

MECÁNICA DEL SÓLIDO

§ 36. Movimiento de un sólido

En el § 1 nos hemos familiarizado con dos tipos fundamentales de movimiento de un sólido —de traslación y de rotación.

¿ Durante el movimiento de traslación todos los puntos del sólido, en un mismo intervalo de tiempo, reciben iguales desplazamientos en magnitud y dirección, por lo que las velocidades y aceleraciones en cada momento de tiempo son iguales. Por esta causa, es suficiente

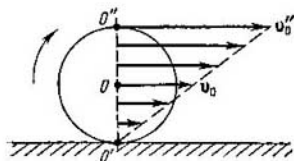


Fig. 36.1

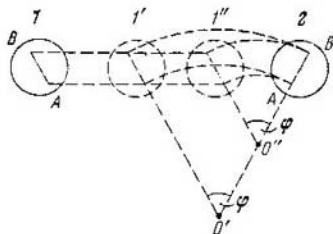


Fig. 36.2

definir el movimiento de uno de los puntos del sólido (por ejemplo, de su centro de masas) para que sea por completo caracterizado el movimiento de todo el sólido.

Cuando el movimiento es de rotación todos los puntos del sólido se mueven por circunferencias, cuyos centros yacen sobre una misma recta, llamada eje de rotación. Para describir el movimiento de rotación hay que fijar en el espacio la posición del eje de rotación y la velocidad angular del cuerpo en cada momento de tiempo.

Resulta que cualquier movimiento de un sólido puede ser representado como la superposición de los dos tipos fundamentales de movimiento indicados más arriba. Vamos a demostrar esta afirmación para el caso de un movimiento *plano*, para el que todos los puntos del sólido se desplazan por planos paralelos. Como ejemplo de movimiento plano podemos aducir la rodadura de un cilindro por un plano (fig. 36.1).

El desplazamiento arbitrario de un sólido de la posición I a la 2 (fig. 36.2) puede ser representado como la suma de dos desplazamientos: el desplazamiento de traslación de la posición I a la posi-

ción I' ó I'' y del giro alrededor del eje O' ó O'' . Es evidente, que semejante división del desplazamiento en el de traslación y de rotación se puede realizar por medio de un conjunto innumerable de procedimientos, pero en cualquier caso el giro se realiza a un mismo ángulo φ .

De acuerdo con lo dicho, el desplazamiento elemental de cualquier punto del sólido ds puede descomponerse en dos desplazamientos, o sea, de «traslación» ds_{tras} y de «rotación» ds_{rot} :

$$ds = ds_{\text{tras}} + ds_{\text{rot}},$$

con la particularidad de que ds_{tras} es igual para todos los puntos. Como hemos visto, semejante descomposición del desplazamiento ds puede realizarse de diferente forma, con esto en cada caso el desplazamiento de rotación ds_{rot} se ejecuta por el giro del cuerpo a un mismo ángulo $d\varphi$ (pero respecto de diferentes ejes), mientras que ds_{tras} y ds_{rot} resultan ser diferentes.

Dividiendo ds por el correspondiente intervalo de tiempo dt , obtenemos la velocidad del punto

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds_{\text{tras}}}{dt} + \frac{ds_{\text{rot}}}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}',$$

donde \mathbf{v}_0 es la velocidad del movimiento de traslación, igual para todos los puntos y \mathbf{v}' , la velocidad del sólido diferente para distintos puntos, acondicionada por la rotación.

Así, pues, el movimiento plano de un sólido puede ser representado como la suma de dos movimientos, es decir, da traslación a una velocidad \mathbf{v}_0 y de rotación a una velocidad angular ω (el vector ω está dirigido en la fig. 36.1 perpendicularmente al plano de la figura, tras ésta). Es posible realizar semejante representación de un movimiento compuesto mediante múltiples procedimientos que se diferencian por los valores de \mathbf{v}_0 y \mathbf{v}' , pero que corresponden a iguales valores de la velocidad angular ω . Por ejemplo, el movimiento de un cilindro que rueda sin deslizamiento por un plano (fig. 36.1), puede ser representado como un movimiento de traslación a velocidad \mathbf{v}_0 y la rotación simultánea a velocidad angular ω alrededor del eje O ó bien como un movimiento de traslación a velocidad $\mathbf{v}_0'' = 2\mathbf{v}_0$ y de rotación a la misma velocidad angular ω en torno del eje O'' , o bien, para acabar, como sólo una rotación de nuevo a la misma velocidad angular ω alrededor del eje O' .

Indicando que el sistema de referencia respecto del que examinamos el movimiento compuesto del sólido está inmóvil, el movimiento del sólido puede ser representado como la rotación a la velocidad angular ω , en un sistema de referencia que se mueve progresivamente a una velocidad \mathbf{v}_0 con relación al sistema inmóvil.

La velocidad lineal \mathbf{v}' del punto cuyo radio vector es \mathbf{r} , condicionada por la rotación del sólido, es igual a $\mathbf{v}' = [\omega \mathbf{r}]$ (véase (5.8)).

Por lo tanto, la velocidad de este punto durante el movimiento compuesto puede ser representada en la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\omega \mathbf{r}]. \quad (36.1)$$

Durante el movimiento plano, el desplazamiento elemental siempre puede ser representado como el giro alrededor de cierto eje que recibe el nombre de *eje instantáneo de rotación*. Éste puede encontrarse en los límites del sólido o fuera de él. Hablando en general, la posición del eje instantáneo de rotación respecto de un sistema inmóvil de referencia y con relación al propio cuerpo, varía con el tiempo. En el caso del cilindro que rueda (fig. 36.1) el eje instantáneo O' coincide con la línea de contacto entre el cilindro y el plano. Durante la rodadura del cilindro, el eje instantáneo se desliza tanto por el plano (es decir, respecto del sistema inmóvil de referencia), como también por la superficie del cilindro.

Para cada momento de tiempo es posible considerar que la velocidad de todos los puntos del sólido está condicionada por la rotación en torno del eje instantáneo correspondiente. Por consiguiente, el movimiento plano de un sólido puede ser considerado como una serie de rotaciones elementales sucesivas alrededor de ejes instantáneos.

Durante el movimiento no plano, el desplazamiento elemental del sólido puede ser representado como el giro en torno de un eje instantáneo sólo en el caso cuando los vectores \mathbf{v}_0 y ω son perpendiculares entre sí. Si el ángulo entre éstos se diferencia de $\pi/2$, el movimiento del sólido en cada momento de tiempo representará la superposición de dos movimientos —de rotación entorno de cierto eje y de traslación a lo largo de ese mismo eje.

§ 37. Movimiento del centro de masas de un sólido

Si dividimos un sólido en masas elementales m_i , podemos representarlo como un sistema de puntos materiales cuya disposición mutua queda invariable. Cualquiera de dichas masas elementales, puede hallarse tanto bajo la acción de las fuerzas internas, condicionadas por su interacción con otras masas elementales del sólido que examinamos, como de las fuerzas externas. Por ejemplo, si el sólido se encuentra en el campo de fuerzas de la gravitación terrestre, sobre cada masa elemental del sólido m_i actuará una fuerza externa igual a $m_i g$.

Escribamos para cada masa elemental la ecuación de la segunda ley de Newton:

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i, \quad (37.1)$$

donde \mathbf{f}_i es la resultante de todas las fuerzas internas y \mathbf{F}_i , la resultante de todas las fuerzas externas aplicadas a la masa elemental dada. Sumando las ecuaciones (37.1) para todas las masas elementa-

les, obtendremos

$$\sum m_i \mathbf{w}_i = \sum \mathbf{f}_i + \sum \mathbf{F}_i. \quad (37.2)$$

No obstante, la suma de todas las fuerzas internas que actúan en el sistema, es igual a cero. Por esta razón, la ecuación (37.2) se simplifica del modo siguiente:

$$\sum m_i \mathbf{w}_i = \sum \mathbf{F}_i. \quad (37.3)$$

En esta igualdad, en el segundo miembro se encuentra la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el sólido.

La suma del primer miembro de (37.3) puede ser sustituida por el producto de la masa m del cuerpo por la aceleración de su centro de masas \mathbf{w}_C . En efecto, de acuerdo con (27.6)

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_C.$$

Derivando dos veces esta correlación según el tiempo y tomando en consideración que $\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{w}_i$, mientras que $\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{w}_C$, podemos escribir:

$$\sum m_i \mathbf{w}_i = m \mathbf{w}_C. \quad (37.4)$$

Comparando las fórmulas (37.3) y (37.4), llegamos a la ecuación

$$m \mathbf{w}_C = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (37.5)$$

lo que significa que *el centro de masas de un sólido muévase como se movería bajo la acción de todas las fuerzas aplicadas al sólido, un punto material con igual masa que el sólido.*

La ecuación (37.5) ofrece la posibilidad de establecer el movimiento del centro de masas de un sólido, si se conoce su masa y las fuerzas aplicadas a él. En el caso del movimiento de traslación, esta ecuación determinará la aceleración no sólo del centro de masas, sino que también de cualquier otro punto del cuerpo.

§ 38. Rotación de un sólido alrededor de un eje inmóvil

Consideremos un sólido que puede girar en torno de un eje vertical inmóvil (fig. 38.1). Para excluir el desplazamiento del eje por el espacio, asentémoslo sobre cojinetes. La brida Br , que se apoya en el cojinete inferior, evita el desplazamiento vertical del eje.

Un cuerpo rígido puede ser considerado como un sistema de partículas (puntos materiales) entre las que las distancias son invariables. Para todo sistema de partículas, es válida la ecuación obtenida en el § 29

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = \sum \mathbf{N}_{\text{ext}} \quad (38.1)$$

(véase (29.18)). Esta ecuación también es justa para un sólido. En el último caso, M es el momento de la cantidad de movimiento del sólido; el segundo miembro de (38.1) es la suma de los momentos de las fuerzas externas, ejercidas sobre el sólido.

Tomemos en el eje de rotación el punto O y caractericemos la posición de las partículas que constituyen el sólido con ayuda de los radios vectores r , trazados desde dicho punto (en la fig. 38.1 se muestra la i -ésima partícula de masa m_i ; mediante un círculo con cruz se muestra la velocidad v_i de la partícula, dirigida hacia la figura). En correspondencia con (29.5), el momento de la cantidad de movimiento de la partícula i -ésima respecto del punto O es igual a

$$M_i = [r_i, m_i v_i] = m_i [r_i, v_i]. \quad (38.2)$$

Los vectores r_i y v_i son perpendiculares entre sí para todas las partículas del sólido. Por esta causa, el módulo del vector (38.2)

$$M_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega R_i, \quad (38.3)$$

donde R_i es la distancia entre la partícula y el eje de rotación (véase la fórmula (5.7)).

Cabe indicar, que de acuerdo con (38.3) el módulo del vector M_i

es proporcional a la velocidad de rotación del sólido ω ; en lo que se refiere a la dirección del vector M_i , ésta no depende de ω , ya que dicho vector yace en el plano que pasa por el eje de rotación y por la partícula m_i y es perpendicular a r_i .

Es fácil cerciorarse de que para todas las partículas que forman el sólido, el ángulo entre los vectores M_i y ω es agudo. Por esto, las proyecciones de estos vectores sobre el eje z , que coincide con el eje de rotación, tienen el mismo signo. Teniendo en cuenta lo dicho, podemos escribir que

$$\begin{aligned} M_{zi} &= M_i \cos \alpha_i = m_i r_i \omega R_i \cos \alpha_i = \\ &= m_i (r_i \cos \alpha_i) R_i \omega = m_i R_i^2 \omega_z. \end{aligned} \quad (38.4)$$

Aquí α_i es el ángulo entre el vector M_i y el eje z . Al cambiar la dirección del eje z por la opuesta, las dos proyecciones M_{zi} y ω_z cambian de signo, sin embargo, la igualdad (38.4) sigue siendo válida.

Sumando la expresión (38.4) respecto de todas las partículas, obtenemos el momento de la cantidad de movimiento del sólido con relación al eje z , que coincide con el de rotación:

$$M_z = \sum M_{zi} = \sum m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum m_i R_i^2. \quad (38.5)$$

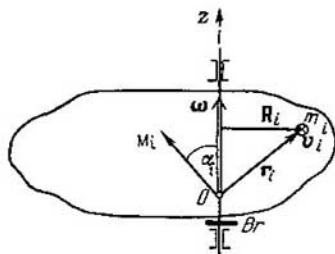


Fig. 38.1

La magnitud I , igual a la suma de los productos de las masas elementales por los cuadrados de sus distancias desde cierto eje, recibe el nombre de *momento de inercia* del sólido con relación al eje dado:

$$I = \sum m_i R_i^2. \quad (38.6)$$

La suma se realiza por todas las masas elementales m_i en las que puede ser dividido el cuerpo.

Tomando en consideración la fórmula (38.6), la expresión (38.5) puede aducirse en la forma

$$M_z = I \omega_z. \quad (38.7)$$

La fórmula obtenida es análoga a $p_z = m v_z$. Aquí, el momento de inercia desempeña el papel de masa y la velocidad angular, el de velocidad lineal.

Del tipo de la expresión (38.7) se desprende que la magnitud M_z no depende desde qué punto O (que yace en el eje de rotación) se toma el momento M .

De acuerdo con (29.19)

$$\frac{d}{dt} M_z = \sum N_{z \text{ ext.}}$$

Poniendo aquí la expresión (38.7) para M_z , llegamos a la ecuación

$$I \beta_z = \sum N_{z \text{ ext.}}, \quad (38.8)$$

donde $\beta_z = \dot{\omega}_z$ es la proyección de la aceleración sobre el eje z . La expresión (38.8) es análoga a la ecuación $m \dot{v}_z = \sum F_z$. En este caso, el momento de inercia juega el papel de masa, la aceleración angular, el de aceleración lineal y, por fin, el momento sumario de las fuerzas externas desempeña el papel de fuerza resultante.

La suma de las expresiones (38.2) nos proporciona el momento de la cantidad de movimiento del sólido con relación al punto O (véase la fig. 38.1):

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i = \sum m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i]. \quad (38.9)$$

En el caso general, la dirección del vector \mathbf{M} no coincide con el eje de rotación z del sólido y gira junto con éste en torno de dicho eje describiendo un cono (fig. 38.2).

De las consideraciones de simetría, queda claro que para un cuerpo homogéneo ¹⁾ simétrico en lo que atañe al eje de rotación (para un sólido de revolución homogéneo), en momento de la cantidad de movimiento con relación al punto O , que yace en el eje de rotación, coincide en dirección con el vector ω . En semejante caso, el módulo del momento de la cantidad de movimiento M es igual a $|M_z|$, es

¹⁾ En mecánica se llama homogéneo un cuerpo con igual densidad por todo su volumen (véase el § 39).

decir, al módulo de la proyección de M sobre el eje z . Tomando en consideración la expresión (38.7), obtenemos

$$M = I |\omega_z| = I\omega.$$

Para terminar, teniendo en cuenta que los vectores M y ω tienen igual dirección, llegamos a la correlación

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}. \quad (38.10)$$

Cabe recordar, que a diferencia de la correlación (38.7), válida para todo el sólido, (38.10) sólo sirve en el caso de un sólido que gira

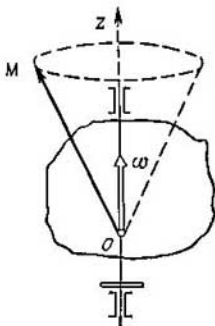


Fig. 38.2

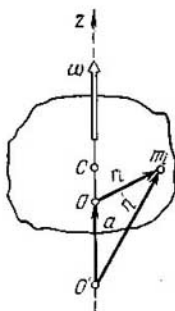


Fig. 38.3

alrededor del eje de simetría y, como veremos más adelante, es válida también para un sólido asimétrico que gira alrededor de uno de sus ejes fundamentales de inercia.

Cuando el eje de rotación pasa por el centro de masa C del sólido, el valor del momento M no depende de la posición del punto O en el eje de rotación, respecto del cual dicho momento se toma. En efecto, tomemos en el eje de rotación los puntos O y O' , distanciados entre sí por el segmento a (fig. 38.3). En la figura vemos que $\mathbf{r}'_i = \mathbf{a} + \mathbf{r}_i$. El momento de la cantidad de movimiento con relación al punto O'

$$\mathbf{M}' = \sum m_i [\mathbf{r}'_i, \mathbf{v}_i] = \sum m_i [(\mathbf{a} + \mathbf{r}_i), \mathbf{v}_i] = \sum m_i [\mathbf{a}, \mathbf{v}_i] + \sum m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i].$$

El segundo sumando del segundo miembro es el momento de la cantidad de movimiento M con relación al punto O . El primer sumando se puede transformar del modo siguiente:

$$\sum m_i [\mathbf{a}, \mathbf{v}_i] = [\mathbf{a}, \sum m_i \mathbf{v}_i] = [\mathbf{a}, m\mathbf{v}_C].$$

Como el centro de masas yace en el eje de rotación $v_C = 0$, por lo que $M' = M$. Para un sólido homogéneo que gira alrededor del eje de simetría, la independencia de M de la posición del punto O se desprende del tipo de la fórmula (38.10).

Cuando un cuerpo homogéneo simétrico gira alrededor de un eje vertical, en los cojinetes no surgen fuerzas de presión lateral (véase la fig. 38.1). Al no haber fuerza de la gravedad, los cojinetes podrían ser retirados, ya que incluso sin ellos el eje conservaría su posición en el espacio. Recibe el nombre de *eje libre* de un sólido, aquel cuya posición en el espacio queda invariable cuando alrededor de él el sólido gira no habiendo fuerzas externas.

Puede ser demostrado, que para un cuerpo de cualquier forma con distribución arbitraria de la masa, existen tres ejes perpendiculares entre sí, que pasan por el centro de masas y que pueden servir de ejes libres; se denominan *ejes principales de inercia* del sólido.

En un paralelepípedo homogéneo (fig. 38.4), los ejes principales de inercia serán, por lo visto, O_1O_1 , O_2O_2 y O_3O_3 , que pasan por los centros de las caras opuestas.

En un sólido con simetría axial (por ejemplo, en un cilindro homogéneo ¹⁾) uno de los ejes principales de inercia es el de simetría, pudiendo ser otros cualesquiera dos ejes perpendiculares entre sí que yacen en un plano perpendicular al eje de simetría y que pasan por el centro de masas del sólido (fig. 38.5). De este modo, en un cuerpo con simetría axial sólo está fijado uno de los ejes principales de inercia.

En un sólido con simetría central, es decir, una esfera, cuya densidad sólo depende de la distancia desde el centro, los ejes principales de inercia son tres cualesquiera ejes perpendiculares entre sí que pasan por el centro de masas. Esto significa, que ninguno de los ejes principales de inercia está fijado.

Reciben el nombre de *momentos principales de inercia* de un sólido, aquellos que se crean respecto de los ejes principales. En el caso general, estos momentos son diferentes: $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Para un sólido con simetría axial dos momentos principales de inercia tienen el mismo valor, mientras que el tercero difiere de ellos: $I_1 = I_2 \neq I_3$. Por fin, para un sólido con simetría central los tres momentos principales de inercia son iguales: $I_1 = I_2 = I_3$.

¹⁾ Es suficiente que la densidad del sólido en cada sección sea sólo función de la distancia desde el eje de simetría.

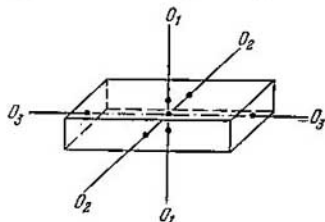


Fig. 38.4

No sólo una esfera homogénea posee iguales valores de los momentos principales de inercia, esta propiedad también es propia de un cubo homogéneo, semejante igualdad puede observarse en sólidos de forma arbitraria en absoluto, si la masa está distribuida de la forma correspondiente. Todos los sólidos de este tipo reciben el nombre de *peonzas esféricas*. Para ellas es característico que cualquier eje que pasa por el centro de masas tiene propiedades del eje libre y, por

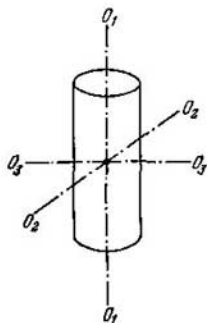


Fig. 38.5

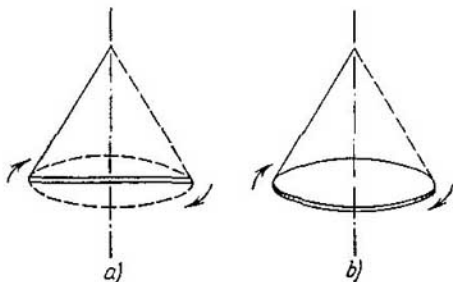


Fig. 38.6

lo tanto, como para la esfera, ninguno de los ejes principales de inercia está fijado. Todas las peonzas esféricas se comportan del mismo modo durante su rotación en iguales condiciones.

Los sólidos para los que $I_1 = I_2 \neq I_3$ se comportan como sólidos homogéneos de revolución y son denominados *peonzas simétricas*. Por fin, los sólidos con $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ se llaman *peonzas asimétricas*.

Cuando un sólido gira sin que sobre él actúe ningún influjo externo, sólo será estable la rotación en torno de los ejes principales, que corresponden a los valores máximo y mínimo del momento de inercia. Por lo contrario, será inestable la rotación alrededor de un eje que corresponde a un momento intermedio en magnitud. Esto significa, que las fuerzas que surgen con la menor desviación del eje de rotación del eje principal, actúan en una dirección tal que el valor de la desviación crece. Al desviarse la rotación del eje estable, bajo la acción de las fuerzas que en tal caso surgen, él retorna por sí mismo a la rotación en torno del correspondiente eje principal.

Podemos cerciorarnos de lo dicho si intentamos lanzar cierto cuerpo, que tenga la forma de un paralelepípedo (por ejemplo, una caja de cerillas), poniéndola al mismo tiempo en rotación¹⁾. Con

¹⁾ La acción de la fuerza de la gravedad no será en este caso determinante. Ésta sólo condicionará la caída del sólido, que transcurre junto con la rotación.

ello, se advertirá que al caer el cuerpo puede girar de forma estable alrededor de los ejes que pasan por las caras mayores o menores. Los intentos de lanzar el cuerpo de manera que gire en torno del eje que pasa por las caras medias, serán infructuosos.

Al haber influjo del exterior, por ejemplo, en lo que atañe a un hilo del que está suspendido el sólido en rotación, sólo es estable el giro alrededor del eje principal, que corresponde al valor máximo del momento de inercia. Por esta misma causa, una barra fina suspendida de un hilo, sujeto por uno de sus extremos, durante la rotación rápida girará, al fin de cuentas, en torno de un eje perpendicular a ella misma y que pasa por su centro (fig. 38.6, *a*). De modo análogo se comporta un disco suspendido de hilo sujeto en su borde (fig. 38.6, *b*).

Hasta el momento hemos hablado de sólidos con distribución invariable de la masa. Supongamos ahora que el sólido puede perder durante cierto tiempo la propiedad de invariabilidad de la disposición mutua de sus partes, con la particularidad de que en el transcurso de dicho tiempo se produce la redistribución de la masa del sólido, a causa de cual el momento de inercia varía desde el valor I_1 hasta I_2 . Si semejante redistribución se realiza en condiciones cuando $\sum N_{\text{ext}} = 0$, de acuerdo con el principio de conservación del momento de cantidad de movimiento, debe cumplirse la igualdad

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2, \quad (38.11)$$

donde ω_1 es el valor inicial de la velocidad angular del sólido, ω_2 , la velocidad final. Así, pues, la variación del momento de inercia provoca el correspondiente cambio de la velocidad angular. Por regla, esto se explica mostrando un fenómeno que consiste en que un hombre estando de pie en un banco giratorio, al poner las manos en cruz gira más lentamente que al apretarlas al pecho, en este último caso la velocidad de rotación aumenta.

§ 39. Momento de inercia

De la definición (véase (38.6))

$$I = \sum \Delta m_i R_i^2 \quad (1)$$

se deduce que el momento de inercia es una magnitud aditiva. Esto quiere decir, que dicho momento de un sólido es igual a la suma de los momentos de inercia de sus partes.

La noción de momento de inercia fue introducida al estudiar la rotación de un sólido. Pero hay que tener en cuenta que esta magnitud existe independientemente de la rotación. Cada sólido, independientemente de si está en rotación o en reposo, posee cierto momento de

¹⁾ En este párrafo es conveniente designar la masa elemental del sólido con el símbolo Δm_i en vez de m_i .

inercia respecto de cualquier eje, lo mismo que un sólido tiene masa sin depender de si está en movimiento o en reposo.

La distribución de la masa en los límites del sólido puede ser caracterizada por una magnitud llamada *densidad*. Cuando el sólido es homogéneo, es decir, en el caso cuando por todos sus puntos las propiedades de éste son iguales, llamamos densidad a una magnitud igual a

$$\rho = m/V, \quad (39.1)$$

donde m es la masa del sólido y V , su volumen. Así, pues, para un sólido homogéneo, la densidad es la masa por unidad de volumen del mismo.

Para un sólido con la masa distribuida no uniformemente, la expresión (39.1) proporciona la densidad media. En tal caso, para el punto dado la densidad se define del modo siguiente:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (39.2)$$

En esta expresión Δm es la masa contenida en el volumen ΔV , que durante el paso al límite se concentra en el punto donde se determina la densidad.

El paso al límite (39.2) no debe entenderse como ΔV literalmente se concentra en un punto. Al entenderlo así, para dos puntos que, prácticamente, coinciden, uno de los cuales se halla en el núcleo de un átomo y el otro, en el intervalo entre los núcleos, obtendríamos resultados que en mucho se diferenciarían (para el primer punto una enorme magnitud, para el segundo, cero). Por esta causa, la distribución de ΔV debe efectuarse hasta que se obtenga un volumen que desde el *punto de vista de la física* sea infinitamente pequeño. Por semejante volumen se entiende un volumen que, por un lado, sea suficientemente pequeño para que las propiedades macroscópicas (o sea, tales que son propias de un gran conjunto de átomos) en sus márgenes puedan ser consideradas iguales, mientras que, por otro lado, suficientemente grande para que no surja discontinuidad de la sustancia.

En correspondencia con (39.2) la masa elemental Δm_i es igual al producto de la densidad del sólido ρ_i en el punto dado por el respectivo volumen elemental ΔV_i :

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i.$$

Por lo tanto, el momento de inercia puede ser representado de la forma siguiente:

$$I = \sum \rho_i R_i^2 \Delta V_i. \quad (39.3)$$

Si la densidad del sólido es constante, ésta puede ser sacada tras el signo de la suma:

$$I = \rho \sum R_i^2 \Delta V_i. \quad (39.4)$$

Las correlaciones (39.3) y (39.4) son aproximadas, con la particularidad de que su precisión aumenta al disminuir los volúmenes elementales ΔV_i y las masas elementales Δm_i que a aquéllos corresponden. Por consiguiente, el problema de la definición de los momentos de inercia se reduce a la integración:

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV. \quad (39.5)$$

Las integrales en (39.5) se toman por todo el volumen del sólido. Las magnitudes ρ y R son en estas integrales funciones de un punto, o sea, por ejemplo, de las coordenadas cartesianas x, y, z .

Aduzcamos como ejemplo la determinación del momento de inercia de un disco homogéneo respecto del eje perpendicular al plano

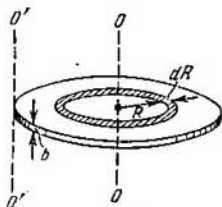


Fig. 39.1

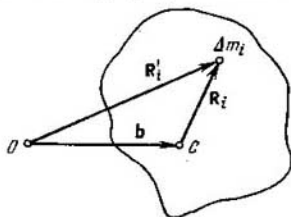


Fig. 39.2

del disco y que pasa por su centro (fig. 39.1). Dividamos el disco en capas anulares de grosor dR . Todos los puntos de una capa se hallarán a la misma distancia del eje, igual a R . El volumen de semejante capa

$$dV = b2\pi R dR,$$

donde b es el grosor del disco. Como éste es homogéneo, su densidad es idéntica en todos los puntos y ρ en (39.5) pueda sacarse tras el signo de la integral:

$$I = \rho \int R^2 dV = \rho \int_0^{R_0} R^2 b2\pi R dr,$$

donde R_0 es el radio del disco. Saquemos el factor constante $2\pi b$ tras el signo de integración:

$$I = 2\pi b\rho \int_0^{R_0} R^3 dR = 2\pi b\rho \frac{R_0^4}{4}.$$

Por fin, introduciendo la masa del disco m , igual al producto de la densidad ρ por el volumen del disco $b\pi R_0^2$, obtenemos:

$$I = \frac{mR_0^2}{2}. \quad (39.6)$$

En el ejemplo analizado, la determinación del momento de inercia se simplificó a causa de que el sólido era homogéneo y simétrico y el momento de inercia se definía con relación al eje de simetría. Si quisiéramos hallar el momento de inercia del disco en lo que atañe, por ejemplo, al eje $O'O'$, perpendicular al sólido y que pasa por su borde (véase la fig. 39.1), los cálculos serían, sin duda alguna, mucho más complicados. En semejantes casos, la definición del momento de inercia se simplifica de forma considerable haciendo uso del *teorema de Steiner*, que se enuncia de la manera siguiente: *el momento de inercia I con relación a un eje tomado al azar es igual a la suma del momento de inercia I_C , respecto de un eje paralelo al dado y que pasa por el centro de masas del cuerpo, más el producto de la masa del cuerpo m por el cuadrado de la distancia a entre los ejes:*

$$I = I_C + ma^2. \quad (39.7)$$

De acuerdo con el teorema de Steiner, el momento de inercia de un disco respecto del eje $O'O'$ es igual al momento de inercia que hemos hallado (39.6) con relación al eje que pasa por el centro del disco, más mR_0^2 (la distancia entre los ejes $O'O'$ y OO es igual al radio del disco R_0):

$$I = \frac{mR_0^2}{2} + mR_0^2 = \frac{3}{2}mR_0^2.$$

Así pues, en esencia el teorema de Steiner reduce la determinación del momento de inercia respecto de un eje arbitrario, al cálculo de dicho momento con relación a un eje que pasa por el centro de masas del sólido.

Para demostrar el teorema de Steiner consideremos el eje C que pasa por el centro de masas de un sólido y el eje O paralelo al primero y que dista de él a una distancia a (fig. 39.2; los dos ejes son perpendiculares al plano de la figura). Designemos con \mathbf{R}_i un vector perpendicular al eje C , trazado desde éste a la masa elemental Δm_i y con \mathbf{R}'_i , un vector análogo trazado desde el eje O . Introduzcamos también un vector \mathbf{a} perpendicular a los ejes que une los correspondientes puntos de los ejes O y C . Para cualquier par de puntos opuestos, este vector tiene igual magnitud (igual a la distancia a entre los ejes), e igual dirección. Entre los vectores enumerados hay la siguiente correlación

$$\mathbf{R}'_i = \mathbf{a} + \mathbf{R}_i.$$

El cuadrado de la distancia desde el eje C a la masa elemental Δm_i , es igual a $R_i^2 = R_i^2$, mientras que desde el eje O :

$$R_i'^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{R}_i)^2 = a^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{R}_i + R_i^2.$$

Teniendo en cuenta la última correlación, el momento de inercia respecto del eje O puede ser representado en la forma

$$I = \sum \Delta m_i R_i'^2 = a^2 \sum \Delta m_i + 2\mathbf{a} \sum \Delta m_i \mathbf{R}_i + \sum \Delta m_i R_i^2 \quad (39.8)$$

(los factores constantes se sacan tras el signo de la suma). El último término de esta expresión es el momento de inercia del sólido en lo que atañe al eje C . Vamos a designarlo con I_C . La suma de las masas elementales nos proporciona la masa del sólido m . La suma $\sum \Delta m_i R_i$ es igual al producto de la masa del sólido por el vector \mathbf{R} , trazado

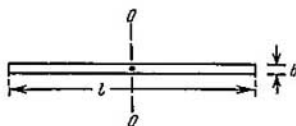


Fig. 39.3

desde el eje C al centro de masas del sólido. Como el centro de inercia yace en el eje C , dicho vector \mathbf{R} y, por consiguiente, todo el segundo término en (39.8) son iguales a cero. De este modo, llegamos a la conclusión de que

$$I = ma^2 + I_C,$$

que es lo queríamos demostrar (véase (39.7)).

Para finalizar, aduciremos los valores de los momentos de inercia de ciertos sólidos (se supone que los sólidos son homogéneos, m es la masa del sólido).

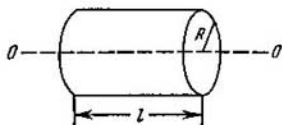


Fig. 39.4

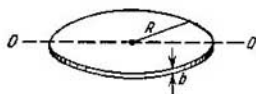


Fig. 39.5

1. El cuerpo es una barra fina y larga con sección de cualquier forma. La dimensión transversal máxima de la barra b es mucho menor que su longitud l ($b \ll l$). El momento de inercia respecto de un eje perpendicular al de la barra y que pasa por su mitad (fig. 39.3) es igual a

$$I = \frac{1}{12} ml^2.$$

2. Para un disco o cilindro, con cualquier razón entre R y l (fig. 39.4), el momento de inercia respecto de un eje que coincide con el eje geométrico del cilindro,

$$I = \frac{1}{2} mR^2.$$

3. El cuerpo es un fino disco. El grosor de éste b es mucho menor que su radio R ($b \ll R$). El momento de inercia con relación a un eje que coincide con el diámetro del disco (fig. 39.5) es igual a

$$I = \frac{1}{4} mR^2.$$

4. El momento de inercia de una esfera de radio R respecto de un eje que pasa por su centro

$$I = \frac{2}{5} mR^2.$$

§ 40. Concepto de tensor de inercia

En el § 38 fue establecido que para un cuerpo homogéneo que gira en torno del eje de simetría, la relación entre los vectores \mathbf{M} y $\boldsymbol{\omega}$ tiene una forma muy sencilla:

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega} \quad (40.1)$$

(véase (38.10)) o bien

$$M_x = I\omega_x, \quad M_y = I\omega_y, \quad M_z = I\omega_z. \quad (40.2)$$

Esto se explica por el hecho de que para semejante sólido los vectores \mathbf{M} y $\boldsymbol{\omega}$ son colineales. Sin embargo, en el caso general los vectores \mathbf{M} y $\boldsymbol{\omega}$ forman un ángulo diferente de cero (véase la fig. 38.2), de manera que la ligazón entre ellos no puede ser expresada por la fórmula (40.1).

Intentemos aclarar cómo es posible ligar de forma analítica los vectores \mathbf{M} y $\boldsymbol{\omega}$ en el caso más general. Vamos a partir de que los módulos de \mathbf{M} y $\boldsymbol{\omega}$ son proporcionales entre sí. En efecto, de acuerdo con (38.3) los módulos de los vectores elementales \mathbf{M}_i son proporcionales al módulo de $\boldsymbol{\omega}$, por lo que el módulo de la suma de estos vectores también será proporcional a $\boldsymbol{\omega}$. Es fácil comprender, que tal proporcionalidad tendrá lugar si cada una de las componentes del vector \mathbf{M} dependa linealmente de las componentes del vector $\boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{aligned} M_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ M_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ M_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \quad (40.3)$$

Las magnitudes I_{xx} , I_{xy} , etc., son aquí coeficientes de proporcionalidad que tienen la dimensión del momento de inercia (comp. con (40.2)). Al aumentar $\boldsymbol{\omega}$ cierto número de veces, cada una de sus componentes ω_x , ω_y , ω_z aumentará igual número de veces, lo mismo que cada una de las componentes M_x , M_y , M_z , por lo tanto, el propio vector \mathbf{M} aumentará en igual magnitud.

La orientación mutua de los vectores \mathbf{M} y $\boldsymbol{\omega}$ determínase por los valores de los coeficientes de proporcionalidad. Sea, por ejemplo,

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$, mientras que los demás coeficientes son nulos. En tal caso, las fórmulas (40.3) se convierten en las correlaciones (40.2), es decir, los vectores \mathbf{M} y $\boldsymbol{\omega}$ resultan ser colineales. Supongamos ahora, que el vector $\boldsymbol{\omega}$ está dirigido a lo largo del eje z y que los coeficientes I_{xz} , I_{yz} , I_{zz} se diferencian de cero. Entonces, $\omega_z = \omega$, $\omega_x = \omega_y = 0$. La sustitución de estos valores en (40.3) nos ofrece

$$M_x = I_{xz}\omega \neq 0, \quad M_y = I_{yz}\omega \neq 0, \quad M_z = I_{zz}\omega \neq 0.$$

Las tres componentes del vector \mathbf{M} han resultado ser diferentes de cero, lo que quiere decir que el vector \mathbf{M} forma cierto ángulo con el vector $\boldsymbol{\omega}$, dirigido por el eje z .

De lo dicho se desprende que en el caso más general, la relación entre el momento de la cantidad de movimiento y la velocidad angular del sólido, puede ser expresada con ayuda de las fórmulas (40.3). Fórmulas análogas pueden ser escritas para cualesquiera vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , cuyos módulos son proporcionales entre sí:

$$\begin{aligned} b_x &= T_{xx}a_x + T_{xy}a_y + T_{xz}a_z, \\ b_y &= T_{yx}a_x + T_{yy}a_y + T_{yz}a_z, \\ b_z &= T_{zx}a_x + T_{zy}a_y + T_{zz}a_z. \end{aligned} \quad (40.4)$$

Estas fórmulas se puede escribir de forma más compacta, como una sola expresión

$$b_i = \sum_{k=x,y,z} T_{ik}a_k \quad (i=x, y, z). \quad (40.5)$$

Haciendo $i = x$ y después de realizar la suma, con la que el índice k adquiere los valores x, y, z , obtenemos la primera fórmula (40.4), haciendo $i = y$, la segunda, etc.

El conjunto de nueve magnitudes $T_{xx}, T_{xy}, \dots, T_{zz}$ recibe el nombre de *tensor de segundo rango*¹⁾, mientras que la operación expresada con las fórmulas (40.4), recibe el nombre de multiplicación del vector \mathbf{a} por el tensor \mathbf{T} . Como resultado de semejante multiplicación se obtiene un nuevo vector \mathbf{b} .

Se ha adoptado escribir el tensor en forma de una tabla cuadrada:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad (40.6)$$

(en lugar de x, y, z pueden escribirse los índices 1, 2, 3). Las magnitudes T_{xx}, T_{xy}, \dots denominanse *componentes* del tensor. Las componentes T_{xx}, T_{yy}, T_{zz} , dispuestas por la diagonal de la tabla (40.6),

¹⁾ Se llama tensor de segundo rango el conjunto de nueve magnitudes $T_{xx}, T_{xy}, \dots, T_{zz}$ que al girar los ejes de coordenadas según determinadas reglas se transforman (véase el Apéndice III).

se llaman *diagonales*. Los valores de las componentes dependen de la elección de los ejes de coordenadas sobre los que se proyectan los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} (de la elección de los ejes dependen también las componentes de estos vectores).

De la comparación de las fórmulas (40.3) y (40.4) sigue que los coeficientes en las fórmulas (40.3) son las componentes del tensor de segundo rango:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (40.7)$$

Éste se denomina *tensor de inercia* de un sólido, que caracteriza las propiedades de inercia de éste durante la rotación.

Para hallar los valores de las componentes del tensor de inercia, partiremos de la determinación de momento de la cantidad de movimiento del sólido:

$$\mathbf{M} = \sum m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i] \quad (40.8)$$

(véase (38.9)). Tracemos los vectores \mathbf{r}_i desde el centro de masas del sólido (fig. 40.1). Sustituyamos en la expresión (40.8) la velocidad \mathbf{v}_i por el producto

vectorial $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]$ (véase la fórmula (5.8)). Como resultado obtenemos

$$\mathbf{M} = \sum m_i [\mathbf{r}_i [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i]].$$

Ahora hagamos uso de la fórmula «bac menos cab» (fórmula (2.35)):

$$\mathbf{M} = \sum m_i \{ \boldsymbol{\omega} (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \boldsymbol{\omega}) \}. \quad (40.9)$$

Cabe recordar que la suma se efectúa por todas las masas elementales, en las que mentalmente hemos dividido el sólido.

Liguemos al sólido un sistema cartesiano de coordenadas ¹⁾ (véase la fig. 40.1) y escribamos los productos escalares, que figuran en la expresión (40.9), con ayuda de las componentes de los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y \mathbf{r}_i por los ejes de dicho sistema (véase (2.23)). Ubiquemos en el centro de masas C del sólido el origen de coordenadas (recordemos que desde ese punto hemos trazado los vectores \mathbf{r}_i). Teniendo en cuenta que $r_{xi} = x_i$, $r_{yi} = y_i$, $r_{zi} = z_i$, tendremos:

$$\mathbf{M} = \sum m_i \{ \boldsymbol{\omega} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \mathbf{r}_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \}. \quad (40.10)$$

¹⁾ Remarquemos, que los ejes de este sistema están rígidamente unidos al sólido y giran junto con él.

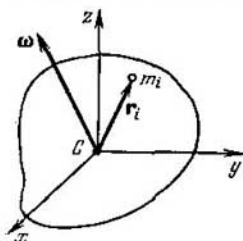


Fig. 40.1

Hallemos la proyección de este vector sobre el eje x :

$$M_x = \sum m_i \{ \omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \} = \\ = \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i. \quad (40.11)$$

De forma análoga se hallan las proyecciones del vector \mathbf{M} en los ejes y , z :

$$M_y = -\omega_x \sum m_i y_i x_i + \omega_y \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum m_i y_i z_i, \quad (40.12)$$

$$M_z = -\omega_x \sum m_i z_i x_i - \omega_y \sum m_i z_i y_i + \omega_z \sum m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (40.13)$$

La comparación de las expresiones obtenidas con las fórmulas (40.3) nos permite hallar los valores de las componentes del tensor de inercia. Escribamos de inmediato estos valores en forma de una tabla:

$$I = \begin{pmatrix} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i y_i x_i & \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i z_i x_i & -\sum m_i z_i y_i & \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}. \quad (40.14)$$

Las componentes diagonales del tensor son los momentos de inercia respecto de los correspondientes ejes de coordenadas estudiados en el párrafo anterior. Estas componentes reciben el nombre de *momentos de inercia axiales*. Las componentes no diagonales denominan *momentos de inercia centrífugos*. Cabe indicar, que las componentes no diagonales del tensor (40.14) satisfacen la condición: $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$. El tensor que satisface semejante condición se llama *simétrico*.

Prácticamente, las componentes del tensor de inercia se calculan integrando. Por ejemplo, la componente I_{xx} se determina por la fórmula

$$I_{xx} = \int \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dV,$$

donde $\rho(x, y, z)$ es la densidad, dV , el volumen elemental. La integración se realiza por todo el volumen del sólido.

Hallemos las componentes del tensor de inercia para un paralelepípedo rectangular homogéneo, eligiendo los ejes de coordenadas como se muestra en la fig. 40.2. El origen de coordenadas coincide con el centro de masas C del sólido. Para calcular el momento axial de inercia I_{zz} dividimos el sólido en bandas con área de la base $dx dy$. Todos los elementos de la banda tienen los mismos valores de las coordenadas x e y . El volumen de la banda es igual a $2c dx dy$, mientras que su masa $dm = \rho 2c dx dy$. Por esta causa, la aportación de la banda en I_{zz} se determina con la expresión

$$dI_{zz \text{ banda}} = 2\rho c (x^2 + y^2) dx dy.$$

Después de integrar esta expresión por x , hallamos la aportación en I_{zz} que proporciona la capa de longitud $2a$, anchura $2c$ y grosor dy , mostrada en la fig. 40.2:

$$dI_{zz \text{ en pa}} = \int_{-a}^{+a} 2\rho c (x^2 + y^2) dx dy = 2\rho c dy \int_{-a}^{+a} x^2 dx + 2\rho c y^2 dy \int_{-a}^{+a} dx = \left(\frac{4}{3} \rho c a^3 + 4\rho c a y^2 \right) dy \quad (40.15)$$

(como el sólido es homogéneo, ρ no depende de las coordenadas x, y, z).

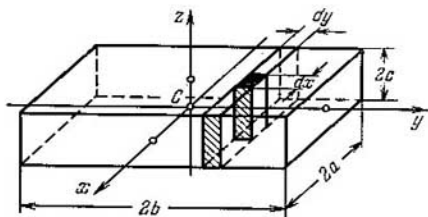


Fig. 40.2

Por fin, integrando la expresión (40.15) por y , obtenemos I_{zz} de todo el cuerpo:

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int_{-b}^{+b} \left(\frac{4}{3} \rho c a^3 + 4\rho c a y^2 \right) dy = \\ &= \frac{4}{3} \rho c a^3 \int_{-b}^{+b} dy + 4\rho c a \int_{-b}^{+b} y^2 dy = \frac{8}{3} \rho c a^3 b + \frac{8}{3} \rho c a b^3 = \\ &= \frac{1}{3} \rho (2a) (2b) (2c) (a^2 + b^2) = \frac{1}{3} m (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

(m es la masa del sólido). Cálculos análogos nos ofrecen

$$I_{xx} = \frac{1}{3} m (b^2 + c^2), \quad I_{yy} = \frac{1}{3} m (a^2 + c^2).$$

Calculemos ahora uno de los momentos centrífugos, por ejemplo, I_{xy} . La aportación de una banda con base $dx dy$ en dicho momento es igual a

$$dI_{xy \text{ banda}} = -\rho x y 2c dx dy,$$

y la aportación de la capa

$$dI_{xy \text{ capa}} = -2\rho cy dy \int_{-a}^{+a} x dx = 0.$$

De acuerdo con este resultado, el momento de todo el sólido también es nulo. Un resultado análogo obtenemos para los demás momentos centrífugos. De este modo, con la elección de los ejes de coordenadas mostrada en la fig. 40.2, el tensor del momento de inercia de un paralelepípedo rectangular homogéneo, tiene el aspecto

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (40.16)$$

(hemos conservado en cada componente diagonal un solo índice).

Semejante resultado se obtiene gracias a que en calidad de ejes de coordenadas fueron elegidos los ejes principales de inercia del

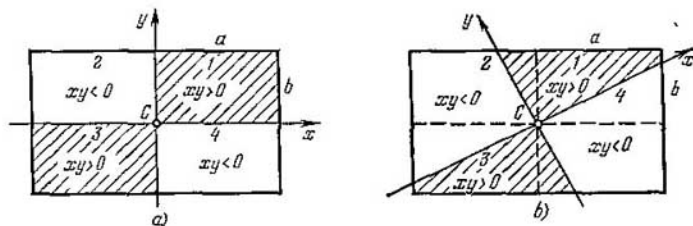


Fig. 40.3

sólido (véase el § 38). Al elegir los ejes de coordenadas de otro modo, los momentos centrífugos de inercia resultan ser diferentes de cero. Podemos cerciorarnos de esto con ayuda de los siguientes razonamientos. Con la elección de los ejes mostrada en la fig. 40.3, a, las áreas de los rectángulos 1, 2, 3 y 4 son iguales. En dos de ellos el producto xy es positivo, en los otros dos, negativo. Esto conduce a que la integral de xy , tomada por toda el área, resulta ser igual a cero. Con la elección de los ejes, mostrada en la fig. 40.3, b, las áreas de las figuras 1 y 3 sombreadas, son menores que las áreas de las figuras no sombreadas 2 y 4 ($a > b$). Por esta razón, la integral de xy , tomada por el área sumaria, será diferente de cero. Del correspondiente modo, tampoco será nulo el momento centrífugo I_{xy} .

El resultado obtenido es general para todos los sólidos, independientemente de su forma y distribución de la masa. Si tomamos como ejes de coordenadas los ejes principales de inercia del sólido, el tensor de inercia tiene la forma (40.16). Las magnitudes I_x, I_y, I_z

(pero no I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} en (40.7); al girar los ejes de coordenadas varían todas las componentes del tensor, incluidas las diagonales) reciben el nombre de *momentos principales de inercia* del sólido. Cabe remarcar, que dichos momentos denominanse momentos axiales calculados no en ejes arbitrarios, sino que en los principales.

Los ejes principales de inercia son perpendiculares entre sí y se cruzan en el centro de masas del sólido. En el caso general (cuando $I_x \neq I_y \neq I_z$) estos ejes se pueden elegir según un solo procedimiento. Para la peonza esférica (es decir, para un sólido en el que $I_x = I_y = I_z$; véase el § 38) la posición de los ejes principales resulta ser por completo indeterminada. En la peonza simétrica ($I_x = I_y \neq I_z$) sólo está fijado el eje z , los otros dos son indeterminados.

