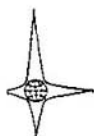


S.FRISH, A.TIMOREVA

Curso de Física General

TOMO **2**



EDITORIAL MIR

С. ФРИШ, А. ТИМОРЕВА

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ II

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

S. FRISH, A. TIMOREVA

CURSO DE FISICA GENERAL

TOMO II

TRADUCIDO DEL RUSO

Por el candidato a doctor en ciencias físicas
MANUEL GIBBERT TALENS

MOSCU

Editorial Mir

1968

CDU 530 (075.8) = 60

На испанском языке

*Impreso en la URSS
Derechos reservados*

INDICE

CUARTA PARTE ELECTROSTATICA.

Capítulo XIV. Principales fenómenos electrostáticos

§ 120.	Introducción	9
§ 121.	Cargas eléctricas	11
§ 122.	Conductores y aisladores	15
§ 123.	Campo electrostático. Ley de Coulomb	17
§ 124.	Intensidad del campo electrostático	22
§ 125.	Líneas de fuerza	27
§ 126.	Flujo eléctrico (o de las líneas de fuerza). Teorema de Ostrogradski-Gauss	29
§ 127.	Una deducción más rigurosa del teorema de Ostrogradski-Gauss	34
§ 128.	Aplicaciones del teorema de Ostrogradski-Gauss	35
§ 129.	Trabajo de las fuerzas del campo electrostático. Potencial	42
§ 130.	Superficies equipotenciales	49
§ 131.	Relación entre la intensidad del campo electrostático y el potencial	51
§ 132.	Relación entre la intensidad del campo, el potencial y la densidad volumétrica de las cargas	54
§ 133.	Conductores en el campo electrostático	56
§ 134.	Intensidad del campo en las proximidades de la superficie de un conductor	60
§ 135.	El dipolo en un campo eléctrico exterior	63
§ 136.	Capacidad eléctrica de los conductores	65
§ 137.	Energía de un sistema de cargas	69
§ 138.	Energía del campo electrostático	74

Capítulo XV. Fenómenos electrostáticos en los dieléctricos

§ 139.	Dieléctricos. Constante dieléctrica	78
§ 140.	Energía del condensador con dieléctrico. Energía del campo en el dieléctrico	81
§ 141.	Polarización dieléctrica. Vector de polarización	83
§ 142.	Intensidad del campo en el seno del dieléctrico	87
§ 143.	Fuerzas que actúan en los cuerpos cargados cuando hay dieléctricos	90
§ 144.	Vector de desplazamiento eléctrico	97
§ 145.	Determinación de los vectores E y D por las fuerzas que actúan sobre la carga	104
§ 146.	Dieléctricos dipolares. Determinación de los momentos dipolares de las moléculas	108
§ 147.	Propiedades dieléctricas de los cristales. Piezoelectricidad	111
§ 148.	Condensadores	113
§ 149.	Diferentes tipos de condensadores	116
§ 150.	Medición de la diferencia de potencial	120
§ 151.	Medición de cargas muy pequeñas. Carga del electrón	124
§ 152.	Naturaleza del campo electrostático	128

QUINTA PARTE

CORRIENTE CONTINUA

Capítulo XVI. Leyes fundamentales de la corriente continua

§	153. Corriente continua. Ley de Ohm	132
§	154. Resistencia de los conductores	134
§	155. Vector de densidad de corriente	139
§	156. Conservación de las cargas. Circuito cerrado de las corrientes estacionarias	142
§	157. Ley de Joule-Lenz	145
§	158. Medición de la intensidad de la corriente y de la diferencia de potencial	149
§	159. Resistencias y sus mediciones	154
§	160. Electrones libres en los conductores. Concepto clásico	156
§	161. Leyes de Ohm y de Joule-Lenz desde el punto de vista de la clásica teoría electrónica	160
§	162. Relación entre la conductibilidad eléctrica y la conductibilidad térmica de los metales	165
§	163. Teoría cuántica de la conductibilidad eléctrica de los metales	167
§	164. Circuito cerrado de corriente continua	172
§	165. Energía desprendida en un circuito de corriente continua	178
§	166. Ley de Ohm para el circuito heterogéneo. Ley de Kirchhoff	181
§	167. Aplicación de las ecuaciones de Kirchhoff a la solución de varios problemas	185
§	168. Diferencia de potencial de contacto	193
§	169. Pilas	200
§	170. Fenómenos termoelectrónicos	203
§	171. Semiconductores	208
§	172. Emisión de electrones por conductores incandescentes	214
§	173. Teoría de la emisión termiónica	222

Capítulo XVII. Corriente eléctrica en los electrólitos y en los gases

§	174. Conducción electrolítica	225
§	175. Leyes de Faraday	228
§	176. Disociación electrolítica	232
§	177. Energía de los iones en la solución	234
§	178. Teoría de la conducción electrolítica	236
§	179. Polarización de los electrodos	242
§	180. Aplicaciones técnicas de la electrolisis	245
§	181. Conducción electrolítica de los sólidos	248
§	182. Paso de la electricidad a través de los gases	251
§	183. Teoría de la conducción de los gases por agente ionizante	253
§	184. Determinación experimental de los coeficientes de recombinación y de movilidad de los iones gaseosos	259
§	185. Paso de la corriente electrónica a través del vacío	267
§	186. Deducción de la fórmula de Boguslavski-Langmuir. Fluctuación de la intensidad de la corriente	270
§	187. Recorrido libre de los electrones en un gas	275
§	188. Colisiones de los electrones con los átomos y con las moléculas	279
§	189. Movilidad de los electrones en el gas a baja presión	284
§	190. Conducción de los gases sin agente ionizante	288

SEXTA PARTE
FENOMENOS ELECTROMAGNETICOS

Capítulo XVIII. Campo magnético

§ 191.	El campo magnético y su característica	295
§ 192.	Representación gráfica de la excitación magnética	299
§ 193.	Determinación del campo magnético de las corrientes	305
§ 194.	Campo magnético de un conductor circular y de un solenoide recorridos por una corriente	309
§ 195.	Unidades de medición de la excitación magnética. Sistema electromagnético absoluto de unidades	314
§ 196.	Fuerzas que actúan sobre la corriente en el campo magnético. Sistema internacional de unidades eléctricas	319
§ 197.	Contorno cerrado recorrido por una corriente en un campo magnético	326
§ 198.	Circulación del vector de la excitación magnética	334
§ 199.	Aplicación de la fórmula de la circulación del vector de excitación magnética	337
§ 200.	Cuerpos magnéticos	340
§ 201.	Momentos magnéticos de las moléculas, átomos y electrones	344
§ 202.	Vector de imanación	349
§ 203.	Ferromagnetismo	354
§ 204.	Naturaleza del ferromagnetismo	361
§ 205.	Imanes permanentes	365
§ 206.	Líneas del vector de inducción magnética. Circulación del vector de inducción magnética y del vector de excitación magnética. Condiciones límites	371
§ 207.	Analogía entre los campos magnético y electrostático	377
§ 208.	Determinación de los vectores H y B en función de las fuerzas que actúan sobre un cuadro recorrido por una corriente	382
§ 209.	Diferencia entre el solenoide y el imán	385
§ 210.	Trabajo del desplazamiento de un contorno con corriente por un campo magnético	386
§ 211.	Leyes del circuito magnético	392
§ 212.	Ecuación de Kirchhoff para el circuito magnético	399
§ 213.	Instrumentos de medición	402

Capítulo XIX. Desviación de las partículas cargadas en los campos eléctrico y magnético

§ 214.	Fuerza que actúa sobre una carga que se desliza por un campo magnético	408
§ 215.	Campo magnético de una carga en movimiento	413
§ 216.	Estudio experimental del campo magnético de las cargas en movimiento	416
§ 217.	Efecto Hall	424
§ 218.	Determinación de la carga específica de los electrones	427
§ 219.	Determinación de la carga específica de los iones positivos	433
§ 220.	Aplicación técnica del haz electrónico	439

Capítulo XX. Inducción electromagnética

§ 221.	Fenómeno de inducción electromagnética	447
§ 222.	Determinación de la fuerza electromotriz de inducción	450

223.	Cantidad de electricidad transportada por la corriente inducida. Unidades de las magnitudes magnéticas en el sistema internacional	455
224.	Determinación de la fuerza electromotriz de inducción para casos particulares	460
225.	Autoinducción	463
226.	Extracorrientes de cierre y de ruptura	468
227.	Inducción mutua	471
228.	Energía del campo magnético de las corrientes	473
229.	Traabajo invertido en la histéresis	477
230.	Coefficiente de autoinducción de un cable concéntrico	479
231.	Corrientes de Foucault. Efecto pelicular	481
232.	Corriente alterna	483
233.	Potencia en el circuito de corriente alterna	488
234.	Circuito de corriente alterna con autoinducción y capacidad	491
235.	Dínamos y electromotores	498
236.	Transformadores.	501
237.	Rectificación y medición de las corrientes alternas	504
238.	Corriente trifásica	507

Capítulo XXI. Oscilaciones y ondas electromagnéticas

239.	Descarga oscilante del condensador	510
240.	Oscilaciones eléctricas forzadas	515
241.	Excitación de las oscilaciones continuas con ayuda del tubo catódico	519
242.	Corriente de desplazamiento	522
243.	Campo electromagnético	529
244.	Ecuaciones de Maxwell	531
245.	Ecuaciones de Maxwell-Lorentz	536
246.	Ondas electromagnéticas	538
247.	Velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas	542
248.	Vector de Umov-Poynting (vector de Poynting)	546
249.	Radiotecnica. Métodos modernos de excitación y registro (detección) de las ondas electromagnéticas	551

Apéndice.	Sistemas de unidades eléctricas y magnéticas	556
------------------	--	-----

	<i>Índice alfabético</i>	56
--	------------------------------------	----

CUARTA PARTA

ELECTROSTATICA

CAPITULO XIV

Principales fenómenos electrostáticos

§ 120. **Introducción.** En el s. VII a. de N. E., el filósofo griego Tales de Mileto describió la propiedad del ámbar de atraer ciertos cuerpos ligeros después de frotarlo con la lana, propiedad observada por las tejedoras. El estudio de este fenómeno lo desarrolló el médico inglés Gilbert solamente en 1600, es decir, más de dos mil años después. Gilbert observó que una propiedad análoga la adquieren el vidrio y algunas materias más, si se les frota con seda. Los cuerpos que adquirirían este estado se denominaban "electrizados" (literalmente tenía que ser "ambarizados", ya que en griego "elektron" es "ámbar").

Durante casi dos siglos, hasta finales del s. XVIII, el estudio de los cuerpos electrizados se desarrolló lentamente y se efectuaba, en general, aislado del estudio de otros fenómenos de la naturaleza. Se limitaron principalmente a electrizar los cuerpos por frotamiento y estudiar las fuerzas de acción mutua entre ellos. Esta parte de la teoría de la electricidad se denominó después *electrostática*.

En 1789 Galvani descubrió la acción fisiológica de la corriente eléctrica. Enganchando con un hilo de cobre los nervios ciáticos de una rana recién preparada y suspendiéndola de la barandilla de hierro del balcón, observó que cada vez que los músculos de la rana se ponían en contacto con la barandilla, se contraían. Aunque entonces ya se sabía que la contracción de los músculos se producía al descargar

a través de ellos cuerpos electrizados, durante mucho tiempo no se estableció la unidad de fenómenos eléctricos y se había convenido distinguir "la electricidad galvánica" y la electricidad obtenida por frotamiento. Solamente a principios del s. XIX se efectuaron una serie de grandes descubrimientos que revelaron la gran diversidad de los fenómenos eléctricos: se estudiaron las condiciones en que surgía la corriente eléctrica, se determinaron las acciones térmica y magnética de la corriente, se puso en claro la función de los dieléctricos, etc. La segunda mitad del s. XIX se caracterizó por un impetuoso desarrollo del estudio de la electricidad. Como resultado de los trabajos de Faraday y de Maxwell se estableció la unidad de los fenómenos electromagnéticos, se descubrieron las ondas electromagnéticas y se creó la teoría electromagnética de la luz.

El desarrollo de la teoría de la electricidad es de excepcional importancia: de un lado se ha aclarado la imposibilidad de reducir los fenómenos eléctricos a fenómenos mecánicos, de otro lado ha señalado la profunda relación de los fenómenos eléctricos con todos los demás procesos físicos. Con ello, el estudio de la electricidad ha facilitado el paso del materialismo mecanicista al materialismo dialéctico. Por último, no menos importancia tuvieron las aplicaciones prácticas de los fenómenos eléctricos.

Los sabios rusos desempeñaron un papel importante en el desarrollo del estudio de la electricidad. A mediados del s. XVIII, M. Lomonósov, que estudiaba junto con G. Richman los fenómenos de las tormentas, llegó a la conclusión de que la electrización del aire es debida al rozamiento de las corrientes ascendentes. Ya en 1753 M. Lomonósov emitió el juicio muy avanzado para su época, de que la electricidad es un rápido movimiento de rotación de las partículas del éter. En el mismo año de 1753, la Academia de Ciencias de Petersburgo anunció un concurso mundial de tema "Sobre la naturaleza de la fuerza eléctrica". Ganó el concurso y fue premiado en 1755 el trabajo de L. Euler, en el cual la acción mutua de los cuerpos electrizados se explicaba por las tensiones del éter. Aepinus, académico de Petersburgo, introdujo la teoría de un "fluido eléctrico", que en su tiempo tuvo gran popularidad, y fue el primero en desarrollar la teoría matemática de los fenómenos eléctricos y magnéticos. En 1803, el académico V. Petrov descubrió el arco de descarga eléctrica e indicó la posibilidad de su aplicación práctica. El mismo Petrov fue uno de los primeros en estudiar la disociación electrolítica de los líquidos al pasar por ellos una corriente eléctrica. En los años treinta y cuarenta del s. XIX, Lenz, académico de número de la Academia de Ciencias de Petersburgo y profesor de la Universidad de Petersburgo, descubrió importantes leyes que establecían la dirección de la corriente inducida y las acciones térmicas de la corriente. En la segunda mitad del s. XIX, A. Stoliétov creó el método

del estudio de las propiedades magnéticas del hierro y descubrió el efecto fotoeléctrico. En 1895, A. Popov inventó el radiotelégrafo, y unos años después P. Lébedev obtuvo ondas electromagnéticas milimétricas. A principios del siglo actual, A. Eijenvald, profesor de la Universidad de Moscú, demostró experimentalmente que las cargas en movimiento, como la corriente eléctrica, crean un campo magnético. Grandes éxitos en diferentes ramas del estudio de la electricidad alcanzaron los científicos soviéticos.

Los inventores rusos desempeñaron un importante papel en el desarrollo de la electrotecnia. B. Jacobi fue el primero que construyó el electromotor y lo aplicó para poner en movimiento una lancha y un vagón; además ideó la aplicación práctica de la electrólisis (galvanoplastia). P. Yáblochkov (Jablochkov) fue el primero en idear la aplicación práctica y útil para el alumbrado, del arco, y A. Lodyguin, la lámpara eléctrica de incandescencia. P. Yáblochkov e I. Usaguin fueron los primeros en introducir en la práctica el transformador eléctrico, y M. Dolivo-Dobrovolski, la corriente trifásica. N. Slaviánov y N. Benardós inventaron la soldadura eléctrica.

El importante lugar que la electrotecnia actual ocupa en la industria, ha determinado el gran papel que desempeña en la URSS. Esta importancia de la electrotecnia la subrayó V. Lenin en sus célebres palabras: "El comunismo es el Poder Soviético más la electrificación de todo el país". Las condiciones exclusivamente favorables para el desarrollo de la ciencia y de la técnica que se han creado después de la Gran Revolución Socialista de Octubre, han originado un acelerado ritmo de electrificación de la URSS y nuevos y enormes éxitos en el estudio de la electricidad y aplicación práctica de los fenómenos eléctricos. El plan económico prevé un amplio desarrollo ulterior de la construcción de centrales eléctricas de diferentes tipos (hidroeléctricas, termoeléctricas y electronucleares) y el empleo de la energía eléctrica en todas las ramas de la economía soviética.

§ 121. Cargas eléctricas. En correspondencia con el desarrollo histórico del estudio de la electricidad, empezaremos con la característica de la electrización y con las leyes de acción recíproca de los cuerpos electrizados. Como ya se ha dicho, esta parte del estudio de la electricidad se denomina electrostática. Los experimentos realizados a principios del s. XVIII demostraron que la electricidad puede ser de dos y solamente de dos clases: la que por sus cualidades coincide con la del vidrio al frotarlo con la piel (y que se denomina *positiva*), y la que coincide con la de la piel al ser frotada por el vidrio (y que se denomina *negativa*). Los cuerpos igualmente electrizados (por ejemplo, positivamente), se repelen; los electrizados de

distinta clase, se atraen. Al ponerse en contacto los cuerpos, la electricidad pasa de unos a otros.

El cuerpo electrizado posee una carga que sirve de característica métrica de la electrización del cuerpo. La definición de carga se dará más adelante.

En la naturaleza hay cuerpos que conducen libremente la electricidad, denominados conductores, y otros que no la conducen, denominados aisladores.

El grado de electrización se puede determinar por las fuerzas de acción recíproca entre los cuerpos electrizados. Para determinar cualitativamente la electrización se pueden utilizar, por ejemplo, dos esferas ligeras suspendidas de dos hilos bastante largos (fig. 1).

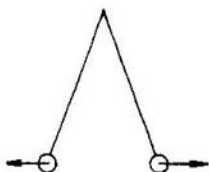


Fig. 1. Acción recíproca de esferas electrizadas.

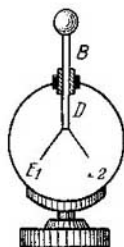


Fig. 2. Electroscopio de paves (de hojas).

Si la electricidad de las esferas es del mismo signo, entre ellas surgen fuerzas de repulsión y las esferas se separan, tanto más cuanto mayor sea la electrización. En la práctica se utilizan aparatos especiales, *electroscopios*, uno de los cuales viene representado en la fig. 2.

El electroscopio de la fig. 2 está construido de la siguiente manera: al alambre metálico D se le han unido por abajo dos delgadas láminas (hojas) de aluminio, E_1 y E_2 ; el alambre y las láminas se introducen en el interior de una caja metálica*) a través de un tapón de ebonita B . Esta caja tiene unas ventanillas para observar el comportamiento de las láminas. Si al alambre D se le comunica una carga eléctrica poniéndolo en contacto con un cuerpo electrizado, las láminas de aluminio se electrizan y se separan repeliéndose. Según sea la separación, se puede determinar el grado de electrización.

*) La función de esta caja se indicará más adelante (véase las págs 58—59)

Para determinar cuantitativamente el grado de electrización, el electroscopio debe llevar una escala graduada. En este caso, el aparato se denomina "indicador eléctrico" o *electrómetro*. El primer electrómetro lo ideó y construyó G. Richman en 1745 cuando observaba junto con M. Lomonósov la electrización originada por las descargas eléctricas de las tormentas. Esquemáticamente, la representación del "indicador eléctrico" de G. Richman viene en la fig. 3, en la cual g es una varilla metálica suspendida verticalmente. A esta varilla se ha fijado un extremo de un hilo de seda f . Al electrizarse, el hilo se separa de la varilla y el grado de su separación se puede determinar en el cuadrante de madera graduado ab .

El electrómetro moderno construido según el esquema de Richman, viene representado en la fig. 4. Al electrizar la varilla D , la

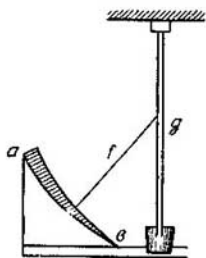


Fig. 3. Electrómetro de G. Richman.

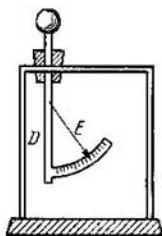


Fig. 4. Electrómetro.

lámmina de aluminio E se separa de la varilla fija D ; la magnitud de la separación, que depende del grado de electrización, la determina la escala.

Un fenómeno muy importante que ayuda a comprender el proceso de electrización de los cuerpos, es el siguiente: si a un cuerpo electrizado, por ejemplo, positivamente, se le empieza a electrizar negativamente, su estado de electrización disminuirá al principio, luego desaparecerá por completo, y solamente después de todo esto, el cuerpo empezará a electrizarse negativamente. De esto se deduce que las *cargas de diferente signo se compensan mutuamente*. Este hecho sugirió la hipótesis de que en los cuerpos no cargados siempre hay cargas pero solamente de signo contrario y en una cantidad tal, que sus acciones se compensan completamente. Un cuerpo que posea excedente de cargas positivas, estará cargado positivamente. El que posea excedente de cargas negativas, estará negativamente cargado. Al electrizar los cuerpos por frotamiento, se electrizan los dos cuerpos: uno positiva y el otro, negativamente. De esto se llega a la con-

clusión de que las cargas no se crean ni desaparecen, sino que solamente se pueden trasladar de un cuerpo a otro o de un lugar a otro en el interior del cuerpo dado. Esta deducción conocida con el nombre de principio (*ley*) de la conservación de la carga eléctrica, es fundamental en el estudio de la electricidad y lo confirman numerosos hechos, y uno de ellos es la *electrización por influencia o inducción electrostática* descubierta por Aepinus.

El fenómeno de inducción electrostática consiste en lo siguiente: si a un conductor aislado *B* se le acerca un cuerpo cargado *A* (fig. 5.a), en el conductor surgen cargas de manera que en la parte más cercana al cuerpo *A* las cargas son de signo contrario a las del cuerpo *A*, y en la parte más alejada, del mismo signo. Al alejar el cuerpo *A*, las cargas del conductor desaparecen. Sin embargo, si antes de alejar el cuerpo *A* se divide el conductor *B* en dos partes (fig. 5.b), las cargas se conservarán en estas partes después de alejar el cuerpo *A*. Esto se explica fácilmente si se supone que en el conductor *B* hay siempre cargas de ambos signos, positivas y negativas, y estas cargas (o por lo menos las de un mismo signo) se pueden desplazar libremente por el conductor. En este caso, al acercarle al conductor

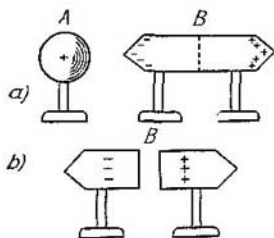


Fig. 5. Electrización por influencia. (Inducción electrostática).

B el cuerpo *A* cargado positivamente, las cargas negativas del conductor *B* serán atraídas, y las positivas, repelidas; por lo tanto, en los extremos del conductor *B* la electrización será de distinto signo. Al alejar el cuerpo cargado *A*, dejan de actuar sobre el conductor *B* las fuerzas exteriores, las cargas "se mezclan" y el conductor *B*, en todas sus partes es de nuevo neutro. Mas si el conductor *B* se corta cuando el cuerpo cargado *A* aún se halla cerca del mismo, después de alejarlo ya no pueden "mezclarse" las cargas en el conductor *B*, y ambas partes del conductor *B* quedarán electrizadas. Se puede comprobar fácilmente que las cargas que se han conservado en estas mitades del conductor *B* son de igual magnitud, ya que después de ponerlas en contacto, el conductor *B* queda neutro.

La existencia de dos cargas de diferente signo y su conservación en un cuerpo neutro eléctricamente, se puede considerar establecida.

La primera teoría de los fenómenos eléctricos, que surgió a mediados del siglo XVIII, sugería la existencia de un fluido eléctrico especial. Después surgió la teoría de dos fluidos eléctricos: positivo y negativo. El académico Aepinus desarrolló la teoría de un fluido

eléctrico que él consideraba positivo. Según la teoría de Aepinus, el exceso de este fluido en los cuerpos hace que se hallen electrizados positivamente, y su escasez, que se hallen electrizados negativamente. A fines del siglo pasado se estableció que existía una carga eléctrica elemental, y que los átomos y las moléculas solamente podían adquirir cargas múltiplos de esta carga elemental. Luego se estableció que esto era debido a la existencia de partículas elementales que llevaban una carga negativa completamente determinada e . Esta partícula se denominó *electrón*. Como se demostrará luego, el electrón se caracteriza, no sólo por tener determinada carga negativa e , sino que además, posee una masa determinada m , y una serie de otras características físicas (como momento de rotación y momento magnético). Este complicado carácter de la naturaleza del electrón es una de las más valiosas confirmaciones del materialismo dialéctico, el cual considera que el mundo es de diversidad inagotable. V. I. Lenin escribía: "El electrón es tan inagotable como el átomo".*)

La masa del electrón es aproximadamente $\frac{1}{1840}$ veces menor que la del átomo más ligero, la del hidrógeno.

Según las nociones actuales (véase el t. III), el electrón entra como parte componente de todos los átomos; la parte central de los átomos se denomina *núcleo atómico* y tiene una carga positiva, casi toda la masa del átomo se concentra en su núcleo. En la actualidad se ha establecido que existen electrones positivos (denominados *positrones*), pero solamente se observan en condiciones especiales y por ahora no los estudiaremos.

§ 122. Conductores y aisladores. Como se ha dicho, la experiencia demuestra que todos los cuerpos se dividen en dos clases: 1) en cuerpos que conducen la electricidad, denominados *conductores*, y 2) en cuerpos que no la conducen, denominados *no conductores*, *aisladores* o *dieléctricos*. Los conductores se dividen en conductores de primera clase (o conductores electrónicos) y conductores de segunda clase (o electrofíticos). El transporte de cargas eléctricas en los conductores de primera clase no acarrea ninguna variación en su naturaleza química ni sensible traslación de la sustancia. El transporte de las cargas eléctricas en los conductores de segunda clase acarrea cambios químicos que llevan a un desprendimiento de las sustancias componentes en los lugares de contacto con otros conductores. A los conductores de primera clase pertenecen todos los metales: los conductores de segunda clase son las sales fundidas,

*) V. I. Lenin, *Materialismo y empiriocriticismo*, Ediciones Pueblos Unidos, Uruguay, 1948, pág. 292.

soluciones salinas, ácidas y alcalinas. Los aisladores son los cristales de las sales, los aceites, el aire, el vidrio, la porcelana, la ebonita, el caucho, el ámbar y otras sustancias.

