformaciones de Lorentz . . . . .	237
65. Intervalo . . . . .	241
66. Transformación y composición de velocidades . . . . .	244
67. Expresión relativista para la cantidad de movimiento . . . . .	245
68. Expresión relativista para la energía . . . . .	249
69. Transformaciones de la cantidad de movimiento y de la energía . . . . .	253
70. Interacción entre masa y energía . . . . .	255
71. Partículas con masa en reposo nula . . . . .	256
<b>CAPÍTULO IX. HIDRODINÁMICA</b>	<b>259</b>
72. Líneas y tubos de corriente. Continuidad del flujo . . . . .	259
73. Ecuación de Bernoulli . . . . .	261
74. Salida de un líquido por un orificio . . . . .	264

75. Fuerzas de rozamiento interno . . . . .	266
76. Corrientes laminar y turbulenta . . . . .	268
77. Corriente de un líquido por un tubo redondo . . . . .	269
78. Movimiento de sólidos en líquidos y gases . . . . .	272

**SEGUNDA PARTE**  
**FÍSICA MOLECULAR Y TERMODINÁMICA**

**CAPITULO X. GENERALIDADES . . . . . 277**

79. Física estadística y termodinámica . . . . .	277
80. Masa y dimensiones de las moléculas . . . . .	278
81. Estado del sistema. Transformación . . . . .	280
82. Energía interna del sistema . . . . .	282
83. Primer principio de termodinámica . . . . .	283
84. Trabajo que realiza un cuerpo durante las variaciones de volumen . . . . .	285
85. Temperatura . . . . .	288
86. Ecuación de estado de un gas ideal . . . . .	290
87. Energía interna y capacidad calorífica de un gas ideal . . . . .	292
88. Ecuación de la adiabática de un gas ideal . . . . .	296
89. Transformaciones politrópicas . . . . .	298
90. Trabajo que realiza un gas ideal durante diversas transformaciones . . . . .	300
91. Gas de Van der Waals . . . . .	302
92. Fórmula barométrica . . . . .	305

**CAPÍTULO XI. FÍSICA ESTADÍSTICA . . . . . 308**

93. Ciertos datos sobre la teoría de las probabilidades . . . . .	308
94. Carácter del movimiento térmico de las moléculas . . . . .	311
95. Número de choques de las moléculas contra la pared . . . . .	314
96. Presión del gas contra la pared . . . . .	317
97. Energía media de las moléculas . . . . .	320
98. Distribución de Maxwell . . . . .	329
99. Comprobación experimental de la ley de distribución de Maxwell . . . . .	337
100. Distribución de Boltzmann . . . . .	340
101. Determinación del número de Avogadro por Perrin . . . . .	342
102. Estados macro y microscópico. Peso estadístico . . . . .	344
103. Entropía . . . . .	344

**CAPÍTULO XII. TERMODINÁMICA . . . . . 360**

104. Leyes fundamentales de termodinámica . . . . .	360
105. Ciclo de Carnot . . . . .	365
106. Escala termodinámica de temperaturas . . . . .	370
107. Ejemplos de cálculo de la entropía . . . . .	372
108. Ciertas aplicaciones de la entropía . . . . .	375
109. Potenciales termodinámicos . . . . .	377

**CAPÍTULO XIII. ESTADO CRISTALINO . . . . . 382**

110. Rasgos distintivos del estado cristalino . . . . .	382
111. Clasificación de los cristales . . . . .	384
112. Tipos físicos de las redes cristalinas . . . . .	385
113. Defectos en los cristales . . . . .	389
114. Capacidad calorífica de los cristales . . . . .	390

<b>CAPÍTULO XIV. ESTADO LÍQUIDO</b>	<b>393</b>
115. Estructura de los líquidos . . . . .	393
116. Tensión superficial . . . . .	394
117. Presión bajo la superficie curvada de un líquido . . . . .	397
118. Fenómenos que se producen en el límite entre un líquido y un sólido . . . . .	399
119. Fenómenos capilares . . . . .	402
<b>CAPÍTULO XV. EQUILIBRIOS Y TRANSICIONES DE FASE</b>	<b>405</b>
120. Introducción . . . . .	405
121. Evaporación y condensación . . . . .	406
122. Equilibrio del líquido y el vapor saturado . . . . .	408
123. Estado crítico . . . . .	409
124. Vapor sobresaturado y líquido recalentado . . . . .	411
125. Fusión y cristalización . . . . .	414
126. Ecuación de Clapeyron — Clausius . . . . .	416
127. Punto triple. Diagrama de estado . . . . .	418
<b>CAPÍTULO XVI. CINÉTICA FÍSICA</b>	<b>423</b>
128. Fenómenos de transporte . . . . .	423
129. Longitud media del recorrido libre . . . . .	427
130. Difusión en los gases . . . . .	431
131. Conductividad térmica de los gases . . . . .	434
132. Viscosidad de los gases . . . . .	438
133. Gases ultraenrarecidos . . . . .	440
134. Efusión . . . . .	442
<b>APÉNDICES</b>	<b>447</b>
I. Cálculo de ciertas integrales . . . . .	447
II. Fórmula de Stirling . . . . .	448
III. Tensores simétricos de segundo rango . . . . .	449
Índice alfabético de materias . . . . .	454

## PRÓLOGO

En la creación del manual de física general en tres tomos, que ofrecemos al lector, el autor ha trabajado durante 20 años. La primera variante del curso fue parcialmente modificada casi en cada una de las reediciones en ruso (en total el manual ha sufrido cinco ediciones de los tomos primero y segundo y cuatro, del tercero). En 1977, 1978 y 1979 vieron la luz en ruso el primero, segundo y tercer tomos de la nueva variante del curso. Ésta tanto se diferencia de los anteriores tres tomos por su espíritu, nivel y acceso a la exposición de muchos de los problemas, que con sólido fundamento puede ser considerado como un curso de física escrito de nuevo.

Al escribir este curso el autor ha tendido a presentar la física no como una ciencia para «empollar», no como cierto volumen de información que hay que asimilar, sino como una ciencia lógica y bella. Debe ser el lector el que ha de decidir si se ha conseguido esto o no.

El autor reconoce que este grueso manual, sólo por su aspecto, causa en el estudiante una impresión deprimente, por lo que se ha tratado de limitar el volumen del curso. Esto se ha conseguido seleccionando minuciosamente el material que, según nuestra opinión, debía ser incluido en el libro. Además, hemos intentado ser breves (pero no en perjuicio de la claridad de exposición).

A pesar de tender a la reducción del volumen, hemos considerado necesario incluir en el curso una serie de párrafos matemáticos: acerca de los vectores, ecuaciones diferenciales lineales, nociones fundamentales de la teoría de la relatividad, etc. Hemos hecho esto para dar a las correspondientes nociones y correlaciones matiz «físico». Además, las «inclusiones» matemáticas permiten durante la exposición de la física, ir adelante incluso cuando en el curso de matemáticas el correspondiente material no ha sido todavía estudiado (lo que sucede con frecuencia).

El presente curso está destinado, en primer lugar, a los centros de enseñanza técnica superior con programa de física ampliado. Sin embargo, la exposición se ha confeccionado de tal modo que, omitiendo ciertos lugares, este libro puede ser utilizado como manual de estudio en los centros de enseñanza superior con programa corriente de física. En las «Recomendaciones metodológicas», antepuestas al texto fundamental, junto con otros materiales se ofrece una rela-

ción aproximada de reducciones (es decir, abreviaciones en el texto), que pueden hacerse al faltar tiempo para estudiar el libro en su volumen total.

En conclusión, expreso mi agradecimiento a N. B. Narozhni a quien le pertenece la original y relativamente breve deducción estadística de la correlación  $dS = d'Q/T$  (véase la fórmula (103.20)).

*I. V. Savéliev*

# RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS

Las presentes recomendaciones contienen indicaciones sobre aquellos aspectos en la esencia de ciertas cuestiones, a las que, por regla, no se presta la necesaria atención. Además, se da una relación aproximada de los capítulos y párrafos aislados, cuyo estudio no es obligatorio al faltar tiempo para estudiar el volumen completo del curso. Dicha relación expresa el punto de vista personal del autor y sólo tiene carácter recomendatorio.

1. Muchas de las magnitudes físicas son vectoriales. Por esta causa, la asimilación correcta de la información acerca de los vectores, ofrecida en el § 2, es una premisa obligatoria para el trabajo exitoso con el libro.

Hay que prestar atención a que las expresiones  $|\Delta a|$  (o bien  $|da|$ ) y  $\Delta a = \Delta |a|$  (o bien  $da = d|a|$ ) no son idénticas. En ocasiones se tropieza con la mezcla de estas expresiones.

2. La noción de valor medio desempeña en física importante papel. Por esta razón, se debe alcanzar una buena asimilación de las fórmulas (3.20) — (3.22). Hay que recordar que los valores medios pueden ser diferentes: se puede hablar del valor medio según el tiempo, el valor medio por un segmento de una línea (por ejemplo, por el sector de una trayectoria), por una superficie, un volumen, el valor medio respecto de las partículas, etc.

Es útil recordar que el valor medio por el periodo del cuadrado del seno o coseno es igual a  $1/2$ . En una serie de casos, esto liberará de la necesidad de calcular las correspondientes integrales.

3. En lugar del término «variación», que no es unívoco, hay que hacer uso de los términos «incremento» y «decrecimiento» (véase la observación al pie de la pág. 82). Es frecuente tropezar con cierta prevención contra estos términos, condicionada por el hecho de que el término «incremento» se asocia con aumento, crecimiento de la magnitud y el término «decrecimiento», con disminución, empequeñecimiento de la magnitud. Estas asociaciones son ilícitas y deben ser descartadas y partir de las definiciones:

$$\text{incremento} = a_{\text{final}} - a_{\text{inicial}} = \Delta a \text{ (ó } da),$$

$$\text{decrecimiento} = a_{\text{inicial}} - a_{\text{final}} = -\Delta a \text{ (ó } -da).$$

De las definiciones se desprende que el incremento y el decrecimiento son magnitudes algebraicas, es decir, pueden ser no sólo positivas, sino que también negativas. En el caso de incremento negativo, la magnitud dada no crece, sino que disminuye; en el caso de decrecimiento negativo la magnitud dada no disminuye, sino que crece.

Para mostrar la insuficiencia del término «variación», comparemos dos fórmulas:

$$A_{12} = T_2 - T_1 = \Delta T \text{ (véase (19.11))},$$

$$A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U \text{ (véase (22.1))}.$$

En la primera fórmula entra el *incremento* de la energía cinética, en la segunda, el *decrecimiento* de la energía potencial. Si en los dos casos hacemos uso del término «variación», el carácter de ésta queda indefinido.

4. En el § 14 «Fuerzas elásticas» podemos limitarnos al estudio sólo de los primeros párrafos, en los que se trata de la ley de Hooke para un muelle. La parte restante del párrafo, donde se aduce la fórmula (14.3), puede ser omitida. De forma correspondiente, en el § 20 «Trabajo» puede no estudiarse la fórmula (20.3), en el § 25 «Energía de la deformación elástica» pueden no considerarse las fórmulas (25.2) — (25.5).

5. Los párrafos 30 «Movimiento en el campo central de fuerzas» y 31 «Problema de los dos cuerpos», pueden omitirse.

6. En el § 34 «Fuerza de Coriolis» podemos limitarnos a la deducción de la fórmula (34.3) para el caso de movimiento del cuerpo por una circunferencia y expresar sin demostración la afirmación de que dicha fórmula es válida también en cualquier otro caso. Parte del párrafo que empieza en el párrafo donde se encuentra la fórmula (34.4) y que acaba en el párrafo en el que se da la fórmula (34.16), puede ser excluida.

7. El párrafo 35 «Principios de conservación en sistemas no inerciales de referencia», puede omitirse.

8. El párrafo 40 «Concepto de tensor de inercia» puede ser excluido, lo mismo que la segunda parte del § 41, en la que se deduce la expresión de la energía cinética mediante el tensor de inercia. No obstante, hay que llamar la atención de los estudiantes a que la fórmula (41.1) sólo es válida en ciertos casos particulares (véase el último párrafo del § 41).

9. El párrafo 44 «Giroscopios» puede ser omitido.

10. En el § 46 «Campo gravitatorio» es posible omitir la segunda parte, que comienza en el párrafo tras la fórmula (46.7).

11. En el § 47 se puede omitir la descripción del experimento de Eötvös.

12. En el § 60 «Vibraciones forzadas» es suficiente estudiar sólo uno de los dos procedimientos aducidos para hallar la solución particular: o el procedimiento en el que se hace uso de la función compleja, o bien el procedimiento en el que es empleado el diagrama vectorial.

13. En el § 63 la transformación de Lorentz puede ser dada sin demostración. Es conveniente recordar dicha transformación en la fórmula (63.17).

14. En el § 68 puede omitirse la fórmula (68.4).

15. El capítulo IX «Hidrodinámica» puede no ser incluido en la variante mínima del programa.

16. En el § 95 «Números de choques de las moléculas contra la pared» podemos limitarnos a la deducción simplificada de la fórmula (95.7), señalando que una deducción más rigurosa sólo lleva a un valor más preciso del coeficiente numérico:  $1/4$  en lugar de  $1/6$ . En lo que se refiere al texto, que contiene las fórmulas (95.1) — (95.6), puede ser omitido.

17. En el § 96 «Presión del gas contra la pared» también podemos limitarnos a la deducción de la fórmula (96.4), omitiendo los cálculos que conducen a las fórmulas (96.1) y (96.2). Hay que remarcar que, a pesar de que la deducción está simplificada, obtenemos un resultado preciso inclusive hasta el valor del coeficiente numérico.

18. En el § 98 «Distribución de Maxwell» es posible no estudiar la deducción de las funciones (98.13) y (98.14), así como el cálculo del valor del factor normalizante  $A$  y el hallazgo de la expresión (98.26) para la velocidad media de las moléculas.

19. En el § 103 «Entropía» puede omitirse el texto que comienza en el párrafo que sigue tras la fórmula (103.4) y que finaliza antes de la fórmula (103.20), limitándonos a la afirmación: «Es posible mostrar que durante un proceso reversible, acompañado de la transmisión del exterior al sistema la cantidad de calor  $d'Q$ , la entropía del sistema recibirá un incremento determinado por la fórmula (103.20) (el sistema que recibe calor del exterior no es aislado, por lo que su entropía no debe conservarse obligatoriamente durante el proceso)».

20. Los §§ 106 y 108 pueden omitirse.

21. En el § 109 «Potenciales termodinámicos» podemos limitarnos sólo a la



consideración del texto que se refiere a la energía libre, hasta la fórmula (109.12), inclusive.

22. En el § 111 «Clasificación de los cristales» no se debe tratar de retener en la memoria las denominaciones y definiciones de los sistemas cristalográficos.

23. El § 113 «Defectos en los cristales» puede omitirse.

Remarquemos una vez más, que la relación aducida de las reducciones es estrictamente aproximada. En dependencia de las circunstancias puede variarse o amplificarse a desseo del profesor.

# INTRODUCCIÓN

Física es la ciencia acerca de las propiedades más generales y las formas de movimiento de la materia.

V. I. Lenin dio la definición clásica de la materia en su obra «Materialismo y empiriocriticismo»: «La materia es una categoría filosófica para designar la realidad objetiva, dada al hombre en sus sensaciones, calcada, fotografiada y reflejada por nuestras sensaciones y existente independientemente de ellas»<sup>1</sup>). En esta definición son de importancia dos tesis: 1) la materia es aquello que existe de modo objetivo, es decir, independientemente de la conciencia o los sentimientos sea de quien fuera y 2) la materia se copia, se refleja en nuestras sensaciones y, por esta causa, es cognoscible.

De la definición de la física sigue que en ella se concentra la teoría sobre las propiedades y fenómenos más generales del mundo externo. Como señaló el académico soviético S. I. Vavílov en uno de sus artículos, «la comunidad límite de la parte más considerable de la física, sus hechos y leyes desde tiempos remotos aproximaban la física a la filosofía... En ocasiones, las afirmaciones físicas son tales por su carácter que es difícil distinguir y separarlas de las afirmaciones filosóficas y, por lo tanto, el físico tiene que ser filósofo».

En la actualidad se conocen dos formas de materia: la sustancia y el campo. Al primer tipo de materia, es decir, a la sustancia, se refieren, por ejemplo, los átomos, las moléculas y todos los cuerpos formados por ellos. El segundo tipo de materia son los campos electromagnéticos, gravitacionales y otros. Diversos tipos de materia pueden transformarse unos en otros. Por ejemplo, el electrón y positrón (que son de por sí materia) pueden convertirse en fotones (es decir, en campo electromagnético). Puede también suceder el proceso inverso.

La materia se halla en movimiento permanente. En el materialismo dialéctico<sup>2</sup>) por movimiento se comprende, en general, toda variación. El movimiento es una propiedad inalienable de la mate-

<sup>1</sup>) Editorial «Progreso», Moscú, 1977, pág. 134.

<sup>2</sup>) El materialismo dialéctico es la filosofía marxista-leninista. El problema fundamental, radical de toda filosofía que consiste en qué es lo primario: la materia o la conciencia, en el materialismo dialéctico se resuelve a favor de la materia, afirmando que la materia es lo primario, en tanto que la conciencia, lo secundario; el método de dicha filosofía es la dialéctica, que considera la materia en constante movimiento y desarrollo, cuya fuente se encuentra en las contradicciones internas, propias de los mismos objetos y fenómenos.

ria, que no puede ser ni creada y destruida, como la propia materia. La materia existe y está en movimiento en el espacio y el tiempo, que son formas de existencia de la materia.

Las leyes físicas se establecen sobre la base de la generalización de hechos experimentales y expresan regularidades objetivas, existentes en la naturaleza. Por regla, dichas leyes se enuncian en forma de correlaciones cuantitativas entre diversas magnitudes físicas.

En física, el método fundamental de investigación es el experimento, es decir, la observación del fenómeno que se investiga en condiciones rigurosamente controlables, que permiten seguir la marcha del fenómeno y reproducirlo cada vez que se repitan dichas condiciones. De forma experimental pueden ser provocados fenómenos que en la naturaleza no se observan. Por ejemplo, más de diez elementos químicos de los que en la actualidad son conocidos, en la naturaleza no han sido aún hallados y fueron obtenidos de forma artificial en el transcurso de reacciones nucleares.

Para explicar los datos experimentales, se hace uso de las hipótesis. La hipótesis es una suposición científica que se expresa para explicar cierto hecho o fenómeno y que requiere comprobación y demostración con el fin de convertirse en teoría o ley científica. La comprobación de que la hipótesis expuesta es correcta, se verifica realizando los correspondientes experimentos, por medio de la aclaración de la concordancia de los corolarios que se desprenden de la hipótesis, con los resultados de los experimentos y observaciones. Una hipótesis que exitosamente pasó semejante comprobación y que fue demostrada, se transforma en una ley o teoría científica.

La teoría física es un sistema de ideas fundamentales que generalizan los datos experimentales y que reflejan las regularidades objetivas de la naturaleza. La teoría física nos explica un ámbito entero de fenómenos de la naturaleza desde un punto de vista único.

La física se divide en la llamada física clásica y física cuántica. La primera es aquella, cuya creación fue acabada a principios del siglo XX. El comienzo de la física clásica se debe a Newton, que enunció las leyes fundamentales de la mecánica clásica. La mecánica newtoniana resultó ser tan fructífera, tan potente, que entre los físicos se creó la impresión de que todo fenómeno físico podía ser explicado mediante las leyes newtonianas.

El edificio de la física clásica, creado hacia fines del siglo pasado, era en extremo armonioso. La mayoría de los físicos estaba convencida de que sobre la naturaleza conocían todo aquello que se puede conocer. Sin embargo, los físicos más perspicaces comprendían que dicho edificio tenía sus puntos débiles. Por ejemplo, el físico inglés U. Thomson (Lord Kelvin), decía que en el horizonte del cielo claro de la física clásica hay dos nubes oscuras: el fracaso de los intentos de crear la teoría de emisión de un cuerpo negro y la conducta contradictoria del éter, medio hipotético por el que, al parecer, se pro-

pagaban las ondas de luz. Los intentos perseverantes para vencer estas dificultades llevaron a inesperados resultados. Para resolver los problemas que eran irresolubles por medio de la física clásica, hubo que revisar de forma radical las representaciones formadas, habituales e introducir conceptos extraños al espíritu de la física clásica. Cuando Max Planck (1858—1947), introdujo la representación sobre la emisión de la luz por porciones aisladas — cuantos, resolvió en el año 1900 el problema de la emisión de un cuerpo negro. De este modo, en el umbral del siglo XX apareció la noción de cuanto, que en la física moderna desempeña un papel de exclusiva importancia y que llevó a la creación de la mecánica cuántica.

El carácter contradictorio de los hechos que se referían al éter, incitó a Albert Einstein (1879—1955) a revisar la representación de espacio-tiempo que desde los tiempos de Newton se consideraba evidente. Esto llevó a la creación de la teoría de la relatividad que para los cuerpos que se mueven a velocidades, notorias en comparación con la de la luz, ofrece las ecuaciones de movimiento que sustancialmente se diferencian de las ecuaciones de la mecánica newtoniana.

En 1897 fue descubierto el electrón, con la particularidad de que se puso en claro que éste entra en la composición de los átomos de todos los elementos químicos. Así fue establecida la complicada estructura de los átomos que antes se consideraban indivisibles.

Así, pues, el principio del siglo XX se distinguió en física por la transformación radical en ella de una serie de usuales nociones y representaciones. Los nuevos descubrimientos y teorías en física destruían las representaciones que los físicos tenían acerca de la estructura de la sustancia, lo que por algunos físicos fue interpretado como la desaparición de la materia. Muchos físicos se sumieron en el idealismo. Comenzó la crisis de la física.

En su obra «Materialismo y empiriocriticismo», escrita en 1908, V. I. Lenin criticó de modo aplastante el idealismo «físico». Lenin mostró que los nuevos descubrimientos certifican no la desaparición de la materia, sino la desaparición de aquel límite hasta donde conocíamos la materia en el momento dado. «La materia desaparece» —escribió V. I. Lenin— quiere decir que desaparecen los límites dentro de los cuales conocíamos la materia hasta ahora y que nuestro conocimiento se profundiza; desaparecen propiedades de la materia que anteriormente nos parecían absolutas, inmutables, primarias (impenetrabilidad, inercia, masa, etc.) y que hoy se revelan como relativas, inherentes solamente a ciertos estados de la materia. Porque la *única* «propiedad» de la materia, con cuya admisión está ligado materialismo filosófico es la propiedad de *ser una realidad objetiva*, de existir fuera de nuestra conciencia<sup>1)</sup>.

El proceso de conocimiento del mundo es infinito. En cada esca-

<sup>1)</sup> Editorial «Progreso», Moscú, 1977, pág. 274.

lón dado del desarrollo de las ciencias, nuestros conocimientos están condicionados por el nivel de los conocimientos alcanzados en el período histórico y no pueden ser considerados definitivos y completos. Por necesidad, ellos son conocimientos relativos, es decir, requieren desarrollo posterior, comprobación y precisión ulteriores. Al mismo tiempo, toda teoría en verdad científica, a pesar de ser relativa e incompleta, contiene elementos de carácter absoluto, o sea, de conocimiento completo, es un escalón en el conocimiento del mundo objetivo. Por ejemplo, hablando en rigor, la mecánica basada en las leyes de Newton es incorrecta. Pero para cierto círculo de fenómenos dicha mecánica es por completo satisfactoria. Es decir, el desarrollo de las ciencias no ha tachado la mecánica newtoniana, sino que sólo ha establecido los límites en los que ella es válida. La mecánica de Newton ha sido incluida en la física general como una de sus partes componentes.

El comienzo del siglo XX se caracteriza por intentos perseverantes de penetrar en la estructura interior de los átomos. La clave para aclarar la estructura de los átomos fue el estudio de los espectros atómicos. El primer asombroso éxito para la explicación de los espectros observados, nos lo proporcionó la teoría del átomo desarrollada por Niels Bohr en 1913. Sin embargo, dicha teoría portaba claros rasgos de inconsistencia: junto con el sometimiento del electrón en el átomo a las leyes de la mecánica clásica, dicha teoría imponía en dicho movimiento especiales limitaciones cuánticas. Por esta inconsistencia de la teoría hubo con rapidez que «pagar». Después de los primeros éxitos al explicar el espectro del átomo más sencillo —de hidrógeno— se manifestó la incapacidad de la teoría de Bohr para explicar la conducta de los átomos con dos y mayor número de electrones.

Maduró la necesidad de crear una nueva teoría enteriza de los átomos. Dio comienzo a la creación de dicha teoría la audaz hipótesis que expresó en 1924 Luis de Broglie. Hacia aquellos tiempos ya era conocido, que siendo un proceso ondulatorio, en una serie de casos la luz muestra al mismo tiempo naturaleza corpuscular. De Broglie expresó la idea de que, a su vez, las partículas de la sustancia también deberían manifestar, a determinadas condiciones, propiedades ondulatorias. Al poco tiempo, la hipótesis de Broglie obtuvo brillante confirmación experimental: fue demostrado que con las partículas de la sustancia está ligado cierto proceso ondulatorio, que debe ser tomado en consideración al estudiar la mecánica del átomo. El resultado de este descubrimiento fue la creación por Erwin Schrödinger y Werner Heisenberg de una nueva teoría física, es decir, la mecánica ondulatoria o cuántica. La mecánica cuántica alcanzó asombrosos éxitos en la explicación de los procesos atómicos y la estructura de la sustancia. En aquellos casos, cuando pudieron ser vencidas las dificultades matemáticas, fueron obtenidos resultados que de modo perfecto concordaban con los experimentos.

Las últimas décadas se han destacado por magníficos logros en el ámbito de estudio del núcleo atómico. Los científicos e ingenieros han dominado hasta tal grado los procesos nucleares, que resultó ser posible el empleo práctico de la energía nuclear. En esta región, la física soviética ocupa uno de los puestos de vanguardia. En particular, la primera central atomoeléctrica en el mundo fue creada en la URSS.

Por fin, los últimos años los laboratorios creados por las manos del hombre, fueron desplazados tras los límites del globo terrestre. El 4 de octubre de 1957, en la Unión Soviética, por primera vez en la historia de la humanidad, se lanzó un satélite artificial de la Tierra, que era un pequeño laboratorio, equipado de aparatos científicos de investigación. El 12 de abril de 1961 tuvo lugar el primer vuelo en el mundo del hombre al espacio cósmico. El primer cosmonauta soviético, Yuri Gagarin, dio una vuelta alrededor de la Tierra y aterrizó felizmente. En la Unión Soviética fueron creados los primeros cohetes cósmicos, que abandonaron la esfera de atracción terrestre y transmitieron con ayuda de señales de radio a la Tierra valiosos resultados de las investigaciones del espacio sideral y, en particular, la fotografía de la cara inversa de la Luna. En 1969 los astronautas estadounidenses visitaron la Luna. En 1975 dos estaciones automáticas soviéticas efectuaron el aterrizaje suave en el planeta Venus y transmitieron importante información acerca de las condiciones físicas en dicho planeta, así como fotografiaron su superficie.

Es indudable que los próximos años serán marcados en las ciencias físicas por una serie de descubrimientos fundamentales.

# PRIMERA PARTE

## FUNDAMENTOS FÍSICOS DE MECÁNICA

### CAPÍTULO I

### CINEMÁTICA

#### § 1. Movimiento mecánico

La más sencilla forma de movimiento de la materia es el movimiento mecánico, que consiste en el desplazamiento de los cuerpos o de sus partes unos respecto a otros. Cada día, en la vida cotidiana, observamos el desplazamiento de los cuerpos. De aquí se desprende la evidencia de las representaciones mecánicas. Por esta causa, puede ser explicado el hecho de que de todas las ciencias naturales, la mecánica obtuvo antes que otras extenso desarrollo.

El conjunto de cuerpos que destacamos para la observación denomínase *sistema mecánico*. Qué cuerpos debemos incluir en el sistema, depende del carácter del problema que se resuelve. En caso particular, el sistema puede constar de un solo cuerpo.

Más arriba ya hemos dicho que en mecánica se llama movimiento la variación mutua en la disposición de los cuerpos. Si nos imaginamos un cuerpo aislado que se encuentra en el espacio donde no hay otros cuerpos, no podemos hablar del movimiento de dicho cuerpo, ya que no hay nada respecto de que nuestro cuerpo puede variar su posición. De aquí sigue, que si vamos a estudiar el movimiento de cierto cuerpo, hay que indicar obligatoriamente respecto de qué otros cuerpos transcurre el movimiento que examinamos.

El movimiento transcurre tanto en el espacio, como en el tiempo (espacio y tiempo son dos formas integrantes de existencia de la materia). Por lo tanto, para describir el movimiento también hay que determinar el tiempo, lo que se hace mediante un reloj.

El *sistema de referencia* está formado por un conjunto de cuerpos inmóviles unos con relación a otros, respecto de los que se examina el movimiento y por un reloj que registra el tiempo.

El movimiento de un mismo cuerpo con relación a diferentes sistemas de referencia puede tener distinto carácter. Como ejemplo imaginémosnos un tren que se acelera. Supongamos que por el pasillo de uno de los vagones marcha un pasajero a velocidad constante. En semejante caso, el movimiento del pasajero respecto del vagón será

uniforme, mientras que en lo que atañe a la superficie de la Tierra, acelerado.

La descripción del movimiento de un cuerpo significa indicar para cada momento de tiempo, la posición en el espacio y la velocidad del cuerpo. Con el fin de fijar el estado de un sistema mecánico, hay que indicar las posiciones y las velocidades de todos los cuerpos que lo forman. El problema típico de mecánica consiste en que conociendo el estado del sistema en cierto momento de tiempo inicial  $t_0$ , así como las leyes que gobiernan el movimiento, determinar el estado del sistema en los siguientes momentos de tiempo  $t$ .

Hay que señalar que no existe tal problema de física que pueda ser resuelto con absoluta precisión. Siempre se obtiene un resultado aproximado. El grado de aproximación se define por el carácter del problema, por el objetivo que se quiere alcanzar. Cuando resolvemos un problema de forma aproximada, despreciamos ciertos factores que en el caso dado no son esenciales. Por ejemplo, al examinar el movimiento de un cuerpo, con frecuencia pueden despreciarse las dimensiones de éste. Digamos, al estudiar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, el tamaño de la primera puede ser despreciado. En semejante caso, la descripción del movimiento se simplifica considerablemente, ya que la posición de la Tierra en el espacio puede ser determinada por un punto.

Recibe el nombre de *punto material* el cuerpo, cuyas dimensiones es posible despreciar de acuerdo con las condiciones del problema planteado. El problema de si podemos o no considerar el cuerpo concreto que examinamos como punto material, no depende de las dimensiones del cuerpo, sino que del planteamiento del problema. Un mismo cuerpo en unos casos puede ser considerado punto material, mientras que en otros, debe examinarse como cuerpo extendido.

Cuando hablamos de un cuerpo como de un punto material, quiere decir que nos abstraemos de sus dimensiones. La segunda abstracción con la que tropezamos en mecánica es la del cuerpo rígido. En la naturaleza no hay cuerpos en absoluto indeformables. Todo cuerpo bajo la acción de las fuerzas aplicadas a él, en mayor o menor grado, se deforma, o sea, cambia su forma y dimensiones. No obstante, al examinar el movimiento de los cuerpos, en muchos casos, sus deformaciones pueden ser despreciadas. Si esto tiene lugar, dicho cuerpo denomínase rígido. Es decir, llamamos *cuerpo rígido* un cuerpo tal, cuyas dimensiones pueden ser despreciadas en las condiciones del problema dado.

Es posible descomponer todo movimiento de un sólido en dos formas de movimiento: *de traslación* y *de rotación*.

Llamamos de traslación un movimiento tal, con el que cualquier recta ligada con el cuerpo en movimiento queda siempre paralela a sí misma (fig. 1.1).



Durante el movimiento de rotación todos los puntos del cuerpo se mueven por circunferencias, cuyos centros se hallan en una misma recta, llamada *eje de rotación* (fig. 1.2). El eje de rotación puede estar situado fuera del cuerpo (fig. 1.2, b).

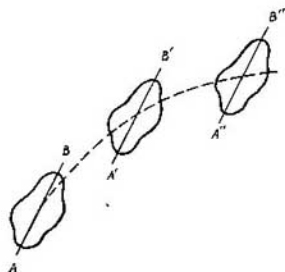


Fig. 1.1

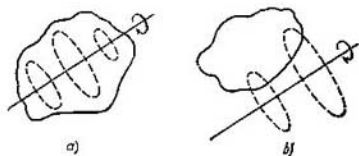


Fig. 1.2

Ya que, al hablar de un cuerpo como de un punto material, nos abstraemos de su extensión, la noción de movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por él, no puede ser aplicada a dicho cuerpo.

Para obtener la posibilidad de describir el movimiento de forma cuantitativa, es necesario ligar con los cuerpos que forman el sistema de referencia ciertos *sistemas de coordenadas*, por ejemplo, cartesianas. Entonces, la posición del punto material puede definirse prefijando tres números  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , es decir, las coordenadas cartesianas de dicho punto. El sistema de coordenadas puede ser realizado formando una red rectangular de iguales barras o reglas de escala (fig. 1.3). En los nudos de esta red hay que ubicar iguales relojes sincronizados entre sí. La posición del punto material y el momento de tiempo que a ella corresponde se registran en las escalas y el reloj más cercano al punto material.

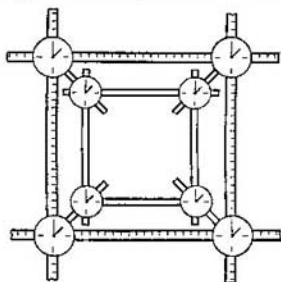


Fig. 1.3

Es más sencillo tratar un punto material que un cuerpo extendido. Por esta razón, vamos a estudiar primeramente la mecánica del punto material y, a continuación, la mecánica del sólido. Comenzaremos la exposición por cinemática, ocupándonos después de dinámica. Recordemos, que *cinemática* estudia el movimiento de los cuerpos sin prestar atención a las causas que lo provocaron. *Dinámica* estudia

el movimiento de los cuerpos en ligazón con aquellas causas (interacciones entre los cuerpos) que condicionan uno u otro carácter del movimiento.

## § 2. Cierta información acerca de los vectores

**Definición del vector.** Reciben el nombre de vectores magnitudes caracterizadas por valores numéricos, dirección y sentido, así como por el hecho de que se suman (componen) según la regla del paralelogramo<sup>1)</sup>. Esta última exigencia es de suma importancia. Podemos indicar tales magnitudes que se caracterizan por el valor numérico y la dirección, pero que se suman de modo diferente que los vectores.

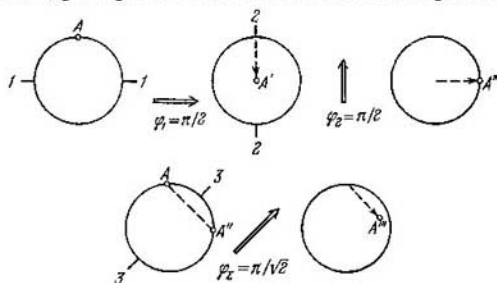


Fig. 2.1

En calidad de ejemplo aduzcamos la rotación de un cuerpo alrededor de cierto eje hasta el ángulo final  $\varphi$ . Semejante rotación puede ser representada como un segmento de longitud  $\varphi$ , dirigido por el eje alrededor del cual se efectúa la rotación hacia el lado ligado con la dirección de rotación por medio de la regla del sacacorchos. En la fig. 2.1, en el ángulo superior, se muestran dos giros sucesivos de una esfera a los ángulos  $\pi/2$ , representados por los segmentos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ . El primer giro, realizado alrededor del eje 1—1, traslada el punto A de la esfera a la posición A', el segundo, efectuado alrededor del eje 2—2, a la posición A''. Idéntico resultado (es decir, traslado del punto A a la posición A'') es obtenido haciendo girar la esfera alrededor del eje 3—3 (véase la fila inferior en la fig. 2.1) al ángulo  $\pi$ . Por consiguiente, semejante giro debe ser considerado como la suma de los giros  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ . No obstante, de los segmentos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  dicho giro no puede ser alcanzado según la regla del paralelogramo. Semejante

<sup>1)</sup> Según una definición más rigurosa. llamamos vector el conjunto de tres magnitudes, que se transforman al girar los ejes de coordenadas según determinadas leyes (véase el Apéndice III).

suma proporciona un segmento de longitud  $\pi/\sqrt{2}$  en lugar de la requerida  $\pi$ . El giro al ángulo  $\pi/\sqrt{2}$  traslada el punto  $A$  al punto  $A''$ . De aquí se desprende que los giros a ángulos finitos, representados por segmentos dirigidos, no poseen las propiedades de los vectores.

El valor numérico del vector denominase su *módulo*. Hablando metafóricamente, el módulo nos ofrece la longitud del vector. El módulo del vector es un escalar siempre positivo.

En los planos, los vectores se representan en forma de segmentos rectilíneos con una flecha en uno de sus extremos. En la escala establecida, la longitud del segmento determina el módulo del vector, mientras que la flecha indica su sentido.

Se ha aceptado designar los vectores con letras negrillas, por ejemplo,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{F}$ , etc. Esta misma letra de carácter corriente es utilizada para designar el módulo del vector, por ejemplo,  $a$  es el módulo del vector  $\mathbf{a}$ <sup>1</sup>). En ciertas ocasiones para designar el módulo es necesario emplear el símbolo del vector encerrado entre dos barras verticales:  $|\mathbf{a}|$  es igual al módulo del vector  $\mathbf{a}$ . De este modo se designa, por ejemplo, el módulo de la suma de vectores  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$ :

$$|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2| = \text{módulo del vector } (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2). \quad (2.1)$$

En semejante caso, el símbolo  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$  significa la suma de los módulos de los vectores que se suman, que, hablando en general, no es igual al módulo de la suma de los vectores (la igualdad sólo tiene lugar cuando los vectores que se suman tienen igual sentido).

Los vectores dirigidos a lo largo de rectas paralelas (en un mismo sentido o en sentidos opuestos) reciben el nombre de *colineares*. Los vectores que yacen en planos paralelos son llamados *coplanares*. Mediante el traslado paralelo, los vectores colineares pueden ser situados a lo largo de una recta, mientras que los coplanares, reunidos en un mismo plano.

Los vectores colineares de igual módulo y sentido se considera que son iguales<sup>2</sup>).

**Suma y sustracción de vectores.** En la práctica la suma de vectores es efectuada con mayor comodidad sin construir el paralelogramo. Como vemos en la fig. 2.2, el mismo resultado se alcanza si el origen

<sup>1</sup>) En el texto manuscrito los vectores se designan con letras con una flecha por encima de éstas (por ejemplo,  $\vec{a}$ ). En este caso, esa misma letra sin flecha designa el módulo del vector.

<sup>2</sup>) Aquí se tienen en cuenta los llamados *vectores libres*, es decir, aquellos que pueden ser trazados de cualquier punto del espacio. También se estudian los *vectores deslizantes*, cuyo origen puede ser ubicado en cualquier punto de la recta, a lo largo de la cual está dirigido el vector y los *vectores fijos*, es decir, los que están aplicados a un punto determinado. Los dos últimos tipos de vectores pueden ser expresados por los vectores libres; por esta causa, la base del cálculo vectorial es la noción de vector libre, que por regla es denominado simplemente vector.

del segundo vector se hace coincidir con el extremo del primero y, a continuación, trazar el vector resultante desde el origen del primero al extremo del segundo. Semejante procedimiento es ventajoso en particular cuando hay que sumar una cantidad de vectores mayor que dos (fig. 2.3).

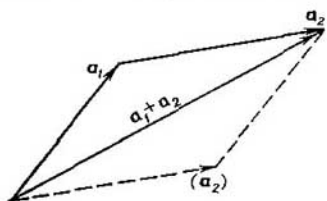


Fig. 2.2

(véase (2.1)), puede ser escrito sólo con ayuda de las barras verticales:

$$|a_1 - a_2| = \text{módulo del vector } (a_1 - a_2), \quad (2.2)$$

ya que el símbolo  $a_1 - a_2$  significa la diferencia de módulos de los vectores  $a_1$  y  $a_2$ , que, hablando en general, no es igual al módulo de la diferencia.