Supongamos que el sólido gira alrededor de uno de sus ejes principales de inercia, digamos, en torno del eje z . Tomando los ejes principales como ejes de coordenadas, obtenemos $\omega_z = \omega$, $\omega_x = \omega_y = 0$. Como con semejante elección de los ejes de coordenadas, el tensor de inercia tiene la forma (40.16), las fórmulas (40.3) nos conducen a los siguientes valores de las componentes del momento de la cantidad de movimiento:

$$M_x = M_y = 0, \quad M_z = I_z \omega.$$

Por lo tanto, el vector \mathbf{M} tiene la misma dirección que $\boldsymbol{\omega}$. Igual resultado obtenemos al girar el sólido alrededor de otros ejes principales. En todos esos casos

$$\mathbf{M} = I \boldsymbol{\omega}, \quad (40.17)$$

donde I es el correspondiente momento de inercia del sólido. En el § 38 obtuvimos esta fórmula para un sólido homogéneo en rotación alrededor de su eje de simetría (véase (38.10)). Ahora hemos establecido que la fórmula (40.17) es justa en aquellos casos, cuando un sólido tomado al azar gira en torno de una de sus ejes principales de inercia.

En conclusión, aclaremos en qué casos la fórmula $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{N}$ (véase (38.1)), que siempre es válida, puede ser escrita en la forma

$$I \dot{\beta} = \mathbf{N}. \quad (40.18)$$

Por lo visto, podemos hacer esto, ante todo, cuando el sólido gira cerca del eje principal y el momento de fuerza \mathbf{N} está dirigido a lo largo de dicho eje. En efecto, en tal caso el momento \mathbf{N} provoca el incremento de $d\mathbf{M}$, colinear a \mathbf{M} ($d\mathbf{M} = \mathbf{N} dt$). Por esta causa, la rotación siempre transcurre en torno del eje principal, de forma que la correlación $\mathbf{M} = I \boldsymbol{\omega}$ no se viola. No obstante, en tal caso la fórmula vectorial (40.18) nada nuevo nos ofrece en comparación con la fórmula

$$I \dot{\beta}_z = N_z \quad (40.19)$$

(z es el eje de rotación).

Cuando \mathbf{N} no es colinear a \mathbf{M} (por ejemplo, para \mathbf{N} perpendicular a \mathbf{M}), con el tiempo, el eje de rotación se desplaza con relación al sólido; por esta razón, incluso cuando la correlación $\mathbf{M} = I\omega$ se cumple en el momento inicial, con el tiempo dicha correlación deja de cumplirse y la ecuación (40.18) pierde su sentido. Sólo cuando el sólido es una peonza esférica, no tiene importancia el desplazamiento del eje de rotación respecto del cuerpo. Para la peonza esférica, cualesquiera de los ejes es principal y tiene el mismo valor que el momento de inercia I ; por esto, la ecuación (40.18) es justa con cualquier dirección mutua de los vectores \mathbf{N} y ω .

§ 41. Energía cinética de un sólido en rotación

Comencemos examinando la rotación de un sólido alrededor de un eje inmóvil que vamos a llamar z (fig. 41.1). La velocidad lineal de la masa elemental m_i es igual a $v_i = \omega R_i$, donde R_i es la distancia desde la masa m_i al eje z . Por consiguiente, para la energía cinética de la i -ésima masa elemental, se obtiene la expresión

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2.$$

La energía cinética del sólido se compone de las energías cinéticas de sus partes:

$$T = \sum T_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2.$$

La suma en el segundo miembro de esta correlación es el momento de inercia I del sólido con relación al eje de rotación. Así, pues, la energía cinética de un sólido que gira en torno de un eje inmóvil, es igual a

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2. \tag{41.1}$$

Sea que sobre la masa m_i actúan ¹⁾ la fuerza interna \mathbf{f}_i y la fuerza externa \mathbf{F}_i (véase la fig. 41.1). De acuerdo con (20.5) estas fuerzas realizan durante el tiempo dt un trabajo

$$dA_i = \mathbf{f}_i \mathbf{v}_i dt + \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i dt = \mathbf{f}_i [\omega, \mathbf{r}_i] dt + \mathbf{F}_i [\omega, \mathbf{r}_i] dt.$$

¹⁾ La fuerza resultante $\mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i$ yace en un plano perpendicular al eje de rotación.

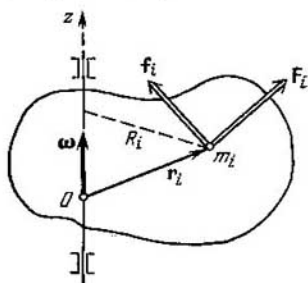


Fig. 41.1

Después de realizar en los productos mixtos de los vectores la permutación cíclica de los factores (véase (2.34)), tenemos

$$dA_i = \omega [r_i, \mathbf{f}_i] dt + \omega [r_i, \mathbf{F}_i] dt = \omega N_i^{(\text{int})} dt + \omega N_i dt, \quad (41.2)$$

donde $N_i^{(\text{int})}$ es el momento de la fuerza interna respecto del eje O , N_i , momento análogo de la fuerza externa.

Al sumar la expresión (41.2) por todas las masas elementales, se obtiene el trabajo elemental que se realiza sobre el sólido durante el tiempo dt :

$$dA = \sum dA_i = \omega \left\{ \sum N_i^{(\text{int})} \right\} dt + \omega \left\{ \sum N_i \right\} dt.$$

La suma de los momentos de las fuerzas internas es igual a cero (véase (29.17)). Por lo tanto, designando el momento sumario de las fuerzas externas por N , llegamos a la expresión

$$dA = \omega N dt = \omega N_\omega dt \quad (41.3)$$

(hemos hecho uso de la fórmula (2.21)). Por fin, tomando en consideración que ωdt es el ángulo $d\varphi$, al que gira el sólido durante el tiempo dt tenemos:

$$dA = N_\omega d\varphi. \quad (41.4)$$

El signo del trabajo depende del signo de N_ω , es decir, del signo de la proyección del vector N sobre la dirección del vector ω .

Así, pues, cuando un sólido gira, las fuerzas internas no realizan trabajo y el de las fuerzas externas se determina por la fórmula (41.4).

A la fórmula (41.4) podemos llegar haciendo uso de que el trabajo realizado por todas las fuerzas aplicadas al sólido se dirige al incremento de su energía cinética (véase (19.11)). Tomando la diferencial de los dos miembros de la igualdad (41.1), llegamos a la correlación

$$\begin{aligned} dT &= d(I\omega^2/2) = d(I\omega^2/2) = I\omega d\omega = I\omega\beta dt = \\ &= I\omega\beta_\omega dt = I\beta_\omega d\varphi. \end{aligned}$$

De acuerdo con (38.8) $I\beta_\omega = N_\omega$, de forma que sustituyendo dT por dA llegamos a la fórmula (41.4).

En la tabla 41.1 se comparan las fórmulas de mecánica del movimiento de rotación con las fórmulas análogas del movimiento de traslación (mecánica del punto). De esta comparación es fácil concluir que en todos los casos, el papel de masa es desempeñado por el momento de inercia, el papel de fuerza, por el momento de fuerza, el papel de cantidad de movimiento, por el momento de la cantidad de movimiento, etc.

La fórmula (41.1) ha sido obtenida para el caso, cuando el sólido gira alrededor de un eje inmóvil fijado en el sólido. Supongamos ahora, que el sólido gira de forma arbitraria con relación a un punto inmóvil que coincide con su centro de masas. Liguemos de forma

Tabla 41.1

Movimiento de traslación	Movimiento de rotación
<p>v — velocidad lineal</p> <p>$w = \dot{v}$ — aceleración lineal</p> <p>m — masa</p> <p>$p = mv$ — cantidad de movimiento</p> <p>F — fuerza</p> <p>$\dot{p} = F$</p> <p>$mw = F$</p> <p>$T = mv^2/2$</p> <p>$dA = F_s ds = F_v ds$</p>	<p>ω — velocidad angular</p> <p>$\beta = \dot{\omega}$ — aceleración angular</p> <p>I — momento de inercia</p> <p>$M_z = I\omega_z$ — momento de la cantidad de movimiento*)</p> <p>N o N_z — momento de fuerza</p> <p>$\dot{M} = N$</p> <p>$I\beta_z = N_z^*$</p> <p>$T = I\omega^2/2^*$</p> <p>$dA = N_\omega d\varphi$</p>
<p>*) Para un eje inmóvil de rotación</p>	

rígida con el sólido un sistema de coordenadas cartesianas, cuyo origen se ubica en el centro de masas del sólido. La velocidad de la i -ésima masa elemental $v_i = \{\omega r_i\}$. Así, pues, la energía cinética del sólido se puede escribir

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \{\omega r_i\}^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \omega^2 r_i^2 \sin^2 \alpha_i,$$

donde α_i es el ángulo entre los vectores ω y r_i . Sustituyendo $\sin^2 \alpha_i$ por $1 - \cos^2 \alpha_i$ y tomando en consideración que $\omega r_i \cos \alpha_i = \omega r_{i1}$, obtenemos:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \{\omega^2 r_i^2 - (\omega r_{i1})^2\}.$$

Escribamos los productos escalares por intermedio de las proyecciones de los vectores ω y r_i sobre los ejes del sistema de coordenadas relacionado con el cuerpo:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m_i \{(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \\ &\quad - (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i \{(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \omega_x^2 x_i^2 - \\ &\quad - \omega_x \omega_y x_i y_i - \omega_x \omega_z x_i z_i - \omega_y \omega_x y_i x_i - \\ &\quad - \omega_y^2 y_i^2 - \omega_y \omega_z y_i z_i - \omega_z \omega_x z_i x_i - \omega_z \omega_y z_i y_i - \omega_z^2 z_i^2\}. \end{aligned}$$

Por fin, uniendo los sumandos con iguales productos de las componentes de la velocidad angular y sacando dichos productos tras el

signo de la suma tenemos:

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \omega_x^2 \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) + \omega_y^2 \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) + \right. \\ \left. + \omega_z^2 \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - \omega_x \omega_y \sum m_i x_i y_i - \right. \\ \left. - \omega_x \omega_z \sum m_i x_i z_i - \omega_y \omega_x \sum m_i y_i x_i - \right. \\ \left. - \omega_y \omega_z \sum m_i y_i z_i - \omega_z \omega_x \sum m_i z_i x_i - \omega_z \omega_y \sum m_i z_i y_i \right\}.$$

Las sumas por las que se multiplican los productos de las componentes de la velocidad angular son las componentes del tensor de inercia (véase (40.14)). Por lo tanto, llegamos a la fórmula

$$T = \frac{1}{2} \{ I_{xx} \omega_x^2 + I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{xz} \omega_x \omega_z + I_{yx} \omega_y \omega_x + \\ + I_{yy} \omega_y^2 + I_{yz} \omega_y \omega_z + I_{zx} \omega_z \omega_x + I_{zy} \omega_z \omega_y + I_{zz} \omega_z^2 \}. \quad (41.5)$$

Esta fórmula puede ser escrita en la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i, h=x, y, z} I_{ih} \omega_i \omega_h. \quad (41.6)$$

Durante la suma, los índices i y h , independientemente entre sí, recorren los valores x, y, z .

Si los ejes del sistema de coordenadas relacionado con el sólido se eligen de modo que coincidan con los ejes principales de inercia del sólido, los momentos centrífugos de inercia se anulan y la expresión (41.5) se simplifica de la manera siguiente:

$$T = \frac{1}{2} \{ I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 \}. \quad (41.7)$$

Aquí I_x, I_y, I_z son los momentos principales de inercia del sólido. Para una peonza esférica estos momentos tienen el mismo valor de I , de forma que la fórmula (41.7) toma el aspecto $T = 1/2 I \omega^2$ (comp. con (41.1)). Durante la rotación de un sólido tomado al azar alrededor de uno de los ejes principales de inercia, digamos el eje z , $\omega_z = \omega$, $\omega_x = \omega_y = 0$ y la fórmula (41.7) se convierte en la (41.1).

Así, pues, en tres casos, la energía cinética de un sólido en rotación, es igual a la mitad del producto del momento de inercia por el cuadrado de la velocidad angular: 1) para un sólido que gira en torno de un eje inmóvil, 2) para un sólido que gira alrededor de uno de los ejes principales de inercia, 3) para la peonza esférica. En los demás casos la energía cinética se determina con las fórmulas más complicadas (41.5) ó (41.7).

§ 42. Energía cinética de un sólido durante el movimiento plano

El movimiento plano de un sólido puede ser representado como la superposición de dos movimientos: de traslación a cierta velocidad v_0 y de rotación alrededor del correspondiente eje a una velocidad angular ω (véase el § 36). De acuerdo con la fórmula (36.1) la velocidad de la i -ésima masa elemental del sólido

$$v_i = v_0 + [\omega, r_i],$$

donde v_0 es la velocidad de cierto punto O del sólido, r_i , el radio vector que determina la posición de la masa elemental respecto del punto O .

La energía cinética de la i -ésima masa elemental

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \{v_0 + [\omega, r_i]\}^2.$$

Después de elevar al cuadrado, tendremos

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \{v_0^2 + 2v_0[\omega, r_i] + [\omega, r_i]^2\}.$$

El producto vectorial de ω por r_i tiene módulo igual a ωR_i , donde R_i es la distancia desde el eje de rotación a la masa m_i (véase la fig. 5.5 y el texto que precedo a la fórmula (5.8)). Por lo tanto, el tercer sumando entre corchetes es igual a $\omega^2 R_i^2$. Realicemos en el segundo sumando la permutación cíclica de los factores (véase (2.34)). Como resultado llegamos a la expresión

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \{v_0^2 + 2[v_0, \omega] r_i + \omega^2 R_i^2\}. \quad (42.1)$$

Para obtener la energía cinética del sólido, sumemos la expresión (42.1) por todas las masas elementales, con la particularidad de que hemos de sacar los factores constantes tras los signos de la suma:

$$T = \frac{1}{2} v_0^2 \sum m_i + [v_0, \omega] \sum m_i r_i + \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2.$$

La suma de las masas elementales $\sum m_i$ es la suma del sólido m . La expresión $\sum m_i r_i$ es igual al producto de la masa del sólido por radio vector r_C del centro de masas del sólido. Por fin, $\sum m_i R_i^2$ es el momento de inercia I_0 del sólido con relación al eje que pasa por el punto O . Por esto, podemos escribir que

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + m r_C [v_0, \omega] + \frac{1}{2} I_0 \omega^2. \quad (42.2)$$

Si tomamos el centro de masas C del cuerpo como punto O , el radio vector r_C será cero, de modo que el segundo sumando desapare-

cerá. Por esto, designando por v_C la velocidad del centro de masas y por I_C el momento de inercia del sólido en lo que atañe al eje de rotación, que pasa por el punto C , para la energía cinética, obtenemos la fórmula

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}. \quad (42.3)$$

De este modo, la energía cinética de un sólido durante el movimiento plano se compone de la energía del movimiento de traslación a la velocidad igual a la del centro de masas y la energía de rotación en torno de un eje que pasa por el centro de masas del sólido.

§ 43. Aplicación de las leyes de dinámica del sólido

El movimiento de un sólido se describe con dos ecuaciones:

$$m\dot{w}_C = \sum F_{\text{ext}}, \quad (43.1)$$

$$\dot{M} = \sum N_{\text{ext}} \quad (43.2)$$

(véanse las fórmulas (37.5) y (38.1)). Por lo tanto, el movimiento de un sólido se determina por las fuerzas externas que sobre él actúan y por los momentos de dichas fuerzas.

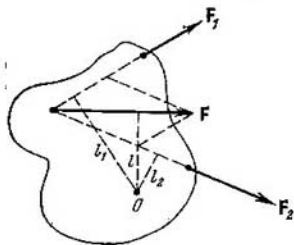


Fig. 43.1

Los momentos de fuerzas se pueden tomar con relación a cualquier punto inmóvil o que se mueve sin aceleración. Tomando el momento de las fuerzas externas respecto de un punto en movimiento con aceleración, escribiríamos, en esencia, la ecuación (43.2) en un sistema no inercial de referencia. En semejante caso, además de las fuerzas externas, condicionadas por la interacción del sólido dado con otros sólidos, hay que tener en

cuenta las fuerzas de inercia y sus momentos.

Los puntos de aplicación de las fuerzas, ejercidas sobre el sólido, pueden ser trasladadas a lo largo de las líneas de acción de las fuerzas, ya que con ello no varían ni la suma de las fuerzas, ni tampoco sus momentos (durante el traslado de la fuerza a lo largo de la línea de acción, queda invariable el brazo respecto de cualquier punto). Este hecho permite sustituir varias fuerzas por una sola, equivalente a ellas por la acción que ejerce sobre el sólido. Por ejemplo, dos fuerzas F_1 y F_2 , que yacen en un mismo plano (fig. 43.1), pueden ser sustituidas por la fuerza F equivalente a ellas y cuyo punto de aplicación puede

ser también elegido al azar por la dirección a lo largo de la cual ella actúa.

El conjunto de fuerzas paralelas que actúan sobre el cuerpo, puede ser sustituido por su resultante, igual a la suma de todas las fuerzas y aplicada en tal punto del sólido, de forma que su momento sea equivalente a la suma de los momentos de las fuerzas por separado.

Hallemos la resultante de las fuerzas de la gravedad. Estas fuerzas están aplicadas a todos los elementos del sólido, con la particularidad de que sobre la masa elemental m_i actúa la fuerza $m_i g$. La suma de las fuerzas $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, donde $m = \sum m_i$ es la masa del cuerpo. El momento sumario de las fuerzas de la gravedad respecto de cierto punto O es igual a

$$\mathbf{N} = \sum [\mathbf{r}_i (m_i \mathbf{g})],$$

donde \mathbf{r}_i es el radio vector que determina la posición de la masa m_i según el punto O . Traspasando el factor escalar m_i del segundo factor al primero y, a continuación, sacando el factor común \mathbf{g} tras el signo de la suma, obtenemos:

$$\mathbf{N} = [(\sum m_i \mathbf{r}_i), \mathbf{g}].$$

La suma que se encuentra entre paréntesis es igual al producto de la masa del sólido por el radio vector \mathbf{r}_C del centro de masas C . Por esto

$$\mathbf{N} = [m\mathbf{r}_C, \mathbf{g}] = [\mathbf{r}_C, (m\mathbf{g})] = [\mathbf{r}_C, \mathbf{P}]. \quad (43.3)$$

De este modo, el momento sumario de las fuerzas de la gravedad con relación a un punto O arbitrario, coincide con el momento de la fuerza $m\mathbf{g}$, aplicado en el punto C . Así, pues, la resultante de las fuerzas de la gravedad $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ y está aplicada al centro de masas del sólido. Cabe señalar que esto sólo es válido en el caso cuando en los límites del cuerpo el campo de las fuerzas de la gravedad es homogéneo (al deducir la fórmula (43.3), considerábamos que $\mathbf{g} = \text{const}$).

De (43.3) se desprende que el momento de las fuerzas de la gravedad respecto del centro de masas es nulo (en tal caso $\mathbf{r}_C = 0$). Recibe el nombre de *centro de gravedad* de un sólido, el punto respecto del cual el momento de las fuerzas de la gravedad es igual a cero. De este modo, cuando en los límites del sólido el campo gravitatorio es homogéneo, el centro de masas coincide con el de gravedad.

Si el campo gravitatorio es homogéneo, las fuerzas de la gravedad aplicadas a diversas masas elementales tienen igual dirección y son proporcionales a m_i . Las fuerzas de inercia que surgen en un sistema no inercial de referencia, en movimiento de traslación con relación a sistemas inerciales, tienen una misma propiedad. En efecto, en tal caso, las fuerzas de inercia aplicadas a las masas elementales m_i son iguales a $m_i \mathbf{a}$, donde \mathbf{a} es la aceleración del sistema no inercial (véase (32.2)). Al repetir los razonamientos que nos llevaron a la

fórmula (43.3) (con esto, $m_i g$ debe sustituirse por $-m_i a$), es posible mostrar que la resultante de las fuerzas de inercia es $-ma$ y que está aplicada al centro de masas del sólido. Cabe remarcar, que esto sólo es justo para los sistemas de referencia en movimiento de traslación.

En lo que atañe al centro de masas, el momento de las fuerzas de inercia es nulo (en un sistema en movimiento de traslación). Por esta causa, al confeccionar la ecuación (43.2) para los momentos tomados respecto del centro de masas, no es preciso tomar en consideración las fuerzas de inercia.

Aclaremos las condiciones de equilibrio de un sólido. Este puede encontrarse en reposo, si no hay causas que provoquen el surgimiento del movimiento de traslación o de rotación. De acuerdo con las ecuaciones (43.1) y (43.2) para esto es necesario y suficiente que se cumplan dos condiciones:

1) la suma de todas las fuerzas externas aplicadas al cuerpo, debe ser nula:

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0; \quad (43.4)$$

2) el momento resultante de las fuerzas externas con relación a cualquier punto debe ser nulo:

$$\sum \mathbf{N}_{\text{ext}} = 0. \quad (43.5)$$

Cuando la condición (43.4) se cumple, de la igualdad a cero de la suma de los momentos para un punto cualesquiera O sigue la igualdad a cero de la suma de los momentos respecto de cualquier otro punto O' . En realidad, sea para cierto punto O

$$\sum \mathbf{N}_i = \sum [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] = 0. \quad (43.6)$$

Tomemos otro punto O' , cuya posición con relación a O está determinada con el vector \mathbf{b} . En la fig. 43.2 vemos que $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{b}$. Por consiguiente, la suma de los momentos según el punto O' es igual a

$$\sum \mathbf{N}'_i = \sum [\mathbf{r}'_i, \mathbf{F}_i] = \sum [(\mathbf{r}_i - \mathbf{b}), \mathbf{F}_i] = \sum [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] - \sum [\mathbf{b}, \mathbf{F}_i].$$

En correspondencia con (43.6), la primera suma es cero. Sacando el factor constante \mathbf{b} tras el paréntesis de la segunda suma obtenemos la expresión $-\mathbf{b} \cdot \sum \mathbf{F}_i$ que también es nula como sigue de (43.4). Así, pues, de (43.4) y de la condición (43.6) para el punto O , se desprende la condición (43.6) para el punto O' .

Señalemos que la condición vectorial (43.5) es equivalente a tres escalares:

$$\sum N_{x\text{ext}} = 0, \quad \sum N_{y\text{ext}} = 0, \quad \sum N_{z\text{ext}} = 0. \quad (43.7)$$

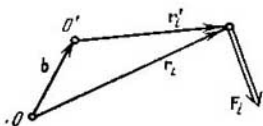


Fig. 43.2

De forma que las condiciones de equilibrio de un sólido se determinan con las ecuaciones (43.4) y (43.5) o con las ecuaciones (43.4) y (43.7).

En conclusión, consideremos un ejemplo de aplicación de las leyes de dinámica del sólido. Supongamos que un cilindro homogéneo de radio R y masa m rueda sin deslizamiento por un plano inclinado (fig. 43.3). El ángulo de inclinación del plano es igual a α , mientras que la altura, h ($h \gg R$). La velocidad inicial del cilindro es igual a cero. Es preciso hallar la velocidad del centro de masas y la velocidad angular de rotación del cilindro, cuando éste sale al sector horizontal. Ofrecemos dos variantes de la solución.

Primer procedimiento de solución. El cilindro se moverá bajo la acción de tres fuerzas: la fuerza $\mathbf{P} = mg$, la fuerza de rozamiento

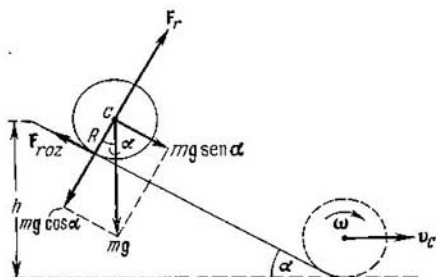


Fig. 43.3

F_{roz} y la fuerza de la presión normal F_n (véase el § 17). Por la dirección hacia la normal la aceleración del cilindro es cero. Por lo tanto, la fuerza de la presión normal es igual por su módulo a la componente normal de la fuerza \mathbf{P} , cuyo valor es $mg \cos \alpha$.

Entre el cilindro y el plano surge el rozamiento en los puntos donde hacen contacto entre sí. Cuando no hay deslizamiento, estos puntos del cilindro están inmóviles (forman el eje instantáneo de rotación), por lo que la fuerza de rozamiento, sobre la que hablamos, es la fuerza de rozamiento en reposo. Del § 15 sabemos que la fuerza de rozamiento en reposo puede tener valores desde cero hasta su valor máximo F_0 , que se determina con el producto de coeficiente de rozamiento por la fuerza de la presión normal, que aprieta entre sí los cuerpos en contacto ($F_0 = kmg \cos \alpha$). En el caso que examinamos, la fuerza de rozamiento toma el valor necesario para que no haya deslizamiento. Durante la rodadura del cilindro por el plano no habrá deslizamiento si la velocidad lineal de los puntos de contacto es igual a cero, lo que a su vez se realiza cuando la velocidad del centro de

inercia v_C en cada momento de tiempo equivale a la velocidad angular de rotación ω del cilindro multiplicada por su radio R :

$$v_C = \omega R. \quad (43.8)$$

En correspondencia, la aceleración del centro de masas w_C será igual a la aceleración angular β multiplicada por R :

$$w_C = \beta R. \quad (43.9)$$

Si la fuerza de rozamiento necesaria para que se cumplan las condiciones (43.8) y (43.9) no sobrepasa el valor máximo de F_0 , el cilindro rodará sin deslizamiento. En caso contrario, la rodadura sin deslizamiento es imposible.

La ecuación (43.1) tendrá, en nuestro caso, la forma siguiente

$$mw_C = mg + F_{roz} + F_n.$$

Después de proyectarla sobre la dirección de movimiento obtenemos

$$mw_C = mg \operatorname{sen} \alpha - F_{roz}. \quad (43.10)$$

Para un cilindro homogéneo que gira en torno del eje de simetría, $M = I\omega$. Por este motivo, la ecuación (43.2) puede ser escrita así

$$I\beta = \sum N_z, \quad (43.11)$$

donde z es el eje del cilindro (véase (38.8)). En la ecuación (43.11), escrita respecto del eje del cilindro, sólo se diferencia de cero el momento de la fuerza de rozamiento. Las demás fuerzas, incluida la resultante de las fuerzas de inercia, tienen una dirección que pasa por el eje del cilindro, por lo que sus momentos con relación a dicho eje son nulos. Así, pues, la ecuación (43.11) será escrita del modo siguiente:

$$I\beta = RF_{roz}. \quad (43.12)$$

Aquí, I que es el momento de inercia del cilindro según su eje, es igual a $\frac{1}{2}mR^2$.

En las ecuaciones (43.10) y (43.12) hay tres magnitudes incógnitas: F_{roz} , w_C y β . Las últimas dos magnitudes están ligadas por la condición (43.9), que se deduce de la carencia de deslizamiento. Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (43.9), (43.10) y (43.12) hallaremos los valores de las magnitudes buscadas (teniendo en cuenta que $I = \frac{1}{2}mR^2$):

$$F_{roz} = \frac{1}{3}mg \operatorname{sen} \alpha, \quad (43.13)$$

$$w_C = \frac{2}{3}g \operatorname{sen} \alpha, \quad (43.14)$$

$$\beta = \frac{2}{3}(g/R) \operatorname{sen} \alpha. \quad (43.15)$$

Ahora, cuando ya conocemos el valor de la fuerza de rozamiento en reposo, necesario para que el cilindro ruede sin deslizamiento, podemos hallar la condición con la que semejante rodadura es posible.

Para el rozamiento sin deslizamiento la fuerza (43.13) no debe superar el valor máximo de la fuerza de rozamiento en reposo F_0 , igual a $kmg \cos \alpha$:

$$\frac{1}{3}mg \sin \alpha \leq kmg \cos \alpha,$$

de donde

$$\operatorname{tg} \alpha \leq 3k.$$

Por lo tanto, si la tangente del ángulo de inclinación del plano supera el valor triple del coeficiente de rozamiento en reposo entre el cilindro y el plano, la rodadura no puede transcurrir sin deslizamiento.

De la constancia de w_C (véase (43.14)) sigue que el centro de masas del cilindro está en movimiento uniformemente acelerado. Durante el tiempo de rodadura t_{rod} el cilindro recorre un camino $h/\sin \alpha$. Con el movimiento uniformemente acelerado el recorrido, la aceleración y el tiempo están ligados con la correlación $s = \frac{1}{2}wt^2$. Poniendo el valor de s , se obtiene

$$h/\sin \alpha = \frac{1}{2}w_C t_{\text{rod}}^2,$$

de donde, teniendo en cuenta el valor de (43.14) para w_C , llegamos a la fórmula

$$t_{\text{rod}} = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{3h}{g}}.$$

Lo mismo que w_C , este tiempo no depende de la masa y del radio del cilindro ¹⁾; sólo se determina por el ángulo de inclinación α del plano y por la diferencia de niveles de sus bordes h .

La velocidad del centro de masas al salir el cilindro al sector horizontal será igual a

$$v_C = w_C t_{\text{rod}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh},$$

mientras que la velocidad angular del cilindro

$$\omega = \beta t_{\text{rod}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

Señalemos que la fuerza de rozamiento en reposo no realiza trabajo sobre el cilindro, ya que los puntos del cilindro sobre los que se aplica dicha fuerza están inmóviles en cada momento de tiempo (véase (20.5)).

Para el plano horizontal ($\alpha = 0$) con las fórmulas (43.14) y (43.15) obtenemos que si al cilindro previamente se le comunica cierta velocidad de traslación y la correspondiente velocidad angular (tal que no haya deslizamiento), éste se moverá sin aceleración. En realidad el movimiento será retardado. Este retardo está condicionado por la fuerza de rozamiento de rodadura que está dirigida de tal forma, que su momento disminuye la velocidad angular ω , mientras que la

¹⁾ Esto sólo es justo para un cilindro homogéneo y enterizo.

propia fuerza provoca la correspondiente aceleración del centro de masas (otra vez, tal que no surja el deslizamiento). La fuerza de rozamiento de rodadura ejerce trabajo negativo sobre el cuerpo que rueda.

Durante la resolución del problema sobre la rodadura de un cilindro por un plano inclinado, el rozamiento de rodadura se desprecia.

Segundo procedimiento de solución. Como la fuerza de rozamiento no realiza trabajo (despreciamos el rozamiento de rodadura), la energía total del cilindro, queda constante. En el momento inicial la energía cinética es cero, la potencial, igual a mgh . Al final de la rodadura la energía potencial resulta ser nula, pero aparece la energía cinética igual a (véase (42.3))

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}.$$

Como no hay deslizamiento, v_C y ω están entre sí ligadas por la correlación $v_C = \omega R$. Poniendo en la expresión para la energía cinética $\omega = v_C/R$ e $I_C = \frac{1}{2}mR^2$, obtenemos:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mv_C^2}{4} = \frac{3}{4}mv_C^2.$$

Al principio y al final de la rodadura, la energía cinética debe ser igual:

$$\frac{3}{4}mv_C^2 = mgh,$$

de donde

$$v_C = \sqrt{\frac{3}{4}gh},$$

y la velocidad angular

$$\omega = \frac{v_C}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3}{4}gh}.$$

Presten atención a que el segundo procedimiento es mucho más sencillo que el primero.

§ 44. Giros copios

El giroscopio (o peonza) es un cuerpo macizo simétrico, que gira a gran velocidad alrededor del eje de simetría, al que daremos el nombre de eje de giroscopio. Éste es uno de los ejes principales de inercia. Por esta razón, si dicho eje no gira en el espacio, el momento de cantidad de movimiento es igual a $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$ donde I es el momento de inercia respecto del eje del giroscopio. Ahora, supongamos que el eje del giroscopio gira a cierta velocidad $\boldsymbol{\omega}'$. En tal caso, la resultante de la rotación del giroscopio transcurre alrededor de un eje que no coincide con el de simetría y la dirección del vector \mathbf{M} no

coincidirá con la del eje del giroscopio. Sin embargo, si la velocidad de rotación del eje ω' es despreciablemente pequeña en comparación con la velocidad de la propia rotación del giroscopio ω ($\omega' \ll \omega$), podemos considerar, aproximadamente, que el vector M es igual a $J\omega$ y que está dirigido a lo largo del eje del giroscopio. Al observarse esta condición, el giro del vector M y el del eje del giroscopio serán equivalentes. En adelante vamos a suponer que la condición $\omega' \ll \omega$ se observa.

Si intentamos provocar el giro del eje del giroscopio, se observa un curioso fenómeno que recibe el nombre de *efecto giroscópico*:

bajo la acción de las fuerzas que, al parecer, deberían provocar el giro del eje OO del giroscopio alrededor de la recta $O'O'$ (fig. 44.1), el eje del giroscopio gira alrededor de la recta $O''O''$ (se supone que el eje OO y la recta $O'O'$ yacen en el plano de la figura, mientras que la recta $O''O''$ y las fuerzas F_1 y F_2 , son perpendiculares a dicho plano). La conducta del giroscopio, que a primera vista es contranatural, resulta que corresponde en absoluto a las leyes de dinámica del movimiento de rotación. En efecto, el momento de las fuerzas F_1 y F_2 está dirigido a lo largo de la recta $O'O'$. Durante el tiempo dt el momento de la cantidad de movimiento del giroscopio M recibe el incremento $dM = N dt$,

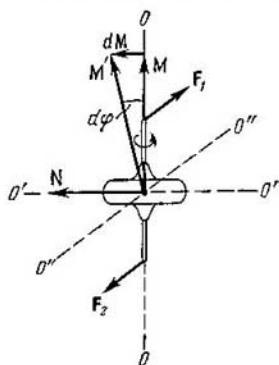


Fig. 44.1

que tiene la misma dirección que N . Al pasar el tiempo dt , el momento de la cantidad de movimiento del giroscopio será igual a la resultante $M' = M + dM$ que yace en el plano de la figura. La dirección del vector M' coincide con la nueva dirección del eje del giroscopio. Así, pues, éste girará en torno de la recta $O''O''$ a cierto ángulo $d\varphi$. En la fig. 44.1 vemos que $d\varphi = |dM|/M = N dt/M$. De aquí se desprende, que el giro del eje del giroscopio a la nueva posición se produjo a una velocidad angular $\omega' = d\varphi/dt = N/M$. Reescribamos esta correlación en la forma: $N = \omega' M$. Los vectores N , M y ω' son perpendiculares entre sí (el vector ω' está dirigido a lo largo de la recta $O''O''$ hacia el lector). Por esta causa, la relación entre ellos se puede escribir en la forma

$$N = [\omega', M]. \quad (44.1)$$

Esta fórmula ha sido obtenida para el caso cuando los vectores ω' y M son perpendiculares entre sí. No obstante, ella también es válida para el caso más general. Como vemos en la fig. 44.2, durante

el giro del eje del giroscopio en torno del vector ω' a un ángulo $d\varphi$, el vector M recibe un incremento, cuyo módulo es igual a $|dM| = M \operatorname{sen} \alpha d\varphi$. Al mismo tiempo $|dM| = N dt$. De forma que $M \operatorname{sen} \alpha d\varphi = N dt$, de donde $N = \omega' M \operatorname{sen} \alpha$. Con ayuda de la fig. 44.2 es fácil comprender que en tal caso es válida la fórmula (44.1) (los vectores ω' y M yacen en el plano de la figura, el vector dM se aleja del lector, por lo que está representado con un círculo y una cruz). Cabe recordar, que la fórmula (44.1) sólo es justa cuando $\omega' \ll \omega$.

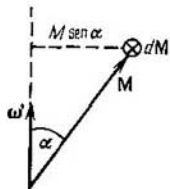


Fig. 44.2

Durante los intentos de provocar del modo prefijado el giro del eje del giroscopio, a causa del efecto giroscópico, surgen las llamadas *fuerzas giroscópicas* que actúan en los cojinetes sobre los que gira el eje del giroscopio. Por ejemplo, durante el giro forzado del eje del giroscopio OO alrededor de la recta $O'O'$ (fig. 44.3), el eje del giroscopio tiende a girar en torno de la recta $O''O''$. Para evitar esta rotación, al eje del giroscopio deben estar aplicadas las fuerzas F'_1 y F'_2

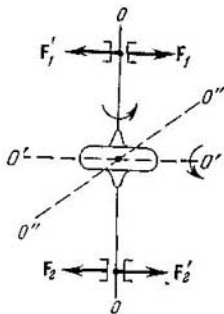


Fig. 44.3

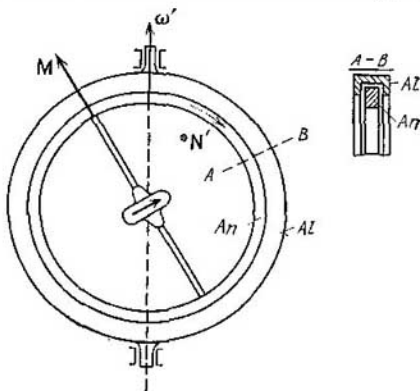


Fig. 44.4

que actúan por los cojinetes. Según la tercera ley de Newton, el eje del giroscopio ejercerá sobre los cojinetes una acción con fuerzas F_1 y F_2 , que son fuerzas giroscópicas. Durante el giro forzado del eje del giroscopio a una velocidad angular ω' , el momento de fuerzas con el que los cojinetes actúan sobre dicho eje, se determina con la fórmula (44.1). El momento de las fuerzas giroscópicas, que el eje

ejerce sobre los cojinetes es igual a

$$N' = [M\omega'] \quad (44.2)$$

Supongamos que el eje del giroscopio está sujeto en el anillo An que puede girar libremente en el alojamiento Al (fig. 44.4). Pongamos el alojamiento en rotación a una velocidad angular ω' , en torno de un eje que yace en su propio plano. En tal caso, como ya hemos aclarado, surge el momento de las fuerzas giroscópicas que se determina con la fórmula (44.2) y que actúa sobre el anillo. Bajo el efecto de este momento, el anillo girará por el alojamiento en la dirección indicada por la flecha, hasta el momento cuando el eje del giroscopio se establezca en la dirección de rotación del alojamiento y el momento (44.2) no sea cero. Aquí, la dirección de la rotación propia del giroscopio y la del alojamiento coincidirán. Con M y ω' dirigidos en sentidos opuestos, el momento (44.2) también es nulo. Sin embargo, la correspondiente posición del eje del giroscopio será inestable: durante la más pequeña discrepancia de 180° del ángulo entre M y ω' , aparece el momento N' que hará girar el eje hasta que dicho ángulo se haga igual a cero.

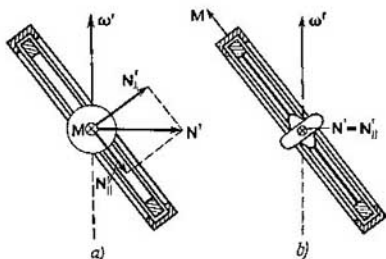


Fig. 44.5

Supongamos ahora, que el alojamiento gira a una velocidad angular ω' alrededor de un eje que yace en su propio plano (fig. 44.5). En la posición del anillo, con la que el momento de la cantidad del movimiento del giroscopio M es perpendicular a ω' (fig. 44.5, a), el vector N' está dirigido como se muestra en la figura. La componente N'_I de este vector produce la rotación del anillo en el alojamiento, por lo que el ángulo entre los vectores M y ω' disminuirá. La componente N'_II tiende a originar el flambeo del anillo respecto del alojamiento. Cuando el anillo ocupe una posición tal, con la que el ángulo entre los vectores M y ω' tome su valor mínimo posible (fig. 44.5, b), la componente N'_I será nula, ya que en tal caso el momento de las fuerzas giroscópicas N' se halla en el plano del anillo; semejante momento no puede provocar la rotación del anillo en el alojamiento. De este modo, bajo la acción de las fuerzas giroscópicas, el anillo ocupa en el alojamiento una posición tal, con la que es mínimo el ángulo entre el eje del giroscopio y el de rotación del alojamiento.

El comportamiento descrito del giroscopio se halla en la base de un instrumento llamado *brújula giroscópica*. El aparato es un

giroscopio que puede girar con libertad en el plano horizontal. A causa de la influencia que ejerce la rotación diaria de la Tierra, el eje de la brújula giroscópica se establece en tal posición, con la que el ángulo entre dicho eje y el de rotación de la Tierra sea el mínimo (fig. 44.6). En esta posición, el eje de la brújula resulta hallarse en el plano medional y, por lo tanto, con alta precisión, indica hacia el norte. La brújula giroscópica se distingue ventajosamente de la brújula magnética, ya que no es preciso introducir correcciones con motivo

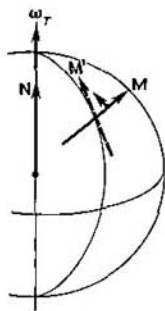


Fig. 44.6

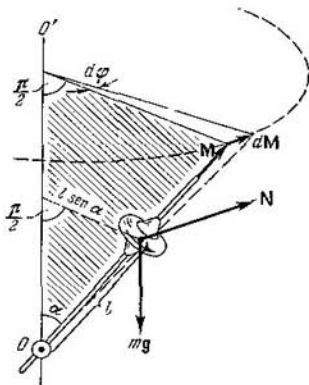


Fig. 44.7

de la llamada declinación magnética ¹⁾, así como tampoco hay que tomar medidas para la compensación del influjo sobre la aguja de los objetos ferromagnéticos que se hallan en su entorno (por ejemplo, el casco de acero del buque, etc.).

Supongamos que el eje del giroscopio puede girar libremente en torno de cierto punto O (fig. 44.7). Examinemos la conducta de semejante giroscopio en el campo de las fuerzas de la gravedad. El momento de las fuerzas aplicadas al giroscopio, es igual a la magnitud

$$N = mgl \operatorname{sen} \alpha, \quad (44.3)$$

donde m es la masa del giroscopio; l , la distancia desde el punto O hasta el centro de masas del giroscopio; α , el ángulo formado por el eje del giroscopio y la vertical. El vector N está dirigido perpendicularmente al plano vertical que pasa por el eje del giroscopio (en la fig. 44.7 dicho plano está sombreado).

¹⁾ Recibe el nombre de declinación magnética el ángulo entre los meridianos magnético y geográfico.

Bajo la acción de momento de fuerzas N el momento de la cantidad de movimiento M , en el transcurso del tiempo dt recibe el incremento $dM = N dt$, perpendicular al vector M . El cambio que al recibir el incremento dM sufre el vector M , corresponde a un giro tal del eje del giroscopio, con el que el ángulo α no varía. Con esto, el plano vertical que pasa por el eje del giroscopio, girará a un ángulo $d\varphi$. A este mismo ángulo gira en el plano horizontal el vector N . Como resultado, al pasar el tiempo dt la disposición mutua de los vectores M y N será la misma que en momento inicial.

Durante el siguiente elemento de tiempo dt , el vector M de nuevo recibe el incremento dM , que será perpendicular a la nueva dirección de vector M (dirección que se creó después del anterior giro elemental), etc. En total, el eje del giroscopio girará a una velocidad angular ω' , alrededor del eje vertical que pasa por el punto O , describiendo un cono con ángulo de abertura 2α (comp. con la fig. 44.2). (Con $\alpha = \pi/2$ el cono degenera en el plano). En este caso, el vector M sólo variará en dirección, mientras que en magnitud será constante, ya que los incrementos elementales dM serán todo el tiempo perpendiculares al vector M ¹⁾.

Así, pues, en el campo de fuerzas de la gravedad, el eje del giroscopio con un punto inmóvil, gira en torno de la vertical describiendo un cono. Semejante movimiento del giroscopio recibe el nombre de *precesión*. La velocidad angular de la precesión ω' puede ser hallada tomando en consideración que de acuerdo con (44.1) $N = \omega' M \sin \alpha$. Igualando este valor con la expresión (44.3), obtenemos que $\omega' M \sin \alpha = mgl \sin \alpha$, de donde

$$\omega' = \frac{mgl}{M} = \frac{mgl}{I\omega}. \quad (44.4)$$

De (44.4) sigue que la velocidad de la precesión no depende del ángulo de inclinación del eje del giroscopio con relación a la vertical (ángulo α).

También podemos obtener la fórmula (44.4) del modo siguiente. En correspondencia con la fig. 44.7 el ángulo $d\varphi$, al que gira el plano que pasa por el eje del cono y por el del giroscopio, puede ser representado como la razón entre $|dM|$ y $M \sin \alpha$ (el origen del vector M se supone que está en el punto O):

$$d\varphi = \frac{|dM|}{M \sin \alpha} = \frac{N dt}{M \sin \alpha} = \frac{mgl \sin \alpha \cdot dt}{M \sin \alpha}. \quad (44.5)$$

Está claro, que $\omega' = d\varphi/dt$. Dividiendo la expresión (44.5) por dt llegamos a la fórmula (44.4).

¹⁾ De modo análogo se comporta el vector de velocidad con el movimiento uniforme de un punto por una circunferencia. El vector v durante el tiempo dt recibe el incremento $dv = w_n dt$ ($w_n = \text{const}$). Como resultado varía la dirección del vector v , mientras que su magnitud queda invariable.

Hemos estudiado la teoría aproximada del giroscopio. De acuerdo con ella, junto con la rotación alrededor de la vertical, se producen las vibraciones del eje en el plano vertical, acompañadas por las variaciones de ángulo α en los límites de α_1 a α_2 . Estas vibraciones del eje reciben el nombre de *nutaciones*. En función de las condiciones

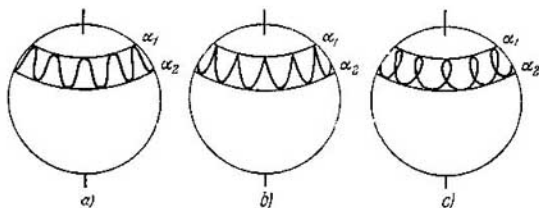


Fig. 44.8

iniciales, el extremo del giroscopio traza en una superficie esférica imaginaria, una de las curvas representadas en la fig. 44.8. Por ejemplo, si con el eje fijado bajo un ángulo α_1 , ponemos el giroscopio en rotación y, a continuación, sin golpes, liberamos el eje, en un principio éste, al mismo tiempo de girar en torno de la vertical, descenderá. Al alcanzar el ángulo α_2 , el eje comenzará a ascender, etc. (este caso está representado en la fig. 44.8, b).

Dando a la peonza un golpe inicial de magnitud y dirección determinadas por completo, podemos conseguir que el eje del giroscopio presione sin nutación. Semejante precesión denominase *regular*. Mientras mayor sea la velocidad de rotación de la peonza, menor será la amplitud de la nutación. Además, esta última se amortigua por el rozamiento en el apoyo. Por esta razón, con frecuencia en la práctica, la nutación pasa desapercibida. La precesión que es regular sólo aproximadamente, es llamada *seudorregular*.

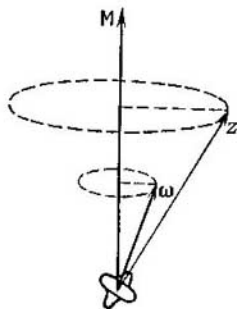


Fig. 44.9

Si el punto O se ubica en el centro de masas de un giroscopio (véase la fig. 44.7), el momento de la fuerza de la gravedad es igual a cero, por lo que obtenemos la llamada *peonza simétrica libre*. Como resultado del principio de conservación, el momento de la cantidad de movimiento de semejante peonza no variará ni en magnitud ni en dirección. Si la peonza se pone en rotación alrededor del eje de

simetría, los vectores \mathbf{M} y $\boldsymbol{\omega}$ tendrán igual dirección, que se conserva un tiempo infinitamente largo. Sin embargo, si la peonza se pone en movimiento en torno del eje de inercia, los vectores \mathbf{M} y $\boldsymbol{\omega}$ no coincidirán (fig. 44.9). El correspondiente cálculo nos lleva a los siguientes resultados. El vector $\boldsymbol{\omega}$, quedando constante en magnitud, tiene precesión alrededor de la dirección del vector \mathbf{M} , describiendo un cono. Al mismo tiempo, precesiona el eje de simetría z de la peonza, con la particularidad de que los vectores \mathbf{M} , $\boldsymbol{\omega}$ y el eje z , constantemente yacen en un mismo plano. La peonza gira alrededor del eje z a una velocidad angular $\omega_z = M_z/I_z$, donde M_z es la proyección del vector \mathbf{M} sobre el eje z , I_z , el momento de inercia de la peonza con relación a dicho eje. La velocidad angular de la precesión $\omega_{\text{prec}} = M/I$, donde I es el mismo valor de los momentos de inercia I_x o I_y .

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

§ 45. Ley de la gravitación universal

En la naturaleza todos los cuerpos se atraen entre sí. Newton estableció la ley a la que se supedita esta atracción que recibió el nombre de *ley de la gravitación universal*. De acuerdo con ella, la fuerza con la que dos puntos materiales se atraen entre sí, es razón directa de las masas de dichos puntos y razón inversa del cuadrado de la distancia que los separa:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (45.1)$$

Aquí γ es un coeficiente de proporcionalidad llamado *constante de gravitación*. La fuerza está dirigida a lo largo de una recta que pasa por los puntos materiales en interacción (fig. 45.1).