En la actualidad se distinguen, además, los *semiconductores*. Estos cuerpos poseen una pequeña, pero sensible, conductibilidad eléctrica y otras propiedades que permiten agruparlos aparte. En el presente se ha establecido un determinado punto de vista sobre la naturaleza de los conductores y de los dieléctricos.

En los metales (conductores de primera clase), parte de los electrones se desplaza libremente por entre los átomos. En los metales no cargados, las cargas de los electrones que se desplazan libremente, se compensan por las cargas positivas unidas a la armazón de la red cristalina del metal. La electrización del conductor se reduce a la variación del número de electrones que entran en él: en la electrización negativa, se añaden al conductor electrones de fuera; en la electrización positiva, se le quita parte de electrones, lo cual empieza a notarse por no hallarse completamente compensada la carga positiva de los núcleos atómicos.

En la electrización por influencia (inducción), los electrones se desplazan, atraídos o repelidos por la carga exterior, a un extremo del conductor; en este extremo se produce un exceso de electrones, lo cual origina la electrización negativa; en el extremo opuesto del conductor, debido a la falta de electrones, aparece una carga positiva no compensada.

Los electrones de todas los metales son iguales, por eso su desplazamiento no está relacionado con la variación de la composición química del conductor de primera clase. La masa de los electrones es tan pequeña, que en las electrizaciones que se consiguen prácticamente, no se puede percibir variación alguna de la masa del conductor por haber variado el número de electrones que contiene *).

En los conductores de segunda clase no hay electrones libres, pero hay átomos o moléculas con deficiencia o exceso de electrones. Estos átomos o moléculas cargados se denominan *iones*. El desplazamiento de las cargas en los conductores de segunda clase es debido al traslado de iones, con lo cual se explican los cambios químicos que se producen en los conductores de segunda clase.

Los *dieléctricos*, no conductores de electricidad, son de moléculas en que hay cantidades iguales de cargas positivas y negativas, o de iones que no pueden desplazarse libremente por el interior del dieléctrico. Bajo la acción de las fuerzas eléctricas, las cargas del dieléctrico solamente se desplazan un poco o varían su orientación. Por ejemplo, un modelo de dieléctrico puede ser una sustancia en que van unidas por parejas cargas de distinto signo (moléculas po-

*). Véase el cálculo en la pág. 126

lares) orientadas arbitrariamente (fig. 6.a) de manera que el dieléctrico, tanto en su conjunto como por partes, es neutro. Si al dieléctrico se le acerca un cuerpo cargado, las cargas del dieléctrico no se desplazan, sino que solamente se orientan de una misma manera (fig. 6, b), a saber: hacia el extremo del dieléctrico al cual se acerca el cuerpo cargado, se orientan las de signo contrario al del cuerpo, y hacia el extremo opuesto, las del mismo signo que el del cuerpo. Este estado del dieléctrico se denomina *polarización (dieléctrica)*. Este estado es diferente al de electrización de los conductores por inducción.

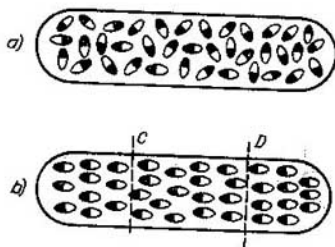


Fig. 6. Polarización del dieléctrico.

Si el dieléctrico polarizado se divide en varias partes, por ejemplo, por las líneas D y C (fig. 6,b), cada parte por separado y en su totalidad será neutra, y solamente en la superficie habrá cargas de uno u otro signo.

Si las fuerzas eléctricas son muy grandes, las moléculas del dieléctrico pueden destruirse y el dieléctrico se hace conductor. Este fenómeno se denomina *perforación* del dieléctrico.

§ 123. Campo electrostático. Ley de Coulomb. La ley fundamental de la electrostática es la ley de la acción recíproca de las cargas. Al principio, la acción recíproca de las cargas se consideraba análoga a la ley de la gravitación universal, considerando que las fuerzas eléctricas y las de la gravitación universal eran cierta "acción a distancia" sin que desempeñase papel alguno el espacio intermedio. En la realidad, sin embargo, las cargas originan en el espacio circundante ciertos cambios físicos (lo mismo que las masas que gravitan), los cuales se revelan ante todo en que sobre cualquiera otra carga que se aloje a cierta distancia de las que examinamos, actuarán también fuerzas. Sin meternos a examinar por ahora la naturaleza de estos cambios, diremos que cuando las cargas están en

reposo, en el espacio circundante se forma un *campo electrostático*.

La acción recíproca de dos cargas, por ejemplo, reside en lo siguiente: cada carga crea en el espacio que la rodea, un campo, y este campo actúa sobre la otra carga con una fuerza determinada.

El campo electrostático es un aspecto peculiar de la materia; transmite la acción de unos cuerpos electrizados a otros. Las propiedades del campo se estudian basándose en las leyes a que se subordinan las fuerzas que actúan sobre las cargas de parte del campo.

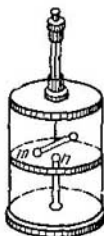


Fig. 7. Balanza de torsión de Coulomb.

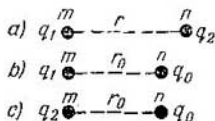


Fig. 8. Comparación deargas. (Ley de Coulomb).

Como la acción recíproca de los cuerpos cargados depende de sus formas y dimensiones, para establecer la ley de acción recíproca se examina el comportamiento de las llamadas cargas puntuales. *Se entiende por cargas puntuales los cuerpos cargados cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con la distancia entre los mismos.* Está claro que cualquier cuerpo cargado se puede considerar como un conjunto de cargas puntuales.

La ley de la acción recíproca de dos cargas puntuales la estableció experimentalmente Coulomb en 1785. La ley de Coulomb comprende al mismo tiempo la definición de magnitud de carga.

Coulomb realizó todas sus mediciones en el aire, pero rigurosamente hablando, la expresión de la ley de Coulomb que se estudia en este párrafo, se refiere al vacío, es decir, al espacio en que no hay una cantidad perceptible de átomos, moléculas u otras partículas.

Coulomb estableció la ley de acción recíproca de las cargas puntuales basándose en las mediciones realizadas con una *balanza de torsión* (fig. 7). La construcción de esta balanza es la siguiente: en el interior de un gran recipiente de vidrio hay una palanca o aguja de vidrio suspendida de un hilo fino; en uno de los extremos de la palanca hay una esfera metálica *m* y en el otro, un contrapeso. Una segunda esfera metálica *n* se fija en una varilla — soporte de

vidrio. Desde el exterior se pueden comunicar cargas eléctricas a ambas esferas, cargas que éstas retienen por cierto tiempo, ya que las esferas están aisladas una de la otra y de los cuerpos que las rodean. La distancia entre las esferas m y n se puede variar girando la cabeza de la balanza a la cual se fija el hilo que mantiene a la palanca con la esfera m . Al comunicarles cargas a las esferas m y n , éstas empiezan a atraerse o a repelerse (según el signo de las cargas), con lo cual la palanca con la esfera m gira cierto ángulo. Haciendo girar la cabeza de la balanza se puede hacer volver la esfera m a la posición inicial, en cuyo caso el momento de torsión del hilo será igual al momento de la fuerza eléctrica aplicada a la esfera m . Si el hilo se ha graduado de antemano, se puede determinar directamente, según el ángulo de giro de la cabeza, el momento de la fuerza, y sabiendo la longitud de la palanca, se determina la fuerza de acción recíproca de las esferas.

El razonamiento que nos conduce a la ley de Coulomb, es el siguiente. Ante todo, las observaciones indican que las fuerzas de acción recíproca de las cargas van dirigidas según la recta que une las cargas. Si las cargas son de un mismo signo, como se ha indicado en el § 124, estas fuerzas son de repulsión, y si las cargas son de signo contrario, las fuerzas son de atracción. Variando la distancia r entre las esferas m y n , a las cuales se les ha comunicado unas cargas invariables (fig. 8,a), como demuestra la experiencia, las fuerzas de acción recíproca varían en razón inversa al cuadrado de la distancia r .

Para comparar las magnitudes de dos cargas q_1 y q_2 medimos las fuerzas f_1 y f_2 de acción recíproca de estas dos cargas con una tercera carga determinada q_0 colocándolas consecutivamente a una misma distancia r_0 de esta tercera carga q_0 (fig. 8,b y 8,c). Para ello le comunicamos consecutivamente a la esfera m las cargas q_1 y q_2 , y la carga de la esfera n la conservamos invariable e igual a q_0 . La experiencia demuestra que la relación f_1/f_2 de las fuerzas no depende de la magnitud q_0 de la tercera carga, ni de la distancia r_0 a que se colocan las cargas q_1 y q_2 de esta tercera carga. Por lo tanto, el valor de la relación f_1/f_2 de las fuerzas lo determinan solamente las propias cargas q_1 y q_2 . De aquí que sea natural el tomar la relación q_1/q_2 de las cargas igual a la relación f_1/f_2 de las fuerzas. De esta manera obtenemos el método para medir la relación q_1/q_2 de dos cargas.

Los valores absolutos de las cargas solamente se pueden obtener después de establecer la *unidad de medición* de las cargas, lo cual se hará un poco más adelante.

Disponiendo del método de comparación de las cargas, podemos colocar a pares y a la misma distancia r una de otra, diferentes cargas q_1, q_2, q_3, \dots . En este caso, según enseña la experiencia, la fuerza

de acción recíproca f entre un par de cargas es proporcional al producto de sus magnitudes $q_1 \cdot q_2$.

De esta manera ya podemos formular definitivamente la ley de Coulomb: *la fuerza f de acción recíproca entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las magnitudes de las cargas q_1 y q_2 e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r entre ellas:*

$$f = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1)$$

donde k es el coeficiente de proporcionalidad.

Si anotamos las cargas positivas con el signo $(+)$ y las negativas con el signo $(-)$, el resultado que se obtenga con un valor negativo de la fuerza, corresponderá a la fuerza de atracción, y el de valor positivo, a la de repulsión.

La ley de Coulomb (1) puede escribirse en forma vectorial. Tracemos desde la carga puntual q_1 (fig. 9) a la carga puntual q_2 un vector r . La fuerza f que actúa sobre la carga q_2 , será igual, según la (1), a la magnitud $k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ y dirigida en el mismo sentido que el radio vector r , si los signos de ambas cargas q_1 y q_2 son iguales (la fig. 9 se refiere a este caso), y en sentido contrario al radio vector r , si los signos de las cargas q_1 y q_2 son diferentes. Por eso obtendremos el valor de



Fig. 9. Dirección y sentido del radio vector.

la fuerza f , en magnitud y en dirección, multiplicando la magnitud $k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ por el vector unidad r/r , de dirección igual a la del radio vector r . De esta manera, la ley de Coulomb en forma vectorial se escribirá:

$$\mathbf{f} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1a)$$

Para establecer la unidad cegesimal de la carga suponemos igual a la unidad el coeficiente de proporcionalidad k de la ley de Coulomb:

$$f = \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

De aquí obtenemos que *en el sistema CGS por unidad de carga se toma la de una carga puntual que repele a otra carga de igual valor y del mismo signo colocada a la distancia de 1 cm., con una fuerza de 1 dina.* Esta unidad se llama *unidad electrostática absoluta de carga*.

En el estudio de la electricidad las unidades eléctricas establecidas fundándose en el sistema *CGS* y las leyes de electrostática se denominan *unidades electrostáticas absolutas* y se designan con las siglas *CGSE* (sistema *CGS* electrostático).

Debido a lo pequeña que es la unidad electrostática, en el sistema internacional de unidades de ahora (véase el t. I) se toma por unidad una carga que es $c/10$ veces mayor que la unidad de carga del sistema *CGSE*, donde c es la llamada *constante electrodinámica* (véase el § 196). Esta unidad se denomina *culombio*. Como la constante electrodinámica c con alto grado de aproximación se puede considerar igual a $3 \cdot 10^{10}$ cm/seg, tenemos que:

$$1 \text{ culombio} = 3 \cdot 10^9 \text{ unidades } CGSE \text{ de carga.}$$

Las dimensiones de la carga en el sistema *CGSE* las obtenemos de la fórmula (1):

$$[q^2] = [f] \cdot [r^2],$$

de donde

$$[q] = [f^{1/2}] \cdot L = M^{1/2} \cdot L^{3/2} \cdot T^{-1}.$$

Aduzcamos un ejemplo de determinación de las fuerzas de acción recíproca de dos cuerpos cargados.

Ejemplo. Dos pequeñas esferas que se hallan en un campo de fuerzas de gravedad y de 0,1 g de masa cada una, están suspendidas de los hilos l de 25 cm (fig. 10). Después de haberles comunicado a las esferas una misma carga, las esferas se han separado a la distancia $r = 5$ cm. Determinar las cargas comunicadas en unidades del sistema *CGSE* y en culombios.

Solución. La fuerza de repulsión de las esferas es:

$$f = \frac{q^2}{r^2},$$

donde q es la carga comunicada a cada esfera. El equilibrio se alcanzará cuando la fuerza F , resultante de la de repulsión f y de la de la gravedad $P = mg$, vaya dirigida según el hilo. De la fig. 10 tenemos que:

$$f = P \cdot \operatorname{tg} \alpha = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

si el ángulo α es pequeño, se puede considerar que la $\operatorname{tg} \alpha$ es aproximadamente igual al $\operatorname{sen} \alpha$, pero

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{r}{2l}, \text{ de donde } f = \frac{mgr}{2 \cdot l}.$$

Iguando este valor de f con q^2/r^2 , tenemos que

$$\frac{q^2}{r^2} = \frac{mgr}{2 \cdot l},$$

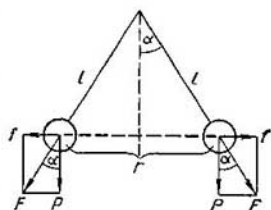


Fig. 10. Fuerzas que actúan sobre esferas electrizadas.

que nos da el resultado buscado de

$$q = r \sqrt{\frac{mgr}{2 \cdot l}} = 5 \sqrt{\frac{0,1 \cdot 981 \cdot 5}{2 \cdot 25}} \text{ CGSE} = 15,6 \text{ CGSE.}$$

Y calculando en culombios tenemos:

$$q = \frac{15,6}{3 \cdot 10^9} \text{ C} = 5,2 \cdot 10^{-9} \text{ C.}$$

Del resultado obtenido se ve que el culombio es una unidad muy grande y los valores de las cargas que se observan en la electrización corriente de los cuerpos son partes muy pequeñas de culombio.

§ 124. **Intensidad del campo electrostático.** Como ya se ha indicado en el § 123, toda carga origina un campo electrostático en el espacio que la rodea. El estudio de las propiedades del campo se puede realizar colocando en él *cargas puntuales* y observando las fuerzas que actúan sobre ellas, suponiendo que *estas cargas son tan pequeñas, que no varían ni la magnitud ni la disposición de las que forman el campo.* De la ley de Coulomb se deduce que en una carga positiva q situada en un punto del campo actúa una fuerza f proporcional a la magnitud de la carga q . La magnitud y dirección de esta fuerza las determinan la magnitud y disposición de todas las cargas que forman el campo. La relación entre la fuerza f que actúa sobre una carga, y la magnitud q de la misma carga, como también se deduce de la ley de Coulomb, no depende de la magnitud de la carga q ; esta relación caracteriza el punto dado del campo. Por lo tanto, la relación f/q de todos los puntos del campo nos da la característica física de determinadas propiedades objetivas del campo. Esta relación determina la magnitud física denominada *intensidad del campo electrostático*, que designaremos por E :

$$E = \frac{f}{q}. \quad (1)$$

Si en esta fórmula suponemos $q = +1$, E coincidirá con la fuerza f en magnitud y dirección. De esta manera tenemos que *la intensidad del campo electrostático en un punto es una magnitud física igual numéricamente a la fuerza que actúa sobre la unidad de carga positiva situada en este punto, coincidiendo en dirección y sentido con esta fuerza.* De esta definición se deduce que la intensidad del campo es una magnitud vectorial.

Por *unidad de intensidad* del campo tomaremos la intensidad de un punto en que, sobre la unidad de carga actúe una fuerza unidad. De aquí que en el sistema *CGSE*, la unidad de intensidad del campo sea la de un punto del campo en que sobre la carga de una unidad electrostática actúe la fuerza de una dina. En este sistema, las dimensiones de la intensidad del campo se determinan según la fór-

mula (1):

$$[E] = \frac{[f]}{[q]} = \frac{MLT^{-2}}{M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}} = M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}. \quad (2)$$

Como ejemplos calculemos la intensidad del campo electrostático de unos cuantos importantes casos particulares.

1. Intensidad del campo de una carga puntual. Sea la carga puntual q . Determinemos la intensidad del campo en un punto cualquiera A que se halla a la distancia r de la carga.

Según la ley de Coulomb, la fuerza f que actúa sobre la carga positiva q_0 que se halla a la distancia r de la carga q , es

$$f = \frac{q \cdot q_0}{r^2}.$$

De aquí que la intensidad del campo en el punto A sea:

$$E = \frac{f}{q_0} = \frac{q}{r^2}. \quad (3)$$

La ecuación (3) determina el valor de la intensidad del campo en el punto A . La dirección de la intensidad del campo coincide con la

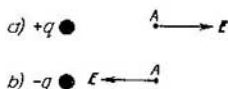


Fig. 11. Sentido de la intensidad del campo electrostático E .

de la fuerza f . Por lo tanto, el vector E va dirigido según la línea que une la carga q con el punto A en el sentido hacia la carga q , si q es negativa, y en sentido contrario, si q es positiva (fig. 11).

En forma vectorial, la intensidad del campo E se escribe así:

$$E = \frac{q}{r^2} \cdot \frac{r}{r}, \quad (3a)$$

donde r es el radio vector trazado desde el lugar donde se halla la carga puntual q , hacia el lugar en que se calcula la intensidad del campo E .

Si la intensidad del campo la crean varias cargas puntuales, q_1, q_2, \dots, q_n la intensidad del campo resultante en un punto cualquiera será la suma geométrica de las intensidades del campo originadas por cada una de las cargas independientemente. Esto se deduce del hecho de que la fuerza f que actúa sobre la carga q_0 , situada en

el punto dado, es igual a la suma geométrica de las fuerzas f_1, f_2, \dots, f_n , creadas por cada carga independientemente:

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_n;$$

de esta igualdad hallamos que la intensidad del campo, medida según la relación entre la fuerza f y la carga q_0 , será:

$$E = \frac{f}{q_0} = \frac{f_1}{q_0} + \frac{f_2}{q_0} + \dots + \frac{f_n}{q_0}.$$

Los sumandos de la derecha son las intensidades del campo E_1, E_2, \dots, E_n , originadas por las cargas q_1, q_2, \dots, q_n . Por consiguiente,

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n. \quad (4)$$

2. Intensidad del campo de un dipolo. Dipolo es el conjunto de dos cargas iguales y de signo contrario que se hallan a una distancia l muy pequeña en comparación con la distancia de las cargas a los puntos en que se determina la intensidad del campo. La línea que pasa por las cargas la llamaremos eje del dipolo. Determinemos la intensidad del campo electrostático de un punto cualquiera A en el

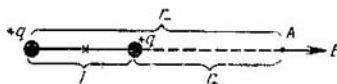


Fig. 12. Determinación de la intensidad del campo en el eje del dipolo.

eje del dipolo (fig. 12). Las distancias del punto A a las cargas $+q$ y $-q$ las designaremos respectivamente por r_+ y r_- . La distancia del punto A al punto medio del dipolo la designaremos por r ; entonces tenemos que:

$$r_+ = r - \frac{l}{2}, \quad r_- = r + \frac{l}{2}$$

La intensidad del campo E es igual a la suma geométrica de las intensidades del campo E_+ y E_- creadas por cada una de las cargas independientemente. En el caso dado, como E_+ y E_- van dirigidas según el eje del dipolo, la suma geométrica será igual a la algebraica:

$$E = \frac{q}{r_+^2} - \frac{q}{r_-^2}$$

$$E = \frac{q(r_-^2 - r_+^2)}{r_+^2 \cdot r_-^2} = \frac{q(r_- + r_+)(r_- - r_+)}{r_+^2 \cdot r_-^2}$$

Sabiendo que:

$$r_- - r_+ = l, \quad r_+ + r_- = 2r;$$

y que, según la condición establecida, $r \gg l$, tendremos aproximadamente que

$$r_+^2 \cdot r_-^2 \cong r^4,$$

y la ecuación de E se transforma en:

$$E = \frac{2ql}{r^3}.$$

El producto de la carga q por la distancia entre las cargas

$$p = ql$$

se denomina *momento del dipolo*. Introduciendo en la fórmula de E el momento del dipolo p , obtenemos definitivamente que:

$$E = \frac{2p}{r^3}. \quad (5)$$

La intensidad del campo E en el punto A va dirigida hacia la derecha respecto al eje del dipolo.

Determinemos la intensidad del campo en el punto B que se halla en la perpendicular OB al eje del dipolo y que pasa por el punto medio del dipolo (fig. 13). La intensidad del campo en el punto B es la suma geométrica de las intensidades del campo creadas por las cargas $+q$ y $-q$. Como las distancias r_+ y r_- del punto B a ambas cargas son iguales, tendremos que el valor numérico de las intensidades será:

$$E_+ = E_- = \frac{q}{r_+^2}.$$

Las direcciones de los vectores de las intensidades del campo E_+ y E_- vienen indicadas en la fig. 13.

El vector resultante de la intensidad del campo $E = E_+ - E_-$, como se ve de la fig. 13, tiene la magnitud:

$$E = E_+ \cos \alpha + E_- \cos \alpha = \frac{2q}{r_+^2} \cos \alpha$$

o

$$E = \frac{2q}{r_+^2} \cdot \frac{l/2}{r_+} = \frac{ql}{r_+^3}.$$

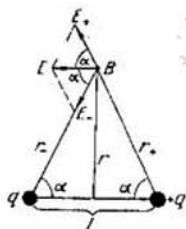


Fig. 13. Determinación de la intensidad del campo del dipolo en el punto B .

Designando r la distancia del punto B al punto medio del dipolo, y considerando que $l \ll r$, tendremos que aproximadamente $r_+ = r$, y la última fórmula se puede escribir de la siguiente manera:

$$E = \frac{ql}{r^3}.$$

Y, por último, introduciendo el momento del dipolo $p = ql$, obtenemos que:

$$E = \frac{p}{r^3}. \quad (6)$$

Comparando las fórmulas (5) y (6) vemos que en ambos casos, la intensidad del campo del dipolo es directamente proporcional al momento del dipolo p e inversamente proporcional al cubo de la distancia r al dipolo.

Los ejemplos arriba analizados demuestran que la intensidad del campo resultante se puede considerarla como suma geométrica de las intensidades originadas por las cargas puntuales que forman el sistema eléctrico. No obstante, en la mayoría de los casos, el cálculo mediante la representación del sistema como un conjunto de cargas puntuales, es extremadamente desmesurado o, en general, irrealizable; por eso, en muchos problemas, la determinación de la intensidad del campo se hace recurriendo a ciertos métodos auxiliares de que se hablará más adelante.

Basándonos en la fórmula (5) de la tensión del campo del dipolo, es fácil hallar la fuerza de acción recíproca de dos dipolos rígidos dispuestos a lo largo de una recta a una distancia r que sea grande en comparación con las dimensiones propias de los dipolos.



Fig. 14. Determinación de la fuerza de acción recíproca de dos dipolos.

En este caso se entiende por dipolo rígido el que no varía la distancia l entre las cargas bajo la influencia de las fuerzas exteriores, es decir, que las dos cargas del dipolo están "rígidamente" unidas.

Veamos primeramente el caso cuando ambos dipolos están orientados mutuamente según las cargas de signo opuesto (fig. 14). Sea r la distancia desde el punto medio del primer dipolo hasta la carga más próxima $-q_2$ del segundo dipolo.

La intensidad del campo E_1 , originada por el primer dipolo en el punto donde se encuentra la carga $-q_2$, según la fórmula (5), será:

$$E_1 = \frac{2p_1}{r^3},$$

donde $p_1 = q_1 l_1$ es el momento del primer dipolo. Debido a esta intensidad del campo, sobre la carga $-q_2$ del segundo dipolo actuará la fuerza

$$f_1 = -\frac{2p_1}{r^3} q_2.$$

Sobre la carga $+q_2$ del mismo dipolo actuará la fuerza

$$f_2 = +\frac{2p_1}{(r+l_2)^3} q_2.$$

La fuerza resultante que actúa en el segundo dipolo considerado como un todo, es:

$$f = f_1 + f_2 = -\frac{2p_1}{r^3} q_2 + \frac{2p_1}{(r+l_2)^3} q_2 = -\frac{2p_1}{r^3} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{l_2}{r}\right)^3} \right] q_2.$$

Como, según las condiciones del problema, $l \ll r$, tendremos aproximadamente que:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{l_2}{r}\right)^3} \cong 1 - 3\frac{l_2}{r}, \text{ de donde } f = -\frac{6p_1 l_2 q_2}{r^4}$$

o como $l_2 q_2 = p_2$, donde p_2 es el momento del segundo dipolo

$$f = -\frac{6p_1 p_2}{r^4}. \quad (7)$$

El signo menos indica que la fuerza resultante es de atracción.