**Multiplicación de un vector por un escalar.** Como resultado de la multiplicación del vector  $a$  por el escalar  $\alpha$  se obtiene un nuevo vector  $b = \alpha a$ , cuyo módulo es  $|\alpha|$  veces mayor que el módulo del vector  $a$  ( $b = |\alpha| a$ ). El sentido del vector  $b$  o coincide con el del vector  $a$  (si  $\alpha > 0$ ), o bien es contrario al sentido del vector  $a$  (si  $\alpha < 0$ ). De lo dicho se desprende que la multiplicación por  $-1$  hace variar el sentido del vector por el opuesto. Por lo tanto, los vectores  $a$  y  $-a$  son iguales en módulo y de sentidos opuestos. Por medio de la fig. 2.4 es fácil cerciorarse de que la sustracción del vector  $a$  al vector  $b$  es equivalente a la adición del vector  $-b$  al vector  $a$ .

De la definición de la multiplicación de un vector por un escalar, sigue que todo vector  $a$  puede ser representado en la forma

$$a = a e_a, \quad (2.3)$$

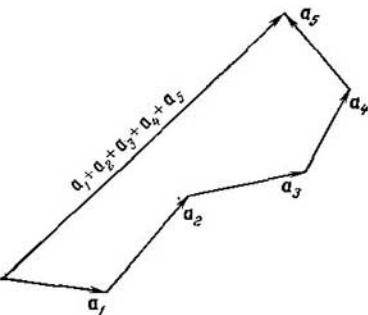


Fig. 2.3

donde  $a$  es el módulo del vector  $a$ ,  $e_a$ , un vector de módulo igual a la unidad, de sentido igual al del vector  $a$  (fig. 2.5). El vector  $e_a$  recibe el nombre de *vector unitario* o bien *versor* del vector  $a$ . Este último puede ser representado como

$$e_a = \frac{a}{a}, \quad (2.4)$$

de donde se deduce que el versor es una magnitud adimensional.

Los versores pueden ser comparados no sólo con los vectores, sino que también con cualesquiera direcciones en el espacio. Por ejemplo.

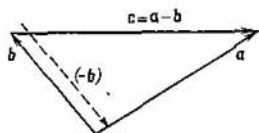


Fig. 2.4



Fig. 2.5

$e_x$  es el versor del eje de coordenadas  $x$ ,  $e_n$ , el versor de la normal a una curva o superficie,  $e_t$ , el versor tangente a una curva, etc.

**Dependencia lineal entre vectores.** Consideremos tres vectores no colineales  $a$ ,  $b$ ,  $c$  que yacen en un mismo plano. En la fig. 2.6

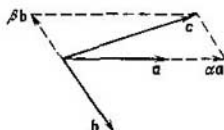


Fig. 2.6

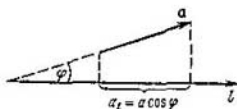


Fig. 2.7

vemos que cualquiera de ellos (por ejemplo,  $c$ ) puede ser expresado por intermedio de los otros dos

$$c = \alpha a + \beta b, \quad (2.5)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son ciertos números (para el caso en la fig. 2.6  $\alpha > 1$ ,  $-1 < \beta < 0$ ). De aquí deducimos que cualquier vector  $c$ , que yace en un mismo plano con los vectores no colineales  $a$  y  $b$ , puede ser expresado con ayuda de dichos vectores mediante la correlación lineal (2.5). Con los vectores fijados  $a$  y  $b$  todo tercer vector se define de forma unívoca por dos magnitudes  $\alpha$  y  $\beta$ .

Sean dados tres vectores  $a$ ,  $b$ ,  $c$  cada uno de los cuales no es coplanar respecto de los otros dos<sup>1)</sup>. Por analogía con (2.5) es fácil

<sup>1)</sup> Dos vectores siempre son coplanares. Esto se desprende de que por traslado paralelo pueden ser unidos sus orígenes. Entonces ellos resultarán situados en un mismo plano.

comprender que cualquier vector  $d$  puede ser expresado como la combinación lineal de los vectores prefijados

$$d = \alpha a + \beta b + \gamma c. \quad (2.6)$$

Con los vectores prefijados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  cualquier vector  $d$  se determina unívocamente mediante tres magnitudes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , cada una de las cuales puede ser positiva o negativa.

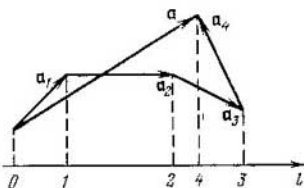


Fig. 2.8

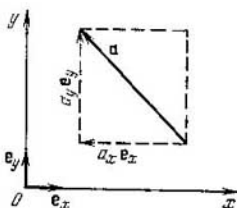


Fig. 2.9

**Proyección del vector.** Examinemos cierta dirección en el espacio, que prefijaremos por el eje  $l$  (fig. 2.7). Sea que el vector  $a$  forma con el eje  $l$  un ángulo  $\varphi^1$ . La magnitud

$$a_l = a \cos \varphi \quad (2.7)$$

( $a$  es el módulo del vector), es llamada proyección del vector  $a$  en el eje  $l$ . La proyección se designa con la misma letra que el vector, añadiendo un índice que indica la dirección sobre la que se proyecta el vector.

La proyección del vector es una magnitud algebraica. Si el vector forma con la dirección dada un ángulo agudo,  $\cos \varphi > 0$  y la proyección es positiva. Si el ángulo  $\varphi$  es obtuso,  $\cos \varphi < 0$  y la proyección es negativa. Cuando el vector es perpendicular al eje dado, la proyección es igual a cero.

La proyección de un vector tiene sencillo sentido geométrico. Ésta es igual a la distancia entre las proyecciones del comienzo y el extremo del segmento que representa el vector dado en el eje. Cuando  $\varphi < \pi/2$  dicha distancia se toma con signo positivo, si  $\varphi > \pi/2$ , con signo negativo.

Sea  $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  (fig. 2.8). Estudiando la figura, es fácil llegar a la conclusión de que la proyección del vector resultante a sobre cierta dirección, es igual a la suma de las proyecciones de los

<sup>1)</sup> Si la recta a lo largo de la cual está dirigido el vector  $a$  y el eje  $l$  no se cruzan, para determinar el ángulo  $\varphi$  hay que tomar la recta que cruza el eje  $l$  paralela al vector  $a$ . El ángulo entre dicha recta y el eje  $l$  será el ángulo  $\varphi$  que nos interesa.

vectores que se suman:

$$a_i = a_{1i} + a_{2i} + a_{3i} + a_{4i}. \quad (2.8)$$

Recordemos que al sumar las proyecciones de los vectores representados en la fig. 2.8, las distancias 0—1, 1—2 y 2—3 deben tomarse con signo más, mientras que la distancia 3—4, con signo menos. La fórmula (2.8) es justa con cualquier número de sumandos.

**Expresión del vector por medio de su proyección en los ejes de coordenadas.** Tomemos los ejes de coordenadas cartesianas y estudiemos el vector  $a$ , que yace en un plano perpendicular al eje  $z$  (fig. 2.9). Introduzcamos los versores de los ejes de coordenadas, es decir, los vectores unitarios  $e_x$ ,  $e_y$  y  $e_z$  ( $e_z$  no se muestra en la figura; es perpendicular al plano de ésta y está dirigido hacia el lector). Señalemos que estos tres versores determinan por completo el sistema de coordenadas, por lo que recibe el nombre de *base del sistema de coordenadas*.

Como vemos en la fig. 2.9, el vector  $a$  puede ser representado en forma de la combinación lineal de los versores  $e_x$  y  $e_y$  (véase (2.5)):

$$a = a_x e_x + a_y e_y.$$

Las proyecciones del vector en los ejes de coordenadas desempeñan el papel de coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$ . En el ejemplo que consideramos, la proyección  $a_x$  es negativa, por lo que el vector  $a_x e_x$  tiene sentido opuesto al del versor  $e_x$ .

Hemos tomado el vector  $a$  perpendicular al eje  $z$ , a causa de lo cual  $a_z = 0$ . En el caso general, cuando las tres proyecciones del vector no son iguales a cero,

$$a = a_x e_x + a_y e_y + a_z e_z. \quad (2.9)$$

De este modo, todo vector puede ser expresado por sus proyecciones en los ejes de coordenadas y los versores de dichos ejes. Por esta causa, las proyecciones sobre los ejes de coordenadas reciben el nombre de *componentes* del vector.

Las magnitudes  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  son iguales (con la precisión hasta un signo) a los lados del paralelepípedo rectangular, cuya diagonal mayor es el vector  $a$  (fig. 2.10). Por esta causa obtenemos la correlación

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \quad (2.10)$$

Sea  $c = a + b$ . Expresando cada uno de los vectores de acuerdo con la fórmula (2.9) obtenemos:

$$c_x e_x + c_y e_y + c_z e_z = (a_x + b_x) e_x + (a_y + b_y) e_y + (a_z + b_z) e_z$$

(hemos sacado de los paréntesis los factores comunes  $e_x$ ,  $e_y$  y  $e_z$ ). Los vectores iguales tienen iguales proyecciones en los ejes de coordenadas, por lo que podemos escribir, que

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad c_z = a_z + b_z \quad (2.11)$$

(comp. con (2.8)). Las fórmulas (2.11) son la expresión analítica de la regla de suma (composición) de vectores. Son justas para cualquier cantidad de sumandos.

**Radio vector.** Recibe el nombre de radio vector  $r$  de cierto punto, el vector trazado desde el origen de coordenadas al punto dado

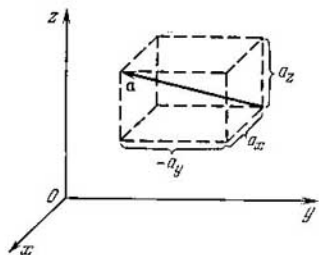


Fig. 2.10

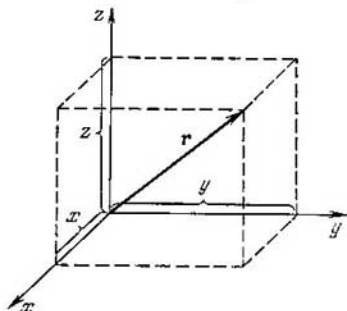


Fig. 2.11

(fig. 2.11). Sus proyecciones en los ejes de coordenadas son iguales a las coordenadas cartesianas del punto dado:

$$r_x = x, r_y = y, r_z = z. \quad (2.12)$$

Por consiguiente, de acuerdo con (2.9) el radio vector puede presentarse en la forma

$$r = xe_x + ye_y + ze_z. \quad (2.13)$$

En correspondencia con (2.10)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.14)$$

**Producto escalar de vectores.** Los dos vectores  $a$  y  $b$  pueden ser multiplicados entre sí de dos maneras: una de ellas lleva a una magnitud escalar, la otra, como resultado nos proporciona un nuevo vector. De acuerdo con esto, existen dos productos entre vectores: escalar y vectorial. Señalemos que la operación de división de un vector por otro no existe.

Se denomina producto escalar de los vectores  $a$  y  $b$ , un escalar igual al producto de los módulos de estos vectores por el coseno del ángulo  $\alpha$  entre ellos:

$$ab = ab \cos \alpha \quad (2.15)$$

(fig. 2.12). Al escribir el producto escalar los símbolos de los vectores que se multiplican se anotan uno junto a otro sin ningún signo



entre ellos. La expresión (2.15) es una magnitud algebraica: con  $\alpha$  agudo  $ab > 0$ , con  $\alpha$  obtuso  $ab < 0$ . El producto escalar de vectores perpendiculares entre sí ( $\alpha = \pi/2$ ) es igual a cero.

Señalemos, que por el cuadrado de un vector siempre se entiende el producto escalar del vector por sí mismo:

$$a^2 = aa = aa \cos \alpha = a^2. \quad (2.16)$$

Es decir, el cuadrado de un vector es igual al cuadrado de su módulo. En particular, el cuadrado de cualquier versor es igual a la unidad:

$$e_x^2 = e_y^2 = e_z^2 = 1. \quad (2.17)$$

Al mismo tiempo, hay que decir que como los versores son perpendiculares entre sí, los productos escalares del tipo  $e_i e_k$ , si  $i \neq k$ , son iguales a cero.

Es muy cómodo el símbolo de Kronecker  $\delta_{ik}$  que se determina del modo siguiente:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k, \\ 0, & \text{si } i \neq k. \end{cases} \quad (2.18)$$

Haciendo uso de este símbolo, las propiedades establecidas más arriba de los productos escalares de los versores de los ejes de coordenadas pueden ser expresados con una sola fórmula:

$$e_i e_k = \delta_{ik} \quad (i, k = x, y, z) \quad (2.19)$$

(los índices  $i$  y  $k$  pueden tomar, independientemente uno de otro, los valores  $x, y, z$ ).

De la definición (2.15) sigue que el producto escalar es conmutativo, o sea, que no depende del orden de los factores:

$$ab = ba. \quad (2.20)$$

La expresión (2.15) puede ser escrita por diferentes procedimientos:

$$ab = ab \cos \alpha = (a \cos \alpha) b = a (b \cos \alpha).$$

Como vemos en la fig. 2.12,  $a \cos \alpha$  es igual a  $a_b$ , es decir, a la proyección del vector  $a$  sobre la dirección del vector  $b$ . Análogamente  $b \cos \alpha = b_a$ , es decir, a la proyección del vector  $b$  sobre la dirección del vector  $a$ . Por esta causa, podemos decir que el producto escalar de dos vectores, recibe el nombre de escalar igual al producto del módulo de uno de los vectores que se multiplican por la proyección

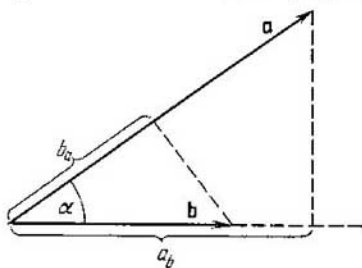


Fig. 2.12

del segundo vector sobre la dirección de primero:

$$ab = a_b b = ab_a. \quad (2.21)$$

Tomando en consideración que la proyección de la suma de vectores es igual a la suma de la proyección de los vectores que se suman, podemos escribir:

$$\begin{aligned} a(b + c + \dots) &= a(b + c + \dots)_{pr.a} = a(b_a + c_a + \dots) = \\ &= ab_a + ac_a + \dots = ab + ac + \dots \end{aligned} \quad (2.22)$$

De aquí se desprende que el producto escalar de vectores es distributivo: el producto del vector  $a$  por la suma de varios vectores, es igual a la suma de los productos del vector  $a$  por cada uno de los vectores sumandos, tomados por separado.

Si nos representamos los vectores que se multiplican en la forma (2.9) y hacemos uso de la distributividad del producto escalar, obtenemos:

$$\begin{aligned} ab &= (a_x e_x + a_y e_y + a_z e_z)(b_x e_x + b_y e_y + b_z e_z) = \\ &= a_x b_x e_x e_x + a_x b_y e_x e_y + a_x b_z e_x e_z + a_y b_x e_y e_x + \\ &+ a_y b_y e_y e_y + a_y b_z e_y e_z + a_z b_x e_z e_x + a_z b_y e_z e_y + a_z b_z e_z e_z. \end{aligned}$$

Ahora, tengamos en cuenta (2.19). Como resultado obtenemos la expresión del producto escalar por intermedio de las proyecciones de los vectores que se multiplican:

$$ab = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (2.23)$$

Notemos, que al girar los ejes de coordenadas, las proyecciones de los vectores sobre estos ejes varían. No obstante, la magnitud  $ab \cos \alpha$  no depende de la elección de los ejes. De aquí, llegamos a la conclusión de que los cambios en las proyecciones de los vectores  $a$  y  $b$  al girar los ejes, tienen un carácter tal, que su combinación de la forma (2.23) queda invariante:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \text{inv.} \quad (2.24)$$

Es fácil comprender que la proyección del vector  $a$  sobre la dirección  $l$  (véase (2.7)) puede ser representada de la forma

$$a_l = a e_l, \quad (2.25)$$

donde  $e_l$  es el versor de la dirección  $l$ . De manera análoga

$$a_x = a e_x, \quad a_y = a e_y, \quad a_z = a e_z. \quad (2.26)$$

**Producto vectorial.** Recibe el nombre de producto vectorial de los vectores  $a$  y  $b$ , el vector  $c$  determinado por la fórmula

$$c = ab \operatorname{sen} \alpha \cdot n, \quad (2.27)$$

donde  $a$  y  $b$  son los módulos de los vectores que multiplicamos,  $\alpha$ , el ángulo entre los vectores que multiplicamos,  $\mathbf{n}$ , un vector unitario de la normal<sup>1)</sup> al plano en el que se hallan los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  (fig. 2.13). La dirección  $\mathbf{n}$  se elige de modo que la secuencia de los vectores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{n}$  forme un sistema dextrógiro. Esto quiere decir, que si miramos tras el vector  $\mathbf{n}$ , el giro del primer factor al segundo, realizado por el más corto recorrido, se efectuará en sentido horario. En la fig. 2.13 el vector  $\mathbf{n}$  está dirigido tras la figura, por lo que se designa con un círculo y una cruz<sup>2)</sup>. El sentido del vector  $\mathbf{c}$  coincide con el de  $\mathbf{n}$ .

Simbólicamente, el producto vectorial puede ser escrito de dos formas:

$$[\mathbf{ab}] \text{ o bien } \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Nosotros vamos a hacer uso del primero de ellos, con la particularidad de que a veces, para excluir equívocas, entre los factores pondremos una coma. Así, pues, de acuerdo con (2.27)

$$[\mathbf{ab}] = ab \operatorname{sen} \alpha \cdot \mathbf{n}. \quad (2.28)$$

Como vemos en la fig. 2.13, el módulo del producto vectorial tiene sencillo sentido geométrico; la expresión  $ab \operatorname{sen} \alpha$  es numéricamente igual al área del paralelogramo construido sobre los vectores que se multiplican.

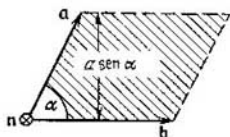


Fig. 2.13

El sentido del vector  $[\mathbf{ab}]$  ha sido definido ligándolo con la dirección de rotación del primer factor al segundo. Al examinar semejantes vectores como el radio vector  $\mathbf{r}$ , la velocidad  $\mathbf{v}$ , la fuerza  $\mathbf{F}$ , etc., el problema de la elección de su sentido no surgirá, ya que emanará de forma espontánea de la naturaleza de las propias magnitudes. Semejantes vectores reciben el nombre de vectores libres (absolutos). Los vectores del tipo  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , cuyo sentido se liga con la dirección de rotación, se denominan *seudovectores* (o vectores axiales). Al variar la condición, por ejemplo, al pasar del sistema dextrógiro al levógiro, los sentidos de los pseudovectores se cambian por los opuestos, con ello, los vectores libres quedan invariables.

<sup>1)</sup> La designación  $\mathbf{n}$  es más evidente que  $\mathbf{e}_n$ .

<sup>2)</sup> Los vectores perpendiculares al plano de la figura, serán representados con un círculo y una cruz, si el vector se aleja de nosotros y con un círculo y un punto en el centro del primero si éste está dirigido hacia nosotros. Para mayor evidencia podemos imaginarnos el vector como una flecha con punta cónica y plumaje cruciforme. En tal caso, si el vector está dirigido hacia nosotros (la flecha vuela hacia nosotros) veremos un círculo con un punto, si el vector se aleja de nosotros (la flecha vuela alejándose de nosotros), veremos un círculo con una cruz.

Hay que tener en cuenta que el producto vectorial será un pseudovector sólo en el caso, cuando los dos vectores que se multiplican son libres (o bien los dos son pseudovectores). En lo que se refiere al producto de un vector libre por un pseudovector, éste será un vector libre. El cambio de la condición que determina el sentido de los pseudovectores por el opuesto provoca en tal caso el cambio del signo delante del producto vectorial y, simultáneamente, el cambio del signo ante uno de los factores. Como resultado, la magnitud expresada por el producto vectorial quedará invariable.

Como el sentido del producto vectorial se determina por el sentido de rotación del primer factor al segundo, el resultado de la

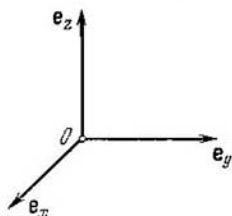


Fig. 2.14

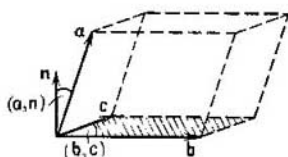


Fig. 2.15

multiplicación vectorial depende del orden de los factores. La permutación de los factores provoca el cambio del sentido del vector resultante por el opuesto. De este modo, el producto vectorial no tiene propiedad de conmutatividad:

$$[ba] = -[ab]. \quad (2.29)$$

Podemos mostrar que el producto vectorial es distributivo, o sea, que

$$[a, (b_1 + b_2 + \dots)] = [ab_1] + [ab_2] + \dots \quad (2.30)$$

Examinemos los productos vectoriales de los versores de los ejes de coordenadas (fig. 2.14). Por definición (2.28)

$$\begin{aligned} [e_x e_x] &= [e_y e_y] = [e_z e_z] = 0, \\ [e_x e_y] &= -[e_y e_x] = e_z, \\ [e_y e_z] &= -[e_z e_y] = e_x, \\ [e_z e_x] &= -[e_x e_z] = e_y. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Representando los vectores que se multiplican en la forma (2.9) y haciendo uso de la distributividad del producto vectorial, obtene-

mos:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{ab}] &= [(a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z), (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z)] = \\
 &= a_x b_x [\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x] + a_x b_y [\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y] + a_x b_z [\mathbf{e}_x \mathbf{e}_z] + \\
 &+ a_y b_x [\mathbf{e}_y \mathbf{e}_x] + a_y b_y [\mathbf{e}_y \mathbf{e}_y] + a_y b_z [\mathbf{e}_y \mathbf{e}_z] + \\
 &+ a_z b_x [\mathbf{e}_z \mathbf{e}_x] + a_z b_y [\mathbf{e}_z \mathbf{e}_y] + a_z b_z [\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z].
 \end{aligned}$$

Tomando en consideración la correlación (2.31), llegamos a la siguiente expresión:

$$[\mathbf{ab}] = \mathbf{e}_x (a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{e}_y (a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{e}_z (a_x b_y - a_y b_x). \tag{2.32}$$

La expresión obtenida puede ser presentada en forma del determinante:

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2.33}$$

**Producto mixto.** La expresión  $a[\mathbf{bc}]$  recibe el nombre de producto mixto (o escalar-vectorial) de tres vectores, es decir, el producto escalar del vector  $a$  por el producto vectorial de los vectores  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$ . De acuerdo con las definiciones (2.15) y (2.28)

$$a[\mathbf{bc}] = a \{bc \operatorname{sen}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \cos(\mathbf{a}, \mathbf{n})\}.$$

Aquí  $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$  es el ángulo entre  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{n})$ , el ángulo entre el vector  $a$  y el versor  $\mathbf{n}$ , que determina la dirección del vector  $[\mathbf{bc}]$ . En la fig. 2.15 vemos que la expresión  $bc \operatorname{sen}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$  es numéricamente igual al área de la base del paralelepípedo, construido sobre los vectores que se multiplican, en tanto que la expresión  $a \cos(\mathbf{a}, \mathbf{n})$  es numéricamente igual a la altura de dicho paralelepípedo tomada con signo más si el ángulo  $(\mathbf{a}, \mathbf{n})$  es agudo y con signo menos si dicho ángulo es obtuso. Por consiguiente la expresión  $a[\mathbf{bc}]$  tiene sencillo sentido geométrico: es numéricamente igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores que multiplicamos (tomado con signo positivo o negativo en función de la magnitud del ángulo  $(\mathbf{a}, \mathbf{n})$ ). El resultado que obtenemos al calcular el volumen del paralelepípedo no puede ser función de cuál de sus caras ha sido tomada como base. De aquí se desprende que

$$a[\mathbf{bc}] = \mathbf{b}[\mathbf{ca}] = \mathbf{c}[\mathbf{ab}]. \tag{2.34}$$

De este modo, al producto mixto tolera la permutación cíclica de los factores, o sea, la sustitución de cada uno de ellos por el que sigue en el ciclo:



**Producto vectorial doble.** Estudiemos el producto vectorial doble de tres vectores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{d} = [\mathbf{a}, [\mathbf{bc}]].$$

Todo producto vectorial es perpendicular a los dos factores. Por esta razón, el vector  $\mathbf{d}$  es perpendicular al versor  $\mathbf{n}$ , que define el sentido del vector  $[\mathbf{bc}]$ . De aquí se desprende, que el vector  $\mathbf{d}$  yace en el plano formado por los vectores  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$ , por lo que puede ser representado como una combinación lineal de estos vectores:

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c},$$

(véase (2.5)). El cálculo correspondiente nos proporciona que  $\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ ,  $\beta = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ . De esta forma,

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (2.35)$$

Esta fórmula se recuerda con facilidad si se tiene en cuenta que ella puede ser leída como « $\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{c}$  menos  $\mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{b}$ ».

**Derivada de un vector.** Examinemos un vector que varía con el tiempo según la conocida ley  $\mathbf{a}(t)$ . Las proyecciones de este vector sobre los ejes de coordenadas son las funciones prefijadas del tiempo. Por lo tanto,

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{e}_x a_x(t) + \mathbf{e}_y a_y(t) + \mathbf{e}_z a_z(t) \quad (2.36)$$

(suponemos que los ejes de coordenadas no giran en el espacio, de forma que con el tiempo los versores de los ejes no varían).

Supongamos que en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  las proyecciones del vector reciben un incremento  $\Delta a_x$ ,  $\Delta a_y$ ,  $\Delta a_z$ . El vector recibirá un incremento  $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{e}_x \Delta a_x + \mathbf{e}_y \Delta a_y + \mathbf{e}_z \Delta a_z$ . La velocidad de variación del vector  $\mathbf{a}$  con el tiempo puede ser caracterizada por la razón entre  $\Delta \mathbf{a}$  y  $\Delta t$ :

$$\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \mathbf{e}_x \frac{\Delta a_x}{\Delta t} + \mathbf{e}_y \frac{\Delta a_y}{\Delta t} + \mathbf{e}_z \frac{\Delta a_z}{\Delta t}. \quad (2.37)$$

Esta razón nos proporciona la velocidad media de variación de  $\mathbf{a}$  durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Sea que  $\mathbf{a}$  varía con el tiempo permanentemente, sin saltos. En tal caso, mientras menor es el intervalo  $\Delta t$ , mayor será la precisión con la que la magnitud (2.37) caracterizará la velocidad de variación de  $\mathbf{a}$  en el momento de tiempo  $t$  que precede al intervalo  $\Delta t$ . Por lo tanto, la velocidad de variación del vector  $\mathbf{a}$  en el momento de tiempo  $t$  es igual al límite de la razón (2.37), obtenido con una disminución ilimitada de  $\Delta t$ :

la velocidad de variación de  $\mathbf{a} =$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \mathbf{e}_x \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a_x}{\Delta t} + \mathbf{e}_y \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a_y}{\Delta t} + \mathbf{e}_z \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a_z}{\Delta t}. \quad (2.38)$$

Si conocemos cierta función  $f(t)$  del argumento  $t$ , el límite de la razón entre el incremento de la función  $\Delta f$  y el incremento del argumento  $\Delta t$ , obtenido cuando  $\Delta t$  tendía a cero, recibe el nombre de derivada de la función  $f$  por  $t$  y se designa por  $df/dt$ . Por esta causa, la expresión (2.38) puede ser escrita de la forma siguiente:

$$\frac{da}{dt} = e_x \frac{da_x}{dt} + e_y \frac{da_y}{dt} + e_z \frac{da_z}{dt}. \quad (2.39)$$

El resultado obtenido quiere decir que las proyecciones del vector  $da/dt$  en los ejes de coordenadas son iguales a las derivadas por el tiempo de las proyecciones del vector  $a$ :

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{pr. x} = \frac{da_x}{dt}, \quad \left(\frac{da}{dt}\right)_{pr. y} = \frac{da_y}{dt}, \quad \left(\frac{da}{dt}\right)_{pr. z} = \frac{da_z}{dt}. \quad (2.40)$$

En física se ha aceptado designar las derivadas por el tiempo con el símbolo de la correspondiente magnitud con un punto encima, por ejemplo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}, \quad \frac{da}{dt} = \dot{a}, \quad \frac{d^2a}{dt^2} = \ddot{a}. \quad (2.41)$$

Haciendo uso de esta designación, la fórmula (2.39) puede tomar la forma

$$\dot{a} = e_x \dot{a}_x + e_y \dot{a}_y + e_z \dot{a}_z. \quad (2.42)$$

Si en calidad de  $a(t)$  tomamos el radio vector  $r(t)$  de un punto en movimiento, de acuerdo con (2.42)

$$\dot{r} = e_x \dot{x} + e_y \dot{y} + e_z \dot{z}, \quad (2.43)$$

en donde  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son funciones de  $t$ :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ .

Se llama diferencial («incremento») de  $f(t)$  la expresión

$$df = f' dt, \quad (2.44)$$

donde  $f'$  es la derivada de  $f$  por  $t$ . De acuerdo con (2.39) la diferencial («incremento») del vector  $a$  es definida por la fórmula

$$da = e_x da_x + e_y da_y + e_z da_z. \quad (2.45)$$

En particular,

$$dr = e_x dx + e_y dy + e_z dz. \quad (2.46)$$

Señalemos que el incremento de una función durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$  muy pequeño, pero finito, es aproximadamente igual a

$$\Delta f \approx f' \Delta t = \frac{df}{dt} \Delta t. \quad (2.47)$$

En el límite, para  $\Delta t \rightarrow 0$  la igualdad aproximada (2.47) se convierte en la igualdad precisa (2.44).

Para la función vectorial puede ser escrita una fórmula análoga a (2.47):

$$\Delta \mathbf{a} \approx \frac{d\mathbf{a}}{dt} \Delta t. \quad (2.48)$$

**Derivada de un producto de funciones.** Examinemos la función  $\mathbf{b}(t)$  que es igual al producto de la función escalar  $\varphi(t)$  por la función vectorial  $\mathbf{a}(t)$ :  $\mathbf{b}(t) = \varphi(t) \cdot \mathbf{a}(t)$  o brevemente:  $\mathbf{b} = \varphi \mathbf{a}$ . Hallemos el incremento de la función  $\mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{b} = \Delta(\varphi \mathbf{a}) &= (\varphi + \Delta\varphi)(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}) - \varphi \mathbf{a} = \\ &= \varphi \Delta \mathbf{a} + \mathbf{a} \Delta\varphi + \Delta\varphi \Delta \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Representando el incremento de la función en la forma (2.47) y (2.48), tenemos:

$$\Delta \mathbf{b} \approx \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt} \Delta t + \mathbf{a} \frac{d\varphi}{dt} \Delta t + \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\mathbf{a}}{dt} (\Delta t)^2,$$

de donde

$$\frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta t} \approx \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\mathbf{a}}{dt} \Delta t.$$

En el límite, con  $\Delta t \rightarrow 0$ , esta igualdad aproximada se convierte en una igualdad precisa. Así, pues,

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\mathbf{a}}{dt} \Delta t \right).$$

Los dos primeros sumandos no dependen de  $\Delta t$  y, por lo tanto, durante el paso al límite no varían. El límite del tercer sumando es nulo. Por consiguiente, sustituyendo  $\mathbf{b}$  por  $\varphi \mathbf{a}$  obtenemos:

$$\frac{d}{dt}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \mathbf{a} + \varphi \dot{\mathbf{a}}. \quad (2.49)$$

Examinemos ahora el producto escalar de dos funciones vectoriales  $\mathbf{a}(t)$  y  $\mathbf{b}(t)$ . El incremento de este producto es igual a:

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{a}\mathbf{b}) &= (\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a})(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) - \mathbf{a}\mathbf{b} = \\ &= \mathbf{a}\Delta\mathbf{b} + \mathbf{b}\Delta\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}\Delta\mathbf{b} \approx \mathbf{a}\dot{\mathbf{b}}\Delta t + \mathbf{b}\dot{\mathbf{a}}\Delta t + \dot{\mathbf{a}}\dot{\mathbf{b}}(\Delta t)^2. \end{aligned}$$

De aquí

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\mathbf{a}\mathbf{b})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mathbf{a}\dot{\mathbf{b}} + \mathbf{b}\dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{a}}\dot{\mathbf{b}}\Delta t),$$

o definitivamente

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{a}\dot{\mathbf{b}} + \mathbf{b}\dot{\mathbf{a}}. \quad (2.50)$$

Multiplicando (2.50) por  $dt$  obtenemos la diferencial:

$$d(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{a} d\mathbf{b} + \mathbf{b} d\mathbf{a}. \quad (2.51)$$



Calculemos la derivada y la diferencial del cuadrado de una función vectorial. Según (2.50) y (2.51)

$$\frac{d}{dt} a^2 = 2a \dot{a}, \quad (2.52)$$

$$d(a^2) = 2a da. \quad (2.53)$$

Tomando en consideración que  $a^2 = a^2$  (véase (2.16)), podemos escribir:

$$2a da = d(a^2) \quad \text{o bien} \quad a da = d(a^2/2). \quad (2.54)$$

Por fin, estudiemos la derivada del producto vectorial de las funciones  $a(t)$  y  $b(t)$ . El incremento de la función que estudiamos es igual a

$$\begin{aligned} \Delta[ab] &= [(a + \Delta a), (b + \Delta b)] - [ab] = \\ &= [a, \Delta b] + [\Delta a, b] + [\Delta a, \Delta b] \approx [a, \dot{b}\Delta t] + [\dot{a}\Delta t, b] + [\dot{a}\Delta t, \dot{b}\Delta t]. \end{aligned}$$

Correspondientemente

$$\frac{d}{dt} [ab] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{ [\dot{a}b] + [a\dot{b}] + [\dot{a}\dot{b}]\Delta t \}.$$

Pasando al límite, llegamos a la fórmula

$$\frac{d}{dt} [ab] = [\dot{a}b] + [a\dot{b}]. \quad (2.55)$$

**Derivada de un vector unitario.** Examinemos el versor  $e_a$  del vector  $a$ . Es evidente, que el vector  $e_a$  sólo puede variar en sentido. Supongamos que durante un intervalo muy pequeño de tiempo  $\Delta t$  el vector  $a$  y, junto con éste, el versor  $e_a$  gira a un ángulo  $\Delta\varphi$  (fig. 2.16). Con  $\Delta\varphi$  pequeño el módulo del vector  $\Delta e_a$  es, aproximadamente, igual al ángulo  $\Delta\varphi$ :  $|\Delta e_a| \approx \Delta\varphi$  (el segmento que representa  $\Delta e_a$  es la base de un triángulo isósceles con caras iguales a la unidad). Indiquemos que mientras menor sea  $\Delta\varphi$ , con mayor precisión se observa la igualdad aproximada que hemos escrito. El propio vector  $\Delta e_a$  puede ser representado de la siguiente forma:

$$\Delta e_a = |\Delta e_a| \cdot e_{\Delta e} \approx \Delta\varphi \cdot e_{\Delta e},$$

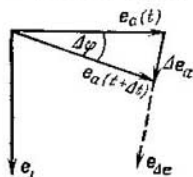


Fig. 2.16

donde  $e_{\Delta e}$  es el versor del vector  $\Delta e_a$ . Cuando  $\Delta\varphi$  tiende a cero, el versor  $e_{\Delta e}$  girará y en el límite coincidirá con el vector unitario  $e_{\perp}$ , perpendicular al vector  $e_a$  (véase la fig. 2.16).

La derivada de  $e_a$  por  $t$  es, por definición, igual a

$$\frac{de_a}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta e_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} e_{\Delta e} = \frac{d\varphi}{dt} e_{\perp}.$$

De este modo,

$$\dot{\mathbf{e}}_a = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\perp. \quad (2.56)$$

La magnitud  $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$  es la velocidad angular de rotación del vector  $\mathbf{a}$  (véase el § 5). El versor  $\mathbf{e}_\perp$  yace en el mismo plano por el que gira en el momento dado el vector  $\mathbf{a}$ , con la particularidad de que está dirigido hacia el lado en el que transcurre la rotación.

### § 3. Velocidad

Durante su movimiento, el punto material describe cierta línea que recibe el nombre de *trayectoria*<sup>1)</sup>. En función de la forma de la trayectoria distinguimos el movimiento rectilíneo, por una circunferencia, curvilíneo, etc.

Sea que un punto material (más adelante, para mayor brevedad vamos a llamarlo partícula) se ha desplazado a lo largo de cierta trayectoria del punto 1 al punto 2 (fig. 3.1). La distancia entre los puntos 1 y 2, calculada a lo largo de la trayectoria, recibe el nombre de *recorrido* pasado por la partícula. Lo designaremos por la letra  $s$ .

El segmento rectilíneo trazado desde el punto 1 al punto 2 se llama *desplazamiento* de la partícula y será designado por el símbolo  $\mathbf{r}_{12}$ . Supongamos que la partícula realiza sucesivamente dos desplazamientos:  $\mathbf{r}_{12}$  y  $\mathbf{r}_{23}$  (fig. 3.2). Es natural, que la suma de estos desplazamientos se ha llamado un desplazamiento  $\mathbf{r}_{13}$  tal que con-

<sup>1)</sup> Hay que señalar, que el concepto de trayectoria sólo es aplicable a una partícula «clásica», a la que en cada momento de tiempo se le puede atribuir valores precisos de la coordenada y la cantidad de movimiento (es decir, de la velocidad). De acuerdo con la mecánica cuántica, las partículas reales pueden ser caracterizadas con ayuda de la coordenada y la cantidad de movimiento sólo con cierto grado de precisión. El límite de esta precisión se determina por el *principio de incertidumbre* (o *indeterminación*) de Heisenberg

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar.$$

Aquí  $\Delta x$  es la incertidumbre de la coordenada,  $\Delta p$ , la incertidumbre de la cantidad de movimiento de la partícula,  $\hbar$ , la *constante de Planck*, cuyo valor es igual a  $1,05 \cdot 10^{-34}$  J·s. El signo  $\gtrsim$  significa «mayor que la magnitud del orden».

Sustituyendo la cantidad de movimiento por el producto de la masa por la velocidad, podemos escribir

$$\Delta x \cdot \Delta v \gtrsim \hbar/m.$$

De esta correlación vemos que mientras menor es la masa de la partícula, menos determinadas se hacen su coordenada y su velocidad y, por consiguiente, es menos aplicable el concepto de trayectoria. Para los cuerpos macroscópicos (o sea, los cuerpos formados por gran cantidad de moléculas) las incertidumbres de la coordenada y la velocidad, no superan la precisión alcanzada en la práctica de mediciones de estas magnitudes, por lo que la noción de trayectoria es aplicable a estos cuerpos sin restricciones. Para las micropartículas (electrones, protones, neutrones, átomos y moléculas aislados) el concepto de trayectoria, en función de las condiciones en que transcurre el movimiento, resulta ser o no aplicable por completo, o bien aplicable con precisión limitada. Por ejemplo, el movimiento de los electrones en el tubo de rayos catódicos puede ser examinado, aproximadamente, como un movimiento que transcurre en ciertas trayectorias.

duzca al mismo resultado que los dos primeros desplazamientos en conjunto. Es decir, los desplazamientos se caracterizan por el valor numérico y el sentido y, además, se suman según la regla del paralelogramo. De aquí se desprende que el desplazamiento es un vector.

Por velocidad en la vida cotidiana se entiende el recorrido que pasa la partícula por la unidad de tiempo. Si en el transcurso de

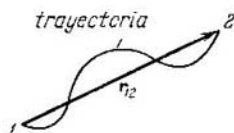


Fig. 3.1

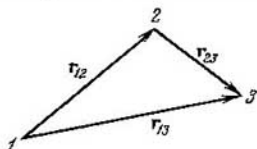


Fig. 3.2

iguales intervalos de tiempo cuan se quieran pequeños, la partícula pasa iguales recorridos, el movimiento de la partícula recibe el nombre de *uniforme*. En este caso, la velocidad que desarrolla la partícula en cada momento de tiempo puede ser calculada dividiendo el recorrido  $s$  por el tiempo  $t$ .

En física, por velocidad se tiene en cuenta una magnitud vectorial, que caracteriza no sólo la rapidez de desplazamiento de la partícula por la trayectoria, sino que también el sentido en el que la partícula se mueve en cada momento de tiempo. Dividamos la trayectoria en sectores infinitamente pequeños de longitud  $ds$  (fig. 3.3). A cada uno de los sectores se le atribuye un desplazamiento infinitesimal  $dr$ . Si dividimos este desplazamiento por el correspondiente intervalo de tiempo  $dt$ , obtendremos la velocidad instantánea en el punto dado de la trayectoria:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (3.1)$$

O sea, que la velocidad es la derivada del radio vector de la partícula respecto del tiempo. El desplazamiento  $dr$  coincide con un elemento infinitesimal de la trayectoria. Por consiguiente, el vector  $\mathbf{v}$  está dirigido por la tangente a la trayectoria (véase la fig. 3.3).