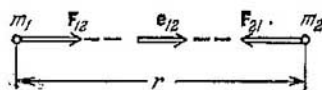


Fig. 45.1

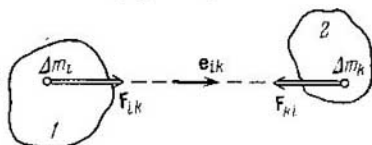


Fig. 45.2

La fuerza con que el segundo punto material atrae hacia sí el primero puede ser escrita en forma vectorial del siguiente modo:

$$\mathbf{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_{12}. \quad (45.2)$$

Con el símbolo \mathbf{e}_{12} se designa un vector unitario dirigido del primer punto material al segundo (véase la fig. 45.1). Sustituyendo en la fórmula (45.2) el vector \mathbf{e}_{12} por el vector \mathbf{e}_{21} , obtenemos la fuerza \mathbf{F}_{21} ejercida sobre el segundo punto material.

Para determinar las fuerzas de interacción de cuerpos extendidos, éstos deben ser divididos en masas elementales Δm , cada una de las cuales podría ser admitida como un punto material (fig. 45.2). En correspondencia con (45.2) la i -ésima masa elemental del cuerpo I se atrae por la k -ésima masa elemental del cuerpo 2 con una fuerza

$$\mathbf{F}_{ik} = \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \mathbf{e}_{ik}, \quad (45.3)$$

donde r_{ik} es la distancia entre las masas elementales.

Sumando (45.3) por todos los valores con índice k obtenemos la fuerza que actúa desde el cuerpo 2 sobre la masa elemental Δm_i del cuerpo 1:

$$F_{i2} = \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} e_{ik}. \quad (45.4)$$

Por fin, sumando (45.4) por todos los valores con índice i , o sea, al sumar las fuerzas aplicadas a todas las masas del primer cuerpo, hallamos la fuerza con la que el cuerpo 2 actúa sobre el cuerpo 1:

$$F_{12} = \sum_i \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} e_{ik}. \quad (45.5)$$

La suma se lleva a cabo por todos los valores de los índices i y k . Por consiguiente, si el cuerpo 1 se divide en N_1 y el cuerpo 2 en N_2 masas elementales, la suma (45.5) contendrá $N_1 N_2$ sumandos.

En la práctica, la suma (45.5) se reduce a la integración, lo que resulta ser un problema matemático muy complicado. Este problema se simplifica considerablemente si los cuerpos en interacción son homogéneos y su forma es correcta. En particular, cuando dichos cuerpos son esferas homogéneas ¹⁾, los cálculos con ayuda de (45.5) llevan a la fórmula (45.2), en la que por m_1 y m_2 se debe entender las masas de las esferas, por r , la distancia entre sus centros y por e_{12} , un vector unitario cuya dirección va desde el centro de la primera esfera al centro de la segunda. De este modo, las esferas ejercen acción entre sí como puntos materiales con masas iguales a las de las esferas y que están ubicadas en sus centros.

Si uno de los dos cuerpos es una esfera homogénea de radio muy grande (por ejemplo, el globo terrestre), mientras que el segundo cuerpo puede ser considerado como un punto material, su interacción se describe con la fórmula (45.2), en la que por r se debe entender la distancia desde el centro de la esfera hasta el punto material (esta afirmación será demostrada en el párrafo siguiente).

De acuerdo con (45.1) la dimensión de la constante de gravitación es igual a

$$[\gamma] = \frac{[F][r^2]}{[m^2]} = \frac{(ML/T^2)L^2}{M^2} = L^3 M^{-1} T^{-2}.$$

El valor numérico de γ fue determinado midiendo la fuerza con la que se atraen entre sí cuerpos de masa conocida. Durante semejantes mediciones surgen grandes dificultades, ya que para aquellos cuerpos, cuyas masas pueden ser medidas directamente, la fuerza de atracción resulta ser muy pequeña. Por ejemplo, dos cuerpos de

¹⁾ Es suficiente que la distribución de la masa en los límites de cada esfera posea simetría central, es decir, que la densidad sólo sea función de la distancia desde el centro de la esfera.

masa igual a 100 kg cada uno, que dista uno del otro 1 m, ejercen una interacción con una fuerza de unos 10^{-6} N, es decir, de un orden de 10^{-4} gf.

El primer intento exitoso de definir γ fueron las mediciones de Cavendish (año 1798). Para las medidas hizo uso del sensible método

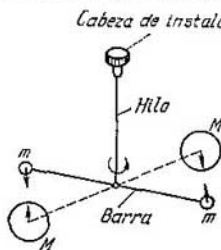


Fig. 45.3

de la balanza de torsión (fig. 45.3). Dos esferas de plomo m (de masa 0,729 kg cada una) montadas en los extremos de una ligera barra horizontal se ubicaban cerca de las esferas de masa M , situadas de modo simétrico (la masa de cada una de estas últimas era 158 kg). La barra era suspendida de un hilo elástico, por cuya torsión podía ser medida la fuerza de atracción de las esferas entre sí. El extremo superior del hilo fue fijado en la cabeza de instalación, mediante la cual era posible variar la distancia entre las esferas m y M . Entre

diversos procedimientos, el más exacto los valores definidos por se considera el siguiente

$$\gamma = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

Si en (45.1) ponemos m_1 , m_2 y r iguales a uno, la fuerza resulta ser equivalente a γ . Esto quiere decir que dos esferas de 1 kg de masa, cuyos centros se encuentran a 1 m de distancia, se atraen con una fuerza mutua de $6,670 \cdot 10^{-11}$ N.

§ 46. Campo gravitatorio

La interacción gravitacional se realiza por el campo gravitatorio. Todo cuerpo varía las propiedades del espacio que le rodea, es decir, crea en él un campo gravitatorio. Semejante campo se manifiesta por el hecho de que otro cuerpo ubicado en dicho campo, se hallará bajo la acción de una fuerza. Acerca de la «intensidad» del campo gravitatorio se puede juzgar, con evidencia, por el valor de la fuerza que en el punto dado actúa sobre un cuerpo, cuya masa es la unidad. De acuerdo con lo dicho, la magnitud

$$G = \frac{F}{m} \quad (46.1)$$

recibe el nombre de *intensidad del campo gravitatorio*. En esta fórmula F es la fuerza gravitacional que actúa en el punto dado de campo sobre un punto material de masa m .

La dimensión de G es la misma que la de la aceleración. La intensidad del campo gravitatorio cerca de la superficie terrestre

es igual a la aceleración de la caída libre g (con una precisión hasta la corrección condicionada por la rotación de la Tierra, véase el § 33).

De la fórmula (45.2) es fácil deducir que la intensidad del campo creado por un punto material de masa m , es igual a

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{m}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (46.2)$$

donde \mathbf{e}_r es el versor del radio vector trazado del punto material al punto dado del campo, r , el módulo de dicho radio vector.

Sea que el campo gravitatorio es creado por un punto material de masa m fijado en el origen de coordenadas. Entonces, sobre un punto material de masa m' situado en un punto, cuyo radio vector es \mathbf{r} , actuará una fuerza

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}m' = -\gamma \frac{mm'}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (46.3)$$

(comp. con (30.1)). En el § 30 fue mostrado que, en este caso, la energía potencial del punto m' se determina con la expresión

$$U = -\gamma \frac{mm'}{r} \quad (46.4)$$

(la energía potencial para $r = \infty$ se ha tomado nula). La expresión (46.4) puede ser interpretada como la energía potencial mutua de los puntos m y m' .

Como vemos en (46.4), a cada punto del campo, creado por el punto material m , corresponde un valor determinado de la energía potencial que en dicho campo posee el punto material m' . Por esta razón, es posible caracterizar el campo por la energía potencial que un punto material de $m' = 1$ posee en el lugar dado. La magnitud

$$\varphi = \frac{U}{m'} \quad (46.5)$$

recibe el nombre de *potencial del campo gravitatorio*. En esta fórmula U es la energía potencial que posee el punto material de masa m' en el punto dado del campo.

Conociendo el potencial del campo, puede ser calculado el trabajo que se realiza sobre la partícula m' por las fuerzas del campo durante un movimiento de la posición 1 a la 2. De acuerdo con la fórmula (22.1) este trabajo

$$A_{12} = U_1 - U_2 = m'(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (46.6)$$

Según (46.1) y (46.5) la fuerza que actúa sobre la partícula m' es igual a $\mathbf{F} = m'\mathbf{G}$, mientras que la energía potencial de esta partícula $U = m'\varphi$. En correspondencia con la fórmula (22.7) $\mathbf{F} = -\nabla U$, es decir, $m'\mathbf{G} = -\nabla(m\varphi)$. Sacando tras el signo del

gradiente la constante m' y reduciendo esta constante, llegaremos a la correlación entre la intensidad y el potencial del campo gravitatorio:

$$G = -\nabla\varphi. \quad (46.7)$$

Hallemos la expresión para la energía potencial mutua entre una capa esférica homogénea y un punto material m , con la particularidad de que vamos a examinar dos casos, cuando el punto se encuentra fuera y dentro de la capa. Comencemos por el caso, en el que m está situado fuera de la capa (fig. 46.1, 1a). Destaquemos en la capa un anillo cuyos extremos responden a los valores del ángulo

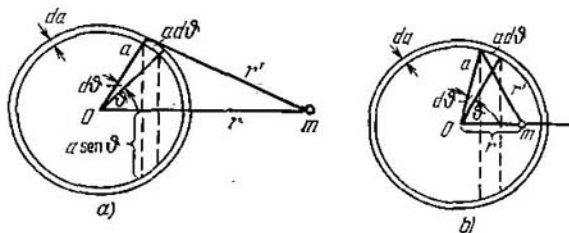


Fig. 46.1

ϑ y $\vartheta + d\vartheta$. El radio de este anillo es $a \sin \vartheta$ y su anchura $a d\vartheta$ (a es el radio de la capa). Por lo tanto, el área del anillo se determina por la expresión $2\pi a^2 \sin \vartheta d\vartheta$. Si la anchura de la capa es da y su densidad ρ , la masa del anillo será igual a $2\pi\rho a^2 da \sin \vartheta d\vartheta$. Todos los puntos del anillo se hallan de m a igual distancia r' . Por esta causa, de acuerdo con (46.4), la energía potencial mutua entre el anillo y la masa m se determina con la expresión

$$dU_a = -\gamma \frac{2\pi\rho a^2 da \sin \vartheta d\vartheta \cdot m}{r'}. \quad (46.8)$$

Para obtener la energía potencial de toda la capa esférica y de la masa m , hay que integrar la expresión (46.8) por el ángulo ϑ , en los márgenes de 0 a π . Con ello, la variable r' varía en los límites desde $r - a$ hasta $r + a$ (r es la distancia desde el centro de la capa O hasta m). La expresión (46.8) contiene dos variables ligadas entre sí: ϑ y r' . Antes de comenzar la integración, hay que excluir una de estas variables. La integración se simplifica si se excluye la variable ϑ . La ligazón entre ϑ y r' se puede obtener haciendo uso del teorema del coseno. En la fig. 46.1 vemos que

$$r'^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta.$$

Derivando esta correlación, obtenemos

$$2r' dr' = 2ar \operatorname{sen} \theta d\theta.$$

De aquí $\operatorname{sen} \theta d\theta = (r'/ar) dr'$. Realizando en (46.8) semejante sustitución, se obtiene

$$dU_a = -\gamma \frac{2\pi\rho a da \cdot m \cdot dr'}{r}.$$

La integración por r' en los márgenes desde $r'_1 = r - a$ hasta $r'_2 = r + a$, nos da

$$dU_{\text{capa}} = -\gamma \frac{2\pi\rho a da \cdot m}{r} \int_{r-a}^{r+a} dr' = -\gamma \frac{\rho 4\pi a^2 da \cdot m}{r}. \quad (46.9)$$

La expresión $4\pi a^2 da$ es el volumen de la capa, mientras que $\rho 4\pi a^2 da$, su masa dM . Así, pues, la energía potencial mutua de la capa esférica y la masa m es igual a

$$dU_{\text{capa}} = -\gamma \frac{dM \cdot m}{r}, \quad (46.10)$$

donde r es la distancia desde el centro de la capa hasta m .

Para el caso, cuando la masa m se halla dentro de la capa (véase la fig. 46.1, b), todos los cálculos son los mismos. Otros serán los límites de integración en (46.9), ya que si r' varía aquí desde el valor $r'_1 = a - r$ hasta $r'_2 = a + r$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} dU'_{\text{capa}} &= -\gamma \frac{2\pi\rho a da \cdot m}{r} \int_{a-r}^{a+r} dr' = -\gamma \rho 4\pi a da \cdot m = \\ &= -\gamma \frac{\rho 4\pi a^2 da \cdot m}{a} = -\gamma \frac{dM \cdot m}{a}. \end{aligned} \quad (46.11)$$

De esta forma, aquí la energía potencial es igual para todas las r y equivale al valor de (46.10) que se obtiene para $r = a$.

La expresión (46.10) puede ser interpretada como la energía potencial de la partícula m en el campo creado por la capa esférica de masa dM . La derivada por r de esta energía, tomada con signo contrario, es igual a la proyección sobre la dirección r de la fuerza ejercida sobre la partícula:

$$dF_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\gamma \frac{dM \cdot m}{r^2}. \quad (46.12)$$

El signo menos indica que la fuerza está dirigida hacia el decrecimiento de r , es decir, hacia el centro de la capa.

De la fórmula (46.12) se deduce que la capa esférica actúa sobre la partícula con la misma fuerza con la que actuaría un punto mate-

rial de masa igual a la de la capa, ubicado en el centro de ésta.

La expresión (46.11) no depende de las coordenadas de la partícula. Por lo tanto, el gradiente de esta expresión es igual a cero para todo $r < a$. Así, pues, una partícula que se encuentra en el interior de la capa, no está sujeta a la acción de ninguna fuerza. Claro está, que cada elemento de la capa actúa sobre la partícula con cierta fuerza, pero la suma de las fuerzas ejercidas por todos los elementos de la capa, será cero.

Examinemos ahora un sistema que consta de una esfera homogénea de masa M y de un punto material (partícula) de masa m . Dividamos la esfera en capas de masa dM . Cada capa actúa sobre la partícula con una fuerza definida por la fórmula (46.12). Sumando esta expresión por todas las capas, obtenemos la fuerza que la esfera ejerce sobre la partícula:

$$F_r = \int dF_r = - \int \gamma \frac{dM \cdot m}{r^2} = - \gamma \frac{Mm}{r^2}. \quad (46.13)$$

La acción de la esfera sobre la partícula es equivalente a la de un punto material de masa igual a la de la esfera, ubicado en el centro de la esfera (véase el párrafo anterior).

Si tomamos una esfera con una cavidad esférica en su interior, sobre la partícula que se encuentra en dicha cavidad, no actuará ninguna fuerza.

Sumando por todas las capas de una esfera entera o hueca la expresión (46.10), obtendremos la energía potencial mutua de la partícula y la esfera:

$$U = - \gamma \frac{Mm}{r}. \quad (46.14)$$

Aquí M es la suma de la esfera, m , la masa de la partícula, r , la distancia desde la partícula hasta el centro de la esfera.

De (46.13) y (46.14) sigue que el campo gravitacional creado por una esfera homogénea, es equivalente (fuerza de la esfera) al campo que crea un punto material de la misma masa, ubicado en el centro de la esfera.

Consideremos dos esferas homogéneas de masas M_1 y M_2 . La segunda esfera experimenta desde la primera la misma acción que un punto material de una masa M_1 ejercería, ubicado en el centro de la primera esfera. Según la tercera ley de Newton, la correspondiente fuerza es igual en magnitud a la fuerza con la que la segunda esfera actuaría sobre el punto material M_1 . De acuerdo con (46.13), el módulo de dicha fuerza es igual a $\gamma M_1 M_2 / r^2$. De este modo, hemos demostrado que las esferas homogéneas interactúan como los puntos materiales ubicados en sus centros.

§ 47. Principio de equivalencia

La masa figura en dos diferentes leyes: en la segunda de Newton y en la de gravitación universal. En el primer caso, ella caracteriza las propiedades de inercia del cuerpo, en el segundo, las propiedades gravitacionales, es decir, la capacidad de los cuerpos de atraerse entre sí. Con relación a esto, surge la pregunta de si deben ser diferenciadas o no la masa inerte m_{in} y la masa gravitatoria m_g .

Sólo el experimento puede dar respuesta a dicha pregunta. Examinemos en un sistema heliocéntrico de referencia la caída libre de los cuerpos. Junto a la superficie de la Tierra, todo cuerpo experimenta la fuerza de atracción hacia la Tierra, que de acuerdo con (46.13)

$$F = \gamma \frac{m_g M_T}{R_T^2}$$

(m_g es la masa gravitatoria del cuerpo dado), M_T , la masa gravitatoria de la Tierra, R_T , el radio del globo terrestre). Bajo la acción de esta fuerza, el cuerpo adquiere una aceleración w (pero no g ; véase el § 33), que debe ser igual a la fuerza F dividida por la masa inerte del cuerpo m_{in} :

$$w = \frac{F}{m_{in}} = \gamma \frac{M_T}{R_T^2} \frac{m_g}{m_{in}}. \quad (47.1)$$

Como muestran los experimentos, la aceleración w para todos los cuerpos es igual (en el § 33 fue mostrado que de la igualdad de g se desprende la igualdad de w). También es igual para todos los cuerpos el factor $\gamma (M_T/R_T^2)$. Por consiguiente, el cociente m_g/m_{in} será asimismo igual para todos los cuerpos. A este mismo resultado nos conducen todos los demás experimentos, en los que hubiera podido manifestarse la diferencia entre las masas inerte y gravitatoria.

Entre los indicados experimentos, relataremos acerca del que realizó I. Eötvös que comenzó en 1887 y que duró 25 años. Se basa en el hecho de que sobre un cuerpo en reposo cerca de la superficie terrestre, además de la reacción del apoyo, actúan la fuerza gravitatoria F_g , dirigida al centro de la Tierra, así como la fuerza centrífuga de inercia F_{cent} , perpendicular al eje de rotación de la Tierra (fig. 47.1); en dicha figura no se observa la escala. El módulo de la fuerza centrífuga es dos órdenes menor que el módulo de la fuerza gravitatoria, véase el § 33). La fuerza gravitatoria es proporcional

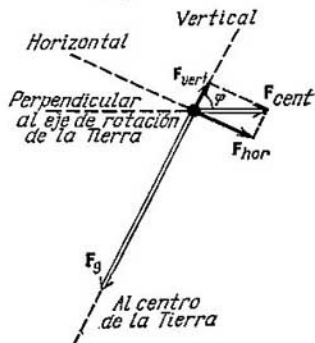


Fig. 47.1

a la masa gravitatoria del cuerpo m_g :

$$\mathbf{F}_g = m_g \mathbf{G}$$

(\mathbf{G} es la intensidad del campo gravitacional). La fuerza centrífuga de inercia es proporcional a la masa inerte m_{in} . De acuerdo con la fórmula (33.4), su módulo se determina con la expresión

$$F_{cent} = m_{in} \omega^2 R_T \cos \varphi$$

(φ es la latitud del lugar). De la fig. 47.1 se desprende que el módulo de la componente vertical de la fuerza centrífuga de inercia es igual a

$$F_{vert} = F_{cent} \cos \varphi = m_{in} \omega^2 R_T \cos^2 \varphi = A m_{in}.$$

Hemos introducido la designación $A = \omega^2 R_T \cos^2 \varphi$. El experimento de Eötvös fue realizado en la latitud $\varphi = 45^\circ$. En semejante caso, el coeficiente A es 100 veces menor que G .

El módulo de la componente horizontal de la fuerza F_{cent}

$$\begin{aligned} F_{hor} &= F_{cent} \sin \varphi = \\ &= m_{in} \omega^2 R_T \cos \varphi \sin \varphi = B m_{in} \end{aligned}$$

(para $\varphi = 45^\circ$ los valores de los coeficientes A y B coinciden).

Eötvös suspendió de un hilo elástico una barra en los extremos de la cual estaban fijados cuerpos de igual masa, en la medida de lo posible (fig. 47.2). Los cuerpos eran de diferentes materiales. A la parte inferior del hilo se sujetaba un espejo.

El rayo, emitido por una fuente de luz y reflejado del espejo, incidía en el retículo de un anteojo. Los brazos l' y l'' fueron elegidos de tal forma que la barra estuviera en equilibrio en el plano vertical. La condición de equilibrio tiene la siguiente forma:

$$(m'_g G - m'_{in} A) l' = (m''_g G - m''_{in} A) l'' \quad (47.2)$$

El instrumento estaba instalado de manera que la barra era perpendicular al plano del meridiano (véase la fig. 47.2). En semejante caso las componentes horizontales de la fuerza centrífuga de inercia, crean un momento torsional

$$N = m'_{in} B l' - m''_{in} B l'' \quad (47.3)$$

Excluyendo de las ecuaciones (47.2) y (47.3) el brazo l'' , después de sencillas transformaciones, es posible llegar a la fórmula

$$N = m'_{in} B l' \left[1 - \frac{(m'_g/m'_{in})G - A}{(m''_g/m''_{in})G - A} \right].$$

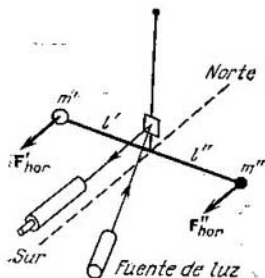


Fig. 47.2

Como vemos en esta fórmula, cuando la razón entre las masas gravitatoria e inerte para los dos cuerpos es igual, el momento que torsiona el hilo debe ser nulo. Por lo contrario, si el coeficiente m_g/m_{in} para el primero y segundo cuerpos no es igual, el momento de torsión se diferencia de cero. En tal caso, durante el giro del instrumento a 180° , el momento de torsión cambiaría su signo por el opuesto y el rayo luminoso se desplazaría del retículo del anteojo (fig. 47.3). Al comparar ocho cuerpos diferentes (y entre ellos, uno de madera) con un cuerpo de platino, tomado como patrón, Eötvös advirtió la torsión del hilo. Esto le permitió afirmar que la razón m_g/m_{in} era para estos cuerpos igual con una precisión de 10^{-8} .

En 1961—1964. Diche perfeccionó el método de Eötvös, empleando para la creación del momento de torsión el campo gravitacional

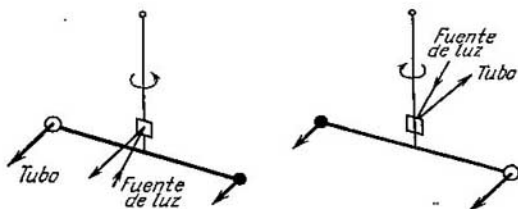


Fig. 47.3

del Sol y la fuerza centrífuga de inercia, condicionada por el movimiento orbital de la Tierra. Como resultado de sus mediciones, Diche llegó a la conclusión de que la razón m_g/m_{in} es igual para los cuerpos investigados con una precisión de 10^{-11} . Por fin, V. B. Braguinski y V. I. Panov obtuvieron la constancia del indicado cociente con una precisión de 10^{-12} .

Así, pues, todo el conjunto de hechos experimentales, indica que *las masas inerte y gravitatoria de todos los cuerpos son rigurosamente proporcionales entre sí*. Esto quiere decir, que eligiendo de manera adecuada las unidades, las masas gravitatoria e inerte se identifican, por lo que en física se habla simplemente de la masa. La identidad de las masas gravitatoria e inerte, fue puesta por Einstein como base de la teoría general de la relatividad.

En el § 32 ya remarcamos que las fuerzas de inercia son análogas a las de la gravedad, ya que tanto unas, como otras son proporcionales a la masa del cuerpo sobre el que actúan. Allí mismo fue indicado que al encontrarse en el interior de una cabina cerrada, no se puede establecer mediante ningún experimento, qué es lo que provoca la acción de la fuerza mg sobre el cuerpo: el hecho de que la cabina se mueve con aceleración g , o que la cabina inmóvil se halla

junto a la superficie de la Tierra. Esta afirmación constituye el contenido del llamado *principio de equivalencia*.

La identidad de las masas gravitatoria e inerte es el corolario de la equivalencia de las fuerzas de inercia y de la gravedad.

Cabe señalar, que desde un principio suponíamos que la masa en (45.1) coincidía con la masa inerte de los cuerpos, por lo que el valor numérico de γ fue por nosotros determinado suponiendo que $m_g = m_{in}$. Por esta razón, (47.1) puede ser escrita como

$$w = \gamma \frac{M_T}{R_T^2}. \quad (47.4)$$

Esta última correlación permite determinar la masa de la Tierra M_T . Poniendo en ella los valores medidos de w , R_T y γ obtenemos una masa de la Tierra igual a $5,98 \cdot 10^{24}$ kg.

A continuación, conociendo el radio de la órbita terrestre R_{orb} y tiempo de una vuelta completa de la Tierra alrededor del Sol T , es posible hallar la masa del Sol M_s . La aceleración de la Tierra, igual a $\omega^2 R_{orb}$ ($\omega = 2\pi/T$), está condicionada por la fuerza con que el Sol atrae la Tierra. Por lo tanto,

$$M_T \omega^2 R_{orb} = \gamma \frac{M_T M_s}{R_{orb}^2},$$

de donde puede ser calculada la masa del Sol.

De este mismo modo fueron determinadas las masas de otros cuerpos celestes.

§ 48. Velocidades cósmicas

Con el fin de moverse alrededor de la Tierra, por una órbita circular de radio que poco se diferencia del radio de la Tierra R_T , el cuerpo deberá desarrollar una determinada velocidad v_1 . Su valor puede ser definido de la igualdad del producto de la masa del cuerpo por la aceleración de la fuerza de la gravedad, que sobre él ejerce:

$$m \frac{v_1^2}{R_T} = mg.$$

De aquí

$$v_1 = \sqrt{gR_T}. \quad (48.1)$$

Por consiguiente, para que cualquier cuerpo se convierta en satélite de la Tierra, es preciso comunicarle una velocidad v_1 que recibe el nombre de *primera velocidad cósmica*. Poniendo los valores de g y R_T , la anterior expresión nos proporciona el siguiente valor de la indicada velocidad:

$$v_1 = \sqrt{gR_T} = \sqrt{9,8 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 8 \text{ km/s}.$$

Si un cuerpo tiene la velocidad v_1 , él no cae a la Tierra. Sin embargo, esta velocidad es insuficiente para que el cuerpo pueda salir de la esfera de atracción de la Tierra, es decir, alejarse de nuestro planeta a una distancia tal a la que la atracción de la Tierra deja de desempeñar un papel importante. La velocidad v_2 necesaria para este fin denominase *segunda velocidad cósmica*.

Para hallar dicha velocidad hay que calcular el trabajo que hay que realizar contra las fuerzas de atracción terrestre para que un cuerpo se aleje al infinito de la superficie terrestre. Durante el alejamiento del cuerpo, las fuerzas de atracción de la Tierra realizan sobre él cierto trabajo

$$A' = U_{\text{intc}} - U_{\text{fin}}.$$

De acuerdo con (46.14) el valor inicial

$$U_{\text{intc}} = -\gamma \frac{M_{\text{T}}m}{R_{\text{T}}},$$

el valor final es cero. Así, que

$$A' = -\gamma \frac{M_{\text{T}}m}{R_{\text{T}}}.$$

El trabajo A que hay que ejecutar contra las fuerzas de atracción de la Tierra, es igual al trabajo A' tomado con signo opuesto, es decir,

$$A = \gamma \frac{M_{\text{T}}m}{R_{\text{T}}}. \quad (48.2)$$

Despreciando la diferencia entre la fuerza de la gravedad mg y la fuerza de atracción gravitacional del cuerpo por la Tierra, podemos escribir que

$$mg = \gamma \frac{M_{\text{T}}m}{R_{\text{T}}^2}.$$

De aquí

$$\gamma \frac{M_{\text{T}}m}{R_{\text{T}}} = mgR_{\text{T}}.$$

Por lo tanto el trabajo (48.2) puede ser representado en la forma

$$A = mgR_{\text{T}}. \quad (48.3)$$

El cuerpo que se aleja realiza este trabajo a cuenta de la reserva de su energía cinética. Para que dicha reserva de energía sea suficiente para realizar el trabajo (48.3), el cuerpo debe ser lanzado a una velocidad v que no debe ser menor que v_2 y que se determina de la condición

$$\frac{mv_2^2}{2} = mgR_{\text{T}}.$$

De aquí,

$$v_2 = \sqrt{2gR_{\text{T}}}. \quad (48.4)$$

La velocidad v_2 es la segunda velocidad cósmica. Al comparar con (48.1) vemos que la segunda velocidad cósmica es $\sqrt{2}$ veces mayor que la primera. Al multiplicar 8 km/s por $\sqrt{2}$, obtenemos el valor de v_2 , aproximadamente igual a 11 km/s.

Cabe señalar, que el valor necesario de la velocidad no depende de la dirección por la que se realiza el lanzamiento del cuerpo de la Tierra. De esta dirección sólo depende la forma de la trayectoria por la que el cuerpo se aleja de la Tierra.

Para abandonar los límites del Sistema solar, el cuerpo debe vencer, además de la atracción de la Tierra, las fuerzas de atracción del Sol. La velocidad necesaria con este fin, al lanzar el cuerpo desde la superficie de la Tierra, se llama *tercera velocidad cósmica*, v_3 . Esta velocidad depende de la dirección de lanzamiento. Si ésta se realiza en la dirección del movimiento orbital de la Tierra, esta velocidad es la mínima y constituye unos 17 km/s (en este caso, la velocidad del cuerpo con relación al Sol se compone de la velocidad del cuerpo respecto de la Tierra y de la velocidad con que la Tierra gira alrededor del Sol). Durante el lanzamiento en dirección opuesta a la de movimiento de la Tierra, $v_3 \approx 73$ km/s.

Las velocidades cósmicas fueron por primera vez alcanzadas en la URSS. El 4 de octubre de 1957 en la Unión Soviética se realizó el primer lanzamiento exitoso de un satélite artificial de la Tierra, que fue el primero en la historia de la humanidad. El 2 de enero de 1959 fue alcanzado el segundo objetivo. Ese día, de la tierra soviética se puso en vuelo un cohete cósmico que salió de la zona de la atracción terrestre y que se convirtió en el primer planeta artificial de nuestro Sistema solar. El 12 de abril de 1961, en la Unión Soviética se realizó el primer vuelo del hombre en el espacio cósmico. El primer cosmonauta soviético, Yuri Alekséyevich Gagarin dio una vuelta alrededor de la Tierra y aterrizó con felicidad.

MOVIMIENTO VIBRATORIO

§ 49. Generalidades sobre las vibraciones

Los procesos que se distinguen por uno u otro grado de repetición, reciben el nombre de vibraciones (oscilaciones). Poseen semejante propiedad de repetición las oscilaciones del péndulo de un reloj, las oscilaciones de una cuerda o las ramas de un diapasón, la tensión entre las armaduras de un condensador en el circuito de un receptor de radio, etc.

En dependencia de la naturaleza física del proceso que se repite se distinguen las siguientes vibraciones: mecánicas, electromagnéticas, electromecánicas, etc. En este capítulo, se consideran las vibraciones mecánicas.

Las oscilaciones están extensamente difundidas en la naturaleza y en técnica. En muchos casos juegan un papel nocivo. Las oscilaciones de un puente que surgen a causa de los golpes que le comunican las ruedas al pasar por las juntas de los carriles, las vibraciones del casco de un buque, provocadas por la rotación de la hélice, las vibraciones de las alas de un avión, todos estos procesos pueden conducir a resultados catastróficos. En semejantes casos, el problema consiste en evitar la aparición de las oscilaciones o bien, por lo menos, obstaculizar que aquéllas alcancen dimensiones peligrosas.

Pero, al mismo tiempo, los procesos vibratorios yacen en la propia base de diversas ramas de la técnica. Por ejemplo, la base de toda la radiotécnica son los procesos vibratorios.

En función del carácter del influjo sobre el sistema vibratorio se distinguen las vibraciones libres (o propias), forzadas, autovibraciones (autooscilaciones) y paramétricas.

Reciben el nombre de libres las vibraciones que se producen en un sistema que después de darle un golpe o que fue sacado del estado de equilibrio, se le deja oscilar por sí mismo. Un ejemplo de semejante fenómeno pueden ser las oscilaciones de una bola suspendida de un hilo (péndulo). Para provocar las vibraciones hay que empujar la bola o bien, desplazándola hacia un lado, soltarla.

Forzadas denominanse las vibraciones, durante las cuales, sobre el sistema en oscilación se ejerce la acción de una fuerza externa que varía periódicamente. Un ejemplo de tales vibraciones pueden ser las de un puente que surgen al pasar por él gente que marca el paso.

Las autovibraciones, como las vibraciones forzadas, se acompañan por la acción de las fuerzas externas sobre el sistema en oscilación,

pero los momentos de tiempo cuando dichas acciones se ejercen se prefijan por el propio sistema, es decir, el sistema vibratorio gobierna por sí mismo el influjo externo. Un ejemplo de un sistema autovibratorio puede ser un reloj, en el que el péndulo se anima a cuenta de la energía del peso subido o del muelle torsionado, con la particularidad de que los impulsos se transmiten cuando el péndulo pasa por su posición media. A cuenta del influjo externo, durante las vibraciones paramétricas se produce la variación periódica de cierto parámetro del sistema, por ejemplo, la longitud del hilo del que está suspendida una bola que realiza oscilaciones.

Las vibraciones más sencillas son las armónicas, es decir, tales con las que la magnitud que oscila (por ejemplo, la desviación del péndulo) varía con el tiempo según la ley del seno o coseno. Este tipo de oscilación es de particular importancia por las siguientes causas: primero, en la naturaleza y la técnica las vibraciones tienen con frecuencia un carácter próximo al de las armónicas y, segundo, los procesos periódicos de otra forma (con otra dependencia del tiempo) pueden ser representados como la superposición de varias vibraciones armónicas.

§ 50. Vibraciones pequeñas

Examinemos un sistema mecánico, cuya posición puede ser prefijada por una magnitud que designaremos con x . En semejantes casos se dice que el sistema tiene un grado de libertad. La magnitud x , que determina la posición del sistema, puede ser un ángulo que se cuenta en cierto plano o la distancia que se cuenta a lo largo de una línea curva (en particular, por una recta), etc. La energía potencial del sistema será función de una variable x : $U = U(x)$. Supongamos que el sistema está en equilibrio estable, con el que la función $U(x)$ tiene su mínimo (véase el § 26). Vamos a concordar que la coordenada x y la energía potencial U serán contadas desde la posición de equilibrio. Entonces $U(0) = 0$.

Desarrollemos la función $U(x)$ en una serie según los exponentes de x , con la particularidad de que nos limitaremos a considerar vibraciones pequeñas, de forma que podemos despreciar los exponentes superiores de x . De acuerdo con la fórmula de Maclaurin

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2}U''(0)x^2$$

(a causa de la pequeñez de x , despreciamos los demás términos). Como $U(x)$ tiene su mínimo con $x = 0$, $U'(0)$ es nula, mientras que $U''(0)$ es positiva. Además, por planteamiento $U(0) = 0$. Introducimos la designación: $U''(0) = k$ ($k > 0$). Entonces

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (50.1)$$

La expresión (50.1) es igual que la fórmula (25.1) para la energía potencial de un resorte deformado. Haciendo uso de la correlación (22.4) hallamos la fuerza que actúa sobre el sistema:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx. \quad (50.2)$$

Esta fórmula nos proporciona la proyección de la fuerza en la dirección x . En adelante, omitiremos el índice x para la designación de la fuerza, es decir, escribiremos la correlación (50.2) en la forma: $F = -kx$.

La expresión (50.2) es idéntica a la expresión (14.2) para la fuerza elástica de un resorte deformado. Por esta razón, las fuerzas de la forma (50.2) reciben el nombre de *cuasielásticas*, cualquiera que sea su naturaleza. Es fácil comprender que la fuerza descrita con la fórmula (50.2) siempre está dirigida a la posición de equilibrio. El módulo de la fuerza es proporcional a la magnitud de la desviación del sistema de la posición de equilibrio. Una fuerza que posee semejantes propiedades, es a veces denominada *fuerza de recuperación* (o recuperadora).

Como ejemplo, consideremos un sistema constituido por una bola de masa m , suspendida de un muelle, cuya masa, en comparación con m , puede ser despreciada (fig. 50.1). En la posición de equilibrio la fuerza mg se equilibra con la fuerza $k \Delta l_0$:

$$mg = k \Delta l_0 \quad (50.3)$$

(Δl_0 es el alargamiento del muelle).

Caractericemos el desplazamiento de la bola de la posición de equilibrio con la coordenada x , con la particularidad de que el eje x lo dirigiremos verticalmente hacia abajo, mientras que el cero del eje, lo hacemos coincidir con la posición de equilibrio de la bola. Si desplazamos la bola a la posición caracterizada por la coordenada x , el alargamiento del muelle será igual a $\Delta l_0 + x$ y la proyección de la fuerza resultante sobre el eje x tomará el valor $F = mg - k(\Delta l_0 + x)$. Tomando en consideración la condición (50.3) obtenemos que

$$F = -kx. \quad (50.4)$$

De este modo, en el ejemplo examinado la resultante de la fuerza de la gravedad y de la fuerza elástica tiene carácter de fuerza cuasielástica.

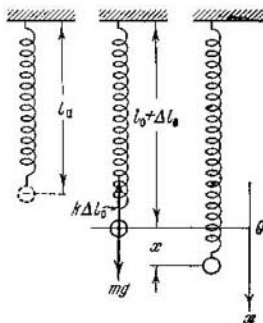


Fig. 50.1

Comuniquemos a la bola el desplazamiento $x = a$, después de lo cual dejamos que el sistema se mueva por sí mismo. Bajo la acción de la fuerza cuasielástica, la bola se moverá hacia la posición de equilibrio a velocidad creciente $v = \dot{x}$. Con esto, la energía potencial del sistema decrecerá (fig. 50.2), pero aparecerá una energía cinética creciente¹⁾ $E_c = 1/2 m \dot{x}^2$ (despreciamos la masa del muelle). Después

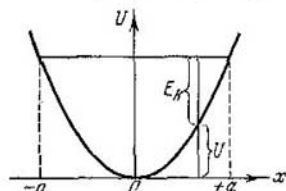


Fig. 50.2

de llegar a la posición de equilibrio, la bola continúa el movimiento por inercia. Este movimiento será retardado y cesará cuando la energía cinética se convierta por completo en potencial, es decir, cuando el desplazamiento de la bola sea equivalente a $-a$. A continuación, ese mismo proceso transcurrirá con el movimiento de la bola en dirección inversa. Si el sistema carece de rozamiento, la energía de éste debe conservarse y la bola se moverá en los límites desde $x = a$ hasta $x = -a$ tiempo ilimitado.

La ecuación de la segunda ley de Newton tiene para la bola la forma

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (50.5)$$

Introduciendo la designación

$$\omega_0^2 = k/m, \quad (50.6)$$

transformamos la ecuación (50.5) de la siguiente forma:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (50.7)$$

Como $k/m > 0$, ω_0 es una magnitud real.

Así, pues, cuando carecen fuerzas de rozamiento el movimiento bajo la acción de la fuerza cuasielástica se describe con la ecuación diferencial (50.7).

En todo sistema vibratorio real, hay fuerzas de resistencia, cuya acción conduce a la disminución de la energía del sistema. Si el decrecimiento de la energía no se compensa a cuenta del trabajo de las fuerzas externas, las oscilaciones se amortiguarán. En el caso más sencillo, pero que al mismo tiempo se tropieza con la mayor frecuencia, la fuerza de resistencia F^* es proporcional a la magnitud de la velocidad:

$$F_x^* = -r\dot{x}. \quad (50.8)$$

¹⁾ En la ciencia sobre las vibraciones con la letra T se designa el período de las oscilaciones. Por esta razón, la energía cinética ha sido designada con el símbolo E_c .

Aquí r es una constante, llamada *coeficiente de resistencia*. El signo menos está condicionado por el hecho de que la fuerza F^* y la velocidad v tienen direcciones opuestas; por consiguiente, sus proyecciones sobre el eje x tienen signos diferentes.

Cuando hay fuerzas de resistencia, la segunda ley de Newton tiene el aspecto

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \quad (50.9)$$

Aplicando la designación

$$2\beta = r/m, \quad \omega_0^2 = k/m \quad (50.10)$$

(comp. con (50.6)), escribamos de nuevo la ecuación (50.9) de la siguiente forma:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (50.11)$$

Esta ecuación diferencial describe las oscilaciones amortiguadas del sistema.

Las vibraciones, descritas con las ecuaciones (50.7) y (50.11) son libres (o propias): un sistema sacado de la posición de equilibrio o que recibió un golpe, realiza oscilaciones cuando lo dejamos moverse por sí mismo. Sea ahora, que el sistema vibratorio experimenta la acción de una fuerza externa, que varía con el tiempo según la ley armónica:

$$F_x = F_0 \cos \omega t. \quad (50.12)$$

En semejante caso, la ecuación de la segunda ley de Newton tiene la forma

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Introduciendo las designaciones (50.10), escribimos esta ecuación del modo que sigue:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (50.13)$$

donde

$$f_0 = F_0/m. \quad (50.14)$$

La ecuación (50.13) describe las vibraciones forzadas.

Hemos aclarado, que al estudiar las vibraciones de diversos tipos tropezamos con la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales de la forma

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t), \quad (50.15)$$

donde a y b son constantes, $f(t)$, cierta función de t . La ecuación del tipo (50.15) recibe el nombre de *ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes*. Cuando se trata de la ecuación (50.7) $a = 0$, $b = \omega_0^2$, para (50.11) $a = 2\beta$, $b = \omega_0^2$. En ambos casos la función

$f(t)$ es idénticamente igual a cero: $f(t) \equiv 0$. El caso de las vibraciones forzadas $f(t) = f_0 \cos \omega t$.

La solución de la ecuación (50.15) se simplifica de modo considerable, si se pasa a magnitudes complejas. Por esta razón, antes de pasar al examen detallado de las vibraciones de diversos tipos, nos familiarizaremos con brevedad con los números complejos y con los métodos de resolución de las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

§ 51. Números complejos

Recibe el nombre de complejo un número z de la forma

$$z = x + iy, \quad (51.1)$$

donde x y y son números reales, i , una unidad imaginaria ($i^2 = -1$). El número x se llama *parte real* del número complejo z . De forma simbólica esto se escribe $x = \operatorname{Re} z$. El número y denomínase *parte imaginaria* de z (se escribe $y = \operatorname{Im} z$). El número

$$z^* = x - iy \quad (51.2)$$

llámase *conjugado complejo* al número $x + iy$.

Al número real x se le puede confrontar un punto en el eje x . Al número complejo z es posible confrontar un punto en un plano con coordenadas x, y (fig. 51.1). Cada punto en el plano determina cierto número complejo z . Por consiguiente, un número complejo puede ser prefijado en

la forma (51.1) con ayuda de las coordenadas cartesianas x e y de punto correspondiente. No obstante, ese mismo número prefijase también por las coordenadas polares ρ y φ . Entre los dos pares de coordenadas existen las correlaciones

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} (y/x). \quad (51.3)$$

La distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto que representa el número z , recibe el nombre de *módulo* del número complejo (se designa $|z|$). Está claro que

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (51.4)$$

El número φ denomínase *argumento* del número complejo z .

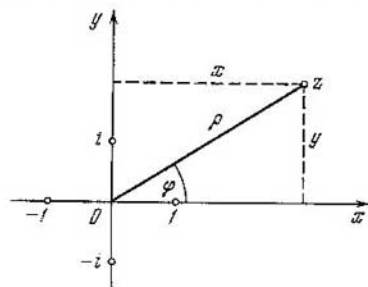


Fig. 51.1

Tomando en consideración la correlación (51.3), podemos representar el número complejo en forma trigonométrica:

$$z = \rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi). \quad (51.5)$$

Dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se consideran iguales si sus partes reales e imaginarias son iguales por separado:

$$z_1 = z_2, \text{ si } x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2. \quad (51.6)$$

Los módulos de dos números complejos iguales entre sí son iguales, mientras que los argumentos pueden sólo diferenciarse por los sumandos múltiplos de 2π :

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 \pm 2k\pi. \quad (51.7)$$

En las expresiones (51.1) y (51.2) vemos que cuando $z^* = z$, la parte imaginaria de z es nulo, o sea, el número z resulta ser real. De este modo, la condición de realidad del número z , puede ser escrita en la forma

$$z^* = z. \quad (51.8)$$

En matemática se demuestra la correlación

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi, \quad (51.9)$$

que recibe el nombre de *fórmula de Euler*. Si en esta fórmula sustituimos φ por $-\varphi$ y, teniendo en cuenta que $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$, mientras que $\operatorname{sen}(-\varphi) = -\operatorname{sen} \varphi$, obtenemos la correlación

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi. \quad (51.10)$$

Sumemos las expresiones (51.9) y (51.10) y resolvamos la correlación que resulta respecto de $\cos \varphi$. Se obtiene

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}). \quad (51.11)$$

Restando (51.10) de (51.9) tendremos que $\operatorname{sen} \varphi = (1/2i) (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$.

Con ayuda de la fórmula (51.9) es posible escribir el número complejo en forma exponencial:

$$z = \rho e^{i\varphi} \quad (51.12)$$

(véase (51.5)). El número complejo conjugado en forma exponencial tiene el aspecto

$$z^* = \rho e^{-i\varphi}. \quad (51.13)$$

Al sumar los números conjugados, por separados se suman sus partes reales e imaginarias:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i (y_1 + y_2). \quad (51.14)$$

Es cómodo efectuar la remultiplicación de los números complejos, tomando estos números en forma exponencial:

$$z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (51.15)$$

Los módulos de los números complejos se multiplican entre sí, mientras que los argumentos se suman:

$$\rho = \rho_1 \cdot \rho_2, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (51.16)$$

De manera análoga se dividen los números complejos:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (51.17)$$

Tomando en consideración las fórmulas (51.12) y (51.13), obtenemos con facilidad que

$$zz^* = \rho^2 \quad (51.18)$$

(el cuadrado del módulo de un número complejo, es igual al producto de éste por su número complejo conjugado).

§ 52. Ecuaciones diferenciales lineales

La ecuación del tipo

$$\ddot{x} + ax' + bx = f(t), \quad (52.1)$$

donde a y b son constantes y $f(t)$, la función prefijada de t , recibe el nombre de *ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes*. Las constantes a y b también pueden ser ceros.

Si la función $f(t)$ idénticamente es igual a cero ($f(t) \equiv 0$), la ecuación se denominará *homogénea*, en el caso contrario, *no homogénea*. Una ecuación homogénea tiene la forma

$$\ddot{x} + ax' + bx = 0. \quad (52.2)$$

La solución de toda ecuación diferencial de segundo orden (es decir, del orden de la segunda derivada mayor) contiene dos constantes arbitrarias C_1 y C_2 . Esto puede ser comprendido si tomamos en consideración que la definición de la función por su segunda derivada se efectúa con integración doble. Cada vez al integrar surge una constante de integración. Como ejemplo, examinemos la ecuación

$$\ddot{x} = 0. \quad (52.3)$$

La integración de esta ecuación nos da que $\dot{x} = C_1$. La segunda integración conduce a la función

$$x = C_1 t + C_2. \quad (52.4)$$

Es fácil cerciorarse de que para cualesquiera valores de las constantes C_1 y C_2 , la función (52.4) satisface la ecuación (52.3).

Aduciendo a las constantes C_1 y C_2 valores determinados, obtenemos la llamada *solución particular* de la ecuación diferencial. Por ejemplo, la función $5t + 3$ es una de las soluciones particulares de la ecuación (52.3).

El conjunto de todas las soluciones particulares sin excepción recibe el nombre de *solución general* de una ecuación diferencial. La solución general de la ecuación (52.3) tiene el aspecto (52.4).

En la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales se demuestra que si x_1 y x_2 son soluciones linealmente independientes¹⁾ de la ecuación homogénea (52.2), la solución general de esta ecuación puede ser presentada en la forma

$$x = C_1x_1 + C_2x_2, \quad (52.5)$$

donde C_1 y C_2 son constantes tomadas al azar.