En el caso de que los dos dipolos estén orientados mutuamente según los extremos del mismo signo, la fuerza de acción recíproca entre ellos, como es fácil de ver, es la misma, pero positiva, es decir, es de repulsión.

La fórmula (7) indica que la fuerza de acción recíproca de los dipolos es directamente proporcional al producto de sus momentos e inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia entre ellos. Los cálculos realizados son para el caso de los dipolos dispuestos a lo largo de una recta. Se puede demostrar que para otras disposiciones de los dipolos, la fuerza de acción recíproca es inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia.

§ 125. Líneas de fuerza. Como se ha indicado en el párrafo anterior, cada punto del campo electrostático tiene el correspondiente vector de intensidad del campo E .

Introducamos el concepto de *línea de fuerza*. Se entiende por línea de fuerza aquella en que, en cada uno de sus puntos, el vector de intensidad del campo va dirigido según la tangente en el punto dado (fig. 15). La dirección de las líneas de fuerza se considera que coincide con la del vector de intensidad del campo en cada punto de la línea.



Fig. 15. Líneas de fuerza.

De esta manera tenemos que la línea de fuerza determina, en cada uno de los puntos por donde pasa, la dirección de la intensidad del campo E y, por lo tanto, la de la fuerza f que actúa sobre una carga positiva $+q$ situada en ese punto del campo. Como la dirección de

la fuerza \mathbf{F} la determina solamente el vector de la aceleración adquirida por el cuerpo en que se concentra la carga q , y no la dirección de su desplazamiento, el cuerpo cargado, impulsado por las fuerzas del campo, en general no se moverá según las líneas de fuerza.

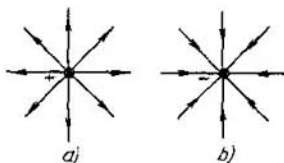


Fig. 16. Líneas de fuerza de una carga puntual: a) positiva, y b) negativa.

Un cuerpo cargado positivamente y sobre el cual no actúa ninguna fuerza excepto las eléctricas, se desplazará según la línea de fuerza solamente en el caso de que esta línea sea recta y la velocidad inicial vaya dirigida según la línea de fuerza.

Examinemos unos ejemplos sobre las líneas de fuerza.

1. **Líneas de fuerza de una carga puntual.** Es fácil de ver que las líneas de fuerza de una carga puntual son rectas que salen de la carga, si ésta es positiva, y, si es negativa, van dirigidas hacia la carga (fig. 16, a y b). De esta manera la carga positiva se puede considerar

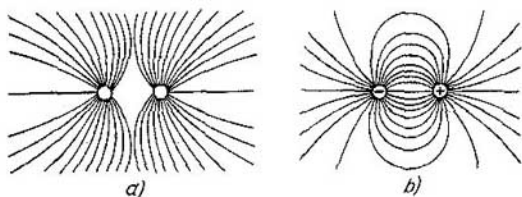


Fig. 17. Líneas de fuerza de dos cargas puntuales: a) del mismo signo y b) de distinto signo.

como el lugar inicial o comienzo de las líneas de fuerza, y la carga negativa como el lugar final o término de las mismas. En ambos casos, las tangentes a las líneas de fuerza coinciden con las mismas líneas y van dirigidas en cada punto en el mismo sentido que la intensidad del campo.

2. **Líneas de fuerza de dos cargas puntuales.** En la fig. 17, a se representan las líneas de fuerza de dos *cargas puntuales y del mismo*

signo; en la fig. 17, *b*, las de dos cargas puntuales de distinto signo, pero de igual valor, es decir, las líneas de fuerza de un dipolo.

3. Líneas de fuerza de un campo uniforme. Se llama campo uniforme el que, en todos sus puntos, tiene iguales geoméricamente las intensidades del campo, es decir, iguales en magnitud y dirección. Está claro que las líneas de fuerza de un campo uniforme son rectas, paralelas al vector de intensidad del campo.

Las líneas de fuerza se pueden revelar experimentalmente utilizando la propiedad de que los trocitos alargados de dieléctrico, al polarizarse, se orientan según las líneas de fuerza. Para demostrarlo se utilizan pequeños cristales aciculares de yeso esparciéndolos sobre una lámina de vidrio con trozos de papel de estaño pegados a ella y a los cuales se les comunican cargas eléctricas. En la fig. 18 se representa la disposición de los cristales de yeso junto a dos círculos de papel de estaño con cargas de diferente signo.

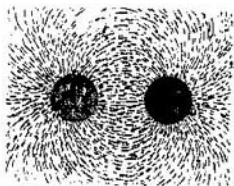


Fig. 18. Disposición de cristales de yeso en las proximidades de dos círculos de papel de estaño con cargas de diferente signo.

Como la intensidad del campo en cada uno de los puntos del espacio tiene una sola dirección, las líneas de fuerza nunca se cortan. Las líneas de fuerza empiezan en las cargas positivas y terminan en las negativas.

§ 126. Flujo eléctrico (o de las líneas de fuerza). Teorema de Ostrogradski—Gauss. De lo dicho anteriormente se deduce que las líneas de fuerza se pueden trazar por cualquier punto del espacio, por lo tanto su número es ilimitado.

La línea de fuerza caracteriza la dirección de la intensidad del campo, pero no su magnitud. No obstante, se puede establecer una condición que relacione la *magnitud* de la intensidad del campo, con el *número* de líneas de fuerza trazadas. Donde la intensidad del campo sea mayor, trazaremos mayor número de líneas de fuerza, y donde aquélla sea menor, éstas estarán más espaciadas.

Cualquier campo nos lo podemos representar dividido en pequeñas regiones en las cuales la intensidad del campo varía tan poco, que podemos considerarlo uniforme en esta región. Representémonos una pequeña superficie ΔS_0 de una de estas regiones (fig. 19) trazada perpendicularmente a las líneas de fuerza.

Consideremos que por la unidad de área de esta superficie ΔS_0 pasa un número de líneas de fuerza igual al valor de la intensidad del campo en esta superficie, es decir, consideremos que se cumple la

siguiente relación:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S_0} = E. \quad (1)$$

Si se cumple esta condición en el trazado de las líneas de fuerza, la intensidad del campo estará relacionada, efectivamente, con la densidad del trazado de líneas de fuerza. En los lugares donde la intensidad sea menor, las líneas estarán más espaciadas, y donde la intensidad del campo sea mayor, estarán más apretadas.

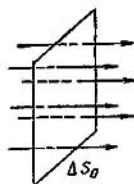


Fig. 19. Superficie elemental ΔS_0 perpendicular a las líneas de fuerza.

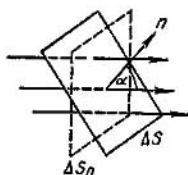


Fig. 20. Superficie elemental ΔS inclinada respecto a las líneas de fuerza.

El número total de líneas de fuerza que atraviesa una superficie lo denominaremos *flujo eléctrico* (o de las líneas de fuerza) y lo designaremos con la letra N . El número de líneas ΔN que atraviesa una superficie elemental ΔS_0 , constituirá un flujo eléctrico elemental.

Veamos qué cantidad ΔN de líneas de fuerza atraviesa una superficie elemental ΔS (fig. 20), cuya normal n forma un ángulo α con la dirección de las líneas de fuerza. Sea ΔS_0 la proyección de ΔS en el plano perpendicular a la dirección de las líneas de fuerza. Está claro que sola y exclusivamente las líneas que atraviesan la superficie ΔS , pasarán a través de esta superficie ΔS_0 ; por lo tanto, de la relación (1) tenemos que:

$$\Delta N = \Delta S_0 \cdot E = \Delta S \cdot \cos \alpha \cdot E.$$

Pero la magnitud $E \cos \alpha$ es la proyección del vector de la intensidad del campo en la dirección de la normal n a la superficie ΔS :

$$E \cos \alpha = E_n,$$

por lo tanto,

$$\Delta N = E_n \cdot \Delta S. \quad (2)$$

Esta ecuación determina el flujo eléctrico elemental que atraviesa una superficie elemental ΔS orientada arbitrariamente. Por consiguiente, el flujo eléctrico elemental que atraviesa una superficie

elemental orientada arbitrariamente es igual al producto de la componente de la intensidad del campo E normal a la superficie elemental, por el área de esta superficie.

Si la superficie ΔS es paralela a las líneas de fuerza, el flujo que la atraviesa es igual a cero, ya que en este caso

$$\alpha = \pi/2 \text{ y } E_n = 0.$$

El signo del flujo dependerá del ángulo que formen las líneas de fuerza con la dirección de la normal que se ha elegido como positiva.

En la fig. 20, el flujo es positivo; si hubiésemos elegido como positivo el sentido opuesto de la normal n indicado en la fig. 20, el signo del flujo sería negativo.

El flujo eléctrico que pasa a través de una superficie finita S se determina como la suma algebraica de los flujos elementales:

$$N = \sum \Delta N = \sum E_n \Delta S. \quad (3)$$

La suma abarca a todos los elementos en que hemos dividido la superficie S .

Las superficies elementales ΔS tienen que ser infinitamente pequeñas. Por consiguiente, llamando dS a la superficie elemental, obtenemos para el flujo eléctrico elemental dN la siguiente ecuación:

$$dN = E_n dS.$$

El flujo eléctrico N que pasa a través de la superficie S será la suma de infinidad de flujos elementales dN , es decir, la integral

$$N = \int_S E_n dS, \quad (3a)$$

donde el signo S indica que la integral se extiende a toda la superficie examinada.

Aclaremos qué número de líneas de fuerza hay que trazar desde una carga puntual q cuya intensidad del campo varía inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (§ 124).

Como la carga puntual q crea un campo de simetría esférica, las líneas de fuerza, como se ha indicado en el § 125, son líneas radiales simétricamente dispuestas (fig. 21). Su número total lo designaremos por N . Tracemos mentalmente una superficie esférica de cualquier radio r y de centro en la carga q . Según se ha establecido, el número de líneas de fuerza que atraviesa una unidad de superficie perpendicular a aquéllas, es igual al valor de la intensidad del campo en los puntos de la superficie dada. La superficie esférica trazada es per-

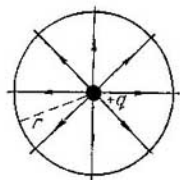


Fig. 21. Representación gráfica para la deducción del teorema de Ostrogradski-Gauss.

pendicular a las líneas de fuerza, que son radiales. El número total de líneas de fuerza es N , por consiguiente, por unidad de superficie pasarán $\frac{N}{4\pi r^2}$. Según la (1), esta magnitud debe ser numéricamente igual a la intensidad del punto del campo situado a la distancia r de la carga, es decir,

$$\frac{N}{4\pi r^2} = \frac{q}{r^2},$$

de donde

$$N = 4\pi q. \quad (4)$$

De esta manera tenemos que hay que trazar $4\pi q$ líneas de fuerza simétricamente dispuestas desde cada carga puntual.

Generalizando esta conclusión se deduce el llamado *teorema de Ostrogradski—Gauss*, el cual señala la relación general entre el

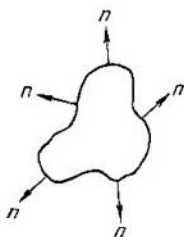


Fig. 22. Sentido positivo de las normales a una superficie cerrada.

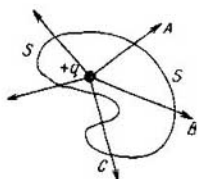


Fig. 23. Intersección de una superficie cerrada arbitraria por las líneas de fuerza.

flujo eléctrico que pasa por una superficie cerrada y la magnitud de las cargas que se hallan en el interior de esta superficie. Este teorema facilita en muchos casos particulares la determinación del vector de intensidad del campo creado por cargas que se hallan en el interior de cuerpos de dimensiones finitas e, incluso, infinitas.

El teorema de Ostrogradski—Gauss se puede formular de la siguiente manera: *el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada con cargas en su interior, es igual al producto de 4π por la suma algebraica de las cargas que comprende.*

Para demostrarlo supongamos que para una superficie cerrada, la dirección de la normal al elemento de superficie es positiva si "sale" de la superficie cerrada (fig. 22). Entonces, las líneas de fuerza que salen del volumen limitado por la superficie dada, formarán un flujo eléctrico positivo, mientras que las líneas que entran en el volumen dado, formarán un flujo negativo.

Admitida esta suposición del signo de la normal, demostremos antes que nada la veracidad del teorema de Ostrogradski—Gauss para una carga puntual. Rodeemos la carga puntual q , que consideraremos positiva, de una superficie cerrada arbitraria S (fig. 23). Según lo demostrado, de la carga hay que trazar $4\pi q$ líneas de fuerza. Cada una de estas líneas cortará a la superficie S bien una vez, como las líneas A y B ; bien un número cualquiera *impar* de veces, como, por ejemplo, la línea C que atraviesa a la superficie tres veces. Pero la línea C sale dos veces de la superficie S y entra una vez en ella. Por consiguiente, según lo establecido respecto al signo del flujo, en los lugares de salida creará un flujo positivo, y en los de entrada, negativo; por lo tanto, para calcular el flujo eléctrico que pasa a través de una superficie cerrada S , se considera que la línea de fuerza C atraviesa una sola vez la superficie. Lo mismo ocurrirá con cualquiera otra línea de fuerza. Como consecuencia tenemos que el número total de líneas de fuerza que atraviesan la superficie cerrada de forma cualquiera en cuyo interior hay una carga puntual q , es igual al número de líneas de fuerza que salen de la carga puntual, es decir, igual a $4\pi q$. Según la definición este número total de líneas de fuerza N es el que da el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada S .

Así hemos demostrado la veracidad del teorema de Ostrogradski—Gauss para una carga puntual.

Para el caso general cuando en el interior de la superficie hay un número cualquiera k de cargas q_1, q_2, \dots, q_k , veamos el flujo eléctrico creado por una de ellas, que designaremos por q_i . Según lo establecido, el flujo creado por esta carga será $N_i = 4\pi q_i$; teniendo en cuenta que el signo del flujo coincide con el de la carga.

El flujo total N creado por todas las cargas será igual a la suma algebraica de los flujos creados por las cargas individuales, es decir,

$$N = \sum N_i = 4\pi \sum q_i. \quad (5)$$

Este resultado es el teorema de Ostrogradski—Gauss arriba formulado.

Del teorema de Ostrogradski—Gauss se sacan importantes consecuencias.

En primer lugar se deduce que las líneas de fuerza pueden empezar solamente en los lugares donde se hallan las cargas positivas, y terminar en los de las cargas negativas.

Segundo: si tomamos una superficie cerrada que comprenda varias cargas cuya suma algebraica sea igual a cero, el flujo eléctrico total que atraviesa la superficie, será igual a cero. Esto significa que el número de líneas de fuerza que salen del volumen limitado por la superficie dada, es igual al número de líneas de fuerza que entran en el mismo.

Tercero: si la superficie cerrada se traza en un campo de manera que en su interior no haya cargas, las líneas de fuerza la atravesarán sin empezar ni terminar en el interior de esta superficie. Por consiguiente, el número de líneas de fuerza que entran será igual al número de líneas que salen, y el flujo eléctrico total que atraviesa la superficie también será igual a cero.

§ 127. Una deducción más rigurosa del teorema de Ostrogradski-Gauss. Debido a la importancia de las cuestiones examinadas en el § 126, deducimos el teorema de Ostrogradski-Gauss directamente de la ley de Coulomb sin basarnos en la aplicación de las líneas de fuerza.

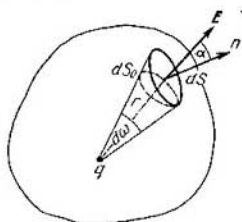


Fig. 24. Representación gráfica para una deducción más rigurosa del teorema de Ostrogradski-Gauss.

Como se ha hecho antes, dividamos el campo en regiones tan pequeñas, que en los límites de las mismas se puede considerar uniforme el campo. Si tomamos en una de estas regiones una superficie infinitamente pequeña dS (fig. 24), en los límites de ésta podemos considerar que la intensidad del campo E es constante en magnitud y dirección. Elijamos una dirección positiva de la normal a la superficie y llamémosla n . El flujo eléctrico elemental dN que atraviesa la superficie dS lo determinaremos de la relación:

$$dN = E_n dS,$$

donde E_n es la proyección del vector E según la dirección de la normal n . Determinemos ahora el flujo elemental que pasa por la superficie dS , creado por la carga puntual q que se halla en un punto desde el cual la superficie

elemental dS se ve según el ángulo sólido $d\omega$ (fig. 24). Según la ley de Coulomb, la intensidad del campo E va dirigida según el radio vector r trazado desde el punto donde se halla la carga. Por eso, el ángulo α entre la normal n y la intensidad del campo E es igual al ángulo entre las superficies elementales dS y dS_0 , donde dS_0 es la proyección de dS según la dirección perpendicular al radio vector r . De aquí que:

$$dN = E_n dS = E \cos \alpha dS = E dS_0.$$

Como, según la ley de Coulomb,

$$E = \frac{q}{r^2}$$

la ecuación de dN se podrá escribir:

$$dN = \frac{q}{r^2} dS_0.$$

La magnitud $\frac{dS_0}{r^2}$ es, por definición, el ángulo sólido $d\omega$ con que se ve el elemento dS desde el lugar de la carga. De aquí que, definitivamente, obtenemos:

$$dN = q d\omega, \quad (1)$$

es decir, el flujo eléctrico elemental dN creado por una carga puntual y que pasa por el elemento de superficie dS , es igual a la magnitud de la carga q multiplicada

por la del ángulo sólido $d\omega$ con que se ve el elemento de superficie dS desde el punto donde se halla la carga.

El flujo eléctrico total N que atraviesa la superficie cerrada, es la suma de los flujos elementales a través de los elementos de superficie. Pero, debido a que los flujos elementales son infinitamente pequeños, la suma se sustituye por la integral:

$$N = \int dN.$$

Utilizando la fórmula (1) y sustituyendo dN por su valor, tendremos que

$$N = q \int d\omega. \quad (2)$$

Antes de pasar adelante volvamos a considerar positiva la dirección de la normal que sale del volumen limitado por la superficie dada; y el ángulo sólido lo consideraremos positivo cuando desde el punto donde se halla la carga, se vea la parte interior de la superficie.

Si la carga está en el interior de la superficie, la integral de la fórmula (2) abarcará todo el ángulo sólido con que se ve la superficie cerrada desde el punto que se halla en el interior de esta superficie. Como se sabe, este ángulo es igual a 4π , de donde:

$$N = q \int d\omega = 4\pi q.$$

Si la carga se halla fuera de la superficie cerrada (fig. 25), cada ángulo sólido elemental $d\omega$ entrará en la integral con dos signos: con el signo más (para el elemento de la superficie dS_1 , cuya parte interior se ve desde el punto de la carga) y con el signo menos (para el elemento dS_2 , cuya parte exterior se ve desde el punto de la carga); por consiguiente, en este caso, al integrar según los ángulos obtendremos que la integral es igual a cero, de donde $N=0$.

El resultado de estas integraciones nos da el teorema de Ostrogradski-Gauss: el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual al producto de 4π por la carga que se halla en el interior de la superficie.

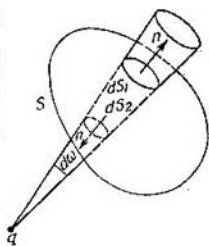


Fig. 25. Determinación del flujo de una carga que se halla fuera de una superficie cerrada.

§ 128. Aplicaciones del teorema de Ostrogradski—Gauss. Como cualquier carga nos la podemos representar como una suma de un número infinito de cargas infinitesimales que se pueden considerar puntuales, el teorema de Ostrogradski—Gauss será justo al aplicarlo a cargas de cualesquiera forma y magnitud. En esto se basa su gran aplicación.

Antes de examinar las aplicaciones del teorema, introduzcamos los conceptos de densidad volumétrica de carga o carga por unidad de volumen, y densidad superficial de carga o carga por unidad de superficie.

En muchos problemas, las cargas están distribuidas en determinado volumen. En estos problemas es muy importante introducir el concepto de densidad volumétrica de distribución de las cargas.

Sea un volumen ΔV con una carga Δq . Entenderemos por *densidad volumétrica* media de la carga la magnitud física determinada por la relación

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta q}{\Delta V}. \quad (1)$$

La densidad ρ en el punto dado la determinaremos como el límite a que tiende esta relación al tender a cero el volumen ΔV :

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta q}{\Delta V} \right). \quad (1a)$$

En algunos casos, las cargas se distribuyen por la superficie de los cuerpos, donde el espesor de la capa de las cargas es tan pequeña, que se puede despreciar. En este caso es conveniente introducir el concepto de *densidad superficial de las cargas*. Supongamos que a la superficie ΔS le corresponde la carga Δq ; entonces, la densidad superficial media de la carga $\bar{\sigma}$ la determinaremos de la relación:

$$\bar{\sigma} = \frac{\Delta q}{\Delta S}. \quad (2)$$

La densidad superficial σ en el punto dado será igual al límite a que tiende esta relación cuando la superficie ΔS tiende a cero:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta q}{\Delta S} \right). \quad (2a)$$

Determinemos ahora con ayuda del teorema de Ostrogradski-Gauss, la intensidad del campo para una serie de casos.

1. Intensidad del campo de un plano infinito cargado uniformemente. Veamos el campo electrostático creado por un plano infinito, cargado con una densidad de $\pm\sigma$ constante en todos los puntos del plano. Por razones de simetría se puede considerar que las líneas de fuerza son perpendiculares al plano y parten del mismo. Para convencernos de ello demostrémoslo por reducción al absurdo: supongamos que las líneas de fuerza forman cierto ángulo con la perpendicular al plano. Si las líneas de fuerza siguiesen la dirección de las líneas de puntos representadas en la fig. 26, significaría que del semiplano superior se repelería la carga positiva con más fuerza que del inferior, lo cual contradeciría nuestra suposición de plano infinito y de la constancia de la densidad superficial de la carga en este plano. Razonando de la misma manera se puede demostrar que las líneas de fuerza no pueden tener otra dirección que la de la normal a la superficie. Sea el punto A situado a la derecha del plano. La intensidad del campo en este punto irá dirigida hacia la derecha, lo cual se deriva de que es igual a la fuerza con que actúa sobre una carga *positiva* unidad, que *es repelida* del plano cargado positiva-

mente. Si tomamos el punto B situado a la izquierda del plano simétricamente al punto A , repitiendo los razonamientos anteriores veremos que en este punto, la intensidad del campo E va dirigida en sentido contrario (en comparación con la del punto A). Por consiguiente las líneas de fuerza serán rectas que salen del plano perpendicularmente al mismo.

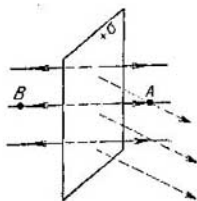


Fig. 26. Líneas de fuerza de un plano infinito.

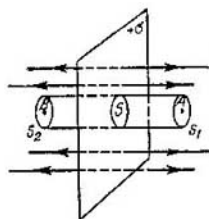


Fig. 27. Representación gráfica para calcular la intensidad del campo de un plano infinito.

Determinemos el valor de la intensidad del campo en el punto A aplicando el teorema de Ostrogradski-Gauss. Como superficie cerrada elijamos una superficie cilíndrica (fig. 27), construida de la siguiente manera: tomemos un espacio S del plano cargado como sección media del cilindro, y tracemos las superficies laterales del cilindro paralelamente a las líneas de fuerza. Las dos bases del cilindro S_1 y S_2 las trazamos respectivamente por los puntos A y B paralelamente al plano. Con esto y por razones de simetría se puede considerar que la intensidad es constante en todos los puntos de cada una de las bases S_1 y S_2 , es decir que tienen el mismo valor numérico e igual al de la intensidad buscada E del punto A . Calculemos el flujo eléctrico que pasa a través de la superficie cilíndrica. El flujo que atraviesa la superficie lateral es igual a cero, ya que las líneas de fuerza son paralelas a esta superficie. Por consiguiente, el flujo total N se compone de los flujos N_1 y N_2 que pasan a través de las bases del cilindro S_1 y S_2 . Estos dos flujos son positivos. Como las superficies S_1 y S_2 son perpendiculares a las líneas de fuerza, los flujos a través de ellas se obtienen multiplicando el valor de la intensidad por el área de la base. De esta manera tenemos que:

$$N = N_1 + N_2 = ES_1 + ES_2 = E \cdot 2S.$$

Según el teorema de Ostrogradski-Gauss el flujo total debe ser igual al producto de la magnitud 4π por la carga encerrada en el interior

de la superficie; el valor de esta carga es de σS . Por consiguiente,

$$2SE = 4\pi\sigma S,$$

de donde la intensidad buscada E será igual a

$$E = 2\pi\sigma \quad (3)$$

El valor de E no depende de la distancia del punto A al plano. Lo mismo tenemos con el punto B . Así resulta que a la derecha y a la izquierda del plano tenemos campos uniformes. Si el plano está cargado negativamente, la dirección de la intensidad será en sentido contrario a la del ejemplo analizado: las líneas penetrarán en el plano. El resultado obtenido es justo solamente para los planos infinitos, ya que sólo en este caso se pueden utilizar las razones de simetría aducidas; no obstante, con aproximación es justo para el espacio que rodea inmediatamente a la parte media de un plano finito, lejos de los extremos.