Razonando de forma más rigurosa, para obtener la fórmula (3.1) hay que hacer lo siguiente. Fijando cierto momento de tiempo  $t$ , examinemos el incremento del radio vector  $\Delta\mathbf{r}$  durante el pequeño intervalo de tiempo  $\Delta t^1$  que sigue a  $t$  (fig. 3.4). La razón  $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$  nos

<sup>1</sup>) El símbolo  $\Delta$  (delta) se emplea en dos casos:

a) para designar el incremento de cierta magnitud. En el caso que consideramos  $\Delta\mathbf{r}$  es el incremento del radio vector  $\mathbf{r}$  durante el tiempo  $\Delta t$ ;

b) para designar parte de cualquier magnitud. Por ejemplo,  $\Delta t$  es parte de todo el tiempo  $t$ , durante el que transcurre el movimiento,  $\Delta s$ , parte de todo el camino  $s$ , que recorre la partícula.

proporciona el valor medio de la velocidad durante el tiempo  $\Delta t$ . Si tomamos los intervalos  $\Delta t$  cada vez más pequeños, el cociente  $\Delta r/\Delta t$  nos ofrecerá en el límite el valor de la velocidad  $v$  en el momento de tiempo  $t$ :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}. \quad (3.2)$$

Hemos vuelto a la fórmula (3.1)

Hallemos el módulo de la expresión (3.2), es decir, el módulo de la velocidad  $v$ :

$$v = |v| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta t}. \quad (3.3)$$

En esta fórmula en lugar de  $|\Delta r|$  no se puede escribir  $\Delta r$ . En esencia, el vector  $\Delta r$  es la diferencia de dos vectores ( $r$  en el momento  $t + \Delta t$

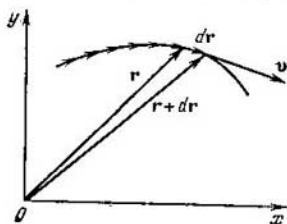


Fig. 3.3

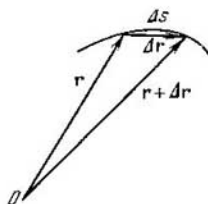


Fig. 3.4

menos  $r$  en el momento  $t$ ). Por esta razón, su módulo sólo se puede escribir con ayuda de las barras verticales (véase (2.2)). El símbolo  $|\Delta r|$  designa el módulo del incremento del vector  $r$ , mientras que

$\Delta r$  es de por sí el incremento del módulo del vector  $r$ :  $\Delta |r|$ . Hablando en general, estas dos magnitudes no son iguales:

$$|\Delta r| \neq \Delta |r| = \Delta r.$$

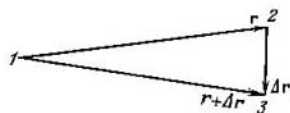


Fig. 3.5

que el vector  $r$  recibe incremento  $\Delta r$  tal que su módulo queda invariable:  $|r + \Delta r| = |r|$  (fig. 3.5). Entonces, el incremento del módulo del vector es igual a cero ( $\Delta |r| = \Delta r = 0$ ). Pero al mismo tiempo el módulo del incremento del vector  $r$ , es decir,  $|\Delta r|$ , se diferencia de cero (es igual a la longitud del segmento 2-3). Lo dicho es válido para todo vector  $a$ : en el caso general  $|\Delta a| \neq \Delta a$ . En la fig. 3.4 vemos que el recorrido  $\Delta s$ , en general, se diferencia en

magnitud del módulo del desplazamiento  $|\Delta r|$ . No obstante, si tomamos los segmentos del recorrido  $\Delta s$  y del desplazamiento  $\Delta r$ , correspondientes a intervalos de tiempo  $\Delta t$  en constante disminución, la diferencia entre  $\Delta s$  y  $|\Delta r|$  decrecerá y, en el límite, su razón será igual a la unidad:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{|\Delta r|} = 1.$$

Sobre esta base, podemos sustituir en la fórmula (3.3)  $|\Delta r|$  por  $\Delta s$ , como resultado de lo cual se obtiene la expresión

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (3.4)$$

De este modo, el módulo de la velocidad es igual a la derivada del recorrido respecto del tiempo.

Es evidente que la magnitud, que en la vida cotidiana recibe el nombre de velocidad, es en realidad el módulo de la velocidad  $v$ . Con el movimiento uniforme el módulo de la velocidad queda invariable ( $v = \text{const.}$ ), mientras que el sentido del vector  $v$  varía al azar (en particular, puede ser constante).

De acuerdo con la fórmula (3.4) el desplazamiento elemental de la partícula es igual a

$$dr = v dt. \quad (3.5)$$

Para mayor evidencia, vamos a designar el desplazamiento elemental por el símbolo  $ds$ , es decir, escribiremos (3.5) en la forma

$$ds = v dt. \quad (3.6)$$

El vector de velocidad, como cualquier otro vector, puede ser representado como

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z, \quad (3.7)$$

donde  $v_x, v_y, v_z$  son las proyecciones del vector  $v$  en los ejes de coordenadas. Al mismo tiempo, el vector  $\dot{\mathbf{r}}$  igual a  $\mathbf{v}$ , de acuerdo con la fórmula (2.43) tiene siguiente aspecto:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z. \quad (3.8)$$

De la comparación de las expresiones (3.7) y (3.8) se desprende que

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}. \quad (3.9)$$

Por consiguiente, la proyección del vector de velocidad en el eje de coordenadas es igual a la derivada respecto del tiempo de la coordenada correspondiente de la partícula en movimiento. Tomando en consideración (2.10), obtenemos la fórmula:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (3.10)$$

El vector de velocidad puede ser representado en la forma  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_v$ , donde  $v$  es el módulo de la velocidad,  $\mathbf{e}_v$ , el versor del vector  $\mathbf{v}$ . Introduzcamos el versor de la tangente a la trayectoria  $\boldsymbol{\tau}$ , poniéndonos de acuerdo que está dirigido en el mismo sentido que  $\mathbf{v}$ . Es evidente que los versores  $\mathbf{e}_v$  y  $\boldsymbol{\tau}$  coincidirán, por lo que podemos escribir la siguiente expresión:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_v = v\boldsymbol{\tau}. \quad (3.11)$$

Hallemos una expresión más para  $\mathbf{v}$ . Con este fin, pongamos en la fórmula (3.1)  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ . De acuerdo con (2.49)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r. \quad (3.12)$$

Para simplificar, nos limitaremos al caso cuando la trayectoria es una curva plana, es decir, tal que todos sus puntos yacen en un mismo plano, que designaremos por  $x, y$ .

En la fórmula (3.12) el vector  $\mathbf{v}$  ha sido representado en forma de la suma de dos componentes (fig. 3.6). La primera componente, que designaremos por  $\mathbf{v}_r$ , es igual a

$$\mathbf{v}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r. \quad (3.13)$$

Está dirigida a lo largo del radio vector  $\mathbf{r}$  y caracteriza la rapidez de variación del módulo  $r$ . La segunda componente, designada por  $\mathbf{v}_\varphi$ , es igual a

$$\mathbf{v}_\varphi = r\dot{\mathbf{e}}_r. \quad (3.14)$$

Caracteriza la rapidez de variación del radio vector por la dirección. Haciendo uso de la fórmula (2.56), podemos escribir

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

donde  $\varphi$  es el ángulo entre el radio vector y el eje  $x$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ , un versor perpendicular al radio vector, dirigido hacia el sentido de crecimiento del ángulo  $\varphi$  (en la fórmula (2.56) este versor está designado por  $\mathbf{e}_\perp$ ). Poniendo este valor en (3.14), obtenemos

$$\mathbf{v}_\varphi = r\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (3.15)$$

Hemos introducido las designaciones  $\mathbf{v}_\varphi$  y  $\mathbf{e}_\varphi$  para remarcar que la componente  $\mathbf{v}_\varphi$  y el versor que le corresponde, están ligados con la variación del ángulo  $\varphi$ .

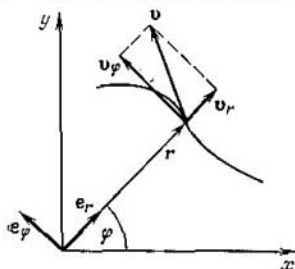


Fig. 3.6

Está claro que los vectores  $v_r$  y  $v_\varphi$  son perpendiculares entre sí. Por lo tanto,

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}. \quad (3.16)$$

Examinemos el problema de cómo calcular el recorrido que pasa la partícula desde el momento de tiempo  $t_1$  hasta el momento  $t_2$ , conociendo la magnitud de la velocidad en cada momento de tiempo. Dividamos el intervalo de tiempo  $t_2 - t_1$  en  $N$  pequeños intervalos, que no deben ser obligatoriamente iguales:  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_N$ . Todo el recorrido  $s$  pasado por la partícula, puede ser representado como la suma de los recorridos  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_N$ , pasados en los correspondientes intervalos de tiempo  $\Delta t$ :

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^N \Delta s_i.$$

En correspondencia con la fórmula (3.4) cada uno de los sumandos puede ser representado con aproximación en la forma

$$\Delta s_i \approx v_i \Delta t_i,$$

donde  $\Delta t_i$  es el intervalo de tiempo durante el cual fue realizado el recorrido  $\Delta s_i$ ,  $v_i$ , uno de los valores de la velocidad en el transcurso del tiempo  $\Delta t_i$ . Por lo tanto,

$$s \approx \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i. \quad (3.17)$$

La igualdad escrita será tanto más precisa, cuanto menores sean los intervalos de tiempo  $\Delta t_i$ . En el límite, cuando todos los  $\Delta t_i$  tienden a cero (la cantidad de intervalos  $\Delta t_i$  crecerá en este caso ilimitadamente) la igualdad aproximada se convertirá en precisa:

$$s = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i$$

La expresión obtenida es la integral determinada de la función  $v(t)$ , calculada en los límites de  $t_1$  a  $t_2$ . De esta forma, el recorrido que realiza la partícula durante el intervalo de tiempo de  $t_1$  a  $t_2$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (3.18)$$

Remarquemos que aquí se trata del módulo de la velocidad. Si calculamos la integral de la propia velocidad  $v(t)$  obtendremos el vector de desplazamiento de la partícula desde el punto en el que se encontraba en el momento de tiempo  $t_1$ , hasta el punto al que llegó

en el momento  $t_2$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12}, \quad (3.19)$$

(véase (3.5)).

Si representamos la gráfica de la dependencia entre  $v$  y  $t$  (fig. 3.7), el recorrido realizado puede ser presentado como el área de la figura limitada por la curva  $v(t)$  y las rectas  $t = t_1$  y  $t = t_2$ . En efecto, el producto  $v_i \Delta t_i$  es numéricamente igual al área de una franja  $i$ -ésima. La suma (3.17) es igual al área limitada por arriba con la línea quebrada, formada por los bordes superiores de todas las franjas. Cuando todos los  $\Delta t_i$  tienden a cero, la anchura de las franjas disminuye (creciendo al mismo tiempo su cantidad) y, al pasar al

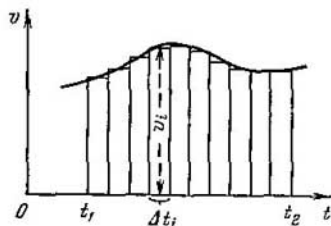


Fig. 3.7

límite, la línea quebrada se convertirá en la curva  $v = v(t)$ . De este modo, el recorrido pasado durante el tiempo desde el momento  $t_1$  hasta el momento  $t_2$  es numéricamente igual al área limitada por la gráfica de la función  $v = v(t)$ , el eje del tiempo  $t$  y las rectas  $t = t_1$  y  $t = t_2$ .

Indiquemos, que el valor medio del módulo de la velocidad en el transcurso del tiempo de  $t_1$  a  $t_2$ , por definición, es igual a<sup>1)</sup>

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t_2 - t_1}.$$

Pongamos aquí la expresión (3.18) para  $s$  y obtenemos:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (3.20)$$

De modo análogo se calculan los valores medios de cualesquiera funciones escalares o vectoriales. Por ejemplo, el valor medio de la velocidad

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t) dt = \frac{\mathbf{r}_{12}}{t_2 - t_1} \quad (3.21)$$

<sup>1)</sup> Para designar el valor medio de cierta magnitud, incluiremos el símbolo de dicha magnitud en paréntesis angulares  $\langle \rangle$ .



(véase (3.19)). El valor medio de la función  $y(x)$  en el intervalo de  $x_1$  a  $x_2$  se determina por la expresión

$$\langle y \rangle = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx. \quad (3.22)$$

## § 4. Aceleración

La velocidad  $v$  de la partícula puede variar respecto del tiempo tanto en magnitud, como en sentido. La rapidez de variación del vector  $v$ , lo mismo que la rapidez de variación de toda función del tiempo, se define por la derivada  $\dot{v}$  respecto de  $t$ . Si designamos dicha derivada con la letra  $w$ , obtendremos

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}. \quad (4.1)$$

La magnitud que se define con la fórmula (4.1) recibe el nombre de *aceleración* de la partícula.

Hay que señalar que con respecto de  $v$  la aceleración  $w$  desempeña el mismo papel que el vector  $v$  en lo que atañe al radio vector  $r$ .

Vectores iguales tienen idénticas proyecciones en los ejes de coordenadas. Entonces, por ejemplo,

$$w_x = \left( \frac{dv}{dt} \right)_{\text{pr. } x} = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x$$

(véase (2.40)). Al mismo tiempo, según (3.9)  $v_x = \dot{x} = dx/dt$ . Por esto

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}.$$

Hemos hallado que la proyección del vector de aceleración sobre el eje  $x$  es igual a la segunda derivada de la coordenada  $x$  respecto del tiempo:  $w_x = \ddot{x}$ . Expresiones análogas se obtienen para la proyección de la aceleración en los ejes  $y$ ,  $z$ . Es decir,

$$w_x = \ddot{x}, \quad w_y = \ddot{y}, \quad w_z = \ddot{z}. \quad (4.2)$$

Poniendo en la fórmula (4.1) la expresión (3.11) para  $v$ :

$$w = \frac{d}{dt} (v\tau). \quad (4.3)$$

Recordemos que  $\tau$  es el versor de la tangente a la trayectoria, dirigido en el mismo sentido que  $v$ . De acuerdo con (2.49)

$$w = \dot{v}\tau + v\dot{\tau}. \quad (4.4)$$

Por lo tanto, el vector  $w$  puede ser representado en forma de la suma de dos componentes. Una de ellas es colinear a  $\tau$ , o sea, está dirigida

por la tangente a la trayectoria, por lo que se designa con  $w_\tau$  y es llamada *aceleración tangencial*. Es igual a

$$w_\tau = \dot{v}\tau. \quad (4.5)$$

La segunda componente igual a  $\dot{v}\tau$ , está dirigida por la normal a la trayectoria, lo que mostraremos más adelante, se designa con  $w_n$  y recibe el nombre de *aceleración normal*. Así, pues,

$$w_n = v\dot{\tau}. \quad (4.6)$$

Investiguemos las propiedades de las dos componentes, limitándonos para mayor sencillez al caso, cuando la trayectoria es una curva plana.

El módulo de la aceleración tangencial (4.5)

$$|w_\tau| = |\dot{v}|. \quad (4.7)$$

Si  $\dot{v} > 0$  (la velocidad crece en magnitud), el vector  $w_\tau$  estará dirigido en el mismo sentido que  $\tau$  (o sea, en el mismo sentido que  $v$ ).

Si  $\dot{v} < 0$  (con el tiempo la velocidad disminuye), los vectores  $v$  y  $w_\tau$  estarán dirigidos en sentidos opuestos. Durante el movimiento uniforme  $\dot{v} = 0$  y, por lo tanto, no hay aceleración tangencial.

Para aclarar las propiedades de la aceleración normal (4.6), hay que establecer cómo se define  $\dot{\tau}$ , es decir, la rapidez con la que varía la dirección de la tangente a la trayectoria respecto del tiempo. Se comprende con facilidad que dicha rapidez será tanto mayor, cuanto más intensamente esté encorvada la trayectoria y cuanto mayor sea la rapidez de desplazamiento de la partícula por ella.

El grado de encorvadura de una curva plana es caracterizado por la *curvatura*  $C$ , que se determina por la expresión

$$C = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad (4.8)$$

donde  $\Delta\varphi$  es el ángulo entre las tangentes a la curva en los puntos distanciados entre sí a  $\Delta s$  (fig. 4.1). De este modo, la curvatura determina la velocidad de giro de la tangente durante el desplazamiento a lo largo de la curva.

Se llama *radio de curvatura*  $R$  en el punto dado de la curva, la magnitud inversa a  $C$ :

$$R = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}. \quad (4.9)$$

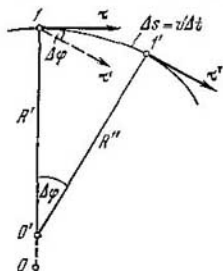


Fig. 4.1

El radio de curvatura es el radio de una circunferencia que en el lugar dado confluye con la curva en un sector infinitesimal de ésta. El centro de semejante circunferencia recibe el nombre de *centro de curvatura* para el punto dado de la curva.

El radio y el centro de curvatura en el punto  $I$  (véase la fig. 4.1) pueden ser determinados del modo siguiente. Junto al punto  $I$  tomemos el punto  $I'$ . Sobre estos puntos trazamos las tangentes  $\tau$  y  $\tau'$ . Las perpendiculares a éstas se cruzarán en cierto punto  $O'$ . Señalemos, que para una curva que no sea una circunferencia, las distancias  $R'$  y  $R''$  en cierto grado se diferenciarán entre sí. Si aproximamos el punto  $I'$  al punto  $I$ , la intersección de las perpendiculares  $O'$  se desplazará a lo largo de la recta  $R'$  y en el límite se encontrará en cierto punto  $O$ . Este será el centro de curvatura para el punto  $I$ . Las distancias  $R'$  y  $R''$  tenderán al límite general  $R$ , igual a radio de curvatura. En efecto, si los puntos  $I$  y  $I'$  están muy cerca uno de otro, podemos escribir que  $\Delta\varphi \approx \Delta s/R'$  o bien  $R' \approx \Delta s/\Delta\varphi$ . En el límite, para  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ , esta igualdad aproximada se convierte en la rigurosa igualdad  $R = ds/d\varphi$ , que coincide con la definición del radio de curvatura (véase (4.9)).

Retornemos al cálculo de  $w_n$  (véase (4.6)). De acuerdo con (2.56)

$$\dot{\tau} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{n}, \quad (4.10)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el versor de la normal a la trayectoria, dirigido en el mismo sentido hacia el que gira el vector  $\tau$  cuando la partícula se mueve por la trayectoria (en la fórmula (2.56) un versor análogo fue designado por  $\mathbf{e}_\perp$ ). La magnitud  $d\varphi/dt$  puede ser ligada con el radio de curvatura de la trayectoria y con la velocidad de la partícula  $v$ . De la fig. 4.1 se deduce que

$$\Delta\varphi \approx \frac{\Delta s}{R'} = \frac{v'\Delta t}{R'},$$

donde  $\Delta\varphi$  es el ángulo de giro del vector  $\tau$  durante el tiempo  $\Delta t$  (que coincide con el ángulo entre las perpendiculares  $R'$  y  $R''$ ),  $v'$ , la velocidad media por el recorrido  $\Delta s$ . De aquí

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \approx \frac{v'}{R'}.$$

En el límite para  $\Delta t \rightarrow 0$  la igualdad aproximada se hace rigurosa, la velocidad media  $v'$  se convertirá en la velocidad instantánea  $v$  en el punto  $I$ ,  $R'$ , en el radio de curvatura  $R$ . Obtenemos la igualdad

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R} = vC \quad (4.11)$$

( $C$  es la curvatura). Por lo tanto, la rapidez de giro del vector de velocidad, como suponíamos, es proporcional a la curvatura de la

trayectoria y a la velocidad de desplazamiento de la partícula por ella.

Poniendo (4.11) en la fórmula (4.10), hallaremos que  $\dot{\tau} = (v/R) \mathbf{n}$ . Por fin, sustituyendo esta expresión en (4.6) llegaremos a la fórmula definitiva para la aceleración normal:

$$\mathbf{w}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{n}. \quad (4.12)$$

Así, pues, durante el movimiento de la partícula por una curva plana, el vector de aceleración se determina mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_n = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R} \mathbf{n}. \quad (4.13)$$

El módulo del vector  $\mathbf{w}$

$$w = \sqrt{|\mathbf{w}_\tau|^2 + |\mathbf{w}_n|^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + (v^2/R)^2}. \quad (4.14)$$

Durante el movimiento rectilíneo no hay aceleración normal. Notemos que  $\mathbf{w}_n$  se reduce a cero en el punto de inflexión de la trayectoria curvilínea (en el punto  $PI$  de la fig. 4.2). Por ambos lados de este punto los vectores  $\mathbf{w}_n$  están dirigidos en sentidos diferentes. El vector  $\mathbf{w}_n$  no puede variar por salto; el cambio de su sentido por el opuesto transcurre uniformemente con la reducción de  $\mathbf{w}_n$  a cero en el punto de inflexión.

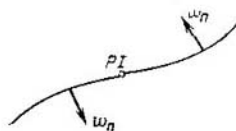


Fig. 4.2

Supongamos que una partícula está en movimiento uniforme con aceleración constante. Como durante el movimiento uniforme la velocidad no varía en magnitud,  $\mathbf{w}_\tau = 0$ , o sea  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_n$ . La constancia del valor de  $\mathbf{w}_n$  quiere decir que  $v^2/R = \text{const}$ . De esto, llegamos a la conclusión de que  $R = \text{const}$  ( $v = \text{const}$  a causa de la uniformidad de movimiento). Esto significa que la partícula se mueve por una curva de curvatura constante, es decir, por una circunferencia. De este modo, cuando la aceleración de una partícula es constante en magnitud y en cada momento de tiempo es perpendicular al vector de velocidad, la trayectoria de la partícula será una circunferencia.

## § 5. Cinemática del movimiento de rotación

La rotación de un cuerpo a cierto ángulo  $\varphi$  puede ser prefijado en forma de un segmento, cuya longitud es igual a  $\varphi$ , coincidiendo su dirección con el eje alrededor del cual transcurre la rotación. Con el fin de indicar hacia qué lado se realiza la rotación alrededor del eje prefijado, la dirección de rotación y el segmento que la repre-

se ligan por medio de la *regla del sacacorchos*: la dirección del segmento debe ser tal, que al mirar a lo largo de éste (fig. 5.1) veamos la rotación en sentido horario (girando el mango del sacacorchos en sentido horario provocaremos un desplazamiento alejándose del lector). En el § 2 fue mostrado (véase la fig. 2.1) que los giros a ángulos finitos no se suman según la regla del paralelogramo, por lo que podemos afirmar que no son vectores. Al girar a ángulos muy pequeños  $\Delta\varphi$ , el problema es completamente otro. El recorrido que realiza cualquier punto del cuerpo durante un giro muy pequeño,

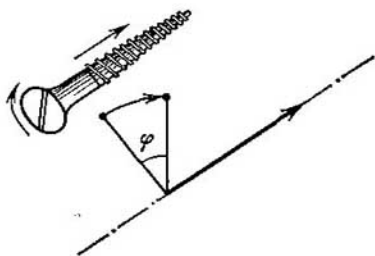


Fig. 5.1

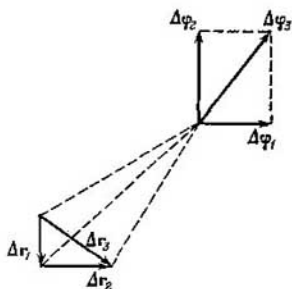


Fig. 5.2

puede ser considerado rectilíneo (fig. 5.2). Por esta razón, dos pequeños giros  $\Delta\varphi_1$  y  $\Delta\varphi_2$  que se realizan sucesivamente condicionan, como vemos en el dibujo, un desplazamiento igual  $\Delta r_3 = \Delta r_1 + \Delta r_2$  de cualquier punto del cuerpo, lo mismo que la rotación  $\Delta\varphi_3$  obtenida de  $\Delta\varphi_1$  y  $\Delta\varphi_2$ , sumándolos según la regla del paralelogramo. De aquí sigue, que rotaciones muy pequeñas pueden ser consideradas como vectores (que vamos a designar con los símbolos  $\Delta\varphi$  o  $d\varphi$ ). El sentido del vector de rotación se liga con la dirección de rotación del cuerpo. Por consiguiente,  $d\varphi$  no es un vector real, sino que es un pseudovector.

La magnitud vectorial

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (5.1)$$

(donde  $\Delta t$  es el tiempo durante el que se efectúa la rotación  $\Delta\varphi$ ) recibe el nombre de *velocidad angular* del cuerpo<sup>1)</sup>. La velocidad angular  $\omega$ , que es un pseudovector, está dirigida a lo largo del eje, alrededor del cual gira el cuerpo, en el sentido que determina la regla del sacacorchos (fig. 5.3). El módulo de la velocidad angular es igual a  $d\varphi/dt$ . Llamamos *uniforme* la rotación a velocidad angular constante. Si

<sup>1)</sup> En ocasiones, denominan *lineal* la velocidad  $v$  estudiada en el § 3.

la rotación es uniforme,  $\omega = \varphi/t$ , donde  $\varphi$  es el ángulo finito de rotación durante el tiempo  $t$  (comp. con  $v = s/t$ ). De este modo, con la rotación uniforme  $\omega$  muestra a qué ángulo gira el cuerpo por la unidad de tiempo.

La rotación uniforme puede ser caracterizada por el período de rotación  $T$ , por el que se entiende el tiempo que el cuerpo tarda

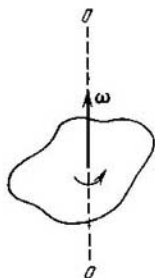


Fig. 5.3

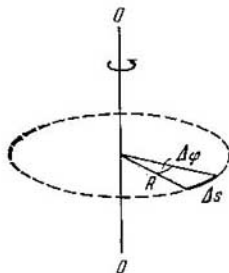


Fig. 5.4

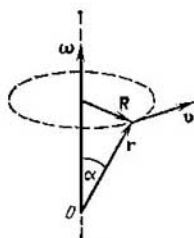


Fig. 5.5

en dar una vuelta, es decir, gira a un ángulo  $2\pi$ . Como al intervalo de tiempo  $\Delta t = T$  le corresponde el ángulo de rotación  $\Delta\varphi = 2\pi$ ,

$$\omega = 2\pi/T, \quad (5.2)$$

de donde

$$T = 2\pi/\omega. \quad (5.3)$$

El número de revoluciones por unidad de tiempo  $\nu$  es igual a

$$\nu = 1/T = \omega/2\pi. \quad (5.4)$$

De (5.4) se desprende que la velocidad angular es igual a  $2\pi$  multiplicada por el número de revoluciones por unidad de tiempo:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (5.5)$$

Los conceptos de período de rotación y número de revoluciones por unidad de tiempo pueden ser también conservados para la rotación variada, entendiéndose por valor instantáneo de  $T$  el tiempo durante el que el cuerpo daría una vuelta, si él girara uniformemente con el valor dado de la velocidad angular instantánea y entendiéndose por  $\nu$  aquel número de revoluciones que realizaría el cuerpo por unidad de tiempo en condiciones análogas.

El vector  $\omega$  puede variar tanto a cuenta de la variación de la velocidad de rotación alrededor del eje (en semejante caso variará en magnitud), como a cuenta del giro del eje de rotación en el espacio (aquí,  $\omega$  cambiará de sentido). Sea que durante el tiempo  $\Delta t$ , el

vector  $\omega$  recibe un incremento  $\Delta\omega$ . La variación del vector de la velocidad angular respecto del tiempo se caracteriza por la magnitud

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}, \quad (5.6)$$

que recibe el nombre de *aceleración angular*. Lo mismo que la velocidad angular, la aceleración angular es un pseudovector.

En un cuerpo en rotación, puntos aislados de éste tienen diferentes velocidades lineales  $v$ . La velocidad de cada uno de los puntos cambia permanentemente de dirección. La magnitud de la velocidad  $v$  se determina por la velocidad de rotación  $\omega$  del cuerpo y la distancia  $R$  del eje de rotación al punto que consideramos. Supongamos que durante un pequeño intervalo de tiempo, el cuerpo ha girado al ángulo  $\Delta\varphi$  (fig. 5.4). El punto que se encuentra a la distancia  $R$  del eje, pasa un recorrido  $\Delta s = R \Delta\varphi$ . La velocidad lineal del punto

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Es decir,

$$v = \omega R. \quad (5.7)$$

La fórmula (5.7) liga el módulo de las velocidades lineal y angular. Hallemos una expresión que ligue los vectores  $v$  y  $\omega$ . La posición del punto que consideramos será determinada por el radio vector  $r$ , trazado desde el origen de coordenadas  $O$ , que yace en el eje de rotación (fig. 5.5). La figura nos muestra que la dirección del producto vectorial  $[\omega r]$  coincide con el vector  $v$  y tiene un módulo igual a  $\omega r \sin \alpha = \omega R$ . Por lo tanto

$$v = [\omega r]. \quad (5.8)$$

El módulo de la aceleración normal de los puntos de un cuerpo en rotación es igual a  $|w_n| = v^2/R$ . Poniendo en esta expresión el valor de  $v$  de (5.7) obtenemos:

$$|w_n| = \omega^2 R. \quad (5.9)$$

Si introducimos el vector  $R$ , perpendicular al eje de rotación, trazado al punto dado del cuerpo (véase la fig. 5.5), podemos dar a la correlación (5.9) forma vectorial:

$$w_n = -\omega^2 R. \quad (5.10)$$

En esta fórmula ha aparecido el signo menos a cuenta de que los vectores  $w_n$  y  $R$  tienen sentidos opuestos.

Supongamos que el eje de rotación del cuerpo no gira en el espacio. De acuerdo con (4.7), el módulo de la aceleración tangencial será igual a  $|dv/dt|$ . Haciendo uso de la correlación (5.7) y teniendo en cuenta que la distancia del punto del cuerpo que consideramos al

eje de rotación  $R = \text{const}$ , podemos escribir:

$$|w_{\tau}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = R \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = R\beta,$$

donde  $\beta$  es el módulo de la aceleración angular. Por lo tanto, los módulos de las aceleraciones tangencial y angular están ligados mediante la correlación

$$|w_{\tau}| = \beta R. \quad (5.11)$$

De este modo, las aceleraciones normal y tangencial crecen linealmente al aumentar la distancia desde el punto hasta el eje de rotación.



## CAPÍTULO II

# DINÁMICA DE UN PUNTO MATERIAL

### § 6. Mecánica clásica. Límites de su aplicación

La cinemática describe el movimiento de los cuerpos sin tratar el motivo por qué el cuerpo se mueve de forma determinada (por ejemplo, uniformemente por una circunferencia o uniformemente acelerado por una recta) y no de otra manera.

La dinámica estudia el movimiento de los cuerpos en relación con las causas (interacción entre los cuerpos) que condicionan uno u otro carácter del movimiento.

La llamada mecánica clásica o newtoniana se basa en las tres leyes de dinámica enunciadas por Newton en 1687.

Las leyes de Newton (como todas las demás leyes físicas) surgieron como resultado de la generalización de una gran cantidad de factores experimentales. Su veracidad (aunque sea para un círculo muy extenso de fenómenos, pero a pesar de todo limitado) se confirma por la concordancia con la experiencia de aquellos corolarios que de dichas leyes se deducen.

La mecánica newtoniana alcanzó en el transcurso de dos centurias éxitos tan enormes, que muchos físicos del siglo XIX estaban convencidos de su omnipotencia. Era considerado que explicar cualquier fenómeno físico significaba reducirlo a un proceso mecánico supeditado a las leyes de Newton. No obstante, con el fomento de las ciencias fueron descubiertos nuevos hechos que no entraban en los límites de la mecánica clásica. Dichos hechos han sido explicados en nuevas teorías, es decir, en la teoría especial de la relatividad y en la mecánica cuántica.

En la teoría especial de la relatividad, creada por Einstein en 1905, fueron revisadas de forma radical las representaciones newtonianas sobre el espacio y el tiempo. Semejante revisión llevó a la creación de la «mecánica de grandes velocidades» o, como es denominada, a la mecánica relativista. Sin embargo, la aparición de la nueva mecánica no provocó la refutación completa de la mecánica newtoniana. En el límite, las ecuaciones de la mecánica relativista (para velocidades pequeñas en comparación con la de la luz) se convierten en las ecuaciones de la mecánica clásica. De este modo, la mecánica clásica ha entrado en la relativista como un caso particular y conserva su anterior importancia para describir los movimientos que transcurren a velocidades mucho menores que la de la luz.

En lo que respecta a la correlación entre la física clásica y la mecánica cuántica, surgida en la década del 20 de nuestro siglo, como

resultado del desarrollo de la física del átomo, la situación es análoga. Las ecuaciones de mecánica cuántica también ofrecen en el límite (para masas mayores que las del átomo) las ecuaciones de la mecánica clásica. Por consiguiente, la mecánica clásica también se ha incluido en la mecánica cuántica como su caso límite.

Así, pues, el fomento de las ciencias no ha «borrado» la mecánica clásica, sino que ha mostrado su limitada aplicación. La mecánica clásica, basada en las leyes de Newton, es la mecánica de los cuerpos de grandes masas (en comparación con la masa de los átomos), que se mueven a pequeñas velocidades (en comparación con la de la luz).

## § 7. Primera ley de Newton. Sistemas inerciales de referencia

La primera ley de Newton se enuncia del siguiente modo: *todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme mientras otros cuerpos no actúen sobre él y le obliguen a cambiar de estado*. Los dos indicados estados se distinguen por ser la aceleración de cuerpo igual a cero. Por esta causa, la enunciación de la primera ley puede tomar la siguiente forma: la velocidad de todo cuerpo queda constante (en particular, nula), mientras la acción de otros cuerpos sobre éste no provoque su variación.

La primera ley de Newton se cumple no en todo sistema de referencia. Más arriba ya indicamos que el carácter del movimiento depende del sistema de referencia elegido. Consideremos dos sistemas de referencia en movimiento con cierta aceleración, uno respecto a otro. Si con relación a uno de ellos el cuerpo está en reposo, en lo que atañe al segundo se moverá, por lo visto, con aceleración. Por lo tanto, la primera ley de Newton no puede cumplirse en los dos sistemas al mismo tiempo.

Recibe el nombre de *inercial* el sistema de referencia en el que se cumple la primera ley de Newton. La propia ley es a veces llamada *ley de inercia*. El sistema de referencia en el que la primera ley de Newton no se cumple, denomínase sistema no inercial de referencia. Todo sistema de referencia que respecto de cierto sistema inercial está en movimiento rectilíneo uniforme (es decir, a velocidad constante), también será inercial. Esto se estudiará con más detalle en el § 12.

De forma experimental se ha establecido que el sistema de referencia cuyo centro coincide con el Sol, mientras que los ejes están dirigidos hacia estrellas elegidas del modo correspondiente, es inercial. Éste recibe el nombre de *sistema heliocéntrico de referencia* (helios en griego Sol). Cualquier sistema de referencia en movimiento rectilíneo uniforme respecto del sistema heliocéntrico, será inercial.

La Tierra se mueve respecto del Sol y las estrellas por trayectorias curvilíneas, en forma de elipses. El movimiento curvilíneo siempre transcurre con cierta aceleración. Además, la Tierra gira alrededor de su eje. Por estas causas, el sistema de referencia, ligado con la superficie terrestre, se mueve con aceleración respecto del sistema heliocéntrico de referencia y no es inercial. No obstante, la aceleración de semejante sistema es tan pequeña, que en la mayoría de los casos dicho sistema puede ser considerado inercial. Pero hay casos, cuando la carencia de inercia del sistema de referencia relacionado con la Tierra, influye de manera considerable sobre el carácter de los fenómenos mecánicos que se consideran con relación a él. Algunos de dichos casos serán estudiados más adelante.

### § 8. Masa y cantidad de movimiento de un cuerpo

La acción de otros cuerpos sobre el cuerpo dado provoca la variación de su velocidad, es decir, comunica a éste aceleración. La experiencia muestra que iguales acciones comunican a diferentes cuerpos aceleraciones distintas en magnitud. Todo cuerpo se opone a los intentos de cambiar su estado de movimiento. Esta propiedad de los cuerpos se denomina *inercia*. La característica cuantitativa de la inercia es una magnitud llamada *masa* del cuerpo.

Para determinar la masa de cierto cuerpo hay que compararla con la masa del cuerpo aceptado como patrón de masa. También es posible comparar la masa del cuerpo dado con la de cierto cuerpo cuya masa es conocida (definida mediante su comparación con el patrón). La operación para comparar las masas  $m_1$  y  $m_2$  de dos puntos materiales (partículas) puede ser realizada del modo siguiente. Pongamos estas dos partículas en tales condiciones que podamos despreciar la interacción con otros cuerpos. Recibe el nombre de *cerrado* un sistema de cuerpos que interactúan sólo entre sí y no lo hacen con otros cuerpos. Esto quiere decir, que nosotros examinamos un sistema cerrado de dos partículas. Si obligamos a que estas partículas interactúen (por ejemplo, que choquen) sus velocidades recibirán incrementos  $\Delta v_1$  y  $\Delta v_2$ . La práctica muestra que estos incrementos siempre tienen direcciones opuestas, o sea, que se diferencian por su signo. La razón entre los módulos de los incrementos no depende del procedimiento e intensidad de la interacción de los dos cuerpos dados<sup>1)</sup>. Esta razón se toma igual al cociente inverso de las masas de los cuerpos que consideramos:

$$\frac{|\Delta v_1|}{|\Delta v_2|} = \frac{m_2}{m_1} \quad (8.1)$$

<sup>1)</sup> Esto es justo en el caso, cuando las velocidades iniciales y finales de las partículas son pequeñas en comparación con la de la luz  $c$ .

(el cuerpo más inerte, es decir, con mayor masa, sufre menor variación de su velocidad). Tomando en consideración el sentido relativo de los vectores  $\Delta v_1$  y  $\Delta v_2$ , la correlación (8.1) puede ser escrita de la forma

$$m_1 \Delta v_1 = -m_2 \Delta v_2. \quad (8.2)$$

En la mecánica de Newton (es decir, en la mecánica basada en las leyes de Newton) se supone que la masa del cuerpo es una magnitud constante que no depende de la velocidad del cuerpo. A velocidades pequeñas en comparación con la de la luz  $c$  (para  $v \ll c$ ), semejante suposición, prácticamente, se cumple. Haciendo uso de la constancia de la masa, representemos la igualdad (8.2) en el siguiente aspecto:

$$\Delta (m_1 v_1) = -\Delta (m_2 v_2). \quad (8.3)$$

El producto de la masa del cuerpo por su velocidad recibe el nombre de *cantidad de movimiento* del cuerpo. Si designamos la cantidad de movimiento por  $p$ , obtenemos:

$$p = mv. \quad (8.4)$$

La definición (8.4) es justa para puntos materiales (partículas) y cuerpos extendidos en movimiento de traslación (avance). Si se trata de un cuerpo extendido en movimiento que no es de traslación, hay que representar el cuerpo como un conjunto de puntos materiales con masas  $\Delta m_i$ , determinar las cantidades de movimiento  $\Delta m_i v_i$  de dichos puntos y, a continuación, sumar de forma vectorial estas cantidades de movimiento. Como resultado, obtendremos la cantidad total de movimiento del cuerpo:

$$p = \sum_i \Delta m_i v_i. \quad (8.5)$$

Cuando el cuerpo está en movimiento de traslación, todas las  $v_i$  son iguales y la fórmula (8.5) se convierte en la (8.4).

Sustituyendo en (8.3) los productos  $mv$  por las cantidades de movimiento  $p$  llegamos a la correlación  $\Delta p_1 = -\Delta p_2$ , de donde  $\Delta (p_1 + p_2) = 0$ . La igualdad a cero del incremento de cierta magnitud quiere decir que la propia magnitud queda invariable. Es decir, hemos llegado a la conclusión de que *la cantidad total de movimiento del sistema cerrado de dos partículas en interacción es una magnitud constante*:

$$p = p_1 + p_2 = \text{const.} \quad (8.6)$$

La afirmación que hemos aducido más arriba es el contenido del *principio de conservación de la cantidad de movimiento*. En el § 27 estudiaremos este principio con mayor detalle.