Sea $x_n(t, C_1, C_2)$ la solución general de la ecuación no homogénea (52.1) (las constantes arbitrarias C_1 y C_2 entran en esta solución como parámetros), mientras que $x_n(t)$ una de las soluciones particulares de esa misma ecuación (que no contiene constantes arbitrarias). Introduzcamos la designación:

$$x(t, C_1, C_2) = x_n(t, C_1, C_2) - x_n(t).$$

Entonces la solución general de una ecuación no homogénea puede ser representada en la forma

$$x_n(t, C_1, C_2) = x_n(t) + x(t, C_1, C_2). \quad (52.6)$$

La función (52.6) satisface la ecuación (52.1) con cualesquiera valores de las constantes C_1 y C_2 . Por lo tanto, podemos escribir la correlación:

$$\ddot{x}_n(t) + \ddot{x}(t, C_1, C_2) + a\dot{x}_n(t) + a\dot{x}(t, C_1, C_2) + bx_n(t) + bx(t, C_1, C_2) = f(t).$$

Agrupando los sumandos tendremos:

$$\ddot{x}(t, C_1, C_2) + a\dot{x}(t, C_1, C_2) + bx(t, C_1, C_2) + [\ddot{x}_n(t) + a\dot{x}_n(t) + bx_n(t)] = f(t). \quad (52.7)$$

La solución particular $x_n(t)$ también satisface la ecuación (52.1). Por esta razón, la expresión entre corchetes en el primer miembro de la correlación (52.7) es igual al segundo miembro de esa misma correlación. De aquí se desprende que la función $x(t, C_1, C_2)$ debe

¹⁾ Las funciones x_1 y x_2 se denominan linealmente independientes, si la correlación $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = 0$ sólo se cumple cuando α_1 y α_2 son nulas.

satisfacer la condición

$$\ddot{x}(t, C_1, C_2) + a\dot{x}(t, C_1, C_2) + bx(t, C_1, C_2) = 0,$$

es decir, es una solución general de la ecuación homogénea (52.2). De este modo, llegamos a un teorema muy ventajoso: *la solución general de una ecuación no homogénea es igual a la suma de la solución general de la correspondiente ecuación homogénea más cualquier solución no homogénea:*

$$x_{\text{gen. no. hom}} = x_{\text{gen. hom.}} + x_{\text{par. no hom.}} \quad (52.8)$$

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes se resuelven por medio de la sustitución

$$x(t) = e^{\lambda t}, \quad (52.9)$$

donde λ es una magnitud constante. La derivación de la función (52.9) nos proporciona, que

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}. \quad (52.10)$$

La sustitución de las expresiones (52.9) y (52.10) en la ecuación (52.2) después de la reducción por el factor $e^{\lambda t}$ diferente de cero, conduce a la ecuación algebraica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (52.11)$$

Esta ecuación recibe el nombre de *característica*. Las raíces de la ecuación son aquellos valores de λ con los que la función (52.9) satisface la ecuación (52.2).

Sí las raíces de la ecuación (52.11) no coinciden ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), las funciones $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$ serán linealmente independientes. Por lo tanto, de acuerdo con (52.5), la solución general de la ecuación (52.2) puede ser escrita de la forma

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (52.12)$$

Podemos mostrar que cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, la solución general de la ecuación (52.2) tiene el siguiente aspecto:

$$x = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}. \quad (52.13)$$

Supongamos que los coeficientes a y b son reales, mientras que la función en el segundo miembro de la ecuación (52.1) es compleja. Después de representar dicha función en la forma $f(t) + i\varphi(t)$, llegamos a la ecuación:

$$\ddot{z} + a\dot{z} + bz = f + i\varphi \quad (52.14)$$

(la función buscada ha sido designada con la letra z). Como es lógico, la solución de esta ecuación será compleja. Escribiendo la solución en la forma $z(t) = x(t) + iy(t)$, la ponemos en la ecuación (52.14).

Como resultado obtenemos:

$$\ddot{x} + i\dot{y} + a\dot{x} + ai\dot{y} + bx + biy = f + i\varphi. \quad (52.15)$$

Para números complejos iguales entre sí, sus partes reales e imaginarias son iguales por separado (véase (51.6)). Por consiguiente, la ecuación (52.15) se descompone en dos ecuaciones independientes:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t), \quad \ddot{y} + ay + by = \varphi(t),$$

la primera de ellas coincide con la ecuación (52.1). Esta propiedad de la ecuación (52.15) permite aplicar el siguiente procedimiento, que en ocasiones, facilita los cálculos considerablemente. Supongamos que en la ecuación (52.1) que resolvemos, el segundo miembro es real. Añadiéndole una función imaginaria tomada al azar, llevamos la ecuación a la forma (52.14). Hallando después la solución compleja de la ecuación, tomamos su parte real. Ésta será de por sí la solución de la ecuación inicial (ecuación (52.1)).

§ 53. Vibraciones armónicas

Examinemos las vibraciones descritas por la ecuación

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (53.1)$$

(véase (50.7)). Semejantes vibraciones son realizadas por un cuerpo de masa m , sobre el que sólo actúa la fuerza cuasielástica $F = -kx$. El coeficiente de x en la ecuación (53.1) tiene el valor

$$\omega_0^2 = k/m \quad (53.2)$$

(véase 50.6)).

Poniendo en (53.1) la expresión $x = e^{\lambda t}$ (véase (52.9)), llegamos a la ecuación característica

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0.$$

Esta ecuación tiene las raíces imaginarias

$$\lambda_1 = +i\omega_0, \quad \lambda_2 = -i\omega_0.$$

De acuerdo con (52.12) la solución general de la ecuación (53.1) tiene el aspecto

$$x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (53.3)$$

donde C_1 y C_2 son constantes complejas.

La función $x(t)$ que describe las vibraciones debe ser real. Con este fin, los coeficientes C_1 y C_2 en (53.3) se deben elegir de manera que se cumpla la condición (véase (51.8))

$$C_1^* e^{-i\omega_0 t} + C_2^* e^{i\omega_0 t} = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (53.4)$$

(hemos igualado la expresión (53.3) a su expresión compleja conjugada). La correlación (53.4) será cumplida si $C_1 = C_2^*$ (en tal caso $C_2 = C_1^*$). Representemos los coeficientes C_1 y C_2 , que satisfacen la indicada condición, en forma exponencial (véase (51.12)), designando su módulo con $a/2$ y su argumento con la letra α :

$$C_1 = (a/2) e^{i\alpha}, \quad C_2 = (a/2) e^{-i\alpha}. \quad (53.5)$$

La sustitución de estas expresiones en (53.3) nos proporciona

$$x = (a/2) (e^{i(\omega_0 t + \alpha)} + e^{-i(\omega_0 t + \alpha)}) = a \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (53.6)$$

(véase la fórmula (51.11)). De esta forma, la solución general de la ecuación (53.1) tiene la forma

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (53.7)$$

donde a y α son constantes arbitrarias¹⁾.

Así, pues, el desplazamiento de x varía con el tiempo según la ley de los cosenos. Por lo tanto, el movimiento del sistema, sobre el que se ejerce la fuerza del tipo $F = -kx$, es una vibración armónica.

La gráfica de una vibración armónica, es decir, la gráfica de la función (53.7), se muestra en la fig. 53.1. Por el eje horizontal se traza el tiempo t , por el eje vertical, el desplazamiento x . Como el coseno varía en los márgenes de -1 a $+1$, los valores de x se hallarán en los límites de $-a$ a $+a$.

El valor de la máxima elongación del sistema desde la posición de equilibrio recibe el nombre de *amplitud*, que se designa con a . La amplitud es una magnitud positiva constante. Su valor se determina por la magnitud de la elongación o el golpe, a causa de lo cual el sistema abandonó la posición de equilibrio.

¹⁾ La solución de la ecuación (53.1) puede ser escrita mediante dos procedimientos. Transformemos la expresión (53.7) según la fórmula para el coseno de una suma

$$x = a (\cos \alpha \cos \omega_0 t - \sin \alpha \sin \omega_0 t),$$

introducamos las designaciones

$$c_1 = a \cos \alpha, \quad c_2 = -a \sin \alpha.$$

Entonces la función $x(t)$ se puede representar en la forma:

$$x = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t,$$

donde c_1 y c_2 son constantes tomadas al azar.

Por fin, haciendo uso de la fórmula (51.9), podemos escribir la expresión (53.7) del modo siguiente:

$$x = \operatorname{Re} \{ a e^{i(\omega_0 t + \alpha)} \}.$$

La magnitud $(\omega_0 t + \alpha)$, que se encuentra bajo el signo de coseno, denomínase *fase* de la vibración. La constante α es el valor de la fase en el momento de tiempo $t = 0$ y se llama *fase inicial* de la vibración. Al variar el comienzo del registro del tiempo, cambiará también α . Por lo tanto, el valor de la fase inicial se determina por la elección del punto desde el que se cuenta el tiempo. Como el valor de x no varía al adicionar o sustraer de la fase el número entero 2π , siempre se puede conseguir que la fase inicial sea en módulo menor que π . Por esta causa, por regla, sólo se consideran los valores de α que se encuentran en los límites de $-\pi$ a $+\pi$.

Como el coseno es una función periódica, cuyo período es 2π , los diversos estados¹⁾ de un sistema que realiza vibraciones armónicas, se repiten después de tal intervalo de tiempo T , durante el cual la fase de la vibración recibe un incremento igual a 2π (fig. 53.1). Este intervalo de tiempo T recibe el nombre de *período* de la vibración. Puede ser determinado de la siguiente condición: $[\omega_0(t + T) + \alpha] = [\omega_0 t + \alpha] + 2\pi$, de donde

$$T = 2\pi/\omega_0. \quad (53.8)$$

El número de vibraciones por la unidad de tiempo denomínase *frecuencia* de las vibraciones ν . Es obvio, que la frecuencia está ligada con la duración de una vibración T por medio de la siguiente correlación:

$$\nu = 1/T. \quad (53.9)$$

Como unidad se toma la frecuencia de tal vibración, cuyo período es igual a 1 s. Esta unidad se denomina hertzio (Hz). La frecuencia de 10^3 Hz se llama kilohertzio (kHz), de 10^6 Hz, megahertzio (MHz).

De (53.8) sigue, que

$$\omega_0 = 2\pi/T. \quad (53.10)$$

De este modo, ω_0 nos ofrece el número de vibraciones durante 2π segundos. La magnitud ω_0 recibe el nombre de frecuencia *circular* o *cíclica*. Está relacionada con la frecuencia corriente ν mediante la correlación

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \quad (53.11)$$

Después de derivar (53.7) por el tiempo, obtenemos la expresión para la velocidad

$$v = \dot{x} = -a\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (53.12)$$

Como vemos en (53.12), la velocidad también varía por una ley armónica, con la particularidad de que la amplitud de la velocidad

¹⁾ Cabe recordar que el estado del sistema mecánico se caracteriza por valores de las coordenadas y las velocidades de los cuerpos que forman este sistema.

es $a\omega_0$. De la comparación de (53.7) y (53.12) se desprende que la velocidad adelanta al desplazamiento de fase en $\pi/2$.

Después de derivar (53.12) otra vez por el tiempo, encontramos la expresión para la aceleración:

$$w = \ddot{x} = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \quad (53.13)$$

Como sigue de (53.13), la aceleración y la elongación se hallan en antifase. Esto significa que, cuando la elongación alcanza su máximo valor positivo, la aceleración alcanza su valor máximo en magnitud, pero de signo negativo y viceversa.

En la fig. 53.2 se comparan las gráficas para la elongación, la velocidad y la aceleración.

Cada vibración concreta se caracteriza por valores determinados de la amplitud a y la fase inicial α . Los valores de estas magnitudes

para la vibración dada, pueden ser determinados con ayuda de las llamadas condiciones iniciales, es decir, por los valores de la elongación x_0 y la velocidad v_0 en el momento inicial de tiempo. En efecto, haciendo en (53.7) y (53.12) $t = 0$, obtenemos dos ecuaciones

$$x_0 = a \cos \alpha, \quad v_0 = -a\omega_0 \sin \alpha,$$

de las que hallamos

$$a = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}, \quad (53.14)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -v_0/x_0\omega_0. \quad (53.15)$$

La ecuación (53.15) se satisface con dos valores de α entre $-\pi$ y $+\pi$. De estos dos valores hay que tomar aquel, con el que se obtienen signos correctos del coseno y el seno.

La fuerza cuasielástica es conservativa. Por esta causa, la energía

total de una vibración armónica debe quedar constante. Durante las vibraciones se produce la transformación de la energía cinética en potencial y viceversa, con la particularidad de que en los momentos de la máxima elongación desde la posición de equilibrio, la energía total E sólo consta de energía potencial, que alcanza su valor máximo $U_{\text{máx}}$:

$$E = U_{\text{máx}} = \frac{ka^2}{2}; \quad (53.16)$$

cuando el sistema pasa por la posición de equilibrio, la energía total sólo consta de energía cinética, que en esos momentos adquiere su

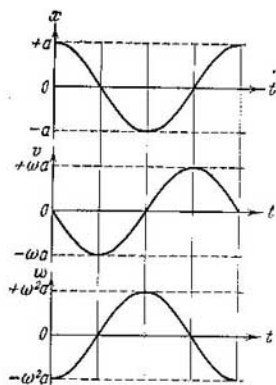


Fig. 53.2

valor máximo $E_c \text{ máx}$:

$$E = E_c \text{ máx} = \frac{mv_{\text{máx}}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \quad (53.17)$$

(más arriba fue mostrado que la amplitud de la velocidad es igual a $a\omega_0$). Las expresiones (53.16) y (53.17) son iguales, ya que de acuerdo con (53.2) $m\omega_0^2 = k$.

Aclaremos cómo varía con el tiempo la energía cinética y potencial de una vibración armónica. La energía cinética es igual a (véase la expresión (53.12) para \dot{x})

$$E_c = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (53.18)$$

La energía potencial se expresa con la fórmula

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (53.19)$$

Sumando (53.18) y (53.19) y tomando en consideración que $m\omega_0^2 = k$, obtenemos la fórmula para la energía total:

$$E = E_c + U = \frac{ka^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \quad (53.20)$$

(comp. con (53.16) y (53.17)), de modo que la energía total de una vibración armónica resulta, en realidad, ser constante.

Haciendo uso de conocidas fórmulas de trigonometría, a las expresiones para E_c y U se les puede dar la forma

$$E_c = E \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = E \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right], \quad (53.21)$$

$$U = E \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = E \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right], \quad (53.22)$$

donde E es la energía total del sistema. De estas fórmulas se ve que E_c y U varían con una frecuencia de $2\omega_0$, es decir, con una frecuencia que supera dos veces la frecuencia de la vibración armónica. En la fig. 53.3 se comparan las gráficas para x , E_c y U .

Como sabemos, el valor medio del cuadrado del seno y del cuadrado del coseno, es igual a la mitad. Por lo tanto, el valor medio de E_c coincide con el valor medio de U y es igual a $E/2$.

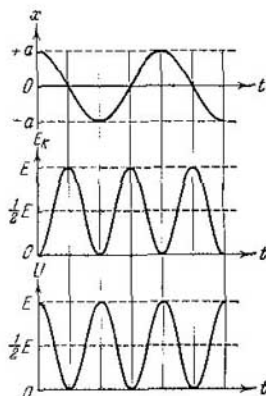


Fig. 53.3

§ 54. El péndulo

En física, se entiende por péndulo un sólido que por la acción de la fuerza de la gravedad oscila alrededor de un punto o eje inmóvil. Se ha adoptado distinguir el péndulo matemático y físico.

Recibe el nombre de péndulo matemático un sistema idealizado que consta de un hilo imponderable y que no se estira, del que está suspendida una masa concentrada en un punto. Una pequeña bola pesada suspendida de un hilo largo y fino puede servirnos de péndulo matemático, con aproximación suficientemente buena.

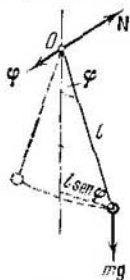


Fig. 54.1

La desviación del péndulo de equilibrio será caracterizada por el ángulo φ , formado entre el hilo y la vertical (fig. 54.1). Cuando el péndulo se desvía de la posición de equilibrio, se crea el momento de rotación N , igual en magnitud a $mgl \sin \varphi$ (m es la masa, l , la longitud del péndulo). Éste tiene tal dirección que tiende a retornar el péndulo a la posición de equilibrio y, en este aspecto, es análogo a la fuerza cuasielástica. Por esta causa, lo mismo que a la elongación y a la fuerza cuasielástica, al momento N y a la desviación φ hay que adjudicar signos opuestos¹). Por lo tanto, la expresión

para el momento de rotación tiene la forma

$$N = -mgl \sin \varphi. \quad (54.1)$$

Escribamos para el péndulo [la ecuación de dinámica del movimiento de rotación. Designando la aceleración por $\ddot{\varphi}$ y tomando en consideración que el momento de inercia del péndulo es ml^2 , obtenemos:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi.$$

Esta última ecuación pu de transformarse a la forma

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (54.2)$$

Limitémonos a considerar vibraciones pequeñas. En semejante caso, se puede hacer $\sin \varphi \approx \varphi$. Además, introduciendo la designación

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2, \quad (54.3)$$

llegamos a la ecuación

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (54.4)$$

¹) Considerando φ como un vector, ligado a la dirección de giro por la regla del sacacorchos (lo que es tolerable con pequeños valores de φ), la oposición de los signos de N y φ puede ser explicada por el hecho de que los vectores N y φ están dirigidos en sentidos opuestos (fig. 54.1).

que es idéntica a la ecuación (53.1). Su solución tiene el aspecto

$$\varphi = a \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (54.5)$$

Por consiguiente, con vibraciones pequeñas la desviación angular del péndulo matemático varía con el tiempo según una ley armónica.

Como sigue de (54.3), la frecuencia de las oscilaciones del péndulo matemático sólo depende de la longitud del péndulo y de la aceleración de la fuerza de la gravedad y no es una función de la masa del péndulo. Según la fórmula (53.8) y teniendo en cuenta (54.3), obtenemos la expresión para el período de las oscilaciones del péndulo matemático, conocida del curso escolar de física:

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}. \quad (54.6)$$

Cabe señalar que, resuelta la ecuación (54.2), es posible hallar la siguiente fórmula para el período de las oscilaciones:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{a}{2} + \dots \right\}},$$

donde a es la amplitud de las oscilaciones, o sea, el mayor ángulo al que se desvía el péndulo de la posición de equilibrio.

Si el cuerpo en vibración no puede ser representado como un punto material, el péndulo recibe el nombre de físico. Durante la desviación del péndulo de la posición de equilibrio a un ángulo φ , surge un momento de rotación que tiende a retornar el péndulo a la posición de equilibrio. Dicho momento

$$N = -mgl \sin \varphi, \quad (54.7)$$

donde m es la masa del péndulo, l , la distancia entre el punto de suspensión O y el centro de masas C del péndulo (fig. 54.2). El signo «-» tiene el mismo significado que en la fórmula (54.1).

Designando con la letra I el momento de inercia del péndulo con relación al eje que pasa por el punto de suspensión, podemos escribir:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi. \quad (54.8)$$

En el caso de vibraciones pequeñas (54.8) se convierte en la conocida ecuación:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (54.9)$$

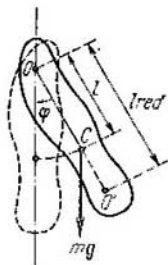


Fig. 54.2

Aquí, por ω_0^2 está designada la siguiente magnitud:

$$\omega_0^2 = mgl/I. \quad (54.10)$$

De las ecuaciones (54.9) y (54.10) se desprende que con pequeñas desviaciones de la posición de equilibrio, el péndulo físico realiza vibraciones armónicas, cuya frecuencia depende de la masa del péndulo, su momento de inercia respecto del eje de rotación y de la distancia entre dicho eje y el centro de masas del péndulo. En correspondencia con (54.10), el período de oscilaciones del péndulo físico se determina por la expresión

$$T = 2\pi \sqrt{I/mgl}. \quad (54.11)$$

De la comparación de las fórmulas (54.6) y (54.11) se obtiene que un péndulo matemático de longitud

$$l_{\text{red}} = I/ml \quad (54.12)$$

tendrá el mismo período de oscilaciones que el péndulo físico dado. La magnitud (54.12) denomínase *longitud reducida* del péndulo físico. Esto quiere decir que la longitud reducida del péndulo físico es la longitud de semejante péndulo matemático, cuyo período de oscilación coincide con el período del péndulo físico dado.

El punto que yace en la recta que une el punto de suspensión con el centro de masas y distanciado a la longitud reducida del eje de rotación, recibe el nombre de *centro de oscilación* del péndulo físico (véase el punto O' en la fig. (54.2)). Se puede mostrar (recomendamos que esto se haga como ejercicio) que al suspender el péndulo del centro de oscilación O' , la longitud reducida y, por lo tanto, el período de oscilación, serán los mismos que al principio. Así, pues, el punto de suspensión y el centro de oscilación tienen propiedad de reciprocidad: al trasladar el punto de suspensión al centro de oscilación, el anterior punto de suspensión se convierte en un nuevo centro de oscilación.

La determinación de la aceleración de la caída libre con el llamado péndulo de reversión, se basa sobre esta propiedad. Denomínase de reversión un péndulo tal, en que hay dos prismas de apoyo, paralelos entre sí y sujetos cerca de sus extremos, sobre los que puede suspenderse alternativamente. A lo largo del péndulo pueden desplazarse y ser fijados en él considerables pesos. Con el desplazamiento de los pesos se consigue que al suspender el péndulo de cualquiera de los prismas, el período de oscilación sea igual. Entonces, la distancia entre los rebordes de apoyo de los prismas será igual a l_{red} . Midiendo el período de oscilación del péndulo y conociendo l_{red} , es posible hallar la aceleración de la caída libre g con ayuda de la fórmula

$$T = 2\pi \sqrt{l_{\text{red}}/g}.$$

§ 55. Diagrama vectorial

La solución de una serie de problemas, en particular la suma de varias vibraciones de igual dirección (o, lo que es lo mismo, la suma de ciertas funciones armónicas), se simplifica de modo considerable y se hace evidente, si las vibraciones se representan en gráficas, en forma de vectores en un plano. El esquema que se obtiene de esta manera recibe el nombre de diagrama vectorial.

Tenemos un eje que vamos a designar con la letra x (fig. 55.1). Desde el punto O , marcado en el eje, trazamos el vector de longitud a , que con el eje forma un ángulo α . Si dicho vector se pone en rotación

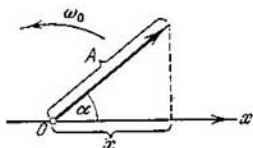


Fig. 55.1

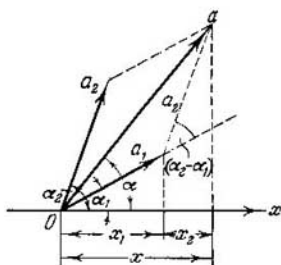


Fig. 55.2

a una velocidad angular ω_0 , la proyección del extremo del vector se desplazará por el eje x en los márgenes desde $-a$ hasta $+a$, con la particularidad de que esta proyección variará con el tiempo según la ley

$$x = a \cos (\omega_0 t + \alpha).$$

Por consiguiente, la proyección del extremo del vector sobre el eje, realizará vibraciones armónicas con una amplitud igual a la longitud del vector, con frecuencia circular igual a la velocidad angular de rotación del vector y con una fase inicial igual al ángulo formado por el vector con el eje en el momento de tiempo inicial.

De lo expuesto sigue que una vibración armónica puede ser prefijada con un vector, cuya longitud sea igual a la amplitud de la vibración, mientras que la dirección forme con el eje x un ángulo igual a la fase inicial de la vibración.

Examinemos la suma de dos vibraciones armónicas de igual dirección y frecuencia. La elongación x del cuerpo oscilante será igual a la suma de las elongaciones x_1 y x_2 , que se escribirán de la

siguiente manera:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \quad x_2 = a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \quad (55.1)$$

Representemos las dos vibraciones con los vectores a_1 y a_2 (fig. 55.2). Según las reglas de la composición de vectores, construyamos el vector resultante a . Es fácil ver, que la proyección de este vector sobre el eje x es igual a la suma de las proyecciones de los vectores que se componen:

$$x = x_1 + x_2.$$

Por lo tanto, el vector a es, ni más ni menos, que la vibración resultante. Este vector gira a la misma velocidad angular ω_0 que los vectores a_1 y a_2 , de manera que el movimiento resultante será una vibración armónica con frecuencia ω_0 , amplitud a y fase inicial α . De la construcción se deduce que

$$\begin{aligned} a^2 &= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \end{aligned} \quad (55.2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + a_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}. \quad (55.3)$$

Así, pues, la representación de las vibraciones armónicas por medio de vectores, da la posibilidad de reducir la suma de varias vibraciones a la composición de vectores. Este procedimiento es en particular ventajoso, por ejemplo, en óptica, donde las vibraciones luminosas en cierto punto se determinan como el resultado de la superposición de muchas oscilaciones que llegan al punto dado desde diferentes sectores del frente de onda.

Claro está, que las fórmulas (55.2) y (55.3) pueden ser obtenidas sumando las expresiones (55.1) y realizando las correspondientes transformaciones trigonométricas. Pero el procedimiento que hemos aplicado para obtener estas fórmulas, se distingue por su mayor sencillez y evidencia.

Analicemos la expresión (55.2) en lo que se refiere a la amplitud. Si la diferencia de fase de las dos vibraciones $\alpha_2 - \alpha_1$ es igual a cero, la amplitud de la vibración resultante es igual a la suma a_1 y a_2 . Si la diferencia de fase $\alpha_2 - \alpha_1$ es igual $+\pi$ o bien $-\pi$, es decir, las dos vibraciones se hallan en antifase, la amplitud de la vibración resultante será igual a $|a_1 - a_2|$.

Si las frecuencias de las vibraciones x_1 y x_2 no son iguales, los vectores a_1 y a_2 girarán a diferentes velocidades. En tal caso, la magnitud del vector resultante a pulsa y su rotación transcurre a velocidad variable. Por consiguiente, en semejante caso el movimiento resultante no será una vibración armónica, sino que cierto proceso vibratorio complejo.

§ 56. Pulsaciones

Particular interés tiene el caso cuando las dos vibraciones armónicas que se componen, tienen la misma dirección y sus frecuencias poco se diferencian entre sí. Como ahora mostraremos, el movimiento resultante puede ser considerado en estas condiciones como una vibración armónica con amplitud pulsante. Semejante vibración recibe el nombre de *pulsaciones*.

Designemos la frecuencia de una de las vibraciones con la letra ω , la frecuencia de la segunda vibración con $\omega + \Delta\omega$. De acuerdo

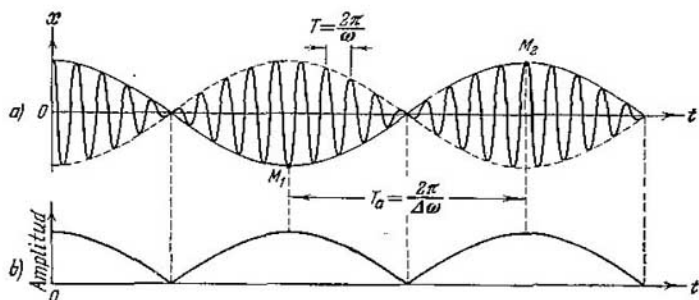


Fig. 56.1

con el planteamiento $\Delta\omega \ll \omega$. Vamos a suponer que las amplitudes de ambas vibraciones son las mismas e iguales a a . Para no complicar sin necesidad las fórmulas, supongamos que las fases iniciales de ambas vibraciones son nulas. Entonces, las ecuaciones de las vibraciones tendrán el siguiente aspecto:

$$x_1 = a \cos \omega t, \quad x_2 = a \cos (\omega + \Delta\omega) t.$$

Sumando estas expresiones y haciendo uso de la fórmula trigonométrica para la suma de los cosenos, obtenemos:

$$x = x_1 + x_2 = \left(2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t \quad (56.1)$$

(en el segundo factor despreciamos el término $\Delta\omega/2$ en comparación con ω). La gráfica de la función (56.1) está representada en la fig. 56.1, a, y ha sido construida para $\omega/\Delta\omega = 10$.

El factor entre paréntesis en la fórmula (56.1) varía con mucha más lentitud que el segundo factor. A causa de la condición $\Delta\omega \ll \omega$, durante el tiempo, en el transcurso del cual el factor $\cos \omega t$ realiza varias vibraciones completas, el factor entre paréntesis casi no varía. Esto nos permite considerar la vibración (56.1) como una

vibración armónica de frecuencia ω , cuya amplitud cambia de acuerdo con cierta ley periódica. El factor entre paréntesis no puede ser la expresión de dicha ley, ya que éste varía en los límites de $-2a$ a $+2a$, mientras que, por definición, la amplitud es una magnitud positiva. La gráfica de la amplitud se muestra en la fig. 56.1, *b*. La expresión analítica de la amplitud, tiene la forma

$$\text{amplitud} = \left| 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (56.2)$$

La función (56.2) es una función periódica con una frecuencia que supera dos veces la frecuencia que se encuentra bajo el signo del módulo (véase la fig. 56.2, en el que se comparan las gráficas del coseno y de su módulo), es decir, con una frecuencia $\Delta\omega$. De este modo, la frecuencia de las pulsaciones de amplitud —que suele

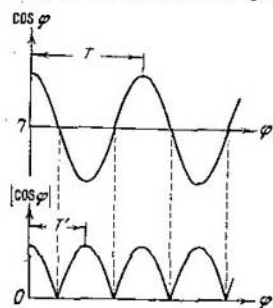


Fig. 56.2

le llamarse frecuencia de las pulsaciones— es igual a la diferencia de las frecuencias de las vibraciones que se suman.

Cabe señalar, que el factor $2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$ no sólo determina la amplitud, sino que también influye sobre la fase de las oscilaciones. Por ejemplo, esto se manifiesta en que las desviaciones que corresponden a los máximos vecinos de la amplitud, tienen signos opuestos (véanse los puntos M_1 y M_2 en la fig. 56.1, *a*).

§ 57. Composición de vibraciones perpendiculares entre sí

Supongamos que un punto material puede realizar vibraciones tanto a lo largo del eje x , como a lo largo del eje y , perpendicular al primero. Si excitamos ambas vibraciones, el punto material se moverá por una trayectoria que, hablando en general, será curvilínea y cuya forma depende de la diferencia de fases de las dos vibraciones.

Elijamos el comienzo de registro del tiempo de forma que la fase inicial de la primera vibración sea cero. En tal caso, las ecuaciones de las vibraciones se escribirán del modo siguiente:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \cos (\omega t + \alpha), \quad (57.1)$$

donde α es la diferencia de fases de ambas vibraciones.

Las expresiones (57.1) es la ecuación de la trayectoria por la que se mueve el cuerpo que toma parte en las dos vibraciones, prefijada

en forma paramétrica. Para obtener la ecuación de la trayectoria en forma corriente, hay que excluir de las ecuaciones (57.1) el parámetro t . De la primera ecuación sigue, que

$$\cos \omega t = \frac{x}{a}. \quad (57.2)$$

Por consiguiente,

$$\sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (57.3)$$

Ahora, desarrollamos el coseno en la segunda ecuación (57.1) según la fórmula para el coseno de una suma, poniendo, con esto, en lugar de $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$ sus valores de (57.2) y (57.3). Como resultado, obtenemos:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \alpha \mp \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Después de sencillas transformaciones, a esta última ecuación puede aducírsele la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (57.4)$$

Hablano en general, ésta es la ecuación de una elipse, cuyos ejes están girados respecto de los ejes de coordenadas x e y . La orientación de la elipse y el valor de sus semiejes, de modo bastante complicado, dependen de las amplitudes a y b y de la diferencia de fases α .

Determinemos la forma de la trayectoria para ciertos casos particulares.

1. La diferencia de fases α es nula. Entonces, la ecuación (57.4) toma la forma

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

de donde se obtiene la ecuación de una recta

$$y = \frac{b}{a} x. \quad (57.5)$$

El movimiento resultante es una vibración armónica a lo largo de dicha recta con frecuencia ω y amplitud igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$ (fig. 57.1).

2. La diferencia de fases α es igual a $\pm\pi$. La ecuación (57.4) tiene el aspecto

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0, \quad (57.6)$$

de aquí resulta que el movimiento resultante es una vibración armónica a lo largo de una recta (fig. 57.2)

$$y = -\frac{b}{a} x.$$

3. Con $\alpha = \pm\pi/2$ la ecuación (57.4) se convierte en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (57.7)$$

es decir, en la ecuación de una elipse, reducida a los ejes de coordenadas, con la particularidad de que los semiejes de la elipse son iguales a las correspondientes amplitudes de las vibraciones. Cuando las amplitudes a y b son iguales, la elipse degenera en una circunferencia.

Los casos $\alpha = +\pi/2$ y $\alpha = -\pi/2$ se distinguen por la dirección del movimiento por la elipse o la circunferencia. Si $\alpha = +\pi/2$,

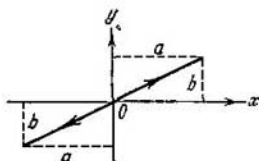


Fig. 57.1

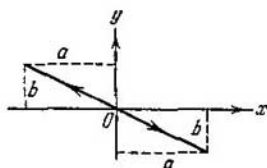


Fig. 57.2

las ecuaciones (57.1) pueden ser escritas del modo siguiente:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = -b \operatorname{sen} \omega t. \quad (57.8)$$

En el momento $t = 0$ el cuerpo se halla en el punto I (fig. 57.3). En los siguientes momentos de tiempo la coordenada x disminuye,

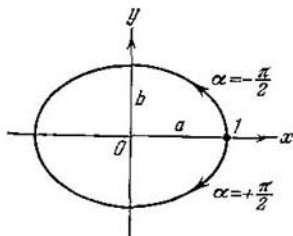


Fig. 57.3

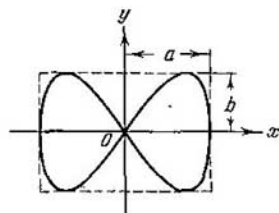


Fig. 57.4

mientras que la coordenada y se hace negativa. Esto significa, que el movimiento transcurre en sentido horario.

Para $\alpha = -\pi/2$, las ecuaciones de las vibraciones tienen el aspecto

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \operatorname{sen} \omega t. \quad (57.9)$$

De aquí se llega a la conclusión de que el movimiento se realiza en sentido antihorario.

De lo expuesto sigue que el movimiento uniforme por una circunferencia de radio R a velocidad angular ω , puede ser representada como la suma de dos vibraciones perpendiculares entre sí:

$$x = R \cos \omega t, \quad y = \pm R \sin \omega t \quad (57.10)$$

(el signo «+» en la expresión para y corresponde al movimiento en sentido antihorario, el signo «-», al movimiento en sentido horario).

En el caso, cuando las frecuencias de vibraciones perpendiculares entre sí se diferencian en una pequeña magnitud $\Delta\omega$, es posible considerarlas de igual frecuencia, pero con diferencia de fases que varía con lentitud. Entonces, las ecuaciones de las vibraciones se pueden escribir en la forma:

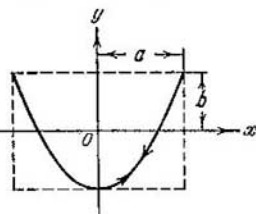


Fig. 57.5

$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = b \cos [\omega t, + (\Delta\omega t + \alpha)]$$

y considerar que la expresión $\Delta\omega t + \alpha$ es la diferencia de fases que varía lentamente con el tiempo de acuerdo con una ley lineal.

En caso semejante, el movimiento resultante transcurre por una curva que cambia de tipo con lentitud y que consecutivamente toma la forma que corresponde a todos los valores de la diferencia de fases desde $-\pi$ hasta $+\pi$.

Si las frecuencias de las vibraciones perpendiculares entre sí no son iguales, la trayectoria del movimiento resultante tiene la

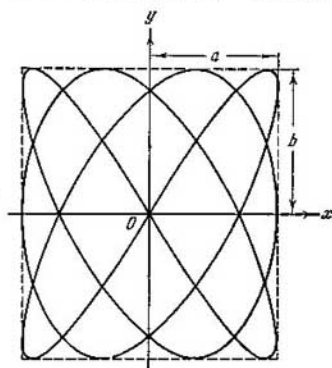


Fig. 57.6

forma de curvas bastante complicadas que reciben el nombre de *figuras de Lissajous*. En la fig. 57.4 se muestra una de las más sencillas trayectorias, obtenida con una razón de las frecuencias 1 : 2 y diferencia de fases $\pi/2$. Las ecuaciones de las vibraciones tienen el aspecto

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \cos \left(2\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

En el intervalo de tiempo, durante el que el punto consigue desplazarse a lo largo del eje x de una posición extrema a otra, a lo largo

del eje y , después de salir de la posición nula, el punto puede alcanzar una posición extrema, a continuación, otra y retornar a la posición nula.

Con una razón de las frecuencias 1 : 2 y diferencia de fases igual a cero, la trayectoria degenera en una curva no cerrada (fig. 57.5), por la que el punto se mueve de un extremo a otro y viceversa.

Mientras más cerca de la unidad se halle la fracción racional que expresa la razón entre las frecuencias de las vibraciones, más complicada será la figura de Lissajous. La fig. 57.6 nos ofrece como ejemplo una curva para la razón entre las frecuencias 3 : 4 y diferencia de fases $\pi/2$.

§ 58. Vibraciones amortiguadas

La siguiente ecuación (véase (50.11)) describe las vibraciones amortiguadas:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (58.1)$$

donde

$$2\beta = r/m, \quad \omega_0^2 = k/m \quad (58.2)$$

(r es el coeficiente de resistencia, es decir, un coeficiente de proporcionalidad entre la velocidad \dot{x} y la fuerza de resistencia; k , el coeficiente de la fuerza cuasielástica).

Señalemos, que ω_0 es la frecuencia con la que se efectuarán las vibraciones libres al no haber resistencia del medio (para $r = 0$). Tal frecuencia denomínase *frecuencia propia* del sistema.

Al poner en (58.1) la función $x = e^{\lambda t}$ llegamos a la ecuación característica

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (58.3)$$

Las raíces de esta ecuación, son iguales a

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (58.4)$$

Quando el amortiguamiento no es demasiado grande (para $\beta < \omega_0$), la expresión subradical será negativa. Representémosla en la forma $(i\omega)^2$, donde ω es una magnitud real, igual a

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (58.5)$$

Entonces, las raíces de la ecuación característica se escribirá de la siguiente manera:

$$\lambda_1 = -\beta + i\omega, \quad \lambda_2 = -\beta - i\omega. \quad (58.6)$$

De acuerdo con (52.5), la solución general de la ecuación (58.1) será la función

$$x = C_1 e^{(-\beta + i\omega)t} + C_2 e^{(-\beta - i\omega)t} = e^{-\beta t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}).$$

La expresión entre paréntesis es análoga a la expresión (53.3). Por esta razón, se puede representar en forma análoga a (53.7). Así, pues, con un amortiguamiento no muy grande, la solución general de la ecuación (58.1), tiene el aspecto

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (58.7)$$

Aquí a_0 y α son constantes tomadas al azar, ω , una magnitud que se determina con la fórmula (58.5). En la fig. 58.1 se da la gráfica de la función (58.7). Con líneas a trazos se muestran los límites en los que se encuentra la elongación x del punto en vibración.

De acuerdo con el tipo de la función (58.7), el movimiento del sistema puede ser considerado como una vibración armónica de

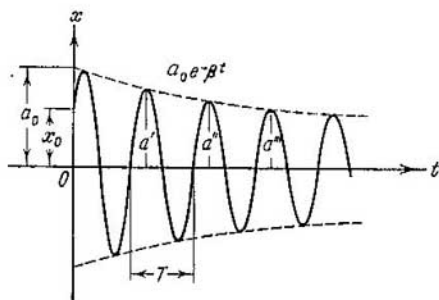


Fig. 58.1

frecuencia ω y amplitud que varía por la ley $a(t) = a_0 e^{-\beta t}$. La curva a trazos superior en la fig. 58.1 nos ofrece la gráfica de la función $a(t)$, con la particularidad de que a_0 es la amplitud en el momento inicial de tiempo. La elongación inicial x_0 depende, además de a_0 , también de la fase inicial α : $x_0 = a_0 \cdot \cos \alpha$.

La velocidad de amortiguamiento de las vibraciones se determina con la magnitud $\beta = r/2m$, que es llamada *coeficiente de amortiguamiento*. Hallemos el tiempo τ durante el que la amplitud disminuye e veces. Por definición, $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$, de donde $\beta\tau = 1$. Por consiguiente, el coeficiente de amortiguación es inverso en magnitud al intervalo de tiempo, en el transcurso del cual la amplitud disminuye e veces.

En correspondencia con la fórmula (53.8) el período de las vibraciones amortiguadas

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (58.8)$$

Cuando la resistencia del medio es considerable ($\beta^2 \ll \omega_0^2$), el período de las vibraciones, prácticamente, es igual a $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Con el crecimiento del coeficiente de amortiguamiento, el período de las vibraciones aumenta.

Las desviaciones máximas posteriores hacia cualquier lado (por ejemplo, a' , a'' , a''' , etc., en la fig. 58.1) forman una progresión geométrica. En efecto, si $a' = a_0 e^{-\beta t}$, entonces $a'' = a_0 e^{-\beta(t+T)} = a' e^{-\beta T}$, $a''' = a_0 e^{-\beta(t+2T)} = a'' e^{-\beta T}$, etc. En general, la razón de los valores de las amplitudes que corresponden a los momentos de tiempo que se diferencian en un período, es igual a

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T}.$$

Esta razón recibe el nombre de *decremento del amortiguamiento*, mientras que su logaritmo, *decremento logarítmico del amortiguamiento*:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T \quad (58.9)$$

(aquí λ no se debe confundir con λ en las fórmulas (58.3) y (58.6)!).

Para la característica de un sistema vibratorio se emplea, por regla, el decremento logarítmico del amortiguamiento λ . Expresando de acuerdo con (58.9) β por medio de λ y T , es imposible escribir la ley de decrecimiento de la amplitud en la forma

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda}{T} t}.$$

En el transcurso del tiempo τ , durante el cual la amplitud disminuye e veces, el sistema puede realizar $N_e = \tau/T$ vibraciones. En la condición $e^{-\lambda \frac{\tau}{T}} = e^{-1}$, obtenemos que $\lambda \frac{\tau}{T} = \lambda N_e = 1$. Por lo tanto, el decremento logarítmico de amortiguamiento es en magnitud inverso al número de vibraciones que se realizan en el intervalo de tiempo durante el que la amplitud disminuye e veces.

Con frecuencia, para caracterizar un sistema vibratorio también se utiliza la magnitud,

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e, \quad (58.10)$$

que recibe el nombre de *coeficiente de calidad* (o factor de mérito) del sistema vibratorio. Como vemos en su definición, el coeficiente de calidad es proporcional al número de vibraciones N_e que realiza el sistema en el tiempo τ , durante el que la amplitud de las vibraciones disminuye e veces.

Poniendo la función (58.7) y su derivada en la expresión para la energía total de un sistema vibratorio $E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2$, después

de ciertas transformaciones nos conduce a la fórmula

$$E = \frac{1}{2} k a_0^2 e^{-2\beta t} \left\{ 1 + \frac{\beta}{\omega_0} \sin(2\omega t + 2\alpha + \psi) \right\}, \quad (58.11)$$

donde $\psi = \arctg(\beta/\omega)$. La gráfica de esta función está representada en la fig. 58.2.

El decrecimiento de la energía está condicionado por el trabajo de la fuerza de resistencia del medio $F_{\text{res}} = -r\dot{x}$. La potencia

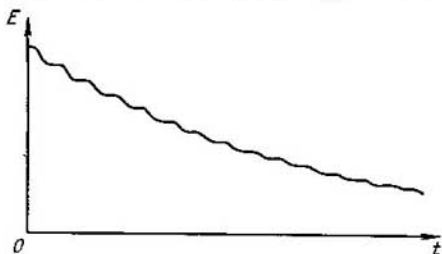


Fig. 58.2

que desarrolla esta fuerza es igual a $(-r\dot{x})(\dot{x}) = -r\dot{x}^2$. Así que

$$\frac{dE}{dt} = -r\dot{x}^2.$$

De aquí se desprende que en aquellos puntos de la curva $E(t)$, donde $\dot{x} = 0$, la tangente a la curva es paralela al eje t . En los demás puntos $dE/dt < 0$.

Cuando el amortiguamiento es pequeño ($\beta \ll \omega_0$) puede ser despreciado el sumando de la fórmula (58.11) que contiene el seno y considerar que la energía varía por la ley

$$E = E_0 e^{-2\beta t}, \quad (58.12)$$

donde $E_0 = \frac{1}{2} k a_0^2$ es el valor de la energía en el momento inicial. A este mismo resultado se puede llegar, si el valor instantáneo de $E(t)$, determinado por la fórmula (58.11), se sustituye por su valor medio durante el tiempo desde $t - T/2$ hasta $t + T/2$ (T es el período de las vibraciones), calculado en la suposición de que el factor $\exp(-2\beta t)$ quede constante en el transcurso del intervalo T .

Después de derivar la expresión (58.12) por t , obtenemos la velocidad de crecimiento de la energía del sistema:

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_0 e^{-2\beta t} = -2\beta E.$$

Variando el signo por el contrario, hallamos la velocidad de decrecimiento de la energía:

$$-\frac{dE}{dt} = 2\beta E. \quad (58.13)$$

Si durante el tiempo, igual al período de las vibraciones, la energía cambia poco, el decrecimiento de ésta puede ser determinado multiplicando por T la expresión (58.13)

$$-\Delta E = 2\beta TE$$

(recordemos que ΔE es el incremento y $-\Delta E$, el decrecimiento de la energía). Por fin, tomando en consideración las fórmulas (58.9) y (58.10), llegamos a la correlación

$$\frac{E}{(-\Delta E)} = \frac{Q}{2\pi},$$

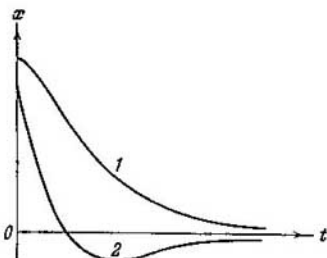


Fig. 58.3

de donde se desprende que con menor amortiguamiento de las vibraciones, con una precisión salvo el factor 2π , el coeficiente de calidad es igual al cociente entre la energía acumulada en el sistema en el momento dado y el decrecimiento de dicha energía durante un período de las vibraciones.

De la fórmula (58.8) sigue que al crecer el coeficiente de amortiguamiento, el período de las vibraciones aumenta. Para $\beta = \omega_0$ el período de las vibraciones se invierte al infinito, es decir, el movimiento deja de ser periódico.

Con $\beta > \omega_0$ las raíces de la ecuación característica se hacen reales (véase (58.4)) y la solución de la ecuación diferencial (58.1) resulta ser igual a la suma de dos exponentes:

$$x = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Aquí, C_1 y C_2 son constantes reales, cuyo valor depende de las condiciones iniciales (de x_0 y $v_0 = (\dot{x})_0$). Por lo tanto, el movimiento tiene un carácter aperiódico, o sea, después de sacar el sistema de la posición de equilibrio, éste retorna a dicha posición sin realizar oscilaciones. En la fig. 58.3 se muestran dos posibles procedimientos de retorno del sistema a la posición de equilibrio durante el momento aperiódico. Por medio de cuál de estos procedimientos el sistema retorna a la posición de equilibrio, depende de las condiciones iniciales. El movimiento que se representa con la curva 2, se anima cuando el sistema comienza a moverse desde la posición caracterizada por la elongación x_0 a la posición de equilibrio a una velocidad

inicial v_0 determinada por la condición

$$|v_0| > |x_0| (\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}). \quad (58.14)$$

Esta condición se cumplirá en el caso, cuando al sistema sacado de la posición de equilibrio se le comunica un golpe suficientemente fuerte dirigido hacia la posición de equilibrio. Si después de sacar el sistema de la posición de equilibrio, lo soltamos sin comunicarle un golpe (o sea, $v_0 = 0$) o se le transmite un golpe de suficiente fuerza (tal que v_0 es menor que la que se determina de la condición (58.14)), el movimiento transcurrirá de acuerdo con la curva I en la fig. 58.3.

§ 59. Autovibraciones

Con las vibraciones amortiguadas, la energía del sistema se consume para vencer la resistencia del medio. Si el decrecimiento de la energía se compensa, las vibraciones serán no amortiguadas. La reposición de la energía del sistema puede ser efectuada a cuenta de impulsos comunicados desde el exterior, pero éstos han de ser transmitidos al ritmo de sus vibraciones, ya que en el caso contrario ellas pueden debilitar las vibraciones e, incluso, hacerlas cesar por completo. Es posible obrar de tal forma que el sistema vibratorio gobierne por sí mismo los influjos exteriores, asegurando la concordancia de su movimiento con los impulsos que le comunican. Semejante sistema recibe el nombre de *autovibratorio*, mientras que las vibraciones que efectúa, denominanse *autovibraciones*.