2. Campo de dos planos paralelos infinitos con cargas de distinto signo y de densidades $+\sigma$ y $-\sigma$.

La solución se puede obtener directamente de la suma geométrica de los campos de los dos planos cargados de diferente signo. De la

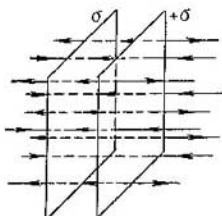


Fig. 28. Líneas de fuerza de dos planos paralelos.

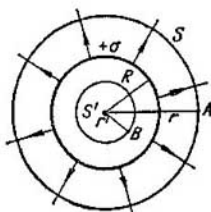


Fig. 29. Determinación de la intensidad del campo de una esfera cargada.

fig. 28 se ve que la intensidad de los campos de ambos planos en la región situada *entre* los planos, tiene un mismo sentido, por lo tanto, la suma geométrica es la suma aritmética. La intensidad del campo de cada plano, según hemos visto arriba, es igual a $2\pi\sigma$, por consiguiente, la intensidad total *entre* los planos será:

$$E = 2\pi\sigma + 2\pi\sigma = 4\pi\sigma. \quad (4)$$

Las intensidades del campo creadas por ambos planos a la derecha del de la derecha y a la izquierda del de la izquierda, van dirigidas en sentido contrario; por consiguiente, la suma geométrica es igual

a la diferencia de sus valores numéricos. Como el valor numérico de las intensidades creadas por cada plano es igual a $2\pi\sigma$, la intensidad resultante para los puntos fuera de los planos es igual a cero:

$$E=0 \quad (4a)$$

3. Intensidad del campo creado por una superficie esférica cargada uniformemente. Sea la superficie esférica de radio R cargada positivamente y la densidad superficial de la carga $+\sigma$ es constante en todos los puntos de la superficie. La carga total de la superficie esférica la designaremos por q . Dividiremos el problema en dos partes: a) determinación de la intensidad del campo electrostático fuera de la superficie esférica, b) determinación de la intensidad del campo en el interior de la superficie esférica.

Sea el punto A alejado del centro de la superficie esférica a la distancia $r > R$ (fig. 29). Tracemos mentalmente por este punto una superficie esférica S de radio r y de centro en el centro de la esfera cargada. Por la simetría se ve claramente que el valor numérico de la intensidad será el mismo en todos los puntos de esta esfera. De la misma manera se ve que el vector de intensidad del campo (en cada punto) estará dirigido según la prolongación del radio.

Apliquemos el teorema de Ostrogradski-Gauss a esta superficie esférica S de radio r . Como esta superficie es perpendicular a las líneas de fuerza, el flujo total que pasa a través de ella lo obtenemos multiplicando la intensidad del campo E por la magnitud de la superficie, de donde el flujo total es igual a $E \cdot 4\pi r^2$.

Según el teorema de Ostrogradski-Gauss tenemos que:

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q,$$

de donde

$$E = \frac{q}{r^2} \text{ siendo } r > R, \quad (5)$$

es decir, la intensidad del campo creado fuera de una superficie esférica cargada uniformemente, es la misma que si toda carga se hallase en el centro de la esfera.

Pasemos a los puntos que están en el interior de la superficie esférica. Sea el punto B (fig. 29) a la distancia $r' < R$ del centro de la esfera y tracemos por este punto una superficie esférica S' de centro en el de la esfera cargada. Está claro que el valor numérico de la intensidad del campo en todos los puntos de esta superficie será el mismo. Lo mismo que antes, por la simetría se ve que la intensidad (si no es igual a cero), puede tener solamente sentido radial y, por consiguiente, será perpendicular a la superficie esférica S' .

Apliquemos el teorema de Ostrogradski-Gauss a la superficie esférica S' , obtenemos

$$E \cdot 4\pi r'^2 = 0,$$

ya que en el interior de la esfera S' la carga es igual a cero; de aquí que:

$$E = 0, \text{ si } r' < R. \quad (6)$$

Por consiguiente, *la intensidad del campo electrostático en todos los puntos del interior de una superficie esférica uniformemente cargada es igual a cero.*

Se puede demostrar (compárese con el § 132) que las fórmulas (5) y (6) son también justas para una esfera *conductora* con una carga q .

4. **Intensidad del campo creado por una esfera uniformemente cargada.** Sea una esfera de radio R , cuya carga total positiva q está distribuida por el volumen de la esfera con una densidad constante.

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

La intensidad del campo en un punto cualquiera A (fig. 29) fuera de la esfera cargada a la distancia $r > R$ del centro de la misma, se expresará de la misma manera que la intensidad producida por una superficie esférica cargada:

$$E = \frac{q}{r^2},$$

e irá dirigida según el radio en su prolongación, ya que las razones de simetría y el cálculo serán los mismos. Así tenemos que *una esfera uniformemente cargada crea en los puntos fuera de ella la misma intensidad del campo que si toda la carga estuviera concentrada en el centro.*

Determinemos la intensidad del campo en el punto B del interior de la esfera cargada a la distancia $r' < R$ del centro de la misma. En este caso, las condiciones de simetría serán las mismas que las arriba indicadas, de lo cual se deduce que el valor numérico de la intensidad será el mismo para todos los puntos de la superficie esférica de radio r' de centro en el de la esfera cargada, teniendo en cuenta que en cada punto la intensidad va dirigida según el radio. La carga q' que se halla en el interior de la superficie r' , será:

$$q' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r'^3,$$

o, como $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, tenemos que:

$$q' = q \frac{r'^3}{R^3}.$$

Aplicando el teorema de Ostrogradski-Gauss a la superficie esférica de radio r' , obtenemos que:

$$N = E \cdot 4\pi r'^2 = 4\pi q' = 4\pi \frac{r'^3}{R^3} q,$$

de donde

$$E = \frac{N}{4\pi r'^2} = \frac{q}{R^3} r'. \quad (7)$$

De la fórmula (7) se ve que la intensidad del campo en el interior de una esfera cargada uniformemente crece proporcionalmente a la

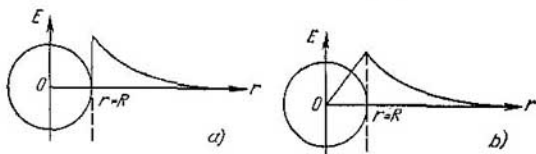


Fig. 30. Intensidad del campo: a) de la superficie cargada de una esfera y b) de una esfera cargada en todo su volumen.

distancia al centro de la esfera. Ello es debido a que la intensidad, como se ha dicho, la crea solamente la parte de la carga total que no está más distanciada del centro, que el punto en que se calcula la intensidad. Las cargas que se hallan fuera de la esfera mentalmente trazada de radio r' , según el teorema de Ostrogradski-Gauss, nos darán en la superficie de esta esfera una intensidad del campo igual a cero.

En la fig. 30, a se representa el gráfico de la intensidad para el caso de la superficie cargada de una esfera, y en la fig. 30, b, para el caso de una esfera cargada en todo su volumen.

5. Intensidad del campo creado por una superficie cilíndrica infinita uniformemente cargada. Sea una superficie cilíndrica de radio R , cargada uniformemente con una densidad superficial de carga de $+\sigma$. Determinemos la intensidad en el punto A a la distancia $r > R$ del eje del cilindro (fig. 31). La simetría del problema nos permite deducir directamente que la intensidad del campo en el punto A debe estar dirigida según la prolongación del radio vector r . El teorema de Ostrogradski-Gauss lo aplicaremos a la superficie cilíndrica que pasa por el punto A , cuyo eje coincide con el del

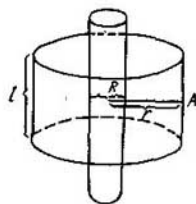


Fig. 31. Determinación de la intensidad del campo de un cilindro cargado.

cilindro cargado, y las bases superior e inferior son perpendiculares al eje y se hallan a la distancia l una de otra. El flujo total que pasa a través de esta superficie, será el que atraviesa la superficie lateral del cilindro, ya que la intensidad del campo es paralela a las bases y el flujo a través de éstas será igual a cero. Como las líneas de fuerza son perpendiculares a la superficie lateral del cilindro, obtendremos el flujo total N multiplicando el valor de la intensidad del campo E por el área de la superficie lateral $2\pi rl$:

$$N = 2\pi rl \cdot E. \quad (8)$$

Según el teorema de Ostrogradski-Gauss, el flujo N es igual numéricamente al producto de 4π por la carga encerrada en el interior de la superficie que atraviesa el flujo que se calcula. Esta carga q es igual a la carga correspondiente a la longitud l del cilindro:

$$q = \sigma \cdot 2\pi Rl,$$

por consiguiente, según el teorema de Gauss:

$$N = 4\pi q = 4\pi\sigma \cdot 2\pi Rl.$$

Comparando esta expresión para N con la (8), obtenemos que:

$$E = \frac{4\pi\sigma R}{r}. \quad (9)$$

Como $2\pi R$ es igual numéricamente al área de la superficie lateral del cilindro por unidad de su longitud, la magnitud $\eta = 2\pi R\sigma$ será la carga por unidad de longitud del cilindro. De aquí que la fórmula (9) se pueda escribir de la forma:

$$E = \frac{2\eta}{r}. \quad (9a)$$

La intensidad del campo disminuye inversamente proporcional a la distancia del eje del cilindro. De manera análoga se puede demostrar fácilmente que *la intensidad del campo en el interior de una superficie cilíndrica uniformemente cargada es igual a cero.*

Los ejemplos analizados demuestran que la aplicación del teorema de Ostrogradski-Gauss permite calcular el campo electrostático cuando éste es simétrico y por razones de simetría se puede indicar de antemano la dirección de las líneas de fuerza.

§ 129. Trabajo de las fuerzas del campo electrostático. Potencial. Al desplazarse las cargas por un campo electrostático, las fuerzas aplicadas a las cargas realizan un trabajo. Como se demostrará más abajo, las fuerzas del campo electrostático poseen la propiedad de que el trabajo realizado por ellas al trasladar una carga no depende

le la trayectoria de desplazamiento de la carga, sino que depende sólo de la magnitud de la carga y de las posiciones inicial y final de la misma. Esta propiedad del campo permite caracterizar cualquier punto del mismo por medio de una función especial denominada *potencial* en un punto del campo. El trabajo de desplazamiento de una carga desde un punto a otro lo expresa la diferencia de valores de los potenciales en estos dos puntos.

Veamos primeramente el trabajo de las fuerzas eléctricas en un campo de cargas puntuales.

Sea una carga positiva q_0 que se desplaza por el campo de una carga q desde el punto a al punto b de distancia muy pequeña (fig. 32). Supongamos que la carga q está inmóvil en un punto O cualquiera. El desplazamiento infinitamente pequeño ds de la carga q_0 entre los puntos a y b se puede considerar rectilíneo y despreciar la variación de la fuerza f aplicada a la carga q_0 considerándola constante en magnitud y en dirección durante el desplazamiento. Según la definición de trabajo, el trabajo elemental dA de la fuerza f en el desplazamiento ds , será:

$$dA = f ds \cdot \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo formado por la dirección de la fuerza f (que coincide con la dirección de la intensidad del campo E) y la dirección del desplazamiento ds . Trazando una perpendicular desde el punto b sobre la prolongación de la recta Oa , veremos que $ds \cdot \cos \alpha = Oc - Oa$; pero Oc , si el desplazamiento ds es infinitamente pequeño, se puede considerar igual a Ob , de donde $ds \cdot \cos \alpha = Ob - Oa = dr$, donde dr es la variación de la distancia entre las cargas q y q_0 al desplazarse la carga q_0 desde el punto a hasta el punto b . De aquí obtenemos que el trabajo elemental dA será:

$$dA = f dr. \quad (1)$$

La fuerza f es una fuerza de Coulomb de acción recíproca de las cargas q_0 y q . Debido a lo pequeño que es el desplazamiento ds , esta fuerza se puede considerar constante en todo el trayecto ds y, por consiguiente, igual a

$$f = \frac{qq_0}{r^2},$$

donde $r = Oa$. Colocando este valor de f en la expresión del trabajo

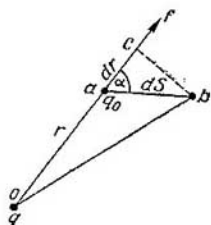


Fig. 32. Determinación del trabajo de desplazamiento de una carga q_0 en el trayecto ds .

(1) hallamos que:

$$dA = \frac{qq_0}{r^2} dr. \quad (2)$$

Sea, ahora, la carga q_0 que se desplaza desde el punto A , que se halla a la distancia r_1 de la carga q , hasta el punto B , que se halla a la distancia r_2 de la misma (fig. 33), y que los puntos A y B no estén cerca. Para determinar el trabajo en el desplazamiento finito AB , lo dividiremos en trayectos infinitesimales ds . En cada uno de estos desplazamientos, el trabajo elemental dA se expresará por la fórmula (2), y el trabajo total A en todo el trayecto AB será la suma de todos estos trabajos elementales, es decir, la integral en los límites desde r_1 hasta r_2 :

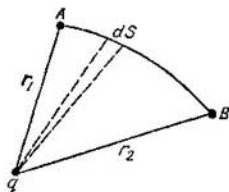


Fig. 33. Determinación del trabajo de desplazamiento de una carga en el trayecto AB .

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qq_0}{r^2} dr. \quad (3)$$

Sacando el producto qq_0 del signo de la integral por ser constante, obtenemos:

$$A = qq_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = qq_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Este valor del trabajo A lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$A = q_0 \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right), \quad (4)$$

de donde tenemos que el trabajo de las fuerzas de un campo al trasladar la carga q_0 en el campo de la carga puntual q es el producto del valor de la carga trasladada por la diferencia de los valores de q/r en los puntos inicial y final de la traslación.

Introduzcamos la función V determinada por la igualdad

$$V = \frac{q}{r} + C, \quad (5)$$

donde C es una constante arbitraria. La función V tendrá para el punto A el valor de:

$$V_1 = \frac{q}{r_1} + C,$$

y para el punto B , el valor de:

$$V_2 = \frac{q}{r_2} + C.$$

La diferencia $V_1 - V_2$ será igual a $\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}$, ya que las constantes aditivas C se eliminan. La función V determinada por la ecuación (5) se denomina *potencial de la carga puntual q* . Introduciendo el valor del potencial en la fórmula (4), tenemos:

$$A = q_0 (V_1 - V_2), \quad (6)$$

donde V_1 y V_2 son los valores de la función V en los puntos A y B . Así tenemos que *el trabajo de las fuerzas de un campo al desplazar una carga, es igual numéricamente, al producto de la magnitud de la carga por la diferencia de potencial entre los puntos inicial y final del trayecto*, por lo tanto, no depende de la forma del trayecto sino solamente de la posición de los puntos inicial y final. Si la trayectoria es una línea cerrada, los puntos inicial y final coinciden, de donde $V_1 = V_2$ y, según la (6), $A = 0$, es decir, *al desplazar una carga por una trayectoria cerrada, el trabajo de las fuerzas eléctricas es igual a cero*.

Veamos ahora el trabajo de las fuerzas eléctricas al trasladar una carga en un campo de un sistema de cargas puntuales. Sea un sistema de cargas puntuales $q_1, q_2 \dots q_n$ (fig. 34), y supongamos que la carga q_0 se desplaza en el campo de este sistema desde el punto I al punto 2 . La fuerza f que actúa sobre la carga q_0 , es la resultante de las fuerzas f_1, f_2, \dots, f_n , con que actúa sobre la carga q_0 cada una de las cargas q_1, q_2, \dots, q_n independientemente. Como el trabajo de la fuerza resultante es la suma algebraica de los trabajos de las fuerzas componentes, el trabajo de traslación de la carga q_0 en el campo de un sistema de cargas puntuales $q_1, q_2 \dots, q_n$, será igual a $A_1 + A_2 + \dots + A_n$, donde $A_1, A_2 \dots, A_n$ son los trabajos de traslación de las fuerzas f_1, f_2, \dots, f_n independientemente. El trabajo A_1 de la fuerza f_1 se puede representar según la (6), de la siguiente manera: $A_1 = q_0 (V_1^{(1)} - V_2^{(1)})$, donde $V_1^{(1)}$ y $V_2^{(1)}$ son los potenciales creados por la carga q_1 en los puntos I y 2 respectivamente. De la misma manera, llamando $V_1^{(2)}$ y $V_2^{(2)}$ los potenciales creados por la carga q_2 en los puntos I y 2 respectivamente, obtenemos que $A_2 = q_0 (V_1^{(2)} - V_2^{(2)})$, etc. El trabajo total A será:

$$A = q_0 (V_1^{(1)} - V_2^{(1)}) + q_0 (V_1^{(2)} - V_2^{(2)}) + \dots + q_0 (V_1^{(n)} - V_2^{(n)}).$$

Esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$A = q_0 [(V_1^{(1)} + V_1^{(2)} + \dots + V_1^{(n)}) - (V_2^{(1)} + V_2^{(2)} + \dots + V_2^{(n)})].$$

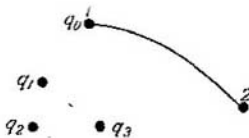


Fig. 34. Desplazamiento de una carga q_0 en un campo de un sistema de cargas q_1, q_2, \dots, q_n .

Llamando V a la suma algebraica de todos los potenciales en el punto dado, tendremos que:

$$\left. \begin{aligned} V_1^{(1)} + V_1^{(2)} + \dots + V_1^{(n)} &= V_1, \\ V_2^{(1)} + V_2^{(2)} + \dots + V_2^{(n)} &= V_2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

de donde resulta que el trabajo es igual a:

$$A = q_0 (V_1 - V_2), \quad (8)$$

es decir, el valor numérico del trabajo A se puede determinar como el producto del valor de q_0 por la diferencia de los valores de la función V en los puntos 1 y 2, que corresponden al comienzo y al final del trayecto. Por consiguiente, la función V es el potencial creado por todas las cargas q_1, q_2, \dots, q_n en el punto dado. Según la (7), el potencial V de un sistema de cargas puntuales es igual a la suma algebraica de los potenciales $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(n)}$, creados por las cargas independientes.

Cualquier sistema cargado se puede dividir en infinitas cargas muy pequeñas que, para los puntos fuera del sistema cargado, se pueden considerar puntuales. Por consiguiente, según lo dicho anteriormente, se puede hablar del potencial creado por cualquier sistema fuera del mismo. El concepto de potencial se puede generalizar y extender a los puntos del mismo sistema cargado, si este sistema está cargado con densidades superficiales o volumétricas finitas de carga. Esta generalización del concepto de potencial se da en la teoría general del campo eléctrico.

Detengámonos, además, en el sentido físico de potencial. De la fórmula (8) se deduce que la diferencia de potencial en dos puntos del campo electrostático, numéricamente es igual a la relación entre el trabajo efectuado por las fuerzas del campo al trasladar una carga de un punto a otro, y la magnitud de la carga desplazada:

$$\frac{A}{q_0} = V_1 - V_2. \quad (9)$$

Si suponemos que $q_0 = +1$, vemos que la diferencia de potencial de dos puntos viene dada por el trabajo realizado por las fuerzas del campo al trasladar una carga positiva unidad del primer punto al segundo.

De la ecuación (9) se puede determinar la unidad de medición de la diferencia de potencial. En el sistema CGSE, por unidad de diferencia de potencial se tomará la diferencia de potencial que hay entre dos puntos en que, al trasladar de uno a otro una carga unidad, se efectúa un trabajo de un ergio. Esta unidad se denomina unidad electrostática de diferencia de potencial. En el sistema internacional

de unidades, por unidad de diferencia de potencial se toma la diferencia de potencial entre dos puntos en que, al trasladar de uno a otro una carga de un culombio, se efectúa un trabajo de un julio. Esta unidad de diferencia de potencial se denomina *voltio*. Como, aproximadamente, $1 C = 3 \cdot 10^9$ unid. CGSE, con el mismo grado de exactitud tenemos que:

$1 \text{ voltio} = \frac{1}{300}$ unidades electrostáticas de diferencia de potencial.

Las dimensiones de la diferencia de potencial en el sistema CGSE se obtienen de la ecuación (9):

$$[V_1 - V_2] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{ML^2T^{-2}}{M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}} = M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}.$$

Observemos que la ecuación (9) relaciona el trabajo de desplazamiento de las cargas solamente con la diferencia de potencial. Esto determina el que podamos tomar, en consonancia con la fórmula (5), como potencial una carga puntual, un número infinito de funciones que se diferencien una de otra en la constante aditiva C . La diferencia de potencial no varía con la elección de diferentes C .

Así tenemos que la constante C se puede elegir arbitrariamente. El caso más simple lo obtenemos haciendo $C=0$; entonces el potencial de la carga puntual q , en un punto a la distancia r será:

$$V = \frac{q}{r}. \quad (5a)$$

El potencial, por definición, es una magnitud escalar. Al elegir la constante aditiva $C=0$, el potencial de una carga puntual adquiere el siguiente sentido físico; *el valor numérico del potencial de un punto dado del campo es igual al trabajo que realizan las fuerzas del campo al trasladar una carga positiva unidad desde el punto dado hasta el infinito, donde el potencial es cero*. Efectivamente, el trabajo de traslación de una carga unidad desde el punto dado del campo hasta el infinito será:

$$A_0 = \frac{A}{q_0} = \frac{q}{r} - \frac{q}{\infty} = \frac{q}{r}.$$

Quando operamos con sistemas complejos de cargas, elegiremos en lo posible, el valor de cualquier constante que entre en la expresión del potencial, de manera que el potencial de los puntos infinitamente alejados del sistema sea igual a cero ^{*)}. En este caso, el valor numérico del potencial del punto dado será igual al trabajo A ,

^{*)} Esta elección arbitraria de la constante siempre se puede realizar, si el sistema cargado tiene dimensiones finitas.

realizado por las fuerzas del campo que actúan sobre la carga al raspar la carga unidad desde el punto dado hasta el infinito. En los casos prácticos, en los cuales nos interesa generalmente la diferencia de potencial, con frecuencia es preferible considerar igual a cero el potencial de la superficie terrestre.

Veamos ahora el caso general de traslación de una carga q_0 en un campo electrostático cualquiera caracterizado por una intensidad del campo E . En un traslado infinitamente pequeño se realiza el trabajo:

$$dA = f \cos \alpha ds.$$

Teniendo en cuenta que $f = q_0 E$, tendremos que el trabajo elemental dA será:

$$dA = q_0 E \cos \alpha ds.$$

Pero $E \cos \alpha$ es la proyección del vector intensidad E en la dirección tangente a la trayectoria en el punto dado (fig. 35). Denominando E_s a esta proyección tenemos:

$$dA = q_0 E_s ds.$$

El trabajo A realizado en un trayecto finito lo obtendremos integrando esta ecuación:

$$A = \int_A^B q_0 E_s ds,$$

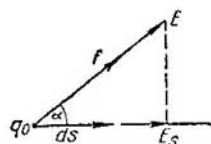


Fig. 35. Determinación del trabajo elemental dA .

donde la integral se toma en los límites correspondientes al punto inicial del trayecto A y al punto final del mismo B . Según lo dicho el valor numérico de este trabajo es igual al producto de la magnitud de la carga q_0 por la diferencia de potencial de los puntos A y B , de donde:

$$\int_A^B q_0 E_s ds = q_0 (V_A - V_B).$$

Sacando de la integral el valor de la carga q_0 , como magnitud constante, y reduciendo tenemos:

$$\int_A^B E_s ds = V_A - V_B.$$

Para una trayectoria cerrada $V_A = V_B$ y, por consiguiente,

$$\int_S E_s ds = 0, \quad (10)$$

donde la integración se extiende a todo el contorno cerrado.

La integral curvilínea en un contorno cerrado $E_s ds$ es el límite de la suma $\Sigma E_s \Delta s$ de todos los elementos Δs del contorno cerrado cuando los elementos Δs tienden a cero y su número crece infinitamente. Esta integral se denomina circulación del vector de intensidad del campo electrostático. La fórmula (10) es la expresión matemática de que en un campo electrostático, el trabajo de las fuerzas eléctricas por un contorno cerrado es igual a cero. La circulación de vector de intensidad del campo electrostático es igual a cero. Como el campo es

que el trabajo de las fuerzas a lo largo de una trayectoria cerrada es igual a cero, se denomina campo potencial, se puede decir que la ecuación (10) expresa el carácter potencial del campo electrostático.

§ 130. Superficies equipotenciales. El potencial de un campo electrostático es una función que varía de un punto a otro. No obstante, en todo caso real se puede determinar un conjunto de puntos de igual potencial.

El lugar geométrico de los puntos de igual potencial lo llamaremos *superficie equipotencial*.

Está claro que el trabajo de traslación de una carga por una superficie equipotencial será igual a cero.

Como ilustración veamos la superficie equipotencial de una carga puntual. El potencial de una carga puntual, como se ha demostrado, es:

$$V = \frac{q}{r}, \quad (1)$$

donde r es la distancia del punto en que se calcula el potencial de la carga q . Por consiguiente, la superficie equipotencial será una superficie de valor r constante, es decir, una esfera de centro en la carga puntual (fig. 36).

La disposición de las superficies equipotenciales frecuentemente se puede determinar por razones de simetría, sin recurrir a la expresión matemática del potencial, basándose en que el trabajo de traslación de una carga por una superficie equipotencial es igual a cero. Por ejemplo, para determinar las superficies equipotenciales creadas por una esfera uniformemente cargada, observemos que el campo creado por la esfera tiene una simetría esférica, por consiguiente, el trabajo realizado por las fuerzas del campo al trasladar una carga positiva unidad por una superficie esférica de cualquier radio es igual a cero. De ello deducimos que las superficies equipotenciales serán, también en este caso, esferas concéntricas con la esfera cargada. El mismo resultado se obtiene para una esfera conductora cargada. En ambos casos, el potencial fuera de la esfera y en su superficie lo determinará la fórmula (1).