Señalemos que en mecánica relativista (véase el cap. VIII) la fórmula para la cantidad de movimiento en comparación con (8.4),

tiene una forma más complicada:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (8.7)$$

Aquí  $m$  es la llamada *masa en reposo* del cuerpo (para  $v = 0$ ),  $c$ , la velocidad de la luz en el vacío. La interpretación de (8.7) puede ser la siguiente: la masa del cuerpo no queda constante (como se supone en mecánica newtoniana), sino que varía con la velocidad según la ley

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (8.8)$$

Como resultado, la expresión (8.7) puede ser representada como

$$\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v}, \quad (8.9)$$

lo que es análogo a (8.4).

La masa  $m(v)$  definida con la fórmula (8.8) recibe el nombre de *masa relativista* o *masa en movimiento*. En adelante, la designaremos con el símbolo  $m_r$ .

## § 9. Segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton dice: *la velocidad de variación de la cantidad de movimiento del cuerpo es igual a la fuerza  $\mathbf{F}$  aplicada a él:*

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (9.1)$$

La ecuación (9.1) denominase *ecuación de movimiento del cuerpo*.

Sustituyendo  $\mathbf{p}$  en (8.4) por el producto  $m\mathbf{v}$  y tomando en consideración que en la mecánica newtoniana se supone que la masa es constante, es posible representar la correlación (9.1) así

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}, \quad (9.2)$$

donde  $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}$ . De este modo hemos llegado a otra enunciación de la segunda ley de Newton: *el producto de la masa del cuerpo por su aceleración es igual a la fuerza que actúa sobre él.*

La correlación (9.2) provocaba y continúa provocando entre los físicos agudas discusiones. Hasta la fecha no hay una interpretación general de dicha correlación. La dificultad radica en que no hay procedimientos independientes para definir  $m$  y  $\mathbf{F}$ , magnitudes que entran en la ecuación (9.2). Para determinar una de ellas ( $m$  o  $\mathbf{F}$ ) es preciso hacer uso de la correlación (9.2) en donde estas dos magnitudes están ligadas entre sí y con la aceleración  $\mathbf{w}$ . Por ejemplo, en el libro de S. E. Jaikin «Fundamentos físicos de mecánica» en la pá-

gina 104, leemos: «Ya que para establecer el procedimiento de medición de la masa del cuerpo se hace uso de la propia segunda ley de Newton (el valor de la masa del cuerpo se define simultáneamente con la medición de la fuerza y la aceleración), la segunda ley de Newton contiene, por un lado, la afirmación de que la aceleración es proporcional a la fuerza y por otro, la definición de la masa del cuerpo como la razón entre la fuerza aplicada a él y la aceleración que se comunica por la indicada fuerza»<sup>1</sup>).

Respecto al espíritu de la segunda ley de Newton R. Feynman decía: «Preguntemos: ¿cuál es el sentido... de la fórmula  $F = mw$ ? De forma intuitiva, comprendemos qué es la masa; también podemos determinar la aceleración si comprendemos qué es el espacio y qué es el tiempo. Por esta razón, no vamos a discutir el sentido de estos conceptos, sino que nos concentraremos en la nueva noción de fuerza. En este sentido la respuesta es asimismo sencilla: si el cuerpo se acelera, quiere decir que sobre él actúa una fuerza. Así dicen las leyes de Newton y la definición de fuerza más precisa y bella de todas las posibles, consistiría en que la fuerza es la masa del cuerpo, multiplicada por su aceleración...». Sin embargo «... después de descubrir la ley fundamental, que afirma que la fuerza es el producto de la masa por la aceleración y, a continuación, al definir la fuerza como la multiplicación de la masa por la aceleración, nada nuevo hemos descubierto... semejantes enunciaciones no pueden constituir el contenido de la física: ¿con qué fin hay que hacer que las definiciones anden por un círculo? ... de una sola definición nadie ha deducido nunca nada... El verdadero contenido de la ley de Newton es el siguiente: se supone que como adición a la ley  $F = mw$  la fuerza posee *propiedades independientes*; pero ni Newton ni nadie aún, ha descrito por completo las propiedades características de la fuerza...» (Lecciones de física de Feynman, fascículo 1, pág. 209—210)<sup>2</sup>).

Señalemos que la segunda ley de Newton (como las otras dos) es experimental. Fue creada como resultado de la generalización de los datos de experimentos y observaciones.

En el caso particular, cuando  $F = 0$  (es decir, al no haber acción alguna sobre el cuerpo por parte de otros cuerpos), como se desprende de (9.2), la aceleración es también nula. Esta deducción coincide con la afirmación de la primera ley de Newton. Por esta causa, la primera ley entra en la segunda como un caso particular. Sin embargo, la primera ley se enuncia independientemente de la segunda, ya que en esencia, ella contiene el postulado (afirmación) de la existencia de sistemas inerciales de referencia.

<sup>1</sup>) Editorial «Fizmatgiz», Moscú, 1963 (en ruso).

<sup>2</sup>) Editorial «Mir», Moscú, 1965 (en ruso).

En conclusión, notemos que con la elección independiente de las unidades de masa, fuerza y aceleración, la expresión de la segunda ley debe escribirse en la forma

$$mw = kF, \quad (9.3)$$

donde  $k$  es un coeficiente de proporcionalidad.

## § 10. Unidades y dimensiones de las magnitudes físicas

Como ya hemos señalado, las leyes de física establecen las correlaciones cuantitativas entre las magnitudes físicas. Con el fin de establecer semejantes correlaciones hay que poder medir diversas magnitudes físicas.

La medición de cualquier magnitud física (por ejemplo, la velocidad) quiere decir que ésta se compara con una magnitud del mismo tipo (en nuestro ejemplo, con la velocidad) que tomamos como unidad.

En general, para cada magnitud física sería posible establecer su unidad de forma arbitraria, independientemente de otras unidades. Pero resulta, que nos podemos limitar por la elección al azar de unidades para varias (no menos de tres) unidades, que en principio pueden ser cualesquiera, tomadas como base. Las unidades del resto de las magnitudes pueden ser establecidas con ayuda de las fundamentales, empleando con este objeto las leyes físicas que ligan la magnitud dada con las magnitudes fundamentales o con las magnitudes, para las que las unidades ya han sido establecidas de semejante forma.

Aclaremos lo dicho con el ejemplo siguiente. Supongamos que ya hemos establecido las unidades de masa y aceleración. La correlación (9.3) enlaza de forma regular estas magnitudes con una tercera magnitud física, la fuerza. Elijamos la unidad de fuerza de tal modo que el coeficiente de proporcionalidad sea en esta ecuación igual a uno. Entonces la fórmula (9.3) toma una forma más sencilla:

$$mw = F. \quad (10.1)$$

De (10.1) se desprende que la unidad de fuerza establecida es una fuerza tal que por su acción sobre un cuerpo de masa igual a la unidad, éste recibe una aceleración también igual a uno (si en (10.1) ponemos  $F = 1$  y  $m = 1$ , obtendremos  $w = 1$ ).

Con el indicado procedimiento para elegir las unidades, las correlaciones toman una forma más sencilla. El propio conjunto de unidades forma un sistema determinado.

Existen varios sistemas que se distinguen por la elección de las unidades fundamentales. Reciben el nombre de *absolutos* sistemas basados en las unidades de longitud, masa y tiempo.

En la URSS, desde el 1 de enero de 1963 fue introducido el Estándar Estatal GOST 9867-61 que impuso la aplicación del *Sistema Internacional de Unidades*, designado por el símbolo SI. Este sistema

debo ser aplicado de modo prevalente en todas las ramas de la ciencia, técnica y economía nacional, así como en la enseñanza. En el SI las unidades fundamentales son: la unidad de longitud—el metro (abreviatura—m), la unidad de masa—el kilogramo (kg) y la unidad de tiempo—el segundo (s). Es decir, el SI es un sistema absoluto de unidades. Además de las tres unidades indicadas más arriba, el SI toma en calidad de fundamentales la unidad de intensidad de corriente—el amperio (A), la unidad de temperatura termodinámica—el kelvin (K), la unidad de intensidad luminosa—la candela (cd) y la unidad de cantidad de materia—mol (mol). En los correspondientes capítulos del curso serán examinadas estas unidades.

El metro se determina como una longitud igual a 1650763,73 longitudes de ondas luminosas en el vacío de una radiación que corresponde a la transición entre los niveles  $2p_{10}$  y  $5d_5$  del átomo de criptón-86<sup>1)</sup> (línea anaranjada de criptón-86). De modo aproximado, el metro es igual a 1/40 000 000 parte de la longitud del meridiano terrestre. También se hace uso de unidades derivadas y unidades fraccionales: kilómetro (1 km =  $10^3$  m), centímetro (1 cm =  $10^{-2}$  m), milímetro (1 mm =  $10^{-3}$  m), micrómetro ( $1\mu\text{m} = 10^{-6}$  m), etc.

El kilogramo es la masa de un cuerpo de platino iridiado<sup>2)</sup> que se conserva en la oficina de Pesas y Medidas en la ciudad de Sévres (cerca de París). Este cuerpo denomínase prototipo internacional del kilogramo. La masa del prototipo es próxima a 1000 cm<sup>3</sup> de agua pura a 4 °C. El gramo es igual a 1/1000 de kilogramo.

El segundo se determina como el intervalo de tiempo igual a la suma de 9 192 631 770 períodos de radiación, que corresponde a la transición entre dos niveles ultrafinos del estado fundamental del átomo de cesio-133. Aproximadamente, el segundo es igual a 1/86 400 parte del día solar medio.

En física también se emplea el sistema absoluto de unidades llamado CGS. Las unidades fundamentales de este sistema son el centímetro, gramo y segundo.

Las unidades de las magnitudes que hemos introducido en cinemática (velocidad y aceleración) son derivadas de las unidades fundamentales. Así, por unidad de velocidad se toma la velocidad de un cuerpo en movimiento uniforme, que por la unidad de tiempo (segundo) hace un recorrido igual a la unidad de longitud (metro o centímetro). Esta unidad se designa en el SI por m/s y en el CGS, por cm/s. Por unidad de aceleración se toma la velocidad del movimiento uniforme-variable, con el que la velocidad del cuerpo por la unidad de tiempo (segundo) varía en la unidad (en m/s o cm/s). Esta unidad se designa por m/s<sup>2</sup> en el SI y cm/s<sup>2</sup> en el CGS.

<sup>1)</sup> El sentido de estas designaciones se explica en el apartado «Física atómica».

<sup>2)</sup> La aleación de platino e iridio tiene mayor dureza y estabilidad corrosiva (es decir, es menos expuesta a la acción química medioambiental).



La unidad de fuerza en el SI recibe el nombre de newton (N). De acuerdo con (10.1) el newton es igual a la fuerza que comunica a un kilogramo de masa la aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$ . En el sistema CGS la unidad de fuerza se denomina dina (din). Una dina es igual a la fuerza que comunica a un kilogramo de masa una aceleración de  $1 \text{ cm/s}^2$ . Entre el newton y la dina hay la siguiente correlación:

$$1\text{N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2 = 10^3 \text{ g} \cdot 10^2 \text{ cm/s}^2 = 10^5 \text{ din.}$$

En técnica se utiliza ampliamente el sistema MKgfS (que, por regla, se llama sistema técnico de unidades o bien sistema gravitatorio). Las unidades fundamentales de este sistema son el metro, la unidad de fuerza—el kilogramo-fuerza (o kilogramo-peso) (kgf o kg) y el segundo (s). El kilogramo-fuerza se define como la fuerza que comunica a la masa de 1 kg una aceleración igual a  $9,80655 \text{ m/s}^2$ . De esta definición sigue que  $1 \text{ kgf} = 9,80655 \text{ N}$  (aproximadamente  $9,81 \text{ N}$ ).

De acuerdo con (10.1), en el sistema técnico (MKgfS) por unidad de masa debe ser tomada la de un cuerpo que bajo la acción de 1 kgf recibe una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$ . Esta unidad se designa por  $\text{kgf} \cdot \text{s}^2/\text{m}$  y no tiene denominación especial. Es evidente que  $1 \text{ kgf} \cdot \text{s}^2/\text{m} = 9,80655 \text{ kg}$  (cerca de  $9,81 \text{ kg}$ ).

Del procedimiento de construcción del sistema de unidades se desprende que la variación de las unidades fundamentales provoca el cambio de las derivadas. Por ejemplo, si tomamos por unidad de tiempo el minuto en lugar del segundo, es decir, aumentamos 60 veces la unidad de tiempo, la de la velocidad disminuirá 60 veces y la de aceleración, 3600 veces.

La relación que muestra cómo varía la unidad de cualquier magnitud al cambiar las unidades fundamentales, recibe el nombre de *dimensión* de esta magnitud. Para designar la dimensión física arbitraria se emplea su designación literal tomada entre corchetes. Por ejemplo, el símbolo  $[v]$  es la dimensión de la velocidad. Para las dimensiones de las magnitudes fundamentales se hace uso de designaciones especiales: para la longitud  $L$ , la masa  $M$  y el tiempo  $T$ . De este modo, designando la longitud con la letra  $l$ , la masa con  $m$  y el tiempo con  $t$ , podemos escribir:

$$[l] = L; [m] = M; [t] = T.$$

En las designaciones indicadas la dimensión de la magnitud física, tomada al azar, tiene el aspecto  $L^\alpha M^\beta T^\gamma$  ( $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  pueden ser positivos o negativos y en caso particular, nulos). Esta anotación quiere decir que al aumentar la unidad de longitud  $n_1$  veces, la unidad de dicha magnitud aumentará  $n_1^\alpha$  veces (del modo correspondiente, el número que expresa el valor de la magnitud en estas unidades, disminuirá  $n_1^\alpha$  veces); al aumentar la unidad de masa  $n_2$  veces, la unidad de dicha magnitud aumentará  $n_2^\beta$  veces y, por fin, al au-

mentar la unidad de tiempo  $n_3$  veces, la unidad de dicha magnitud aumentará  $n_3^2$  veces.

Como las leyes físicas no pueden depender de la elección de las unidades de las magnitudes que en ellas figuran, las dimensiones de los dos miembros de las ecuaciones, que expresan esas leyes, deben ser iguales. Esta condición puede ser, primero, utilizada para comprobar que las correlaciones físicas obtenidas son correctas y, segundo, para establecer las dimensiones de las magnitudes físicas. Por ejemplo, la velocidad se determina como  $v = \Delta s / \Delta t$ . La dimensión de  $\Delta s$  es L, la de  $\Delta t$ , es igual a T. La dimensión del segundo miembro de la correlación escrita es igual a  $[\Delta s] / [\Delta t] = L/T = LT^{-1}$ . La dimensión del primer miembro debe ser esta misma. Por lo tanto,

$$[v] = LT^{-1}. \quad (10.2)$$

La correlación escrita denomínase fórmula de la dimensión, mientras que su segundo miembro, dimensión de la correspondiente magnitud (en nuestro caso, de la velocidad).

Basándonos en la correlación  $w = \Delta v / \Delta t$  podemos hallar la dimensión de la aceleración:

$$[w] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}.$$

La dimensión de la fuerza

$$[F] = [m] [w] = MLT^{-2}.$$

De modo análogo se establecen las dimensiones de las demás magnitudes.

## § 11. Tercera ley de Newton

Toda acción entre cuerpos tiene carácter de interacción: si el cuerpo 1 actúa sobre el cuerpo 2 con una fuerza  $F_{21}$ , a su vez, el cuerpo 2 actúa sobre el cuerpo 1 con una fuerza  $F_{12}$ .

La tercera ley de Newton afirma que *las fuerzas con las que actúan, uno sobre otro, los cuerpos en interacción son iguales en magnitud y de sentido opuesto*. Empleando las designaciones de las fuerzas dadas más arriba, el contenido de la tercera ley puede ser representado en forma de una igualdad:

$$F_{12} = -F_{21}. \quad (11.1)$$

De la tercera ley de Newton se deduce que las fuerzas surgen a pares: con cada fuerza aplicada a cierto cuerpo puede ser comparada una fuerza de igual magnitud y de dirección contraria, aplicada a otro cuerpo que interactúa con el dado.

La tercera ley de Newton no es siempre justa. Se cumple con rigurosidad en caso de interacciones de contacto (es decir, aquellas que

se observan con el contacto directo de los cuerpos), así como con interacciones de *cuerpos en reposo* que se encuentran a cierta distancia entre sí.

Como ejemplo de violación de la tercera ley de Newton podemos aducir el sistema de dos partículas cargadas  $e_1$  y  $e_2$  que, en el momento que consideramos, se mueven como se muestra en la fig. 11.1. En electrodinámica se demuestra que además de la fuerza de interacción electrostática  $F_{12}$ , subordinada a la tercera ley, sobre la primera partícula actuará la fuerza magnética  $F_1$ . En lo que se refiere a la segunda partícula, sobre ella actúa sólo la fuerza  $F_{21}$ , igual a  $-F_{12}$ . En el caso ofrecido en la figura, la magnitud de la fuerza magnética que actúa sobre la segunda partícula es igual a cero. Señalemos, que a velocidades de las partículas mucho menores que la de la luz en el vacío (para  $v_1 \ll c$  y  $v_2 \ll c$ ), la fuerza  $F_1$ , es despreciablemente pequeña en comparación con la fuerza  $F_{12}$ , de forma que, prácticamente, en este caso la tercera ley de Newton también es válida.

Examinemos ahora un sistema de dos partículas eléctricamente neutras  $m_1$  y  $m_2$ , alejadas entre sí a la distancia  $r$ . A causa de la gravitación estas partículas se atraen una por otra con una fuerza

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (11.2)$$

En el caso presente la interacción de las partículas se efectúa por medio del campo de gravitación. Digamos, que la primera partícula crea en el espacio que la rodea un campo que se manifiesta por el hecho de que sobre la partícula  $m_2$ , ubicada en cierto punto de este campo, actúa la fuerza de atracción de la primera partícula. Del mismo modo, la segunda partícula crea su campo, que se revela en su influjo sobre la primera partícula. La experiencia muestra, que las variaciones del campo, provocadas, por ejemplo, por el cambio de la posición de la partícula que crea el campo, se propagan en el espacio no instantáneamente, sino que a una velocidad, que aunque es muy grande, es finita e igual a la velocidad de la luz en el vacío  $c$ .

Supongamos que al principio las partículas  $m_1$  y  $m_2$  están en reposo en las posiciones 1 y 2 (fig. 11.2). Las fuerzas de interacción  $F_{12}$  y  $F_{21}$  son iguales en magnitud y de direcciones opuestas. Sea ahora que la partícula  $m_1$  con gran rapidez (a una velocidad casi igual a  $c$ ) se traslada a la posición 1'. En este punto, sobre la partícula  $m_1$  actuará una fuerza  $F'_{12}$  de menor magnitud ( $r' > r$ ) y dirigida en sentido diferente a  $F_{12}$  (recordemos que el campo de la partícula  $m_2$  es invariable). Hasta que la perturbación del campo provo-

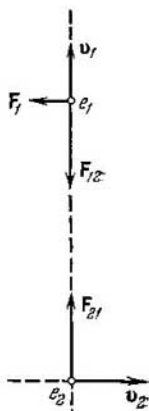


Fig. 11.1

cada por el desplazamiento de  $m_1$  llegue al punto 2, sobre la segunda partícula continuará actuando la fuerza  $F_{21}$ . Por consiguiente, mientras que la partícula  $m_1$  estaba en movimiento y durante cierto tiempo después de que se detuvo en el punto  $1'$ , la tercera ley de Newton fue violada.

Si la partícula  $m_1$  se desplazara del punto  $1$  al punto  $1'$  a una velocidad  $v$  mucho menor que  $c$  ( $v \ll c$ ) o bien la velocidad de pro-

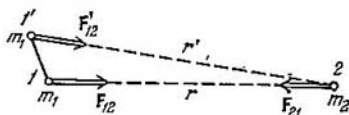


Fig. 11.2

pagación de las perturbaciones del campo era infinitamente grande, los valores instantáneos del campo en el punto 2 corresponderían a las posiciones de la partícula  $m_1$  en ese mismo momento de tiempo y, por lo tanto, no se observarían violaciones de la tercera ley.

La mecánica newtoniana, en general, es justa sólo para las velocidades de movimiento mucho menores que la de la luz (para  $v \ll c$ ). Por esta razón, en los márgenes de dicha mecánica la velocidad de propagación de las perturbaciones del campo se considera infinita, por lo que la tercera ley de Newton siempre se cumple.

## § 12. Principio de relatividad de Galileo

Examinemos dos sistemas de referencia en movimiento a velocidad constante  $v_0$  uno respecto del otro. De modo convencional, vamos a considerar que uno de estos sistemas, designado en la fig. 12.1 por la letra  $K$ , está inmóvil. Entonces, el segundo sistema  $K'$  estará

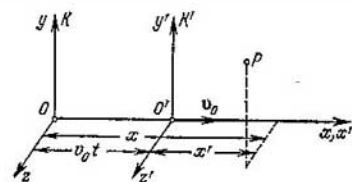


Fig. 12.1

en movimiento rectilíneo uniforme. Elijamos los ejes de coordenadas  $x, y, z$  del sistema  $K$  y los ejes  $x', y', z'$  del sistema  $K'$  de forma que los ejes  $x$  y  $x'$  coincidan, mientras que los ejes  $y$  e  $y'$ , así como los ejes  $z$  y  $z'$ , sean paralelos entre sí.

Hallamos la relación entre las coordenadas  $x, y, z$  de cierto punto  $P$  en el sistema  $K$  y las coordenadas  $x', y', z'$  de este mismo punto en el sistema  $K'$ . Si comenzamos la cuenta del tiempo desde el momento cuando los orígenes de coordenadas de los dos sistemas coincidían, como se desprende de la fig. 12.1,  $x = x' + v_0 t$ . Además, es evi-

dente que  $y = y'$  y  $z = z'$ . Si a estas correlaciones añadimos la suposición aceptada en la mecánica clásica de que el tiempo en los dos sistemas transcurre de igual forma, es decir, que  $t = t'$ , obtendremos el conjunto de cuatro ecuaciones:

$$x = x' + v_0 t', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t', \quad (12.1)$$

que reciben el nombre de *transformaciones de Galileo*.

Las correlaciones (12.1) primera y cuarta resultan ser justas sólo para valores de  $v_0$  pequeños en comparación con la velocidad de la luz en el vacío  $c$  ( $v_0 \ll c$ ). Para  $v_0$  comparables con  $c$  las transformaciones de Galileo deben ser sustituidas por las transformaciones de Lorentz que son más generales (véase el § 63). En los márgenes de la mecánica newtoniana las fórmulas (12.1) se supone que son precisas.

Después de diferenciar las correlaciones (12.1) respecto del tiempo, hallamos la ligazón entre las velocidades del punto  $P$  con relación a los sistemas de referencia  $K$  y  $K'$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}' + v_0 & \text{o bien} & \quad v_x = v'_x + v_0, \\ \dot{y} &= \dot{y}' & \text{o bien} & \quad v_y = v'_y, \\ \dot{z} &= \dot{z}' & \text{o bien} & \quad v_z = v'_z. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Las tres correlaciones escalares (12.2) son equivalentes a la siguiente correlación entre el vector de velocidad  $\mathbf{v}$  respecto del sistema  $K$  y el vector de velocidad  $\mathbf{v}'$  en relación con el sistema  $K'$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0. \quad (12.3)$$

Para cerciorarse de esto, es suficiente proyectar la igualdad vectorial (12.3) en los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . El resultado serán las fórmulas (12.2).

Las fórmulas (12.2) y (12.3) nos proporcionan la regla de composición de las velocidades en mecánica clásica. Hay que tener en cuenta que la correlación (12.3), como cualquier otra correlación vectorial, queda válida con la elección arbitraria de los sentidos mutuos de los ejes de coordenadas de los sistemas  $K$  y  $K'$ . En lo que atañe a las correlaciones (12.2), éstas se cumplen sólo con la disposición de los ejes mostrada en la fig. 12.1.

En el § 7 fue señalado que cualquier sistema de referencia que se mueve con relación a cierto sistema inercial a velocidad constante, será también inercial. Ahora ya podemos demostrar esta afirmación. Con este fin derivamos la correlación (12.3). Teniendo en cuenta que  $v_0$  es constante recibimos:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}' \quad \text{o bien} \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}'. \quad (12.4)$$

De aquí se desprende que la aceleración de cierto cuerpo en todos los sistemas de referencia, uno respecto de otro en movimiento rectilíneo uniforme, queda constante. Por esta causa, si uno de estos siste-

mas es inercial (lo que quiere decir que al no haber fuerzas  $w = 0$ ), los restantes también serán inerciales ( $w'$  es asimismo igual a cero).

La ecuación fundamental de mecánica (9.2) es característica por el hecho de que de las magnitudes cinemáticas, sólo contiene la aceleración, mientras que la velocidad en ella no entra. Sin embargo, como hemos establecido más arriba, la aceleración de cierto cuerpo en dos sistemas inerciales de referencia  $K$  y  $K'$ , tomados al azar, es la misma. De acuerdo con la segunda ley de Newton, de aquí se desprende que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en los sistemas  $K$  y  $K'$  también serán iguales. Por lo tanto, *las ecuaciones de dinámica no varían al pasar de un sistema inercial de referencia a otro*, es decir, como suele decirse, son invariantes con relación a la transformación de las coordenadas que corresponde a la transición de un sistema inercial de referencia a otro. Desde el punto de vista de mecánica, todos los sistemas inerciales de referencia son en absoluto equivalentes: a ninguno de ellos se le puede dar preferencia. Prácticamente, esto se manifiesta en que mediante cualesquiera experimentos mecánicos, realizados en los límites del sistema de referencia, es imposible establecer si éste se halla en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme. Por ejemplo, si nos encontramos en el vagón de un tren en movimiento rectilíneo uniforme, que se desplaza sin tirones, si no miramos por la ventana es imposible determinar si el vagón se mueve o está en reposo. La caída libre de los cuerpos, el movimiento de los cuerpos que hemos lanzado y otros procesos mecánicos transcurrirán en este caso del mismo modo que al estar el vagón inmóvil.

Semejantes circunstancias fueron ya aclaradas por Galileo. Recibe el nombre de *principio de relatividad de Galileo* la regularidad de que todos los fenómenos mecánicos transcurren del mismo modo en diversos sistemas inerciales de referencia, a causa de lo cual es imposible establecer con ayuda de cualquier experimento mecánico si el sistema de referencia dado está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.

### § 13. Fuerzas

En física moderna se distinguen cuatro tipos de interacciones: 1) gravitacional (o interacción provocada por la gravitación); 2) electromagnética (realizada mediante los campos eléctricos y magnéticos); 3) fuerte o nuclear (que asegura el enlace de las partículas en el núcleo) y 4) débil (que provoca muchos de los procesos de desintegración de las partículas elementales).

En los márgenes de la mecánica clásica se tratan las fuerzas gravitatorias y electromagnéticas, así como las fuerzas elásticas y las de rozamiento. Estas dos últimas se determinan por el carácter de la interacción entre las moléculas de la sustancia, que, como sabemos, es de origen electromagnético. Por consiguiente, las fuerzas

elásticas y las de rozamiento por su naturaleza, son electromagnéticas.

Las fuerzas gravitacionales y electromagnéticas son básicas y no pueden ser reducidas a otras fuerzas más sencillas. Las fuerzas elásticas y de rozamiento no son básicas.

Las leyes de las fuerzas básicas son sencillas en extremo. El valor de la fuerza gravitacional se determina por la fórmula (11.2). La magnitud de la fuerza con la que interactúan dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  se determina con ayuda de la ley de Coulomb:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (13.1)$$

( $k$  es un coeficiente de proporcionalidad que depende de la elección de las unidades de las magnitudes que entran en la fórmula).

Si las cargas están en movimiento, sobre ellas, además de la fuerza (13.1), actúan también las fuerzas magnéticas. La fuerza magnética que actúa sobre una carga puntual  $q$  que se mueve a una velocidad  $v$  por un campo magnético de inducción  $B$ , defínese por la fórmula:

$$F = k' q [vB] \quad (13.2)$$

( $k'$  es un coeficiente de proporcionalidad).

Las fórmulas (11.2), (13.1), (13.2) son precisas. Para las fuerzas elásticas y de rozamiento podemos obtener sólo fórmulas empíricas aproximadas, que vamos a estudiar en los siguientes párrafos.

## § 14. Fuerzas elásticas

Todo cuerpo real, bajo la acción de las fuerzas aplicadas sobre él se deforma, es decir, varían sus dimensiones y forma. La deformación recibe el nombre de *elástica*, si después de cesar la acción de fuerza el cuerpo vuelve a tomar las dimensiones y la forma iniciales.

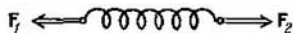


Fig. 14.1

Las deformaciones elásticas se observan cuando la fuerza que condiciona la deformación no supera cierto límite (límite de elasticidad) determinado para cada cuerpo concreto.

Tomemos un muelle que en estado no deformado tiene una longitud  $l_0$  y apliquemos a sus extremos las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  de igual magnitud y dirigidas en sentidos opuestos (fig. 14.1). Bajo la acción de estas fuerzas el muelle estira a cierta magnitud  $\Delta l$ , después de lo cual se equilibra. En estado de equilibrio las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  serán

equilibradas por las fuerzas elásticas, que en el muelle surgen a causa de la deformación. Como muestra la experiencia, con pequeñas deformaciones el alargamiento del muelle  $\Delta l$  resulta ser proporcional a la fuerza de tracción:  $\Delta l \propto F$  ( $F = F_1 = F_2$ ). De manera correspondiente, la fuerza elástica es proporcional al alargamiento del muelle:

$$F = k\Delta l. \quad (14.1)$$

El coeficiente de proporcionalidad  $k$  recibe el nombre de *coeficiente de rigidez* del muelle.

La afirmación acerca de la proporcionalidad entre la fuerza elástica y la deformación denominase *ley de Hooke*.

Las tensiones elásticas aparecen por todo el muelle. Cualquier parte de éste actúa sobre otra parte con una fuerza que se determina con la fórmula (14.1). Por esta razón, si el muelle se corta por la

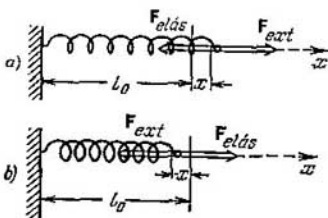


Fig. 14.2

mitad, una fuerza elástica de igual magnitud surgirá en cada una de las mitades, con un alargamiento dos veces menor. De aquí llegamos a la conclusión de que para el material del muelle y las dimensiones de la espira prefijados, la magnitud de la fuerza elástica se determina no por el alargamiento absoluto  $\Delta l$  del muelle, sino que por el alargamiento relativo  $\Delta l/l_0$ .

Al comprimir el muelle también surgen tensiones elásticas, pero de otro signo. Generalicemos la fórmula (14.1) de la siguiente forma. Fijemos uno de los extremos del muelle (fig. 14.2), mientras que el alargamiento del muelle lo vamos a examinar como la coordenada  $x$  del extremo opuesto, que se cuenta desde la posición de ésta que corresponde al muelle no deformado<sup>1)</sup>. Además, designemos la proyección de la fuerza elástica  $F_{elás}$  en el eje  $x$  por  $F_x$ . Entonces, podemos escribir, que

$$F_x = -kx \quad (14.2)$$

(en la fig. 14.2 vemos que la proyección de la fuerza elástica en el eje  $x$  y la coordenada  $x$  siempre tienen signos opuestos).

Las barras homogéneas se comportan como un muelle durante la tracción o la compresión unilateral. Si a los extremos de una barra aplicamos las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  ( $F_1 = F_2 = F$ ) dirigidas a lo largo

<sup>1)</sup> En la fig. 14.2,  $b$  la longitud del segmento a la que se desplaza el extremo del muelle, está designada por  $x$ ; esto se debe a que la longitud del segmento es una magnitud positiva, mientras que la coordenada  $x$  es aquí negativa.



de su eje y cuya acción está distribuida uniformemente por toda su sección, la longitud de la barra  $l_0$  recibe un incremento<sup>1)</sup>  $\Delta l$  (fig. 14.3) positivo (con la tracción) o negativo (con la compresión). Es natural tomar como magnitud que caracteriza la deformación de la barra, la variación relativa de su longitud:

$$e = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (14.3)$$

La práctica indica que para las barras del material dado, el alargamiento relativo durante la deformación es proporcional a la fuerza que corresponde a la unidad del área de la sección transversal de la barra:

$$e = \alpha \frac{F}{S} \quad (14.4)$$

( $\alpha$  es un coeficiente de proporcionalidad).

Recibe el nombre de *tensión* una magnitud igual a la razón entre la fuerza y la magnitud de la superficie sobre la que ésta actúa. Gra-

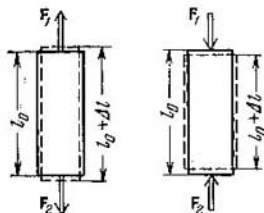


Fig. 14.3

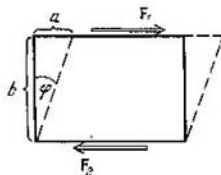


Fig. 14.4

cias a la interacción de las partes del cuerpo entre sí, la tensión se transmite a todos sus puntos, es decir, todo el volumen de la barra resulta estar en estado de tensión. Si la fuerza está dirigida por la normal a la superficie, la tensión se llama *normal*. Cuando la fuerza va por la tangente a la superficie sobre la que actúa, la tensión recibe el nombre de *tangencial*. La tensión normal se ha adoptado designar por la letra  $\sigma$ , la tangencial por la letra  $\tau$ .

La razón  $F/S$  en la fórmula (14.4) es la tensión normal  $\sigma$ . Por lo tanto, dicha fórmula puede tener el aspecto:

$$e = \alpha \sigma. \quad (14.5)$$

Para caracterizar las propiedades elásticas del material se hace uso de la magnitud  $E = 1/\alpha$  que se denomina *módulo de Young*. Esta magnitud se mide en pascuales ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/1 m}^2$ ).

<sup>1)</sup> La variación de la longitud de la barra se acompaña del correspondiente cambio de las dimensiones transversales de la barra.

Sustituyendo en (14.5)  $\alpha$  por  $E$  recibimos:

$$\varepsilon = \sigma/E, \quad (14.6)$$

de donde se desprende que el módulo de Young es igual a semejante tensión normal, con la que el alargamiento relativo fuese igual a la unidad (es decir, como si el incremento de la longitud  $\Delta l$  fuera igual a la longitud inicial  $l_0$ ) claro está, si pudieran ser tan grandes las deformaciones elásticas (en realidad, con tensiones mucho menores se produce la destrucción de la barra, mucho antes se alcanza el límite de elasticidad).

Al resolver la ecuación (14.4) respecto de  $F$  y sustituyendo  $\varepsilon$  por  $\Delta l/l_0$  y  $\alpha$ , por  $1/E$ , obtenemos la fórmula

$$F = \frac{ES}{l_0} \Delta l = k\Delta l, \quad (14.7)$$

donde  $k$  es un coeficiente constante para la barra dada. La correlación (14.7) expresa la ley de Hooke para una barra (comp. con (14.2)). Recordemos que esta ley sólo se cumple hasta alcanzar el límite de elasticidad.

Como conclusión, examinemos con brevedad la deformación de cizallamiento (cortadura o deslizamiento). Tomemos un cuerpo homogéneo en forma de un paralelepípedo rectangular y apliquemos a sus caras opuestas las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  ( $F_1 = F_2 = F$ ), dirigidas paralelamente a las caras (fig. 14.4). Si la acción de las fuerzas está distribuida uniformemente por toda la superficie de la respectiva cara, en cualquier sección, paralela a dichas caras, surgirá una tensión tangencial

$$\tau = F/S \quad (14.8)$$

( $S$  es el área de la cara). Bajo la acción de las tensiones el cuerpo se deforma de manera que las caras se desplazan entre sí a cierta distancia  $a$ . Si mentalmente dividimos el cuerpo en capas elementales, paralelas a las caras que examinamos, cada una de las capas resultará desplazada respecto de las capas vecinas. Por esta causa, semejante deformación ha recibido el nombre de cizallamiento.

Durante la deformación por cizallamiento, toda recta que al principio era perpendicular a las capas, girará a cierto ángulo  $\varphi$ . En calidad de característica de dicha deformación se toma la magnitud

$$\gamma = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \varphi, \quad (14.9)$$

llamado *deslizamiento relativo* (el sentido de las magnitudes  $a$  y  $b$  queda claro en la fig. 14.4). Con deformaciones elásticas el ángulo  $\varphi$  es muy pequeño, por lo que podemos hacer  $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ . Por consiguiente, el deslizamiento relativo  $\gamma$  resulta ser igual al ángulo de cizallamiento  $\varphi$ .

La experiencia muestra que el deslizamiento relativo es proporcional a la tensión tangencial:

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau \quad (14.10)$$

El coeficiente  $G$  sólo depende de las propiedades del material y recibe el nombre de *módulo de cizallamiento*. Es igual a un esfuerzo tangencial con el que el ángulo de cizallamiento fuera igual a  $45^\circ$  ( $\operatorname{tg} \varphi = 1$ ), si con tan grandes deformaciones no fuese superado el límite de elasticidad. Como  $G$ ,  $E$  también se mide en pascuales (Pa).

## § 15. Fuerzas de rozamiento

Durante el desplazamiento de los cuerpos en contacto o de sus partes unas respecto de otras, surgen las fuerzas de rozamiento. El rozamiento que aparece durante el desplazamiento relativo de dos cuerpos en contacto, recibe el nombre de rozamiento *externo*; el rozamiento entre las partes de un mismo cuerpo enterizo (por ejemplo, líquido o gas), denomínase rozamiento *interno*.

La fuerza de rozamiento (o de fricción), que surge al moverse un sólido por un medio líquido o gaseoso, debe ser considerada como rozamiento interior, ya que en tal caso las capas del medio, que hacen contacto directo con el cuerpo, son obligadas por éste a moverse a la misma velocidad que el cuerpo mientras que sobre su movimiento influye el rozamiento entre estas capas del medio y las que respecto a ellas pueden considerarse exteriores.

El rozamiento entre las superficies de dos sólidos recibe el nombre de seco, cuando entre dichas superficies no hay ninguna intercalación, por ejemplo, una capa de engrase. El rozamiento entre un sólido y un medio líquido o gaseoso, así como entre las capas de semejante medio, es llamado *viscoso* (o líquido).

El rozamiento seco puede ser *de deslizamiento* o *de rodadura*.

Las fuerzas de rozamiento están dirigidas por la tangente a las superficies (o capas) en rozamiento, con la particularidad de que se oponen al desplazamiento relativo de dichas superficies (capas). Por ejemplo, si dos capas de un líquido deslizan una respecto de otra, moviéndose a diferentes velocidades, la fuerza aplicada a la capa que se mueve con mayor rapidez estará dirigida en sentido opuesto al movimiento, mientras que la fuerza aplicada a la capa más lenta, estará dirigida en sentido del movimiento de la capa.

**Rozamiento seco.** Durante este tipo de rozamiento, la fuerza de rozamiento surge no sólo al deslizarse una superficie por otra, sino también si intentamos provocar semejante deslizamiento. En este último caso, ella recibe el nombre de *fuerza de rozamiento en reposo*. Examinemos dos cuerpos en contacto 1 y 2, el segundo de los cuales está inmóvil (fig. 15.1). El cuerpo 1 se aprieta contra el cuer-

po 2 con una fuerza  $F_n$ , dirigida por la normal a la superficie de contacto de los cuerpos y que se llama *fuerza de presión normal*. Ésta puede ser condicionada por el peso del cuerpo o por otras causas. Intentemos desplazar el cuerpo 1 aplicando sobre él la fuerza externa  $F$ . En tal caso, descubriremos que para cada par concreto de cuerpos y para cada valor de la fuerza de presión normal, existe un valor mínimo  $F_0$  de la fuerza  $F$ , con la que el cuerpo 1 podrá ser puesto en movimiento. Para valores de la fuerza externa situados en los márgenes  $0 < F < F_0$  el cuerpo queda en reposo. Según la segunda ley de Newton, esto es posible si la fuerza  $F$  se equilibra por una fuerza igual a ella en magnitud y de dirección opuesta, que, precisamente, es la fuerza de rozamiento  $F_{roz}$  (véase la fig. 15.1). De forma automática<sup>1)</sup>, ésta toma un valor igual a la magnitud de la fuerza externa  $F$  (a condición de que ésta no supere  $F_0$ ). La magnitud de  $F_0$  es el valor máximo de la fuerza de rozamiento en reposo.