Como ejemplo de sistema autovibratorio, examinemos el mecanismo de un reloj. El péndulo del reloj está asentado en un mismo eje con una palanca curvada, llamada áncora (fig. 59.1). En los extremos del áncora hay salientes de forma especial denominados uñas del áncora. La rueda dentada de escape se encuentra bajo la acción de la cadena con el peso o del muelle enrollado, que tienden a hacerla girar en sentido horario. Sin embargo, la mayor parte del tiempo la rueda de escape se apoya con uno de sus dientes contra la superficie lateral de una u otra de las uñas del áncora que durante las oscilaciones del péndulo se desliza por la superficie del diente. Sólo en aquellos momentos, cuando el péndulo se halla junto a su posición media, las uñas del áncora dejan de obstaculizar el movimiento de los dientes y la rueda de escape gira empujando el áncora

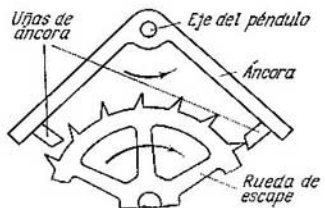


Fig. 59.1

con el diente, cuyo vértice resbala por la superficie lateral biselada de la uña del áncora. Durante el ciclo completo de la oscilación del péndulo (por un período), la rueda de escape gira dos dientes, con la particularidad de que cada una de las uñas del áncora recibe un golpe. Mediante estos golpes, a cuenta de la energía del peso elevado o del muelle enrollado, se recupera el decrecimiento de la energía del péndulo que se produce a causa del rozamiento.

§ 60. Vibraciones forzadas

Al variar la fuerza excitatriz según una ley armónica, las vibraciones se describen con la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (60.1)$$

(véase (50.13)). Aquí, β es el coeficiente de amortiguamiento, ω_0 , la frecuencia propia del sistema (véase la fórmula (58.2)), $f_0 = F_0/m$ (F_0 es la amplitud de la fuerza excitatriz), ω , la frecuencia de la fuerza.

La ecuación (60.1) es no homogénea. De acuerdo con el teorema (52.8), la solución general de una ecuación no homogénea es igual a la suma de la solución general de la correspondiente ecuación homogénea y de la solución particular de la ecuación no homogénea. Ya conocemos la solución general de una ecuación homogénea (véase la función (58.7) que es la solución general de la ecuación (58.1)). Ella tiene el aspecto

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha), \quad (60.2)$$

donde $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, mientras que a_0 y α son las constantes tomadas al azar¹⁾.

Nos queda hallar la solución particular de la ecuación (60.1) (que no contenga constantes arbitrarias). Con este fin, hagamos uso del procedimiento descrito al final del § 52. Añadamos a la función que se halla en el segundo miembro de la ecuación (60.1), la función imaginaria $if_0 \sin \omega t$, después de lo cual representemos el segundo miembro en la forma $f_0 e^{i\omega t}$ (véase la fórmula (51.9)). De este modo, llegamos a la ecuación:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t}. \quad (60.3)$$

Esta ecuación se resuelve con mayor facilidad que (60.1), ya que una exponente se deriva e integra con mayor sencillez que las funciones trigonométricas.

Tratemos de buscar la solución particular de la ecuación (60.3) en la forma

$$\hat{x} = \hat{a} e^{i\omega t}, \quad (60.4)$$

¹⁾ Con la letra ω sin raya designamos la frecuencia de la fuerza excitatriz.

donde \hat{a} es cierto número complejo. La función (60.4) también es compleja, lo que se indica por la tilde sobre x . Después de derivar esta función por t , obtenemos:

$$\dot{\hat{x}} = i\omega\hat{a}e^{i\omega t}, \quad \ddot{\hat{x}} = -\omega^2\hat{a}e^{i\omega t}. \quad (60.5)$$

La sustitución de las expresiones (60.4) y (60.5) en la ecuación (60.3) nos conduce, después de reducir por el factor común $e^{i\omega t}$, a la ecuación algebraica:

$$-\omega^2\hat{a} + 2i\beta\omega\hat{a} + \omega_0^2\hat{a} = f_0.$$

De aquí,

$$\hat{a} = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega}. \quad (60.6)$$

Hemos hallado el valor de \hat{a} , con el que la función (60.4) satisface la ecuación (60.3). Representemos el número complejo, que se halla en el denominador, en forma exponencial:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega = \rho e^{i\varphi}. \quad (60.7)$$

De acuerdo con (51.3)

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (60.8)$$

Sustituyendo en (60.6) el denominador en correspondencia con (60.7), obtenemos

$$\hat{a} = f_0/\rho e^{i\varphi} = (f_0/\rho)e^{-i\varphi}.$$

Poniendo este valor de \hat{a} en (60.4), se obtiene la solución particular de la ecuación (60.3):

$$\hat{x} = (f_0/\rho) e^{-i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = (f_0/\rho) e^{i(\omega t - \varphi)}.$$

Por fin, tomando la parte real de esta función, tendremos la solución particular de la ecuación (60.1):

$$x = (f_0/\rho) \cos(\omega t - \varphi).$$

La sustitución de los valores de f_0 , así como los valores de (60.8) para ρ y φ , nos conduce a la expresión definitiva:

$$x = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (60.9)$$

Hay que señalar que la función (60.9) no contiene constantes arbitrarias.

Hallemos la solución particular de la ecuación (60.1) con ayuda de otro procedimiento, haciendo uso del diagrama vectorial. Supon-

gamos que la solución particular de la ecuación (60.1) tiene el aspecto

$$x = a \cos (\omega t - \varphi). \quad (60.10)$$

Entonces

$$\dot{x} = -\omega a \sin (\omega t - \varphi) = \omega a \cos (\omega t - \varphi + \pi/2), \quad (60.11)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 a \cos (\omega t - \varphi) = \omega^2 a \cos (\omega t - \varphi + \pi). \quad (60.12)$$

Poniendo las expresiones (60.10)–(60.12) en la ecuación (60.1), llegamos a la correlación

$$\omega^2 a \cos (\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta \omega a \cos (\omega t - \varphi + \pi/2) + \omega_0^2 a \cos (\omega t - \varphi) = f_0 \cos \omega t. \quad (60.13)$$

De (60.13) se deduce que las constantes a y φ deben tener tales valores que la función armónica $f_0 \cos \omega t$ sea igual a la suma de las tres funciones armónicas que se encuentran en el primer miembro de

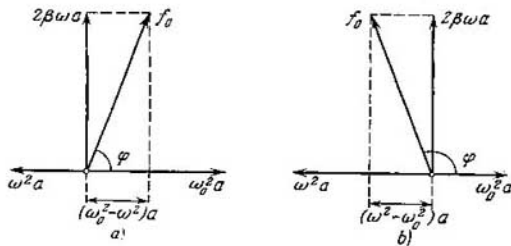


Fig. 60.1

la ecuación. Si representamos la función $\omega_0^2 a \cos (\omega t - \varphi)$ por un vector de longitud $\omega_0^2 a$, dirigido a la derecha, la función $2\beta \omega a \cos (\omega t - \varphi + \pi/2)$ estará representada por un vector de longitud $2\beta \omega a$ (fig. 60.1), girado con relación al vector $\omega_0^2 a$ en sentido antihorario a un ángulo $\pi/2$ (véase el § 55), mientras que la función $\omega^2 a \cos (\omega t - \varphi + \pi)$ se representará por un vector de longitud $\omega^2 a$, girado respecto del vector $\omega_0^2 a$, a un ángulo π . Para que la ecuación (60.13) sea satisfecha, la suma de los tres vectores enumerados debe coincidir con el vector que representa la función $f_0 \cos \omega t$. En la fig. 60.1, a vemos que semejante coincidencia sólo es posible con el valor de la amplitud a que se determina con la condición:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)a^2 + 4\beta^2 \omega^2 a^2 = f_0^2,$$

de donde

$$a = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (60.14)$$

(hemos sustituido f_0 por la razón F_0/m). La fig. 60.1, *a* corresponde al caso $\omega < \omega_0$. En la fig. 60.1, *b*, que corresponde al caso $\omega > \omega_0$, se obtiene un valor igual de *a*.

La fig. 60.1 también permite obtener el valor de φ , que es la magnitud del retardo de fase de la vibración forzada (60.10) respecto de la fuerza excitatriz que la acondicionó. De la figura se desprende, que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (60.15)$$

Poniendo en (60.10) los valores de *a* y φ , determinados con las fórmulas (60.14) y (60.15), obtenemos la función (60.9).

La función (60.9) sumada con (60.2) nos proporciona la solución general de la ecuación (60.1) que describe la conducta de un sistema durante las oscilaciones forzadas. El sumando (60.2) desempeña notorio papel sólo en el transcurso de la etapa inicial del proceso, durante el llamado establecimiento de las vibraciones (fig. 60.2). Con el transcurso del tiempo, a causa de la presencia del factor exponencial $e^{-\beta t}$, el papel del sumando (60.2) disminuye en grado creciente y al pasar suficiente tiempo éste puede ser despreciado, conservando en la solución sólo el sumando (60.9).

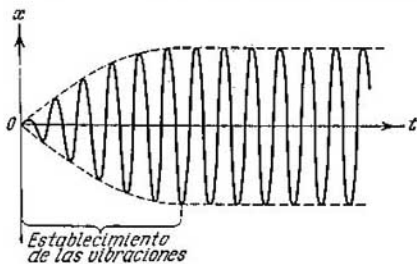


Fig. 60.2

Así, pues, la función (60.9) describe vibraciones forzadas estacionarias. Son vibraciones armónicas con una frecuencia igual a la de la fuerza excitatriz. La amplitud (60.14) de las vibraciones forzadas es proporcional a la amplitud de la fuerza excitatriz. Para el sistema vibratorio dado (ω_0 y β determinadas), la amplitud depende de la frecuencia de la fuerza excitatriz. Las vibraciones forzadas se retardan por fase de la fuerza excitatriz, con la particularidad de que la magnitud del retardo φ también depende de la frecuencia excitatriz (véase (60.15)).

La dependencia entre la amplitud de las vibraciones forzadas y la frecuencia de la fuerza excitatriz, conduce a que con cierta frecuencia, determinada para el sistema dado, la amplitud de las vibraciones alcanza su valor máximo. El sistema vibratorio con dicha frecuencia se hace sensible en extremo a la acción que ejerce la fuerza excitatriz. Este fenómeno se denomina *resonancia* y la frecuencia que le corresponde, *frecuencia resonante*.

Para determinar la frecuencia resonante ω_{res} hay que hallar el máximo de la función (60.14) o bien el mínimo de la expresión subradical en el denominador, que es lo mismo. Derivando dicha expresión por ω e igualándola a cero, obtenemos la condición que determina a ω_{res} :

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0. \quad (60.16)$$

La ecuación (60.16) tiene tres soluciones: $\omega = 0$ y $\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. La solución nula corresponde al máximo del denominador. De las dos restantes soluciones, la negativa debe ser excluida por no tener sentido físico (la frecuencia no puede ser negativa). Así, pues, para la frecuencia resonante se obtiene un solo valor:

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (60.17)$$

Poniendo este valor de la frecuencia en (60.14), hallaremos la expresión para la amplitud al haber resonancia:

$$a_{res} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (60.18)$$

De (60.18) se desprende que al no haber resistencia del medio, la amplitud se reduciría al infinito si hubiera resonancia.

De acuerdo con (60.17) la frecuencia resonante a esas mismas condiciones (para $\beta = 0$), coincide con la frecuencia propia ω_0 de las vibraciones del sistema.

La dependencia entre la amplitud de las oscilaciones forzadas y la frecuencia de la fuerza excitatriz (o bien de la frecuencia de las vibraciones, que es lo mismo) está representada gráficamente en la fig. 60.3. Curvas aisladas en la gráfica corresponden a diversos valores del parámetro β . En correspondencia con (60.17) y (60.18), mientras menor sea β , más arriba y a la derecha yace el máximo de la curva dada. Con amortiguamiento muy grande (tal que $2\beta^2 > \omega_0^2$) la expresión para la frecuencia resonante se convierte en imaginaria. Esto significa, que a semejantes condiciones no se observa la resonancia, ya que al aumentar la frecuencia, la amplitud de las vibraciones forzadas decrece monótonamente (véase la curva inferior en la fig. (60.3)). El conjunto de gráficas de la función (60.14), representado en la fig. 60.3, que corresponde a diversos valores del parámetro β recibe el nombre de *curvas de resonancia*.

Respecto de estas curvas se puede hacer, además, la siguiente indicación. Al tender ω a cero todas las curvas llegan a un mismo valor límite diferente de cero e igual a $F_0/m\omega_0^2$, es decir, a F_0/k .

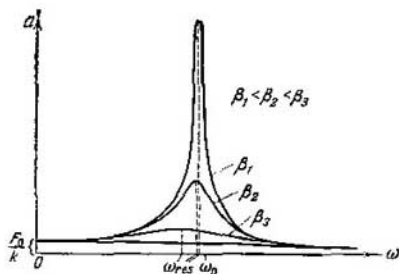


Fig. 60.3

Este valor es la elongación de la posición de equilibrio que bajo la acción de la fuerza constante de la magnitud F_0 , recibe el sistema. Cuando ω tiende al infinito, todas las curvas tienden a cero de forma asintótica, ya que con gran frecuencia la fuerza varía de dirección con tal rapidez que el sistema no puede desplazarse notoriamente de la posición de equilibrio. Señalemos, por fin, que mientras menor sea β , de modo más considerable variará la amplitud cerca de la resonancia al cambiar la frecuencia, más «agudo» resultará ser el máximo.

De la fórmula (60.18) se deduce que con pequeño amortiguamiento (es decir, para $\beta \ll \omega_0$), al haber resonancia, la amplitud será aproximadamente igual a

$$a_{\text{res}} \approx \frac{F_0/m}{2\beta\omega_0}.$$

Dividamos esta expresión por la elongación x_0 de la posición de equilibrio, bajo la acción de la fuerza constante F_0 , igual a $F_0/m\omega_0^2$. Obtenemos

$$\frac{a_{\text{res}}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q, \quad (60.19)$$

(véase la fórmula (58.10)).

De este modo, el coeficiente de calidad Q muestra cuántas veces, en el momento de la resonancia, la amplitud supera la elongación del sistema de la posición de equilibrio bajo la acción de una fuerza constante de la misma magnitud que la amplitud de la fuerza excitatriz (esto sólo es justo cuando el amortiguamiento es pequeño).

En la fig. 60.1 vemos que las vibraciones forzadas se retardan por fase de la fuerza excitatriz, con ello, la magnitud del retardo φ yace en los márgenes de 0 a π . La dependencia entre φ y ω con diversos valores de β se muestra gráficamente en la fig. 60.4. A la frecuencia ω_0 corresponde $\varphi = \pi/2$. La frecuencia resonante es menor que la propia (véase (60.17)). Por lo tanto, en el momento de la resonancia $\varphi < \pi/2$. Con débil amortiguamiento $\omega_{\text{res}} \approx \omega_0$ y el valor de φ con la resonancia puede ser considerado $\pi/2$.

El fenómeno de la resonancia debe ser tomado en consideración al proyectar máquinas y diferentes construcciones. La frecuencia propia de las vibraciones de dichos dispositivos no debe ser de ninguna manera próxima a la frecuencia de posibles influjos exteriores. Por ejemplo, la frecuencia propia de las vibraciones del casco de un buque o de las alas de un avión, debe diferenciarse considerablemente de

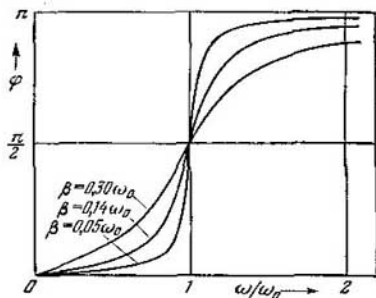


Fig. 60.4

la frecuencia de las vibraciones que pueden ser excitadas por la rotación de la hélice del buque o del avión. En caso contrario, surgen vibraciones que pueden provocar una catástrofe. Son conocidos casos, cuando se hundían los puentes al desfilar por ellos al paso una columna de soldados. Esto sucedía porque la frecuencia propia de las vibraciones del puente era cercana a la frecuencia con la que andaba la columna.

Al mismo tiempo, el fenómeno de resonancia es con frecuencia muy útil, en particular, en acústica, radiotécnica, etc.

§ 61. Resonancia paramétrica

En el caso examinado en el párrafo anterior, la fuerza excitatriz ejercida desde el exterior, directamente condicionaba la elongación del sistema de la posición de equilibrio. Resulta que hay otro tipo de

influjo desde el exterior, con ayuda del cual se puede hacer que el sistema vibre fuertemente. Este tipo de influjo, consiste en la variación periódica de uno de los parámetros cualesquiera del sistema, lo que se hace al ritmo de las vibraciones. Por esta causa, el propio fenómeno recibe el nombre de *resonancia paramétrica*.

Como ejemplo, tomemos el péndulo más sencillo: una bola suspendida de un hilo. Si cambiamos periódicamente la longitud del péndulo l , aumentándola cuando éste se halla en las posiciones extremas y disminuyéndola en aquellos momentos cuando el péndulo se encuentra en la posición media (fig. 61.1), el péndulo oscilará fuertemente. En este caso, el aumento de la energía del péndulo

transcurrirá a cuenta del trabajo que realiza la fuerza ejercida sobre el hilo. Durante las oscilaciones del péndulo, la fuerza de tensión del hilo no es constante: es menor en las posiciones extremas, cuando la velocidad se hace nula y mayor en la posición media, cuando la velocidad del péndulo es máxima. Por esta razón, el trabajo negativo de la fuerza exterior es menor en magnitud al alargar el péndulo, que el trabajo positivo que se efectúa al acortarlo. En total, el trabajo de la fuerza externa durante un período resulta ser mayor que cero.

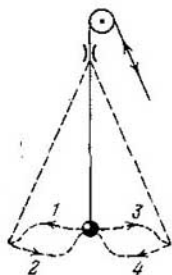


Fig. 61.1

MECÁNICA RELATIVISTA

§ 62. Teoría especial de la relatividad

En el § 6 fue indicado que la mecánica newtoniana es válida sólo para aquellos cuerpos que se mueven a velocidades mucho menores que la de la luz en el vacío (esta velocidad se designa con la letra c). Para describir los movimientos que transcurren a velocidades comparadas con c , Einstein creó la mecánica relativista, es decir, la mecánica que tiene en cuenta las exigencias de la teoría especial de la relatividad.

Esta teoría, creada por Einstein en 1905, es la teoría física del espacio y el tiempo ¹⁾. La base de esta teoría está formada por dos postulados que recibieron el nombre del *principio de relatividad de Einstein* y el *principio de constancia de la velocidad de la luz*.

El principio de relatividad de Einstein es la propagación del principio mecánico de Galileo (véase el § 12) a todos los fenómenos físicos sin exclusión alguna. De acuerdo con dicho principio *todas las leyes de la naturaleza son equivalentes en todos los sistemas inerciales de referencia*. La constancia del tipo de ecuación al cambiar en ella las coordenadas y el tiempo de un sistema de referencia por las coordenadas y el tiempo de otro sistema, recibe el nombre de *invariación de la ecuación*. Por lo tanto, el principio de relatividad puede ser enunciado de la siguiente forma: *las ecuaciones que expresan las leyes de la naturaleza, son invariantes con relación a las transformaciones de las coordenadas y el tiempo al pasar de un sistema inercial de referencia a otro*.

El principio de constancia de la velocidad de la luz afirma que *la velocidad de la luz en el vacío es igual en todos los sistemas inerciales de referencia y no depende del movimiento de las fuentes y receptores de la luz* ²⁾.

De los postulados formulados más arriba se desprende una serie de importantes deducciones ligadas con las propiedades del espacio y el tiempo. En la mecánica newtoniana el espacio y el tiempo fueron considerados independientemente uno del otro. Newton consideraba que existían el espacio absoluto y el tiempo absoluto. Según la definición del espacio absoluto éste era un almacén externo de objetos, independiente de toda cosa, que siempre es igual e inmóvil. Acerca del tiempo, Newton escribía: «El tiempo absoluto, real o matemático de

¹⁾ En 1915, Einstein creó los principios de la teoría de la relatividad que es la teoría de la gravitación.

²⁾ El experimento de Michelson y Mohrli, que confirmó la justeza de este principio, será descrito en el segundo tomo del curso.

por sí y a causa de su naturaleza interior, transcurre de modo uniforme, independientemente de todo lo exterior». De acuerdo con esto se consideraba por completo natural que dos acontecimientos, simultáneos en cierto sistema de referencia, también lo serán en todos los demás sistemas de referencia. No obstante, es fácil cerciorarse de que esta última afirmación contradice el principio de constancia de la velocidad de la luz.

Tomemos dos cuerpos K y K' que, junto con los correspondientes relojes, forman sistemas inerciales de referencia. Sea que el cuerpo K'

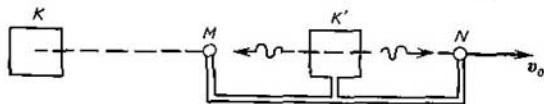


Fig. 62.1

se desplaza con relación al cuerpo K a la velocidad v_0 , dirigida a lo largo de la recta que pasa por los centros de los cuerpos (fig. 62.1). Coloquemos en dicha recta dos cuerpos M y N , distanciados a igual longitud del cuerpo K' y unidos a él rígidamente. En lo que atañe al cuerpo K , estos cuerpos se mueven a velocidad v_0 , mientras que respecto a K' están en reposo. Estudiemos en los sistemas un mismo proceso: del centro del cuerpo K' se emite una señal luminosa y ésta alcanza los cuerpos M y N . La velocidad de la luz es igual en todas las direcciones e igual a c . Por esta razón, en el sistema de referencia K' la señal alcanzará los cuerpos M y N en un mismo momento de tiempo t' .

En el sistema K , la luz también se propaga a velocidad c en todas las direcciones. En este sistema el cuerpo M se mueve al encuentro de la señal luminosa. El cuerpo N se desplaza en la misma dirección que la señal. Por lo tanto, la señal llega antes al cuerpo M que al N , y por esto, $t_M < t_N$. De esta forma los acontecimientos que eran simultáneos en el sistema K' , en el sistema K no lo son. De aquí se desprende que en diversos sistemas de referencia el tiempo transcurre de forma desigual.

Con el fin de describir un acontecimiento en cierto sistema de referencia, hay que indicar en qué lugar y momento de tiempo éste se ha producido. Este problema es resoluble, si trazamos en el espacio puntos de coordenadas equidistantes y junto de cada uno de ellos se ubica un reloj, con el cual sea posible determinar el momento de tiempo durante el que sucedió el acontecimiento en el lugar dado. Los puntos de coordenadas pueden ser trazados reinstalando una escala unitaria. Cualquier sistema que realiza un proceso que se repite periódicamente, servirá de reloj. Para comparar los momentos de tiempo cuando se producen dos acontecimientos en diferentes puntos del

espacio, hay que cerciorarse de que los relojes ubicados en dichos puntos son sincrónicos.

Al parecer, la sincronización podría ser efectuada colocando primero los relojes uno junto a otro y después de comprobar sus indicaciones, trasladarlos a los correspondientes puntos del espacio. Sin embargo, este procedimiento tiene que ser rechazado ya que sabemos cómo influye sobre la marcha de los relojes su traslado de un lugar a otro. Por lo tanto, antes que nada hay que instalar los relojes en sus lugares y sólo después realizar y comprobar sus indicaciones. Esto se puede realizar enviando de un reloj a otro una señal luminosa ¹⁾. Sea que del punto A en el momento t_1 (registrado en el reloj del punto A) se envía una señal luminosa que se refleja de un espejo ubicado en el punto B y retorna al punto A en el momento t_2 . Es preciso considerar que el reloj en B es sincrónico al reloj en A , si en el momento cuando a ellos llega la señal, el reloj en B indica un tiempo t igual a $(t_1 + t_2)/2$. Semejante comprobación debe realizarse para todos los relojes situados en diferentes puntos del sistema K . Los acontecimientos en A y B se considerarán simultáneos en el sistema K , si los registros del tiempo que a ellos corresponden coinciden según los relojes A y B .

De forma análoga se ejecuta la sincronización de todos los relojes en el sistema K' y cualquier otro sistema de referencia. La velocidad de la señal luminosa, con la que se realiza la sincronización, es igual en todos los sistemas inerciales de referencia. Ésta es la causa que condiciona la elección de una señal luminosa para la sincronización de la marcha de los relojes. Resulta que la velocidad de la luz es la velocidad tope. Ninguna señal, ninguna interacción entre los cuerpos puede propagarse a velocidad superior a la de la luz en el vacío. Así se explica la igualdad de la velocidad de la luz en el vacío en todos los sistemas de referencia. En correspondencia con el principio de relatividad, las leyes de la naturaleza, deben ser iguales en todos los sistemas inerciales de referencia. El hecho de que la velocidad de la señal no puede sobrepasar cierto valor límite, también es una ley de la naturaleza. Por esta causa, en todos los sistemas de referencia, el valor de la velocidad tope debe ser igual.

La constancia de la velocidad de la luz conduce a que el espacio y el tiempo están ligados entre sí, formando un espacio-tiempo único. Esta interligazón puede ser representada con particular evidencia, mediante un espacio cuatridimensional por cuyos tres ejes se trazan las coordenadas espaciales x , y , z , mientras que por el cuarto, el tiempo t , digamos con mayor precisión, la coordenada temporal ct proporcional a t , de la misma dimensión que las coordenadas espaciales.

Cierto acontecimiento (por ejemplo, la desintegración de cierta

¹⁾ La comprobación de los relojes con las señales de radio, en esencia, constituye semejante sincronización.

partícula) se caracteriza por el lugar donde éste se produjo (coordenadas x, y, z) y el tiempo t , cuando aquél sucedió. De este modo, al acontecimiento corresponde en el espacio cuatridimensional imaginario un punto con coordenadas x, y, z y ct . Semejante punto recibe el nombre de *punto universal*. A toda partícula (incluso en reposo) le corresponde en el espacio cuatridimensional cierta línea, llamada *universal*, (para la partícula en reposo ésta tiene la forma de una recta paralela al eje ct).

Así, pues, el espacio y el tiempo son dos partes de un todo único. No obstante, el tiempo se distingue del espacio de forma cualitativa. Esto se manifiesta en que el espacio cuatridimensional se diferencia por sus propiedades del espacio tridimensional corriente. Este último posee la llamada métrica de Euclides, lo que quiere decir que el cuadrado de la distancia Δl entre dos puntos es igual a la suma de los cuadrados de las diferencias de las coordenadas:

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

El cuadrado de la «distancia» entre dos puntos universales (esta «distancia» denomínase *intervalo* y se designa con el símbolo Δs) determínase con la fórmula

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (62.1)$$

(las propiedades del intervalo se estudian en el § 65).

Los espacios para los que el cuadrado de la distancia se determina con una fórmula del tipo (62.1) reciben el nombre de *seudoeuclídeos*. La diferencia cualitativa entre el tiempo y el espacio se manifiesta en que el cuadrado de la coordenada temporal y los cuadrados de las coordenadas espaciales entran en la expresión (62.1) con signos distintos.

Particular papel desempeñan en la teoría especial de la relatividad las magnitudes que son *invariantes* respecto a las transformaciones de las coordenadas y el tiempo, al pasar de un sistema inercial de referencia a otro (con otras palabras, las magnitudes que tienen el mismo valor numérico en todos los sistemas inerciales de referencia). Ya conocemos una de estas magnitudes, la velocidad de la luz en el vacío. En el § 65 mostraremos que el intervalo determinado con la fórmula (62.1) también es invariante.

También juegan un papel notorio las fórmulas y correlaciones, que con relación a las transformaciones indicadas más arriba, son invariantes (es decir, que tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales de referencia). Por ejemplo, las expresiones relativistas para la cantidad de movimiento y la energía se determinan de modo que los principios de conservación de dichas magnitudes no se violen al pasar a otro sistema inercial de referencia. Durante la posterior exposición nos familiarizaremos con una serie de magnitudes y correlaciones invariantes.

§ 63. Transformaciones de Lorentz

Examinemos dos sistemas inerciales de referencia que designaremos con K y K' (fig. 63.1). Supongamos que el sistema K' se mueve respecto de K a una velocidad v_0 ¹⁾. Dirijamos los ejes x y x' a lo largo del vector v_0 . Vamos a suponer que los ejes y y y' , así como z y z' , son paralelos entre sí.

A causa del principio de relatividad, los sistemas K y K' son en absoluto equivalentes. La única diferencia formal entre ellos, consiste en que la coordenada x del origen O' del sistema K' , contada en el sistema K , varía según la ley

$$x_{O'} = v_0 t, \quad (63.1)$$

mientras que la coordenada x del origen O del sistema K , contada en el sistema K' , varía según la ley

$$x'_O = -v_0 t'. \quad (63.2)$$

Esta diferencia se debe a que hemos elegido las direcciones de los ejes x y x' iguales, en tanto que los sistemas K y K' se mueven, uno respecto del otro, en direcciones opuestas. Por esta causa, la proyección de la velocidad relativa en el eje x del sistema K es igual a v_0 y en el eje x' del sistema K' , $-v_0$.

En la mecánica no relativista, el paso de las coordenadas y el tiempo de un sistema inercial de referencia a las coordenadas y el tiempo de otro sistema inercial de referencia, se realiza con ayuda de las transformaciones de Galileo (12.1). De ellas se desprende la ley de composición de las velocidades: $v = v' + v_0$ (véase la fórmula (12.3)).

Esta ley se halla en contradicción con el principio de constancia de la velocidad de la luz. En efecto, si en sistema K' la señal luminosa se propaga en el sentido del vector v_0 a una velocidad c , de acuerdo con (12.3) la velocidad de la señal en el sistema K será $c + v_0$, es decir,

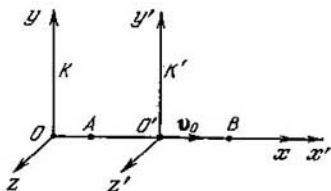


Fig. 63.1

¹⁾ Recordemos que recibe el nombre de inercial un sistema de referencia, con relación al cual una partícula libre se mueve sin aceleración (véase el § 7). En el § 12, basándonos en las transformaciones de Galileo, mostramos que el sistema K' , que a velocidad constante v_0 se mueve respecto del sistema inercial K a su vez también es inercial. En la mecánica relativista, las transformaciones de Galileo deben ser sustituidas por otras, que concuerden con el principio de constancia de la velocidad de la luz. No obstante, es evidente que cualquiera que sea la ley de transformación al pasar del sistema K al sistema K' , en movimiento a velocidad constante v_0 respecto al primero, si la velocidad de la partícula v en el sistema K es constante, también lo será v' en el sistema K' . Por lo tanto, también en la mecánica relativista, el sistema K' , que en lo que atañe al sistema K se mueve a velocidad v_0 constante, será asimismo inercial.

superará la velocidad de la luz c . De aquí sigue que las transformaciones de Galileo deben ser sustituidas por otras fórmulas. Es fácil hallar éstas.

En la forma más general, las transformaciones de las coordenadas y el tiempo al pasar del sistema K' al sistema K tienen el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned} x &= f_1(x', y', z', t'), & y &= f_2(x', y', z', t'), \\ z &= f_3(x', y', z', t'), & t &= f_4(x', y', z', t'). \end{aligned} \quad (63.3)$$

De la homogeneidad del espacio y el tiempo se desprende que las fórmulas (63.3) deben ser lineales, o sea, tener la forma:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' + \alpha_4 t' + \alpha_5, \quad (63.4)$$

etc., donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ son constantes. En correspondencia

$$dx = \alpha_1 dx' + \alpha_2 dy' + \alpha_3 dz' + \alpha_4 dt', \quad (63.5)$$

etc. Realmente, de acuerdo con (63.3)

$$dx = \frac{\partial f_1}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f_1}{\partial y'} dy' + \frac{\partial f_1}{\partial z'} dz' + \frac{\partial f_1}{\partial t'} dt', \quad (63.6)$$

etc.

Si tomamos ciertas $dx', dy', dz',$ y dt' elegidas al azar en el punto x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 , poniendo en (63.6) los valores de las derivadas en dicho punto, obtendremos para dx cierto valor dx_1 . No obstante, a causa de la homogeneidad del espacio y el tiempo, en cualquier otro punto x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 , para los mismos valores de dx', dy', dz' y dt' , debemos obtener para dx el mismo valor que en el primer punto, es decir, $dx_2 = dx_1$. Lo mismo tiene que ocurrir para dy, dz y dt . Como dx', dy', dz' y dt' fueron elegidas arbitrariamente en absoluto, la indicada exigencia sólo puede cumplirse si las derivadas $\partial f_1/\partial x'$, etc., no dependen de las coordenadas, o sea, son constantes. De aquí se deduce (63.5) y, seguidamente, (63.4).

Con la elección de los ejes de coordenadas que nos ofrece la fig. 63.1, el plano $y = 0$ coincide con el plano $y' = 0$, y el plano $z = 0$ con el plano $z' = 0$. De aquí sigue que, por ejemplo, las coordenadas y y y' deben anularse simultáneamente, sin depender de los valores de otras coordenadas y del tiempo. Por esta razón y y y' pueden estar ligadas sólo con una correlación del tipo

$$y = \varepsilon y',$$

donde ε es una constante. A causa de la equivalencia de los sistemas K y K' la correlación inversa debe tener la forma

$$y' = \varepsilon y$$

con el mismo valor de la constante ε que en el primer caso. Multiplicando las dos correlaciones obtenemos que $\varepsilon^2 = 1$, de donde $\varepsilon = \pm 1$. El signo más corresponde a los ejes y y y' con igual dirección,

el signo menos, a las direcciones opuestas. Dirigiendo los ejes de modo equivalente, tenemos

$$y = y'. \quad (63.7)$$

Razonamientos análogos nos conducen a la fórmula

$$z = z'. \quad (63.8)$$

Dirijámonos ahora a la determinación de las transformaciones para x y t . De (63.7) y (63.8) sigue que los valores de z e y no dependen de x' y t' . De esto se desprende que los valores de x' y t' no pueden depender de z e y ; así, pues, los valores de x y t tampoco pueden depender de z' e y' . De este modo, x y t pueden ser funciones lineales sólo de x' y t' .

El origen de coordenadas O del sistema K tiene una coordenada $x = 0$ en K y $x' = -v_0 t'$ en el sistema K' (véase (63.2)). Por consiguiente, la expresión $(x' + v_0 t')$ debe reducirse a cero al mismo tiempo que la coordenada x . Para esto, la transformación lineal debe tener la forma

$$x = \gamma (x' + v_0 t'), \quad (63.9)$$

donde γ es cierta constante.

De manera análoga, el origen de coordenadas O' del sistema K' tiene en este sistema la coordenada $x' = 0$ y $x = v_0 t$ en K (véase (63.1)). De aquí sigue, que

$$x' = \gamma (x - v_0 t). \quad (63.10)$$

De la equivalencia de los sistemas K y K' sigue que el coeficiente de proporcionalidad debe ser el mismo en los dos casos.

Con el fin de hallar el coeficiente γ vamos a utilizar el principio de constancia de la velocidad de la luz. Comencemos a contar el tiempo en los dos sistemas desde el momento cuando sus orígenes de coordenadas coinciden. Supongamos que en el momento $t = t' = 0$ en la dirección de los ejes x y x' se envía una señal luminosa que produce un destello de luz en una pantalla, situada en el punto con la coordenada x en el sistema K y con coordenada x' en el sistema K' . Este acontecimiento (el destello) se describe con la coordenada x y el momento t en el sistema K y con la coordenada x' y el momento t' en el sistema K' , con la particularidad de que

$$x = ct, \quad x' = ct'.$$

Poniendo estos valores de x y x' en las fórmulas (63.9) y (63.10), obtenemos

$$\begin{aligned} ct &= \gamma (ct' + v_0 t') = \gamma (c + v_0) t', \\ ct' &= \gamma (ct - v_0 t) = \gamma (c - v_0) t. \end{aligned}$$

Multiplicando las dos correlaciones, llegamos a la ecuación

$$c^2 = \gamma^2 (c^2 - v_0^2).$$

De aquí

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \quad (63.11)$$

La sustitución de este valor en (63.9) nos conduce a la fórmula

$$x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \quad (63.12)$$

La fórmula (63.12) nos permite hallar el valor de x por medio de los valores conocidos de x' y t' . Para obtener la fórmula que con ayuda de los valores conocidos de x' y t' nos permitiera hallar el valor de t , excluyamos de (63.9) y (63.10) la coordenada x y resolvemos la corrección obtenida respecto de t . He aquí el resultado

$$t = \gamma \left[t' + \frac{x'}{v_0} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right].$$

Poniendo el valor de (63.11) para γ obtenemos la siguiente fórmula:

$$t = \frac{t' + (v_0/c^2) x'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \quad (63.13)$$

El conjunto de las fórmulas (63.7), (63.8), (63.12) y (63.13) lleva el nombre de *transformaciones de Lorentz*. Si empleamos la designación de uso general

$$\beta = v_0/c, \quad (63.14)$$

las transformaciones de Lorentz toman la forma

$$x = \frac{x' + \beta c t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (\beta/c) x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (63.15)$$

Con las fórmulas (63.15) se realiza la transición de las coordenadas y el tiempo contados en el sistema K' , a las coordenadas y el tiempo contados en el sistema K (de forma más corta, del sistema K' al sistema K). Si las ecuaciones (63.15) se resuelven respecto de las magnitudes con raya, se obtienen las fórmulas de transformación para pasar del sistema K al K' :

$$x' = \frac{x - \beta c t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (\beta/c) x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (63.16)$$

Como era de esperar, tomando en consideración la equivalencia de los sistemas K y K' , las fórmulas (63.16) sólo se distinguen de las (63.15) por el signo junto a β , es decir, junto a v_0 .

Es fácil comprender, que cuando $v_0 \ll c$ (o sea, $\beta \ll 1$) las transformaciones de Lorentz se convierten en las de Galileo (véase (12.1)). Así, pues, las transformaciones de Galileo conservan su valor para las velocidades que en comparación con la de la luz en el vacío son pequeñas.

Con $v_0 > c$ las expresiones (63.15) y (63.16) para x , t , x' y t' se convierten en imaginarias. Esto concuerda con que es imposible el movimiento a velocidades mayores que la de la luz en el vacío. No se puede incluso hacer uso de un sistema de referencia que se mueva a velocidad c , ya que con $v_0 = c$ en los denominadores de las fórmulas para x y t habrá cero.

Las transformaciones de Lorentz tienen en particular una forma sencilla y simétrica, si las escribimos no para x y t , sino que para x y (ct) , es decir, para magnitudes de igual dimensión. En tal caso, las fórmulas (63.15) serán así:

$$x = \frac{x' + \beta(ct')}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad (ct) = \frac{(ct') + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (63.17)$$

Las fórmulas (63.17) se recuerdan con facilidad si tomamos en consideración, que la primera de ellas se distingue de la «evidente» fórmula $x = x' + v_0 t'$ por la presencia en el denominador de la expresión $\sqrt{1 - \beta^2}$, característica para las fórmulas relativistas. La última fórmula se obtiene de la primera si cambiamos de lugar x' y ct' .

§ 64. Corolarios de las transformaciones de Lorentz

De las transformaciones de Lorentz se deriva una serie de corolarios, singulares desde el punto de vista de la mecánica newtoniana.

Simultaneidad de los acontecimientos en diferentes sistemas de referencia. Supongamos que en los puntos con coordenadas x_1 y x_2 en el sistema K se producen simultáneamente dos acontecimientos en el momento de tiempo $t_1 = t_2 = b$. De acuerdo con la última de las fórmulas (63.16) a estos acontecimientos corresponderán en el sistema K' los momentos de tiempo

$$t'_1 = \frac{b - (\beta/c)x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{b - (\beta/c)x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Como vemos en estas fórmulas, cuando en el sistema K los acontecimientos están separados ($x_1 \neq x_2$), en el sistema K' ellos no serán simultáneos ($t'_1 \neq t'_2$). El signo de sustracción $t'_2 - t'_1$ se determina por el signo de la expresión $(\beta/c)(x_1 - x_2)$; por consiguiente, en diversos sistemas K' (para diferentes β) la diferencia $t'_2 - t'_1$ será distinta en magnitud y puede diferir por el signo. Esto quiere decir, que en unos sistemas el acontecimiento 1 precederá al acontecimiento 2 y, a la inversa, en otros sistemas el acontecimiento 2 se producirá antes que el 1. Cabe indicar, que lo dicho sólo se refiere a acontecimientos entre los que no hay nexos casuales. Los acontecimientos entre los que hay nexos casuales (por ejemplo, el lanzamiento de una piedra y su caída en la Tierra) no serán simultáneos en ninguno de los sistemas de referencia y en todos ellos, el acontecimiento que es la

causa precederá al efecto. Sobre esto trataremos con mayor detalle en el siguiente parágrafo.

Longitud de los cuerpos en diversos sistemas. Consideremos una barra ubicada a lo largo del eje x' y que, en lo que se refiere al sistema de referencia K' , está en reposo (fig. 64.1). Su longitud en este sistema

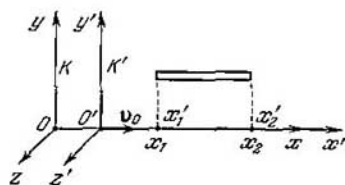


Fig. 64.1

es igual a $l_0 = x'_2 - x'_1$, donde x'_1 y x'_2 son las coordenadas de los extremos de la barra, que no varían con el tiempo t' . En lo que atañe al sistema K , la barra se mueve a una velocidad $v = v_0$. Para determinar su longitud en este sistema, hay que marcar las coordenadas de los extremos de la barra x_1 y x_2 en un mismo momento de tiempo $t_1 = t_2 = b$. Su diferencia $l = x_2 - x_1$ nos pro-

porciona la longitud de la barra, medida en el sistema K . Para hallar la correlación entre l_0 y l , es preciso tomar aquella de las fórmulas de las transformaciones de Lorentz que contiene x' , x y t , es decir, la primera de las fórmulas (63.16). Sustituyendo en dicha fórmula β por v_0/c , obtenemos

$$x'_1 = \frac{x_1 - v_0 b}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - v_0 b}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},$$

de donde

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Haciendo uso de las designaciones l y l_0 , así como sustituyendo la velocidad relativa de los sistemas de referencia v_0 por la velocidad v de la barra respecto del sistema K , igual a la primera, llegamos a la correlación

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (64.1)$$

De este modo, la longitud de la barra l , medida en el sistema con relación al cual está en movimiento, es menor que la longitud l_0 , medida en el sistema respecto del cual la barra está en reposo¹⁾.

Si una barra de longitud $l_0 = x_2 - x_1$ está en reposo en el sistema K , para determinar su longitud en el sistema K' , hay que marcar las coordenadas de sus extremos x'_1 y x'_2 en un mismo momento de tiempo $t'_1 = t'_2 = b$. La diferencia $l = x'_2 - x'_1$ nos dará la longitud de la barra en el sistema K' , respecto del cual ésta se mueve a velocidad v . Empleando la primera de las ecuaciones (63.15), llegaremos de nuevo a la correlación (64.1).

¹⁾ En ocasiones, la longitud l_0 medida en el sistema en el que la barra está en reposo, recibe el nombre de *longitud propia* de la barra.

Cabe señalar que, en la dirección de los ejes z e y las dimensiones de la barra son iguales en todos los sistemas de referencia.

Así pues, cuando los cuerpos se mueven, sus dimensiones en la dirección de movimiento se acortan tanto más, cuanto mayor sea la velocidad de su desplazamiento. Este fenómeno, recibe el nombre de *contracción de Lorentz* (o de Fitzgerald). Es curioso, que de modo visual (o en una fotografía), la variación de la forma de los cuerpos no puede ser advertida incluso a velocidades comparables con c . La causa de este hecho es muy sencilla. Al observar de forma visual o al fotografiar cualquier cuerpo, registramos los impulsos de luz que parten de diversos sectores del cuerpo y que simultáneamente alcanzaron la retina del ojo o la placa fotográfica. Estos impulsos se emiten no al mismo tiempo. Los impulsos de los sectores más alejados fueron irradiados antes que los más cercanos. Así, que si el cuerpo está en movimiento, sobre la retina o en la fotografía se obtiene una imagen deformada del cuerpo. El correspondiente cálculo nos muestra que el efecto de dicha deformación será la compensación de la contracción de Lorentz ¹⁾, de forma que parece que el cuerpo no está deformado, sino que sólo girado. Es natural, que un cuerpo de forma esférica, incluso a grandes velocidades de movimiento se percibirá de modo visual como un cuerpo de contorno esférico.

Intervalo de tiempo entre los acontecimientos. Supongamos que en un mismo punto del sistema K' se producen dos acontecimientos. Al primero le corresponde en dicho sistema la coordenada $x'_1 = a$ y el momento de tiempo t'_1 , al segundo, la coordenada $x'_2 = a$ y el momento de tiempo t'_2 . De acuerdo con la última de las fórmulas (63.15), a estos acontecimientos les corresponden los siguientes momentos de tiempo en el sistema K

$$t_1 = \frac{t'_1 + (v_0/c^2) a}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + (v_0/c^2) a}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

(hemos sustituido β por v_0/c). De aquí

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Introduciendo las designaciones $t_2 - t_1 = \Delta t$ y $t'_2 - t'_1 = \Delta t'$, obtenemos la fórmula

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad (64.2)$$

que liga los intervalos de tiempo entre dos acontecimientos, medidos en los sistemas K y K' . Recordemos que en el sistema K' ambos acontecimientos transcurren en un mismo punto: $x'_1 = x'_2$.

¹⁾ Si no existiera contracción de Lorentz, los cuerpos en rápido movimiento deberían verse alargados en dirección del movimiento.

Supongamos que ambos acontecimientos se producen respecto de una misma partícula que en el sistema K' está en reposo y que se mueve con relación al sistema K a una velocidad $v = v_0$. Entonces, $\Delta t'$ puede ser interpretada como el intervalo de tiempo medido con un reloj que está inmóvil en lo que atañe a la partícula, con otras palabras, medido con el reloj que se mueve junto con la partícula (se tiene en cuenta el movimiento con relación al sistema K). El tiempo contado por el reloj que se mueve junto con el cuerpo denomínase *tiempo propio* de dicho cuerpo y, por regla, se designa con la letra τ . Así, pues, $\Delta t' = \Delta\tau$. Tomando esta designación en cuenta, a la fórmula (64.2) se la puede dar el aspecto

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (64.3)$$

(hemos sustituido la velocidad relativa del sistema de referencia v_0 por la velocidad de la partícula v , igual a la primera).

La fórmula (64.3) liga el tiempo propio τ del cuerpo con el tiempo t , contado por el reloj del sistema de referencia, respecto del cual el cuerpo se mueve a la velocidad v (este reloj se mueve respecto del cuerpo a una velocidad $-v$). En (64.3) vemos que el tiempo propio siempre es menor que el tiempo contado por el reloj que se mueve respecto al cuerpo. En el próximo párrafo mostraremos que el tiempo propio es invariante (igual en todos los sistemas de referencia).

Considerando el acontecimiento que surfió la partícula en el sistema K , se puede determinar Δt como el intervalo de tiempo medido con el reloj inmóvil, mientras que $\Delta\tau$, como el intervalo de tiempo medido con el reloj que se mueve a una velocidad v . De acuerdo con (64.3) $\Delta\tau < \Delta t$; por esto podemos decir que el reloj en movimiento marcha más lentamente que el reloj en reposo (se tiene en cuenta que salvo la velocidad de movimiento, los dos relojes son idénticos).

La correlación (64.3) ha obtenido confirmación práctica directa. En la composición de los rayos cósmicos hay partículas mesones mu (μ) o bien muones. Estas partículas no son estables, se desintegran espontáneamente en un electrón (o positrón) y dos neutrinos. El tiempo medio de vida, medido en condiciones cuando el muon está en reposo (o se mueve a pequeña velocidad), constituye unos $2 \cdot 10^{-6}$ s. Podría parecer que incluso al moverse a la velocidad de la luz, los muones recorrerían un camino cerca de 600 m. Sin embargo, como muestran las observaciones, los muones se forman en los rayos cósmicos a una altura de 20—30 km y en considerable cantidad alcanzan la superficie terrestre. Esto fenómeno se explica por el hecho de que $2 \cdot 10^{-6}$ s es el tiempo propio de vida del muon, es decir, el tiempo medido por el reloj que se mueve junto con la partícula. El tiempo medido con el reloj del observador relacionado con la Tierra resulta ser mucho mayor (véase la fórmula (64.3); v del muon es próxima a c). Por esta razón, nada hay de asombroso en que el observador ve un recorrido del muon mucho mayor que 600 m. Cabe señalar, que desde el punto de

vista del observador que se mueve junto con el muon, la distancia volada por él hasta la superficie de la Tierra se reduce hasta 600 m (véase la fórmula (64.1)), de forma que el muon tiene tiempo de cubrir esta distancia durante $2 \cdot 10^{-6}$ s.

§ 65. Intervalo

En el § 62 fue demostrado que en el espacio cuatridimensional imaginario, a cada acontecimiento se le puede contraponer un punto universal con coordenadas ct, x, y, z . Se sabe que un acontecimiento tiene las coordenadas ct_1, x_1, y_1, z_1 y el segundo, ct_2, x_2, y_2, z_2 . Introducimos las designaciones: $t_2 - t_1 = \Delta t$, $x_2 - x_1 = \Delta x$, etc.