Si la carga puntual, o la carga de la esfera, es positiva, las fuerzas del campo que actúan sobre la carga, efectuarán un trabajo positivo

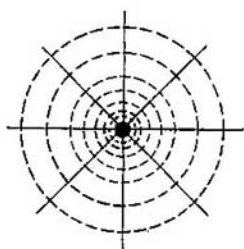


Fig. 36. Superficies equipotenciales (líneas de puntos) y líneas de fuerza (de trazo continuo) de una carga puntual.

al alejar una carga positiva unidad desde el origen del campo. En este caso, por consiguiente, el valor numérico de los potenciales de las superficies equipotenciales disminuirá con el aumento del radio. Si la carga puntual, o la de la esfera, es negativa, al alejarse del origen del campo la carga positiva, las fuerzas del campo realizarán un trabajo negativo. En este caso, el valor de los potenciales de las superficies equipotenciales será negativo y a medida que aumente el radio, aumentarán los potenciales (disminuyendo en valor absoluto).



Fig. 37. Superficies equipotenciales de un plano infinito cargado.

Sea un plano infinito uniformemente cargado. El campo creado por este plano es uniforme y las líneas de fuerza son normales al plano. De esto se deduce que el trabajo de traslación de una carga desde un punto determinado B_1 (fig. 37) a otro punto cualquiera B_2 que se halle a la misma distancia del plano cargado que el punto B_1 , será igual a cero.

Por consiguiente, el potencial de estos puntos es el mismo:

$$V_{B_1} = V_{B_2},$$

así tenemos que las superficies equipotenciales son planos paralelos al plano cargado. Si el plano está cargado positivamente, el valor del potencial disminuirá a medida que nos alejemos del plano cargado. Está claro que las superficies equipotenciales estarán dispuestas simétricamente a ambos lados del plano cargado.

En todos los casos particulares que hemos examinado, el vector de intensidad del campo es perpendicular a las superficies equipotenciales. Demostremos que esto es justo también para el caso general. Sea una superficie equipotencial. Examinemos el trabajo que se realiza al trasladar una carga un pequeño trayecto Δs por la superficie equipotencial. En este caso, por definición, el trabajo de la fuerza eléctrica, $f = qE$, en el trayecto dado será:

$$\Delta A = f \Delta s \cos \alpha = qE \Delta s \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo entre la dirección de la fuerza f y el trayecto Δs . Por otro lado este trabajo es igual a cero, ya que es igual a cero la diferencia de potencial de dos puntos de una superficie equipotencial.

Por consiguiente tenemos:

$$qE \Delta s \cos \alpha = 0,$$

Debido a que ni la carga q , ni la intensidad del campo E , ni el trayecto Δs son iguales a cero, el coseno del ángulo α entre la dirección de la fuerza f y el trayecto Δs debe ser igual a cero; de donde nos da que la fuerza f es perpendicular al trayecto Δs . El sentido de la fuerza $f=qE$ coincide con el de la intensidad del campo (cuando $q>0$), o es opuesto al de la misma (cuando $q<0$). Por lo tanto, la igualdad $\cos \alpha=0$ significa que la dirección de la intensidad del campo es perpendicular a las superficies equipotenciales.

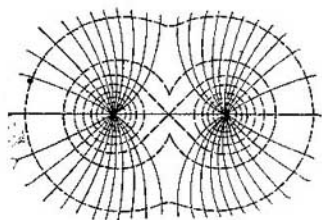


Fig. 38. Superficies equipotenciales (líneas de puntos) y líneas de fuerza (de trazo continuo) de dos cargas puntuales de un mismo signo.

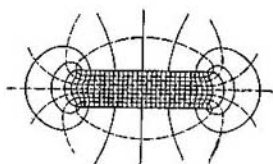


Fig. 39. Superficies equipotenciales (líneas de puntos) y líneas de fuerza (de trazo continuo) de dos discos cargados y de signo contrario.

Así tenemos que las líneas de fuerza son una familia de líneas normales (ortogonales) a la familia de superficies equipotenciales. En la fig. 38 vienen representadas las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales para el caso de dos cargas numéricamente iguales y del mismo signo, y en la fig. 39, para dos discos cargados y de signo contrario, pero de densidades superficiales numéricamente iguales.

§ 131. Relación entre la intensidad del campo electrostático y el potencial. Establezcamos ahora la relación entre el potencial y la intensidad del campo. La existencia de esta relación se deduce del hecho de que el trabajo de las fuerzas eléctricas en función de la intensidad del campo, se puede expresar también en función de la diferencia de potencial de los puntos del campo.

Sea un campo electrostático cualquiera. Tracemos en él dos superficies equipotenciales cercanas. Sea V el potencial de una de estas superficies, y $V+\Delta V$, el de la otra. Supongamos que $\Delta V>0$ (fig. 40). En determinado punto B de la superficie equipotencial V trazamos una normal n a la superficie en el sentido hacia donde el potencial aumenta. El punto de intersección de la normal n con la su-

perficie equipotencial $V + \Delta V$ lo designaremos con la letra B' . Sea Δn la distancia entre los puntos B y B' . La intensidad del campo E es perpendicular a la superficie equipotencial, es decir, va dirigida según la normal n , y debido a la proximidad de los puntos B y B' , se puede considerar constante en toda esta distancia entre los puntos. Entonces, el trabajo de traslación de cierta carga q desde el punto B al punto B' se expresará de la siguiente manera:

$$A = qE\Delta n.$$

Por otro lado, este mismo trabajo A se puede expresar en función de

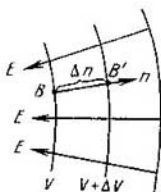


Fig. 40. Normal n a dos superficies equipotenciales próximas.

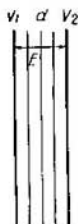


Fig. 41. Dos planos cargados.

la diferencia de potencial de los puntos B y B' :

$$A = q[V - (V + \Delta V)].$$

Comparando ambas ecuaciones del trabajo A , hallamos que:

$$E \cdot \Delta n = -\Delta V.$$

que nos da para E la siguiente ecuación:

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta n}. \quad (1)$$

El signo menos indica que la intensidad del campo E va en sentido contrario al de la normal n . Efectivamente, la normal n la hemos trazado en el sentido en que aumenta el potencial, mientras que la intensidad del campo E , por definición, va en el sentido en que actúa la fuerza sobre la carga positiva, es decir, hacia donde disminuye el potencial. Si en la fórmula (1) suponemos $\Delta n = 1$, obtenemos que el valor numérico de la intensidad del campo es igual a la variación del potencial por unidad de longitud en dirección perpendicular a la superficie equipotencial en el sentido hacia donde disminuye el potencial.

La magnitud $\Delta V/\Delta n$, que indica la velocidad de variación del potencial en la traslación dirigida perpendicularmente a las superficies equipotenciales en el sentido de su aumento, se llama *gradiente del potencial*. Utilizando el concepto de gradiente del potencial, la ecuación (1) se puede formular así: el *valor numérico de la intensidad del campo es igual al gradiente del potencial*.

Veamos el siguiente ejemplo.

Determinemos la intensidad del campo electrostático entre dos planos paralelos que tienen un potencial constante.

Sean dos planos paralelos infinitos de potenciales V_1 y V_2 . La distancia entre los planos es igual a d (fig. 41). Por razones de simetría deducimos que las superficies equipotenciales son planos paralelos a los dados.

La intensidad del campo electrostático es la misma para todos los puntos que se hallan entre los planos cargados y de dirección perpendicular a ellos. El valor numérico de la intensidad del campo lo obtenemos hallando la variación del potencial por unidad de longitud en dirección perpendicular a las superficies equipotenciales:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}. \quad (2)$$

La intensidad del campo va en sentido de la disminución del potencial. De esta manera, la intensidad del campo entre dos planos paralelos de potencial determinado es directamente proporcional a la diferencia de sus potenciales e inversamente proporcional a la distancia entre ellos.

En el caso de un campo variable, la magnitud algebraica de la intensidad del campo E en el punto dado la debemos considerar igual al límite a que tiende la relación $-\Delta V/\Delta n$ cuando Δn disminuye infinitamente:

$$E = - \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta n} \right),$$

o, utilizando las notaciones del cálculo diferencial:

$$E = - \frac{dV}{dn}. \quad (2a)$$

Utilicemos el concepto de *gradiente* que se da en el cálculo vectorial. Sea una magnitud escalar C en función de las coordenadas x , y , z . Por grad C se entiende un vector \mathbf{A} , cuyas componentes A_x , A_y , A_z según los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas, vienen determinadas por las relaciones:

$$A_x = \frac{\partial C}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial C}{\partial y}, \quad A_z = \frac{\partial C}{\partial z}. \quad (3)$$

Resulta que este vector va dirigido, en cada punto dado según la normal a la superficie equipotencial de la escalar C en el sentido del aumento de C . Su longitud es igual a dC/dn . Utilizando el concepto de gradiente, la ecuación (2a) se

puede escribir de la manera siguiente:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (4)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V. \quad (4a)$$

De esta manera tenemos que el vector de intensidad del campo \mathbf{E} es igual al gradiente del potencial V tomado con signo contrario.

Ejemplo 1. Determinemos la intensidad del campo en el eje de un dipolo a una distancia r , grande en comparación con las propias dimensiones del dipolo.

Este problema ya lo hemos resuelto directamente en el § 124. Utilizando la relación de la (2a) entre la intensidad del campo y el potencial, resolveremos este problema de una manera más sencilla. El potencial en el punto A (fig. 12) es igual a la suma de potenciales creados por las cargas $+q$ y $-q$:

$$V = \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} = q \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} = q \frac{l}{r_+ r_-}.$$

A distancias r_+ y r_- mucho mayores que l , tenemos aproximadamente que $r_+ \cdot r_- = r^2$, de donde

$$V = \frac{ql}{r^2} = \frac{p}{r^2},$$

donde p es el momento del dipolo.

La dirección de la normal n a la superficie equipotencial en el punto A coincide con r , por consiguiente, según la (2a):

$$E = -\frac{dV}{dr} = \frac{2p}{r^3},$$

que coincide con la fórmula (5) del § 124.

§ 132. Relación entre la intensidad del campo, el potencial y la densidad volumétrica de las cargas. Entre la tensión del campo electrostático y la densidad de las cargas hay una relación diferencial que es justa para cada punto del campo. Esta relación se puede hallar mediante un análisis más detallado del teorema de Ostrogradski-Gauss.

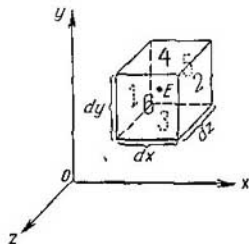


Fig. 42. Representación gráfica para deducir la relación entre la intensidad del campo y la densidad volumétrica de las cargas.

Supongamos que en la región que estamos examinando, la carga está distribuida con una densidad volumétrica de ρ , que no es constante. Sea un volumen elemental de aristas dx , dy , dz paralelas a los ejes de coordenadas (fig. 42). El volumen del cubo es igual a $dx \, dy \, dz$. Debido a la pequeñez del cubo, se puede considerar que la densidad ρ de la carga es constante en todos los puntos del interior del cubo; por lo tanto, la carga q que se halla en el interior del cubo, será igual a $\rho \, dx \, dy \, dz$. La intensidad del campo en el centro del cubo (marcado con un asterisco en la fig. 42), la llamaremos \mathbf{E} , y sus componentes, E_x , E_y y E_z .

Entonces, el valor de la componente E_x en la cara 1 será:

$$E_{x_1} = E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx,$$

ya que la coordenada x de la cara 1 es $\frac{1}{2} dx$ menor que la del centro del cubo. De la misma manera, para la componente E_{x_2} en la cara 2 obtenemos:

$$E_{x_2} = E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx.$$

Igualmente, para las componentes E_y y E_z en las cuatro caras restantes del cubo, obtenemos:

$$\begin{aligned} E_{y_3} &= E_y - \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} dy, & E_{z_4} &= E_z - \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot \frac{1}{2} dz, \\ E_{y_5} &= E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} dy, & E_{z_6} &= E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot \frac{1}{2} dz. \end{aligned}$$

Apliquemos a nuestro cubo el teorema de Ostrogradski-Gauss. Para ello calculemos el flujo eléctrico a través de las caras del cubo. Recordemos que el flujo eléctrico dN a través de la superficie dS es igual al producto de la componente de la intensidad del campo E normal a la superficie, por el área de la superficie dS . La normal a la cara 1 va dirigida hacia el sentido negativo del eje OX , por eso la componente de la intensidad del campo E normal a la cara 1 será igual a $-E_{x_1}$. El área de la cara 1 es igual a $dy dz$, de donde el flujo eléctrico a través de la cara 1 será igual a:

$$dN_1 = -E_{x_1} dy dz = -E_x dy dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx dy dz.$$

La normal a la cara 2 va dirigida en el sentido del eje positivo OX , por eso, el flujo eléctrico a través de ella será:

$$dN_2 = +E_{x_2} dy dz = E_x dy dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx dy dz.$$

La suma de los flujos a través de las caras 1 y 2 será:

$$dN_1 + dN_2 = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz.$$

De la misma manera obtenemos que la suma de los flujos eléctricos a través de las caras 3 y 4 es:

$$dN_3 + dN_4 = \frac{\partial E_y}{\partial y} dx dy dz,$$

y a través de las caras 5 y 6:

$$dN_5 + dN_6 = \frac{\partial E_z}{\partial z} dx dy dz.$$

El flujo total a través de las seis caras del cubo será:

$$dN = dN_1 + dN_2 + dN_3 + dN_4 + dN_5 + dN_6 = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (1)$$

Según el teorema de Ostrogradski-Gauss, $dN = 4\pi q$, donde q es la carga encerrada en el interior del cubo; pero esta carga es igual a $\rho dx dy dz$, de donde

utilizando la ecuación (1) de la dN , obtenemos que:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho. \quad (2)$$

La fórmula (2) nos da la relación buscada entre la densidad volumétrica ρ de las cargas y las derivadas del vector de intensidad del campo E . Como se sabe del cálculo vectorial, la suma de las derivadas de las componentes de un vector según los correspondientes ejes de coordenadas se denomina divergencia del vector y se denota así:

$$\operatorname{div} E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Utilizando la notación $\operatorname{div} E$, escribimos la fórmula (2) de la manera siguiente:

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho.$$

Utilicemos las fórmulas (4) de la pág. 54 que nos dan la relación entre las componentes de la intensidad del campo E y las derivadas del potencial según las coordenadas:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

La derivada segunda de estas expresiones según las coordenadas será:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

de donde se deduce que:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right).$$

Poniendo este valor de la suma $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ en la (2), hallamos que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho. \quad (3)$$

Esta fórmula nos da la relación entre la densidad volumétrica de las cargas ρ y las segundas derivadas del potencial según las coordenadas. La suma de las segundas derivadas de una función $F(x, y, z)$ según las variables x, y, z , se ha establecido denominar con el símbolo $\Delta F(x, y, z)$, donde Δ se denomina laplaciana u operador laplaciano. Introduciendo esta notación en la fórmula (3) obtenemos:

$$\Delta V = -4\pi\rho. \quad (3a)$$

Esta ecuación es la ecuación diferencial fundamental del potencial electrostático.

§ 133. Conductores en el campo electrostático. Como ya se ha indicado en el § 122, el conductor es un cuerpo que tiene electrones libres cuyas cargas están compensadas con las cargas positivas ligadas a la red cristalina del conductor. Los electrones libres del conductor, bajo la acción de fuerzas eléctricas de dirección determinada, adquieren una velocidad en el mismo sentido en que actúan las fuerzas

y, por consiguiente, pueden desplazar cargas eléctricas, es decir, crear una corriente eléctrica. Si nosotros nos limitamos a los problemas electrostáticos, debemos poner en claro las condiciones de equilibrio de las cargas. La condición indispensable de equilibrio de las cargas en el interior del conductor es la igualdad a cero de la intensidad del campo electrostático. Si la intensidad del campo no fuese igual a cero, crearía fuerzas eléctricas que originarían traslaciones orientadas de electrones. Así tenemos que la condición del carácter electrostático del problema es:

$$E = 0, \quad (1)$$

pero esta condición tiene que cumplirse en todos los puntos dentro del conductor.

La condición (1) lleva a la conclusión de que en un conductor cargado, las cargas libres (no compensadas) pueden localizarse solamente en su superficie. Para demostrar esto, apliquemos el teorema de Ostrogradski-Gauss a una superficie cualquiera que encierre determinado volumen *dentro* del conductor. En todos los puntos de esta superficie, la intensidad del campo electrostático, según la (1), es igual a cero, ya que la superficie la hemos trazado *dentro* del conductor. Por consiguiente, el flujo eléctrico a través de la superficie es igual a cero, por lo tanto también es igual a cero la carga total que se halla dentro de la superficie considerada. Como la superficie ha sido elegida arbitrariamente, el resultado es aplicable a cualquier región del interior de un conductor. Así tenemos que en cualquier zona del interior de un conductor situado en un campo electrostático, la carga es igual a cero. Las cargas, en el conductor cargado, se ubican solamente en la superficie del conductor.

La ausencia de cargas en las partes internas del conductor es una consecuencia del teorema de Ostrogradski-Gauss que, a su vez, se deriva de la ley de Coulomb, por la cual las fuerzas de acción recíproca de las cargas puntuales son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre ellas. Si en la ecuación que expresa la ley de Coulomb

$$f = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

el exponente de r no fuese igual a 2, sino a otro número cualquiera n , en las partes internas del conductor habría cargas. Así tenemos que la ausencia de cargas dentro del conductor es una confirmación indirecta de la veracidad de la ley de Coulomb. Las mediciones directas de Coulomb con la balanza de torsión (§123) no eran muy exactas. Realizarlas con mayor exactitud es muy difícil, ya que difícilmente se pueden crear las condiciones para que con un grado de exactitud bastante elevado se puedan considerar puntuales las cargas. La ausencia de cargas dentro del conductor se puede establecer

con mucha mayor exactitud. Una comprobación de esta clase la realizó Cavendish, el cual, en 1773, es decir 12 años antes que Coulomb, estableció la ley de la razón inversa de las fuerzas eléctricas respecto al cuadrado de la distancia. Pero los trabajos de Cavendish no se conocieron hasta 1879, año en que los publicó Maxwell.

Maxwell repitió los experimentos de Cavendish con más exactitud y de manera un poco distinta.

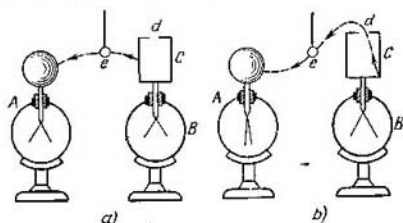


Fig. 43. Experimento con la caja de Faraday.

Maxwell dispuso dos esferas conductoras, una dentro de la otra, y las puso en contacto con un alambre conductor. Al comunicarle a la esfera exterior una carga, la interior permanecía descargada, lo cual Maxwell lo pudo establecer con gran exactitud; y encontró que el exponente n de la ley de Coulomb no podía diferir de 2 en una fracción mayor de $1/20\ 000$.

Como veremos más adelante, las cargas no sólo no se hallan dentro del conductor, sino que tampoco las hay en la superficie interna de todo conductor hueco. En la teoría general de los fenómenos electrostáticos se demuestra que la intensidad del campo E dentro de la cavidad de un conductor cargado, es decir, debajo de la capa superficial, también es igual a cero. En este caso se sobreentiende que en el interior no haya otros cuerpos cargados.

La propiedad de las cargas de distribuirse en la superficie exterior del conductor se puede demostrar de manera muy convincente. Sean dos electroscopios A y B , uno de los cuales lleva atornillado un cilindro hueco casi cerrado C (fig. 43), teniendo solamente en la parte superior un pequeño orificio d . Este cilindro se denomina caja de Faraday. Comuniquemos al electroscopio B una carga determinada, lo cual se revela en que se separan las hojas del electroscopio. Tomemos una pequeña esfera e sujeta a un hilo de material aislante. Tocando con la esfera e la parte exterior de la caja de Faraday C , cargamos la esfera; después, según el trayecto indicado por la línea de puntos de la fig. 43, *a*, la ponemos en contacto con el electroscopio A . Con ello le comunicamos al electroscopio A cierta carga. Répiten-

do este traslado varias veces se puede obtener una sensible separación de las hojas del electroscopio *A*. Si en vez de hacer estas operaciones, ponemos en contacto la esfera *e* con la parte interna de la caja de Faraday *C* (fig. 43, *b*) no le comunicaremos a la esfera ninguna carga ni podremos cargar el electroscopio *A*.

El experimento descrito es reversible. Sea un cuerpo *A* (fig. 44) de potencial constante *V* mantenido por una fuente de energía. Carguemos la esfera *e* poniéndola en contacto con el cuerpo *A* y, después, acerquemosla al electroscopio *B* poniéndola en contacto con la parte

interna de la caja de Faraday *C*. Como la esfera, en este caso, es una componente de las partes internas de un cuerpo complejo formado por ella y la caja de Faraday, en la esfera no deben conservarse las cargas. En otras palabras, la esfera transmite *por entero* su carga al electroscopio *B*. Podemos repetir este traslado las veces que se quiera y veremos que la esfera siempre transmite toda su carga al electroscopio, ya que la condición de que no haya cargas en las partes internas de un conductor, no depende ni de la magnitud de su carga ni de su potencial. Así tenemos que transportando

la esfera *e* un número bastante elevado de veces podemos cargar el electroscopio *B* hasta un potencial *mayor* que *V* del cuerpo *A*, del cual tomamos las cargas. En principio, repitiendo esta traslación infinito número de veces, podemos elevar el potencial del electroscopio *B* hasta el infinito*. Prácticamente, el aumento del potencial lo limita la fuga de cargas, la cual aumenta con el potencial. El esquema de este experimento con la caja de Faraday se utiliza en el moderno generador de alto voltaje, que permite alcanzar diferencias de potencial de varios millones de voltios (véase el t. III).

La ausencia de campo en la cavidad interna del conductor permite crear la *protección electrostática (pantalla)*. Un conductor que rodee por todos los lados a una cavidad, la protege contra los campos electrostáticos creados por las cargas exteriores. Prácticamente, el conductor macizo se puede sustituir por una red metálica bastante tupida. A fin de crear una protección electrostática, las hojas del electroscopio se colocan en el interior de una caja metálica (véase lo dicho en la pág. 42). La caja se une a tierra, enton-

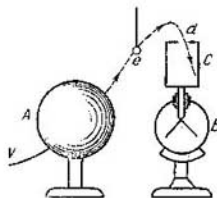


Fig. 44. Experimento con la caja de Faraday.

* En el § 137 veremos que la energía de un cuerpo cargado aumenta con el aumento del potencial *V*. De aquí que pueda parecer que este experimento con la caja de Faraday contradiga a la ley de la conservación de la energía. No obstante no es así: en la traslación de la esfera *e* hacia la caja de Faraday hay que invertir un trabajo, que será tanto mayor cuanto mayor sea la carga de la caja

ces adquiere el potencial de la Tierra y los campos exteriores no pueden variar ni el campo ni el potencial del interior de la caja. Las hojas del electroscoio que se cargan deben estar aisladas de la caja. Si las unimos a la caja con un conductor, será imposible comunicarles carga alguna y no se separarán cualesquiera que fueren las fuentes de electrización que tuviésemos fuera de la caja del electroscoio.

§ 134. **Intensidad del campo en las proximidades de la superficie de un conductor.** Debido a que la intensidad del campo dentro de un conductor es igual a cero, éste es una especie de zona de potencial constante. Efectivamente, el valor numérico de la intensidad del campo es igual a la variación del potencial por unidad de longitud normal a la superficie equipotencial. De aquí, siendo igual a

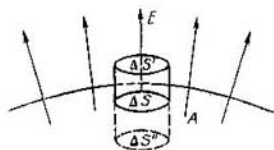


Fig. 45. Intensidad del campo E en las proximidades de la superficie de un conductor cargado.

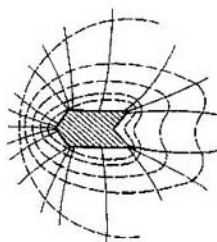


Fig. 46. Disposición de las superficies equipotenciales (líneas de puntos) y de las líneas de fuerza (de trazo continuo) de un cuerpo con salientes y entrantes.

cero el campo en todos los puntos del conductor, nos da que la variación del potencial es igual a cero en todos los puntos del conductor; por lo tanto, el valor del propio potencial será constante. De esto se deduce que *todos los puntos de un conductor, tanto en el interior como en la superficie, tienen un mismo potencial*. De donde se infiere que la superficie de un conductor es una superficie equipotencial. Como la intensidad del campo electrostático en cada punto dado es normal a la superficie equipotencial en este punto, *la intensidad del campo electrostático fuera del conductor en las proximidades a su superficie, es normal a la superficie del conductor*.

Hay una relación determinada entre la intensidad del campo electrostático en las proximidades de la superficie del conductor y la densidad superficial de cargas en su superficie. Establezcamos esta relación utilizando el teorema de Ostrogradski-Gauss. Sea una pequeña área ΔS en la superficie de un conductor cargado A (fig. 45). Supongamos que la densidad superficial de la carga en esta

área se pueda considerar constante e igual a σ . Entonces, la carga q que corresponde a esta área será:

$$q = \sigma \cdot \Delta S. \quad (1)$$

Tracemos mentalmente una pequeña superficie cilíndrica cerrada S de generatrices normales a la superficie del conductor y de bases $\Delta S'$ y $\Delta S''$, paralelas a ΔS . Según el teorema de Ostrogradski-Gauss, el número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie cerrada S , es igual a $4\pi q$. Como en el interior del conductor, donde está la base $\Delta S''$, la intensidad del campo $E=0$ y la superficie lateral es paralela a E , todas las $4\pi q$ líneas de fuerza pasarán a través de la base $\Delta S'$. Llamando E a la intensidad del campo en los límites de esta base $\Delta S'$, tenemos que:

$$E \cdot \Delta S' = 4\pi q,$$

de donde, utilizando la relación (1) y observando que $\Delta S' = \Delta S$, hallamos que:

$$E = 4\pi\sigma. \quad (2)$$

De la ecuación (2) se ve que la intensidad del campo electrostático en las proximidades de un conductor es directamente proporcional a la densidad superficial de carga.