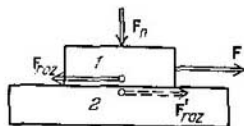


Fig. 15.1

Señalemos que en concordancia con la tercera ley de Newton, sobre el cuerpo 2 actúa también la fuerza de rozamiento en reposo  $F'_{roz}$  (en la fig. 15.1 se muestra con una flecha a trazos) igual en magnitud a  $F_{roz}$ , pero de dirección opuesta.

Si la fuerza externa  $F$  supera en módulo a  $F_0$ , el cuerpo comienza a deslizarse, con la particularidad de que su aceleración se determina por la resultante de dos fuerzas: la fuerza externa  $F$  y la de rozamiento  $F_{roz}$ , cuya magnitud, en mayor o menor grado, depende de la velocidad de deslizamiento. El carácter de esta dependencia es determinado por la naturaleza y el estado de las superficies en rozamiento. En la fig. 15.2 se muestra el tipo de dependencia entre la fuerza de rozamiento y la velocidad, con la que se tropieza con mayor frecuencia. La gráfica abarca tanto el caso de reposo, como el de deslizamiento. Como ya hemos indicado, la fuerza de rozamiento puede tener valores desde cero hasta  $F_0$ , lo que en la gráfica se muestra con un segmento vertical. De acuerdo con la gráfica en la fig. 15.2, al aumentar la velocidad, al principio la fuerza de rozamiento disminuye un poco y después, comienza a crecer.

Maquinando de modo especial las superficies en contacto, la fuerza de rozamiento de deslizamiento puede, prácticamente, no depender de la velocidad. En tal caso, el sector curvilíneo de la gráfica en la fig. 15.2 se convierte en el segmento de una recta horizontal que comienza en el punto  $F_0$ .

<sup>1)</sup> Esto transcurre de forma semejante a cómo un muelle, bajo la acción de la fuerza de tracción, adquiere automáticamente tal alargamiento con el que la fuerza elástica se equilibra con la fuerza externa.

Las leyes del rozamiento seco se reducen a lo siguiente: la fuerza máxima de rozamiento en reposo, así como la fuerza de rozamiento de deslizamiento, no dependen del área de la superficie en rozamiento y resultan ser, aproximadamente, proporcionales al valor de la fuerza de presión normal, que aprieta las superficies entre sí:

$$F_{\text{roz}} = kF_n. \quad (15.1)$$

El coeficiente adimensional de proporcionalidad  $k$ , recibe el nombre de *coeficiente de rozamiento* (correspondientemente en reposo o de deslizamiento), que depende de la naturaleza y el estado de las superficies en rozamiento, en particular de su rugosidad. Para el deslizamiento, el coeficiente de rozamiento es función de la velocidad.

Las fuerzas de rozamiento desempeñan un importante papel en la naturaleza. En nuestra vida cotidiana, el rozamiento es con frecuencia útil. Recordemos con qué enormes dificultades tropiezan los transeúntes y el transporte al estar el pavimento helado, es decir, cuando el rozamiento entre éste y las suelas de los peatones y las ruedas del transporte disminuye de forma considerable. Si no hubiera fuerzas de rozamiento, los muebles tendrían que ser fijados en el suelo, como en los barcos durante el cuneo, ya que con la menor falta de horizontalidad del suelo se deslizarían en la dirección de la inclinación. El propio lector puede ofrecer ejemplos análogos.

En muchos casos, el papel del rozamiento es en extremo negativo y se necesita tomar medidas para reducirlo en la medida de lo posible. Éste es el problema del rozamiento en los rodamientos o entre el casquillo de la rueda y el eje.

El procedimiento más radical para disminuir las fuerzas de rozamiento es la sustitución del rozamiento de deslizamiento por el de rodadura, que surge, por ejemplo, entre un cuerpo cilíndrico o esférico y la superficie por la que rueda. El rozamiento de rodadura, desde el punto de vista formal, se supedita a las mismas leyes que el de deslizamiento, pero aquí el coeficiente de rodadura resulta ser mucho menor.

**Rozamiento viscoso y resistencia del medio.** Para el rozamiento viscoso (o de viscosidad), a diferencia del seco, es característico que la fuerza de rozamiento viscoso se reduce a cero junto con la velocidad. Por esta causa, por muy pequeña que sea la fuerza externa, ésta puede comunicar velocidad relativa a las capas de un medio viscoso. Las leyes a las que se subordinan las fuerzas de rozamiento entre las capas del medio, serán examinadas en el capítulo dedicado a la mecánica de los líquidos.



Fig. 15.2

En este párrafo nos vamos a limitar al examen de las fuerzas de rozamiento entre un sólido y un medio viscoso (líquido o gaseoso). Hay que tener en cuenta que además de las propias fuerzas de rozamiento, cuando por un medio líquido o gaseoso se mueven sólidos, surgen las llamadas *fuerzas de resistencia del medio*, que son mucho mayores que las de rozamiento. Como no tenemos la posibilidad de analizar con detalle la causa de surgimiento de estas fuerzas, vamos a limitarnos a exponer las regularidades a las que se supeditan conjuntamente las fuerzas de rozamiento y las de resistencia del medio, llamando de modo convencional la fuerza sumaria, fuerza de rozamiento. La dependencia de esta fuerza de la velocidad se muestra en la fig. 15.3.

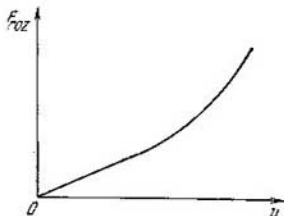


Fig. 15.3

A pequeñas velocidades, la fuerza crece linealmente con la velocidad:

$$\mathbf{F}_{\text{roz}} = -k_1 \mathbf{v} \quad (15.2)$$

(el signo menos significa que esta fuerza está dirigida en sentido opuesto a la velocidad). El valor del coeficiente  $k_1$  depende de la forma y las dimensiones del cuerpo, el estado de su superficie y de la propiedad

del medio llamada viscosidad. Por ejemplo, para la glicerina este coeficiente es mucho mayor que para el agua.

A grandes velocidades, la ley lineal se convierte en cuadrática, es decir, la fuerza comienza a crecer de forma proporcional al cuadrado de la velocidad:

$$\mathbf{F}_{\text{roz}} = -k_2 v^2 \mathbf{e}_v \quad (15.3)$$

( $\mathbf{e}_v$  es el versor de la velocidad). El valor del coeficiente  $k_2$  depende de las dimensiones y la forma del cuerpo.

El valor de la velocidad con el que la ley (15.2) se convierte en la (15.3) depende de la forma y las dimensiones del cuerpo, así como de las propiedades de viscosidad y la densidad del medio.

## § 16. Fuerza de gravedad y peso

A causa del efecto de la fuerza de atracción de la Tierra, todos los cuerpos caen con la misma aceleración con relación a la superficie terrestre. Dicha aceleración se designa con la letra  $g$ . Esto quiere decir, que en un sistema de referencia ligado con nuestro planeta, sobre todo cuerpo de masa  $m$  actúa una fuerza

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}, \quad (16.1)$$

llamada *fuerza de gravedad*<sup>1)</sup>. Cuando respecto de la Tierra el cuerpo está en reposo, la fuerza  $P$  se equilibra por la reacción<sup>2)</sup>  $F_r$  de la suspensión o del apoyo que impide que el cuerpo caiga ( $F_r = -P$ ). Según la tercera ley de Newton, en este caso, el cuerpo actúa sobre la suspensión o el apoyo con la fuerza  $G$ , igual a  $-F_r$ , o sea, con la fuerza

$$G = P = mg.$$

La fuerza  $G$ , con la que el cuerpo actúa sobre la suspensión o el apoyo, recibe el nombre de *peso del cuerpo*. Esta fuerza es igual a  $mg$  sólo cuando el cuerpo o el apoyo (o la suspensión) están inmóviles

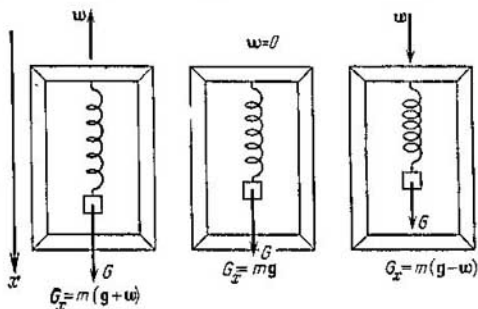


Fig. 16.1

con relación a la Tierra. Si ellas están en movimiento con cierta aceleración  $w$ , el peso  $G$  no será igual a  $mg$ . El siguiente ejemplo nos aclara este fenómeno. Sea que la suspensión en forma de un muelle fijado en una armazón está en movimiento junto con el cuerpo con una aceleración  $w$  (fig. 16.1). Aquí la ecuación de movimiento del cuerpo tendrá el aspecto

$$P + F_r = mw, \tag{16.2}$$

donde  $F_r$  es la reacción de la suspensión, es decir, la fuerza con la que el muelle actúa sobre el cuerpo. De acuerdo con la tercera ley de Newton, el cuerpo actúa sobre el muelle con una fuerza igual a  $-F_r$ , que por definición es el peso del cuerpo  $G$  en semejantes condiciones. Sustituyendo en (16.2) la reacción  $F_r$  por la fuerza  $-G$  y la fuerza de gravedad  $P$ , por el producto  $mg$ , obtenemos:

$$G = m(g - w). \tag{16.3}$$

<sup>1)</sup> Por ser no inercial el sistema de referencia ligado con la Tierra, la fuerza de gravedad se diferencia un poco de la fuerza con la que el cuerpo se atrae por la Tierra. En el § 33 esta cuestión se examinará con más detalle.

<sup>2)</sup> Llámense reacciones las fuerzas con las que el cuerpo dado actúa sobre los cuerpos que limitan su movimiento.

La fórmula (16.3) define el peso del cuerpo en el caso general. Es válida para la suspensión o el apoyo de cualquier tipo.

Supongamos que el cuerpo y la suspensión se mueven en dirección vertical (la fig. 16.1 se ha confeccionado partiendo de esta suposición).

Proyectemos (16.3) sobre la dirección de la suspensión:

$$G = m (g \pm w). \quad (16.4)$$

En esta expresión  $G$ ,  $g$  y  $w$  son los módulos de los correspondientes vectores. El signo «+» corresponde a  $w$  dirigida hacia arriba y «-», a la dirección hacia abajo.

De la fórmula (16.4) se desprende que por su módulo, el peso  $G$  puede ser mayor o menor que la fuerza de gravedad  $P$ . Durante la caída libre de la armazón con la suspensión  $w = g$  y la fuerza  $G$ , con la que el cuerpo actúa sobre la suspensión, es igual a cero. Comienza el estado de ingravidez. Una nave cósmica que vuela alrededor de la Tierra con los motores desconectados, se mueve como una armazón que cae libremente con aceleración  $g$ , por lo que los cuerpos dentro de la nave se hallan en estado de ingravidez, no ejercen presión sobre los cuerpos que hacen contacto con ellos.

Hay que señalar, que con frecuencia se confunde la fuerza de gravedad  $P$  con el peso del cuerpo  $G$ . Esto está condicionado por el hecho de que al tratarse de un apoyo inmóvil, las fuerzas  $P$  y  $G$  coinciden en magnitud y dirección (las dos son iguales a  $mg$ ). Sin embargo, hay que tener en cuenta que estas fuerzas están aplicadas a distintos cuerpos:  $P$ , al propio cuerpo,  $G$  actúa sobre la suspensión o el apoyo que limita el movimiento libre del cuerpo en el campo de fuerzas de la atracción terrestre. Además, la fuerza  $P$  siempre es igual a  $mg$ , sin depender esto de si el cuerpo está en movimiento o en reposo, en tanto que el peso  $G$  es función de la aceleración con la que se mueve el apoyo y el cuerpo, con la singularidad de que puede ser mayor o menor que  $mg$ , en particular, con el estado de ingravidez, se reduce a cero.

La correlación (16.3) entre la masa y el peso del cuerpo nos proporciona el método de comparación de las masas de los cuerpos mediante su pesaje, es decir, la razón de los pesos de los cuerpos determinados a iguales condiciones (por regla  $w = 0$ ) en un mismo punto de la superficie terrestre, es igual a la razón de las masas de dichos cuerpos:

$$G_1 : G_2 : G_3 : \dots = m_1 : m_2 : m_3 : \dots$$

Como mostraremos en el § 33, la aceleración de la caída libre  $g$  y la fuerza de gravedad  $P$  dependen de la latitud del lugar. Además,  $P$  y  $g$  también dependen de la altura sobre el nivel del mar: al alejarse del centro de la Tierra, estas magnitudes disminuyen.



## § 17. Aplicación práctica de las leyes de Newton

Para confeccionar la ecuación de movimiento es preciso, ante todo, establecer qué fuerzas actúan sobre el cuerpo. Con ello, hay que aclarar el efecto de qué cuerpos sobre el cuerpo dado hay que tomar en consideración. Por ejemplo, para un cuerpo que se desliza por un plano inclinado (fig. 17.1) es sustancial el efecto por parte de la Tierra (caracterizado por la fuerza  $mg$ ) y el influjo que ejerce el plano (caracterizado por la reacción  $F_r$ ).

De ninguna manera hay que tener en cuenta las fuerzas «motrices», de «rodadura», «centrípetas», «centrífugas»<sup>1)</sup> y otras semejantes. Para no sufrir errores, hay que caracterizar las fuerzas no por el efecto que ellas producen, sino por la «fuente» que provoca su aparición. Esto quiere decir, que a espaldas de cada fuerza hay que discernir el cuerpo que condiciona dicha fuerza. En semejante caso será imposible caer en el error típico que consiste en que una misma fuerza se toma en consideración dos veces, pero con diferentes denominaciones.

En el ejemplo que hemos examinado (véase la fig. 17.1) es ventajoso descomponer la fuerza de reacción  $F_r$  en dos componentes, es decir, en la fuerza de la presión normal  $F_n$  y en la fuerza de rozamiento  $F_{roz}$ . En particular, esto es útil ya que la fuerza de rozamiento es proporcional al módulo de la fuerza  $F_n$  (véase (15.1)).

Determinadas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, se confecciona la ecuación de la segunda ley de Newton. En nuestro ejemplo, tendrá el aspecto:

$$mw = mg + F_r = mg + F_n + F_{roz}. \quad (17.1)$$

Para realizar los cálculos hay que pasar de los vectores a sus proyecciones sobre las direcciones elegidas correspondientemente. En tal caso, se hace uso de las siguientes propiedades de las proyecciones:

- 1) las proyecciones de iguales vectores son también iguales;
- 2) la proyección de un vector obtenido por la multiplicación de otro vector por un escalar, es igual al producto de la proyección del segundo vector por el escalar;
- 3) la proyección de una suma de vectores es igual a la suma de las proyecciones de los vectores que se suman (véase (2.8)).

Proyectemos los vectores que entran en la ecuación (17.1) sobre

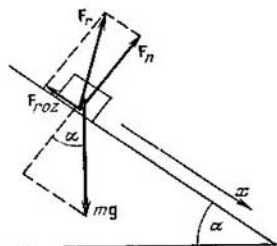


Fig. 17.1

<sup>1)</sup> Esto no se refiere al término «fuerza centrífuga de inercia» (véase el § 33).

la dirección  $x$ , indicada en la fig. 17.1. Las proyecciones de los vectores son iguales:  $w_x = w$  ( $w$  es el módulo del vector  $w$ ),  $g_x = g \operatorname{sen} \alpha$ ,  $F_{n_x} = 0$ ,  $F_{\operatorname{roz} x} = -kF_n = -kmg \cos \alpha$ . Así, llegamos a la ecuación

$$mw = mg \operatorname{sen} \alpha - kmg \cos \alpha,$$

de la cual es fácil hallar  $w$ .

En casos más complicados hay que proyectar los vectores sobre varias direcciones y resolver un sistema de ecuaciones algebraicas o diferenciales.

## CAPÍTULO III

# PRINCIPIOS DE CONSERVACIÓN

### § 18. Magnitudes que se conservan

Los cuerpos que forman un sistema mecánico pueden interactuar tanto entre sí, como con los cuerpos que no pertenecen al sistema dado. Por este motivo, es posible dividir las fuerzas que actúan sobre los cuerpos del sistema en *internas* y *externas*. Vamos a denominar internas aquellas fuerzas con las que actúan sobre el cuerpo dado los demás cuerpos del sistema y externas, las que están condicionadas por el influjo de cuerpos que no pertenecen al sistema. Cuando no hay fuerzas externas el sistema recibe el nombre de *cerrado*.

Para los sistemas cerrados hay tales funciones de las coordenadas y las velocidades de las partículas<sup>1)</sup> que forman el sistema, que durante el movimiento conservan valores constantes. Dichas funciones denominanse *integrales de movimiento*.

Para un sistema de  $N$  partículas, entre las que no hay enlaces rígidos, se pueden crear  $6N - 1$  integrales de movimiento. Pero a nosotros sólo nos interesan aquellas que poseen la propiedad de aditividad. Esta propiedad consiste en que el valor de la integral de movimiento para un sistema en el que la interacción entre sus partes puede ser despreciada, es igual a la suma de los valores para cada una de las partes por separado. Hay tres integrales de movimiento aditivas: una de ellas se llama *energía*, la segunda, *cantidad de movimiento* y la tercera, *momento de la cantidad de movimiento*.

Así, pues, para los sistemas cerrados quedan constantes (se conservan) tres magnitudes físicas: la energía, la cantidad de movimiento y el momento de la cantidad de movimiento. En correspondencia con lo dicho, existen tres *principios de conservación*: el principio de la conservación de la energía, el principio de la conservación de la cantidad de movimiento y el principio de la conservación del momento de la cantidad de movimiento. Estos principios están estrechamente ligados con las propiedades básicas del espacio y el tiempo.

La conservación de la energía se basa en la *homogeneidad del tiempo*, es decir, en la equivalencia de todos los momentos de tiempo. Debemos entender la equivalencia en el sentido de que la sustitución del momento de tiempo  $t_1$  por el momento  $t_2$ , sin variación de los valores de las coordenadas y las velocidades de las partículas, no hará cambiar las propiedades mecánicas del sistema. Esto significa, que después de realizar la indicada sustitución, las coordenadas y la

<sup>1)</sup> Recordemos que, para mayor brevedad, llamamos partícula un punto material.

velocidad de las partículas tienen en cualquier momento de tiempo  $t_2 + t$  los mismos valores que los que tendrían antes de la sustitución, en el momento  $t_1 + t$ .

La conservación de la cantidad de movimiento está basada en la *homogeneidad del espacio*, es decir, en la identidad de las propiedades del espacio en cada uno de sus puntos. La identidad debe ser entendida en el sentido de que la traslación paralela del sistema cerrado de un lugar del espacio a otro, sin variar la disposición mutua y las velocidades de las partículas, no cambia las propiedades mecánicas del sistema (se supone que en el nuevo lugar no se viola el carácter cerrado del sistema).

Por fin, la conservación del momento de la cantidad de movimiento se basa en la *isotropía del espacio*, o sea, en la identidad de las propiedades del espacio en todas las direcciones. La identidad debe ser entendida en el sentido de que el giro del sistema cerrado como un todo no se refleja en sus propiedades mecánicas.

Los principios de conservación es un potente medio de investigaciones. Sucede con frecuencia que la solución precisa de las ecuaciones de movimiento es en extremo complicada. En semejantes casos, con ayuda de los principios de la conservación, sin resolver las ecuaciones de movimiento, es posible obtener una serie de importantes datos acerca del transcurso de los fenómenos mecánicos. Los principios de la conservación no dependen del carácter de las fuerzas que actúan. Por esta razón, con su ayuda es posible obtener una serie de importantes datos sobre el comportamiento de los sistemas mecánicos, incluso en aquellos casos cuando no son conocidas las fuerzas.

En los siguientes párrafos de las ecuaciones de Newton obtendremos los principios de la conservación. Sin embargo, hay que tener en cuenta que estos últimos son mucho más generales de las leyes de Newton. Los principios de conservación son rigurosamente justos incluso cuando las leyes de Newton (en particular, la tercera ley) sufren violaciones. Hay que señalar, que los principios de conservación de la energía, cantidad de movimiento y el momento de la cantidad de movimiento son principios precisos que también se cumplen con rigor en la región relativista.

## § 19. Energía cinética

Comencemos la determinación de las integrales aditivas de movimiento. Para empezar, examinemos el más sencillo sistema, compuesto de una sola partícula (punto material).

Escribamos la ecuación de movimiento de la partícula:

$$m\dot{v} = F. \quad (19.1)$$

Aquí  $F$  es la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula. Si multiplicamos la ecuación (19.1) por el desplazamiento de la partícula  $ds = v dt$ , obtenemos:

$$mv \dot{v} dt = F ds. \quad (19.2)$$

El producto  $\dot{v} dt$  es el incremento de la velocidad de la partícula  $dv$  durante el tiempo  $dt$ . Correspondientemente

$$mv \dot{v} dt = mv dv = m d\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \quad (19.3)$$

(véase (2.54)). Realizando semejante sustitución en (19.2), llegamos a la correlación

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F ds. \quad (19.4)$$

Si el sistema es cerrado, o sea,  $F = 0$ ,  $d(mv^2/2) = 0$ , mientras que la propia magnitud

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad (19.5)$$

queda constante. Esta magnitud recibe el nombre de *energía cinética* de la partícula. En el caso de una partícula aislada, dicha energía es la integral de movimiento<sup>1)</sup>.

Multiplicando por  $m$  el numerador y denominador de la expresión (19.5) y tomando en consideración que el producto  $mv$  es igual a la cantidad de movimiento  $p$  del cuerpo, la expresión para la energía cinética puede tomar el aspecto:

$$T = \frac{p^2}{2m}. \quad (19.6)$$

Si sobre la partícula actúa la fuerza  $F$ , la energía cinética no queda constante. De acuerdo con (19.4), el incremento de la energía cinética de la partícula durante el tiempo  $dt$  es igual al producto escalar  $F ds$  ( $ds$  es el desplazamiento de la partícula en el transcurso del tiempo  $dt$ ). La magnitud

$$dA = F ds \quad (19.7)$$

denomínase *trabajo*, realizado por la fuerza  $F$  por el recorrido  $ds$  ( $ds$  es el módulo del desplazamiento  $ds$ ). Podemos representar el producto escalar (19.7) en forma del producto de la proyección de la fuerza sobre la dirección del desplazamiento  $F_s$  y del recorrido elemental  $ds$ . Por lo tanto, es justo escribir que

$$dA = F_s ds. \quad (19.8)$$

<sup>1)</sup> En el caso de una partícula aislada, cualquier grado de velocidad queda constante. No obstante, cuando se trata de un sistema de varias partículas en interacción, precisamente las magnitudes de la forma (19.5) son los sumandos de la integral aditiva de movimiento.

De lo dicho queda claro que el trabajo caracteriza la variación de la energía condicionada por la acción de la fuerza sobre la partícula en movimiento.

Integremos la correlación (19.4) a lo largo de cierta trayectoria desde el punto 1 hasta el punto 2:

$$\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

El primer miembro es la diferencia entre los valores de la energía cinética en los puntos 2 y 1, es decir, el incremento<sup>1)</sup> de la energía cinética por el recorrido 1-2. Si tomamos esto en cuenta obtenemos:

$$T_2 - T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (19.9)$$

La magnitud

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 F_s ds \quad (19.10)$$

es el trabajo de la fuerza  $\mathbf{F}$  por el recorrido 1-2. En ciertas ocasiones, designaremos dicho trabajo con el símbolo  $A_{12}$  en vez de  $A$ .

Así, pues, el trabajo de la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, se consume en el incremento de la energía cinética de la partícula:

$$A_{12} = T_2 - T_1. \quad (19.11)$$

De (19.11) se desprende que la dimensión de la energía es la misma que la del trabajo. De acuerdo con esto, la energía se mide en las mismas unidades que el trabajo (véase el párrafo siguiente).

## § 20. Trabajo

Examinemos con mayor detalle la magnitud llamada trabajo. La expresión (19.7) puede ser escrita en la forma que sigue:

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F \cos \alpha \cdot ds, \quad (20.1)$$

<sup>1)</sup> La variación de toda magnitud  $a$  puede caracterizarse bien por su incremento, o bien por su decrecimiento. El incremento de la magnitud  $a$ , que designaremos por  $\Delta a$ , se llama la diferencia entre los valores final ( $a_2$ ) e inicial ( $a_1$ ) de dichas magnitudes:

$$\text{incremento} = \Delta a = a_2 - a_1.$$

El decrecimiento de la magnitud  $a$  se llama la diferencia de sus valores inicial ( $a_1$ ) y final ( $a_2$ )

$$\text{decrecimiento} = a_1 - a_2 = -\Delta a.$$

El decrecimiento de una magnitud es igual a su incremento con signo opuesto. El incremento y decrecimiento son magnitudes algebraicas.

donde  $\alpha$  es el ángulo entre la dirección de la fuerza y la dirección de desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza.

Si la fuerza y la dirección de desplazamiento forman un ángulo agudo ( $\cos \alpha > 0$ ), el trabajo es positivo. Si el ángulo  $\alpha$  es obtuso ( $\cos \alpha < 0$ ), el trabajo es negativo. El trabajo es igual a cero si  $\alpha = \pi/2$ . Esta última circunstancia muestra con gran claridad que la noción de trabajo en mecánica de manera sustancial se diferencia del concepto habitual de trabajo. Desde este punto de vista, todo esfuerzo, en particular la tensión muscular, se acompaña siempre de la realización de trabajo. Por ejemplo, un maletero para sujetar una carga pesada quedando inmóvil y más aún para desplazar esta carga por un camino horizontal, consume considerables esfuerzos, es decir, «realiza trabajo». No obstante, en estos casos el trabajo, como magnitud mecánica, es igual a cero.

En la fig. 20.1 se muestra la gráfica de proyección de una fuerza sobre la dirección de desplazamiento  $F_s$  como función de la posición de la partícula por la trayectoria (podemos denominar el eje de abscisas eje  $s$ ; la longitud del segmento entre los puntos 1 y 2 es igual a la longitud total del recorrido). Como vemos en la figura, el trabajo elemental  $dA = F_s ds$  es numéricamente igual al área de la franja sombreada, mientras que el trabajo  $A$  por el recorrido 1—2 es igual numéricamente al área de la figura limitada por la curva  $F_s$ , las líneas verticales 1 y 2 y el eje  $s$  (comp. con la fig. 3.7).

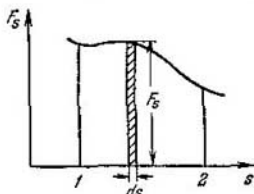


Fig. 20.1

Hagamos uso de este resultado para determinar el trabajo que se realiza al deformarse un muelle que se subordina a la ley de Hooke (véase la fig. 14.2 y la fórmula (14.2)). Comencemos por el alargamiento del muelle. Realicemos el alargamiento con gran lentitud, con el fin de que la fuerza  $F_{\text{ext}}$ , con la que actuamos sobre el muelle, pueda ser siempre considerada igual en magnitud a la fuerza elástica  $F_{\text{elás}}$ . Entonces,  $F_{x \text{ ext}} = -F_{x \text{ elás}} = kx$ , donde  $x$  es el alargamiento del muelle (fig. 20.2). Como vemos en la figura, el trabajo que hay que efectuar para provocar el alargamiento  $x$  del muelle es igual a

$$A = \frac{kx^2}{2}. \quad (20.2)$$

Al comprimir el muelle en la magnitud  $x$ , se efectúa un trabajo igual en magnitud y del mismo signo que al alargarlo en la magnitud  $x$ . La proyección de la fuerza  $F_{\text{ext}}$  es en este caso negativa. ( $F_{\text{ext}}$  está dirigida a la izquierda,  $x$  crece hacia la derecha, véase la fig. 20.2), todas las  $dx$  son también negativas, por lo que el producto  $F_{x \text{ ext}} dx$  es positivo.

Del mismo modo podemos hallar la expresión para el trabajo realizado durante el alargamiento o compresión elásticos de una barra. De acuerdo con la fórmula (14.7) este trabajo es igual a

$$A = \frac{1}{2} \frac{ES}{l_0} (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} ES l_0 \left( \frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 = \frac{1}{2} EV \varepsilon^2. \quad (20.3)$$

donde  $V = S l_0$  es el volumen de la barra,  $\varepsilon = \Delta l / l_0$ , el alargamiento relativo (véase (14.3)).

Sea que sobre un cuerpo actúan simultáneamente varias fuerzas, cuya resultante es igual a  $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$ . De la distributividad de un

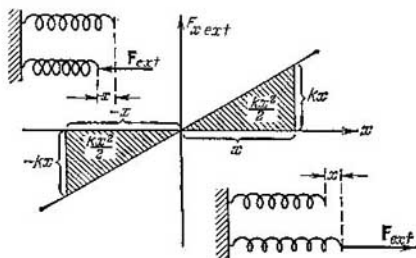


Fig. 20.2

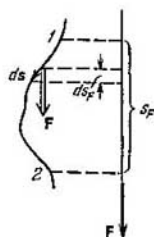


Fig. 20.3

producto escalar de vectores (véase (2.22)) se desprende que el trabajo  $dA$  realizado por la fuerza resultante por el recorrido  $ds$ , puede ser representado en la forma

$$dA = \left( \sum_i \mathbf{F}_i \right) ds = \sum_i \mathbf{F}_i ds = \sum_i dA_i. \quad (20.4)$$

Esto significa que el trabajo de la resultante de varias fuerzas es igual a la suma algebraica de los trabajos ejecutados por cada fuerza aislada.

El desplazamiento elemental  $ds$  puede ser representado como  $\mathbf{v} dt$ . Por esto, la expresión para el trabajo elemental puede tomar el aspecto

$$dA = \mathbf{F} \mathbf{v} dt. \quad (20.5)$$

Entonces, el trabajo efectuado en el intervalo de tiempo entre  $t_1$  y  $t_2$  se puede calcular por la fórmula

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \mathbf{v} dt. \quad (20.6)$$

En correspondencia con (2.21)  $\mathbf{F} ds = F ds_F$ , donde  $ds_F$  es la proyección del desplazamiento elemental  $ds$  por la dirección de la



fuerza  $F$ . Por lo tanto, la fórmula para el trabajo puede escribirse de la manera siguiente:

$$dA = F ds_F. \quad (20.7)$$

Si la fuerza tiene magnitud y dirección constantes (fig. 20.3), el vector  $F$  puede ser extraído tras el signo de la integral en la expresión para el trabajo, como resultado obtenemos la fórmula

$$A = F \int_1^2 ds = Fs = Fs_F, \quad (20.8)$$

donde  $s$  es el vector de desplazamiento del punto 1 al punto 2, mientras que  $s_F$ , su proyección sobre la dirección de la fuerza.

El trabajo que se realiza por la unidad de tiempo recibe el nombre de *potencia*. Si durante el tiempo  $dt$  se ejecuta el trabajo  $dA$ , la potencia será igual a

$$P = \frac{dA}{dt}. \quad (20.9)$$

Tomando  $dA$  en la forma (20.5) obtenemos para la potencia la expresión

$$P = Fv, \quad (20.10)$$

de acuerdo con lo cual, la potencia es igual al producto escalar del vector de fuerza por el vector de velocidad, a la que el punto de aplicación de la fuerza se mueve.

**Unidades de trabajo y de fuerza.** En calidad de unidad de trabajo se emplea el trabajo realizado por una fuerza igual a la unidad, que actúa en la dirección del desplazamiento, por un recorrido igual a uno. De acuerdo con esto:

1) en el SI la unidad de trabajo es el julio (J), igual al trabajo efectuado por una fuerza igual a 1 N por un recorrido igual a 1 m;

2) en el sistema CGS, el ergio (erg), igual al trabajo que realiza una fuerza igual a 1 dina (dyn) por un recorrido de 1 cm;

3) en el sistema MkgfS, el kilogramo-fuerza-metro (kgf·m) igual al trabajo realizado por una fuerza igual a 1 kgf por un recorrido de 1 m.

En las unidades de trabajo hay las siguientes correlaciones

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 10^5 \text{ dyn} \cdot 10^2 \text{ cm} = 10^7 \text{ erg};$$

$$1 \text{ kgf} \cdot \text{m} = 1 \text{ kgf} \cdot 1 \text{ m} = 9,81 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 9,81 \text{ J}.$$

Por unidad de potencia tomamos una potencia con la que por la unidad de tiempo se realiza un trabajo igual a la unidad. En el SI la unidad de potencia es el vatio (W), igual a un julio por segundo (J/s). En el sistema CGS (erg/s) ésta no tiene denominación especial.

La correlación entre vatio y erg/s:

$$1 \text{ W} = 10^7 \text{ erg/s.}$$

En el sistema MkgfS la unidad de potencia es el caballo de vapor (CV) igual a 75 kilogramos-fuerza-metros por segundo,  $1 \text{ CV} = 736 \text{ W}$ .

Además de las unidades de medida indicadas se hace uso de unidades múltiples y fraccionarias. Sus denominaciones y designaciones se forman de la denominación y designación de la unidad fundamental y de los prefijos indicados en la tabla 20.1. En ella se aducen también

Tabla 20.1. Denominaciones y designaciones de los prefijos que se emplean para formar las unidades múltiples y fraccionarias

Denominación	Designación	Factor	Denominación	Designación	Factor
tera	T	$10^{12}$	centi	c	$10^{-2}$
giga	G	$10^9$	mili	m	$10^{-3}$
mega	M	$10^6$	micro	$\mu$	$10^{-6}$
kilo	k	$10^3$	nano	n	$10^{-9}$
hecto	h	$10^2$	pico	p	$10^{-12}$
deca	da	$10^1$	femto	f	$10^{-15}$
deci	d	$10^{-1}$	atto	a	$10^{-18}$

los factores, por medio de los cuales las correspondientes unidades múltiples y fraccionarias se forman de las fundamentales.

Por ejemplo, la unidad de trabajo, llamada megajulio es equivalente a  $10^6$  julios ( $1 \text{ MJ} = 10^6 \text{ J}$ ), mientras que la unidad de potencia, llamada microvatio es equivalente a  $10^{-6}$  vatios ( $1 \mu\text{W} = 10^{-6} \text{ W}$ ). De modo análogo:  $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$ ,  $1 \text{ pN} = 10^{-12} \text{ N}$ .

## § 21. Fuerzas conservativas

Si en cada punto del espacio la partícula sufre la acción de otros cuerpos, se dice que dicha partícula se encuentra en un campo de fuerzas. Por ejemplo, una partícula en las proximidades de la superficie terrestre se halla en el campo de las fuerzas de gravedad: en cada punto del espacio sobre ella actúa una fuerza  $\mathbf{P} = mg$ .

Como segundo ejemplo, examinemos la partícula cargada  $e$ , que se encuentra en el campo eléctrico excitado por la carga puntual inmóvil  $q$  (fig. 21.1). Semejante campo es característico a causa de que la dirección de la fuerza que actúa sobre la partícula en cualquier punto del espacio, pasa por el centro inmóvil (carga  $q$ ), mientras que la magnitud de la fuerza sólo depende de la distancia hasta dicho centro:  $F = F(r)$  (véase la fórmula (13.1)). Recibe el nombre de *central*, un campo de fuerza que posee las enumeradas propiedades.

Llamamos *homogéneo* el campo en todos los puntos del cual las fuerzas que actúan sobre la partícula son iguales en magnitud y dirección ( $F = \text{const.}$ ).

Un campo que varía con el tiempo denomínase *no estacionario*, mientras que el que queda invariable con el tiempo, *estacionario*.

Puede resultar que para el campo estacionario, el trabajo que sobre la partícula realizan las fuerzas del campo, sólo depende de las posiciones inicial y final de la partícula y no es función del recorrido por el que se mueve la partícula. Las fuerzas que poseen semejante propiedad se llaman *conservativas*.

De la independencia del trabajo de las fuerzas conservativas del recorrido se desprende que el trabajo de semejantes fuerzas por un

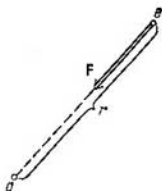


Fig. 21.1

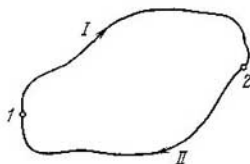


Fig. 21.2

recorrido cerrado es igual a cero. Para demostrarlo, dividamos en dos partes un recorrido cerrado, tomado al azar: el recorrido *I*, por el que la partícula pasa del punto *1* al *2* y el recorrido *II*, por el que el cuerpo pasa del punto *2* al *1*, con la particularidad de que los puntos *1* y *2* se eligen de modo arbitrario (fig. 21.2). Por todo el recorrido cerrado, el trabajo es igual a la suma de los trabajos que se realizan por cada sector:

$$A = (A_{12})_I + (A_{21})_{II}. \quad (21.1)$$

Es fácil comprender que los trabajos  $(A_{21})_{II}$  y  $(A_{12})_I$  sólo se distinguen por el signo. En efecto, la variación de la dirección de movimiento por la opuesta provoca el cambio de  $ds$  por  $-ds$ , a causa de lo cual el valor de la integral  $\int F ds$  varía su signo por el contrario.

De este modo, la igualdad (21.1) puede ser escrita así

$$A = (A_{12})_I - (A_{12})_{II},$$

y, como el trabajo no depende del recorrido, o sea,  $(A_{12}) = (A_{12})_{II}$ , llegamos a la conclusión de que  $A = 0$ .

De la igualdad a cero del trabajo por un recorrido cerrado podemos deducir con facilidad que el trabajo  $A_{12}$  no depende del recorrido. Es posible hacer esto, variando la marcha de racionamientos realizados más arriba.

De esta manera, podemos definir las fuerzas conservativas por dos procedimientos:

1) como fuerzas, cuyo trabajo no depende del recorrido por el que la partícula pasa de una a otra posición;

2) como fuerzas, cuyo trabajo por cualquier recorrido cerrado es igual a cero.

Demostremos que la fuerza de gravedad es conservativa. En cualquier punto dicha fuerza tiene iguales magnitudes y dirección,

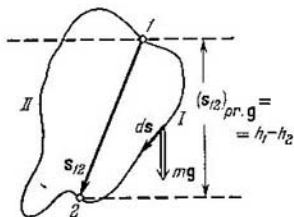


Fig. 21.3

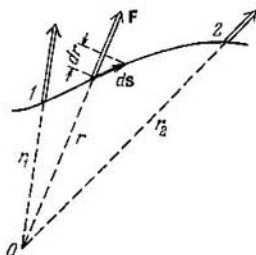


Fig. 21.4

esta última es vertical hacia abajo (fig. 21.3). Por esta razón, independientemente de por cuál de los recorridos (por ejemplo, *I* o bien *II*; véase la figura) se mueve la partícula, el trabajo  $A_{12}$ , según (20.8), es determinado con la expresión

$$A_{12} = mgs_{12} = mg (s_{12})_{pr. g}.$$

En la fig. 21.3 vemos que la proyección del vector  $s_{12}$  sobre la dirección  $g$  es igual a la diferencia de alturas  $h_1 - h_2$ . Por lo tanto, la expresión para el trabajo puede ser escrita

$$A_{12} = mg (h_1 - h_2). \quad (21.2)$$

Es evidente que esta última expresión no depende del recorrido; de aquí se desprende que la fuerza de gravedad es conservativa.

Es fácil darse cuenta de que igual resultado será obtenido para todo campo estacionario homogéneo.

Las fuerzas que actúan sobre la partícula en un campo central, también son conservativas. De acuerdo con la fórmula (20.7), el trabajo elemental por el recorrido  $ds$  (fig. 21.4) es igual a

$$dA = F(r)ds_F$$

Pero la proyección de  $ds$  sobre la dirección de la fuerza en el lugar dado, es decir, sobre la dirección del radio vector  $r$ , es igual a  $dr$ , es decir, al incremento de la distancia de la partícula al centro de

fuerzas  $O$ :  $ds_F = dr$ . Por esto,  $dA = F(r) dr$ , mientras que el trabajo por todo el recorrido

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr. \quad (21.3)$$

Esta última expresión sólo depende del tipo de la función  $F(r)$  y de los valores de  $r_1$  y  $r_2$ . De ninguna manera depende del tipo de la trayectoria, de lo que se deduce que la fuerza es conservativa.