Recordemos que a causa de la diferencia cualitativa entre es tiempo y el espacio, el cuadrado de la diferencia de las coordenadas temporales $(c\Delta t)^2$ y los cuadrados de las diferencias de las coordenadas espaciales $\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2$ entran en la expresión para el cuadrado de la «distancia» entre los acontecimientos (con más precisión, entre los puntos universales que corresponden a los acontecimientos) con signos diferentes:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \quad (65.1)$$

La magnitud Δs que se determina por esta forma recibe el nombre de *intervalo* entre los acontecimientos.

Introduciendo la distancia $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ entre los puntos del espacio tridimensional corriente, en las que se produjeron los acontecimientos que examinamos, la expresión para el intervalo puede ser representada en forma

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2}. \quad (65.2)$$

Es fácil cerciorarse de que el intervalo en los dos acontecimientos dados, es igual en todos los sistemas inerciales de referencia. Precisamente esta circunstancia sirvió de base para considerar análoga a él la distancia Δl entre dos puntos en el espacio tridimensional corriente (Δl no varía su valor al pasar de un sistema tridimensional a otro).

Spongamos que en el sistema de referencia K , el cuadrado del intervalo se determina con la fórmula (65.1). En el sistema K' , el cuadrado del intervalo entre esos mismos acontecimientos es igual a

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2. \quad (65.3)$$

De acuerdo con las fórmulas (63.16)

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \beta c \Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - (\beta/c) \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Poniendo estos valores en la fórmula (65.3), después de sencillas transformaciones, obtenemos que $\Delta s'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$,

es decir, que

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2.$$

De este modo, el intervalo es una invariante con relación del paso de un sistema inercial de referencia a otro. En el párrafo anterior hemos visto que los intervalos de tiempo Δt y la longitud Δl , no son invariantes al realizarse semejante transición. Por lo tanto, cada uno de los sumandos que forman la magnitud $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2$ variará al pasar de un sistema a otro; la propia magnitud Δs^2 queda constante.

El intervalo entre dos acontecimientos, que transcurrieron con cierta partícula, se encuentra en correlación simple con el intervalo de tiempo propio entre estos acontecimientos. De acuerdo con (64.3), el intervalo de tiempo propio $\Delta\tau$ está ligado con el intervalo de tiempo Δt , contado con el reloj del sistema respecto del cual la partícula se mueve a velocidad v , con la fórmula

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Transformemos esta fórmula del modo siguiente:

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2\Delta t^2 - (v\Delta t)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta l^2}.$$

Aquí $\Delta l = v\Delta t$ es el recorrido que pasa la partícula durante el tiempo Δt . La comparación con (65.2) nos da que

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \Delta s, \quad (65.4)$$

donde Δs es el intervalo entre los acontecimientos que están separados por el intervalo de tiempo $\Delta\tau$.

De la fórmula (65.4) se desprende que el intervalo de tiempo propio es proporcional al intervalo entre los acontecimientos. El intervalo es invariante. Por consiguiente, el tiempo propio también es invariante, o sea, que no depende de en qué sistema de referencia se observa el movimiento del cuerpo dado.

En correspondencia con la fórmula (65.2), el intervalo puede ser real (si $c\Delta t > \Delta l$) o bien imaginario (si $c\Delta t < \Delta l$). En caso particular, el intervalo puede ser cero (si $c\Delta t = \Delta l$). Este último caso tiene lugar para los acontecimientos que consisten en la emisión de una señal luminosa del punto x_1, y_1, z_1 en el momento t_1 y la llegada de dicha señal al punto x_2, y_2, z_2 en el momento t_2 . Como en semejante caso $\Delta l = c\Delta t$, el intervalo entre los acontecimientos será cero.

A causa de su invariación, el intervalo que es real (imaginario) en un sistema cualquiera de referencia K , será real (imaginario) en cualquier otro sistema de referencia K' .

En el caso, cuando el intervalo es real

$$c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2 > 0.$$

De aquí sigue que puede ser hallado un sistema K' tal, en el que $\Delta l' = 0$, es decir, los dos acontecimientos resultan conjugados en el espacio. Sin embargo, no existe semejante sistema de referencia, en el que $\Delta t' = 0$ (con semejante valor de $\Delta t'$ el intervalo sería imaginario). Así, pues, los acontecimientos separados entre sí por un intervalo real, no pueden ocurrir simultáneamente en ningún sistema de referencia. Por este motivo, los intervalos reales reciben el nombre de *cuasitemporales*.

Señalemos, que los acontecimientos que ocurren con una misma partícula (se tiene en cuenta una partícula con masa en reposo diferente de cero), pueden sólo estar separados por un intervalo cuasitemporal. En efecto, la velocidad v de tal partícula siempre es menor que c ; por lo tanto, el recorrido Δl pasado por la partícula, es menor que $c\Delta t$, de donde sigue que $\Delta s^2 > 0$. De acuerdo con la última fórmula (63.16)

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (\beta/c) \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (65.5)$$

Si los intervalos Δt y Δx separan acontecimientos que ocurrieron con aquella misma partícula, $\Delta x/\Delta t$ proporciona la velocidad de la partícula v_x . Con esta condición, la fórmula (65.5) puede ser escrita en la forma

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (\beta/c) (\Delta x/\Delta t) \Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(1 - \beta \frac{v_x}{c}\right).$$

En vista de que $\beta = v_0/c$ y v_x/c son menores que la unidad, el paréntesis en el segundo miembro de la igualdad es positivo para todos los sistemas K' . De aquí se desprende que el signo de $\Delta t'$ es igual que el de Δt . Esto significa que dos acontecimientos ocurridos con cierta partícula, se realizan con igual consecutividad en todos los sistemas. Por ejemplo, la creación de una partícula es precedida en todos los sistemas de referencia por su desintegración.

Cuando el intervalo es imaginario

$$c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta l'^2 < 0.$$

De aquí se deduce que puede ser hallado semejante sistema K' , en el que $\Delta t' = 0$, es decir, los dos acontecimientos transcurren en un mismo momento de tiempo t' . No obstante, no existe tal sistema de referencia, en el que $\Delta l' = 0$ (con tal valor de $\Delta l'$ el intervalo sería real). De este modo, los acontecimientos divididos por un intervalo imaginario, en ningún sistema de referencia pueden estar conjugados en el espacio. Por esta causa, los intervalos imaginarios denominanse *cuasiespaciales*.

La distancia Δl entre los puntos, en los que transcurren los acontecimientos, separados por un intervalo cuasiespacial, supera $c\Delta t$, por lo que los acontecimientos que se consideran no pueden, de ninguna

forma, influenciar entre sí, es decir, no pueden tener entre sí ligazón casual (recordemos que no hay acciones que se propaguen a velocidades mayores que c).

Los acontecimientos con ligazón casual, sólo pueden estar separados por un intervalo cuasiespacial o cero.

§ 66. Transformación y composición de velocidades

Estudiamos el movimiento de un punto material. En el sistema K la posición del punto se determina por las coordenadas x, y, z en cada momento de tiempo t . Las expresiones

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

son las proyecciones en los ejes x, y, z del vector de velocidad del punto con relación al sistema K . En el sistema K' la posición del punto se caracteriza en cada momento de tiempo t' por las coordenadas x', y', z' . Las proyecciones en los ejes x', y', z' del vector de velocidad del punto con relación al sistema K' , se determinan con las expresiones

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

De las fórmulas (63.15) sigue

$$dx = \frac{dx' + v_0 dt'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + (v_0/c^2) dx'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

(hemos sustituido β por v_0/c). Después de dividir las tres primeras igualdades por la cuarta, obtenemos las fórmulas de transformación de las velocidades al pasar de un sistema de referencia a otro:

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + v_0 v'_x/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + v_0 v'_x/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + v_0 v'_x/c^2}. \quad (66.1)$$

Cuando $v_0 \ll c$, las correlaciones (66.1) se convierten en las fórmulas para la composición de las velocidades (12.2) de la mecánica clásica.

De las fórmulas (63.16) es fácil obtener las expresiones para las velocidades en el sistema K' , haciendo uso de las velocidades en el sistema K :

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - v_0 v_x/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 - v_0 v_x/c^2}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 - v_0 v_x/c^2}. \quad (66.2)$$

Estas fórmulas sólo se diferencian de las (66.1) por el signo de v_0 . Claro está, que semejante resultado podía haber sido previsto de antemano.

Si el cuerpo se mueve en paralelo al eje x , su velocidad v respecto del sistema K coincidirá con v_x , mientras que la velocidad v' con relación al sistema K' , con v'_x . En tal caso, la ley de composición de

las velocidades tendrá la forma

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + v_0 v' / c^2}. \quad (66.3)$$

Sea que la velocidad v' es igual a c . Entonces, según la fórmula (66.3) obtenemos para v el siguiente valor

$$v = \frac{c + v_0}{1 + v_0 c / c^2} = c.$$

Este resultado no es sorprendente, ya que las transformaciones de Lorentz (y, por consiguiente, las fórmulas para la composición de velocidades) se basan en la afirmación de que la velocidad de la luz es igual en todos los sistemas de referencia. Haciendo en la fórmula (66.3) $v' = v_0 = c$, obtenemos para v un valor que también es igual a c . De modo que si las velocidades que se suman v' y v_0 no superan c , la resultante de la velocidad v tampoco puede sobrepasar a c .

§ 67. Expresión relativista para la cantidad de movimiento

Las ecuaciones de Newton son invariantes en lo que se refiere a las transformaciones de Galileo (véase el § 12). Pero en lo que atañe a las transformaciones de Lorentz, no lo son. En particular, el principio de conservación de la cantidad de movimiento, que se desprende de

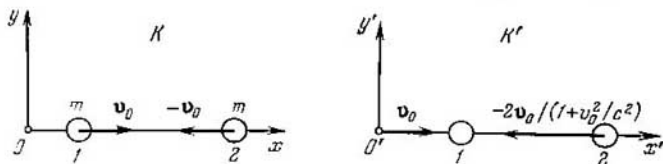


Fig. 67.1

las leyes de Newton, no es invariante con relación a las transformaciones de Lorentz (véase el § 27). Para cerciorarse de esto, consideremos qué aspecto tiene en los sistemas K y K' el choque perfectamente inelástico de dos esferas, iguales de masa m (fig. 67.1).

Supongamos que en el sistema K las esferas se mueven al encuentro una de otra a lo largo del eje x , a velocidades iguales en magnitud, cuyas proyecciones sobre el eje x son: $v_{x1} = v_0$ y $v_{x2} = -v_0$ (v_0 es la velocidad relativa de los sistemas K y K'). Con estas condiciones, después del choque las esferas quedarán en reposo: $v_{x1} = v_{x2} = 0$. Así, la cantidad total de movimiento del sistema antes y después del choque es igual a cero, en el sistema K la cantidad de movimiento se conserva.

Examinemos ahora ese mismo proceso en el sistema K' . Haciendo uso de la primera de las fórmulas (66.2), para las velocidades de las esferas antes del choque hallamos los valores $v'_{x1} = 0$ y $v'_{x2} = -2v_0/(1 + v_0^2/c^2)$, mientras que para las velocidades de las esferas después del choque, un valor que coincide $v'_{x1} = v'_{x2} = -v_0$. Por lo tanto, la cantidad total de movimiento antes del choque es igual a $-2mv_0/(1 + v_0^2/c^2)$, después de éste, $-2mv_0$. Si $v_0 \ll c$, la cantidad de movimiento antes y después del choque es prácticamente igual. No obstante, cuando las esferas se mueven a gran velocidad v_0 , entre las cantidades de movimiento inicial y final se advierte una considerable diferencia. De forma, que empleando las expresiones newtonianas para la cantidad de movimiento, llegamos a la conclusión de que, al parecer, en el sistema K' la cantidad de movimiento no se conserva. Una de las leyes fundamentales de mecánica, el principio de conservación de la cantidad de movimiento, de acuerdo con la enunciación newtoniana, resulta ser no invariante respecto de las transformaciones de Lorentz.

Intentemos hallar tal expresión para la cantidad de movimiento, que el principio de conservación de la cantidad de movimiento sea invariante en lo que se refiere a las transformaciones de Lorentz. Aquí, hemos de tener en cuenta que a pequeñas velocidades ($v \ll c$), la expresión relativista de la cantidad de movimiento debe convertirse en la expresión newtoniana

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (67.1)$$

Supongamos que la expresión para la cantidad de movimiento de una partícula de masa m , tiene el aspecto

$$\mathbf{p} = mf(v)\mathbf{v}, \quad (67.2)$$

donde v es la velocidad, v , el módulo de la velocidad de la partícula, $f(v)$, cierta función adimensional de v . Para que con $v \ll c$ la expresión (67.2) se convierta en (67.1), de hecho, la función $f(v)$ debe ser igual a uno, cuando las velocidades son tales.

Consideremos un choque perfectamente elástico de dos partículas iguales de masa m en el sistema K_C de su centro de inercia. En semejante sistema la cantidad sumaria de movimiento de las partículas es igual a cero. Por lo tanto, las velocidades de las partículas son iguales en magnitud y de dirección opuesta (fig. 67.2, a). A causa de los principios de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento, las velocidades de las partículas después del choque deben tener la misma magnitud que antes del choque, mientras que las direcciones de dichas velocidades deben ser opuestas (véase la fig. 67.2, a).

Elijamos los ejes de coordenadas de manera que las velocidades de las partículas yazcan en el plano x, y , siendo simétricas al eje x .

Entonces, el choque de las partículas en el sistema K_C tendrá el aspecto que nos ofrece la fig. 67.2, *b*.

Pasemos del sistema de cálculo K_C al K' , respecto del cual la partícula 2 se mueve en paralelo respecto del eje y' . En este sistema el choque tiene el aspecto que muestra la fig. 67.3, *a*. Junto a las flechas

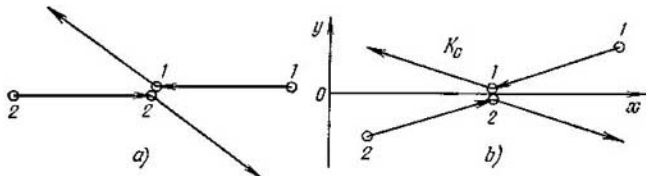


Fig. 67.2

que representan las velocidades y sus componentes por los ejes de coordenadas, se indican los módulos de las correspondientes velocidades o de sus componentes.

Por último, pasemos al sistema de referencia K , con relación al cual la partícula 1 se mueve en paralelo al eje y (fig. 67.3, *b*). Los

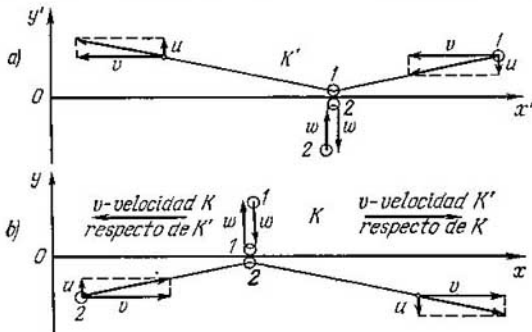


Fig. 67.3

valores de v , u y w en las figs. 67.3, *a* y 67.3, *b* son iguales, ya que a causa de la simetría del problema, al pasar del sistema K' al sistema K , las partículas intercambian las velocidades.

Partimos de que la cantidad sumaria de movimiento se conserva durante el choque en el sistema K_C . Exijamos que en el sistema K también se cumpla el principio de conservación de la cantidad de movimiento. En la fig. 67.3, *b* vemos que la componente x de la

cantidad sumaria de movimiento de la partícula en el sistema K no varía, como resultado del choque. También debe quedar invariable la componente y de la cantidad sumaria de movimiento. Teniendo en cuenta (67.2) la conservación de la componente y se escribe de forma analítica:

$$mf(w)(-w) + mf(\sqrt{v^2 + u^2})u = mf(w)w + mf(\sqrt{v^2 + u^2})(-u).$$

De aquí sigue que

$$f(w)w = f(\sqrt{v^2 + u^2})u. \quad (67.3)$$

En el sistema K' la componente y v'_y de la velocidad inicial de la partícula 2 es igual a w , mientras que la componente x v'_x es igual a cero. En el sistema K la componente y v_y de la velocidad inicial de la partícula 2 es igual a u . La velocidad relativa v_0 de los sistemas K' y K es igual a v . En correspondencia con la segunda de las fórmulas (66.1), las magnitudes u y w están ligadas por la correlación

$$u = w\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Al poner este valor de u en la igualdad (67.3), obtenemos:

$$f(w) = f(\sqrt{v^2 + u^2})\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (67.4)$$

Sea que la velocidad w (como también u) es mucho menor que c , mientras que v es comparable con la velocidad de la luz c (las partículas antes y después del choque vuelan casi paralelas al eje x). Entonces, $f(w)$ puede hacerse igual a uno (para $v \ll c$ la cantidad de movimiento se determina con la fórmula (67.1)), mientras que $\sqrt{v^2 + u^2}$ se considera igual a v . La propia v puede ser considerada no como la magnitud de la componente de la velocidad a lo largo del eje x , sino como la magnitud de la velocidad de la partícula. En tal caso, la correlación (67.4) toma el aspecto

$$1 = f(v)\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

de donde

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

La sustitución de esta función en (67.2) nos conduce a la expresión relativista para la cantidad de movimiento:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (67.5)$$

La expresión (67.5) puede ser representada en la forma

$$\mathbf{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \quad (67.6)$$

donde dt es el intervalo de tiempo propio de la partícula, durante el cual ella recibe el desplazamiento dr (véase (64.3)). Cabe indicar, que en la fórmula (67.6) dr es el desplazamiento de la partícula en aquel sistema de referencia donde se determina la cantidad de movimiento p ; el intervalo de tiempo dt se determina con el reloj que se mueve junto con la partícula.

La masa m que entra en la fórmula (67.5) es invariante, por lo que es una magnitud que no depende de la velocidad del cuerpo.

De (67.5) se deduce que la dependencia entre la cantidad de movimiento y la velocidad es más complicada que la prevista en la mecánica newtoniana. Para $v \ll c$ la expresión (67.5) se convierte en la expresión clásica $p = mv$.

Hay que señalar que la expresión (67.5) tolera la siguiente interpretación que se utiliza con creciente rareza. La cantidad de movimiento, como en la mecánica newtoniana, es igual al producto de la masa del cuerpo por su velocidad:

$$p = m_r v. \quad (67.7)$$

No obstante, la masa del cuerpo no es una magnitud constante invariante, sino que depende de la velocidad según la ley

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (67.8)$$

Con semejante interpretación la masa invariante m recibe el nombre de *masa en reposo* (con frecuencia se designa con el símbolo m_0). En dependencia de la velocidad la masa no invariante m_r denomínase *masa relativista* o bien *masa en movimiento*.

§ 68. Expresión relativista para la energía

La segunda ley de Newton estipula que la derivada de la cantidad de movimiento de una partícula (punto material) por el tiempo es igual a la fuerza resultante aplicada sobre la partícula (véase la fórmula (9.1)). Respecto de las transformaciones de Lorentz, la ecuación de la segunda ley es invariante, si por cantidad de movimiento se entiende la magnitud (67.5). Por lo tanto, la expresión relativista de la segunda ley de Newton, tiene la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = F. \quad (68.1)$$

Hay que tener en cuenta que la correlación $mw = F$, en el caso relativista no es aplicable, con la particularidad de que la aceleración w y la fuerza F , hablando en general, son no colineares.

Cabe señalar, que ni la cantidad de movimiento ni la fuerza, son magnitudes invariantes. Las fórmulas de transformación de las componentes de la cantidad de movimiento al pasar de un sistema

a otro de referencia, serán obtenidas en el párrafo siguiente. Las fórmulas de transformación de las componentes de la fuerza serán ofrecidas sin su deducción:

$$F_x = \frac{F'_x + (\beta/c) F' v'}{1 + \beta (v'_x/c)}, \quad F_y = \frac{F'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta (v'_x/c)}, \quad F_z = \frac{F'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta (v'_x/c)} \quad (68.2)$$

($\beta = v_0/c$, v' es la velocidad de la partícula en el sistema K'). Si en el sistema K' la fuerza F' que actúa sobre la partícula es perpendicular a su velocidad v' , el producto escalar $F'v'$ será cero y la primera de las fórmulas (68.2) se simplifica del siguiente modo:

$$F_x = \frac{F'_x}{1 + \beta (v'_x/c)}. \quad (68.3)$$

Para hallar la expresión relativista de la energía, obremos del mismo modo que en el § 19. Multipliquemos la ecuación (68.1) por el desplazamiento de la partícula $ds = v dt$. Como resultado tendremos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) v dt = \mathbf{F} ds.$$

El segundo miembro de esta igualdad nos proporciona el trabajo dA realizado sobre la partícula durante el tiempo dt . En el § 19 fue demostrado que el trabajo de la resultante de todas las fuerzas se dirige al incremento de la energía cinética de la partícula (véase la fórmula (19.11)). Por consiguiente, el primer miembro de la correlación debe ser interpretado como el incremento de la energía cinética T de la partícula durante el tiempo dt . Así, pues,

$$dT = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) v dt = v d \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Transformemos la expresión obtenida, tomando en consideración que $v dv = d(v^2/2)$ (véase (2.54)):

$$\begin{aligned} dT &= v \left\{ \frac{m dv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{mv (v dv/c^2)}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \right\} = \\ &= \frac{md (v^2/2)}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{mc^2 d (v^2/c^2)}{2(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = d \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \end{aligned}$$

La integración de la correlación obtenida nos proporciona

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \text{const.} \quad (68.4)$$

Por su sentido, para $v = 0$ la energía cinética debería hacerse nula. De aquí, para la constante se obtiene un valor igual a $-mc^2$. O sea, que la expresión relativista de la energía cinética de una partícula tiene la forma

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (68.5)$$

Cuando las velocidades son pequeñas ($v \ll c$) la fórmula (68.5) se puede transformar del modo siguiente:

$$T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{mv^2}{2}.$$

Hemos llegado a la expresión newtoniana de la energía cinética de una partícula. Esto era de esperar, ya que a velocidades mucho menores que las de la luz, todas las fórmulas de la mecánica relativista deben convertirse en las correspondientes fórmulas de la mecánica newtoniana.

Examinemos una partícula libre (es decir, una partícula sobre la que no se ejerce la acción de las fuerzas externas), que se mueve a velocidad v . Hemos aclarado, que dicha partícula posee energía cinética determinada por la fórmula (68.5). No obstante, hay fundamentos (véase más adelante) para implicar a la partícula libre, además de energía cinética (68.5), una energía adicional, igual a

$$E_0 = mc^2. \quad (68.6)$$

De esta forma, la energía total de una partícula libre es determinada con la expresión $E = T + E_0 + mc^2$. Tomando en consideración (68.5), veremos que

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (68.7)$$

Con $v = 0$ la expresión (68.7) se convierte en (68.6). Por esta causa, $E_0 = mc^2$ recibe el nombre de *energía en reposo*, que representa la energía interna de la partícula, no relacionada con el movimiento de la partícula como todo único. Las fórmulas (68.6) y (68.7) son válidas no sólo para una partícula elemental, sino que también para un complicado cuerpo constituido por múltiples partículas. La energía E_0 de semejante cuerpo, además de la energía en reposo de las partículas que lo constituyen, contiene también la energía cinética de las partículas (condicionada por su movimiento respecto del centro de masas del cuerpo) y la energía de interacción entre sí. En la energía en reposo, así como en la total ¹⁾ (68.7) no entra la energía potencial del cuerpo en el campo exterior de fuerzas.

Excluyendo en las ecuaciones (67.5) y (68.7) la velocidad v (la ecuación (67.5) se puede tomar en forma escalar), obtenemos la expresión de la energía total de la partícula por intermedio de la cantidad de movimiento p :

$$E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (68.8)$$

¹⁾ Hay que señalar, que el término «energía total» tiene en la mecánica relativista un sentido diferente al de la mecánica newtoniana. En esta última recibe el nombre de energía total la suma de la energía cinética y potencial de la partícula. En la mecánica relativista se entiende por energía total la suma de la energía cinética y la energía en reposo de la partícula.

Si $p \ll mc$, esta fórmula puede ser representada en la forma

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} \approx mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{mc}\right)^2\right] = mc^2 + \frac{p^2}{2m}. \quad (68.9)$$

La expresión obtenida se diferencia de la fórmula newtoniana para la energía cinética $T = p^2/2m$ por carecer del sumando mc^2 .

Hemos de indicar que de la comparación de las fórmulas (67.5) y (68.7) se deduce la expresión

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v}. \quad (68.10)$$

El hecho de que a una partícula libre se le debe atribuir energía (68.7) y no sólo energía cinética (68.5) hemos de aclararlo a continuación. Por su sentido, la energía debe ser una magnitud que se conserva. La correspondiente consideración nos muestra que durante los choques de las partículas se conserva la suma (por partículas) de las expresiones tipo (68.7), mientras que la suma de las expresiones (68.5) resulta que no se conserva. Es imposible satisfacer el requisito de conservación de la energía en todos los sistemas inerciales de referencia, si no se tiene en cuenta, en la composición de la energía total, la energía en reposo (68.6).

Además, de la expresión (68.7) para la energía y de la expresión (67.5) para la cantidad de movimiento se consigue formar una invariante, o sea, una magnitud que no cambia con las transformaciones de Lorentz. En efecto, de la fórmula (68.8) se deduce que

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 = \text{inv} \quad (68.11)$$

(cabe recordar que la masa m y la velocidad c son magnitudes invariantes). Los experimentos con partículas rápidas confirman la invariancia de las magnitudes (68.11). Si por E en (68.11) se entiende la energía cinética (68.5), la expresión (68.11) resulta ser no invariante.

Obtengamos una expresión más para la energía relativista. De la fórmula (64.3) se desprende que

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{dt}{d\tau}, \quad (68.12)$$

donde dt es el intervalo de tiempo entre dos acontecimientos ocurridos con la partícula, contado con el reloj de aquel sistema de referencia, con relación al cual la partícula se mueve a velocidad v , $d\tau$, ese mismo intervalo de tiempo, contado con el reloj que se mueve junto con la partícula (el intervalo de tiempo propio). Poniendo (68.12) en la fórmula (68.7), obtenemos la expresión

$$E = mc^2 \frac{dt}{d\tau}. \quad (68.13)$$

Esta fórmula será utilizada en el párrafo siguiente.

§ 69. Transformaciones de la cantidad de movimiento y de la energía

La energía total E y la cantidad de movimiento p no son invariantes. Efectivamente, las dos magnitudes dependen de v y, como sabemos, la velocidad tiene diversos valores en diferentes sistemas de referencia. Aclaremos cómo se transforman la energía y el impulso al pasar de un sistema de referencia a otro.

Consideremos el desplazamiento elemental de cierta partícula. Sea que en el sistema de referencia K dicho desplazamiento se realiza durante el intervalo de tiempo dt y las componentes del desplazamiento son iguales a dx, dy, dz . En el sistema K' , ese mismo desplazamiento transcurre en el tiempo dt' y sus componentes son dx', dy', dz' . De acuerdo con las fórmulas (63.17), entre los intervalos de tiempo y las componentes del desplazamiento existen las correlaciones

$$dx = \frac{dx' + \beta c dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad c dt = \frac{c dt' + \beta dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Multipliquemos estas fórmulas por la masa de la partícula m y dividamos por los correspondientes intervalos dt y dt' el tiempo propio de la partícula $d\tau$ (recordemos que la masa y el tiempo propio son magnitudes invariantes, es decir, tienen el mismo valor en los dos sistemas). Como resultado obtenemos

$$\begin{aligned} m \frac{dx}{d\tau} &= \frac{m(dx'/d\tau) + \beta mc(dt'/d\tau)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ m \frac{dy}{d\tau} &= m \frac{dy'}{d\tau}, \quad m \frac{dz}{d\tau} = m \frac{dz'}{d\tau}, \\ mc \frac{dt}{d\tau} &= \frac{mc(dt'/d\tau) + \beta m(dx'/d\tau)}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (69.1)$$

De acuerdo con (67.6) $m(dx/d\tau) = p_x$, $m(dx'/d\tau) = p'_x$, $m(dy/d\tau) = p_y$, etc. En correspondencia con (68.13) $mc(dt/d\tau) = E/c$, $mc(dt'/d\tau) = E'/c$. Tomando en consideración todo esto, las fórmulas (69.1) pueden ser ofrecidas en la forma

$$p_x = \frac{p'_x + \beta(E'/c)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad (E/c) = \frac{(E'/c) + \beta p'_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (69.2)$$

Hemos obtenido las fórmulas en las que se transforman la cantidad de movimiento y la energía de la partícula al pasar de un sistema inercial de referencia a otro. Estas fórmulas coinciden con las fórmulas (63.17), por las que se transforman las coordenadas y el tiempo. Para que la comparación sea más fácil de realizar, escribamos las fórmulas

(63.17) y (69.2) una junto a otra:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + \beta(ct')}{\gamma\sqrt{1-\beta^2}}, & p_x &= \frac{p'_x + \beta(E'/c)}{\gamma\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y &= y', \quad z = z', & p_y &= p'_y, \quad p_z = p'_z, \\ (ct) &= \frac{(ct') + \beta x'}{\gamma\sqrt{1-\beta^2}}, & (E/c) &= \frac{(E'/c) + \beta p'_x}{\gamma\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (69.3)$$

De la comparación se deduce que las componentes de la cantidad de movimiento se comportan durante las transformaciones como las coordenadas, y la energía, como el tiempo.

La analogía que revelan las fórmulas (69.3) nos permite representar el aparato matemático de la mecánica relativista en forma de correlaciones entre los vectores en un espacio imaginario cuatridimensional (de cuatro vectores). En el § 62 ya señalamos que a semejante espacio es preciso atribuir propiedades excepcionales, diferentes de las del habitual espacio euclidiano. En el espacio tridimensional de Euclides la magnitud

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

es invariante, o sea, no varía con el giro de los ejes de coordenadas. En contraposición a esto, la magnitud

$$c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (69.4)$$

resulta ser no invariante, no se conserva al pasar de un sistema inercial de referencia a otro (semejante transición puede ser representada con el giro de los ejes en el espacio cuatridimensional). Por consiguiente, la magnitud (69.4) no posee las propiedades del cuadrado de la distancia entre dos puntos universales. Como aclaramos en el § 65, el invariante de la expresión es

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \quad (69.5)$$

que debe ser considerado como el cuadrado de la distancia entre dos puntos en el espacio cuatridimensional que nos interesa ¹⁾.

Dotando el espacio cuatridimensional de tales propiedades, podemos considerar las magnitudes ct , x , y , z como las componentes de un cuatrivector desde el origen de coordenadas al punto universal dado. En correspondencia, es posible examinar $c\Delta t$, Δx , Δy , Δz como las componentes del cuatrivector, es decir, como los desplazamientos de un punto universal a otro. En el espacio tridimensional euclidiano, además del radio vector y el vector de desplazamiento, también se consideran otros vectores (velocidad, aceleración, etc.), con la

¹⁾ Claro está, que también podemos considerar el espacio euclidiano cuatridimensional. Sin embargo, para las necesidades de la mecánica relativista es inservible.

particularidad de que para cualquier vector a la magnitud

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

es invariante. Las componentes de todo vector se transforman durante los giros de los ejes de coordenadas con ayuda de las mismas fórmulas de las coordenadas.

Los vectores cuatridimensionales pueden ser determinados por analogía con los vectores tridimensionales en el espacio euclidiano. Por vectores cuatridimensionales entendemos el conjunto de cuatro magnitudes a_t, a_x, a_y, a_z que se transforman con las mismas fórmulas que ct, x, y, z (véase la columna izquierda de las fórmulas (69.3)). El «cuadrado» de semejante vector se determina como

$$a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2. \quad (69.6)$$

A causa de que las componentes se transforman lo mismo que las coordenadas, la expresión (69.6) resulta ser invariante con relación a las transformaciones de Lorentz.

De las fórmulas (69.3) se desprende que el conjunto de magnitudes

$$E/c, p_x, p_y, p_z \quad (69.7)$$

forma un cuatrivector. Se denomina *vector de energía — cantidad de movimiento*. La expresión del tipo (69.6) formada por las componentes (69.7), como ya establecimos (véase (68.11)) es invariante:

$$(E/c)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 c^2.$$

§ 70. Interacción entre masa y energía

Haciendo uso de la masa relativista (véase (67.8)), podemos escribir la fórmula (68.7) de la forma

$$E = m_r c^2. \quad (70.1)$$

De esta correlación se desprende que la energía del cuerpo y su masa relativista son siempre proporcionales entre sí. Toda ¹⁾ variación ΔE de la energía del cuerpo se acompaña del cambio de la masa relativista del cuerpo $\Delta m_r = \Delta E/c^2$ y viceversa, toda variación de la masa relativista Δm_r es acompañada del cambio de la energía del cuerpo

$$\Delta E = c^2 \Delta m_r. \quad (70.2)$$

Esta afirmación recibe el nombre de *ley de interacción entre la masa relativista y la energía* ²⁾.

La proporcionalidad entre la masa relativista y la energía conduce a que la afirmación acerca de la conservación de masa relativista sumaria de una partícula es, ni más ni menos, que la afirmación sobre

¹⁾ Salvo la variación de la energía potencial en el campo exterior de fuerzas.

²⁾ A veces se habla de la equivalencia de la masa y la energía, teniendo en cuenta su interacción y proporcionalidad.

la conservación de la energía total sumaria, expresada con otras palabras. Por esta causa, no se suele hablar del principio de conservación de la masa relativista como de una ley aislada.

En contraposición a la masa relativista, la masa en reposo sumaria de un sistema de partículas en interacción no se conserva. Por ejemplo, durante un choque inelástico de dos partículas, que observamos en el sistema de sus centros de masas, la masa en reposo de la partícula que se formó, es igual a

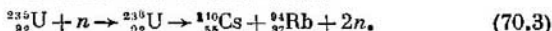
$$m_{\Sigma} = m_1 + m_2 + (T_1 + T_2)/c^2,$$

donde m_1 y T_1 son la masa en reposo y la energía cinética de la primera partícula inicial, m_2 y T_2 , la masa en reposo y la energía cinética de la segunda partícula. Por lo tanto,

$$m_{\Sigma} > m_1 + m_2.$$

En el caso que hemos considerado, la energía cinética de las partículas iniciales se convirtió en la energía interna de la partícula formada, por lo que la masa en reposo de esta partícula supera la suma de las masas en reposo de las partículas iniciales.

El funcionamiento de las centrales atomoeléctricas se basa en la reacción en cadena de fisión de los núcleos de uranio ${}_{92}^{235}\text{U}$ (o bien plutonio) al capturar neutrones lentos n ¹⁾. La fisión se realiza por diferentes procedimientos. Uno de ellos es así:



Al captar un neutrón, el núcleo de uranio se descompone formando un núcleo de cesio con número másico 140 y un núcleo de rubidio con número másico 94. Además, se liberan dos neutrones. La masa sumaria en reposo de uranio-235 y del neutrón supera en $4 \cdot 10^{-28}$ kg dicha masa para las partículas en el segundo miembro de la fórmula (70.3). La energía interna que corresponde a ese exceso de masa es igual a

$$E = c^2 \Delta m = (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-28} \approx 4 \cdot 10^{-11} \text{ J},$$

se convierte en la energía cinética de las partículas formadas (fragmentos de la fisión) y en la energía de la radiación electromagnética que surge durante la fisión.

§ 71. Partículas con masa en reposo nula

Haciendo en la fórmula (68.8) m igual a cero, obtenemos la correlación

$$E = cp. \quad (71.1)$$

Esta correlación se concuerda con (68.10) sólo en el caso cuando $v = c$. De aquí se desprende que una partícula con masa en reposo igual a cero

¹⁾ El símbolo ${}_{92}^{235}\text{U}$ designa el isótopo de uranio con número másico 235. El núcleo del átomo de este isótopo consta de 92 protones y $235 - 92 = 143$ neutrones. Con el símbolo n se designa el neutrón.

siempre se mueve a la velocidad de la luz. Entre semejantes partículas podemos nombrar el *fotón*, así como las partículas elementales llamadas *neutrino*¹⁾.

La energía del fotón se determina por la fórmula

$$E = \hbar \omega, \quad (71.2)$$

donde \hbar es la constante de Planck, ω , la frecuencia circular (véase (53.10)).

De acuerdo con las fórmulas (71.1) y (71.2), el fotón tiene una cantidad de movimiento

$$p = \frac{\hbar \omega}{c}. \quad (71.3)$$

La luz es un flujo de fotones. Al absorberse la luz o al reflejarse ésta en la superficie de cierto cuerpo, a éste se comunica una cantidad de movimiento, lo que se manifiesta en forma de la presión que ejerce sobre el cuerpo. El físico ruso P. N. Lébedev consiguió en 1900 descubrir y medir la presión de la radiación luminosa. Los resultados de las mediciones concordaban en absoluto con la fórmula (71.3).

En correspondencia con la teoría general de la relatividad, creada por A. Einstein, todo cuerpo que posee una energía E , tiene también masa gravitacional

$$m_g = \frac{E}{c^2},$$

es decir, debe gravitar hacia otros cuerpos. De acuerdo con esto, el fotón se debe comportar en un campo gravitatorio como una partícula con masa gravitacional

$$m_g = \frac{\hbar \omega}{c^2}. \quad (71.4)$$

En particular, durante un movimiento del fotón cerca de la superficie terrestre, hacia arriba por la vertical, éste debe consumir parte de su energía para realizar un trabajo contra las fuerzas de la gravedad igual a

$$A = m_g g l = \hbar \omega g l / c^2,$$

donde l es el recorrido pasado. Por esta causa, la energía inicial del fotón, igual a $\hbar \omega$, debe disminuir en

$$\Delta E = \Delta (\hbar \omega) = \hbar \omega g l / c^2,$$

de donde

$$\Delta \omega = \omega g l / c^2.$$

¹⁾ En 1980 un grupo de investigadores del Instituto de Física teórica y experimental, encabezado por V.A. Liubímov, publicó datos experimentales, de acuerdo con los que la masa del neutrino es diferente de cero y constituye, aproximadamente, $6 \cdot 10^{-33}$ kg (1/15000 de la masa del electrón). Las investigaciones de las propiedades del neutrino continúan.

Por esta razón, obtenemos el siguiente valor de la disminución relativa de la frecuencia del fotón

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{gl}{c^2}. \quad (71.5)$$

La variación de la frecuencia del fotón al propagarse por una vertical fue medida en 1960 por los científicos estadounidenses Pound y Rebck. El resultado obtenido por ellos coincidía con una precisión del 15% con el calculado por la fórmula (71.5). Cabe indicar que en las condiciones del experimento de los indicados científicos, la variación relativa de la frecuencia constituyó una magnitud insignificante igual a $2 \cdot 10^{-16}$.

El efecto de la variación de la frecuencia de la luz al alejarse de una gran masa gravitante recibe el nombre de *corrimiento gravitacional al rojo*. El sentido de esta denominación será aclarado en el tercer tomo del presente curso.

CAPÍTULO IX

HIDRODINÁMICA

§ 72. Líneas y tubos de corriente. Continuidad del flujo

Además de la mecánica del punto material y de la mecánica del sólido, que estudiamos en los capítulos anteriores, existe también la mecánica de los medios continuos. Esta ciencia abarca la hidrodinámica, dinámica de los gases, la teoría de elasticidad ¹⁾ y una serie de otras asignaturas que estudian la sustancia como un medio continuo. La hidrodinámica es la parte de la mecánica de los medios continuos en la que se estudia el movimiento de fluidos incomprensibles y la interacción de éstos con los sólidos.

Para describir el movimiento de un líquido es posible prefijar la posición de cada partícula de éste como función del tiempo. Semejante procedimiento de descripción fue confeccionado por Lagrange. Pero podemos fijar nuestra atención no en las partículas del líquido, sino en puntos aislados del espacio y registrar la velocidad a la que pasan las partículas aisladas del líquido por cada uno de los puntos prefijados. El segundo procedimiento recibe el nombre de método de Euler.

El estado del movimiento del líquido puede ser determinado indicando para cada punto del espacio el vector de velocidad como función del tiempo. El conjunto de los vectores v , prefijados para todos los puntos del espacio, forma el llamado *campo del vector de velocidad*, que puede ser representado del modo siguiente. En el líquido en movimiento tracemos líneas de forma que la tangente a ellos en cada punto coincida en sentido con el vector v (fig. 72.1). Dichas líneas reciben el nombre de *líneas de corriente*. Acordaremos trazar las líneas de corriente de tal manera que su intensidad (que caracteriza la razón entre el número de líneas ΔN y la magnitud del área ΔS por la que ellas pasan, perpendicular a las líneas) sea proporcional al valor de la velocidad en el lugar dado. Entonces, por el cuadro de las líneas de corriente podremos juzgar no sólo acerca del sentido, sino que también sobre la magnitud del vector v en diferentes puntos del espacio: allí donde la velocidad es mayor, la intensidad de las líneas será más grande y viceversa, donde la velocidad es menor, habrá menos líneas de corriente.

Como la magnitud y el sentido del vector v pueden variar respecto al tiempo en cada punto, el cuadro de las líneas de corriente puede cambiar de modo constante. Si el vector de velocidad queda constante en cada punto del espacio, la corriente recibe el nombre de *curren-*

¹⁾ Ciertos problemas de la teoría de elasticidad fueron estudiados en los §§ 14 y 25.

tilinea o estacionaria. Con este tipo de corriente, toda partícula del líquido pasa el punto dado del espacio con un mismo valor de v . Durante el movimiento estacionario, el cuadro de las líneas de corriente es invariable y, en este caso, las líneas coinciden con las trayectorias de las partículas.

La parte del líquido limitada por las líneas de corriente, denomínase *tubo de corriente*. Como el vector v es en cada punto tangente a las líneas de corriente, lo será también a las superficies del tubo de corriente, por lo que las partículas del líquido no cruzan durante su movimiento las paredes del tubo de corriente.

Tomemos la sección S del tubo de corriente (fig. 72.2) perpendicular a la dirección de la velocidad. Supongamos que la velocidad de movimiento de las partículas del líquido es igual por todos los puntos de la sección. Durante el tiempo Δt , por la sección S pasarán todas las

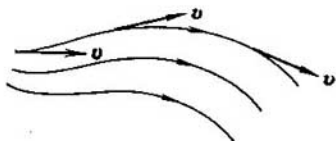


Fig. 72.1

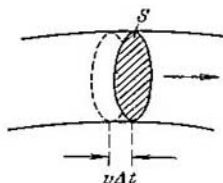


Fig. 72.2

partículas que en el momento inicial se encontraban a una distancia de S que no superaba el valor $v\Delta t$. Por lo tanto, en el transcurso del tiempo Δt por la sección S pasará un volumen del líquido igual a $Sv\Delta t$, mientras que por la unidad de tiempo por dicha sección S fluirá un volumen del líquido igual a Sv . Tomemos un tubo de corriente tan estrecho que en cada una de sus secciones la velocidad puede considerarse constante. Si el líquido es incompresible (es decir, su densidad es igual en todo lugar y no puede variar), la cantidad del líquido entre las secciones S_1 y S_2 (fig. 72.3) será invariable. De aquí se desprende que los volúmenes del líquido que pasan en la unidad de tiempo por las secciones S_1 y S_2 , deben ser iguales:

$$S_1v_1 = S_2v_2$$

(recordemos que por la superficie lateral del tubo de corriente no pasan las partículas del líquido).

El razonamiento aducido más arriba es aplicable a cualquier par de secciones S_1 y S_2 . Por consiguiente, *para un líquido incompresible la magnitud Sv en toda la sección de un mismo tubo de corriente debe ser igual:*

$$Sv = \text{const.} \quad (72.1)$$

El resultado obtenido es el contenido del teorema de *continuidad del flujo*.

De (72.1) sigue que cuando las secciones del tubo de corriente son variables, las partículas de un líquido incompresible se mueven con aceleración. En un tubo de corriente horizontal (fig. 72.4) semejante aceleración sólo puede ser condicionada por la inconstancia de la

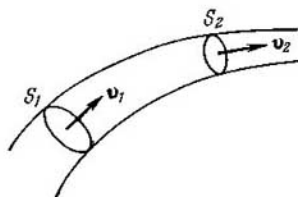


Fig. 72.3

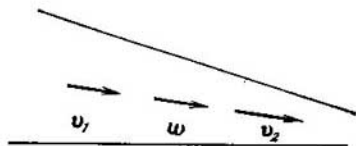


Fig. 72.4

presión a lo largo del eje del tubo, es decir, allí donde la velocidad es menor, la presión deberá ser mayor y viceversa. La ligazón cuantitativa entre la velocidad de la corriente y la presión, será establecida en el párrafo siguiente.

El teorema de continuidad de flujo es aplicable a los líquidos reales e incluso a los gases, cuando puede ser despreciada su compresibilidad. Los correspondientes cálculos muestran que durante el movimiento de los líquidos y gases a velocidades menores que la del sonido, con suficiente grado de precisión, pueden considerarse incompresibles.

§ 73. Ecuación de Bernoulli

Al estudiar el movimiento de los líquidos, podemos considerar, en muchos casos, que el desplazamiento de unas partes del líquido respecto de otras, está relacionado con el surgimiento de las fuerzas de rozamiento. Denomínase *ideal* o *perfecto* aquel líquido exento en absoluto del rozamiento interior (viscosidad).

Destaquemos en un líquido perfecto, que está en movimiento estacionario, un tubo de corriente de pequeña sección (fig. 73.1). Consideremos el volumen de líquido limitado por las paredes del tubo de corriente y por las secciones S_1 y S_2 , perpendiculares a las líneas de corriente. En el transcurso del tiempo Δt este volumen se desplaza a lo largo del tubo de corriente, con la particularidad de que la sección S_1 se desplazará a la posición S'_1 haciendo el recorrido Δl_1 ; la sección S_2 , a la posición S'_2 pasando un recorrido Δl_2 . A consecuencia de la continuidad del flujo, los volúmenes sombreados tendrán el mismo valor: $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$.

La energía de cada partícula del líquido se compone de su energía cinética y potencial en el campo de fuerzas de la gravedad terrestre. Como resultado del carácter estacionario de la corriente, la partícula que después de pasar el tiempo Δt se encontraba en cualquiera de los puntos de la parte no sombreada del volumen que estudiamos (por ejemplo, véase el punto O en la fig. 73.1) alcanza la misma velocidad (y, por consiguiente, tiene la misma energía cinética) que tenía la partícula, que se hallaba en ese mismo punto en el momento inicial de tiempo. Por esta razón, el incremento de la energía ΔE del volumen total que consideramos, puede ser calculado como la diferencia

de las energías de los volúmenes sombreados ΔV_2 y ΔV_1 .

Tomemos la sección del tubo de corriente y los segmentos Δl tan pequeños que pueda ser adjudicado a todos los puntos de cada uno de los volúmenes sombreados el mismo valor de la velocidad v , la presión p y la altura h . En tal caso, el incremento de la energía se escribirá del siguiente modo:

$$\Delta E = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right) \quad (73.1)$$

(ρ es la densidad del líquido).

Los líquidos perfectos están exentos de las fuerzas de rozamiento.

Por esta causa, el incremento de la energía (73.1) debe ser igual al trabajo que las fuerzas de presión realizan sobre el volumen destacado. Las fuerzas de presión sobre la superficie lateral, son perpendiculares en cada punto a la dirección de desplazamiento de las partículas a las que están aplicadas, por lo que no realizan trabajo alguno. Sólo es diferente de cero el trabajo de las fuerzas aplicadas a secciones S_1 y S_2 . Este trabajo es igual a

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2) \Delta V. \quad (73.2)$$

Igualando las expresiones (73.1) y (73.2), reduciendo por ΔV y pasando los términos con iguales índices a un mismo miembro de la igualdad, obtenemos:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (73.3)$$

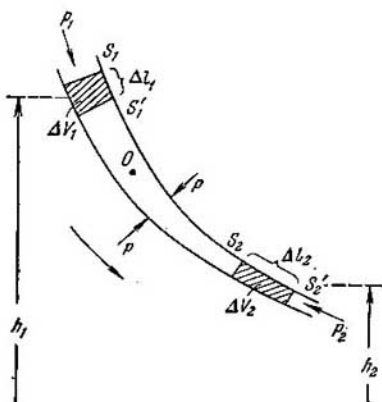


Fig. 73.1

Las secciones S_1 y S_2 fueron tomadas por completo al azar. Por esta causa, podemos afirmar que en cualquier sección del tubo de corriente la expresión $\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p$ tiene igual valor. En correspondencia con las suposiciones que hicimos al deducirla, la ecuación (73.3) será precisa en absoluto sólo cuando la sección transversal S tiende a cero, es decir, al estirar el tubo de corriente para que ésta forme una línea. Así, pues, las magnitudes p , v y h , que figuran en los miembros izquierdo y derecho de la ecuación (73.3) deben ser consideradas como que se refieren a dos puntos arbitrarios de una misma línea de corriente.