En los casos en que la superficie exterior del conductor tenga salientes, las superficies equipotenciales que pasan cerca del conductor, se acercarán a los salientes. En estos lugares la intensidad del campo será mayor, ya que en ellos, la variación del potencial por unidad de longitud, es mayor. Así tenemos que en los salientes la intensidad del campo eléctrico será mayor y, por consiguiente, mayor será la densidad superficial de carga en los mismos salientes. En la fig. 46 se representa un cuerpo conductor cargado, con salientes y entrantes; la intensidad del campo en el espacio que lo rodea, es máxima en las proximidades de los salientes y mínima, en los entrantes. Las superficies equipotenciales representadas en la fig. 46 por líneas de puntos, son más densas en los lugares donde el campo es más intenso. En correspondencia con ello, la densidad superficial de carga del cuerpo, tendrá valores máximos en los salientes y mínimos, en los entrantes.

En las regiones internas, la intensidad del campo será igual a cero y, en correspondencia con ello, la densidad de la carga en las superficies internas de los conductores, también será igual a cero.

Sobre todo es intenso el campo en las proximidades de los salientes muy agudos. Esto hay que tenerlo en cuenta al cargar conductores a grandes potenciales: si hay ángulos o salientes agudos, cerca de ellos puede tener lugar una perforación del dieléctrico que le rodea (en un caso particular, el aire) y empezar la descarga, que es el

llamado *efecto corona* (*efluvio eléctrico*); por eso, todas las partes metálicas de instrumentos y aparatos que se cargan a altos potenciales, se les da forma redondeada y las superficies se hacen lisas.

Todo sector de superficie cargada de un conductor se halla en un campo electrostático formado por la parte restante de la superficie del conductor cargado.

Por esto, sobre cada sector ΔS (fig. 47) de un conductor cargado actúa una fuerza

$$\Delta f = \sigma \Delta S \cdot E_1, \quad (3)$$

donde E_1 es la intensidad del campo creado por el resto de la superficie del conductor.

Para determinar E_1 examinemos el campo que crea el elemento ΔS en los puntos muy próximos a su superficie. Este campo es normal a la superficie del elemento ΔS y simétrico a ambos lados del mismo.

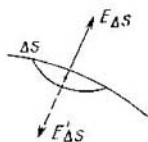


Fig. 47. Intensidad del campo creado por un elemento de superficie de un conductor cargado.

La intensidad de este campo a ambos lados del elemento ΔS viene representada en la fig. 47 por las flechas $E_{\Delta S}$ y $E'_{\Delta S}$.

La intensidad total E creada por toda la superficie del cuerpo cargado en las proximidades de ΔS , fuera del cuerpo, naturalmente será igual a la suma de las intensidades E_1 y $E_{\Delta S}$:

$$E = E_1 + E_{\Delta S}.$$

Como los vectores E y $E_{\Delta S}$ son perpendiculares a la superficie del elemento ΔS , el vector E_1 también será perpendicular a ΔS , por consiguiente, esta última igualdad se puede escribir en forma algebraica

$$E = E_1 + E_{\Delta S}.$$

De la ecuación (2) sabemos que $E = 4\pi\sigma$, de donde:

$$E_1 + E_{\Delta S} = 4\pi\sigma. \quad (4)$$

De la misma manera obtenemos que el campo junto a la superficie del elemento ΔS dentro del cuerpo es igual a la suma $E_1 + E'_{\Delta S} = E_1 - E_{\Delta S}$. Como dentro del cuerpo la suma de las intensidades del campo es igual a cero, tenemos que

$$E_1 - E_{\Delta S} = 0 \quad (5)$$

De las ecuaciones (4) y (5) hallamos que:

$$E_1 = E_{\Delta S} = 2\pi\sigma,$$

después de lo cual, la ecuación (3) nos da la fuerza buscada que actúa sobre el elemento superficial del cuerpo cargado:

$$\Delta f = 2\pi\sigma^2 \cdot \Delta S,$$

o, teniendo en cuenta la (2):

$$\Delta f = \frac{E^2}{8\pi} \Delta S.$$

Como las cargas de un mismo signo se repelen, la fuerza Δf , independientemente del signo de la carga del conductor, va dirigida hacia fuera del conductor.

§ 135. El dipolo en un campo eléctrico exterior. Examinemos el dipolo en un campo eléctrico exterior *uniforme* E . Sea un dipolo de cargas $+q$ y $-q$ situadas a una distancia invariable l una de otra.

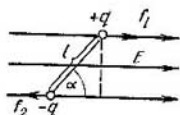


Fig. 48. Dipolo en un campo exterior uniforme.

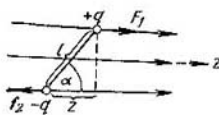


Fig. 49. Dipolo en un campo exterior variable (no uniforme).

El momento eléctrico de este dipolo, según lo dicho en el § 124, es $p=ql$. Sea α el ángulo que forma la dirección del dipolo con la de la intensidad del campo E (fig. 48). Sobre la carga positiva del dipolo actúa la fuerza $f_1=qE$, dirigida según el campo; y sobre la negativa, la fuerza $f_2=-qE$, de sentido contrario al campo. Estas fuerzas forman un par de momento $M=fl \text{ sen } \alpha = qlE \text{ sen } \alpha$. Teniendo en cuenta que $ql=p$, obtenemos que sobre un dipolo en un campo eléctrico exterior uniforme actúa un par de fuerzas con un momento

$$M = pE \text{ sen } \alpha. \tag{1}$$

Accionado por este par, el dipolo tiende a girar y orientarse a lo largo de las líneas de fuerza.

El momento del dipolo p se puede considerar una magnitud vectorial. Para ello tracemos la distancia l como un vector dirigido desde la carga negativa $-q$, a la positiva $+q$. Determinemos el vector p de la ecuación:

$$p = ql. \tag{2}$$

Entonces tenemos que en un campo eléctrico exterior uniforme, el dipolo tiende a girar a manera que el sentido del vector de su

momento eléctrico \mathbf{p} coincide con el de \mathbf{E} . Esta posición corresponde al ángulo $\alpha = 0$ y, según (1), a la igualdad a cero del momento de fuerzas que actúan sobre el dipolo. Está claro que el momento de las fuerzas que actúan sobre el dipolo, será también igual a cero ($M=0$) cuando $\alpha = \pi$. Sin embargo, esta última posición es inestable: a la menor desviación del dipolo surge un momento que lo inclina más apartándolo de esta posición.

Si al principio el dipolo formaba con las líneas de fuerza un ángulo α diferente de cero, al acercarse a la posición de equilibrio, naturalmente, adquirirá cierta velocidad de rotación y por inercia se pasará de la posición de equilibrio. Como resultado de la acción del momento de fuerzas M , el dipolo empezará a oscilar alrededor de la posición de equilibrio. Si sobre el dipolo, además del momento de fuerzas M , actúan fuerzas de rozamiento, las oscilaciones serán amortiguadas, y el dipolo, al fin y al cabo, se orientará a lo largo de las líneas de fuerzas. Si las fuerzas de rozamiento son muy grandes, su movimiento puede ser aperiódico, es decir, el dipolo se aproxima según una asíntota a la posición de equilibrio disminuyendo gradualmente la velocidad hasta cero.

En el § 35 del t. I hemos visto que el momento de fuerzas \mathbf{M} se puede considerar una magnitud vectorial, cuya dirección está relacionada con la dirección de las fuerzas, componentes del par, según la regla del sacacorchos. En la fig. 48, el vector \mathbf{M} está dirigido perpendicularmente al plano del dibujo. La magnitud y el sentido vienen determinados por el producto vectorial de \mathbf{p} y \mathbf{E} :

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (1a)$$

Estudiemos ahora el dipolo en un campo eléctrico exterior *variable (no uniforme)*. En este caso, las líneas de fuerza serán convergentes o divergentes. No obstante, supondremos que dentro de los límites dimensionales del dipolo, la variación del campo es tan insignificante, que las fuerzas f_1 y f_2 que actúan sobre las cargas $+q$ y $-q$, se pueden considerar dirigidas en sentidos opuestos (según el eje Z y en sentido opuesto), y que la mayor variación de la intensidad del campo se produce según la dirección del eje Z . Estas fuerzas serán:

$$f_1 = +qE_1, \quad f_2 = -qE_2,$$

donde E_1 y E_2 son los valores de las intensidades del campo en los lugares donde están las cargas $+q$ y $-q$. La suma de estas fuerzas es:

$$f = f_1 - f_2 = q(E_1 - E_2). \quad (3)$$

Midamos la coordenada z paralelamente a las fuerzas, como se indica en la fig. 49. Entonces

$$E_1 - E_2 = \left(\frac{\Delta E}{\Delta z} \right) Z,$$

donde $(\Delta E/\Delta z)$ es el gradiente de intensidad del campo. Observando que $Z=l\cos\alpha$, tenemos que

$$E_1 - E_2 = \left(\frac{\Delta E}{\Delta z}\right) l \cos \alpha.$$

Colocando este valor de $E_1 - E_2$ en la (3), hallamos que:

$$f = ql \left(\frac{\Delta E}{\Delta z}\right) \cos \alpha$$

o

$$f = p \left(\frac{\Delta E}{\Delta z}\right) \cos \alpha. \quad (4)$$

Así tenemos que en un campo eléctrico exterior variable, además del momento de fuerzas, sobre el dipolo actúa una fuerza que será tanto mayor, cuanto mayor sea el gradiente del campo, es decir, cuanto mayor sea la variación del campo. Según la ecuación (4), cuando $\alpha < \frac{\pi}{2}$, la fuerza f va dirigida en el sentido en que el valor de la intensidad del campo es mayor. Para los valores dados de p y de

$(\Delta E/\Delta z)$, la fuerza f alcanzará su valor máximo cuando $\alpha=0$, es decir, cuando el dipolo se oriente a lo largo de las líneas de fuerza del campo. En definitiva tenemos que en un campo exterior, el dipolo tiende a girar orientándose a lo largo de las líneas de fuerza coincidiendo, del extremo negativo al positivo, con el sentido de las líneas de fuerza del campo E ; además, sobre el dipolo actúa una fuerza más que es proporcional al momento del dipolo p y al gradiente de la intensidad del campo $(\Delta E/\Delta z)$. Esta fuerza traslada al dipolo hacia el lado donde la intensidad del campo es mayor.

La existencia de fuerzas que trasladan al dipolo hacia la región de mayor intensidad del campo, explica la atracción que ejerce un objeto de vidrio o ebonita electrizado sobre cuerpos ligeros que no han estado en contacto con el primero. Bajo la influencia del campo electrostático del vidrio o de la ebonita, en el cuerpo atraído surgen cargas inducidas que lo transforman en dipolo. Debido a la variación del campo del objeto electrizado, sobre este dipolo actúa una fuerza que lo traslada hacia la región donde el valor del campo es mayor, es decir, hacia el objeto electrizado (vidrio o ebonita), independientemente del signo de la carga.

§ 136. Capacidad eléctrica de los conductores. Pasemos a examinar una propiedad muy importante de los conductores, llamada *capacidad eléctrica* o simplemente *capacidad*. La experiencia nos dice que diferentes conductores, habiendo sido cargados de la misma cantidad de electricidad, adquieren distintos potenciales. Esto indica que se diferencian unos de otros por la propiedad física que caracteriza una magnitud denominada *capacidad*.

La capacidad de un conductor depende de la disposición de los cuerpos que lo rodean, por eso determinaremos primeramente el concepto de capacidad de un conductor individual, es decir, de un conductor en cuyas proximidades no haya otros cuerpos que puedan influir en la distribución de cargas en él. El potencial V de un conductor individual es proporcional a la magnitud de la carga Q , ya que al aumentar la carga un número determinado de veces, el mismo número de veces aumenta la intensidad del campo y, por consiguiente, el trabajo de traslación de una carga desde el conductor hasta el infinito:

$$Q = CV. \quad (1)$$

El coeficiente de proporcionalidad C depende de la forma y de la magnitud del conductor, y se llama *capacidad* del conductor. De la igualdad (1) tenemos que:

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (2)$$

Esta relación indica que la *capacidad de un conductor individual es una magnitud física de valor igual a la cantidad de electricidad que hay que comunicar al conductor sin carga para que el potencial sea igual a la unidad* (si $V=1$, $C=Q$). En este caso consideramos que la constante indeterminada en la expresión del potencial se ha elegido de manera que los potenciales de los puntos infinitamente alejados del conductor, sean iguales a cero.

La dimensión de la capacidad se determina de la relación (2):

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}}{M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}} = L,$$

es decir, tiene la *dimensión de longitud*. Por unidad de capacidad tomaremos la de un conductor individual cuyo potencial varía en una unidad al comunicarle una carga unidad. En el sistema *CGSE* será un conductor que al comunicarle una unidad *CGSE* de carga, varíe su potencial en una unidad *CGSE* de potencial. Es fácil de ver que esto será la capacidad de una esfera de 1 cm de radio. Efectivamente, el potencial de una esfera conductora es (véase el § 130):

$$V = \frac{Q}{R},$$

donde R es el radio de la esfera. Comparando esta ecuación con la fórmula (2), nos da que

$$C = R,$$

es decir, la capacidad de una esfera es numéricamente igual al radio de la misma. Por eso en el sistema *CGSE*, por unidad de capacidad

se toma la de una esfera individual de radio igual a 1 cm. En el sistema CGSE se ha establecido llamar centímetro a la unidad de capacidad.

En el sistema internacional de unidades, por unidad de capacidad se ha determinado tomar la de un conductor que, al aumentarle la carga en un culombio, acarrea un aumento de potencial de un voltio. Esta unidad se denomina faradio. La relación entre la unidad de capacidad del sistema CGSE y el faradio es la siguiente:

$$1 \text{ faradio} = \frac{1 \text{ culombio}}{1 \text{ voltio}} \cong \frac{3 \cdot 10^9 \text{ unidades CGSE de carga}}{\frac{1}{300} \text{ unidades CGSE de potencial}} \cong \\ \cong 9 \cdot 10^{11} \text{ unidades CGSE de capacidad.}$$

Está claro que el faradio es una unidad excesivamente grande. Efectivamente, es la capacidad de una esfera de radio igual a $9 \cdot 10^{11}$ cm, es decir, de un radio de 9 millones de kilómetros (1 400 veces mayor que el radio de la esfera terrestre). Por eso, en la práctica se usa, junto con el faradio, una unidad menor denominada *microfaradio*, que es igual a una millonésima parte del faradio. La capacidad de un microfaradio la tiene una esfera individual de 9 km de radio, es decir, una esfera bastante grande aún.

La capacidad de un conductor depende de los cuerpos que lo rodean. Efectivamente, por capacidad de un conductor entendemos la magnitud física que mide la relación entre la carga del conductor y su potencial; mientras que el potencial del conductor depende no sólo de la carga del mismo, sino de la de los cuerpos que lo rodean. Incluso si los cuerpos que rodean al conductor dado, no han sido cargados de antemano, al cargar el conductor que examinamos, se cargan por influencia y, de esta manera, varían el potencial en el conductor dado. En este caso, el concepto de capacidad es natural generalizarlo introduciendo la siguiente definición que sirve también para los problemas dinámicos:

$$C = \frac{dQ}{dV};$$

la capacidad se define como la relación entre el incremento de la carga del conductor y el incremento de su potencial al tender a cero estos incrementos, es decir, como la derivada de la carga de un conductor respecto a su potencial. No obstante se puede construir un sistema de conductores de capacidad prácticamente independiente de los cuerpos que lo rodean; para ello, el sistema debe estar protegido contra la influencia de otros cuerpos. Los condensadores son un ejemplo de ello.

El denominado *condensador plano* consta de dos placas paralelas A y B (fig. 50), colocadas a una distancia d una de otra, distancia

que es pequeña en comparación con las propias dimensiones. Consideraremos que entre las placas no hay nada (prácticamente hay aire).

Supongamos que la placa B está unida a tierra. Si a la otra placa A se le comunica una carga $+Q$, debido a la inducción electrostática, en la placa B surge una carga $-Q$ (la carga $+Q$ igual a ésta se va a tierra y no desempeña ningún papel). La placa B unida a

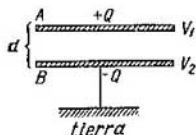


Fig. 50. Condensador plano.

tierra, adquiere el potencial de la Tierra, que designaremos por V_2 . En este caso la placa A adquiere un potencial V_1 cuyo valor lo determina solamente la magnitud de la carga Q y el potencial V_2 de la placa B . Los demás cuerpos sin carga no influirán en el potencial V_1 ni, por consiguiente, en la capacidad del condensador C , ya que el campo de las cargas $+Q$ y $-Q$ se concentra solamente en el espacio entre las placas

A y B ; por eso no puede originar en los demás cuerpos exteriores cargas inducidas.

Por capacidad C de un condensador se entiende la magnitud medida por relación entre la carga de una de las placas (la positiva) y la diferencia de potencial entre las placas:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}, \quad (3)$$

donde consideramos que $V_1 > V_2$.

Expresemos la capacidad del condensador plano en función de las magnitudes que caracterizan sus dimensiones. Como las dimensiones de las placas son grandes en comparación con la distancia entre ellas, la intensidad del campo entre las placas será la misma que en el caso de dos planos infinitos de carga igual, pero de diferente signo. Por consiguiente, según lo dicho en el § 128, tenemos que la intensidad del campo E entre las placas será:

$$E = 4\pi\sigma,$$

donde σ es la densidad superficial de la carga. Llamando S a la superficie de una lámina, tenemos que $\sigma = \frac{Q}{S}$ y

$$E = 4\pi \frac{Q}{S},$$

de donde

$$Q = \frac{ES}{4\pi}. \quad (4)$$

Expresemos la intensidad del campo E en función de la diferencia

de potencial $V_1 - V_2$ (véase el § 131):

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}.$$

Colocando en la fórmula (4) este valor de E hallamos que:

$$Q = \frac{(V_1 - V_2)S}{4\pi d}.$$

Utilizando esta ecuación y la fórmula (3), obtenemos para la capacidad C de un condensador plano:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{S}{4\pi d}. \quad (5)$$

De la fórmula (5) se ve que la capacidad de un condensador plano es proporcional a la superficie de la placa S e inversamente proporcional a la distancia entre las placas d . Cuando más cerca una de otra estén las placas, mayor capacidad tendrá el condensador. Después (véase el § 139) veremos cómo varía la capacidad de un condensador, si el espacio entre las placas lo llenamos de un cuerpo cualquiera no conductor (dieléctrico).

§ 137. Energía de un sistema de cargas. Al formar un sistema cualquiera de cuerpos cargados, se realiza un trabajo, ya que las cargas actúan recíprocamente, según la ley de Coulomb, y para colocarlas en los lugares dados hay que realizar un trabajo. Este trabajo lo debe realizar alguna fuerza exterior mantenida por alguna fuente de energía exterior, por ejemplo, por la energía de los procesos químicos de una pila con la cual se cargan los cuerpos, etc. Según la ley de la conservación de la energía, el trabajo de las fuerzas exteriores aplicadas a un sistema determina la variación de su energía; por consiguiente, el sistema de cuerpos cargados tendrá cierta energía. Si estos cuerpos se descargan o se trasladan después, su energía eléctrica, en parte o totalmente, se transforma en otra clase de energía.

Como ejemplo calculamos la energía eléctrica de un sistema que consta de dos cargas puntuales q_1 y q_2 que se hallan en los puntos B_1 y B_2 a la distancia r una de otra. Para ello es suficiente calcular el trabajo que invierten las fuerzas exteriores en el transporte de las cargas q_1 y q_2 desde el infinito, donde las fuerzas de acción recíproca entre las mismas son iguales a cero, hasta los puntos dados B_1 y B_2 . En este caso no se tiene en cuenta el trabajo invertido en la formación de las propias cargas q_1 y q_2 considerando que las cargas están dadas.

El trabajo de traslado de las cargas q_1 y q_2 desde el infinito, no depende del orden de traslación de las cargas. Traslademos primera-

mente la carga q_1 desde el infinito hasta el punto B_1 . El trabajo de la traslación de la carga q_1 cuando q_2 queda aún en el infinito, es igual a cero, ya que las fuerzas de acción mutua son iguales a cero. Después de colocar la carga q_1 en el punto B_1 , trasportemos la carga q_2 al punto B_2 . En ello se invierte un trabajo igual al producto de la magnitud de la carga q_2 por la diferencia de potencial entre el punto B_2 y un punto infinitamente alejado. El potencial de un punto en el infinito es igual a cero; el potencial del punto B_2 lo crea la carga q_1 y, como se ha indicado en el § 129, es igual a q_1/r . Así tenemos que el trabajo A invertido para colocar las cargas q_1 y q_2 a la distancia r es:

$$A = \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Este trabajo es el valor de la energía de acción recíproca W del sistema de dos cargas puntuales:

$$W = \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Si V_1 es el potencial creado por la carga q_2 en el punto B_1 , y V_2 el creado por la carga q_1 en el punto B_2 , tenemos:

$$V_1 = \frac{q_2}{r}, \quad V_2 = \frac{q_1}{r}.$$

La ecuación de la energía W la escribimos de la siguiente manera:

$$W = \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{2} \frac{q_1}{r} \cdot q_2 + \frac{1}{2} \frac{q_2}{r} \cdot q_1, \quad (1)$$

de donde obtenemos que:

$$W = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2. \quad (1a)$$

Si las cargas son del mismo signo, la energía será positiva; si las cargas son de signo contrario, el de la energía será negativo.

La ecuación (1a) se puede generalizar para un sistema de n cargas colocadas a determinadas distancias unas de otras. La energía de este sistema será la suma de los trabajos necesarios para trasladar cada una de las cargas q_i desde el infinito hasta el lugar donde debe estar colocada. En este caso nos da la ecuación:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i, \quad (2)$$

donde V_i es el potencial creado por todas las cargas, excepto la carga q_i , en el lugar donde se halla la carga q_i .

La energía del sistema de cargas tiene carácter de energía potencial. De esto se deduce una consecuencia importante. Como se sabe, al estado estable de un sistema le corresponde un mínimo de energía potencial. Sin embargo, la energía de un sistema de cargas nunca alcanza el mínimo, cualquiera que sea la disposición mutua de las cargas. Efectivamente, la energía de cada par de cargas q_i y q_k la expresa el término [véase la fórmula (1)] de aspecto general $\frac{1}{2} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}$, donde r_{ik} es la distancia entre estas cargas. Para las cargas del mismo signo, esta expresión será positiva y disminuirá continuamente a medida que aumente la distancia entre las cargas r_{ik} . Esto corresponde al hecho de que dos cargas del mismo signo se repelen hasta que se hallen a una distancia infinita entre ellas. Para cargas de diferente signo, la expresión $\frac{1}{2} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}$ es negativa, por consiguiente, su valor disminuye continuamente a medida que se aproximan las cargas: dos cargas de distinto signo se atraen continuamente hasta que se confundan y se neutralicen en parte o por completo. Se puede demostrar rigurosamente que esta deducción de la configuración inestable formada por cada par de cargas es justa para un sistema de cargas cualquiera que sea su disposición inicial, lo mismo que para el caso de un sistema eléctrico con cargas que se caracterizan por la densidad volumétrica.

La estabilidad de una configuración estática de cargas eléctricas es imposible.

De esto se deduce que los átomos y moléculas, que son sistemas eléctricos complejos, no pueden ser sistemas estáticos. Puede parecer que la estabilidad se puede conseguir en el movimiento continuo de las partículas, lo mismo que la estabilidad del sistema solar se consigue debido al movimiento de los planetas alrededor del Sol. Sin embargo, desde el punto de vista de la electrodinámica, incluso en este caso, el sistema permanece inestable, ya que la partícula cargada que se mueve con aceleración, pierde continuamente energía irradiándola. Desde el punto de vista clásico, es imposible construir un modelo estable de átomos o de moléculas que consten de partículas individuales cargadas. El estado estable de los átomos o de las moléculas se explica solamente en la mecánica cuántica.

Calculemos ahora la energía electrostática de un *conductor cargado* individual. Supongamos que al principio el conductor no estaba cargado y después se le ha cargado una cantidad de electricidad Q , tomando el potencial en este caso el valor V .

En la carga del conductor se invertirá un trabajo que nos sirve para medir la energía del conductor cargado; este trabajo lo podemos recuperar al descargar el conductor. Calculemos el trabajo invertido en la carga.

Entre la carga del conductor y su potencial tenemos la relación:

$$Q = CV, \quad (3)$$

donde C es la capacidad del conductor.

Al cargar el conductor aumenta su carga Q y, junto con ella, el potencial V , estando continuamente relacionados estos valores según la ecuación (3). Gráficamente, la dependencia entre el potencial V y la carga Q se representa con una recta que pasa por el origen de coordenadas (fig. 51).