Para que el lector no se cree la representación errónea de que toda fuerza que sólo es función de las coordenadas del punto es conservativa, examinemos el siguiente ejemplo. Sea que las componentes de las fuerzas son determinadas por las fórmulas

$$F_x = ay, \quad F_y = -ax, \quad F_z = 0. \quad (21.4)$$

El módulo de nuestra fuerza es igual a  $F = ar$  y ella está dirigida por la tangente a la circunferencia de radio  $r$  (fig. 21.5). En efecto, como sigue de la figura, para una fuerza de semejante magnitud y dirección

$$F_x = ar \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= ar \sin \alpha = ar \frac{y}{r} = ay,$$

$$F_y = ar \cos(\pi - \alpha) = -ar \cos \alpha =$$

$$= -ar \frac{x}{r} = -ax,$$

lo que coincide con los valores de (21.4).

Tenemos un recorrido cerrado en forma de una circunferencia de radio  $r$ , cuyo centro yace en el origen de coordenadas.

El trabajo de la fuerza por tal recorrido

es, por lo visto, igual a  $F \cdot 2\pi r = ar \cdot 2\pi r = 2\pi ar^2$ , es decir, se distingue de cero. Por consiguiente, la fuerza no es conservativa.

Las fuerzas de rozamiento son fuerzas típicamente no conservativas. Como la fuerza de rozamiento  $F$  y la velocidad  $v$  de la partícula tienen direcciones opuestas<sup>1)</sup>, el trabajo de la fuerza de rozamiento en cada sector del recorrido es negativo:

$$dA = \mathbf{F} ds = \mathbf{F}v dt = -Fv dt = -F ds < 0.$$

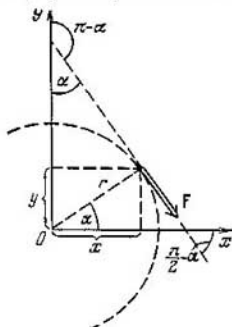


Fig. 21.5

<sup>1)</sup> Aquí se trata del caso de rozamiento entre un cuerpo en movimiento y cuerpos inmóviles (respecto del sistema de referencia). En ciertas ocasiones, el trabajo de la fuerza de rozamiento puede ser positivo. Por ejemplo, esto sucede cuando la fuerza de rozamiento está condicionada por la interacción del cuerpo dado con otro que se mueve en esa misma dirección, pero con mayor velocidad.

Por esta razón, también será negativo (es decir, diferente de cero) el trabajo en todo recorrido cerrado. De aquí sigue que las fuerzas de rozamiento no son conservativas.

Señalemos, que el campo de las fuerzas conservativas es un caso particular de campo potencial de fuerzas. Un campo de fuerzas recibe el nombre de *potencial* si puede ser descrito mediante la función  $\Pi(x, y, z, t)$ , cuyo gradiente (véase el siguiente párrafo, fórmula (22.6)) determina la fuerza en cada punto del campo:  $\mathbf{F} = -\nabla\Pi$  (comp. con (22.7)). La función  $\Pi$  denomínase *función potencial* o bien *potencial*. Cuando el potencial no depende explícitamente de tiempo, es decir,  $\Pi = \Pi(x, y, z)$ , el campo potencial resulta ser estacionario, mientras que sus fuerzas, conservativas. En semejante caso

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z),$$

donde  $U(x, y, z)$  es la energía potencial de la partícula (véase el siguiente párrafo).

Para un campo de fuerzas no estacionario, descrito por el potencial  $\Pi(x, y, z, t)$ , no se pueden identificar las fuerzas potenciales y conservativas.

## § 22. Energía potencial en un campo exterior de fuerzas

Cuando el trabajo de las fuerzas del campo no depende del trayecto, sino que sólo es función de las partículas inicial y final de la partícula, a cada punto del campo se le puede aducir el valor de cierta función  $U(x, y, z)$  tal, que la diferencia de los valores de dicha función en los puntos 1 y 2 determinará el trabajo de las fuerzas cuando la partícula pasa del primer punto al segundo:

$$A_{12} = U_1 - U_2. \quad (22.1)$$

Podemos realizar semejante operación del modo siguiente. Adjudiquemos a cierto punto inicial  $O$  el valor arbitrario de una función igual a  $U_0$ . A todo otro punto  $P$  le aducimos el valor

$$U(P) = U_0 + A_{PO}, \quad (22.2)$$

donde  $A_{PO}$  es el trabajo que las fuerzas conservativas ejecutan sobre la partícula al desplazarse ésta del punto  $P$  al punto  $O$ . Como el trabajo no depende del recorrido, el valor de  $U(P)$  determinado de este modo, será unívoco. Indiquemos que la función  $U(P)$  tiene la dimensión del trabajo (o energía).

De acuerdo con (22.2) los valores de la función en los puntos 1 y 2 son iguales a

$$U_1 = U_0 + A_{1O}; \quad U_2 = U_0 + A_{2O}.$$

Formemos la diferencia de estos valores y tomemos en consideración que  $A_{2O} = -A_{O2}$  (véase el párrafo anterior). Como resultado,

obtenemos

$$U_1 - U_2 = A_{10} - A_{20} = A_{10} + A_{02}.$$

La suma  $A_{10} + A_{02}$  nos ofrece el trabajo realizado por las fuerzas del campo al desplazarse la partícula del punto 1 al punto 2 por una trayectoria que pasa por el punto  $O$ . No obstante, el trabajo que se realiza sobre la partícula durante un desplazamiento del punto 1 al punto 2 por otra cualquier trayectoria (y entre ellas, por las que no pasan por el punto  $O$ ), será el mismo. Por esta razón, la suma  $A_{10} + A_{02}$  puede ser simplemente escrita en la forma  $A_{12}$ . Como resultado obtenemos la correlación (22.1).

Es decir, con ayuda de la función  $U$  es posible determinar el trabajo realizado sobre la partícula por las fuerzas conservativas en cualquier trayecto, que comienza en el punto arbitrario 1 y termina en el punto 2, tomado al azar.

Supongamos que sobre la partícula sólo actúan las fuerzas conservativas. Entonces, el trabajo efectuado sobre la partícula por el recorrido 1-2, puede ser representado en la forma (22.1). De acuerdo con la fórmula (19.11) dicho trabajo se dirige al incremento de la energía cinética de las partículas. Así, pues, llegamos a la igualdad

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2,$$

de la que se desprende, que

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1.$$

El resultado obtenido significa que la magnitud

$$E = T + U \tag{22.3}$$

para una partícula que se encuentra en el campo de las fuerzas conservativas, queda constante, es decir, es la integral de movimiento.

De (22.3) se desprende que  $U$  como sumando entra en la integral de movimiento, teniendo dimensión de energía. Por este motivo, la función  $U(x, y, z)$  recibe el nombre de *energía potencial* de la partícula en el campo exterior de fuerzas. La magnitud  $E$ , igual a la suma de las energías cinética y potencial, se llama *energía total mecánica* de la partícula.

En la correlación (22.1) el trabajo realizado por las fuerzas conservativas sobre una partícula, es igual a la disminución de la energía potencial de dicha partícula. Con otras palabras, podemos decir que el trabajo se ejecuta a cuenta de la reserva de energía potencial.

De (22.2) sigue que la energía potencial es determinada con una precisión hasta cierta constante  $U_0$  aditiva que no conocemos. Sin embargo, esta circunstancia no tiene importancia alguna, ya que en todas las correlaciones físicas entran o la diferencia de los valores de  $U$  con dos posiciones del cuerpo, o bien la derivada de la función  $U$  según las coordenadas. En la práctica, se ha adoptado considerar

igual a cero la energía potencial del cuerpo en cierta posición, mientras que la energía en otras posiciones se toma con relación a la primera.

Conociendo el tipo de función  $U(x, y, z)$  puede ser hallada la fuerza que, en el punto dado del campo, actúa sobre la partícula. Consideremos el desplazamiento  $dx$  de la partícula paralelo al eje  $x$ . Semejante desplazamiento se acompaña por la realización sobre la partícula de un trabajo  $dA = F ds = F_x dx$  (las componentes  $dy$  y  $dz$  del desplazamiento son iguales a cero). De acuerdo con (22.1) un trabajo semejante puede ser expresado como el decrecimiento de la energía potencial:  $dA = -dU$ . Igualando estas dos expresiones para el trabajo, obtenemos

$$F_x dx = -dU.$$

De aquí

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \quad (y = \text{const}, z = \text{const}).$$

El segundo miembro es la derivada de la función  $U(x, y, z)$ , calculada suponiendo que las variables  $y$  y  $z$  quedan invariables y que sólo varía la variable  $x$ . Tales derivadas reciben el nombre de parciales y, a diferencia de las derivadas de funciones de una variable, se designan por el símbolo  $\frac{\partial U}{\partial x}$ . Por consiguiente, la componente de la fuerza por el eje  $x$  es igual a la derivada parcial, tomada con signo opuesto, de la energía potencial según la variable  $x$ :  $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$ . Para las componentes de la fuerza por los ejes  $y$  y  $z$  se obtienen expresiones análogas. Así, pues,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (22.4)$$

Conociendo las componentes, es posible hallar el vector de la fuerza:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (22.5)$$

El vector con componentes  $\partial\varphi/\partial x$ ,  $\partial\varphi/\partial y$ ,  $\partial\varphi/\partial z$ , donde  $\varphi$  es una función escalar de las coordenadas  $x, y, z$  recibe el nombre de *gradiente* de la función  $\varphi$  y se designa por el símbolo

$$\text{grad } \varphi \text{ o bien } \nabla\varphi$$

( $\nabla$  denominase *operador nabla* (o simplemente *nabla*),  $\nabla\varphi$  se lee: «gradiente de  $\varphi$ ). De la definición de gradiente, sigue que

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (22.6)$$

La comparación de (22.5) y (22.6) muestra que la fuerza conservativa es igual al gradiente de la energía potencial, tomado con



signo opuesto:

$$\mathbf{F} = -\nabla U. \quad (22.7)$$

Sea que la partícula, sobre la que actúa la fuerza (22.7), se desplaza por un segmento  $ds$  que tiene las componentes  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Con esto, la fuerza realiza el trabajo

$$dA = \mathbf{F} ds = -\nabla U ds = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right).$$

Si tomamos en consideración que  $dA = -dU$ , para el incremento de la función  $U$  obtenemos la siguiente expresión:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz. \quad (22.8)$$

La expresión del tipo (22.8) recibe el nombre de diferencial completa de la respectiva función.

En física, la noción de diferencial total juega un enorme papel, por lo que le dedicaremos algunas líneas. Recibe el nombre de *diferencial completa* de una función unívoca  $f(x, y, z)$  el incremento que recibe dicha función al pasar de un punto con coordenadas  $x, y, z$  al punto vecino con coordenadas  $x + dx, y + dy, z + dz$ . Por definición, dicho incremento es igual a

$$df(x, y, z) = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z)$$

y, por lo tanto, sólo se determina por los valores de la función en los puntos inicial y final. Por esta causa no puede depender de recorrido por el que transcurre la transición. Como semejante recorrido tomemos la línea quebrada, constituida por los segmentos  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (fig. 22.1). En el segmento  $dx$  la función  $f(x, y, z)$  se comporta como una función de la única variable  $x$  y recibe el incremento  $(\partial f/\partial x) dx$ . De manera análoga, en los segmentos  $dy$  y  $dz$ , la función recibe los incrementos  $(\partial f/\partial y) dy$  y  $(\partial f/\partial z) dz$ . Así, pues, el incremento total de la función al pasar del punto inicial al final es igual a

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (22.9)$$

Hemos llegado a la expresión para la diferencial completa (comp. con (22.8)).

No toda expresión de la forma

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

es la diferencial completa de cierta función  $f(x, y, z)$ . En particular, la expresión para el trabajo que realiza una fuerza (21.4),

$$dA = ay dx - ax dy \quad (22.10)$$

no es una diferencial total, ya que no existe tal función  $U$  para la que  $-\partial U/\partial x = ay$ , mientras que  $-\partial U/\partial y = -ax$  (véase (21.4)).

Respectivamente, no existe tal función  $U$ , cuyo decrecimiento determinara el trabajo (22.10).

De lo dicho se desprende que sólo pueden ser conservativas aquellas fuerzas que satisfacen la condición (22.7), es decir, las fuerzas, cuyas componentes por los ejes de coordenadas son iguales a las derivadas parciales de cierta función  $U(x, y, z)$  por las correspondientes

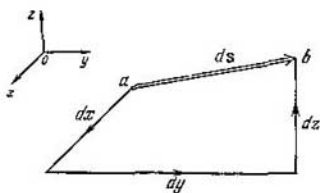


Fig. 22.1

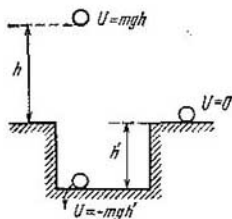


Fig. 22.2

coordenadas, tomadas con signo opuesto. Dicha función es la energía potencial de la partícula.

El aspecto concreto de la función  $U(x, y, z)$  depende del carácter del campo de fuerzas. Como ejemplo, hallemos la energía potencial de la partícula en el campo de las fuerzas de gravedad. De acuerdo con (21.2), el trabajo realizado sobre la partícula por las fuerzas de dicho campo, es igual a

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2).$$

Por otro lado, según (22.1)

$$A_{12} = U_1 - U_2.$$

Comparando las dos expresiones para el trabajo, llegamos a la conclusión de que la energía potencial de la partícula en el campo de las fuerzas de gravedad se determina por la expresión

$$U = mgh, \quad (22.11)$$

donde  $h$  se cuenta a partir de un nivel tomado al azar.

El comienzo del cálculo de la energía potencial puede ser elegido de forma arbitraria. Por esta causa,  $U$  alcanza incluso valores negativos. Por ejemplo, si tomamos como nula la energía potencial de una partícula que se halla, en la superficie terrestre, la energía potencial de una partícula que se encuentra en el fondo de un pozo de profundidad  $h'$ , será igual a  $U = -mgh'$  (fig. 22.2). Señalemos que la energía cinemática no puede ser negativa.

Supongamos, que sobre la partícula actúa también, además de las fuerzas conservativas, una fuerza no conservativa.  $F^*$ . En tal

caso, al pasar la partícula del punto 1 al punto 2, sobre ella se realizará el trabajo

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \, ds + \int_1^2 \mathbf{F}^* \, ds = A_{\text{cons}} + A_{12}^*,$$

donde  $A_{12}^*$  es el trabajo de la fuerza no conservativa. El trabajo de las fuerzas conservativas  $A_{\text{cons}}$  puede representarse con  $U_1 - U_2$ . Como resultado obtenemos

$$A_{12} = U_1 - U_2 + A_{12}^*.$$

El trabajo sumario de todas las fuerzas aplicadas sobre la partícula, se dirige al incremento de la energía cinética de dicha partícula (véase (19.11)). Por lo tanto,

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A_{12}^*,$$

de donde, tomando en consideración que  $T + U = E$ , obtenemos

$$E_2 - E_1 = A_{12}^*. \quad (22.12)$$

El resultado obtenido quiere decir que el trabajo de las fuerzas no conservativas es consumido para el incremento de la energía mecánica total de la partícula.

En el caso, cuando en las posiciones inicial y final la energía cinética de la partícula es igual (en particular, igual a cero), el trabajo de las fuerzas no conservativas es dirigido al incremento de la energía potencial de la partícula:

$$A_{12}^* = U_2 - U_1 \quad (T_2 = T_1). \quad (22.13)$$

Esta correlación es útil cuando se determina la diferencia de valores de la energía potencial.

Consideremos un sistema constituido por  $N$  partículas, que entre sí no interactúan, ubicadas en un campo de fuerzas conservativas. Cada una de estas partículas tiene una energía cinética  $T_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$  ( $i$  es el número de la partícula) y una energía potencial  $U_i = U_i(x_i, y_i, z_i)$ . Examinando la partícula  $i$ -ésima, independientemente de otras partículas, podemos obtener que

$$E_i = T_i + U_i = \text{const.}_i$$

Sumando esta igualdad por todas las partículas, obtenemos la correlación

$$E = \sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N T_i + \sum_{i=1}^N U_i = \text{const.} \quad (22.14)$$

De aquí se desprende la aditividad de la energía mecánica total para el sistema que consideramos.

De acuerdo con (22.14) la energía mecánica total de un sistema de partículas que no interactúan y sobre las que actúan sólo fuerzas conservativas, queda constante. Esta afirmación expresa el principio de conservación de la energía para el sistema mecánico indicado.

Si además de las fuerzas conservativas, sobre la partícula actúan las fuerzas no conservativas  $F_i^*$ , la energía total del sistema no queda constante, con la particularidad de que

$$E_2 - E_1 = \sum_{i=1}^N (A_{12}^*)_i, \quad (22.15)$$

donde  $(A_{12}^*)_i$  es el trabajo que realiza la fuerza no conservativa aplicada a la  $i$ -ésima partícula, al desplazarse ésta de su posición inicial a la final.

En la terminación del párrafo anterior, establecimos que el trabajo de la fuerza de rozamiento siempre es negativo. Por esta razón, cuando en el sistema existen fuerza de rozamiento la energía mecánica total del sistema disminuye (se disipa), convirtiéndose en formas no mecánicas de energía (por ejemplo, en la energía interior de los cuerpos o, como suele decirse, en calor). Semejante proceso denominábase *disipación* de la energía. Las fuerzas que provocan la disipación de la energía reciben el nombre de *fuerzas disipativas*. En el caso general, llamaremos fuerzas disipativas aquellas que siempre están dirigidas en sentido opuesto a las velocidades de las partículas y que, por lo tanto, provocan su frenado.

Cabe señalar, que no es obligatorio que las fuerzas no conservativas sean disipativas.

## § 23. Energía potencial de interacción

Hasta el momento hemos examinado sistemas de partículas que entre sí no ejercen interacción. Ahora vamos a pasar a considerar un sistema de dos partículas en interacción. Designemos la fuerza con la que la segunda partícula actúa sobre la primera con el símbolo  $F_{12}$ , mientras que la fuerza con la que la primera partícula acciona sobre la segunda, con el símbolo  $F_{21}$ . De acuerdo con la tercera ley de Newton  $F_{12} = -F_{21}$ .

Introduzcamos el vector  $R_{12} = r_2 - r_1$ , donde  $r_1$  y  $r_2$  son los radios vectores de las partículas (fig. 23.1). La distancia entre las partículas es igual al módulo de dicho vector. Supongamos que las fuerzas  $F_{12}$  y  $F_{21}$  poseen una magnitud que sólo depende de la distancia  $R_{12}$  entre las partículas y que están dirigidas a lo largo de la recta que une las partículas. Como sabemos, esto es válido para las fuerzas de interacción gravitacional y coulombiana (véanse las fórmulas (11.2) y (13.1)).

Tomando en consideración las suposiciones adoptadas, las fuerzas  $F_{12}$  y  $F_{21}$  pueden ser representadas del modo que sigue

$$F_{12} = f(R_{12}) e_{12}, \quad F_{21} = -f(R_{12}) e_{12}, \quad (23.1)$$

donde  $e_{12}$  es el versor del vector  $R_{12}$  (fig. 23.2) y  $f(R_{12})$ , cierta función  $R_{12}$ , positiva si las partículas se atraen y negativa, si se repelen.

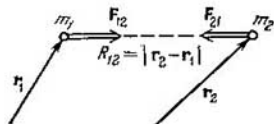


Fig. 23.1

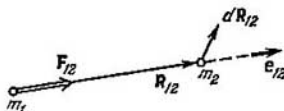


Fig. 23.2

Considerando que el sistema es cerrado (no hay fuerzas externas), escribimos las ecuaciones de movimiento de las dos partículas:

$$m_1 \dot{v}_1 = F_{12}, \quad m_2 \dot{v}_2 = F_{21}.$$

Multipliquemos la primera ecuación por  $dr_1 = v_1 dt$  y la segunda, por  $dr_2 = v_2 dt$  y sumémoslas<sup>1)</sup>. Como resultado obtenemos

$$m_1 v_1 \dot{v}_1 dt + m_2 v_2 \dot{v}_2 dt = F_{12} dr_1 + F_{21} dr_2. \quad (23.2)$$

El primer miembro de esta correlación es el incremento de la energía cinética del sistema durante el tiempo  $dt$  (véase (19.3)), el segundo, el trabajo de las fuerzas internas durante ese mismo tiempo.

Teniendo en cuenta las expresiones (23.1) el segundo miembro de la fórmula (23.2) puede ser transformado de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} dA_{\text{int}} &= F_{12} dr_1 + F_{21} dr_2 = f(R_{12}) e_{12} dr_1 - \\ &- f(R_{12}) e_{12} dr_2 = -f(R_{12}) e_{12} d(r_2 - r_1) = \\ &= -f(R_{12}) e_{12} dR_{12}. \end{aligned} \quad (23.3)$$

En la fig. 23.2 vemos que el producto escalar  $e_{12} dR_{12}$  es igual a  $dR_{12}$ , es decir, al incremento de la distancia entre las partículas. Así, pues,

$$dA_{\text{int}} = -f(R_{12}) dR_{12}. \quad (23.4)$$

La expresión  $f(R_{12}) dR_{12}$  puede ser considerada como el incremento de cierta función de  $R_{12}$ . Designemos esta función por  $U(R_{12})$ , con lo que llegamos a la igualdad

$$f(R_{12}) dR_{12} = dU(R_{12}). \quad (23.5)$$

Por lo tanto,

$$dA_{\text{int}} = -dU. \quad (23.6)$$

<sup>1)</sup> En este caso, es mejor designar el desplazamiento de la partícula por  $dr$  en lugar de  $ds$ .

Si tenemos en cuenta todo lo dicho, podemos representar la expresión (23.2) en la forma  $dT = -dU$  o bien

$$dE = d(T + U) = 0, \quad (23.7)$$

de donde se deduce que la magnitud  $E = T + U$  se conserva para el sistema cerrado que consideramos. La función  $U(R_{12})$  es la *energía potencial de interacción*. Depende de la distancia entre las partículas.

Supongamos que las partículas se han desplazado de las posiciones con las que la distancia entre ellas era igual a  $R_{12}^{(a)}$  a nuevas posiciones, con las que entre las partículas la distancia es igual a  $R_{12}^{(b)}$ . En correspondencia con (23.6), en este caso las fuerzas internas realizan sobre las partículas un trabajo

$$A_{ab \text{ int}} = - \int_a^b dU = U(R_{12}^{(a)}) - U(R_{12}^{(b)}). \quad (23.8)$$

De (23.8) sigue que el trabajo de las fuerzas (23.1) no depende de los recorridos por los que las partículas se desplazaron y sólo se determina por las distancias inicial y final entre las partículas (por las configuraciones inicial y final del sistema). Así, pues, las fuerzas de interacción del tipo (23.1) son conservativas.

Si las dos partículas se mueven, la energía total del sistema es igual a

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U_{\text{inter}}(R_{12}). \quad (23.9)$$

Supongamos que la partícula 1 está fijada en cierto punto que tomamos como origen de coordenadas ( $r_1 = 0$ ). Por esta causa, esta partícula pierde la posibilidad de moverse, por lo que la energía cinética sólo constará de un sumando  $\frac{1}{2} m_2 v_2^2$ . En este caso, la energía potencial sólo será función de  $r_2$ . La expresión (23.9) toma el aspecto

$$E = \frac{m_2 v_2^2}{2} + U_{\text{inter}}(r_2). \quad (23.10)$$

Si examinamos un sistema constituido por una sola partícula 2, la función  $U_{\text{inter}}(r_2)$  desempeñará el papel de energía potencial de dicha partícula en el campo de fuerzas de la partícula 1, a pesar de que, en esencia, esta función es la energía potencial de interacción de las partículas 1 y 2. En general, la energía potencial de un campo externo de fuerzas es, en realidad, la energía de interacción entre los cuerpos del sistema y los cuerpos que crean con relación al sistema el campo externo de fuerzas.

Dirijámonos de nuevo a un sistema de dos partículas libres («no fijadas») en interacción. Si sobre la primera partícula, además de la fuerza interna, actúa la fuerza externa  $F_1^*$ , mientras que sobre la segunda partícula, la fuerza  $F_2^*$ , en el segundo miembro de la corre-

lación (23.2) aparecerán los sumandos  $F_1^* dr_1$  y  $F_2^* dr_2$  que en su suma nos darán el trabajo de las fuerzas externas  $dA_{\text{ext}}$ . Por consiguiente, la fórmula (23.7) toma el aspecto

$$d(T + U_{\text{inter}}) = dA_{\text{ext}}. \quad (23.11)$$

Cuando la energía cinética de las partículas queda constante (por ejemplo, igual a cero), la correlación (23.11) tiene la forma

$$dU_{\text{inter}} = dA_{\text{ext}} \quad (dT = 0). \quad (23.12)$$

Integrando esta correlación de la configuración  $a$  a la configuración  $b$ , obtenemos

$$U_{\text{inter}}(R_{12}^{(b)}) - U_{\text{inter}}(R_{12}^{(a)}) = A_{ab \text{ ext}} \quad (T_b = T_a) \quad (23.13)$$

(comp. con la fórmula (22.13)).

Propaguemos los resultados obtenidos a un sistema de tres partículas en interacción. Entonces, el trabajo de las fuerzas internas

$$dA_{\text{int}} = (F_{12} + F_{13}) dr_1 + (F_{21} + F_{23}) dr_2 + \\ + (F_{31} + F_{32}) dr_3. \quad (23.14)$$

Teniendo en cuenta que  $F_{ih} = -F_{hi}$ , damos a la expresión (23.14) el aspecto

$$dA_{\text{int}} = -F_{12}d(r_2 - r_1) - F_{13}d(r_3 - r_1) - \\ - F_{23}d(r_3 - r_2) = -F_{12}dR_{12} - F_{13}dR_{13} - \\ - F_{23}dR_{23}, \quad (23.15)$$

donde  $R_{ih} = r_h - r_i$ .

Supongamos que podemos representar las fuerzas internas en la forma  $F_{ih} = f_{ih}(R_{ih}) e_{ih}$  (comp. con (23.1)). Entonces

$$dA_{\text{int}} = -f_{12}(R_{12}) e_{12} dR_{12} - f_{13}(R_{13}) e_{13} dR_{13} - \\ - f_{23}(R_{23}) e_{23} dR_{23}.$$

Cada uno de los productos  $e_{ih} dR_{ih}$  es igual al incremento de la distancia entre las respectivas partículas  $dR_{ih}$ . Por esta razón

$$dA_{\text{int}} = -f_{12}(R_{12}) dR_{12} - f_{13}(R_{13}) dR_{13} - f_{23}(R_{23}) dR_{23} = \\ = -d\{U_{12}(R_{12}) + U_{13}(R_{13}) + U_{23}(R_{23})\} = -dU_{\text{inter}}. \quad (23.16)$$

Aquí,

$$U_{\text{inter}} = U_{12}(R_{12}) + U_{13}(R_{13}) + U_{23}(R_{23}) \quad (23.17)$$

es la *energía potencial de interacción del sistema*. Se compone de la energía de interacción de las partículas tomadas a pares.

Igualando  $dT$  a la suma de los trabajos  $dA_{\text{int}} = -dU_{\text{inter}}$  y  $dA_{\text{ext}}$ , llegamos a la correlación (23.11) en la que por  $U_{\text{inter}}$  hay que tener en cuenta la expresión (23.17).

Con facilidad podemos generalizar el resultado obtenido para un sistema con cualquier número de partículas. Para un sistema constituido por  $N$  partículas que interactúan, la energía potencial de interacción se compone de las energías de interacción de las partículas, tomadas a pares:

$$U_{\text{inter}} = U_{12}(R_{12}) + U_{13}(R_{13}) + \dots + U_{1N}(R_{1N}) + \\ + U_{23}(R_{23}) + \dots + U_{2N}(R_{2N}) + \dots + U_{N-1,N}(R_{N-1,N}). \quad (23.18)$$

Esta suma puede ser escrita de la forma siguiente:

$$U_{\text{inter}} = \sum_{(i < k)} U_{ik}(R_{ik}) \quad (23.19)$$

(presten atención a que en la expresión (23.18) en cada sumando el primer índice tiene menor valor que el segundo). Con motivo de que  $U_{ih}(R_{ih}) = U_{hi}(R_{hi})$ , podemos representar la energía de interacción del modo siguiente

$$U_{\text{inter}} = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq h)} U_{ih}(R_{ih}). \quad (23.20)$$

En las sumas (23.19) y (23.20) los índices  $i$  y  $k$  adquieren los valores desde 1 hasta  $N$ , lo que concuerda con la condición ( $i < k$ ) o ( $i \neq k$ ).

Sea que el sistema consta de cuatro partículas, con la particularidad de que interactúan la primera partícula con la segunda y la tercera con la cuarta. En tal caso, la energía total del sistema es

$$E = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + U_{12} + U_{34} = (T_1 + T_2 + U_{12}) + \\ + (T_3 + T_4 + U_{34}) = E' + E''. \quad (23.21)$$

Aquí  $E'$  es la energía total del subsistema formado por las partículas 1 y 2,  $E''$ , la energía total del subsistema formado por las partículas 3 y 4. Suponemos que los subsistemas no están en interacción. La correlación (23.21) demuestra la aditividad de la energía (véase el tercer párrafo del § 18).

En conclusión, hallemos el tipo de la función  $U_{\text{inter}}$  en aquel caso cuando la fuerza de interacción es razón inversa del cuadrado de la distancia entre las partículas:

$$f(R_{12}) = \frac{\alpha}{R_{12}^2} \quad (23.22)$$

( $\alpha$  es una constante). Recordemos que cuando las partículas se atraen  $\alpha > 0$ , mientras que al repelerse éstas  $\alpha < 0$  (véase el texto que sigue a la fórmula (23.1)).

De acuerdo con (23.5)

$$dU_{\text{inter}} = f(R_{12}) dR_{12} = \frac{\alpha}{R_{12}^2} dR_{12}.$$



Después de integrar obtenemos

$$U_{\text{inter}} = -\frac{\alpha}{R_{12}} + \text{const.} \quad (23.23)$$

Lo mismo que la energía potencial, en el campo externo de fuerzas la energía potencial de interacción se determina con una precisión hasta cierta constante aditiva. Por regla, se supone que para  $R_{12} = \infty$  la energía potencial se reduce a cero (a dicha distancia la fuerza (23.22) se anula, o sea, la interacción entre las partículas desaparece). En semejante caso, la constante aditiva en (23.23) será igual a cero y la expresión para la energía potencial de interacción toma el aspecto

$$U_{\text{inter}} = -\frac{\alpha}{R_{12}}. \quad (23.24)$$

De acuerdo con (23.13), para alejar las partículas entre sí desde una distancia  $R_{12}$  hasta una distancia infinitamente grande, sin que con ello varíen sus velocidades, es necesario realizar el trabajo

$$A_{\text{ext}} = U_{\text{inter } \infty} - U_{\text{inter}}(R_{12});$$

La sustitución de los respectivos valores de la función (23.24), nos proporciona la expresión

$$A_{\text{ext}} = 0 - \left( -\frac{\alpha}{R_{12}} \right) = \frac{\alpha}{R_{12}}. \quad (23.25)$$

Cuando las partículas se atraen  $\alpha > 0$ ; en correspondencia, para el alejamiento de las partículas entre sí hay que realizar trabajo positivo.

Si las partículas se repelen  $\alpha < 0$  y el trabajo (23.25) resulta ser negativo. Semejante trabajo se tiene que realizar para impedir el aumento de la velocidad de movimiento de las partículas que se repelen.

## § 24. Principio de conservación de la energía

Reunamos los resultados obtenidos en los párrafos anteriores. Consideremos un sistema compuesto por  $N$  partículas con masas  $m_1, m_2, \dots, m_N$ . Sea que las partículas ejercen interacción entre sí con fuerzas  $F_{ik}$ , cuyos módulos sólo dependen de la distancia  $R_{ik}$  que separa las partículas. En el párrafo anterior fue establecido que tales fuerzas son conservativas. Esto significa que el trabajo realizado sobre las partículas por estas fuerzas es determinado por la configuración inicial y final del sistema. Vamos a suponer, que sobre la partícula  $i$ -ésima, además de las fuerzas internas, actúan la fuerza externa conservativa  $F_i$  y la fuerza externa no conservativa  $F_i^*$ . Entonces, la ecuación de movimiento de la partícula  $i$ -ésima, tendrá

el aspecto

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{\substack{h=1 \\ (h \neq i)}}^N \mathbf{F}_{ih} + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i^* \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (24.1)$$

Multipliquemos la  $i$ -ésima ecuación por  $d\mathbf{s}_i = d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt$  y sumando conjuntamente todas las  $N$  ecuaciones, obtendremos

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i d\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{\substack{h=1 \\ (h \neq i)}}^N \mathbf{F}_{ih} \right\} d\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i d\mathbf{s}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^* d\mathbf{s}_i. \quad (24.2)$$

El primer miembro es, ni más ni menos, el incremento de la energía cinética del sistema:

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i d\mathbf{v}_i = d \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = dT \quad (24.3)$$

(véase (19.3)). De las fórmulas (23.14) — (23.19) se desprende que el primer término del segundo miembro es igual al decrecimiento de la energía potencial de interacción de las partículas:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{\substack{h=1 \\ (h \neq i)}}^N \mathbf{F}_{ih} \right\} d\mathbf{r}_i = - \sum_{(i < h)} \mathbf{F}_{ih} d\mathbf{R}_{ih} = -d \sum_{(i < h)} U_{ih}(R_{ih}) = -dU_{\text{inter}}. \quad (24.4)$$

De acuerdo con (22.1) el segundo término en (24.2) es igual al decrecimiento de la energía potencial del sistema en el campo externo de las fuerzas conservativas:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i d\mathbf{s}_i = -d \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i) = -dU_{\text{ext}}. \quad (24.5)$$

Por fin, el último término en (24.2) es el trabajo de las fuerzas externas no conservativas:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^* d\mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^N dA_i^* = dA_{\text{ext}}^*. \quad (24.6)$$

Tomando en consideración las fórmulas (24.3)—(24.6), representamos la correlación (24.2) de la forma siguiente:

$$d(T + U_{\text{inter}} + U_{\text{ext}}) = dA_{\text{ext}}^*. \quad (24.7)$$

La magnitud

$$E = T + U_{\text{inter}} + U_{\text{ext}} \quad (24.8)$$

es la energía mecánica total del sistema. Si no hay fuerzas externas no conservativas, el segundo miembro de la fórmula (24.7) será igual

a cero y, por lo tanto, la energía total del sistema quedará constante:

$$E = T + U_{\text{inter}} + U_{\text{ext}} = \text{const.} \quad (24.9)$$

De este modo llegamos a la conclusión de que *la energía mecánica total de un sistema sobre el que actúan sólo fuerzas conservativas siempre es constante*. Esta afirmación contiene la esencia de una de las leyes fundamentales de mecánica, es decir, el *principio de conservación de la energía mecánica*.

Para un sistema cerrado, o sea, aquel sobre cuyos cuerpos no actúa ninguna fuerza externa, la correlación (24.9) tiene la forma

$$E = T + U_{\text{inter}} = \text{const.} \quad (24.10)$$

En semejante caso, el principio de conservación de la energía se enuncia de la siguiente manera: *la energía mecánica total de un sistema cerrado de cuerpos, entre los que sólo actúan fuerzas conservativas, siempre es constante*.

Si además de las fuerzas conservativas, en un sistema cerrado ejercen acción también fuerzas no conservativas, por ejemplo las de rozamiento, la energía total del sistema no se conserva. Considerando las fuerzas no conservativas como externas, en correspondencia con (24.7) podemos escribir:

$$dE = d(T + U_{\text{inter}}) = dA_{\text{no con.}} \quad (24.11)$$

Después de integrar esta correlación obtenemos

$$E_2 - E_1 = A_{12\text{no con.}} \quad (24.12)$$

El principio de conservación de la energía para un sistema de partículas que entre sí no ejercen interacción fue formulado en el § 22 (véase el texto que sigue a la fórmula (22.14)).

## § 25. Energía de la deformación elástica

No sólo un sistema de cuerpos en interacción puede poseer energía potencial, sino que también un cuerpo aislado que sufre deformación elástica (por ejemplo, un resorte comprimido, una barra estirada, etc.). En tal caso, la energía potencial depende de la disposición mutua de partes por separado del cuerpo (por ejemplo, de la distancia entre las espiras vecinas del resorte).

De acuerdo con la fórmula (20.2) tanto al estirar, como al comprimir el resorte en una magnitud  $x$ , hay que consumir un trabajo  $A = \frac{1}{2}kx^2$ . Este trabajo está dirigido al aumento de la energía potencial del resorte. Por consiguiente, la dependencia entre la energía

potencial del resorte y el alargamiento  $x$  tiene la forma

$$U = \frac{kx^2}{2}, \quad (25.1)$$

donde  $k$  es el factor de rigidez del resorte (véase el § 14). La fórmula (25.1) está escrita partiendo de la suposición de que la energía potencial de un resorte no deformado es igual a cero. En la fig. 25.1 se muestra la gráfica de la dependencia entre  $U$  y  $x$ .

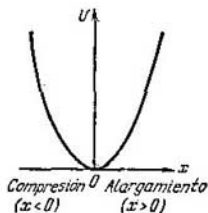


Fig. 25.1

Durante la deformación longitudinal elástica de una barra se realiza trabajo, que se determina por la fórmula (20.3). De acuerdo con esto, la energía potencial de una barra que sufre deformación elástica

$$U = \frac{E\varepsilon^2}{2} V. \quad (25.2)$$

Aquí  $E$  es el módulo de Young,  $\varepsilon$ , el alargamiento relativo,  $V$ , el volumen de la barra.

Introduzcamos en nuestras consideraciones la densidad de la energía de la deformación elástica  $u$ , que vamos a determinar como la razón entre la energía  $dU$  y aquel volumen  $dV$  que contiene ésta:

$$u = \frac{dU}{dV}. \quad (25.3)$$

Como suponemos que la barra es homogénea y la deformación uniforme, es decir, igual en todos los puntos de la barra, la energía (25.2) también estará distribuida por ésta de modo uniforme. Por esta causa, se puede considerar que

$$u = \frac{U}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2}. \quad (25.4)$$

Esta expresión nos ofrece la densidad de la energía de la deformación elástica durante el alargamiento (o la compresión) en el caso, cuando la deformación no es uniforme. En el último caso, para hallar la densidad de la energía en cierto punto de la barra, hay que poner en (25.4) el valor de  $\varepsilon$  en el punto dado.

Partiendo de las fórmulas (14.8) — (14.10) es fácil obtener que la densidad de la energía de la deformación elástica durante la cizalladura es igual a

$$u = \frac{G\gamma^2}{2}, \quad (25.5)$$

donde  $G$  es el módulo de cizalladura,  $\gamma$ , la cizalladura relativa.

## § 26. Condiciones de equilibrio de un sistema mecánico

Examinemos un punto material, cuyo movimiento está limitado de forma que tiene sólo un grado de libertad <sup>1)</sup>. Esto quiere decir, que su posición puede ser determinada mediante una magnitud, por ejemplo, por la coordenada  $x$ . Podemos aducir como ejemplo una bola que se desliza sin rozamiento por un alambre curvado en el plano vertical, fijado rígidamente (fig. 26.1, a). Otro ejemplo puede

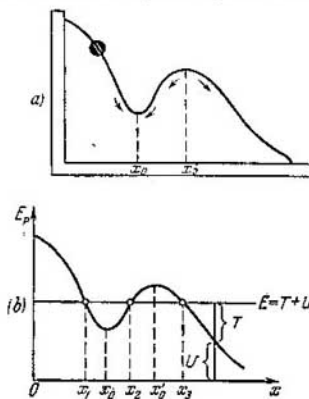


Fig. 26.1

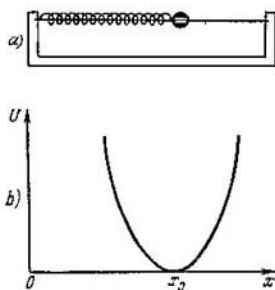


Fig. 26.2

ser una bola sujeta en el extremo de un resorte que sin rozamiento se desliza por una guía horizontal (fig. 26.2, a). Sobre la bola actúa una fuerza conservativa: en el primer caso ésta es la fuerza de gravedad, en el segundo, la fuerza elástica del resorte deformado. Las gráficas de la energía potencial  $U(x)$  están representadas en las figs. 26.1, b y 26.2, b.