El resultado obtenido puede ser enunciado del modo siguiente: *en un líquido perfecto en movimiento estacionario a lo largo de cualquier línea de corriente, se cumple la condición*

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const.} \quad (73.4)$$

La ecuación (73.4) o bien (73.3), equivalente a la primera, recibe el nombre de *ecuación de Bernoulli*. A pesar de que dicha ecuación fue obtenida por un líquido perfecto, se cumple también con suficiente precisión para los líquidos reales, en los que el rozamiento interior no es muy grande.

Para una línea horizontal de corriente la condición (73.3) toma el aspecto

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2,$$

es decir, en aquellos puntos donde la velocidad es mayor, la presión resulta ser menor (de modo cualitativo esto ya fue mostrado en el anterior párrafo).

La disminución de la presión en los puntos donde la velocidad del flujo es mayor, sirve de base en la estructura de la bomba de chorro de agua (fig. 73.2). El chorro de agua se alimenta a un tubo comunicado con la atmósfera, de forma que en la salida de dicho tubo la presión es igual a la atmosférica. En el tubo hay un estrechamiento por el que el agua pasa a gran velocidad, por lo que la presión en dicho lugar es menor que la atmosférica. Esta misma presión se establece también en la cámara de la bomba, que cubre el tubo. Dicha cámara se comunica con el tubo por el intervalo que hay en la parte estrecha del tubo.

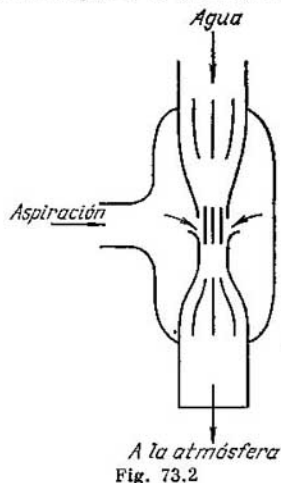


Fig. 73.2

Uniendo la cámara de la bomba con un volumen que se bombea, de él se puede evacuar el aire (o cualquier otro gas) hasta una presión de un orden de 100 mm Hg. El aire que se bombea se captura por el chorro de agua y se expulsa a la atmósfera.

§ 74. Salida de un líquido por un orificio

Apliquemos la ecuación de Bernoulli a la salida de un líquido por un pequeño orificio de un ancho recipiente abierto. Tomemos en el líquido un tubo de corriente, cuya sección tiene por un lado la superficie abierta del líquido en el recipiente y, por otro lado, el orificio por el que el líquido sale ¹⁾ (fig. 74.1). En cada una de estas secciones la velocidad y la altura sobre cierto nivel inicial pueden considerarse

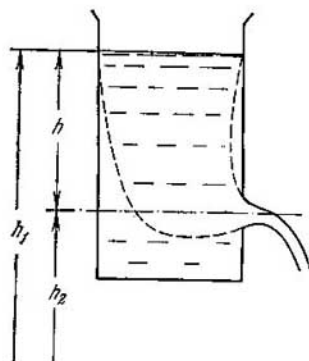


Fig. 74.1

iguales, por lo que respecto a ellas puede ser aplicada la ecuación (73.3), que fue obtenida partiendo de dicha suposición. Además, las presiones son iguales a la atmosférica en las dos secciones, es decir, son las mismas. Más aún, la velocidad de desplazamiento de la superficie abierta en el recipiente ancho puede ser tomada igual a cero. Teniendo en cuenta todo lo dicho, la ecuación (73.3), en lo que atañe al caso que examinamos, podemos escribirla en la forma

$$\rho gh_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh_2,$$

donde v es la velocidad de salida del orificio. Reduciendo ρ e intro-

duciendo $h = h_1 - h_2$, es decir, la altura de la superficie abierta del líquido sobre el orificio, obtenemos: $v^2/2 = gh$, de donde

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (74.1)$$

Esta igualdad recibe el nombre de *fórmula de Torricelli*.

Así, pues, la velocidad de salida de un líquido por un orificio, situado a la profundidad h bajo una superficie abierta, coincide con la velocidad que adquiriría cualquier cuerpo al caer de una altura h . Hay que recordar que este resultado se ha obtenido partiendo de la suposición de que el líquido es perfecto. Para los líquidos reales, la

¹⁾ Con mayor precisión, la sección del chorro en la salida del orificio. Si no se toman medidas especiales, la sección del chorro será menor que la del orificio.

velocidad de salida será menor, con la particularidad de que mientras más difiera ésta del valor (74.1), mayor será la viscosidad del líquido.

El chorro del líquido, que sale por el orificio en el recipiente (fig. 74.2), lleva consigo durante el tiempo Δt la cantidad de movimiento $\Delta K = \rho S v v \Delta t$ (ρ es la densidad del líquido, S , el área del orificio, v , la velocidad de salida del chorro). Esta cantidad de movimiento es transmitida por el recipiente al líquido que sale. De acuerdo con la tercera ley de Newton, el recipiente recibe del líquido que sale, durante un intervalo de tiempo Δt , una cantidad de movimiento igual a $-\Delta K$, es decir, sufre la acción de la fuerza

$$F_r = -\frac{\Delta K}{\Delta t} = -\rho S v v, \quad (74.2)$$

que recibe el nombre de *reacción del chorro que sale*. Si el recipiente se ubica en un carrito, bajo la acción de la fuerza F_r , éste se pondrá en movimiento en la dirección opuesta a la del chorro.

Para hallar el valor de la fuerza F_r , hagamos uso de la fórmula (74.1), que sirve para determinar la velocidad de salida del líquido por un orificio:

$$F_r = \rho S v^2 = 2gh\rho S. \quad (74.3)$$

Si la fuerza F_r , como podría parecer a primera vista, coincidiera en magnitud con la fuerza de la presión hidrostática que ejercería el líquido sobre el tapón que cerraba el orificio, F_r sería igual a $gh\rho S$. En realidad, la fuerza F_r resulta ser dos veces mayor. Esto puede ser explicado por el hecho de que la presión del líquido en el recipiente, que surge al salir el chorro, conduce a la redistribución de la presión, con la particularidad de que junto a la pared que se encuentra frente al orificio, la presión resulta en cierto grado mayor que junto a la pared en la que está el orificio.

El funcionamiento de los motores reactivos y los cohetes se basan en la reacción del chorro de gas que se expulsa. El movimiento reactivo, no necesita la atmósfera para su realización, se usa para los vuelos en el espacio cósmico.

El fundador de la teoría de las comunicaciones interplanetarias, es el eminente científico e inventor ruso K. E. Tsiolkovski (1857—1935). El científico creó la teoría del vuelo del cohete y fundamentó la posibilidad de aplicación de los aparatos de propulsión a chorro para la comunicación interplanetaria. En particular, Tsiolkovski elaboró la teoría de movimiento de los cohetes compuestos, en las que cada siguiente etapa comienza a funcionar después de que la anterior, al consumir por completo el combustible, se separa (eyecta)

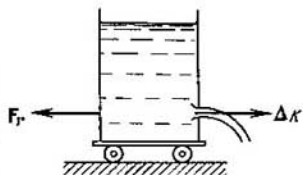


Fig. 74.2

del cohete. Las ideas de Tsiolkovski obtuvieron su posterior desarrollo y fueron realizadas por los científicos e ingenieros soviéticos que aseguraron a la Unión Soviética un papel directriz en la asimilación y estudio del espacio cósmico.

§ 75. Fuerzas de rozamiento interno

El líquido perfecto, es decir, aquel que carece de rozamiento, es una abstracción. De todos los líquidos y gases reales, en mayor o menor grado, es propia la viscosidad o rozamiento interno. La viscosidad se manifiesta en que en el movimiento que surge en un líquido o gas, después de desaparecer las causas que lo motivaron, cesa gradualmente.

Para aclarar las regularidades a las que se supeditan las fuerzas de rozamiento interno, examinemos el siguiente experimento. En

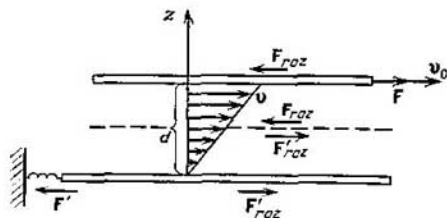


Fig. 75.1

un líquido están sumergidas dos placas paralelas entre sí (fig. 75.1), cuyas dimensiones lineales superan en mucho la distancia d entre ellas. La placa inferior está fijada en su lugar, mientras que la superior se pone en movimiento respecto de la inferior a cierta velocidad v_0 . El experimento muestra que para desplazar la placa superior a velocidad constante v_0 hay que aplicar sobre ella una determinada fuerza F de magnitud constante. Como la placa no recibe aceleración, quiere decir que dicha fuerza se equilibra por una fuerza de igual magnitud y de dirección opuesta que, según parece, es la fuerza de rozamiento que actúa sobre la placa durante el movimiento de ésta en el líquido. Designémosla por F_{roz} .

Variando la velocidad de las placas v_0 , el área de éstas S y la distancia d entre ellas, podemos obtener

$$F_{roz} = \eta \frac{v_0}{d} S, \quad (75.1)$$

donde η es un coeficiente de proporcionalidad que depende de la naturaleza y el estado (por ejemplo, de la temperatura) del líquido

y que se denomina *coeficiente de rozamiento interno* o *coeficiente de viscosidad* o simplemente viscosidad del líquido (o gas).

Al moverse la placa superior, la inferior también sufre la acción de la fuerza F'_{roz} , igual en magnitud a F_{roz} . Para que la placa inferior quede inmóvil, la fuerza F'_{roz} debe ser equilibrada con ayuda de la fuerza F' .

De este modo, al moverse una respecto a otra, dos placas sumergidas en un líquido, entre ellas surge cierta interacción caracterizada por la fuerza (75.1). La acción que las placas ejercen una sobre otra se realiza, por lo visto, a través del líquido que se encuentra entre las placas, transmitiéndose de una capa de éste a otra. Si en cualquier lugar del espacio entre las placas se traza un plano imaginario paralelo a las placas (véase la línea de trazos en la fig. 75.1), podemos afirmar que la parte del líquido que se encuentra sobre este plano actúa con una fuerza F'_{roz} sobre la parte del líquido que se halla debajo del plano, mientras que aquella parte del líquido que se halla debajo del plano, a su vez actúa en la parte del líquido sobre el plano con una fuerza F_{roz} , con la particularidad de que los valores de F_{roz} y F'_{roz} se determinan con la fórmula (75.1). Así, pues, la fórmula (75.1) determina no sólo la fuerza de rozamiento ejercida sobre las placas, sino que también la fuerza de rozamiento entre las capas en contacto del líquido.

Si estudiamos la velocidad de las partículas de un líquido en diversas capas, resultará que en la dirección z , perpendicular a las placas (fig. 75.1), ella varía según la ley lineal

$$v(z) = \frac{v_0}{d} z. \quad (75.2)$$

Las partículas del líquido que hacen contacto directo con las placas parece como si se adherieran a ellas y tuvieran la misma velocidad que las propias placas. De acuerdo con la fórmula (75.2)

$$\left| \frac{dv}{dz} \right| = \frac{v_0}{d}. \quad (75.3)$$

Hemos puesto el signo de módulo por la siguiente causa. Si hubiéramos fijado la placa superior y desplazáramos la inferior (véase la fig. 75.1) o variáramos la dirección del eje z por la opuesta, la derivada dv/dz sería negativa. Pero la magnitud v_0/d siempre es positiva. Por esta causa, para que la fórmula (75.3) siempre sea válida, hay que tomar el módulo de dv/dz .

Haciendo uso de la igualdad (75.3), podemos dar a la fórmula (75.1) el siguiente aspecto

$$F_{roz} = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S. \quad (75.4)$$

Esta fórmula determina el módulo de la fuerza de rozamiento. La magnitud $\left| \frac{dv}{dz} \right|$ muestra la rapidez de variación de la velocidad

en la dirección del eje z y es el módulo del gradiente del módulo de velocidad (si v sólo depende de z , $\partial v/\partial x = \partial v/\partial y = 0$, $\partial v/\partial z = \partial v/\partial z$).

La fórmula (75.4) ha sido obtenida para el caso cuando la velocidad varía según una ley lineal. Resulta que esta fórmula sigue también siendo justa para cualquier otra ley de variación de la velocidad de una a otra capa. En tal caso, para determinar la fuerza de rozamiento entre dos capas vecinas, hay que tomar el valor de $|dv/dz|$ en aquel lugar por donde pasa la superficie imaginaria de división (separación) de las capas.

Todo lo dicho en este párrafo se refiere no sólo a los líquidos, sino que también a los gases.

La unidad de viscosidad en el SI, es una viscosidad tal, con la que el gradiente de velocidad con módulo igual a 1 m/s por 1 m provoca la creación de una fuerza de rozamiento interno de 1 N por 1 m² de superficie de contacto de las capas. Esta unidad recibe el nombre de *pascal-segundo* (se designa Pa·s¹).

En el sistema CGS la unidad de viscosidad es el poise (P), igual a la viscosidad con la que el gradiente de velocidad con módulo equivalente a 1 cm/s por 1 cm provoca el surgimiento de una fuerza de rozamiento interno de 1 dina por 1 cm² en superficie de contacto de las capas. La unidad igual a 10⁻⁶ P denomínase micropoise (μ P). Entre el poise y el pascal-segundo existe la correlación

$$1 \text{ Pa}\cdot\text{s} = 10 \text{ P.}$$

El coeficiente de viscosidad depende de la temperatura, siendo el carácter de esta dependencia diferente de modo substancial para los líquidos y los gases. Al aumentar la temperatura, el coeficiente de viscosidad de los líquidos disminuye fuertemente y a la inversa, en los gases dicho coeficiente crece con la temperatura. La diferencia en el carácter de la conducta de η al variar la temperatura, indica la diversidad del mecanismo del rozamiento interno de los líquidos y los gases.

§ 76. Corrientes laminar y turbulenta

Existen dos tipos de corriente de los líquidos (gases). En unos casos parece como si el líquido se dividiera en capas que resbalan unas respecto de otras sin mezclarse. Semejante corriente recibe el nombre de *laminar*²⁾. Si introducimos en la corriente laminar un chorrillo colorado éste se conserva, sin difuminarse, por toda la longitud del flujo, ya que las partículas del líquido en la corriente laminar no pasan de una a otra capa. La corriente laminar es estacionaria.

Al aumentar la velocidad o las dimensiones transversales del flujo, el carácter de la corriente varía de forma substancial. Comienza

¹⁾ Denomínase pascal la unidad de presión en SI (1 Pa = 1 N/m²).

²⁾ Del latín *«laminar»*.

una enérgica mezcla del líquido. Semejante corriente se llama *turbulenta*, con la que la velocidad de las partículas en cada lugar dado varía continuamente al azar, es decir, la corriente no es estacionaria. Si en la corriente turbulenta introducimos un chorrito colorado, ya a una pequeña distancia del lugar donde fue introducido, el líquido colorado se distribuye uniformemente por toda la sección de la corriente.

El científico inglés Reynolds estableció que el carácter de la corriente depende del valor de una magnitud adimensional

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (76.1)$$

donde ρ es la densidad del líquido (o del gas), v , la velocidad media del flujo (por la sección del tubo), η , el coeficiente de viscosidad del líquido, l , una dimensión característica para la sección transversal, por ejemplo, el lado de un cuadrado cuando la sección es cuadrada, el radio o el diámetro cuando la sección es redonda, etc.

La magnitud (76.1) recibe el nombre de *número de Reynolds*. Con pequeños valores del número de Reynolds se observa la corriente laminar. A partir de cierto determinado valor de Re , llamado crítico, la corriente adquiere carácter turbulento. Si tomamos como dimensión característica de un tubo redondo su radio r , el valor crítico del número de Reynolds (que en tal caso tiene la forma $Re = \rho v r / \eta$ resulta ser aproximadamente igual a¹⁾ 1000. En el número de Reynolds entran en forma de una razón dos magnitudes que dependen de las propiedades del líquido: la densidad ρ y el coeficiente de viscosidad η . La razón

$$v = \eta / \rho \quad (76.2)$$

recibe el nombre de *viscosidad cinemática*. A diferencia de v , la magnitud η denomínase *viscosidad dinámica*. Empleando la viscosidad cinemática el número de Reynolds puede tomar el siguiente aspecto:

$$Re = vl/v. \quad (76.3)$$

El número de Reynolds puede servir de criterio de semejanza de la corriente de los líquidos en tubos, canales, etc. El carácter de la corriente de diversos líquidos (o gases) en tubos de diferentes secciones será igual en absoluto, si a cada corriente le corresponde un mismo valor de Re .

§ 77. Corriente de un líquido por un tubo redondo

Cuando un líquido se mueve por un tubo redondo, junto a las paredes de éste la velocidad será igual a cero y adquirirá su máximo valor en el eje del tubo. Suponiendo que la corriente es laminar, ha-

¹⁾ Es evidente que tomamos como l no el radio, sino el diámetro del tubo, debemos aumentar dos veces el valor crítico de Re .

Hemos la ley de variación de la velocidad con relación a la distancia r del eje del tubo.

Destaquemos un volumen cilíndrico imaginario del líquido de radio r y longitud l (fig. 77.1). Durante la corriente estacionaria, en un tubo de sección constante las velocidades de todas las partículas del líquido quedan invariables. Por lo tanto, la suma de las fuerzas externas, aplicadas a cualquier volumen del líquido, es nula. Sobre las bases del volumen cilíndrico que examinamos, actúan fuerzas de presión, cuya suma es igual a $(p_1 - p_2) \pi r^2$. Esta fuerza actúa en la dirección del movimiento del líquido. Además, sobre la

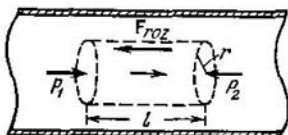


Fig. 77.1

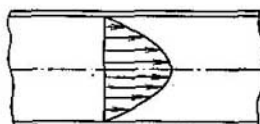


Fig. 77.2

superficie lateral del cilindro actúa la fuerza de rozamiento igual a $\eta |dv/dr| 2\pi r l$ (se trata del valor de dv/dr a una distancia r del eje del tubo). La condición del carácter estacionario tiene el aspecto

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = \eta |dv/dr| 2\pi r l. \quad (77.1)$$

La velocidad decrece con la distancia hasta el eje del tubo. Por consiguiente, dv/dr es negativa y $|dv/dr| = -dv/dr$. Tomando esto en consideración, transformemos la correlación (77.1) del modo siguiente:

$$-\frac{dv}{dr} = \frac{(p_1 - p_2) r}{2\eta l}.$$

Separando las variables, obtenemos la ecuación:

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr.$$

La integración nos da que

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C. \quad (77.2)$$

La constante de integración debe ser designada de manera que la velocidad se reduzca a cero en las paredes del tubo, es decir, con $r = R$ (R es el radio del tubo). De esta condición

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2.$$

Poniendo el valor de C en (77.2) se obtiene

$$v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (77.3)$$

El valor de la velocidad en el eje del tubo es igual a

$$v_0 = v(0) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2. \quad (77.4)$$

Tomando en consideración esto último, a la fórmula (77.3) se le puede aducir la forma

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (77.5)$$

De este modo, durante la corriente laminar la velocidad varía al cambiar la distancia desde el eje del tubo según una ley parabólica (fig. 77.2).

Con la corriente turbulenta la velocidad en cada punto varía de manera desordenada. Quedando invariables las condiciones exte-

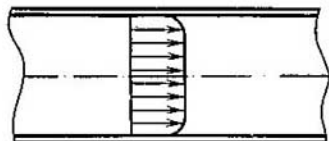


Fig. 77.3

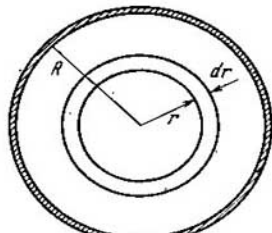


Fig. 77.4

riores, resulta ser constante la velocidad media (según el tiempo) en cada punto de la sección del tubo. El perfil de las velocidades medias con la corriente turbulenta se muestra en la fig. 77.3. Cerca de las paredes del tubo, la velocidad cambia mucho más fuertemente que con la corriente laminar, en el resto de la sección la velocidad varía menos.

Suponiendo que la corriente es laminar calculemos el flujo Q del líquido, es decir, el volumen de éste que pasa por la sección transversal del tubo por la unidad de tiempo. Dividamos la sección transversal del tubo en anillos de anchura dr (fig. 77.4). Por un anillo de radio r pasará por segundo un volumen de líquido igual al producto del área del anillo $2\pi r dr$ por la velocidad de la corriente en los puntos distanciados del eje del tubo a una longitud r . Teniendo

en cuenta la fórmula (77.5), obtenemos

$$dQ = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr. \quad (77.6)$$

Para conseguir el flujo Q hay que integrar la expresión (77.6) por r en los límites desde 0 hasta R :

$$Q = \int_0^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = \frac{1}{2} \pi R^2 v_0 = \frac{1}{2} S v_0 \quad (77.7)$$

(S es el área de la sección del tubo). De la fórmula (77.7) se desprende que con la corriente laminar el valor medio (por la sección) de la velocidad, es igual a la mitad del valor de la velocidad en el eje del tubo.

Poniendo en (77.7) el valor (77.4) de v_0 , para el flujo obtenemos la fórmula

$$Q = \frac{(p_1 - p_2) \pi R^4}{8\eta l}. \quad (77.8)$$

Esta expresión recibe el nombre de *fórmula de Poiseuille*. De acuerdo con (77.8) el flujo de un líquido es proporcional a la caída de la presión por unidad de longitud del tubo, es proporcional a la cuarta potencia del radio del tubo e inversamente proporcional al coeficiente de rozamiento del líquido. Recordemos que la fórmula de Poiseuille sólo puede ser empleada para la corriente laminar.

La correlación (77.8) se utiliza para determinar la viscosidad de los líquidos. Haciendo pasar el líquido por un capilar cuyo diámetro es conocido y midiendo la caída de la presión y el flujo Q , puede ser hallado η .

§ 78. Movimiento de sólidos en líquidos y gases

Durante el movimiento de un sólido en un líquido o un gas¹⁾, sobre éste actúan fuerzas, cuya resultante vamos a designar con la letra R (fig. 78.1). La fuerza R puede ser descompuesta en dos componentes, una de las cuales Q está dirigida en sentido opuesto al movimiento del sólido (o bien en dirección del movimiento del flujo que rodea el sólido), mientras que la segunda P es perpendicular a dicha dirección. Las componentes Q y P reciben correspondientemente el nombre de *resistencia frontal* y *fuerza de sustentación (ascensional)*. Es evidente, que sobre un sólido, simétrico respecto de la

¹⁾ Cabe señalar que a velocidad constante de movimiento del sólido respecto del líquido, la fuerza que actúa sobre el cuerpo será, de acuerdo con el principio de relatividad de Galileo, la misma que cuando el líquido se mueve con relación a un sólido inmóvil a la misma velocidad. La fig. 78.1 corresponde a este último caso.

dirección de movimiento, sólo puede actuar la resistencia frontal, en lo que se refiere a la fuerza sustentadora, en este caso ésta será nula.

Como muestran los cálculos, el movimiento uniforme de sólidos en un líquido perfecto debe transcurrir sin resistencia frontal. Como el líquido perfecto carece de viscosidad, debe deslizarse libremente por la superficie del sólido, rodeándolo por completo. En la fig. 78.2 se muestran las líneas de corriente al pasar un líquido perfecto alrededor de un cilindro muy largo («infinito»). A causa de que el líquido

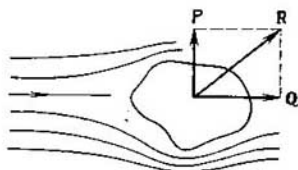


Fig. 78.1

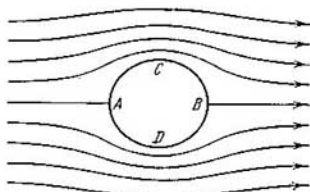


Fig. 78.2

rodea por completo el sólido, el cuadro de las líneas de corriente resulta ser simétrico en absoluto tanto respecto de una recta que pasa por los puntos *A* y *B*, como con relación a la recta que pasa por los puntos *C* y *D*. Por esta razón, la presión en el entorno de los puntos *A* y *B* será igual (y mayor que en un flujo no perturbado, ya que la velocidad junto a dichos puntos es menor); del mismo modo, junto a los puntos *C* y *D* la presión será también igual (y menor que el flujo no perturbado, ya que la velocidad junto a estos puntos es mayor). Por consiguiente, la resultante de las fuerzas de presión en la superficie del cilindro (que al no haber viscosidad podría condicionar la resistencia frontal), con evidencia, es igual a cero. Para sólidos de otras formas obtendremos el mismo resultado. De forma completamente diferente transcurren los fenómenos durante el movimiento de un sólido en un líquido que posee viscosidad. En tal caso, una capa muy fina del líquido se adhiere a la superficie del cuerpo y se mueve junto con él como un todo único, llevándose tras de sí las siguientes capas. A medida que se alejan de la superficie del cuerpo, la velocidad de las capas disminuye y, por fin, a cierta distancia de la superficie el líquido resulta estar, prácticamente, no perturbado por el movimiento del sólido, de modo que el sólido se encuentra rodeado por una capa del líquido en la que hay gradiente de velocidad. Esta capa se denomina *limite*. En ella actúan las fuerzas de rozamiento que, al fin de cuentas, resultan aplicadas al sólido y provocan el surgimiento de la resistencia frontal.

Pero la cosa no termina aquí. La frecuencia de la capa límite varía radicalmente el carácter de la corriente del líquido alrededor del sólido. El rodeo completo se hace imposible. La acción de la fuerza de rozamiento sobre la capa superficial, conduce a que el flujo se separa de la superficie del sólido, como resultado por la parte posterior del sólido se crean torbellinos o vórtices (véase la fig. 78.3, en la que está mostrado cómo un líquido viscoso rodea un cilindro). Los torbellinos son arrastrados por el flujo y se extinguen gradualmente a causa del rozamiento; con esto, la energía de los torbellinos se consume para calentar el líquido. La presión en la

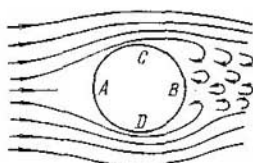


Fig. 78.3



Fig. 78.4

zona de torbellinos, creada tras el sólido, es reducida, por lo que la resultante de las fuerzas de presión será diferente de cero condicionando a su vez la resistencia frontal.

Así, pues, la resistencia frontal se compone de la resistencia de rozamiento y de la resistencia de presión. Con las dimensiones transversales dadas del sólido, la resistencia de presión depende en alto grado de la forma del sólido. Por esta causa, ésta también recibe el nombre de resistencia de la forma. Tienen la resistencia de presión mínima los sólidos bien fuselados, en forma de gota (fig. 78.4). Semejante forma se tiende a dar al fuselaje y a las alas de los aviones, a la carrocería de los automóviles, etc.

La correlación entre la resistencia de rozamiento y la resistencia de presión se determina por el valor del número de Reynolds (76.1). En el caso dado, l es cierta dimensión característica del sólido (por ejemplo, el radio de un cuerpo esférico), v , la velocidad del cuerpo respecto del líquido.

Con pequeños Re , desempeña el fundamental papel la resistencia de rozamiento, de forma que la resistencia de presión puede no tomarse en consideración. Al aumentar Re , el papel de la resistencia de presión crece en mayor grado. Con grandes valores de Re en la resistencia frontal predominan las fuerzas de presión.

Al determinar el carácter de las fuerzas que actúan sobre el sólido en el flujo, el número de Reynolds también puede ser en este caso criterio de semejanza de los fenómenos. Esta circunstancia se utiliza durante la modelación. Por ejemplo, el modelo de un avión se com-

portará en un flujo de gas de la misma manera que su prototipo, si además de la semejanza geométrica entre modelo y el avión, en ellos también se observa la igualdad de los números de Reynolds.

Fórmula de Stokes. Con pequeños Re , o sea, con grandes velocidades de movimiento (y pequeñas l ; véase (76.1)), la resistencia del medio está sólo condicionada, prácticamente, por las fuerzas de rozamiento. Stokes estableció que la fuerza de resistencia es proporcional, en tal caso, al coeficiente de viscosidad dinámica η , a la velocidad v de movimiento del sólido respecto del líquido y a la dimensión característica l del sólido: $F \sim \eta lv$ (se supone que la distancia desde el sólido hasta el límite del líquido, por ejemplo, hasta las

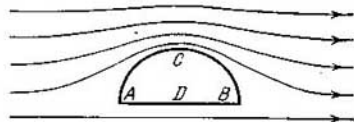


Fig. 78.5

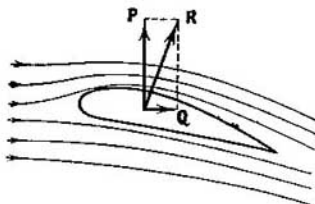


Fig. 78.6

paredes del recipiente, es mucho mayor que las dimensiones del sólido). El coeficiente de proporcionalidad depende de la forma del cuerpo. Para una esfera, si se toma en calidad de l el radio r , el coeficiente de proporcionalidad será 6π . Por consiguiente, la fuerza de resistencia al movimiento a pequeñas velocidades de la esfera en los líquidos, en correspondencia con la fórmula de Stokes, será igual a

$$F = 6\pi\eta r v. \quad (78.1)$$

Fuerza de sustentación. Para el surgimiento de la fuerza de sustentación, la viscosidad del líquido no tiene gran importancia. En la fig. 78.5 se muestran las líneas de corriente al ser rodeado un semicilindro por un líquido perfecto. A causa del rodeo completo, las líneas de corriente serán simétricas con relación a la recta CD . No obstante, respecto de la recta AB el cuadro será asimétrico. Las líneas de corrientes se condensan junto al punto C , por lo que aquí la presión será menor que junto al punto D y surge la fuerza de sustentación P . De forma análoga surge dicha fuerza en un líquido viscoso.

La fuerza que sustenta el avión en el aire es la fuerza de sustentación que actúa sobre sus alas. Durante el vuelo del avión la resistencia frontal desempeña un papel nocivo. Por esta razón, las alas y el fuselaje del avión tienen forma fuselada. Al mismo tiempo, el perfil

del ala debe asegurar una fuerza de sustentación de suficiente magnitud. El perfil óptimo del ala se muestra en la fig. 78.6, que fue creado por el eminente científico ruso N. E. Zhukovski (1847—1921). Los trabajos de Zhukovski y de su alumno S. A. Chaplignin, fueron la base de la aerodinámica contemporánea. V. I. Lenin llamó a Zhukovski «padre» de la aviación rusa. En particular, Zhukovski dedujo la fórmula para determinar la fuerza de sustentación, que es la base para todos los cálculos aerodinámicos de los aviones.

SEGUNDA PARTE

FÍSICA MOLECULAR Y TERMODINÁMICA

CAPÍTULO X

GENERALIDADES

§ 79. Física estadística y termodinámica

La física molecular es la parte de la física que estudia la estructura y las propiedades de la materia, apoyándose en las representaciones cinético-moleculares. En correspondencia con ellas, todo cuerpo: sólido, líquido o gaseoso, consta de gran cantidad de muy pequeñas partículas aisladas, es decir, de moléculas¹⁾. Las moléculas de toda sustancia se hallan en continuo movimiento desordenado, caótico, que no tiene ninguna dirección preferente. Su intensidad depende de la temperatura de la sustancia.

La demostración directa de la existencia del movimiento caótico de las moléculas es el movimiento browniano. Este fenómeno consiste en que extremadamente pequeñas partículas (visibles sólo con el microscopio) suspendidas en un líquido siempre se encuentran en constante movimiento desordenado, que no depende de causas exteriores y que es una de las manifestaciones de movimiento interior de la sustancia. Las partículas brownianas se mueven a causa de los choques desordenados de las moléculas.

La teoría cinético-molecular tiene como objetivo interpretar aquellas propiedades de los cuerpos que se observan directamente en el experimento (presión, temperatura, etc.), como el resultado sumario de la acción de las moléculas. Con esto, dicha teoría hace uso de un método estadístico, ya que interesan no las moléculas por separado, sino que sólo aquellas magnitudes medias que caracterizan el movimiento de un enorme conjunto de partículas. De aquí su segunda denominación—física estadística.

La termodinámica también se ocupa del estudio de diversas propiedades de los cuerpos y de las variaciones del estado de la sustancia. Sin embargo, a diferencia de la teoría cinético-molecular, termodinámica estudia las propiedades macroscópicas de los cuerpos y los fenómenos de la naturaleza, sin prestar atención al cuadro microscópico. Sin introducir en la consideración las moléculas y los

¹⁾ Los átomos pueden ser considerados como moléculas monoatómicas.

átomos, sin penetrar en el estudio microscópico de los procesos, la termodinámica permite llegar a una serie de conclusiones respecto de su transcurso.

La termodinámica se basa sobre varias leyes fundamentales (llamadas *principios de termodinámica*), establecidas gracias a la generalización de un gran conjunto de hechos experimentales. Por esta causa, las conclusiones de termodinámica tienen un carácter muy general.

Abordando el estudio de la variación de los estados de la sustancia desde diversos puntos de vista, la termodinámica y la teoría cinético-molecular, se completan mutuamente, formando, en realidad, un todo único.

Si echamos una mirada al desarrollo de las representaciones cinético-moleculares, cabe ante todo señalar que las representaciones acerca de la estructura atómica de la sustancia, fueron ya expresadas por antiguos griegos. Sin embargo, para ellos estas ideas no eran otra cosa que una genial suposición. En el siglo XVII la atomística de nuevo se crea, pero ya no como una suposición, sino como una hipótesis científica. Esta hipótesis obtuvo particular desarrollo en las obras del genial sabio y pensador ruso M. V. Lomonósov (1711—1765) quien intentó dar un cuadro único de todos los fenómenos físicos y químicos conocidos en su época. Con ello, él partía de la representación corpuscular (en la terminología contemporánea, molecular) de la estructura de la materia. Luchando contra la teoría del calórico (líquido térmico hipotético, cuyo contenido en el cuerpo determina el grado de su calentamiento), que en sus tiempos predominaba, Lomonósov veía «la causa del calor» en el movimiento rotativo de las partículas del cuerpo. De este modo, Lomonósov, en esencia, enunció representaciones cinético-moleculares.

Durante la segunda mitad del siglo XIX y a comienzos del XX, gracias a las obras de una serie de científicos, la atomística se convirtió en una teoría científica.

§ 80. Masa y dimensiones de las moléculas

Para caracterizar las masas de los átomos y las moléculas se aplican magnitudes que recibirán el nombre de *masa atómica relativa del elemento* (abreviado—masa atómica) y *masa molecular relativa de la sustancia* (abreviado—masa molecular)¹⁾.

Se denomina masa atómica (A_r) de un elemento químico, la razón entre la masa del átomo de este elemento y $1/12$ de la masa del átomo ^{12}C (así se designa el isótopo de carbono con número másico 12). Recibe el nombre de masa molecular (M_r) de la sustancia, la razón

¹⁾ Antes estas magnitudes se llamaban peso atómico y peso molecular.

entre la masa de la molécula de dicha sustancia y $1/12$ de la masa del átomo ^{12}C . Como se desprende de la definición las masas atómica y molecular son magnitudes adimensionales.

La unidad de masa, igual a $1/12$ de la masa del átomo ^{12}C , denomínase *unidad atómica de masa* (u.a.m.). Designemos esta unidad, expresada en kilogramos, por m_{un} . Entonces, la masa del átomo expresada en kilogramos será igual a $A_r m_{\text{un}}$ y la masa de la molécula, $M_r m_{\text{un}}$.

La cantidad de sustancia que contiene un número de partículas (átomos, moléculas, iones, electrones, etc.) igual al número de átomos en 0.012 kg del isótopo ^{12}C se denomina *mol*. También se utilizan unidades múltiples y fraccionarias: kilomol (kmol), milimol (mmol), micromol (μmol), etc.

El número de partículas que contiene un mol de la sustancia, recibe el nombre de *número de Avogadro*, que, como se ha determinado por vía experimental, es igual a

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}. \quad (80.1)$$

De este modo, por ejemplo, un mol de cobre contiene N_A átomos de cobre, un mol de agua contiene N_A moléculas de agua, un mol de electrones contiene N_A electrones, etc. ...

La masa de un mol es denominada *masa molar* M . Es evidente, que M es igual al producto de N_A por la masa de la molécula $M_r m_{\text{un}}$:

$$M = N_A M_r m_{\text{un}}. \quad (80.2)$$

En el caso del carbono ^{12}C , $M = 0,012$ kg/mol, mientras que la masa del átomo es igual a $12m_{\text{un}}$. Poniendo estos valores en la correlación (80.2) obtenemos

$$0,012 \text{ (kg/mol)} = N_A \text{ (mol}^{-1}\text{)} \cdot 12m_{\text{un}} \text{ (kg)}.$$

De aquí,

$$m_{\text{un}} \text{ (kg)} = \frac{0,001 \cdot \text{(kg} \cdot \text{mol}^{-1}\text{)}}{N_A \text{ (mol}^{-1}\text{)}} = \frac{0,001 \text{ kg}}{6,022 \cdot 10^{23}} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}. \quad (80.3)$$

Esto quiere decir, que la masa de cualquier átomo es igual a $1,66 \times 10^{-27} \cdot A_r$ kg y la masa de cualquier molécula es igual a $1,66 \cdot 10^{-27} M_r$ kg.

De (80.3) se desprende que el producto $N_A m_{\text{un}}$ es igual a $0,001$ kg/mol. Sustituyendo este valor en la fórmula (80.2), obtenemos

$$M = 0,001 \cdot M_r \text{ kg/mol} \quad (80.4)$$

o bien

$$M = M_r \text{ g/mol}. \quad (80.5)$$

Así, pues, la masa de un mol, expresada en gramos, es numéricamente igual a la masa molecular relativa. No obstante, hay que tener en cuenta que en tanto que M_r es una magnitud adimensional, M tiene la dimensión kg/mol (o g/mol).

Ahora apreciemos las dimensiones de la molécula. Es natural suponer que en los líquidos las moléculas se disponen bastante cerca unas de otras. Por esta razón, la apreciación aproximada del volumen de una molécula se puede obtener dividiendo el volumen de un mol de cierto líquido, por ejemplo el agua, por el número de moléculas en el mol N_A . Un mol (es decir, 18 g) de agua ocupa un volumen de $18 \text{ cm}^3 = 18 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$. Por lo tanto, a una molécula le corresponde un volumen igual a

$$(18 \cdot 10^{-6}) / (6 \cdot 10^{23}) = 30 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3.$$

De aquí se desprende que las dimensiones lineales de una molécula de agua son iguales, aproximadamente, a

$$\sqrt[3]{30 \cdot 10^{-30}} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 3 \text{ \AA}.$$

Las moléculas de otras sustancias también tienen dimensiones de un orden de varios angström¹⁾.

§ 81. Estado del sistema. Transformación

Llamaremos sistema de cuerpos o simplemente sistema, el conjunto de los cuerpos que consideramos. Un ejemplo de sistema puede ser un líquido y un vapor que se encuentra en equilibrio con éste. En particular, el sistema puede constar de un solo cuerpo.

Todo sistema puede estar en diferentes estados que se diferencian por la temperatura, presión, volumen, etc. Estas magnitudes, que caracterizan el estado del sistema, denominanse *parámetros de estado*.

No siempre cualquier parámetro tiene valor determinado. Por ejemplo, si la temperatura en diversos puntos del cuerpo no es igual, a este último no se le puede adjudicar un valor determinado del parámetro T . En semejante caso, el estado se denomina *de desequilibrio* (o fuera de equilibrio). Si tal cuerpo se aísla de otros cuerpos y se le deja por su propia cuenta, la temperatura se nivelará y tomará en todos sus puntos un valor igual T , es decir, el cuerpo pasa al estado de equilibrio. Este valor de T no variará hasta que no se saque el cuerpo del estado de equilibrio por un influjo del exterior.

Puede ocurrir lo mismo con otros parámetros, por ejemplo, con la presión p . Si en un recipiente cilíndrico, cerrado con un émbolo bien ajustado, se halla un gas y comenzamos a desplazar con rapidez el émbolo, por debajo de éste se crea una almohada de gas en la que la presión será mayor que el resto del volumen de gas. Esto significa, que aquí el gas no puede ser caracterizado por un valor determinado de la presión p y su estado será de desequilibrio. Sin embargo, si cesamos el desplazamiento del émbolo, la presión en diversos puntos

¹⁾ Se denomina angström (\AA) una unidad de longitud fuera de sistema igual a 10^{-10} m. En la física atómica esta unidad es muy cómoda.

del volumen se nivelará y el gas pasará al estado de equilibrio.

La transición del sistema del estado de desequilibrio al de equilibrio se llama *proceso de relajación* o simplemente *relajación*. El tiempo consumido para semejante transición denominase *tiempo de relajación*. Como tiempo de relajación se toma el tiempo necesario para que la discrepancia inicial de cierta magnitud respecto de su valor de equilibrio disminuya e veces. Cada parámetro del sistema tiene su tiempo de relajación. El mayor de estos tiempos se toma como tiempo de relajación del sistema.

Así, pues, se llama *de equilibrio* tal estado de un sistema con el que los parámetros de éste tienen determinados valores que quedan constantes el tiempo que se quiera¹⁾, cuando las condiciones externas son invariables.

Si en los ejes de coordenadas se trazan los valores de cualesquiera dos parámetros, todo estado de equilibrio del sistema puede ser representado por un punto en el plano de coordenadas (véase, por ejemplo, el punto 1 en la fig. 81.1). El estado de desequilibrio no puede ser representado de este modo, ya que en semejante estado, por lo menos uno de los parámetros no tendrá valor determinado.

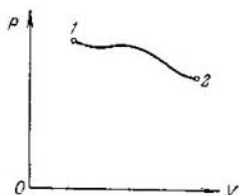


Fig. 81.1

Toda transformación, es decir, la transición del sistema de un estado a otro, está ligada con la alteración del equilibrio del sistema. Por lo tanto, cuando en un sistema transcurre cierta transformación, ésta pasa por una secuencia de estados de desequilibrio. Retornando al proceso de compresión de un gas en un recipiente cerrado con un émbolo, que más arriba ya hemos estudiado, podemos llegar a la conclusión de que la violación del equilibrio al introducir el émbolo será tanto mayor, cuanto más rápida sea la compresión del gas. Si desplazamos el émbolo con gran lentitud, el equilibrio se altera de modo insignificante y la presión en diferentes puntos poco divergirá de cierto valor medio p . En el límite, si la compresión del gas transcurre con infinita lentitud, en cada momento de tiempo el gas se caracterizará por un determinado valor de la presión. Por lo tanto, en semejante caso, el estado del gas en cada momento de tiempo es de equilibrio y la transformación infinitamente lenta estará constituida por sucesivos estados de equilibrio.

La transformación que consta de una secuencia ininterrumpida de estados de equilibrio recibe el nombre de *equilibrada* o *cuasiestática*.

¹⁾ En el caso, cuando el gas se encuentra en el campo de fuerzas externo (por ejemplo, en el campo gravitatorio), el estado de equilibrio se realizará a una presión que varía con regularidad de punto en punto (véase el § 92).

De lo dicho se desprende que sólo una transformación infinitamente lenta puede ser equilibrada. Con transcurso suficientemente lento, las transformaciones reales pueden cuan se quiera aproximarse a la equilibrada.

Una transformación equilibrada puede ser realizada en sentido opuesto, con la particularidad de que pasará por los mismos estados que con el transcurso directo, pero en sucesión inversa. Por esta razón, las transformaciones equilibradas también reciben el nombre de *reversibles*.

Una transformación reversible (es decir, equilibrada) puede ser representada en el plano de coordenadas con una curva (véase la fig. 81.1). Las transformaciones irreversibles (o sea, no equilibradas) serán representadas convencionalmente con líneas de trazos.

Si después de una serie de cambios el sistema retorna al estado inicial, semejante transformación denomínase *circular* (cerrada) o *ciclo*. En las gráficas el ciclo se representa con una curva cerrada.

En termodinámica, las nociones de estado de equilibrio y de transformación reversible desempeñan importante papel. Todas las deducciones cuantitativas en termodinámica son aplicables con rigor sólo a los estados de equilibrio y a las transformaciones reversibles.

§ 82. Energía interna del sistema

Llamamos energía interna de cualquier cuerpo, su energía de la que se ha sustraído la energía cinética del cuerpo como un todo y la energía potencial de éste en el campo exterior de fuerzas. Por ejemplo, al determinar la energía interna de cierta masa de gas no debemos tomar en consideración la energía de movimiento del gas junto con el recipiente y la energía condicionada por hallarse el gas en el campo de fuerzas de la atracción terrestre.

Es decir, en la noción de energía interna se incluyen la energía del movimiento caótico de las moléculas, la energía potencial de interacción entre ellas y la energía intramolecular¹⁾.

La energía interna de un sistema es igual a la suma de las energías internas de cada uno de los cuerpos por separado y de la energía de interacción entre los cuerpos, que de por sí es la energía de interacción intermolecular en una fina capa en la superficie de separación entre los cuerpos. Este último tipo de energía es tan pequeña, en comparación con la de los cuerpos macroscópicos, que puede ser despreciada y se considera que la energía interna de un sistema de cuerpos macroscópicos es igual a la suma de las energías internas de

¹⁾ Esta definición debe ser considerada como previa. En la física estadística la noción de energía interna se precisa. La aclaración de dicha precisión sale de los márgenes del presente manual.

los cuerpos que lo constituyen. De este modo, la energía interna es una magnitud aditiva.

La energía interna es función del estado del sistema, lo que significa que cada vez que el sistema se encuentra en el estado dado, su energía interna toma el valor propio de dicho estado, independientemente de la prehistoria del sistema. Por consiguiente, durante el paso de un sistema de un estado a otro, la variación de la energía interna siempre será igual a la diferencia de los valores de la energía interna en dichos estados independientemente del camino por el que se realizó la transición, es decir, sin que dependa de la transformación o del conjunto de transformaciones que provocaron la transición del sistema de un estado a otro.

§ 83. Primer principio de termodinámica

En lo fundamental, la energía interna puede variar a cuenta de dos transformaciones diferentes: del trabajo A' realizado sobre el cuerpo y por comunicar a éste la cantidad de calor Q . La realización de trabajo se acompaña por el desplazamiento de las fuerzas externas, ejercidas sobre el sistema. Por ejemplo, al introducir el émbolo, que cierra el recipiente con gas, éste, al moverse, efectúa sobre el gas el trabajo A' . De acuerdo con la tercera ley de Newton, el gas ejecuta sobre el émbolo un trabajo $A = -A'$.

La transmisión del calor al gas no está ligada con el desplazamiento de los cuerpos externos y, por consiguiente, no está relacionada con el trabajo macroscópico (es decir, que se refiere a todo el conjunto de moléculas de las que consta el cuerpo) que se ejerce sobre este gas. En este caso, la variación de la energía interna está condicionada porque moléculas aisladas del cuerpo más caliente realizan trabajo sobre moléculas por separado del cuerpo menos caliente. En este caso, la transmisión de energía también transcurre a cuenta de la radiación. El conjunto de las transformaciones microscópicas (o sea, que no abarcan a todo el cuerpo, sino a sus moléculas aisladas) que conducen a la transmisión de energía de uno a otro cuerpo, recibe el nombre de *transmisión de calor*.

De modo semejante a cómo la cantidad de energía que un cuerpo comunica a otro se determina por el trabajo A que se realiza entre ellos, la cantidad de energía comunicada de un cuerpo a otro mediante la transmisión de calor se determina por la *cantidad de calor* Q que uno de los cuerpos cede al otro. Así, pues, el incremento de la energía del sistema debe ser igual a la suma del trabajo A' , ejercido sobre el sistema, más la cantidad de calor Q , comunicado al sistema

$$U_2 - U_1 = Q + A'. \quad (83.1)$$

Aquí, U_1 y U_2 son los valores inicial y final de la energía interna del sistema. Generalmente, en lugar del trabajo A' , que ejercen los

cuerpos exteriores sobre el sistema, se considera el trabajo A (igual a $-A'$) que el sistema realiza sobre los cuerpos exteriores. Poniendo $-A$ en lugar de A' y resolviendo la ecuación (83.1) respecto de Q , obtenemos:

$$Q = U_2 - U_1 + A. \quad (83.2)$$

La ecuación (83.2) expresa el principio de conservación de la energía y es el contenido del *primer principio (ley) de termodinámica*. Este principio puede ser enunciado así: *la cantidad de calor comunicada al sistema se gasta en el incremento de su energía interna y en el trabajo que realizan las fuerzas del sistema aplicadas a cuerpos exteriores*.

Lo dicho no significa, de ninguna manera, que siempre que se comunica calor crece la energía interna del sistema. Puede ocurrir que aunque al sistema se le comunique calor su energía no crece, sino que decrece ($U_2 < U_1$). Entonces, de acuerdo con (83.2) $A > Q$, es decir, el sistema realiza trabajo tanto a cuenta del calor Q que recibe, como de la reserva de energía interna, cuyo decrecimiento es igual a $U_1 - U_2$. Hay que tener en cuenta que las magnitudes Q y A en (83.2) son algebraicas ($Q < 0$ quiere decir, que el sistema en realidad no recibe calor, sino que lo cede).