Supongamos que en el conductor ya hay una carga Q , y tenemos que calcular el trabajo dA que hay que invertir para trasladar desde

el infinito hasta el conductor una carga infinitesimal dQ . Debido a la pequeñez de la carga dQ , podemos considerar que el potencial que le comunica al conductor es insignificante. Por lo tanto, el trabajo dA será igual al producto de la carga dQ por la diferencia de potencial entre el conductor y el infinito, donde el potencial es igual a cero, según lo supuesto. Así tenemos que $dA = VdQ$. El trabajo total de traslación de todas las cargas al elevar el potencial de un cuerpo desde 0 hasta V , será la suma de todos los trabajos elementales dA , es decir, la integral tomada entre los límites desde 0 hasta V :

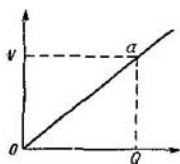


Fig. 51. Dependencia entre el potencial V y la carga Q .

$$V = \int_0^V V dQ.$$

De la (3) tenemos que $dQ = CdV$, de donde:

$$A = \int_0^V CV dV.$$

La capacidad C del cuerpo es una magnitud constante; por eso se puede sacar del signo de la integral:

$$A = C \int_0^V V dV = \frac{CV^2}{2}.$$

Este trabajo determina la energía W del cuerpo cargado. Así tenemos que la energía del conductor cargado es:

$$W = \frac{CV^2}{2}. \quad (4)$$

Expresando la capacidad C en función de la carga Q y del potencial V según la (3), tendremos otra expresión de la energía:

$$W = \frac{1}{2} QV, \quad (4a)$$

y, por último, expresando el potencial en función de la carga y de la capacidad, obtenemos la tercera fórmula para expresar la energía de un conductor cargado:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}. \quad (4b)$$

Las fórmulas obtenidas para la energía son fáciles de generalizar extendiéndolas al caso del *condensador cargado*. El proceso de cargar las placas se puede considerar que transcurre de la siguiente manera: al principio las placas neutras se van cargando gradualmente

al trasladarse cantidades infinitesimales de electricidad $+dQ$ de una placa a otra. Esta traslación aumenta la carga positiva de una placa en dQ , y disminuye la carga positiva o, lo que es lo mismo, aumenta la carga negativa de la otra placa en la misma magnitud. Así, en el proceso de la carga siempre tenemos en ambas placas la misma cantidad de electricidad, pero de signo distinto. La traslación de una cantidad dQ de electricidad de una placa a otra exige cierto trabajo. Si el potencial de una de las placas es igual a V_1 , y el de la otra, V_2 , el trabajo a invertir será:

$$dA = (V_1 - V_2) dQ.$$

De esta manera obtenemos la misma expresión para el trabajo elemental dA que para la carga de un cuerpo individual: sólo que en vez del potencial V tenemos la diferencia de potencial $V_1 - V_2$. De aquí que la energía total de un condensador cargado se puede expresar por la fórmula (4a), si sustituimos en ella V por $V_1 - V_2$:

$$W = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2). \quad (5)$$

Utilizando la relación existente entre la carga Q y la capacidad del condensador $Q = C(V_1 - V_2)$, le damos a esta fórmula otro aspecto:

$$W = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2, \quad (5a)$$

y

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}. \quad (5b)$$

Todas estas fórmulas nos dan la energía de un condensador cargado en función de dos magnitudes de las tres que hay: diferencia de potencial de las armaduras del condensador $V_1 - V_2$, carga Q de las armaduras y capacidad C .

Veamos un ejemplo numérico. Determinemos la energía de un condensador de $1\mu F$ cargado hasta alcanzar una diferencia de potencial de 3 000 V.

El ejemplo lo resolveremos utilizando dos sistemas diferentes de unidades: a) el CGSE, y b) el sistema práctico.

a) En el sistema CGSE, la capacidad $C = 1\mu F = 9 \cdot 10^5$ cm, $V_1 - V_2 = 3\,000$ V = $\frac{3000}{300}$ unidades CGSE de potencial, es decir, $V_1 - V_2 = 10$ unid. CGSE. De aquí, según la fórmula (5a):

$$W = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10^5 \cdot 10^2 \text{ erg} = 4,5 \text{ julios.}$$

b) En el sistema práctico de unidades, $C = 1\mu F = 10^{-6}$ F, $V_1 - V_2 = 3\,000$ V; de donde:

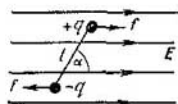
$$W = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \cdot (3 \cdot 10^3)^2 \text{ julios} = 4,5 \text{ julios.}$$

Determinemos la energía de un dipolo en un campo electrostático uniforme exterior de intensidad E (fig. 52). Sea l el eje del dipolo, que forma el ángulo α con la dirección de la intensidad del campo E . Las fuerzas que actúan sobre las cargas, negativa y positiva, del dipolo serán respectivamente igual a $+qE$ y $-qE$. Estas fuerzas, como se ha indicado en el § 135, forman un par de momento

$$M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha,$$

donde $p = ql$ es el momento del dipolo.

Cuando el eje del dipolo es paralelo a la intensidad del campo, $\alpha = 0$ y el momento de fuerzas $M = 0$; cuando el eje del dipolo es perpendicular a la intensidad del campo ($\alpha = \pi/2$), el momento de fuerzas adquiere el valor máximo $M = pE$. Consideremos que la energía del dipolo en este último caso es igual a cero.



Al girar el dipolo un ángulo infinitamente pequeño $d\alpha$, las fuerzas eléctricas realizan un trabajo:

$$dA = M d\alpha = pE \sin \alpha \cdot d\alpha;$$

Fig. 52. Dipolo en un campo eléctrico exterior.

perpendicular al vector E ($\alpha = \pi/2$), a la posición determinada por el valor dado de α :

en esta misma magnitud disminuirá la energía del dipolo W . La reserva de energía que el dipolo tendrá cuando su eje forme el ángulo α con E , será igual al trabajo de las fuerzas al hacerlo girar de la posición

$$W = \int_{\pi/2}^{\alpha} pE \sin \alpha \cdot d\alpha = pE \int_{\pi/2}^{\alpha} \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Integrando:

$$\int_{\pi/2}^{\alpha} \sin \alpha \cdot d\alpha = -\cos \alpha,$$

nos da

$$W = -pE \cos \alpha,$$

que es la ecuación buscada de la energía del dipolo. El signo menos es debido a que hemos considerado la energía del dipolo perpendicular a la intensidad del campo E igual a cero. Por lo tanto, para los ángulos $\alpha < \frac{\pi}{2}$ será aún menor, es decir, adquirirá valores negativos. La posición de $\alpha = 0$ corresponde al *mínimo* de energía eléctrica. Al mismo tiempo, esta posición (en la cual el momento de fuerzas $M = 0$) es la de equilibrio.

Así tenemos que a la posición de equilibrio le corresponde el *mínimo* de energía eléctrica. Como en mecánica el estado de equilibrio corresponde al *mínimo* de energía potencial, tendremos que la energía eléctrica de los cuerpos cargados que se hallan en un campo electrostático, como ya se ha indicado, es análoga a la energía potencial de la mecánica.

§ 138. Energía del campo electrostático. Las fórmulas deducidas en el § 136 nos permiten expresar la energía de un condensador plano en función de las magnitudes que caracterizan el campo electrostático creado entre sus armaduras. Para ello utilicemos la relación

entre la carga Q de las placas de un condensador plano y la intensidad del campo E entre las placas (pág. 68):

$$E = \frac{4\pi Q}{S}, \quad (1)$$

donde S es la superficie de las placas. Además, la diferencia de potencial entre las armaduras está relacionada con la intensidad del campo E y la distancia d entre las placas del condensador mediante la siguiente ecuación:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}. \quad (2)$$

Colocando los valores de Q y de $V_1 - V_2$ de las fórmulas (1) y (2) en la expresión de la energía del condensador [fórmula (5) del § 137], obtenemos que:

$$W = \frac{1}{8\pi} E^2 S d. \quad (3)$$

La fórmula (3) nos da la energía del condensador en función de la intensidad del campo E . Así resulta que la energía del condensador se puede expresar de dos maneras: bien en función de la carga y del potencial de las placas, bien en función de la intensidad del campo electrostático creado por las cargas. Esta última circunstancia nos permite considerar que el campo electrostático tiene energía y, por consiguiente, se puede hablar de la *energía del campo electrostático*. Este punto de vista lo confirma el que, según la fórmula (3), la energía es proporcional al producto Sd , el cual es el volumen del espacio comprendido entre las placas del condensador. Como el campo de las placas es diferente de cero solamente en el espacio comprendido entre ellas, el producto Sd nos da al mismo tiempo el volumen del espacio en que, en el caso dado, se ha concentrado el campo. Así resulta que la energía W es proporcional al volumen del espacio ocupado por el campo.

Al examinar la energía del campo electrostático del condensador, se puede introducir el concepto de *densidad volumétrica de energía*, sobrentendiendo con ello la magnitud

$$w = \frac{W}{Sd}, \quad (4)$$

es decir, una magnitud de valor numérico igual a la energía por unidad de volumen del campo. Colocando en la (4) el valor de W según la (3), obtenemos que:

$$w = \frac{1}{8\pi} E^2. \quad (5)$$

El concepto de densidad de energía se ha introducido para el caso del campo uniforme del condensador; pero es fácil de generalizarlo para cualquier campo electrostático.

Si el campo es variable, consideraremos que la densidad media de energía \bar{w} correspondiente al volumen ΔV de un campo variable, es la magnitud dada por la relación entre la energía ΔW correspondiente al volumen ΔV , y este volumen:

$$\bar{w} = \frac{\Delta W}{\Delta V}.$$

La densidad de energía en el punto dado de campo será el límite a que tiende esta relación al disminuir infinitamente el volumen ΔV en el punto dado:

$$w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta W}{\Delta V} \right).$$

En un volumen muy pequeño, cualquier campo se puede considerar proximadamente uniforme y caracterizado por determinado valor del vector de intensidad del campo E . Por consiguiente, la densidad de energía de un campo variable en el punto dado es

$$w = \frac{1}{8\pi} E^2,$$

donde E es la intensidad del campo en el punto del campo para el cual se calcula la densidad de energía. De aquí se ve que la ecuación 5) de la densidad de energía es justa para cualquier campo. La densidad de energía de un campo variable, cambia de un punto a otro.

Para calcular la energía de un volumen V finito de un campo electrostático, hay que dividir este volumen en volúmenes elementales ΔV , determinar la energía correspondiente a cada uno de ellos, $\Delta W = w \cdot \Delta V$, y sumarlas según todo el volumen:

$$W = \sum w \cdot \Delta V. \quad (6)$$

Aquí w es el valor de la densidad de energía correspondiente a cada volumen elemental ΔV dado.

La idea de la distribución de la energía del campo según el volumen, es decir, la idea de la densidad de energía w , la ha confirmado el desarrollo ulterior del estudio de los fenómenos eléctricos y magnéticos, en que se ha demostrado que la energía se puede transmitir a través del "vacío" como energía de ondas electromagnéticas de velocidad $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/seg. Esta deducción tiene gran importancia para comprender la naturaleza del campo. La energía es una de las características del estado de la materia y, por consiguiente, el concepto de energía no puede estar divorciado del de materia. Esto lo confirma la deducción sacada en el § 124 de que el mismo campo electrostático es un aspecto particular de la materia (para más detalles véase el § 152).

Una expresión más exacta de la energía de un volumen finito de un campo variable la obtenemos examinando los elementos de volumen dV infinitamente pequeños. Entonces, la energía dW por cada uno de estos volúmenes infinitamente pequeños la expresaremos con la fórmula:

$$dW = \frac{1}{8\pi} E^2 dV.$$

La energía W del campo encerrado en un volumen finito V vendrá determinada por la suma de las energías de todos los sectores infinitamente pequeños del campo, es decir, por la integral

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dV, \quad (6a)$$

donde la integral se extiende a todo el volumen V del campo.

Determinemos, utilizando la fórmula (6a), la energía total del campo electrostático uniforme de una esfera de radio R . Sea Q la carga de la esfera que se halla en el vacío.

Calculemos la energía dW que corresponde a una capa esférica infinitamente delgada y concéntrica con la esfera cargada. Sea r el radio de esta capa esférica y dr su espesor. Debido al pequeño espesor de la capa, la intensidad del campo E en todos los puntos del interior de la capa se puede considerar constante e igual a

$$E = \frac{Q}{r^2}.$$

El volumen de la capa es $dV = 4\pi r^2 dr$, de donde la energía del campo encerrado en el interior de la capa será:

$$dW = \frac{Q^2}{2r^3} dr.$$

La energía de todo el campo la obtendremos integrando dW según r desde el valor $r=R$ (correspondiente a los puntos que se hallan cerca de la superficie de la esfera cargada) hasta $r=\infty$:

$$W = \int_R^\infty \frac{Q^2}{2r^3} dr = \frac{Q^2}{2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^3}.$$

Integrando obtenemos que:

$$\int_R^\infty \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{R}, \text{ de donde hallamos que:}$$

$$W = \frac{Q^2}{2R}.$$

Como la capacidad de una esfera individual es igual a su radio ($C=R$), esta última ecuación se puede escribir así:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C},$$

lo cual coincide con la (4b) del § 137 para la energía de un cuerpo cargado. Así tenemos que, partiendo de la ecuación de la densidad de energía del campo eléctrico, llegamos a la ecuación primaria de la energía de un cuerpo cargado en función de la carga y de la capacidad.

Fenómenos electrostáticos en los dieléctricos

§ 139. Dieléctricos. Constante dieléctrica. A mediados del siglo pasado, Faraday, haciendo experimentos con un condensador esférico observó que si el espacio entre las armaduras del condensador se llenaba de azufre (en lugar de aire), la capacidad eléctrica del condensador aumentaba varias veces. Después se estableció que este fenómeno tiene carácter general y la capacidad de cualquier condensador depende del cuerpo aislador (*dieléctrico*) que llena el espacio entre sus armaduras. Sea C_0 la capacidad del condensador cuando entre sus armaduras se ha hecho el vacío. La capacidad del condensador cuando hay un dieléctrico entre sus armaduras será:

$$C = \epsilon C_0. \quad (1)$$

La magnitud ϵ denominada *constante dieléctrica* (o *coeficiente dieléctrico*), indica la cantidad de veces en que aumenta la capacidad del condensador si, en lugar del vacío entre sus armaduras, tenemos un dieléctrico.

Tabla I

Constante dieléctrica ϵ

Sustancia	ϵ	Sustancia	ϵ	Sustancia	ϵ
Aire (a 1 atm)	1,0006	Parafina	2,1	Ebonita	2,5
Azufre	4	Mica	6—7	Queroseno	2,0
Cera	7,8	Vidrio	5,5—7	Agua	81
		Porcelana	5,7—6,3		

El valor de la constante dieléctrica depende de la naturaleza del dieléctrico y de las condiciones en que se halla (temperatura, presión, etc). La experiencia enseña que para todas las sustancias $\epsilon > 1$. En correspondencia con la fórmula (1), la constante dieléctrica es una magnitud sin dimensiones; para el vacío $\epsilon = 1^*$. En la tabla I

* Más adelante se indicará que se puede introducir un sistema eléctrico de medición en que la constante dieléctrica ϵ sea una magnitud dimensional y su valor numérico para el vacío no sea igual a la unidad.

se dan los valores de la constante dieléctrica de una serie de sustancias (a la temperatura de la habitación). Como se ve, los valores de las constantes dieléctricas varían desde magnitudes que se diferencian poco de la unidad (gases a la presión atmosférica), hasta varias decenas de unidades. Sobre todo, una constante dieléctrica muy grande la tiene el agua ($\epsilon=81$).

Veamos lo que ocurre al introducir un dieléctrico homogéneo entre las placas de un condensador plano.

Supongamos primeramente que las armaduras del condensador están aisladas de los cuerpos que las rodean de manera que sus cargas no varíen:

$$Q = \sigma S.$$

En estas condiciones, el aumento de la capacidad del condensador al introducirle un dieléctrico se produce a costa de la disminución de la diferencia de potencial entre las armaduras. Efectivamente, de la ecuación

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (2)$$

se ve que el aumento de la capacidad en ϵ veces debe producirse al disminuir en ϵ veces la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ entre las armaduras. La disminución de la diferencia de potencial es debida a la debilitación de la intensidad del campo electrostático entre las armaduras, ya que según la ecuación (2) del § 131, tenemos que:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}.$$

De aquí se ve que la intensidad del campo E entre las armaduras de un condensador con dieléctrico es ϵ veces menor que la intensidad del campo E_0 del mismo condensador sin dieléctrico:

$$E = \frac{E_0}{\epsilon}.$$

Examinemos las causas del debilitamiento del campo. En el dieléctrico introducido en el campo eléctrico de las armaduras, se produce una polarización (véase el § 122) acompañada de una nueva distribución de las cargas en las moléculas del dieléctrico o de un giro de las moléculas polares (dipolos). En el caso de un dieléctrico homogéneo, esta polarización no va acompañada de formación de cargas volumétricas en el interior del dieléctrico, ya que las moléculas, en su conjunto, son neutrales y las cargas de las moléculas vecinas se compensan mutuamente (véase la fig. 53). No obstante, en los extremos del dieléctrico no hay compensación de cargas. Resulta que en la superficie que está frente a la lámina negativa,

surgen cargas positivas no compensadas, y en la superficie que está frente a la lámina positiva, surgen cargas negativas no compensadas. Estas cargas se denominan cargas *aparentes* y se pueden considerar distribuidas en la superficie del dieléctrico con una densidad superficial constante de $+\sigma'$ y $-\sigma'$. (Para más detalles véase el § 141).

Como resultado de ello en el dieléctrico se crea un campo eléctrico complementario, formado por la polarización del dieléctrico, dirigido en sentido contrario al del campo creado por las armaduras del condensador.

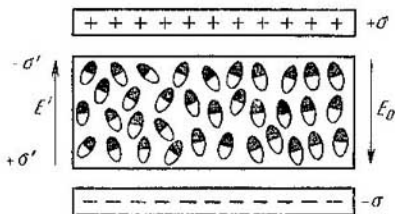


Fig. 53. Dieléctrico en un condensador.

Supongamos que el campo entre las armaduras del condensador sin dieléctrico tiene la intensidad de E_0 . Esta magnitud E_0 está relacionada con la densidad σ de las cargas en las armaduras, que denominaremos *cargas libres*, mediante la relación:

$$E_0 = 4\pi\sigma.$$

La intensidad E' del campo creado por la polarización del dieléctrico, se relaciona con la densidad de las cargas aparentes mediante una ecuación análoga:

$$E' = 4\pi\sigma'.$$

El campo total entre las armaduras del condensador con dieléctrico lo caracterizará la intensidad E igual a la suma geométrica de las intensidades del campo de las armaduras y del campo del dieléctrico polarizado:

$$E = E_0 + E'.$$

Teniendo en cuenta que los vectores E_0 y E' van en sentido contrario, halleemos el valor numérico de la intensidad resultante:

$$E = E_0 - E' = 4\pi(\sigma - \sigma').$$

Así tenemos que la polarización del dieléctrico *debilita* el campo.

Utilizando la relación

$$E = \frac{E_0}{\epsilon} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon},$$

hallamos la relación existente entre la densidad de las cargas aparentes y la intensidad del campo en el dieléctrico:

$$\sigma' = \frac{4\pi\sigma - E}{4\pi} = \frac{\epsilon E - E}{4\pi} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E = \kappa E. \quad (3)$$

La magnitud $\kappa = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}$ se llama susceptibilidad eléctrica. Está claro que la susceptibilidad eléctrica depende de la clase del dieléctrico. De la última ecuación se ve que la densidad de las cargas que surgen en las zonas limítrofes del dieléctrico debido a su polarización, es proporcional a la intensidad del campo que actúa en el dieléctrico (para más detalle véase el § 142).

Observemos que en este caso el dieléctrico polarizado crea un campo debilitado sólo en el seno del propio dieléctrico, ya que las cargas aparentes $+\sigma'$ y $-\sigma'$ están distribuidas según dos planos paralelos. Como sabemos, unas cargas iguales que éstas fuera de la zona limitada por estos planos, crean una intensidad igual a cero (véase el § 128). Por consiguiente, si entre el dieléctrico y las placas hay algún espacio, la intensidad del campo eléctrico en este espacio será la misma que había antes de introducir el dieléctrico.

Veamos ahora la influencia del dieléctrico en el caso cuando el dieléctrico se introduce en un condensador en cuyas armaduras se mantiene una diferencia de potencial constante (conectando las armaduras a una fuente de constante diferencia de potencial). En este caso la intensidad del campo entre las armaduras seguirá siendo la misma que antes de introducir el dieléctrico (según la relación fundamental entre la intensidad y el potencial). Como la polarización del dieléctrico debilita el campo, está claro que la intensidad se puede conservar invariable solamente si aumentamos la carga libre de las armaduras del condensador a costa de las cargas de la fuente conectada.

De la (2) se ve que el aumento de la capacidad en ϵ veces significa que, en estas condiciones, la carga libre en las armaduras aumenta en ϵ veces.

§ 140. Energía del condensador con dieléctrico. Energía del campo en el dieléctrico. Veamos lo que ocurre con la energía de un condensador al introducir entre sus placas un dieléctrico. En el § 137 hemos visto que la energía de un condensador W la determina la ecuación

$$W = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2), \quad (1)$$

donde Q es la carga de una placa del condensador. Como esta ecuación para W se ha obtenido solamente calculando el trabajo de traslación de las cargas entre las placas a la diferencia de potencial dada, *servirá también cuando entre las placas del condensador haya un dieléctrico*. La fórmula (1) nos permite comparar la energía W del condensador vacío con la energía W_* del mismo condensador con dieléctrico. Aquí, sin embargo, hay que concretar las condiciones en que se hace la comparación.

Si las *cargas* en las armaduras del condensador vacío y del condensador con dieléctrico *son iguales*, la diferencia de energías es debida a la diferencia de potencial en las armaduras de ambos condensadores. Como hemos examinado en el § 139, en este caso, la diferencia de potencial en las armaduras del condensador con dieléctrico es ϵ veces menor que la diferencia de potencial en las armaduras del condensador vacío; por eso, en estas condiciones tenemos que

$$\frac{W_*}{W} = \frac{1}{\epsilon},$$

es decir, la *energía* del condensador *disminuye* en ϵ veces al llenarle de dieléctrico.

Y viceversa, si se mantiene la misma diferencia de potencial en las armaduras de los condensadores vacío y con dieléctrico, la energía será proporcional a las cargas libres Q de las armaduras.

En este caso, como hemos visto, la carga de las armaduras del condensador con dieléctrico es ϵ veces mayor que la de las armaduras del condensador vacío, y tenemos que

$$\frac{W_*}{W} = \epsilon,$$

es decir, la *energía* del condensador *aumenta* al llenarle de dieléctrico. El aumento de energía se produce a costa de la fuente que mantiene invariable la diferencia de potencial de las armaduras.

De la ecuación de la energía del condensador

$$W = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)$$

es fácil hallar la densidad de energía del campo electrostático en el interior de un dieléctrico análogamente a como en el § 138 se ha obtenido la densidad de energía del campo eléctrico en el vacío. Para ello examinemos un condensador plano con dieléctrico y cuyo campo se puede considerar uniforme. Colocando en la fórmula (1) los valores de Q y de la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ en función de la intensidad del campo,

$$Q = \sigma S = \frac{\epsilon S E}{4\pi} \text{ y } V_1 - V_2 = E d,$$

hallamos que

$$W = \frac{1}{8\pi} \varepsilon E^2 Sd.$$

Dividiendo esta última ecuación por el volumen del dieléctrico del condensador Sd , nos da la densidad de energía en el dieléctrico:

$$W = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \quad (2)$$

Se puede generalizar esta fórmula y aplicarla a los dieléctricos heterogéneos y a los campos variables, dividiendo el dieléctrico en volúmenes ΔV tan pequeños, que dentro de sus límites se pueda despreciar la heterogeneidad. Repitiendo, entonces, los razonamientos del § 138 para la energía de un campo variable, obtenemos que

$$W = \sum \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \Delta V.$$

§ 141. Polarización dieléctrica. Vector de polarización. Veamos con más detalle el proceso de polarización dieléctrica.

El dieléctrico consta de moléculas compuestas de partículas cargadas: electrones negativos y núcleos positivos. Las cargas positivas y negativas en el interior de cada molécula se compensan mutuamente, de manera que en su totalidad la molécula es neutral. No obstante, los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas de la molécula pueden no coincidir, formando entonces un momento dipolo \mathbf{p} . Veamos primeramente el caso cuando una molécula tiene un momento constante \mathbf{p} , que no varía bajo la influencia del campo exterior. Esta molécula se llama *molécula polar* (o *heteropolar*).

Si no hay campo exterior, gracias al movimiento térmico desordenado, los momentos de las moléculas no están orientados. Si tomamos un pequeño volumen ΔV del dieléctrico con un número bastante elevado de moléculas, la suma vectorial de los momentos de todas las moléculas $\Sigma \mathbf{p}$ de este volumen será igual a cero. Si hay un campo eléctrico exterior, los dipolos, en parte, se orientarán según el campo, y la suma de los momentos $\Sigma \mathbf{p}$ no será igual a cero, y tanto más se diferenciará de cero, cuanto mayor sea la intensidad del campo. El dieléctrico con momentos polares en mayor o menor grado orientados está *polarizado*.

Para medir la polarización de un dieléctrico tomamos un vector \mathbf{P} igual a la suma de los momentos de la molécula $\Sigma \mathbf{p}$ por unidad de volumen:

$$\mathbf{P} = \frac{\Sigma \mathbf{p}}{\Delta V}. \quad (1)$$

El volumen ΔV , en los límites en que se toma la suma de los momentos de las diferentes moléculas $\Sigma \mathbf{p}$ debe contener una cantidad suficiente de moléculas y, al mismo tiempo, ser tan pequeño, que en su interior se puedan considerar constantes todas las magnitudes macroscópicas, como la densidad, temperatura, intensidad del campo electrostático E , etc. El vector \mathbf{P} se denomina *vector de polarización*.