Como las bolas se mueven por el alambre sin rozamiento, la fuerza con que el alambre actúa sobre la bola es en los dos casos perpendicular a la velocidad de aquélla, es decir, no realiza trabajo sobre la bola. Por esta razón, la energía se conserva:

$$E = T + U = \text{const.} \quad (26.1)$$

De (26.1) se desprende que la energía cinética puede aumentar sólo a cuenta de la disminución de la energía potencial. Por lo tanto, si el estado de la bola es tal que su velocidad es nula, mientras que la

<sup>1)</sup> Recibe el nombre de número de grados de libertad de un sistema mecánico, la cantidad de magnitudes independientes, con ayuda de las cuales podemos fijar la posición del sistema. Con mayor detalle esto será tratado en el § 97.

energía potencial tiene su valor mínimo, la bola no puede ponerse en movimiento sin influjo del exterior, es decir, se encuentra en equilibrio.

En la gráfica, el mínimo de  $U$  corresponde a los valores de  $x$  iguales a  $x_0$  (en la fig. 26.2  $x_0$  es la longitud del resorte no deformado). La condición que corresponde al mínimo de energía potencial tiene el aspecto

$$\frac{dU}{dx} = 0. \quad (26.2)$$

De acuerdo con (22.4) la condición (26.2) es equivalente a que

$$F_x = 0 \quad (26.3)$$

(cuando  $U$  sólo es función de una variable,  $\partial U/\partial x = dU/dx$ ). De este modo, la posición que corresponde al mínimo de energía potencial tiene la propiedad de que la fuerza que actúa sobre el cuerpo es nula.

En el caso representado en la fig. 26.1, las condiciones (26.2) y (26.3) también se cumplen para  $x$  igual a  $x'_0$  (es decir, para el máximo de  $U$ ). La posición de la bola determinada por dicho valor de  $x$  es asimismo de equilibrio. Sin embargo, éste, a diferencia del equilibrio con  $x = x_0$  será inestable: es suficiente sacar la bola ligeramente de esta posición y surge una fuerza que alejará ésta de la posición  $x'_0$ . Las fuerzas que aparecen al desplazarse la bola de la posición de equilibrio estable (para la cual  $x = x_0$ ), están dirigidas de tal forma que tienden a retornar la bola a la posición de equilibrio.

Conociendo el tipo de la función con la que se expresa la energía potencial, puede hacerse una serie de conclusiones acerca del carácter del movimiento de la partícula. Aclaremos esto, haciendo uso de la gráfica representada en la fig. 26.1, *b*. Si la energía total tiene el valor indicado en la figura, la partícula puede moverse o en los límites desde  $x_1$  hasta  $x_2$ , o bien en los márgenes desde  $x_3$  hasta el infinito. En las regiones  $x < x_1$  y  $x_2 < x < x_3$  la partícula no puede penetrar, ya que la energía potencial no es posible que sea mayor que la energía total (si esto sucediera, la energía cinética sería negativa). De este modo, la región  $x_2 < x < x_3$  es una *barrera de potencial* a través de la cual la partícula no puede pasar con la reserva de energía total que posee. La región  $x_1 < x < x_2$  recibe el nombre de *pozo de potencial*.

Si durante su movimiento la partícula no puede alejarse hasta el infinito, semejante movimiento denominase *finito*. Si la partícula puede alejarse a una distancia cuan se quiera grande, el movimiento se llama *infinito*. En el pozo de potencial la partícula realiza movimiento finito. También será finito el movimiento de una partícula con energía total negativa en el campo central de las fuerzas de atracción (se supone que en el infinito la energía potencial se reduce a cero).

### § 27. Principio de conservación de la cantidad de movimiento

En los párrafos anteriores fue examinada la integral aditiva de movimiento, denominada energía. Hallemos una magnitud aditiva más que se conserva para un sistema cerrado. Con este fin, consideremos un sistema de  $N$  partículas que entre sí ejercen acción mutua. Supongamos que además de las fuerzas internas  $F_{ih}$ , sobre la  $i$ -ésima partícula actúan fuerzas externas, cuya resultante es igual a  $F_i$ . Escribamos la ecuación (9.1) para todas las  $N$  partículas:

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \dots + \mathbf{F}_{1h} + \dots + \mathbf{F}_{1N} + \mathbf{F}_1 = \sum_{h=2}^N \mathbf{F}_{1h} + \mathbf{F}_1,$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \dots + \mathbf{F}_{2h} + \dots + \mathbf{F}_{2N} + \mathbf{F}_2 = \sum_{\substack{h=1 \\ (h \neq 2)}}^N \mathbf{F}_{2h} + \mathbf{F}_2,$$

.....

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_{i1} + \mathbf{F}_{i2} + \dots + \mathbf{F}_{ih} + \dots + \mathbf{F}_{iN} + \mathbf{F}_i = \sum_{\substack{h=1 \\ (h \neq i)}}^N \mathbf{F}_{ih} + \mathbf{F}_i,$$

.....

$$\dot{\mathbf{p}}_N = \mathbf{F}_{N1} + \mathbf{F}_{N2} + \dots + \mathbf{F}_{Nh} + \dots + \mathbf{F}_{N, N-1} + \mathbf{F}_N = \sum_{h=1}^{N-1} \mathbf{F}_{Nh} + \mathbf{F}_N.$$

Sumemos todas estas  $N$  ecuaciones. Como  $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$ , etc., a la derecha sólo quedan las fuerzas externas. De este modo, llegamos a la correlación

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i. \quad (27.1)$$

La suma de las cantidades de movimiento que forman el sistema mecánico, recibe el nombre de *cantidad de movimiento del sistema*. Designando la cantidad de movimiento con el símbolo  $\mathbf{p}$ , obtenemos

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i. \quad (27.2)$$

De (27.2) se desprende que la cantidad de movimiento es una magnitud aditiva.

Escribamos la correlación (27.1) en la forma

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i. \quad (27.3)$$

De aquí sigue que al no haber fuerzas externas  $dp/dt = 0$ . Por consiguiente, para un sistema cerrado  $p$  es constante. Esta afirmación es el contenido del *principio de conservación de la cantidad de movimiento*, que se enuncia del modo siguiente: *la cantidad de movimiento de un sistema cerrado de puntos materiales siempre es constante.*

Señalemos que la cantidad de movimiento también queda constante para un sistema no cerrado a condición de que la suma de las fuerzas externas es igual a cero (véase (27.3)). Cuando dicha suma no es nula, pero la proyección sobre dirección es igual a cero, se conserva la resultante de la cantidad de movimiento sobre dicha dirección. En efecto, al proyectar todas las magnitudes de la ecuación (27.3) sobre cierta dirección  $x$ , obtendremos

$$\frac{d}{dt} p_x = \sum_{i=1}^N F_{xi}, \quad (27.4)$$

de donde se desprende la afirmación que hemos aducido. (Recuerde que  $(dp/dt)_{pr,x} = dp_x/dt$ , véase la fórmula (2.40).)

La cantidad de movimiento de un sistema de partículas puede ser representado en forma del producto de la masa sumaria de las partículas por la velocidad del centro de masas del sistema:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C. \quad (27.5)$$

Recibe el nombre de *centro de masas* (o *centro de inercia*) del sistema el punto  $C$ , cuya posición se prefija por el radio vector  $\mathbf{r}_C$  determinado del modo siguiente:

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{m}. \quad (27.6)$$

Aquí  $m_i$  es la masa de la  $i$ -ésima partícula,  $\mathbf{r}_i$ , el radio vector que determina la posición de dicha partícula,  $m$ , la masa del sistema.

Las coordenadas cartesianas del centro de masas son iguales a las proyecciones de  $\mathbf{r}_C$  sobre los ejes de coordenadas:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \quad (27.7)$$

Cabe indicar que en el campo homogéneo de las fuerzas de gravedad, el centro de masas coincide con el de gravedad del sistema.

La velocidad del centro de masas se obtiene derivando el radio vector (27.6) por el tiempo:

$$\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C = \frac{\sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i}{m} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{m} = \frac{\mathbf{p}}{m}$$

(véase (27.2)). De aquí se desprende la fórmula (27.5).



Para un sistema cerrado  $p = mv_C = \text{const.}$  Por lo tanto, el centro de masas de un sistema cerrado o está en movimiento rectilíneo uniforme, o bien está inmóvil.

El sistema de referencia en el que el centro de masas está en reposo, recibe el nombre de *sistema del centro de masas* o *sistema C*. Está claro que dicho sistema es inercial.

El sistema de referencia relacionado con los instrumentos de medida, denomínase *de laboratorio* o *sistema l*.

## § 28. Choque de dos cuerpos

Cuando dos cuerpos chocan éstos se deforman. En tal caso, la energía cinética que antes del choque poseían los cuerpos, parcial o totalmente se transforma en la energía potencial de la deformación elástica, así como también en la llamada energía interna de los cuerpos. El aumento de esta última se acompaña por el crecimiento de la temperatura de ellos.

Hay dos tipos límites de choques: perfectamente elástico y perfectamente inelástico. Recibe el nombre de perfectamente elástico un choque con el que la energía mecánica de los cuerpos se convierte en otros tipos no mecánicos de energía. Durante semejante choque, la energía cinética se transforma parcial o totalmente en la energía potencial de la deformación elástica. A continuación, los cuerpos retornan a su forma inicial, repeliéndose. Como resultado, la energía potencial de la deformación elástica de nuevo se transforma en energía cinética y los cuerpos se separan a velocidades, cuya magnitud y dirección se determinan por dos condiciones: la conservación de la energía total y la conservación de la cantidad total de movimiento del sistema de cuerpos.

El choque perfectamente inelástico se caracteriza por el hecho de que no surge la energía potencial de deformación; la energía cinética de los cuerpos, parcial o totalmente se transforma en energía interior; después de que los cuerpos chocan, éstos o se mueven a igual velocidad, o bien quedan en reposo. Durante el choque perfectamente inelástico sólo se cumple el principio de conservación de la cantidad de movimiento. En lo que se refiere al principio de conservación de la energía mecánica, éste no se cumple: tiene lugar el principio de conservación de la energía sumaria de diversos tipos, es decir, mecánica e interna.

Para empezar, examinemos el choque perfectamente inelástico de dos partículas (puntos materiales) que forman un sistema cerrado. Sean las masas de las partículas igual a  $m_1$  y  $m_2$  y sus velocidades antes del choque  $v_{10}$  y  $v_{20}$ . Como sigue del principio de conservación, la cantidad sumaria de movimiento de las partículas después

del choque debe ser igual que antes de éste:

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v + m_2 v = (m_1 + m_2) v \quad (28.1)$$

( $v$  es igual a la velocidad después del choque, idéntica para las dos partículas). De (28.1) se desprende que,

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}. \quad (28.2)$$

Para los cálculos prácticos, la correlación (28.2) debe ser proyectada sobre las direcciones elegidas correspondientemente.

Ahora examinemos un choque perfectamente elástico, con la particularidad de que nos vamos a limitar al caso del choque central de dos esferas homogéneas. Se denomina central, un choque durante el que las esferas se mueven antes del choque a lo largo de una recta

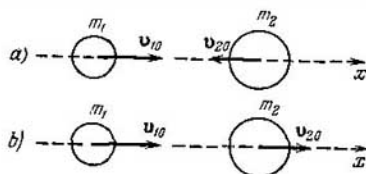


Fig. 28.1

que pasa por sus centros. Al producirse el choque central, la colisión puede transcurrir: 1) si las esferas se mueven al encuentro una de la otra (fig. 28.1, a) y 2) si una de las esferas alcanza a la otra (fig. 28.1, b).

Vamos a suponer que las esferas forman un sistema cerrado o bien que las fuerzas externas aplicadas a ellas se equilibran entre sí. Además, consideraremos que las esferas no giran.

Designemos las masas de las esferas por  $m_1$  y  $m_2$ , sus velocidades antes del choque por  $v_{10}$  y  $v_{20}$  y, por fin, las velocidades de las esferas después de choque, por  $v_1$  y  $v_2$ . Escribamos las ecuaciones de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento:

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad (28.3)$$

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (28.4)$$

Teniendo en cuenta que  $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$ , demos a (28.3) la forma

$$m_1 (v_{10} - v_1) (v_{10} + v_1) = m_2 (v_2 - v_{20}) (v_2 + v_{20}). \quad (28.5)$$

Transformamos la correlación (28.4) del modo siguiente:

$$m_1 (v_{10} - v_1) = m_2 (v_2 - v_{20}). \quad (28.6)$$

Partiendo de consideraciones de simetría, es posible afirmar que después del choque las velocidades de las esferas estarán dirigidas a lo largo de la misma recta por la que se desplazaban los centros de las esferas antes del choque. Por lo tanto, todos los vectores en (28.5) y (28.6) son colineales. Para semejantes vectores  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , de  $ab = ac$  se

deduce que  $b = c$ . Por esta razón, comparando (28.5) y (28.6) podemos llegar a la conclusión de que

$$v_{10} + v_1 = v_2 + v_{20}. \quad (28.7)$$

Multiplicando (28.7) por  $m_2$  y sustrayendo el resultado de (28.6) y a continuación, multiplicando (28.7) por  $m_1$  y sumando el resultado con (28.6), obtenemos las velocidades de las esferas después del choque:

$$v_1 = \frac{2m_2 v_{20} + (m_1 - m_2) v_{10}}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{2m_1 v_{10} + (m_2 - m_1) v_{20}}{m_1 + m_2}. \quad (28.8)$$

Para los cálculos numéricos hay que proyectar las correlaciones (28.8) sobre el eje  $x$ , a lo largo del cual las esferas se mueven (véase la fig. 28.1).

Señalemos, que las velocidades de las esferas no pueden ser iguales después de un choque perfectamente elástico. En efecto, igualando las expresiones (28.8) para  $v_1$  y  $v_2$  y realizando transformaciones, vemos que

$$v_{10} = v_{20}.$$

Por consiguiente, para que las velocidades de las esferas después del choque resulten ser iguales es preciso que éstas también sean iguales antes del choque, pero en semejante caso el choque no puede producirse. De aquí se desprende que la igualdad de las velocidades de las esferas después del choque es incompatible con el principio de conservación de la energía. Así, pues, durante el choque inelástico la energía mecánica no se conserva, es decir, parcialmente se transforma en la energía interna de los cuerpos que chocan, lo que provoca su calentamiento.

Examinemos el caso cuando las masas de las esferas que chocan son iguales:  $m_1 = m_2$ . De (28.8) sigue que, en tal caso,

$$v_1 = v_{20}, \quad v_2 = v_{10},$$

o sea, que durante la colisión, las esferas intercambian sus velocidades. En particular, si una de las esferas de igual masa, por ejemplo, la segunda, antes del choque estaba en reposo, después de éste se moverá a la misma velocidad que al principio tenía la primera esfera, en lo que atañe a ésta, después del choque quedará inmóvil.

Mediante las fórmulas (28.8) podemos definir la velocidad de la esfera después del choque contra una pared inmóvil o en movimiento (que puede ser considerada como una esfera de masa  $m_2$  y radio infinitamente grandes). Dividiendo el numerador y el denominador de las expresiones (28.8) por  $m_2$  y despreciando los términos que contienen el factor  $m_1/m_2$ , tenemos:

$$v_1 = 2v_{20} - v_{10}, \quad v_2 = v_{20}.$$

Como se desprende del resultado que hemos obtenido, la velocidad de la pared queda invariable. Si la pared está inmóvil ( $v_{20} = 0$ ), la esfera cambia su dirección por la opuesta; cuando la pared se mueve, varía también el valor de la velocidad de la esfera (aumenta en  $2v_{20}$  si la pared se desplaza al encuentro de la esfera y disminuye en  $2v_{20}$ , si la pared se «aleja» de la esfera que la alcanza).

## § 29. Principio de conservación del momento de la cantidad de movimiento

Ya conocemos dos magnitudes que se conservan: la energía y la cantidad de movimiento. Ahora vamos a hallar la tercera magnitud de este tipo. Con este fin, analicemos un sistema que consta de dos partículas en interacción, sobre las que también actúan fuerzas externas (fig. 29.1). Las ecuaciones de movimiento de las partículas tienen la forma

$$m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1, \quad m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_2.$$

Partiendo de la izquierda, multipliquemos de forma vectorial la primera ecuación por el radio vector de la primera partícula  $\mathbf{r}_1$ , mientras que la segunda ecuación, por el radio vector de la segunda partícula  $\mathbf{r}_2$ :

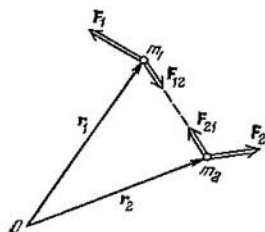


Fig. 29.1

$$\begin{aligned} m_1 [\mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{v}}_1] &= [\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1], \\ m_2 [\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{v}}_2] &= [\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_{21}] + [\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_2]. \end{aligned} \quad (29.1)$$

El producto vectorial de la forma  $[\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}]$  es equivalente a la expresión  $d/dt [\mathbf{r}\mathbf{v}]$ . En efecto, de acuerdo con la fórmula (2.55)

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}\mathbf{v}] = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}] + [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{v}] = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}]. \quad (29.2)$$

ya que  $[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{v}] = [\mathbf{v}\mathbf{v}] = 0$ . Realizando semejante sustitución en las fórmulas (29.1) y teniendo en cuenta que  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ , llegamos a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d}{dt} [\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1] &= [\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1], \\ m_2 \frac{d}{dt} [\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2] &= -[\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_2]. \end{aligned} \quad (29.3)$$

La masa es una magnitud escalar constante. Por lo tanto, ella puede ser introducida bajo el signo de la derivada por el tiempo y en

el producto vectorial:

$$m \frac{d}{dt} [\mathbf{r}\mathbf{v}] = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}, m\mathbf{v}] = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}, \mathbf{p}].$$

Tomando lo dicho en consideración, sumemos las ecuaciones (29.3). Como resultado obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \{[\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2]\} = [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1] + [\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_2].$$

Los vectores  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  y  $\mathbf{F}_{12}$  son colineales: por este motivo su producto vectorial es nulo. De tal forma, llegamos a la correlación

$$\frac{d}{dt} \{[\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2]\} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1] + [\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_2]. \quad (29.4)$$

Si el sistema es cerrado, el segundo miembro de la anterior igualdad es cero y, por consiguiente,

$$[\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2] = \text{const.}$$

Hemos hallado una magnitud aditiva que se conserva, llamada *momento de la cantidad de movimiento* respecto del punto  $O$  (véase la fig. 29.1).

Para una partícula aislada, el *momento de la cantidad de movimiento con relación al punto  $O$*  recibe el nombre de pseudovector

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}] = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}]. \quad (29.5)$$

Se llama momento de la cantidad de movimiento de un sistema con relación al punto  $O$  la suma vectorial de los momentos de las cantidades de movimiento de las partículas que componen el sistema:

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]. \quad (29.6)$$

La proyección del vector (29.5) sobre cierto eje  $z$  denomínase *momento de la cantidad de movimiento de la partícula respecto de dicho eje*

$$M_z = [\mathbf{r}\mathbf{p}]_{pr. z}. \quad (29.7)$$

De manera análoga, llamamos *momento de la cantidad de movimiento de un sistema con relación al eje  $x$* , la magnitud escalar

$$M_x = \sum_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]_{pr. x}. \quad (29.8)$$

De la fig. 29.2 se desprende que el módulo del vector del momento de la cantidad de movimiento de una partícula, es igual a

$$M = rp \operatorname{sen} \alpha = lp, \quad (29.9)$$

donde  $l = r \operatorname{sen} \alpha$  es la longitud de la perpendicular trazada desde el punto  $O$  a la recta, a lo largo de la cual está dirigida la cantidad

de movimiento de la partícula. Dicha longitud recibe el nombre de *brazo de la cantidad de movimiento respecto del punto O*. La fig. 29.2 se ha confeccionado suponiendo que el punto  $O$ , con relación al cual se toma el momento de cantidad de movimiento y el vector  $\mathbf{p}$ , yacen en el plano de la figura. El vector  $\mathbf{M}$  es perpendicular a dicho plano y se aleja de nosotros.

Consideremos dos ejemplos característicos.

1. Supongamos que la partícula se mueve a lo largo de la recta representada en la fig. 29.2 con una línea de trazos. En tal caso, el

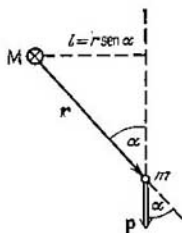


Fig. 29.2

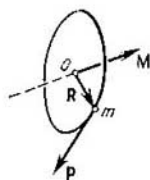


Fig. 29.3

momento de la cantidad de movimiento de la partícula sólo variará en magnitud. El módulo del momento

$$M = mvl, \quad (29.10)$$

quedando el brazo  $l$  invariable.

2. La partícula de masa  $m$  se mueve por una circunferencia de radio  $R$  (fig. 29.3). El módulo del momento de la cantidad de movimiento de la partícula respecto del centro de la circunferencia  $O$  es igual a

$$M = mvR. \quad (29.11)$$

El vector  $\mathbf{M}$  es perpendicular al plano de la circunferencia, con la particularidad de que la dirección de movimiento de la partícula y el vector  $\mathbf{M}$  forman un sistema dextrógiro. Como el brazo igual a  $R$  es constante, el momento de la cantidad de movimiento sólo puede cambiar a cuenta de la variación del módulo de la velocidad. Durante el movimiento uniforme de la partícula por la circunferencia, el momento de cantidad de movimiento queda constante en magnitud y dirección.

El seudovector

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}\mathbf{F}] \quad (29.12)$$

denomínase *momento de la fuerza  $\mathbf{F}$  respecto del punto  $O$* , desde el cual se traza el radio vector del punto de aplicación de la fuerza (fig. 29.4).

En la figura vemos que el módulo del momento de fuerza puede ser representado en la forma

$$N = rF \operatorname{sen} \alpha = lF, \quad (29.13)$$

donde  $l = r \operatorname{sen} \alpha$  es el brazo de la fuerza con relación al punto  $O$  (es decir, la longitud de la perpendicular trazada desde el punto  $O$  a la recta, a lo largo de la cual la fuerza actúa).

La proyección del vector  $N$  sobre cierto eje  $z$ , que pasa por el punto  $O$  respecto del que se determinó  $N$ , recibe el nombre de *momento de fuerza en lo que atañe a dicho eje*:

$$N_z = [\mathbf{rF}]_{\text{pr. } z}. \quad (29.14)$$

Descompongamos el vector de la fuerza  $F$  (fig. 29.5) en tres componentes perpendiculares entre sí:  $F_{\parallel}$ , paralela al eje  $z$ ,  $F_R$ , perpendicular al eje  $z$  y que actúa a lo largo de una recta que pasa por el eje  $y$ ,

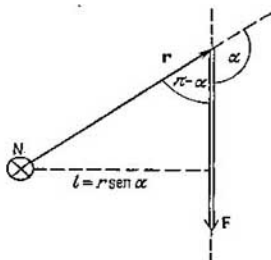


Fig. 29.4

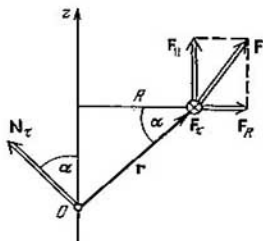


Fig. 29.5

por fin,  $F_{\tau}$ , perpendicular al plano que pasa por el eje y el punto de aplicación de la fuerza (esta componente está designada en la figura con un círculo y una cruz). Si nos imaginamos una circunferencia de radio  $R$ , cuyo centro yace en el eje  $z$ , la componente  $F_{\tau}$  estará dirigida por la tangente a dicha circunferencia. El momento de la fuerza  $F$  respecto del punto  $O$  es igual a la suma de las componentes:  $N = N_{\parallel} + N_R + N_{\tau}$ . Los vectores  $N_{\parallel}$  y  $N_R$  son perpendiculares al eje  $z$ , por lo que sus proyecciones sobre dicho eje son nulas. El módulo del momento  $N_{\tau}$  es igual a  $rF_{\tau}$  y forma con el eje  $z$  el ángulo  $\alpha$ , cuyo coseno es igual a  $R/r$ . Por consiguiente, el momento de la componente  $F_{\tau}$  con relación al eje  $z$  alcanza una magnitud  $N_{\tau} \cos \alpha = RF_{\tau}$ . Así, pues, el momento de la fuerza  $F$  acerca del eje  $z$  es igual a

$$N_z = RF_{\tau}. \quad (29.15)$$

Hasta el momento por  $F_{\tau}$  entendíamos el módulo de la componente  $F_{\tau}$ . Sin embargo,  $F_{\tau}$  puede ser considerada como la proyección del

vector  $F$  sobre el versor  $\tau$ , tangente a la circunferencia de radio  $R$  y dirigido de modo que el movimiento por la circunferencia en la dirección  $\tau$ , forme con la dirección del eje  $z$  un sistema dextrógiro. Con semejante interpretación de  $F_\tau$ , la fórmula (29.15) determinará también el signo de  $N_z$ .

El momento de la fuerza  $N$  caracteriza la capacidad de la fuerza de hacer girar el cuerpo alrededor del punto respecto del cual se toma. Hay que señalar, que cuando un cuerpo puede girar en torno del punto  $O$  al azar, bajo la acción de la fuerza el cuerpo girará cerca de

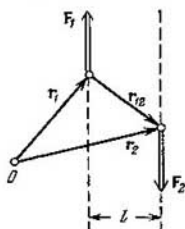


Fig. 29.6

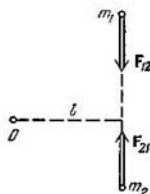


Fig. 29.7

un eje perpendicular al plano donde yacen la fuerza y el punto  $O$ , es decir, alrededor de un eje que coincide con la dirección del momento de fuerza respecto del punto dado.

El momento de fuerza con relación al eje  $z$  caracteriza la capacidad de la fuerza de hacer girar el cuerpo alrededor de dicho eje. Las componentes  $F_{\parallel}$  y  $F_{\perp}$  no pueden provocar la rotación del cuerpo en torno del eje  $z$ . Semejante rotación sólo puede ser originada por la componente  $F_{\tau}$ , con la particularidad de que mientras mayor sea el brazo  $R$ , dicha componente realizará el giro con mayor facilidad.

Dos fuerzas iguales en magnitud y de direcciones opuestas, que no actúan a lo largo de una misma recta, reciben el nombre de *par de fuerza* (fig. 29.6). La distancia  $l$  entre las rectas, a lo largo de las que actúan las fuerzas, denomínase *brazo del par*. El momento sumario del par de fuerzas  $F_1$  y  $F_2$

$$N = [r_1, F_1] + [r_2, F_2].$$

Teniendo en cuenta que  $F_1 = -F_2$ , podemos escribir:

$$N = -[r_1, F_2] + [r_2, F_2] = [(r_2 - r_1), F_2] = [r_{12}, F_2], \quad (29.16)$$

donde  $r_{12} = r_2 - r_1$  es un vector trazado desde el punto de aplicación de la fuerza  $F_1$  al punto de aplicación de la fuerza  $F_2$ . La expresión (29.16) no depende de la elección del punto  $O$ . Por lo tanto, el momento de un par de fuerzas respecto de cualquier punto siempre será el mismo. El vector del momento del par de fuerzas es perpendi-



cular al plano en el que yacen las fuerzas (véase la fig. 29.6) y es numéricamente igual al producto del módulo de cualquiera de las fuerzas por el brazo.

Ejerciendo acción entre las partículas, las fuerzas actúan en sentidos opuestos a lo largo de una misma línea (fig. 29.7). Sus momentos respecto del punto  $O$ , tomado al azar, son iguales en magnitud y de direcciones opuestas. Por este motivo, los momentos de las fuerzas internas se equilibran a pares para cualquier sistema de partículas, en particular para un sólido la suma de los momentos de todas las fuerzas internas siempre es nula:

$$\sum \mathbf{N}_{\text{int}} = 0. \quad (29.17)$$

De acuerdo con las definiciones (29.6) y (29.12), la ecuación (29.4) puede ser escrita del modo siguiente:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = \sum \mathbf{N}_{\text{ext}}. \quad (29.18)$$

Esta fórmula parece a la (27.3). De la comparación de estas fórmulas se desprende que de modo semejante a cómo la derivada por el tiempo de la cantidad de movimiento de un sistema es igual a la suma de las fuerzas externas, la derivada por el tiempo del momento de la cantidad de movimiento es igual a la suma de los momentos de las fuerzas exteriores.

De (29.18) sigue que cuando no hay fuerzas externas  $d\mathbf{M}/dt = 0$ . Por lo tanto, para un sistema cerrado  $\mathbf{M}$  es constante. Esta afirmación constituye el contenido del *principio de conservación del momento de la cantidad de movimiento*, que se enuncia de la forma siguiente: *el momento de la cantidad de movimiento de un sistema cerrado de puntos materiales siempre es constante.*

Para un sistema de dos partículas hemos mostrado la correlación (29.18). Pero es fácil generalizarla para un sistema de cualquier número de partículas. Escribamos las ecuaciones de movimiento de las partículas:

$$\begin{aligned} m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 &= \sum_h \mathbf{F}_{1h} + \mathbf{F}_1, \\ &\dots \dots \dots \\ m_l \dot{\mathbf{v}}_l &= \sum_h \mathbf{F}_{lh} + \mathbf{F}_l, \\ &\dots \dots \dots \\ m_N \dot{\mathbf{v}}_N &= \sum_h \mathbf{F}_{Nh} + \mathbf{F}_N. \end{aligned}$$

Después de multiplicar cada una de las ecuaciones por el respectivo radio vector, obtenemos (véase (29.2)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1] &= \sum_h [\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_{1h}] + [\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1], \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt} [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i] &= \sum_h [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ih}] + [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i], \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt} [\mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N] &= \sum_h [\mathbf{r}_N, \mathbf{F}_{Nh}] + [\mathbf{r}_N, \mathbf{F}_N]. \end{aligned}$$

Sumemos todas las  $N$  ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} \sum_i M_i = \sum_{\substack{i, h \\ (i \neq h)}} [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ih}] + \sum_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i].$$

La primera suma en el segundo miembro es la suma de los momentos de todas las fuerzas internas que, como mostramos, es nula (véase (29.17)). La segunda suma en ese mismo miembro es la suma de las fuerzas externas. Por lo tanto, hemos vuelto a la fórmula (29.18).

Indiquemos, que el momento de la cantidad de movimiento queda también constante para un sistema no cerrado, a condición de que el momento sumario de las fuerzas externas sea cero (véase (29.18)).

Proyectando todas las magnitudes que entran en la ecuación (29.18) sobre cierta dirección  $z$ , obtenemos la correlación:

$$\frac{d}{dt} M_z = \sum N_{z \text{ ext}}, \quad (29.19)$$

de acuerdo con la cual, la derivada por el tiempo del momento de la cantidad de movimiento del sistema respecto del eje  $z$  es igual a la suma de los momentos de las fuerzas externas con relación a dicho eje.

De (29.19) se deduce que cuando la suma de los momentos de las fuerzas externas acerca de cierto eje es igual a cero, el momento de cantidad de movimiento respecto de ese eje queda constante.

### § 30. Movimiento en un campo central de fuerzas

Consideremos una partícula que se encuentra en un campo central de fuerzas. No debemos olvidar, que la dirección de la fuerza que actúa sobre la partícula en cualquier punto de semejante campo, pasa por el punto  $O$ , o sea, por el centro del campo, mientras que la magnitud de la fuerza sólo es función de la distancia hasta dicho centro. Es fácil comprender, que la dependencia entre la fuerza  $F$

y  $r$  tiene el aspecto:

$$\mathbf{F} = f(r) \mathbf{e}_r, \quad (30.1)$$

donde  $\mathbf{e}_r$  es el versor del radio vector (fig. 30.1), mientras que  $f(r)$  es la proyección del vector de la fuerza sobre la dirección del radio vector, es decir,  $F_r$ . Para la fuerza de repulsión la función  $f(r)$  es positiva, para la de atracción, negativa. La fig. 30.1 se ha confeccionado para el caso cuando la partícula se repulsa del centro de la fuerza. Está claro, que la fórmula (30.1) sólo es justa si el origen de coordenadas (es decir, el punto desde donde se trazan los radios vectores) yace en el centro del campo.

El momento de fuerza (30.1) respecto del punto  $O$  es evidentemente igual a cero. Por esto, de acuerdo con (29.18) se desprende que el

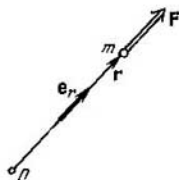


Fig. 30.1

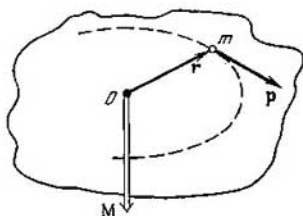


Fig. 30.2

momento de la cantidad de movimiento de una partícula, que se desplaza por un campo central de fuerzas, queda constante. En cada momento de tiempo, el vector  $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$  es perpendicular al plano formado por los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{p}$  (fig. 30.2). Cuando  $\mathbf{M} = \text{const}$ , dicho plano estará fijado. Esto quiere decir, que cuando la partícula se mueve por un campo central de fuerzas, su radio vector constantemente se encuentra en un mismo plano, en el que el vector  $\mathbf{p}$  también yace todo el tiempo. Por lo tanto, la trayectoria de la partícula es una curva plana. El plano, en el que se encuentra la trayectoria, pasa por el centro del campo (véase la fig. 30.2).

En la fig. 30.3 está representado un sector de la trayectoria de la partícula (el vector  $\mathbf{M}$  se dirige hacia la figura). Durante el tiempo  $dt$  el radio vector de la partícula describe el área sombreada  $dS$ . Este área es igual a la mitad del área del paralelogramo construido sobre los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v} dt$ . Esta última área es igual al módulo del producto vectorial  $|\mathbf{r}, \mathbf{v} dt|$  (véase el texto que sigue a la fórmula (2.28)). Así, pues, el área del triángulo sombreado

$$dS = \frac{1}{2} |\mathbf{r}\mathbf{v}| dt = \frac{1}{2m} |\mathbf{r}\mathbf{p}| dt = \frac{1}{2m} M dt$$

(hemos sacado el factor escalar  $dt$  fuera del signo del producto vectorial). Después de dividir por  $dt$  los dos miembros de la correlación obtenida, tenemos

$$\frac{dS}{dt} = \frac{M}{2m}. \quad (30.2)$$

La magnitud  $dS/dt$ , o sea, el área que describe el radio vector de la partícula por la unidad de tiempo, recibe el nombre de *velocidad areolar*. En el campo central de fuerzas  $M = \text{const}$ , por lo que dicha velocidad también será constante.

Hallemos en coordenadas polares  $r$  y  $\varphi$  (fig. 30.4) la expresión para el momento de la cantidad de movimiento de la partícula. En

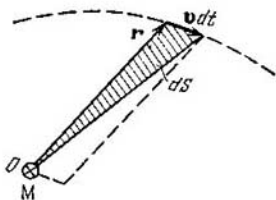


Fig. 30.3

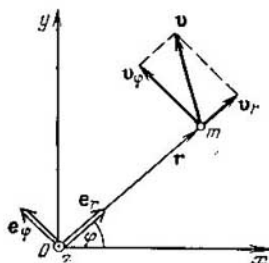


Fig. 30.4

correspondencia con las fórmulas (3.12)–(3.15), el vector de velocidad de la partícula puede ser representado en la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\varphi = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi. \quad (30.3)$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula para  $\mathbf{M}$ , tendremos:

$$\mathbf{M} = m [\mathbf{r}\mathbf{v}] = m [\mathbf{r}\mathbf{v}_r] + m [\mathbf{r}\mathbf{v}_\varphi].$$

Ya que los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{v}_r$  son colineales, el primer sumando es nulo. Por lo tanto,

$$\mathbf{M} = m [\mathbf{r}\mathbf{v}_\varphi] = m [r, r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi] = mr\dot{\varphi} [\mathbf{r}, \mathbf{e}_\varphi].$$

El producto vectorial  $[\mathbf{r}, \mathbf{e}_\varphi]$  es igual a  $r\mathbf{e}_z$ , donde  $\mathbf{e}_z$  es el versor del eje  $z$  (en la fig. 30.4 este versor está dirigido hacia el lector). De este modo,

$$\mathbf{M} = mr^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_z. \quad (30.4)$$

De aquí llegamos a la conclusión de que

$$M_z = mr^2\dot{\varphi}. \quad (30.5)$$

donde  $M_z$  es la proyección del momento de la cantidad de movimiento sobre el eje  $z$ . El módulo de dicho momento es igual al módulo de la expresión (30.5).

Ahora dirijámonos a la energía de la partícula. Las fuerzas centrales son conservativas (véase el § 21). De acuerdo con (22.1) el trabajo de una fuerza conservativa es igual al decrecimiento de la energía potencial  $U$  de la partícula. Por esta causa, para la fuerza (30.1) se realiza la correlación  $dA = -dU$ , o sea

$$dU = -dA = -f(r) e_r dr = -f(r) dr.$$

Después de integrar esta correlación, tendremos

$$U = - \int f(r) dr, \quad (30.6)$$

de donde sigue que la energía potencial de una partícula ubicada en el campo de fuerzas centrales, sólo depende de la distancia hasta el centro  $r$ :  $U = U(r)$ .

Particular interés tienen las fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia desde el centro de fuerzas. Para ellas, en la fórmula (30.1) la función  $f(r)$  tiene el aspecto

$$f(r) = \frac{\alpha}{r^2}, \quad (30.7)$$

donde  $\alpha$  es una magnitud constante ( $\alpha > 0$  corresponde a la repulsión desde el centro,  $\alpha < 0$ , a la atracción hacia el centro). Entre semejantes fuerzas podemos enumerar las de gravitación y las coulombianas.

La sustitución de la función (30.7) en la expresión (30.6), nos proporciona:

$$U = -\alpha \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\alpha}{r} + C,$$

donde  $C$  es la constante de integración. Por regla, se acuerda considerar nula la energía potencial en el infinito (es decir,  $r = \infty$ ). En tal caso  $C = 0$ , de forma que

$$U = \frac{\alpha}{r}. \quad (30.8)$$

Así, pues, la energía mecánica total de una partícula en movimiento por el campo de fuerzas centrales, que son razón inversa del cuadrado de la distancia, se determina por la expresión

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{\alpha}{r}. \quad (30.9)$$

En correspondencia con (30.3), sustituyendo el cuadrado de la velocidad  $v$  por la suma de los cuadrados de las velocidades  $v_r$  y  $v_\varphi$ , es

decir, poniendo en lugar de  $v^2$  la expresión  $\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$ , tendremos

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\alpha}{r}. \quad (30.10)$$

En el campo central la energía y el momento de la cantidad de movimiento de una partícula se conservan. Por consiguiente, los primeros miembros de las fórmulas (30.5) y (30.10) representan de por sí constantes. Así, pues, llegamos al sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} mr^2\dot{\varphi} &= M_z = \text{const}, \\ mr\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{2\alpha}{r} &= 2E = \text{const}. \end{aligned} \quad (30.11)$$

Integrando estas ecuaciones, podemos hallar  $r$  y  $\varphi$  como funciones de  $t$ , es decir, la trayectoria y el carácter del movimiento de la partícula.

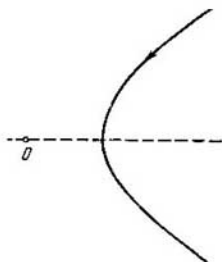


Fig. 30.5

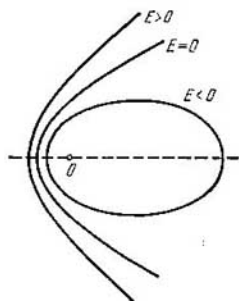


Fig. 30.6

Cabe señalar, que en las ecuaciones (30.11) entran las primeras derivadas de  $r$  y  $\varphi$  con relación al tiempo. Por esta razón, se resuelven con mucha mayor facilidad que las ecuaciones desprendidas de las leyes de Newton, que contienen las segundas derivadas de las coordenadas.

La solución del sistema (30.11) sale de los márgenes del presente libro. Nos vamos a limitar a aducir el resultado final. La trayectoria de la partícula es una sección cónica, o sea, una elipse, una parábola o una hipérbola. Cuál de estas curvas se observa en el caso concreto, depende del signo de la constante  $\alpha$  y de la magnitud de la energía total de la partícula.

Durante la repulsión (es decir, para  $\alpha > 0$ ) la trayectoria de la partícula sólo puede ser una hipérbola (fig. 30.5). Si  $M_z = 0$ , esta

última degenera convirtiéndose en una recta, cuya continuación pasa por el centro de fuerzas. Indiquemos que para  $\alpha > 0$  la energía total (30.9) nunca será negativa.