De (83.2) se desprende que la cantidad Q de calor se puede medir en las mismas unidades que el trabajo o la energía. En el SI la unidad de cantidad de calor es el julio.

Para medir la cantidad de calor también se utiliza una unidad especial llamada *caloría*. Una caloría es igual a la cantidad de calor necesaria para calentar 1 g de agua desde 19,5 hasta 20,5 °C. Mil calorías reciben el nombre de gran caloría o kilocaloría.

Por vía experimental ha sido establecido que una caloría equivale a 4,18 J. Por lo tanto, un julio es igual a 0,24 cal. La magnitud $I = 4,18 \text{ J/cal}$ denominase *equivalente mecánico del calor*.

Si las magnitudes que entran en (83.2), están expresadas en diversas unidades, algunas de ellas deberán ser multiplicadas por el correspondiente equivalente. Por ejemplo, al expresar Q en calorías, mientras que A y U en julios, la correlación (83.2) se escribirá así:

$$IQ = U_2 - U_1 + A.$$

En adelante, siempre vamos a suponer que Q , A y U están expresadas en iguales unidades y escribiremos la ecuación del primer principio de termodinámica en la forma (83.2).

Al calcular el trabajo que realiza el sistema o el calor recibido por éste, por regla, hay que dividir la transformación que se estudia en una serie de transformaciones elementales, cada una de las cuales corresponde a una variación muy pequeña de los parámetros del sistema (en el límite, infinitesimal). Para una transformación elemental la ecuación (83.2) toma el aspecto

$$\Delta'Q = \Delta U + \Delta'A, \quad (83.3)$$

donde $\Delta'Q$ es una cantidad elemental de calor, $\Delta'A$, un trabajo elemental, ΔU , el incremento de la energía interna del sistema durante el transcurso de la transformación elemental.

Es de gran importancia tener en cuenta que $\Delta'Q$ y $\Delta'A$ no pueden ser consideradas como los incrementos de Q y A . La magnitud que corresponde a la transformación elemental Δ de cierta magnitud f puede ser considerada como el incremento de dicha magnitud sólo en el caso de que $\sum \Delta f$, que corresponde a la transición de uno a otro estado, no depende del recorrido por el que transcurre la transición, es decir, si la magnitud f es función del estado. En lo que se refiere a la función de estado podemos hablar de su «reserva» en cada uno de los estados. Por ejemplo, es posible hablar de la reserva de energía interna que posee el sistema en diversos estados.

Más adelante veremos que la magnitud del trabajo que realiza el sistema y la cantidad de calor que él recibe, dependen del recorrido por el que el sistema pasa de un estado a otro. Por consiguiente, ni Q ni A no son funciones de estado por lo que no podemos hablar de la reserva de calor o de trabajo que el sistema posee en diversos estados.

De este modo, al símbolo Δ , que figura ante A y Q , se le aduce un sentido diferente del que tiene dicho símbolo ante U . Para remarcar este hecho, en el primer caso Δ tiene una raya. El símbolo ΔU designa el incremento de la energía interna, los símbolos $\Delta'Q$ y $\Delta'A$ no significan incremento, sino cantidad elemental de calor y trabajo elemental.

Para realizar los cálculos, en (83.3) se pasa a las diferenciales. Entonces, la ecuación del primer principio de termodinámica toma el siguiente aspecto¹⁾:

$$d'Q = dU + d'A. \quad (83.4)$$

La integración de (83.4) por toda la transformación nos conduce a la expresión

$$Q = (U_2 - U_1) + A,$$

idéntica a la ecuación (83.2).

Remarcamos una vez más que, por ejemplo, el resultado de la integración $d'A$ no puede ser escrito en la forma

$$\int_1^2 d'A = A_2 - A_1$$

Semejante anotación significaría que el trabajo que realiza el sistema es igual a la diferencia de los valores (o sea, de las reservas) de trabajo en los estados primero y segundo.

¹⁾ En la ecuación (83.4) dU es la diferencial completa, $d'Q$ y $d'A$ no son diferenciales completas (véase el § 22).

§ 84. Trabajo que realiza un cuerpo durante las variaciones de volumen

La interacción del cuerpo dado con los cuerpos que con él hacen contacto, puede ser caracterizada por la presión que el primero ejerce sobre los otros. Con ayuda de la presión es posible describir la interacción del gas con las paredes del recipiente, así como la de un sólido o líquido con el medio (por ejemplo, con un gas) que lo rodea. El desplazamiento de los puntos de aplicación de las fuerzas de interacción se acompaña de la variación de volumen del cuerpo. Por lo

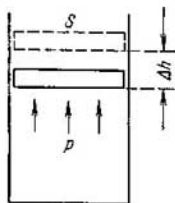


Fig. 84.1

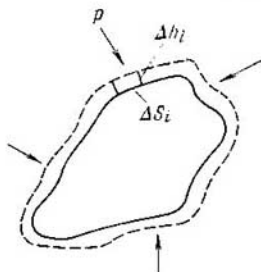


Fig. 84.2

tanto, el trabajo realizado por el cuerpo dado sobre los cuerpos exteriores, puede ser expresado por la presión y la variación del volumen del cuerpo. Con el fin de hallar esta expresión, examinemos el siguiente ejemplo.

Supongamos que un gas se encuentra en un recipiente cilíndrico cerrado con un émbolo móvil bien ajustado (fig. 84.1). Si por ciertas causas el gas comienza a dilatarse, éste desplazará el émbolo y realizará sobre él trabajo. El trabajo elemental que efectúa el gas al desplazarse el émbolo por el segmento Δh es igual a

$$\Delta' A = F \Delta h,$$

donde F es la fuerza que el gas ejerce en el émbolo. Sustituyendo esta fuerza por el producto de la presión del gas p por el área del émbolo S , obtenemos:

$$\Delta' A = p S \Delta h.$$

Pero $S \Delta h$ es el incremento del volumen del gas ΔV . Por esto, para el trabajo elemental podemos escribir:

$$\Delta' A = p \Delta V. \quad (84.1)$$

Es evidente, que la magnitud $\Delta'A$ en (84.1) es algebraica. En efecto, al comprimir el gas las direcciones del desplazamiento de Δh y de la fuerza F , con la que el gas actúa sobre el émbolo, son opuestas, por lo que el trabajo elemental $\Delta'A$ será negativo. El incremento del volumen ΔV también será aquí negativo. Así, pues, la fórmula (84.1) proporciona una expresión correcta para el trabajo con cualesquiera variaciones del volumen del gas.

Si la presión del gas queda constante (para lo que del modo correspondiente debe variar al mismo tiempo la temperatura), el trabajo que se realiza al cambiar el volumen del valor V_1 al V_2 , será igual a

$$A_{12} = p (V_2 - V_1). \quad (84.2)$$

Pero si al cambiar el volumen cambia la presión, la fórmula (84.1) sólo es válida para ΔV suficientemente pequeños. En este caso, el trabajo que se realiza con las variaciones finales del volumen, debe calcularse como la suma de los trabajos elementales de la forma (84.1), o sea, integrando:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (84.3)$$

Las expresiones halladas para el trabajo son justas con cualesquiera variaciones de volumen de los sólidos, líquidos y gases. Para cerciorarse de que esta afirmación es correcta, examinemos un ejemplo más. Tomemos un sólido de forma arbitraria sumergido en un medio líquido o gaseoso, que por todos los puntos del sólido ejerce una misma presión p (fig. 84.2). Supongamos que el sólido se dilata de forma que sectores elementales aislados de su superficie ΔS_i reciben distintos desplazamientos Δh_i . Entonces el i -ésimo sector realizará un trabajo $\Delta'A_i$ igual a $p \Delta S_i \Delta h_i$. El trabajo efectuado por el cuerpo puede ser hallado como la suma de los trabajos de sectores por separado:

$$\Delta'A = \sum \Delta'A_i = \sum p \Delta S_i \Delta h_i.$$

Sacando tras el signo de la suma la presión p , que es igual para todos los sectores, y notando que $\sum \Delta S_i \Delta h_i$ nos proporciona el incremento del volumen ΔV del cuerpo, es posible escribir: $\Delta'A = p \Delta V$, es decir, en el caso general también llegamos a la fórmula (84.1).

Representemos el proceso de variación del volumen del sólido en la gráfica (p , V) (fig. 84.3). El trabajo elemental $\Delta'A_i = p_i \Delta V_i$ corresponde al área de la estrecha banda sombreada en la gráfica. Es evidente, que el área limitada por el eje V , la curva $p = j(V)$ y las rectas V_1 y V_2 , es numéricamente igual al trabajo que se realiza al variar el volumen desde el valor V_1 hasta V_2 . El trabajo que se ejecuta durante un ciclo, es numéricamente igual al área que

limita la curva (fig. 84.4). En efecto, el trabajo en el sector 1—2 es positivo y numéricamente igual al área marcada con rayado a la derecha. En el sector 2—1 el trabajo es negativo y numéricamente igual al área marcada con rayado a la izquierda. Por lo tanto, durante el

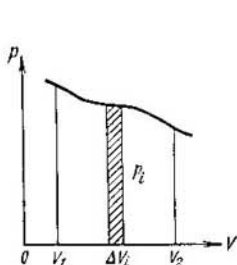


Fig. 84.3

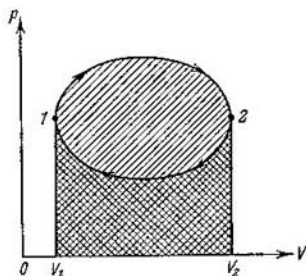


Fig. 84.4

ciclo el trabajo es igual al área abarcada por la curva y será positivo con el ciclo directo (es decir, aquel que se efectúa en dirección horaria) y negativo con el ciclo inverso.

De lo dicho en el § 81 está claro que las fórmulas que hemos obtenido pueden ser utilizadas sólo para las transformaciones reversibles.

Cabe indicar, que si hacemos uso de la expresión (84.1) (pasando a las diferenciales), la ecuación (83.4) del primer principio de termodinámica, puede ser escrita del modo siguiente:

$$d'Q = dU + p dV. \quad (84.4)$$

§ 85. Temperatura

Las siguientes consideraciones nos conducirán a la definición de la noción de temperatura. Si los cuerpos en contacto se hallan en estado de equilibrio térmico, o sea, no hay intercambio de energía por medio de la transmisión de calor, a dichos cuerpos se adjudica igual temperatura. Cuando al establecer contacto térmico entre dos cuerpos, uno de ellos transmite al otro energía por intermedio de la transmisión de calor, al primer cuerpo se le atribuye mayor temperatura que al segundo. Una serie de propiedades de los cuerpos—volumen, resistencia eléctrica, etc., depende de la temperatura. Cualquiera de estas propiedades puede ser utilizada para la determinación cuantitativa de la temperatura.

Hagamos que el cuerpo que hemos elegido para medir la temperatura (cuerpo termométrico) se encuentre en equilibrio con el hielo en fusión, atribuyendo al cuerpo la temperatura de 0° y caractericemos de forma cuantitativa aquella propiedad del cuerpo (criterio de temperatura) que vamos a utilizar para medir la temperatura. Sea que como semejante criterio hemos elegido el volumen del cuerpo y que a una temperatura de 0° es igual a V_0 . A continuación, ese mismo cuerpo se pone en equilibrio térmico con agua hirviendo a presión atmosférica, atribuyéndole en este estado un valor de la temperatura igual a 100° y determinamos el correspondiente valor V_{100} . Considerando que el criterio de temperatura (en el ejemplo que examinamos es el volumen) que hemos elegido varía con la temperatura de modo lineal, al estado con el que el cuerpo termométrico tiene un volumen V se le debe atribuir la temperatura

$$t = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} 100^\circ. \quad (85.1)$$

La escala de temperaturas que hemos establecido del modo descrito, como sabemos, recibe el nombre de escala Celsius. Una correlación análoga a (85.1) puede ser también escrita cuando para la medición de la temperatura no se toma el volumen, sino otro cualquier criterio de temperatura.

Si del modo descrito graduamos un termómetro, éste puede ser utilizado para medir la temperatura poniéndolo en equilibrio térmico con aquel cuerpo, cuya temperatura nos interesa, efectuando el registro de la magnitud del volumen.

Al comparar los termómetros en los que se emplean cuerpos termométricos de diversa naturaleza (por ejemplo, mercurio, alcohol) o diferentes criterios de temperatura (por ejemplo, el volumen y la resistencia eléctrica) advertiremos que las indicaciones de los dos termómetros, que coinciden a 0° y 100° , a causa del procedimiento de graduación, no coinciden a otras temperaturas. De aquí se desprende que para la determinación unívoca de la escala de temperaturas, hay que concordar, además del procedimiento de graduación, la elección del cuerpo termométrico y el criterio de temperatura. En el próximo párrafo relataremos cómo se ejecuta dicha elección, al establecer la llamada escala empírica de temperaturas. Adelantando los acontecimientos, indicaremos que sobre la base del segundo principio de termodinámica puede ser establecida una escala de temperaturas que no depende de las propiedades del cuerpo termométrico (véase el § 106). Dicha escala lleva el nombre de *escala termodinámica de temperaturas*.

En la técnica y la vida cotidiana se utiliza la *escala práctica termométrica internacional* del año 1968 (EPTI-68), que antes se denominaba centígrada o Celsius. En física es más cómoda la *escala absoluta*. La temperatura T registrada mediante esta escala, se rela-

ción con la temperatura t , según la escala práctica internacional, por medio de la correlación

$$T = t + 273,15.$$

La unidad de temperatura absoluta recibe el nombre de *Kelvin* (K). Antes se llamaba grado de Kelvin ($^{\circ}\text{K}$). La temperatura práctica internacional se mide en *grados Celsius* ($^{\circ}\text{C}$). El valor del kelvin y del grado Celsius es igual. La temperatura igual a 0 K denomínase *cero absoluto* y le corresponde $t = -273,15^{\circ}\text{C}$.

Más adelante (véase el § 97) mostraremos que la temperatura absoluta es proporcional a la energía cinética media del movimiento de traslación de las moléculas de la sustancia. En esto consiste el sentido físico de la temperatura absoluta.

§ 86. Ecuación de estado de un gas ideal

El estado de la masa prefijada de gas se determina por los valores de tres parámetros: la presión p , el volumen V y la temperatura T . Estos parámetros de forma regular están ligados entre sí, de manera que la variación de uno de ellos provoca el cambio de los demás. La ligazón indicada puede ser prefijada analíticamente como la función

$$F(p, V, T) = 0. \quad (86.1)$$

La correlación que determina la ligazón entre los parámetros de cierto cuerpo recibe el nombre de *ecuación de estado* de dicho cuerpo. Por lo tanto (86.1), es la ecuación de estado de la masa prefijada del gas.

Un gas en el que la interacción entre las moléculas es despreciablemente pequeña tiene las más sencillas propiedades. Semejante gas se llama *ideal* o *perfecto*. La interacción entre las moléculas de todo gas será menospreciadamente débil con gran enrarecimiento, es decir, con pequeñas densidades del gas. Con suficiente enrarecimiento, cualquier gas real se aproxima por sus propiedades a un gas ideal. Ciertos gases, tales como el aire, nitrógeno, oxígeno, incluso a condiciones normales, es decir, a temperatura ambiente y presión atmosférica, poco se diferencian de un gas ideal. En particular, por sus propiedades, el helio e hidrógeno, se aproximan a un gas ideal.

Con pequeñas densidades, los gases se supeditan con suficiente precisión a la ecuación

$$\frac{pV}{T} = \text{const.} \quad (86.2)$$

Por lo tanto, esta es la *ecuación de estado del gas ideal*.

De acuerdo con la ley establecida por Avogadro, los moles de todos los gases, a iguales condiciones (es decir, a iguales temperatura y presión), ocupan el mismo volumen. En particular, a las llamadas

condiciones normales, es decir, para 0 °C y a una presión de 1 atm ($1,01 \cdot 10^5$ Pa), el volumen de un mol de todo gas es igual a $22,4$ l/mol = $22,4 \cdot 10^{-3}$ m³/mol. De aquí se desprende que cuando la cantidad de gas es igual a un mol, la magnitud de la constante en (86.2) será igual para todos los gases. Designando por R la magnitud de la constante que corresponde a un mol, la ecuación (86.2) puede ser escrita:

$$pV_m = RT. \quad (86.3)$$

A V hemos puesto el índice «m» para mostrar que se trata del volumen que ocupa un mol de gas, con p y T prefijadas. La ecuación (86.3) es la ecuación de estado de un gas ideal, escrita para un mol.

La magnitud R denomínase *constante de los gases*. En correspondencia con la correlación (86.3) y la ley de Avogadro

$$R = \frac{pV_m}{T} = \frac{1,01 \cdot 10^5 \cdot 22,4 \cdot 10^{-3}}{273} \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3/\text{mol}}{\text{K}} = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$$

(se lee: julio por mol-kelvin)¹).

De la ecuación (86.3) para un mol, es fácil pasar a la ecuación para cualquier masa m , tomando en consideración que con iguales presión y temperatura ν moles de gas ocuparán un volumen ν veces mayor que el que ocupa un mol: $V = \nu V_m$. Multiplicando (86.3) por $\nu = m/M$ (m es la masa del gas, M , masa molar) y sustituyendo νV_m por V , obtenemos la ecuación

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (86.4)$$

Ésta es la ecuación de estado de un gas ideal escrita para una masa de gas igual a m .

Podemos dar a la ecuación (86.4) otro aspecto. Para ello introducimos la magnitud

$$k = \frac{R}{N_A} \quad (86.5)$$

(R , constante de los gases, N_A , número de Avogadro). Esta magnitud recibe el nombre de *constante de Boltzmann*. Ésta tiene un sentido físico más profundo que la constante R . En el § 97 mostraremos que k es un coeficiente de proporcionalidad entre la energía media del movimiento térmico de la molécula y la temperatura absoluta. Poniendo en (86.5) los valores numéricos de R y N_A , obtenemos

$$k = \frac{8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

¹) Para los cálculos prácticos, es cómodo en ocasiones hacer uso del valor de R en litros-atmósferas por mol-kelvin:

$$R = \frac{1 \text{ atm} \cdot 22,4 \text{ l/mol}}{273 \text{ K}} = 0,0820 \text{ l} \cdot \text{atm}/(\text{mol} \cdot \text{K}).$$

Multipliquemos y dividamos el segundo miembro de la ecuación (86.4) por N_A . Entonces dicha ecuación puede ser escrita

$$pV = \nu N_A kT.$$

El producto νN_A es igual al número de moléculas N que contiene la masa m del gas. Tomando esto en consideración, obtenemos

$$pV = NkT. \quad (86.6)$$

Ahora dividamos los dos miembros de (86.6) por V . Prestando atención a que N/V es el número de moléculas por unidad de volumen n , llegamos a la fórmula

$$p = nkT. \quad (86.7)$$

Las ecuaciones (86.4), (86.6) y (86.7) son diversas formas de anotación de la ecuación de estado de un gas ideal.

La razón entre la masa del gas y el volumen que éste ocupa proporciona la densidad del gas: $\rho = m/V$. De acuerdo con (86.4) la densidad del gas ideal

$$\rho = \frac{Mp}{RT}. \quad (86.8)$$

De este modo, la densidad de un gas ideal es razón directa de la presión e inversa de la temperatura.

La sencilla ligazón entre la temperatura y los demás parámetros del gas ideal hace atractiva su utilización como sustancia termométrica. Asegurando la constancia del volumen y haciendo uso de la presión del gas como criterio de temperatura, podemos crear un termómetro en el que la escala de temperaturas sea por completo lineal. En adelante, dicha escala recibirá el nombre de *escala ideal gaseosa de temperaturas*.

En correspondencia con un acuerdo internacional, en la práctica se toma el hidrógeno como cuerpo termométrico. La escala establecida respecto del hidrógeno, haciendo uso de la ecuación (86.4), denomínase *escala empírica de temperaturas*.

§ 87. Energía interna y capacidad calorífica de un gas ideal

La experiencia muestra que la energía interna de un gas ideal sólo depende de la temperatura:

$$U = BT. \quad (87.1)$$

Aquí, B es un coeficiente de proporcionalidad que en un extenso intervalo de temperaturas queda constante.

La falta de dependencia entre la energía interna y el volumen que ocupa el gas, indica que las moléculas de un gas ideal, la parte

aplastante de tiempo, no ejercen entre sí interacción. En efecto, si hubiera interacción entre las moléculas, en la energía interna una de las componentes sería la energía potencial de interacción, que dependería de la distancia media entre las moléculas, es decir, de $V^{1/3}$.

Señalemos, que la interacción debe tener lugar durante los choques, o sea, cuando las moléculas se aproximan a distancias muy pequeñas. Pero en un gas enrarecido semejantes choques se producen con muy poca frecuencia. La parte más grande del tiempo, las moléculas se encuentran en movimiento libre.

Recibe el nombre de *capacidad calorífica de cierto cuerpo una magnitud igual a la cantidad de calor que hay que comunicarle para aumentar su temperatura en un kelvin*. Si al comunicar al cuerpo una cantidad de calor $d'Q$, su temperatura aumenta en dT , por definición, la capacidad calorífica será igual a

$$C_{\text{cuerpo}} = \frac{d'Q}{dT}. \quad (87.2)$$

Esta magnitud se mide en julios por kelvin (J/K).

La capacidad calorífica de un mol de la sustancia, llamada *capacidad calorífica molar*, será designada con la letra mayúscula C . Se mide en julios por mol-kelvin (J/(mol·K)).

La capacidad calorífica de la unidad de masa de la sustancia denominase *calor específico*, que designaremos con la letra minúscula c . Esta magnitud se mide en julios por kilogramo-kelvin (J/(kg·K)).

Entre la capacidad calorífica molar y el calor específico de una misma sustancia existe la siguiente correlación

$$c = C/M \quad (87.3)$$

(M es la masa molar).

La magnitud de la capacidad calorífica depende de las condiciones con las que transcurrió el calentamiento del cuerpo. La capacidad calorífica ofrece el mayor interés para aquellos casos, cuando el calentamiento se realiza con volumen o presión constantes. En el primer caso dicha magnitud recibe el nombre de capacidad calorífica a volumen constante (se designa con C_V), en el segundo, capacidad calorífica a presión constante (se designa con C_p).

Si el calentamiento transcurre a volumen constante, el cuerpo no ejerce trabajo sobre los cuerpos exteriores y, por lo tanto, de acuerdo con el primer principio de termodinámica (véase (83.4)), todo el calor se dirige al incremento de la energía interna del cuerpo:

$$d'Q_V = dU. \quad (87.4)$$

De (87.4) se desprende que la capacidad calorífica de cualquier cuerpo con volumen constante es igual a

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V. \quad (87.5)$$

Semejante anotación remarca la circunstancia de que al derivar la expresión para U por T se debe considerar que el volumen es constante. Para un gas ideal U sólo depende de T , de forma que la expresión (87.5) puede tener el aspecto

$$C_V = \frac{dU_m}{dT}$$

(para obtener la capacidad calorífica molar hay que emplear la energía interna de un mol de gas).

La expresión (87.1) para un mol de gas tiene la forma $U_m = B_m T$. Derivando esta fórmula por T , tendremos que $C_V = B_m$. De este modo, la expresión para la energía interna de un mol de gas ideal es

$$U_m = C_V T, \quad (87.6)$$

donde C_V es la capacidad calorífica de un gas a volumen constante.

La energía interna de una masa de gas m tomada al azar, será igual a la energía interna de un mol multiplicada por el número de moles de gas que contiene la masa m :

$$U = \frac{m}{M} C_V T. \quad (87.7)$$

Si el calentamiento transcurre a presión constante, el gas se dilatará realizando, por lo tanto, trabajo positivo sobre los cuerpos exteriores. Así, pues, en este caso, para elevar la temperatura del gas en un kelvin hará falta más calor que al calentarlo a volumen constante, es decir, parte del calor se consumirá para que el gas ejecute trabajo. Por esta razón, a presión constante la capacidad calorífica deberá ser mayor que a volumen constante.

Escribamos la ecuación (84.4) del primer principio de termodinámica para un mol de gas:

$$d'Q_p = dU_m + p dV_m. \quad (87.8)$$

El índice p en $d'Q$ significa en esta expresión que al gas se le comunica el calor cuando p es constante. Dividiendo (87.8) por dT se obtiene la expresión para la capacidad calorífica molar de un gas a presión constante:

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + p \left(\frac{\partial V_m}{\partial T} \right)_p \quad (87.9)$$

El sumando dU_m/dT , como ya sabemos, es igual a la capacidad calorífica molar a volumen constante. Por esta razón, la fórmula (87.9)

puede escribirse de la forma siguiente:

$$C_p = C_v + p \left(\frac{\partial V_m}{\partial T} \right)_p. \quad (87.10)$$

La magnitud $(\partial V_m / \partial T)_p$ es el incremento del volumen de un mol de gas al aumentar la temperatura en un kelvin, que se produce cuando p es constante. De acuerdo con la ecuación de estado (86.3) $V_m = RT/p$. Derivando esta expresión por T , suponiendo que $p = \text{const}$, hallamos

$$\left(\frac{\partial V_m}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p}.$$

Por fin, poniendo este resultado en (87.10), tenemos

$$C_p = C_v + R. \quad (87.11)$$

Así, pues, el trabajo que realiza un mol de gas ideal al aumentar a presión constante la temperatura de un kelvin, resulta ser igual a la constante de los gases R . Cabe indicar, que la correlación (87.11) se ha hallado haciendo uso de la ecuación de estado de un gas ideal y que, por lo tanto, sólo es justa para un gas de dicho tipo.

La magnitud

$$\gamma = C_p / C_v \quad (87.12)$$

es una magnitud característica para cada gas. Para todos los gases monoatómicos esta razón es próxima a $5/3$, para los biatómicos, a $7/5$, para los triatómicos, a $4/3$, etc. Más adelante (véase el § 97) veremos que el valor de γ , se determina por el número y el carácter de los grados de libertad de la molécula.

En correspondencia con (87.11)

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v},$$

de donde

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (87.13)$$

Poniendo este valor de C_v en la fórmula (87.7), obtenemos la expresión siguiente:

$$U = \frac{m}{M} \frac{RT}{\gamma - 1}. \quad (87.14)$$

La comparación con (86.4) nos da una expresión más para la energía interna de un gas ideal:

$$U = \frac{1}{\gamma - 1} pV. \quad (87.15)$$

§ 88. Ecuación de la adiabática de un gas ideal

En el transcurso de cualquier transformación, el gas, además de supeditarse a la ecuación de estado, se somete a una condición adicional que se determina por el carácter del proceso. Por ejemplo, durante la transformación llamada *isobárica* se cumple la condición $p = \text{const.}$ Durante la transformación *isócora* se realiza la condición $V = \text{const.}$ Por fin, durante la transformación *isotérmica*, se cumple la condición $T = \text{const.}$ Para un gas ideal, la condición $T = \text{const.}$ es equivalente a la condición

$$pV = \text{const.} \quad (88.1)$$

La ecuación (88.1) recibe el nombre de ecuación de la isoterma de un gas ideal, mientras que la curva definida con esta ecuación es llamada *isoterma*.

Adiabática denominase la transformación que transcurre sin intercambio de calor con el medio circundante. Hallemos la ecuación que liga los parámetros del gas ideal durante la transformación adiabática. Pongamos en la ecuación (84.4) del primer principio de termodinámica la expresión de dU para un gas ideal:

$$d'Q = \frac{m}{M} C_V dT + p dV.$$

Como para la transformación adiabática $d'Q = 0$, debe cumplirse la condición

$$\frac{m}{M} C_V dT + p dV = 0. \quad (88.2)$$

Ahora expresemos p por intermedio de V y T , lo que corresponde a la ecuación de estado de un gas ideal:

$$p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V},$$

y pongamos esta expresión en (88.2). Como resultado, reduciendo el factor m/M diferente de cero, hallamos

$$C_V dT + RT \frac{dV}{V} = 0.$$

Transformemos la ecuación obtenida del siguiente modo:

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0.$$

Esta última correlación puede ser escrita así como

$$d \left(\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V \right) = 0,$$

de donde sigue que durante la transformación adiabática

$$\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V = \text{const.} \quad (88.3)$$

De acuerdo con (87.13) la razón R/C_V puede ser sustituida por $\gamma - 1$, donde $\gamma = C_p/C_V$. Realizando en (88.3) semejante sustitución y potenciando la expresión obtenida, llegamos a la ecuación

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.} \quad (88.4)$$

La correlación obtenida es la ecuación de la adiabática de un gas ideal en las variables T y V . De ésta, se puede pasar a la ecuación en las variables p y V , sustituyendo en ella T por p y V en correspondencia con la ecuación de estado de un gas ideal:

$$T = \frac{M}{m} \frac{pV}{R}.$$

Poniendo esta expresión en (88.4) y teniendo en cuenta que m , M y R son constantes, hallamos

$$pV^\gamma = \text{const}^1). \quad (88.5)$$

La correlación (88.5) es la ecuación de la adiabática de un gas ideal en las variables p y V . También recibe el nombre de *ecuación de Poisson*.

De la comparación de la ecuación de la adiabática (88.5) y la de la isoterma (88.1) se desprende que la adiabática es más abrupta que la isoterma. Calculemos dp/dV para una isoterma y adiabática en un mismo punto (p , V) (fig. 88.1). La derivación de la ecuación (88.1) nos ofrece

$$p dV + V dp = 0,$$

de donde obtenemos para la isoterma

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V}. \quad (88.6)$$

Después de derivar (88.5) resulta que $p\gamma V^{\gamma-1} dV + V^\gamma dp = 0$, de donde

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V}.$$

De aquí vemos que la tangente del ángulo de inclinación de la adiabática es γ veces mayor que para la isoterma.

En todos los razonamientos hemos supuesto que el estado del gas, en cada momento de tiempo, se caracteriza por determinados

¹⁾ El valor de la constante en las fórmulas (88.3) — (88.5) es evidentemente distinto.

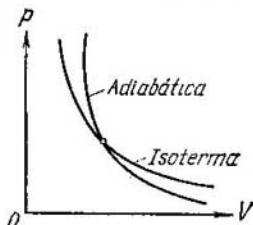


Fig. 88.1

valores de los parámetros p y T , es decir, que la transformación adiabática que estudiamos es reversible. Como ya sabemos, sólo puede ser reversible una transformación que transcurre con gran lentitud. Al mismo tiempo, como en la naturaleza no hay cuerpos que no transmitan en absoluto el calor, la cantidad de calor que el sistema cede al medio ambiente, será tanto menor, cuanto menos dure la transformación. Así, pues, sólo las transformaciones que transcurren con gran rapidez pueden ser próximas a las adiabáticas. Un ejemplo de semejante transformación puede ser la compresión y expansión que se producen en cada punto de un gas, cuando por éste se propaga una onda sonora. A pesar de que en los límites de un gran volumen, el estado del gas, en este caso, no es de ningún modo de equilibrio (p y T en diferentes puntos son diferentes), la conducta del gas en los márgenes de un volumen suficientemente pequeño se describe de modo satisfactorio por medio de la ecuación de la adiabática (88.5).

§ 89. Transformaciones politrópicas

Reciben el nombre de *politrópicas* aquellas transformaciones durante las que la *capacidad calorífica del cuerpo queda constante*. Así, pues, la condición que se cumple durante la transformación politrópica consiste en que

$$C = \text{const.} \quad (89.1)$$

Hallemos la *ecuación de la politrópica* para un gas ideal. Escribamos la ecuación del primer principio de termodinámica (84.4) para un mol de gas representando $d'Q$ como $C dT$, mientras que dU como $C_V dT$:

$$C dT = C_V dT + p dV. \quad (89.2)$$

En la ecuación obtenida entran los tres parámetros: p , V y T . Uno de ellos puede ser excluido mediante la ecuación de estado. Para obtener de inmediato la ecuación de la politrópica en las variables p y V , excluyamos T . Con este fin, derivemos la correlación $pV = RT$:

$$p dV + V dp = R dT. \quad (89.3)$$

Excluyendo de las ecuaciones (89.2) y (89.3) dT y realizando la reducción de términos semejantes, tendremos

$$(C - C_V - R) p dV + (C - C_V) V dp = 0. \quad (89.4)$$

Sustituyendo $C_V + R$ por C_p (véase (87.11)) y dividiendo (89.4) por pV , llegamos a la ecuación diferencial

$$(C - C_p) \frac{dV}{V} + (C - C_V) \frac{dp}{p} = 0. \quad (89.5)$$

Las magnitudes C , C_p , C_v son constantes. Por esto, la integración de la ecuación (89.5) conduce a la correlación

$$(C - C_p) \ln V + (C - C_v) \ln p = \text{const.} \quad (89.6)$$

Dividiendo esta correlación por $C - C_v$ (lo que es posible si $C \neq C_v$) y potenciando, resulta que

$$pV^n = \text{const.}, \quad (89.7)$$

donde

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_v}. \quad (89.8)$$

La ecuación (89.7) es la buscada ecuación de la politrópica de un gas ideal para el caso cuando $C \neq C_v$. La magnitud (89.8) denomínase *exponente de la politrópica*.

Para establecer el carácter de la transformación politrópica con $C = C_v$, apelemos a la ecuación (89.6). Con $C = C_v$ esta ecuación toma la forma $(C - C_p) \ln V = \text{const.}$, de donde sigue que V queda constante en el transcurso de la transformación. De este modo, la transformación politrópica con $C = C_v$ es isócara. Este hecho podía haber sido previsto de antemano, ya que $C_v = \text{const}$ es, ni más ni menos, que la capacidad calorífica a volumen constante, es decir, durante la transformación isócara. De acuerdo con (89.8) el exponente de la politrópica durante la transformación isócara es igual al infinito.

Las demás transformaciones consideradas en el párrafo anterior, también se refieren a las transformaciones politrópicas. A la transformación isobárica corresponde $n = 0$ (véase (89.7)), a la isotérmica,

Tabla 89.1

Transformación	n
Isobárica	0
Isotérmica	1
Adiabática	γ
Isócara	∞

$n = 1$ y, por fin, a la adiabática, $n = \gamma$. Los valores del exponente de la politrópica n para las transformaciones enumeradas se aducen en la tabla 89.1.

Resolviendo la ecuación (89.8) respecto de C , obtenemos la fórmula para la capacidad calorífica de un gas ideal durante una transformación politrópica:

$$C = \frac{nC_v - C_p}{n - 1}. \quad (89.9)$$

Poniendo en la expresión (89.9) $n = \gamma$, ésta se anula (al comprobar esta afirmación hay que tomar en consideración la fórmula (87.13)). Por lo tanto, durante una transformación adiabática, la capacidad calorífica de un gas ideal es cero, con la particularidad de que esta afirmación es justa para todos los cuerpos. Esto se desprende de que durante la transformación adiabática $d'Q = 0$, mientras que dT es diferente de cero.

Si ponemos $n = 1$, la expresión (89.9) se reduce al infinito. Así, pues, con la transformación isotérmica la capacidad calorífica es infinitamente grande. Esto se explica porque con dicha transformación $dT = 0$, en tanto que $d'Q$ se distingue de cero.

§ 90. Trabajo que realiza un gas ideal durante diversas transformaciones

El trabajo que cierto cuerpo ejerce sobre los cuerpos exteriores al pasar del estado 1 al estado 2, es igual a

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (90.1)$$

(véase (84.3)). Para realizar la integración hay que expresar p por V . Con este fin, hagamos uso de la ligazón entre p y V durante diferentes transformaciones.

La ecuación de la politrópica de un gas ideal (89.7) puede ser escrita del modo siguiente:

$$pV^n = p_1 V_1^n = p_2 V_2^n,$$

donde, p_1 , V_1 y p_2 , V_2 son los valores de la presión y el volumen del gas, correspondientemente, en los estados primero (inicial) y segundo (final), p y V , la presión y el volumen en cualquier estado intermedio. De acuerdo con esto expresemos la correlación de la presión del gas por intermedio de su volumen y de los valores de los parámetros en el estado inicial¹⁾:

$$p = p_1 V_1^n / V^n.$$

Poniendo esta expresión en (90.1), obtenemos

$$A_{12} = p_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n}. \quad (90.2)$$

¹⁾ Del mismo modo, la presión se puede expresar mediante los parámetros del estado final.

Primero, consideremos el caso cuando $n \neq 1$; entonces la integral en (90.2)

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{V_1^{n-1}} - \frac{1}{V_2^{n-1}} \right).$$

Sustituyendo este valor de la integral en (90.2) y después de ejecutar sencillas transformaciones, resulta que:

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right]. \quad (90.3)$$

La expresión obtenida puede ser transformada, haciendo uso de que fuera cual fuese la transformación que sufre el gas ideal, sus parámetros están ligados con la ecuación de estado. En particular, esto es también justo para el estado inicial:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT_1. \quad (90.4)$$

Tomando en consideración (90.4), escribamos la expresión (90.3) en la forma

$$A_{12} = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right]. \quad (90.5)$$

Las expresiones (90.3) y (90.5) nos proporcionan el trabajo que realiza el gas ideal con cualquier transformación politrópica, salvo la isotérmica (que corresponde a $n = 1$)¹⁾. En particular, con la transformación adiabática

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] \quad (90.6)$$

o bien

$$A_{12} = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (90.7)$$

Para calcular el trabajo de un gas ideal durante la transformación isotérmica, sustituyamos la presión en la fórmula (90.1) por su expresión mediante otras magnitudes, de acuerdo con la ecuación de estado. Como resultado obtenemos (como T es constante puede ser sacada tras el signo de la integral):

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Así, pues, el trabajo que durante una transformación isotérmica realiza un gas ideal

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (90.8)$$

¹⁾ Con $n = 1$ las expresiones (90.3) y (90.5) se hacen indeterminadas.

Durante una transformación isobárica, el trabajo ejercido por todo cuerpo, incluido también un gas ideal, como se desprende de (90.1), es igual a

$$A_{12} = p (V_2 - V_1). \quad (90.9)$$

Este mismo resultado se obtiene si en (90.3) n se hace igual a cero. Para finalizar, cabe señalar que con la transformación isócara el trabajo es igual a cero, lo que es justo para todos los cuerpos.

§ 91. Gas de Van der Waals

En el § 86 fue indicado que la conducta de los gases reales se describe correctamente con la ecuación

$$pV_m = RT \quad (91.1)$$

sólo con pequeñas densidades, es decir, a presiones no muy grandes y temperaturas suficientemente altas (véase (86.8)). Con el aumento de la presión y disminución de la temperatura, se observan considerables divergencias de la indicada ecuación. En la segunda columna de la tabla 91.1 se aducen los valores del producto pV para una masa

Tabla 91.1

p , atm	pV , atm·l	$(p + \frac{a'}{V^2})(V - b')$, atm·l
1	1,000	1,000
100	0,994	1,000
200	1,048	1,009
500	1,390	1,014
1000	2,069	0,893

de nitrógeno que, a condiciones normales, ocupa un volumen igual a un litro. Los valores indicados se dan para diferentes presiones y una misma temperatura de 0 °C.

En correspondencia con la ecuación (91.1), el producto pV debe quedar constante a temperatura invariable. En efecto, como vemos en la tabla, a presiones de un orden de 200 atm se observan considerables divergencias que, creciendo continuamente al aumentar la presión, alcanzan a 1000 atm más del 100%. Estas divergencias no parecen asombrosas, ya que al aumentar la densidad comienzan a desempeñar creciente papel el volumen de las moléculas y la interacción entre ellas.

Con el fin de describir la conducta de los gases en un extenso intervalo de densidades, fue propuesta gran cantidad de diferentes ecuaciones. Entre ellas, la más sencilla y que al mismo tiempo proporciona buenos resultados, resultó ser la ecuación de Van der

Waals, que se obtuvo introduciendo correcciones en la ecuación (91.1) y que tiene el aspecto siguiente:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) (V_m - b) = RT, \quad (91.2)$$

donde p es la presión que se ejerce sobre el gas del exterior (igual a la presión del gas contra las paredes del recipiente), a y b , las constantes de Van der Waals, que para diferentes gases tienen distintos valores, que se determinan por vía experimental. Si la presión está expresada en pascales y el volumen en metros cúbicos por mol, la constante a se mide en $\text{Pa} \cdot \text{m}^6/\text{mol}^2$, la constante b , en m^3/mol . A veces, la constante a se expresa en $\text{atm} \cdot \text{l}^2/\text{mol}^2$, la constante b , en l/mol .

A causa de la atracción de las moléculas entre sí, parece como si el gas se comprimiase a una presión mayor que p , que es la que ejercen sobre el gas las paredes que lo contienen. La corrección a/V_m^2 caracteriza aquella adición a la presión externa, condicionada por la atracción de las moléculas entre sí. Una notable acción de las moléculas, unas sobre otras, se realiza en los límites de pequeñas distancias, llamadas *radio de acción molecular*. La fuerza de atracción mutua de dos volúmenes elementales con dimensiones del orden de dicho radio, es proporcional tanto al número de moléculas que contiene uno de dichos volúmenes, como al número de moléculas contenidas en el otro volumen. A su vez, cada uno de estos números es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen, es decir, es razón inversa al volumen de gas. Con estas consideraciones puede ser explicado el hecho de que la corrección a la presión en (91.2) tiene el aspecto a/V_m^2 .

A causa de que las moléculas tienen volumen finito, el espacio accesible para el movimiento de éstas es menor que el volumen del recipiente V_m . La corrección b en (91.2) caracteriza aquella parte del volumen que es accesible para el movimiento de las moléculas. Es igual a varios volúmenes sumarios de las moléculas que contiene un mol de gas.

La ecuación (91.2) está escrita para un mol de gas. Para pasar a la ecuación de una masa m arbitraria, hay que tomar en consideración que ν moles de gas, a iguales condiciones, ocupan un volumen ν veces mayor: $V = \nu V_m$. Sustituyendo en (91.2) V_m por V/ν , obtenemos

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right) \left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT.$$

Multiplicando esta ecuación por ν e introduciendo las designaciones

$$a' = \nu^2 a \text{ y } b' = \nu b, \quad (91.3)$$

llegamos a la ecuación de Van der Waals para ν moles

$$\left(p + \frac{a'}{V^2}\right)(V - b') = \nu RT. \quad (91.4)$$

Con las letras a' y b' se designan las constantes de Van der Waals para ν moles. Su ligazón con a y b se da con ayuda de las correlaciones (91.3). La constante a' se mide en $\text{Pa} \cdot \text{m}^6$, la constante b' tiene la dimensión del volumen.

Hasta qué punto la ecuación de Van der Waals transmite mejor que la (91.1) la conducta de los gases, se puede juzgar por los datos de la tabla 91.1. En la tercera columna de la tabla se dan los valores de la magnitud $\left(p + \frac{a'}{V^2}\right)(V - b')$ para la misma masa de nitrógeno, para la que en la segunda columna se dan los valores de pV . Como vemos en la tabla, la ecuación de Van der Waals concuerda mucho mejor que la ecuación (91.1) con los experimentos.

En correspondencia con el hecho de que al disminuir la densidad todos los gases reales se aproximan por sus propiedades a un gas ideal, la ecuación de Van der Waals en el límite, cuando el volumen tiende al infinito, se convierte en la ecuación (91.1). Podemos cerciorarnos de esto sacando p y V del paréntesis en la ecuación (91.4):

$$pV \left(1 + \frac{1}{pV} \frac{a'}{V}\right) \left(1 - \frac{b'}{V}\right) = \nu RT$$

y tomando en consideración que el producto pV es constante aproximadamente.

Los gases reales se subordinan a la ecuación de Van der Waals sólo de forma aproximada. Un gas imaginario que por completo se supedita a la ecuación (91.2) recibe el nombre de gas de Van der Waals.

La energía interna del gas de Van der Waals debe contener, además de la energía cinética de las moléculas, la energía de interacción entre éstas. Con el fin de hallar la energía interna de un gas de Van der Waals, hagamos uso del hecho que el trabajo que se realiza durante la dilatación de un gas contra las fuerzas de la atracción recíproca de las moléculas, es igual al incremento de la energía de interacción: $d'A = dE_p$. Las fuerzas de atracción entre las moléculas se tuvieron en cuenta en la ecuación (91.2) con ayuda de una adición a la presión igual a a/V_m^2 . Correspondientemente, el trabajo contra las fuerzas de interacción entre las moléculas puede ser representado como $(a/V_m^2) dV_m$ (de modo semejante, el trabajo que realiza el gas contra las fuerzas exteriores se determina con la expresión $p dV$). Así, pues,

$$dE_p = \frac{a}{V_m^2} dV_m.$$

¹⁾ De acuerdo con (91.4) esta magnitud debe ser constante.

La integración de esta expresión nos da

$$E_p = -\frac{a}{V_m} + \text{const.} \quad (91.5)$$

La energía interna de un gas de Van der Waals depende tanto del volumen, como de la temperatura. Por lo tanto, la expresión para U_m tiene la forma

$$U_m = f(T) - \frac{a}{V_m}$$

(la constante de la expresión (91.5) ha sido incluida en $f(T)$). En el límite, cuando el volumen tiende al infinito, esta expresión debe convertirse en la (87.6) para la energía interna de un gas ideal. Por consiguiente, $f(T) = C_v T$.

Así, pues, la energía interna de un mol de gas de Van der Waals, se determina por la fórmula

$$U_m = C_v T - \frac{a}{V_m}. \quad (91.6)$$

La energía interna de ν moles será ν veces mayor:

$$U = \nu C_v T - \frac{a'}{V} \quad (91.7)$$

(hemos tenido en cuenta que $\nu^2 a = a'$ y $\nu V_m = V$). Con las fórmulas (91.6) y (91.7) se pueden hallar los valores aproximados de la energía interna de los gases reales.

§ 92. Fórmula barométrica

La presión atmosférica a cierta altura h está condicionada por el peso de las capas de gas que se encuentran más arriba. Designemos con la letra p la presión a una altura h . Entonces, la presión a la altura $h + dh$ será $p + dp$, con la particularidad de que si dh es mayor que cero, dp será menor que cero, ya que el peso de las capas superiores de la atmósfera, y, por lo tanto la presión, disminuyen. La diferencia de presiones p y $p + dp$, es igual al peso del gas contenido en el volumen de un cilindro con área de la base igual a la unidad y altura dh (fig. 92.1):

$$p - (p + dp) = \rho g dh,$$

donde ρ es la densidad del gas a la altura h . De aquí

$$dp = -\rho g dh. \quad (92.1)$$

En el § 86 se señaló que a condiciones próximas a la normales, el aire poco se diferencia por su conducta de un gas ideal. Por esta razón, la densidad del aire se puede calcular por la fórmula (86.8).

Poniendo esta expresión en (92.1), obtenemos

$$dp = -\frac{Mpg}{RT} dh. \quad (92.2)$$

La magnitud M , que entra en esta fórmula, es numéricamente igual a la masa molecular media del aire determinada tomando en consideración el contenido en por ciento de nitrógeno, oxígeno y otros gases.

De (92.2) se desprende que

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh. \quad (92.3)$$

La temperatura T es cierta función de h . Si la forma de esta función es conocida, la ecuación (92.3) puede ser integrada y hallada la de-

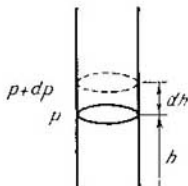


Fig. 92.1

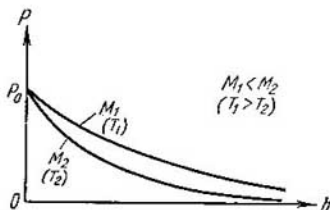


Fig. 92.2

pendencia entre p y h . En el caso, cuando la temperatura es constante, es decir, para la atmósfera isotérmica, la integración de la ecuación (92.3) conduce a la correlación

$$\ln p = -\frac{Mgh}{RT} + \ln C,$$

donde C es una constante (aquí es más cómodo designar la constante de integración por $\ln C$). La potenciación de la expresión obtenida nos permite hallar que

$$p = C \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right).$$

Poniendo aquí $h = 0$, obtenemos que $C = p_0$, donde p_0 es la presión a la altura $h = 0$.

De este modo, con la suposición que hemos hecho acerca de la constancia de la temperatura, la dependencia entre la presión y la

altura se expresa con la fórmula

$$p = p_0 \exp \left(- \frac{Mgh}{RT} \right). \quad (92.4)$$

Esta fórmula se denomina *barométrica*. De ella se deduce que la presión decrece con la altura con tanta mayor rapidez, cuanto más pesado sea el gas (cuanto mayor sea M) y cuanto más baja sea la temperatura. En la fig. 92.2 están representadas dos curvas del tipo (92.4) que pueden ser interpretadas como que corresponden a diferentes M (con iguales T) o bien que concuerdan con diversas T (con iguales M).