Al haber atracción (o sea, para  $\alpha < 0$ ) la energía total puede tener valores tanto positivos, como negativos; en particular es posible que sea cero. Con  $E > 0$  la trayectoria es una hipérbola (fig. 30.6). Para  $E = 0$  la trayectoria será una parábola. Esto se realiza si la partícula comienza su movimiento del estado de reposo en el infinito (véase (30.9)). Por fin, para  $E < 0$  la trayectoria será una elipse. Cuando los valores de la energía y del momento de cantidad de movimiento que satisfacen la condición  $E = -m\alpha^2/2M^2$ , la elipse degenera convirtiéndose en una circunferencia.

El movimiento por una elipse es finito, por una parábola o hipérbola, infinito (véase el § 26).

### § 31. Problema de los dos cuerpos

Se llama de los dos cuerpos el problema acerca del movimiento de dos partículas que ejercen acciones entre sí. Se supone que el sistema formado por dichas partículas es cerrado. En el § 27 fue aclarado que el centro de masas de un sistema cerrado o está en reposo, o bien en movimiento rectilíneo uniforme. Vamos a resolver el problema en un sistema del

centro de masa (sistema  $C$ ) colocando el origen de coordenadas en el punto  $C$ . En tal caso,  $\mathbf{r}_C = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2) = 0$ , es decir,

$$m_1\mathbf{r}_1 = -m_2\mathbf{r}_2 \quad (31.1)$$

(fig. 31.1, a). Introduzcamos el vector

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad (31.2)$$

que determina la posición de la segunda partícula respecto de la primera (fig. 31.1, b). Resolviendo conjuntamente (31.1) y (31.2), hallamos con facilidad, que

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (31.3)$$

De modo semejante a (23.1), podemos escribir que  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = f(r) \mathbf{e}_r$ , donde  $f(r)$  es la función de la distancia entre las partículas, positiva para las fuerzas de atracción (fig. 31.1, c) y negativa para las de repulsión. Escribamos las ecuaciones de movimiento de

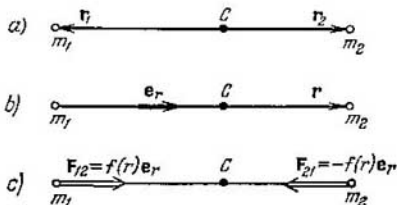


Fig. 31.1

las partículas:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = f(r) \mathbf{e}_r, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -f(r) \mathbf{e}_r.$$

Dividamos la primera ecuación por  $m_1$  y la segunda, por  $m_2$  y sustrayamos la primera ecuación de la segunda. He aquí el resultado

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f(r) \mathbf{e}_r.$$

De acuerdo con (31.2), el primer miembro es  $\ddot{\mathbf{r}}$ . Así, pues,

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f(r) \mathbf{e}_r. \quad (31.4)$$

De manera formal, (31.4) puede ser considerada como la ecuación de movimiento de una partícula imaginaria en el campo central de fuerzas. Respecto del centro de fuerzas, la posición de la partícula se determina por el radio vector  $\mathbf{r}$ . En correspondencia con (31.4), a la partícula imaginaria se le puede aducir la masa  $\mu$ , que se define de la condición

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (31.5)$$

De aquí,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (31.6)$$

La magnitud (31.6) recibe el nombre de *masa reducida* de la partícula.

De este modo, el problema de los dos cuerpos se reduce al problema del movimiento de una partícula en el campo central de fuerzas. Hallando  $\mathbf{r}$  mediante (31.4) como una función de  $t$ , con ayuda de las fórmulas (31.3) podemos definir  $\mathbf{r}_1(t)$  y  $\mathbf{r}_2(t)$ . Los vectores  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  se trazan desde el centro de masas del sistema  $C$ . Por esta razón, para poder hacer uso de las fórmulas (31.3), también debemos trazar el radio vector  $\mathbf{r}$  de la partícula imaginaria desde el punto  $C$  (para las partículas reales, el vector (31.2) se traza desde la primera partícula a la segunda).

De las fórmulas (31.2) y la fig. 31.1, vemos que ambas partículas se desplazan respecto del centro de masas por trayectorias geométricas semejantes <sup>1)</sup>, con la particularidad de que la recta que une las partículas pasa por el centro de masas permanentemente.

<sup>1)</sup> En el caso, cuando la fuerza de interacción es razón inversa del cuadrado de la distancia entre las partículas, estas trayectorias son elipses, parábolas o hipérbolas (véase el § 30).



## SISTEMAS NO INERCIALES DE REFERENCIA

### § 32. Fuerzas de inercia

Las leyes de Newton sólo se cumplen en los sistemas inerciales de referencia. Con relación a todos los sistemas inerciales de referencia el cuerpo se mueve con igual aceleración  $w$ . Como todo sistema no inercial de referencia se mueve según los sistemas inerciales con cierta aceleración, la aceleración de un cuerpo en un sistema no inercial de referencia  $w'$  será diferente de  $w$ . Designemos con el símbolo  $a$  la diferencia de aceleración de un cuerpo en sistemas inercial y no inercial de referencia:

$$w - w' = a. \quad (32.1)$$

Para un sistema no inercial de referencia en movimiento de traslación  $a$  es igual en todos los puntos del espacio ( $a = \text{const}$ ), y es, ni más ni menos, la aceleración del sistema no inercial de referencia. Para un sistema de este tipo en rotación, en diversos puntos del espacio  $a$  será diferente ( $a = a(r')$ , donde  $r'$  es el radio vector que determina la posición del punto en lo que atañe al sistema no inercial de referencia).

Supongamos que es igual a  $F$  la resultante de todas las fuerzas condicionadas por la acción ejercida por otros cuerpos sobre el cuerpo que examinamos. Entonces, de acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración del cuerpo respecto de cualquier sistema inercial de referencia es igual a

$$w = \frac{1}{m} F.$$

En lo que se refiere a la aceleración del cuerpo con relación a cierto sistema no inercial de referencia, de acuerdo con (32.1), podemos representarla como

$$w' = w - a = \frac{1}{m} F - a.$$

De aquí se desprende que incluso cuando  $F = 0$  el cuerpo se moverá con relación al sistema no inercial de referencia con una aceleración  $-a$ , es decir, de modo como si sobre éste actuara una fuerza igual a  $-ma$ .

Lo dicho significa, que al describir el movimiento en sistemas no inerciales de referencia se puede hacer uso de las ecuaciones de Newton, si junto con las fuerzas condicionadas por el efecto que ejerce un cuerpo sobre otro, se toman en consideración las llamadas fuer-

zas de inercia  $F_{in}$  que deben suponerse iguales al producto de la masa del cuerpo por la diferencia de sus aceleraciones respecto de los sistemas inercial y no inercial, tomada con signo opuesto:

$$F_{in} = -m(w - w') = -ma. \quad (32.2)$$

De modo correspondiente, la ecuación de la segunda ley de Newton en un sistema no inercial de referencia, tendrá el aspecto

$$mw' = F + F_{in}. \quad (32.3)$$

El siguiente ejemplo aclarará nuestra afirmación. Examinemos un carrito en el que está fijado un soporte sobre el cual una bola se encuentra suspendida de un hilo (fig. 32.1). Cuando el carrito está en reposo o se mueve sin aceleración, el hilo ocupa la posición vertical y la fuerza de la gravedad  $P$  se equilibra por la reacción del hilo  $F_r$ . Ahora pongamos el carrito en movimiento de traslación con aceleración  $a$ . El hilo se desviará de la vertical a un ángulo tal que la resultante de las fuerzas  $P$  y  $F_r$ , comunique a la bola una aceleración  $a$ . Respecto del sistema de referencia relacionado con el carrito, la bola

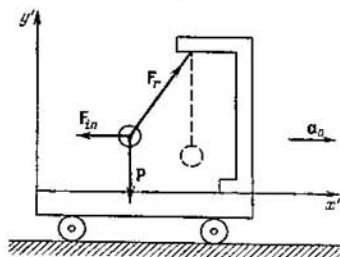


Fig. 32.1

está en reposo a pesar de que la resultante de las fuerzas  $P$  y  $F_r$  se diferencia de cero. La carencia de aceleración de la bola en lo que atañe a este sistema de referencia puede ser explicada de manera formal por el hecho de que además de las fuerzas  $P$  y  $F_r$ , iguales en la suma a  $ma$ , sobre la bola actúa también la fuerza de inercia  $F_{in} = -ma$ .

La introducción de las fuerzas de inercia da la posibilidad de describir el movimiento de los cuerpos en cualesquiera sistemas de referencia (tanto inerciales, como no inerciales) con ayuda de las mismas ecuaciones de movimiento.

Hay que comprender con claridad que las fuerzas de inercia no se pueden poner a la misma altura que tales fuerzas como las elásticas, gravitacionales y de rozamiento, es decir, las fuerzas condicionadas por la actuación sobre el cuerpo de otros cuerpos. Las fuerzas de inercia están condicionadas por las propiedades del sistema de referencia en el que se consideran los fenómenos mecánicos. En este sentido pueden ser llamadas fuerzas aparentes.

Hay que comprender con claridad que las fuerzas de inercia no se pueden poner a la misma altura que tales fuerzas como las elásticas, gravitacionales y de rozamiento, es decir, las fuerzas condicionadas por la actuación sobre el cuerpo de otros cuerpos. Las fuerzas de inercia están condicionadas por las propiedades del sistema de referencia en el que se consideran los fenómenos mecánicos. En este sentido pueden ser llamadas fuerzas aparentes.

La introducción de las fuerzas de inercia en la consideración no es en principio necesaria. Desde este punto de vista, cualquier movimiento siempre puede ser examinado respecto de un sistema inercial.

cial de referencia. No obstante, con frecuencia es prácticamente de interés examinar el movimiento de los cuerpos con relación a sistemas no inerciales de referencia, por ejemplo, acerca de la superficie terrestre. El empleo de las fuerzas de inercia ofrece la posibilidad de resolver el correspondiente problema directamente en lo que atañe a semejante sistema de referencia, lo que con frecuencia resulta ser mucho más sencillo que el análisis del movimiento de un sistema inercial de referencia.

La propiedad característica de las fuerzas de inercia es su proporcionalidad a la masa del cuerpo. Gracias a esto, dichas fuerzas son análogas a las de gravitación. Imaginémosnos que nos encontramos en una cabina cerrada, alejada de todas las fuerzas externas. Dicha cabina se mueve con aceleración  $g$  en la dirección que vamos a llamar «hacia arriba» (fig. 32.2). En tal caso, todos los cuerpos que se encuentran en el interior de la cabina se comportarán como si sobre ellos se ejerciera la fuerza de inercia  $-mg$ . En particular, el resorte que tiene suspendido en su extremo un cuerpo de masa  $m$ , se alargará de tal forma que la fuerza elástica equilibre la fuerza de inercia  $-mg$ . Sin embargo, iguales fenómenos serían observados si la cabina estuviera inmóvil y se encontrara junto a la superficie de la Tierra. Como no tenemos la posibilidad de «ver» tras los límites de la cabina, ninguna clase de experimentos realizados en el interior de aquella permitirían establecer qué es lo que condiciona la fuerza  $-mg$ , el movimiento acelerado de la cabina o la acción del campo gravitacional de la Tierra. Este es el motivo de que se hable de la equivalencia de las fuerzas de inercia y gravitacionales. Semejante equivalencia es la base de la teoría general de la relatividad de Einstein.

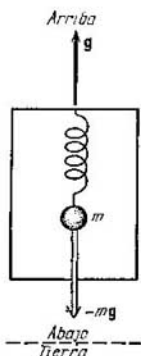


Fig. 32.2

### § 33. Fuerza centrífuga de inercia

Examinemos un disco que gira alrededor de un eje vertical  $z'$ , perpendicular a él, a una velocidad angular  $\omega$  (fig. 33.1). Junto con el disco gira una bola asentada sobre un rayo y unida con el centro del disco mediante un resorte. La bola ocupa en el rayo una posición tal con la que la fuerza de tensión del muelle  $F_{\text{res}}$  es igual al producto de la masa de la bola  $m$  por su aceleración  $w_n = -\omega^2 R$  (véase (5.10));  $R$  es el radio vector trazado hasta la bola desde el centro del disco. Su módulo  $R$  nos da la distancia hasta la bola desde el centro del disco:

$$F_{\text{res}} = -m\omega^2 R. \quad (33.1)$$

Con relación al sistema de referencia ligado con el disco, la bola está en reposo. De modo formal esto puede ser explicado por el hecho de que, además de la fuerza (33.1), sobre la bola actúa la fuerza de inercia

$$F_{\text{cent}} = m\omega^2 R, \quad (33.2)$$

dirigida a lo largo del radio desde el centro del disco.

La fuerza de inercia (33.2) que surge en un sistema de referencia en rotación (respecto de sistemas inerciales), recibe el nombre de *fuerza centrífuga de inercia*. Esta fuerza actúa sobre el cuerpo en un sistema de referencia en rotación, independientemente de si en este sistema el cuerpo está en reposo (como suponíamos hasta el momento) o se mueve respecto de él a una velocidad  $v'$ .

Si caracterizamos la posición del cuerpo en un sistema de referencia en rotación por el radio vector  $r'$ , la fuerza centrífuga de inercia puede ser representada en forma de un producto vectorial doble:

$$F_{\text{cent}} = m [\omega, [r', \omega]]. \quad (33.3)$$

En efecto, el vector  $b = [r', \omega]$  está dirigido perpendicularmente a

los vectores  $\omega$  y  $F_{\text{cent}}$  hacia nosotros (fig. 33.2) y su módulo es igual a  $\omega r' \sin \alpha = \omega R$ . La dirección del producto vectorial de los vectores  $m\omega$  y  $b$ , perpendiculares entre sí, coincide con  $F_{\text{cent}}$  y su módulo es igual a  $m\omega b = m\omega^2 R = F_{\text{cent}}$ .

Al resolver con precisión los problemas del movimiento de los cuerpos respecto de la superficie terrestre, hay que tomar en consideración la fuerza centrífuga de inercia igual a  $m\omega^2 R$ , donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $\omega$ , la velocidad angular de rotación de la Tierra en torno de su eje,  $R$ , la distancia desde el cuerpo al eje terrestre (fig. 33.3). En aquellos casos, cuando la altura de los cuerpos sobre la superficie de la Tierra es pequeña, se puede considerar que  $R$  es igual a  $R_T \cos \varphi$  ( $R_T$  es el radio de la Tierra,  $\varphi$ , la latitud del lugar). Entonces, la expresión para la fuerza centrífuga de inercia tendrá el aspecto

$$F_{\text{cent}} = m\omega^2 R_T \cos \varphi. \quad (33.4)$$

La aceleración de la caída libre  $g$  de los cuerpos, que se observa con relación a la Tierra, está condicionada por la acción de la fuerza  $F_g$ , con la que el cuerpo se atrae por la Tierra, y la fuerza  $F_{\text{cent}}$ . La resultante de estas fuerzas

$$P = F_g + F_{\text{cent}} \quad (33.5)$$

es la fuerza de la gravedad, igual a  $mg$  (véase (16.1)).

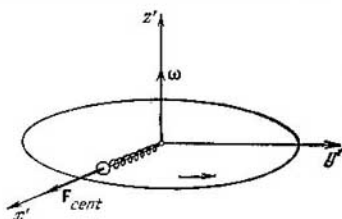


Fig. 33.1

La diferencia entre la fuerza de la gravedad  $P$  y la fuerza de atracción a la Tierra  $F_g$  es pequeña, ya que la fuerza centrífuga de inercia es mucho menor que  $F_g$ . Por ejemplo, para una masa igual a 1 kg el valor máximo de  $F_{cent}$  se observa en el ecuador y equivale a

$$m\omega^2 R_T = 1 \cdot (2\pi/86400)^2 \cdot 6,4 \cdot 10^6 = 0,035 \text{ N},$$

mientras que  $F_g$  es aproximadamente igual a 9,8 N, es decir, casi 300 veces mayor.

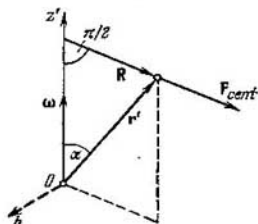


Fig. 33.2

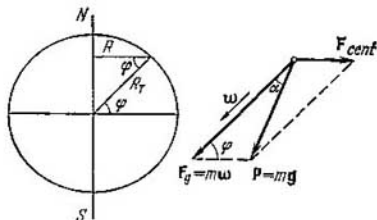


Fig. 33.3

El ángulo  $\alpha$  entre las direcciones de  $F_g$  y  $P$  (véase la fig. 33.3) puede ser definido haciendo uso del teorema de los senos:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \varphi} = \frac{F_{cent}}{R} = \frac{m\omega^2 R_T \cos \varphi}{mg} \approx \frac{0,035}{9,8} \cos \varphi \approx 0,0035 \cos \varphi,$$

de donde

$$\text{sen } \alpha \approx 0,0035 \text{ sen } \varphi \cos \varphi \approx 0,0018 \text{ sen } 2\varphi.$$

El seno de un ángulo pequeño puede ser sustituido aproximadamente por el valor del propio ángulo. Como resultado

$$\alpha \approx 0,0018 \text{ sen } 2\varphi. \quad (33.6)$$

De este modo, el ángulo  $\alpha$  varía en los márgenes desde cero (en el ecuador, donde  $\varphi = 0$  y en los polos, donde  $\varphi = 90^\circ$ ) hasta 0,0018 rad ó 6' (en la latitud de  $45^\circ$ ).

La dirección de la fuerza  $P$  coincide con la del hilo tensado por una carga, que recibe el nombre de dirección de la plomada o vertical. La fuerza  $F_g$  está dirigida al centro de la Tierra. Por consiguiente, la vertical está dirigida al centro de la Tierra sólo en los polos y en el ecuador, desviándose en las latitudes intermedias a un ángulo  $\alpha$  determinado por la fórmula (33.6).

La diferencia  $F_g - P$  es el cero en los polos y alcanza el máximo en el ecuador, donde es igual al 0,3% de la fuerza  $F_g$ . A causa del achatamiento del globo terrestre en los polos, la fuerza  $F_g$  varía en cierto grado con la latitud, siendo en el ecuador, aproximadamente,

el 0,2% menor que en los polos. Como resultado, la aceleración de la caída libre cambia según la latitud en los límites de  $9,780 \text{ m/s}^2$  en el ecuador a  $9,832 \text{ m/s}^2$  en los polos;  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$  se ha aceptado como valor normal (estándar) de dicha aceleración.

Cabe indicar, que respecto de un sistema inercial de referencia, digamos heliocéntrico, un cuerpo que cae libremente se mueve con una aceleración  $w = F_g/m$  (y no  $g$ ). En la fig. 33.3 vemos que de la igualdad de la aceleración  $g$  para diversos cuerpos se deduce la equivalencia de las aceleraciones  $w$ . En efecto, los triángulos construidos sobre los vectores  $F_g$  y  $P$  para diferentes cuerpos, son semejantes (los ángulos  $\alpha$  y  $\varphi$  son iguales para todos los cuerpos en el punto dado de la superficie terrestre). Por lo tanto, la razón  $F_g/P$ , que coincide con el cociente  $w/g$ , es la misma para todos los cuerpos, de donde sigue que para iguales  $g$  se obtienen iguales  $w$ .

### § 34. Fuerza de Coriolis

Cuando un cuerpo se mueve con relación a un sistema de referencia en rotación, además de fuerza centrífuga de inercia, surge otra denominada *fuerza de Coriolis* o *fuerza de inercia de Coriolis*.

La aparición de la fuerza de Coriolis puede ser observada en el siguiente ejemplo. Tomemos un disco horizontal que puede girar alrededor de un eje vertical. Tracemos en el disco la recta radial  $OA$  (fig. 34.1, a). A una velocidad  $v'$  lancemos una bola en la dirección de  $O$  a  $A$ . Si el disco no gira, la bola rodará a lo largo de la recta trazada. Si, por lo contrario, ponemos el disco en rotación en la dirección indicada por la flecha, la bola rodará por la curva  $OB$  de trazos, con la particularidad de que la velocidad  $v'$  de la bola cambiará su dirección. Por consiguiente, respecto del sistema de referencia en rotación, la bola se comporta como si sobre ella actuara la fuerza  $F_C$  perpendicular a la velocidad  $v'$ .

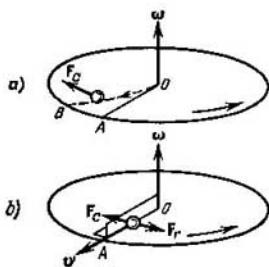


Fig. 34.1

Para obligar que la bola se mueva por el disco en rotación a lo largo de la recta radial, hay que crear una guía, por ejemplo, en forma de la arista  $OA$  (fig. 34.1, b). Durante la rodadura de la bola, la arista de guía ejerce sobre ella cierta fuerza  $F_r$ . Respecto del sistema en rotación (del disco), la bola se mueve a velocidad de dirección constante. De modo formal, esto puede ser explicado por el hecho de que la fuerza  $F_r$  se equilibra con la fuerza de inercia  $F_C$

aplicada a la bola que es perpendicular a la velocidad  $v'$ . La fuerza  $F_C$  es, precisamente, la fuerza de inercia de Coriolis.

Para empezar, hallemos la expresión de la fuerza de Coriolis para un caso particular, cuando la partícula  $m$  respecto de un sistema de referencia en rotación, se mueve uniformemente por una circunferencia que yace en un plano perpendicular al eje de rotación y cuyo centro se encuentra en dicho eje (fig. 34.2). Designemos con  $v'$  la velocidad de la partícula con relación al sistema en rotación. En lo que atañe al sistema inmóvil de referencia (inercial) la velocidad

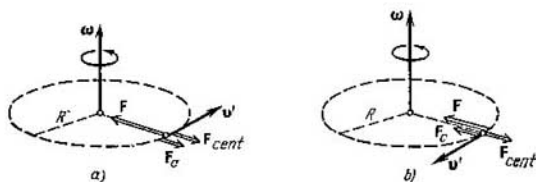


Fig. 34.2

de la partícula  $v$  es una magnitud igual a  $v' + \omega R$  en el caso (a) y  $|v' - \omega R|$  en el caso (b), donde  $\omega$  es la velocidad del sistema en rotación,  $R$ , el radio de la circunferencia (véase (5.7)).

Con el fin de que la partícula se mueva con relación al sistema inmóvil por la circunferencia a una velocidad  $v = v' + \omega R$ , sobre ella debe actuar la fuerza  $F$  dirigida hacia el centro de la circunferencia, por ejemplo, la fuerza de tensión del hilo con el que la partícula está atada al centro de la circunferencia (véase la fig. 34.2, a). La magnitud de esta fuerza es igual a

$$F = m\omega_n = \frac{mv^2}{R} = \frac{m(v' + \omega R)^2}{R} = \frac{mv'^2}{R} + 2mv'\omega + m\omega^2 R. \quad (34.1)$$

En lo que se refiere al sistema en rotación, la partícula se mueve con aceleración  $w'_n = v'^2/R$ , es decir, como si sobre ella actuara la fuerza

$$mw'_n = \frac{mv'^2}{R} = F - 2mv'\omega - m\omega^2 R \quad (34.2)$$

(véase (34.1)). De este modo, en el sistema en rotación la partícula se comporta como si sobre ella actuaran, además de la fuerza  $F$  dirigida hacia el centro de la circunferencia, dos fuerzas más dirigidas en sentido opuesto al centro:  $F_{cent} = m\omega^2 R$  y la fuerza  $F_C$ , cuyo módulo es igual a  $2mv'\omega$  (fig. 34.2, a). Es fácil comprender que la fuerza  $F_C$  puede ser representada en la forma

$$F_C = 2m \{v'\omega\}. \quad (34.3)$$

La fuerza (34.3) es, precisamente, la fuerza de inercia de Coriolis. Para  $v' = 0$  esta fuerza no existe. La fuerza  $F_{\text{cent}}$  no depende de  $v'$ , como ya hemos indicado, actúa sobre los cuerpos tanto en reposo, como sobre los que están en movimiento.

En el caso representado en la fig. 34.2, b

$$F = \frac{mv'^2}{R} = \frac{m(v' - \omega R)^2}{R} = \frac{mv'^2}{R} - 2mv'\omega + m\omega^2 R.$$

Correspondientemente

$$\frac{mv'^2}{R} = F + 2mv'\omega - m\omega^2 R.$$

Por lo tanto, en el sistema en rotación la partícula se comporta como si sobre ella actuaran dos fuerzas dirigidas hacia el centro de la circunferencia:  $F$  y  $F_C$ , así como la fuerza dirigida desde el centro  $F_{\text{cent}} = m\omega^2 R$  (véase la fig. 34.2, b). En este caso, la fuerza  $F_C$  puede ser representada en la forma (34.3).

Pasemos ahora a determinar la fuerza de Coriolis para el caso cuando la partícula se mueve al azar respecto del sistema de referencia en rotación. Liguemos con el sistema en rotación los ejes de

coordenadas  $x', y', z'$ , con la particularidad de que vamos a hacer coincidir el eje  $z'$  con el eje de rotación (fig. 34.3). En semejante caso, el radio vector de la partícula puede ser representado como

$$r' = x'e'_x + y'e'_y + z'e'_z, \quad (34.4)$$

donde  $e'_x, e'_y, e'_z$  son los versores de los ejes de coordenadas. Los versores  $e'_x$  y  $e'_y$  giran junto con el sistema de referencia a una velocidad angular  $\omega$ , mientras que el versor  $e'_z$  queda inmóvil.

Con ayuda del radio vector  $r$ , se debe determinar la posición de la partícula con relación al sistema inmóvil. Sin embargo, los símbolos  $r'$  y  $r$  designan un mismo vector, trazado desde el origen de coordenadas hasta la partícula. Un observador «viviente» en el sistema de referencia en rotación designaría dicho vector con el símbolo  $r'$ ; según sus observaciones, los versores  $e'_x, e'_y, e'_z$  están inmóviles, por lo que al derivar la expresión (34.4) trataría estos versores como constantes. El observador inmóvil haría uso del símbolo  $r'$ ; para él los versores  $e'_x, e'_y$  giran a una velocidad  $\omega$  (el versor  $e'_z$  está inmóvil). Por esta razón, al derivar la expresión (34.4) igual a  $r$ , el observador inmóvil debe tratar a  $e'_x$  y  $e'_y$  como funciones de  $t$ ,

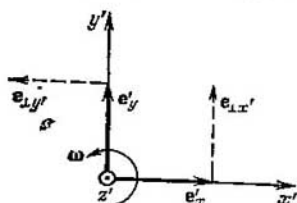


Fig. 34.3



cuyas derivadas son iguales a:

$$\dot{\mathbf{e}}'_x = \omega \mathbf{e}'_y, \quad \dot{\mathbf{e}}'_y = -\omega \mathbf{e}'_x \quad (34.5)$$

(véase la fig. 34.3 y la fórmula (2.56); el versor  $\mathbf{e}_{\perp x'}$ , que es perpendicular a  $\mathbf{e}'_x$ , es igual a  $\mathbf{e}'_y$ , el versor  $\mathbf{e}_{\perp y'}$ , que es perpendicular a  $\mathbf{e}'_y$ , es igual a  $-\mathbf{e}'_x$ ). Para las segundas derivadas de los versores según el tiempo, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\ddot{\mathbf{e}}'_x = \omega \dot{\mathbf{e}}'_y = -\omega^2 \mathbf{e}'_x, \quad \ddot{\mathbf{e}}'_y = -\omega \dot{\mathbf{e}}'_x = -\omega^2 \mathbf{e}'_y. \quad (34.6)$$

Hallemos la velocidad de la partícula con relación al sistema de referencia en rotación. Con este objeto, derivemos el radio vector (34.4) según el tiempo, considerando que los versores son constantes:

$$\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}' = \dot{x}' \mathbf{e}'_x + \dot{y}' \mathbf{e}'_y + \dot{z}' \mathbf{e}'_z. \quad (34.7)$$

La segunda derivación de la anterior expresión nos proporciona la aceleración de la partícula respecto del sistema de referencia en rotación:

$$\mathbf{w}' = \dot{\mathbf{v}}' = \ddot{x}' \mathbf{e}'_x + \ddot{y}' \mathbf{e}'_y + \ddot{z}' \mathbf{e}'_z. \quad (34.8)$$

Hallemos ahora la velocidad de la partícula con relación al sistema inmóvil de referencia. Con este fin, derivemos el radio vector (34.4) "desde el punto de vista" del observador inmóvil. Haciendo uso de la designación  $\mathbf{r}$  en lugar de  $\mathbf{r}'$  (recordemos que  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}'$ ), obtendremos:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}' \mathbf{e}'_x + x' \dot{\mathbf{e}}'_x + \dot{y}' \mathbf{e}'_y + y' \dot{\mathbf{e}}'_y + \dot{z}' \mathbf{e}'_z. \quad (34.9)$$

Derivando una vez más esta expresión según  $t$ , hallamos la aceleración de la partícula en lo que atañe al sistema inmóvil:

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}' \mathbf{e}'_x + 2\dot{x}' \dot{\mathbf{e}}'_x + x' \ddot{\mathbf{e}}'_x + \ddot{y}' \mathbf{e}'_y + 2\dot{y}' \dot{\mathbf{e}}'_y + y' \ddot{\mathbf{e}}'_y + \ddot{z}' \mathbf{e}'_z.$$

Tomando en consideración las fórmulas (34.5), (34.6) y (34.8), la correlación obtenida puede ser transformada de la siguiente forma:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' + 2\omega (x' \dot{\mathbf{e}}'_y - \dot{y}' \mathbf{e}'_x) - \omega^2 (x' \mathbf{e}'_x + y' \mathbf{e}'_y). \quad (34.10)$$

Consideremos el producto vectorial  $[\omega, \mathbf{v}']$ . Presentémoslo en forma del determinante (véase (2.33)):

$$[\omega, \mathbf{v}'] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_x & \mathbf{e}'_y & \mathbf{e}'_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{vmatrix}. \quad (34.11)$$

De acuerdo con (34.7)  $v'_x = \dot{x}'$ ,  $v'_y = \dot{y}'$ ,  $v'_z = \dot{z}'$ , además, con la dirección de los ejes de coordenadas elegida por nosotros  $\omega_x =$

$= \omega_y = 0$ ,  $\omega_z = \omega$ . La sustitución de estos valores en (34.11) nos proporciona

$$[\omega, \mathbf{v}'] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_x & \mathbf{e}'_y & \mathbf{e}'_z \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix} = -\mathbf{e}'_x \omega \dot{y}' + \mathbf{e}'_y \omega \dot{x}'. \quad (34.12)$$

El resultado obtenido muestra que el segundo término de la fórmula (34.10) puede ser escrito en la forma  $2[\omega, \mathbf{v}']$ . La expresión entre paréntesis en el último término de la fórmula (34.10) es igual a la componente del radio vector  $\mathbf{r}'$  perpendicular al eje de rotación (al eje  $z'$ ) (véase (34.4)). Designemos dicha componente con el símbolo  $\mathbf{R}$  (comp. con la fig. 5.5). Teniendo en cuenta todo lo dicho, podemos escribir la correlación (34.10) del modo siguiente:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' + 2[\omega, \mathbf{v}'] - \omega^2 \mathbf{R}. \quad (34.13)$$

De (34.13) se desprende que la aceleración de la partícula respecto del sistema inmóvil de referencia puede representarse en forma de la suma de tres aceleraciones: la aceleración con relación al sistema en rotación  $\mathbf{w}'$ , la aceleración igual a  $-\omega^2 \mathbf{R}$ <sup>1)</sup> y la aceleración

$$\mathbf{w}_C = 2[\omega, \mathbf{v}'], \quad (34.14)$$

que se denomina *aceleración de Coriolis*.

Para que la partícula se mueva con la aceleración (34.13), sobre ella deben actuar ciertos cuerpos con una fuerza resultante  $\mathbf{F} = m\mathbf{w}$ . De acuerdo con (34.13)

$$m\mathbf{w}' = m\mathbf{w} - 2m[\omega, \mathbf{v}'] + m\omega^2 \mathbf{R} = \mathbf{F} + 2m[\mathbf{v}', \omega] + m\omega^2 \mathbf{R} \quad (34.15)$$

(la permutación de los factores hace variar el signo del producto vectorial). El resultado obtenido significa que durante la confección de la ecuación de la segunda ley de Newton, en el sistema de referencia en rotación, además de las fuerzas de interacción hay que tener en cuenta la fuerza centrífuga de inercia determinada por la fórmula (33.2), así como la fuerza de Coriolis, que en el caso más general se define con la fórmula (34.3). Cabe señalar, que la fuerza de Coriolis siempre yace en el plano perpendicular al eje de rotación.

De la comparación de las fórmulas (34.9), (34.7) y (34.5) sigue que

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + x'\dot{\mathbf{e}}'_x + y'\dot{\mathbf{e}}'_y = \mathbf{v}' + \omega(x'\mathbf{e}'_y - y'\mathbf{e}'_x).$$

Por medio de cálculos análogos a los que llevaron a la correlación (34.13), podemos cerciorarnos de que el último término de la expresi-

<sup>1)</sup> La aceleración  $\mathbf{w}_a = -\omega^2 \mathbf{R}$  recibe el nombre de *aceleración de arrastre*. Es aquella que tendría la partícula en reposo en un sistema de referencia en movimiento (en nuestro caso, en rotación).

sión obtenida es igual a  $[\omega, r']$ . Por consiguiente,

$$v = v' + [\omega, r']. \quad (34.16)$$

Con  $v' = 0$  esta fórmula se convierte en (5.8).

**Ejemplos de movimientos con los que se manifiesta la fuerza de inercia de Coriolis.** Al interpretar los fenómenos ligados con el movimiento de los cuerpos respecto de la superficie terrestre, en una serie de casos hay que tomar en consideración la influencia de las fuerzas de Coriolis. Por ejemplo, durante la caída libre de los cuerpos,

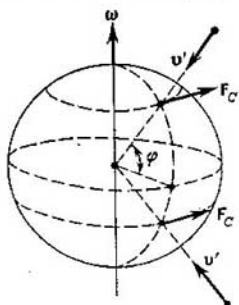


Fig. 34.4

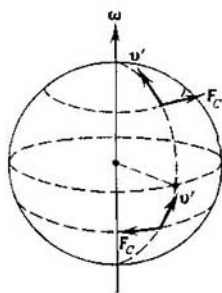


Fig. 34.5

sobre ellos actúa la fuerza de Coriolis que condiciona la desviación de la línea de la plomada hacia oriente (fig. 34.4). Dicha fuerza tiene su máximo valor en el ecuador y es nula en los polos.

Un proyectil que vuela también sufre desviaciones provocadas por las fuerzas de inercia de Coriolis (fig. 34.5). Al ser disparado un cañón dirigido hacia el norte, el proyectil se desviará hacia oriente en el hemisferio septentrional y hacia occidente, en el meridional. Al disparar a lo largo de un meridiano hacia el sur, las direcciones de las desviaciones serán las opuestas. Al disparar a lo largo del ecuador, las fuerzas de Coriolis tenderán a desviar el proyectil hacia la superficie terrestre si el disparo fue realizado hacia occidente y lo harán ascender si el disparo se ejecutó hacia oriente. Dejamos que el lector se cerciore por sí mismo de que la fuerza de Coriolis, que actúa sobre un cuerpo que se mueve a lo largo de un meridiano en cualquier dirección (hacia el norte o sur), está dirigida respecto del sentido del movimiento a la derecha en el hemisferio septentrional y a la izquierda, en el meridional. Este fenómeno provoca que los ríos siempre derrubian la orilla derecha en el hemisferio septentrional y la izquierda, en el meridional. Estas mismas causas explican el desigual desgaste de los carriles durante el movimiento de doble vía.

También se manifiestan las fuerzas de Coriolis en la oscilación del péndulo. En la fig. 34.6 se muestra la trayectoria del peso del péndulo (para simplificar hemos supuesto que el péndulo se encuentra en el polo). En el Polo Norte la fuerza de Coriolis estará siempre dirigida hacia la derecha según la marcha del péndulo, en el Polo Sur, hacia la izquierda. Como resultado, la trayectoria tiene la forma de un rosetón.

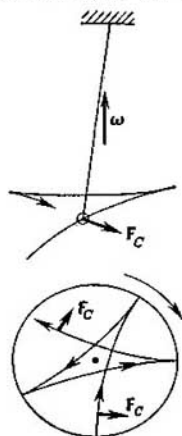


Fig. 34.6

Como vemos en la figura, el plano de oscilación del péndulo gira respecto de la Tierra en dirección horaria, con la particularidad de que en el transcurso del día y noche dicho plano da una vuelta. Con relación a un sistema heliocéntrico de referencia la cuestión residirá en que el plano de oscilación quedará invariable, mientras que la Tierra gira respecto de él efectuando una vuelta por día y noche. Puede ser demostrado que en la latitud  $\varphi$  el plano de oscilación del péndulo gira por veinticuatro horas a un ángulo  $2\pi \sin \varphi$ .

De este modo, al observar la rotación del plano de oscilación de un péndulo (los péndulos empleados con este fin denominanse péndulos de Foucault) obtenemos la demostración directa de la rotación de la Tierra alrededor de su eje.

### § 35. Principios de conservación en sistemas no inerciales de referencia

Si se tienen en cuenta las fuerzas de inercia, las ecuaciones de movimiento en un sistema no inercial, en nada se diferencian de dichas ecuaciones en un sistema inercial de referencia. Por esta razón, todos los corolarios que siguen de las ecuaciones de movimiento, en particular las correlaciones (24.12), (27.3) y (29.18), también son válidas en los sistemas no inerciales de referencia.

En semejante sistema, la fórmula (24.12) tiene el aspecto

$$E_2 - E_1 = A_{12 \text{ no cons}} + A_{12 \text{ iner}}, \quad (35.1)$$

donde  $A_{12 \text{ iner}}$  es el trabajo de las fuerzas de inercia.

Las fórmulas (27.3) y (29.18) tienen la siguiente forma en un sistema no inercial:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}_{\text{iner}}, \quad (35.2)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = \sum \mathbf{N}_{\text{ext}} + \sum \mathbf{N}_{\text{iner}}. \quad (35.3)$$

Aquí  $F_{\text{ext}}$  es la fuerza condicionada por la interacción,  $F_{\text{Iner}}$ , la fuerza de inercia;  $N_{\text{ext}}$  y  $N_{\text{Iner}}$  son los momentos de las fuerzas indicadas.

La fuerza centrífuga de inercia  $F_{\text{cent}} = m\omega^2 R$  es conservativa. En efecto, el trabajo de esta fuerza

$$A_{12 \text{ cent}} = \int_1^2 F_{\text{cent}} dr = m\omega^2 \int_1^2 R dr.$$

En la fig. 35.1 vemos que la proyección del vector  $dr$  sobre la dirección del vector  $R$ , igual a  $dR$ , es el incremento del módulo  $R$ . Por consiguiente,  $R dr = = R dR = d(R^2/2)$ . De este modo,

$$A_{12 \text{ cent}} = m\omega^2 \int_1^2 d\left(\frac{R^2}{2}\right) = m\omega^2 \frac{R_2^2}{2} - m\omega^2 \frac{R_1^2}{2}. \quad (35.4)$$

La expresión obtenida no depende, por lo visto, del recorrido por el que transcurriría el desplazamiento del punto 1 al punto 2.

El carácter conservativo de la fuerza  $F_{\text{cent}}$  permite introducir la energía potencial de la partícula  $U_{\text{cent}}$  (energía centrífuga), cuyo decrecimiento determina el trabajo de la fuerza centrífuga de inercia:

$$A_{12 \text{ cent}} = U_{\text{cent } 1} - U_{\text{cent } 2} \quad (35.5)$$

(véase la fórmula (22.1)). De la comparación de las fórmulas (35.4) y (35.5) llegamos a la conclusión de que

$$U_{\text{cent}} = -\frac{1}{2} m\omega^2 R^2 + \text{const.}$$

La constante puede hacerse igual a cero. En tal caso, obtenemos la siguiente expresión para la energía centrífuga:

$$U_{\text{cent}} = -\frac{1}{2} m\omega^2 R^2. \quad (35.6)$$

Si añadimos la expresión (35.6) a la energía potencial de la partícula, en la magnitud  $A_{12 \text{ Iner}}$  de la fórmula (35.1) no hay que incluir el trabajo de la fuerza centrífuga de inercia.

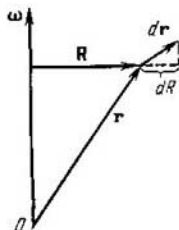


Fig. 35.1