El grado de orientación de las moléculas es natural considerarlo proporcional a la intensidad del campo \mathbf{E} en el seno del dieléctrico. Entonces, el vector de polarización \mathbf{P} también será proporcional a la intensidad del campo \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}. \quad (2)$$

Más abajo demostraremos que el coeficiente κ coincide con la susceptibilidad eléctrica de que hemos hablado en el § 139.

Si al principio la molécula no tenía momento polar (molécula homopolar o apolar), bajo la influencia del campo eléctrico exterior, las cargas se desplazan y surge un momento dipolar \mathbf{p} . En este caso también se puede considerar que la suma de los momentos es proporcional a la intensidad del campo. En el caso de la molécula homopolar, la $\Sigma \mathbf{p}$ aumentará debido a dos causas: debido al aumento de los momentos dipolares de las moléculas \mathbf{p} y a su orientación. Pero, incluso en este caso, la suma de los momentos $\Sigma \mathbf{p}$ aumentará proporcionalmente a \mathbf{E} . Por consiguiente, la fórmula (2) es justa para las moléculas de cualquier tipo.

Si el dieléctrico homogéneo se halla en un campo eléctrico, cualquier elemento de su volumen ΔV , que contenga una cantidad suficientemente grande de moléculas, permanecerá neutral. No ocurre lo mismo, como hemos visto, en la delgada capa superficial del dieléctrico. Gracias al giro de las moléculas, en la superficie límite por donde entran las líneas de fuerza, habrá exceso de extremos (polos) negativos de las moléculas, y en la superficie limítrofe por donde salen las líneas de fuerza, habrá exceso de extremos positivos de las moléculas (véase la pág. 79).

Debido a ello, en la superficie del dieléctrico polarizado surgen cargas formando cierta densidad superficial σ' .

En el caso de un dieléctrico heterogéneo surgen, además, cargas volumétricas ρ' en el seno del mismo dieléctrico. Examinemos, por ejemplo, un dieléctrico heterogéneo en un campo eléctrico. Supongamos que la concentración de las partículas del dieléctrico aumenta de izquierda a derecha (fig. 54) y que la intensidad del campo vaya en esta misma dirección. Separemos mentalmente en este dieléctrico una capa limitada por las superficies aa' y bb' . En la superficie aa' de la capa, el número de partículas por unidad de volumen, según se ha supuesto, es menor que en la superficie bb' . Por consiguiente, la superficie aa' dividirá menos moléculas que

la superficie bb' . Como cada molécula es un dipolo orientado según el campo, por la superficie aa' penetrarán, de la parte izquierda del dieléctrico, menos extremos positivos de moléculas que los que salen por la superficie bb' . Por lo tanto, en el interior de la capa $aa'bb'$ habrá deficiencia de cargas positivas y resultará cargada negativamente.

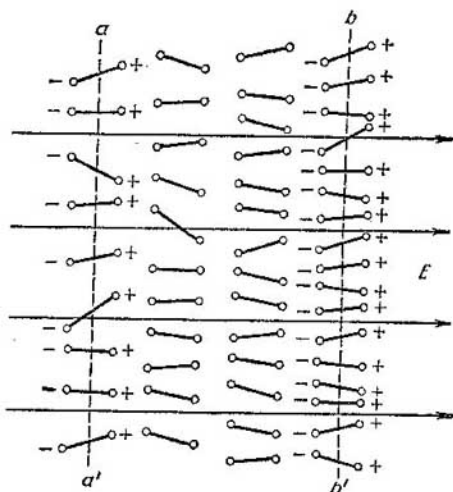


Fig. 54. Cargas volumétricas al polarizar un dieléctrico heterogéneo.

Debido a la orientación de las moléculas causada por un campo eléctrico exterior, varían las propiedades mecánicas del dieléctrico. Por eso, al polarizar un dieléctrico, en éste surgen tensiones que le hacen variar de volumen y de forma. Este fenómeno se llama *electrostricción*. Además, en las superficies de los dieléctricos surgen tensiones mecánicas complementarias.

Las cargas superficiales y volumétricas que surgen al polarizar un dieléctrico se denominan *aparentes*. Las demás cargas (no debidas a la polarización) se denominan *libres* o *verdaderas*.

Entre el vector de polarización y la densidad superficial de cargas en las zonas limítrofes del dieléctrico hay una relación sencilla. La vamos a establecer en un simple caso particular. Introduzcamos una lámina de dieléctrico homogéneo infinitamente grande y de

caras paralelas en un campo uniforme. En este caso, el campo \mathbf{E} del interior del dieléctrico y el vector de polarización \mathbf{P} [fórmula (2)] serán constantes. Limitemos un volumen cilíndrico ΔV de esta lámina de manera que sus generatrices sean paralelas a la intensidad del campo \mathbf{E} de la lámina (véase la fig. 55, donde \mathbf{n} es normal a la superficie de la lámina). Al polarizar el dieléctrico, en las superficies de la lámina aparecen cargas, siendo $+\sigma'$ y $-\sigma'$ las densidades superficiales. Como en el caso que examinamos (el de un dieléctrico homogéneo no cargado de antemano), en el interior del volumen ΔV no surgen cargas, macroscópicamente considerado, el momento eléctrico del volumen ΔV es debido solamente a las cargas superficiales en las bases del cilindro S . Estas cargas son respectivamente iguales a $+\sigma'S$ y $-\sigma'S$, y la distancia entre ellas es igual a la longitud del cilindro L . De aquí que el momento eléctrico del cilindro sea igual a $\sigma'SL$. Pero, de otra parte, el momento de todo el cilindro es igual al valor numérico de la suma de los vectores de los momentos de todas las moléculas del interior del cilindro, de donde:

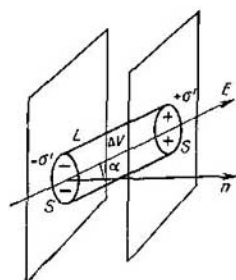


Fig. 55. Determinación del vector de polarización \mathbf{P}

$$|\Sigma \mathbf{p}| = \sigma' SL.$$

El valor numérico del vector de polarización \mathbf{P} dentro de los límites del cilindro lo obtenemos dividiendo el momento suma $|\Sigma \mathbf{p}|$ por el volumen ΔV :

$$P = \frac{|\Sigma \mathbf{p}|}{\Delta V} = \frac{\sigma' SL}{\Delta V}.$$

El volumen del cilindro es

$$\Delta V = SL \cos \alpha,$$

dónde α es el ángulo formado entre la generatriz del cilindro L y la dirección de la normal a la base del cilindro S . Colocando este valor de ΔV en la ecuación de P , nos da:

$$P = \frac{\sigma'}{\cos \alpha}, \text{ de donde } \sigma' = P \cdot \cos \alpha,$$

La dirección de la generatriz del cilindro L , según se ha establecido al trazarlo, coincide con la intensidad del campo \mathbf{E} , y con ésta coincide la del vector de polarización \mathbf{P} , de donde:

$$P \cos \alpha = P_n,$$

donde P_n es la proyección del vector de polarización sobre la normal a la superficie en que aparecen las cargas. Por consiguiente,

$$\sigma' = P_n, \quad (3)$$

es decir, la densidad de las cargas superficiales aparentes σ' es igual numéricamente a la componente normal del vector de polarización.

Esto nos permite sacar una importante consecuencia. Según la fórmula (2), el vector de polarización P es proporcional a la intensidad del campo E ; por lo tanto, según la (3), tenemos que la densidad de las cargas superficiales σ' es proporcional a la componente normal de la intensidad del campo E_n :

$$\sigma' = \kappa E_n. \quad (4)$$

Este resultado coincide con el obtenido para el caso particular del § 139, ecuación (3). Así vemos que el coeficiente κ de la fórmula (2) coincide con la susceptibilidad eléctrica del § 139.

En lo que se refiere a las cargas aparentes volumétricas, como se ha indicado, surgen cuando el dieléctrico es heterogéneo y en los lugares donde hay cargas libres. Se puede decir que la densidad volumétrica de las cargas aparentes ρ' la determina la divergencia del vector de polarización P tomado con signo menos:

$$\rho' = -\operatorname{div} P. \quad (5)$$

Las fórmulas (3) y (5) permiten, en cada caso particular, hallar las cargas superficiales y volumétricas que surgen en la polarización del dieléctrico.

§ 142. Intensidad del campo en el seno del dieléctrico. Al examinar los fenómenos electrostáticos en el vacío, se ha supuesto que las cargas son debidas al exceso o a la escasez de electrones en cada elemento de volumen del cuerpo cargado con una cantidad suficientemente elevada de moléculas.

Estas cargas las hemos llamado *libres* o *verdaderas*. En el párrafo anterior hemos visto que al polarizar un dieléctrico pueden surgir otras cargas originadas bien por el giro de los momentos dipolares constantes de las moléculas polares, bien por surgir momentos inducidos en las moléculas, permanciendo neutra cada molécula. Estas cargas las hemos llamado *aparentes*. Las cargas aparentes surgen solamente cuando en el dieléctrico hay un campo eléctrico^{*)}. Así tenemos que la fuente primaria del campo siempre son las cargas libres.

No obstante, si en el campo hay un trozo de dieléctrico, al campo primario originado por las cargas libres se le suma un campo complementario formado por las cargas aparentes. Este campo complementario no es igual a cero ni en el mismo dieléctrico, ni fuera de él.

^{*)} Más abajo se hablará de la posibilidad de conservar las cargas aparentes después de cesar la acción del campo.

Para hallar la resultante de la intensidad del campo E , hay que sumar la intensidad del campo de las cargas libres E_0 con la intensidad del campo de las cargas aparentes E' :

$$E = E_0 + E'. \quad (1)$$

Hallemos, en correspondencia con la ecuación (1), la intensidad del campo en el dieléctrico para simples casos particulares cuando las cargas aparentes que surgen, se pueden determinar fácilmente. En este caso consideraremos que las cargas libres siguen siendo invariables.

1. *Diélectrico homogéneo que rodea a una esfera conductora cargada.* Supongamos que la esfera conductora cargada de radio R se ha introducido en un dieléctrico homogéneo que se extiende hasta el infinito. Sea Q la carga de la esfera. Como hemos visto (§ 128, 3), una esfera conductora cargada origina en el espacio exterior un campo, como si toda su carga Q estuviese concentrada en el centro.

Por consiguiente, la intensidad del campo E_0 en el punto A a la distancia r del centro de la esfera será:

$$E_0 = \frac{Q}{r^2}.$$

Fig. 56. Influencia del dieléctrico en el campo de una esfera cargada.

En el interior de la esfera, la intensidad del campo será igual a cero. Bajo la influencia del campo, el dieléctrico se polariza y en la superficie limítrofe con la de la esfera surgen cargas aparentes Q' de signo contrario a las de Q . La densidad superficial de estas cargas es:

$$-\sigma' = -\kappa E_R,$$

donde E_R es la intensidad del campo en el interior del dieléctrico junto a la superficie de la esfera (fig. 56). Como la superficie de la esfera es igual a $4\pi R^2$, tenemos que

$$Q' = -\sigma' \cdot 4\pi R^2 = -4\pi R^2 \kappa E_R.$$

Esta carga está distribuida según una superficie esférica concéntrica a la esfera cargada; por eso origina en el punto A un campo complementario:

$$E' = \frac{Q'}{r^2} = -\frac{4\pi R^2 \kappa E_R}{r^2}.$$

De aquí que la intensidad del campo en el punto A sea:

$$E = E_0 + E' = \frac{Q}{r^2} - \frac{4\pi R^2 \kappa E_R}{r^2}. \quad (2)$$

Como la intensidad del campo de una esfera conductora cargada y la de una superficie esférica en un dieléctrico homogéneo disminuye inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la esfera, tenemos que:

$$\frac{E_R}{E} = \frac{r^2}{R^2}, \text{ de donde } E_R = \frac{r^2}{R^2} E.$$

Colocando este valor de E_R en la (2), nos da:

$$E = \frac{Q}{r^2} - 4\pi\kappa E \text{ o } E = \frac{Q}{(1+4\pi\kappa)r^2},$$

de donde, teniendo en cuenta que $1+4\pi\kappa = \epsilon$, hallamos que:

$$E = \frac{Q}{\epsilon r^2} = \frac{E_0}{\epsilon} \quad (3)$$

independientemente del radio de la esfera cargada R . Así tenemos que también en este caso, la intensidad del campo E en el dieléctrico es ϵ veces menor que la intensidad del campo E_0 originada por las cargas libres.

2. Arriba hemos examinado el caso de una lámina de dieléctrico plano entre las armaduras de un condensador (véase el § 137). Allí se demostró que en este caso, el dieléctrico causa un debilitamiento de la intensidad en ϵ veces, siendo invariables las cargas libres:

$$E = \frac{E_0}{\epsilon}.$$

Los dos casos estudiados se caracterizan por que el dieléctrico homogéneo llena todo el espacio en que el campo no es igual a cero. En este caso, la intensidad del campo disminuye en ϵ veces. Resulta que esta conclusión es de carácter general: *en un dieléctrico homogéneo que llena por completo un espacio donde el campo es diferente de cero, la intensidad de este campo creada por las cargas libres es ϵ veces menor que la intensidad del campo de las mismas cargas en el vacío*. En este caso, como $\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{E}_0$, los tres vectores \mathbf{E} , \mathbf{E}_0 y \mathbf{E}' , que entran en la fórmula (1), son paralelos, y basándonos en la ecuación $\epsilon = 1 + 4\pi\kappa$ y en la fórmula (2) del § 141, tenemos que:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0 = -4\pi\mathbf{P}. \quad (4)$$

Los resultados anteriores no son justos para los dieléctricos heterogéneos, ni para el caso cuando el dieléctrico (aunque homogéneo) no llene por completo el espacio ocupado por el campo *) (por

*) Esta regla tiene excepciones, que son los casos de alto grado de simetría. Así, para dieléctrico esférico homogéneo uniformemente cargado introducido en otro dieléctrico infinito homogéneo, la intensidad del campo fuera de la esfe-

ejemplo, trozos independientes de dieléctrico homogéneo introducidos en el campo). Para determinar la intensidad del campo en estos casos hay que tener en cuenta todas las cargas aparentes que surgen, calcular su campo y sumarlo al de las cargas libres. Veamos, por ejemplo, una carga puntual $+q$ (fig. 57) junto a la cual hay un trozo alargado de dieléctrico D . Bajo la influencia del campo de la carga $+q$, en los extremos del dieléctrico S_1 y S_2 surgen las cargas aparentes $-q'$ y $+q'$. Todo el trozo del dieléctrico se transforma en un dipolo de momento determinado p . Como hemos visto (§ 125),

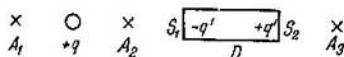


Fig. 57. Trozo de dieléctrico D situado junto a una carga puntual $+q$.

el dipolo forma un campo, cuyas líneas de fuerza salen de su extremo positivo y van a parar al negativo. Veamos tres puntos, A_1 , A_2 y A_3 que están en una recta con la carga $+q$. La intensidad del campo E' , originada por las cargas aparentes del dieléctrico, en los puntos A_2 y A_3 tiene el mismo sentido que la intensidad del campo E_0 ; mientras que en el punto A_1 , tiene sentido contrario. La intensidad resultante del campo $E = E_0 + E'$ en el punto A_1 es menor que la intensidad del campo de la carga $+q$; mientras que en los puntos A_2 y A_3 es mayor. Si tomamos un punto que no esté en esta recta, los vectores E_0 y E' de este punto no serán paralelos.

Así, este ejemplo nos indica que en el caso general, entre la intensidad del campo E_0 de las cargas libres y la intensidad del campo E' de las cargas aparentes, no hay una relación simple.

§ 143. Fuerzas que actúan en los cuerpos cargados cuando hay dieléctricos. Las fuerzas que actúan entre los cuerpos cargados introducidos en un dieléctrico, no se pueden determinar teniendo en cuenta solamente la acción recíproca entre las cargas libres y aparentes. Para demostrarlo, examinemos dos placas paralelas con cargas de signo contrario introducidas en un dieléctrico homogéneo, por ejemplo, en un dieléctrico líquido. Si las placas se hallan a una distancia

ra cargada disminuye en ϵ veces (en el interior no varía). Lo mismo tenemos en el caso de un condensador plano (o esférico) lleno de capas paralelas (o concéntricas) de diferentes dieléctricos homogéneos, en que la intensidad del campo en cada capa será $E_k = \frac{1}{\epsilon_k} E_0$.

pequeña en comparación con sus dimensiones, el campo creado por ellas se encuentra solamente en el espacio entre las placas. Por eso, quedará polarizada solamente la parte del dieléctrico que haya entre las placas. A causa de la polarización de esta parte del dieléctrico, en las capas del mismo, junto a las placas, surgen cargas superficiales aparentes de densidad $\pm\sigma'$. Estas cargas son equivalentes a dos superficies cargadas paralelas y, por consiguiente, varían el campo solamente en el seno del dieléctrico que se halla entre las placas, sin actuar de ninguna manera sobre las placas. Así llegamos a la conclusión de que en el caso dado, la polarización del dieléctrico no puede variar la fuerza de acción mutua entre las placas (a condición de que las cargas de las placas permanezcan invariables), y las fuerzas de acción recíproca seguirán siendo iguales que en el vacío. En la realidad no ocurre así: la experiencia demuestra que si las placas cargadas paralelas a una distancia pequeña en comparación con sus dimensiones se introducen en un dieléctrico líquido, conservando las cargas invariables, las fuerzas entre ellas disminuyen en ϵ veces, donde ϵ es la constante dieléctrica del líquido dado. Lo mismo tendríamos si llenamos el espacio con algún gas dieléctrico. Claro está que con un dieléctrico sólido es muy difícil realizar semejante experimento.

Esta variación de las fuerzas de acción recíproca entre las placas, que no se consigue explicar con la aparición de las cargas aparentes, es debida a las tensiones mecánicas que surgen en el dieléctrico polarizado.

Si las placas llevan cargas de distintos signos (entre las placas actúan fuerzas de atracción), el dieléctrico líquido o gaseoso es atraído hacia el espacio de entre las placas y crea una fuerza mecánica complementaria que tiende a separar las placas. De resultas de ello, las fuerzas de atracción entre las placas se compensan en parte y, por consiguiente, la atracción es menor que en el vacío. Esta presión complementaria que hay en el seno del dieléctrico entre las placas, se puede comprobar experimentalmente. Dos placas horizontales A y B se introducen en un líquido dieléctrico homogéneo (fig. 58). El dieléctrico ocupa la zona rayada). La placa superior A lleva un tubo vertical C con un manómetro M . Por el extremo superior del tubo C se insufla aire de manera que entre las placas A y B se forme la bolsa e , después se cierra el grifo b . Si se cargan las placas A y B con cargas de diferente signo, el nivel de la derecha del manómetro

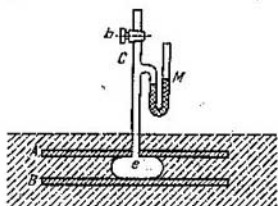


Fig. 58. Presión complementaria.

M se elevará debido al aumento de presión en la bolsa de aire e . Esto último es debido a la atracción del dieléctrico hacia el espacio que hay entre las placas. Si las placas A y B se les comunican cargas del mismo signo, la presión en la bolsa de aire e disminuye, ya que en este caso el líquido dieléctrico será expelido hacia afuera del espacio de entre las placas. Este desplazamiento del líquido dieléctrico es fácil de explicar, si consideramos que consta de moléculas polares. El dipolo, como se ha indicado en el § 135, en un campo variable sufre la acción de una fuerza que le desplaza hacia la zona donde la intensidad del campo es mayor.

La variación en ϵ veces de las fuerzas de acción recíproca entre las placas cargadas al introducirlas en un dieléctrico, viene confirmada por el cálculo energético. En el § 140 se ha indicado que la energía de un condensador plano con dieléctrico era:

$$W = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} Sd,$$

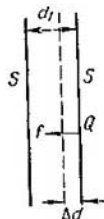


Fig. 59. Fuerzas que actúan sobre las placas de un condensador.

donde S es la superficie de las placas del condensador; d , la distancia entre las placas y E , la intensidad del campo entre las placas. (Esta fórmula, hablando rigurosamente, es aproximada y tanto más exacta, cuanto menor sea la distancia d en comparación con las dimensiones de las placas). Como entre la carga Q concentrada en una de las placas y la intensidad del campo E

la relación es:

$$Q = \frac{\epsilon}{4\pi} ES,$$

la fórmula para la energía se puede escribir de la forma siguiente:

$$W = \frac{2\pi Q^2}{\epsilon S} d.$$

Supongamos que, solicitada por la fuerza de atracción, la placa de la derecha (fig. 59) se desplaza en dirección hacia la de la izquierda recorriendo un pequeño trayecto Δd . Considerando constante la fuerza f que actúa sobre la placa de la derecha, obtenemos que se efectúa un trabajo

$$A = f\Delta d.$$

Este trabajo se realiza debido a la variación de la energía del condensador al disminuir la distancia entre las placas en Δd :

$$\Delta W = \frac{2\pi Q^2}{\epsilon S} d - \frac{2\pi Q^2}{\epsilon S} (d - \Delta d) = \frac{2\pi Q^2}{\epsilon S} \Delta d.$$

Igualando el trabajo a la variación de la energía, nos da:

$$f = \frac{2\pi Q^2}{\epsilon S}. \quad (1)$$

En el vacío, la fuerza f_0 que actúa sobre la placa de la derecha, es igual al producto de la intensidad del campo creado solamente por la placa de la izquierda (lo cual es la mitad de la intensidad total del campo entre las placas) por la carga de la placa de la derecha:

$$f_0 = \frac{E_0}{2} Q = \frac{2\pi Q^2}{S}.$$

Comparando esta ecuación con la (1) vemos que al llenar el espacio con un dieléctrico homogéneo, la fuerza de acción recíproca entre las placas disminuye en ϵ veces, en concordancia con lo obtenido experimentalmente.

El cálculo energético tiene en cuenta automáticamente todas las clases de acción recíproca y por eso el resultado es justo; mientras que al considerar la acción mutua solamente entre las cargas libres y aparentes, no se tenía en cuenta por completo el papel del dieléctrico, ya que no se consideraba el cambio de sus propiedades mecánicas (presión y densidad), que se producen bajo la acción del campo eléctrico.

Este resultado obtenido se puede generalizar. De la fórmula (2) del § 140, para la densidad de la energía del campo (justa para todos los cuerpos isótropos) se deduce (de manera análoga al cálculo hecho para el condensador plano), que *al sumergir cuerpos cargados en un dieléctrico homogéneo que llena por completo todo el espacio donde el campo es diferente de cero, las fuerzas de acción recíproca entre los cuerpos disminuyen en ϵ veces.*

De esto se deduce que dos cargas puntuales q_1 y q_2 situadas a una distancia r una de otra en el interior de un dieléctrico homogéneo infinito, actúan con una fuerza mutua de:

$$f = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}. \quad (2)$$

Esta fórmula expresa la *ley de Coulomb* para el caso de cargas sumergidas en un dieléctrico homogéneo: *la fuerza de acción recíproca entre cargas puntuales puestas en un dieléctrico homogéneo infinito, es ϵ veces menor que las fuerzas de acción recíproca entre las mismas cargas a la misma distancia en el vacío.* Si el dieléctrico no es homogéneo o infinito, la fórmula (2) no será justa. Aproximadamente será justa, si los extremos límites del dieléctrico están bastante alejados de las cargas sumergidas en él.

En el caso general de dieléctricos homogéneos y finitos, su influencia sobre las fuerzas de acción recíproca de las cargas no se expresa

mediante sencillas relaciones, como se ha visto en el ejemplo estudiado en la pág. 90. La heterogeneidad del dieléctrico puede ser debida a que el cuerpo cargado, sobre el cual se determina la acción de la fuerza, se ha introducido en una cavidad del dieléctrico homogéneo e infinito. Al haber una cavidad se excluye la acción de las fuerzas de parte del dieléctrico sometido a tensiones y solamente importan las cargas aparentes. En este caso, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo cargado, dependen de la forma de la cavidad en que se ha introducido el cuerpo (véase el § 145).

Hay que observar que entre la fórmula (2) y la ley de Coulomb para las cargas puntuales en el vacío hay una diferencia de principio. Ambas fórmulas tienen el mismo sentido solamente cuando entendemos por cargas puntuales las concentradas en cuerpos macroscópicos, cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con la distancia entre los mismos. Pero la ley de Coulomb para las cargas en el vacío se puede interpretar de manera diferente, a saber, en forma diferencial considerando que expresa la fuerza de acción recíproca df entre dos cargas elementales imaginarias dq_i y dq_k en que se pueden mentalmente dividir cargas finitas q_i y q_k , cualesquiera que sean. En este caso, la fuerza de acción recíproca entre las cargas q_i y q_k la expresa la suma de las fuerzas df extendida a toda clase de pares de cargas dq_i y dq_k . En esta forma diferencial, la fórmula (2) no se puede aplicar, ya que con dieléctricos, las fuerzas que actúan sobre el par de cargas dado dq_i y dq_k , como hemos visto, se deben, además, a otras causas.

Resumiendo lo dicho en los últimos párrafos tenemos que en un dieléctrico homogéneo que llena por completo todo el espacio en que el campo es diferente de cero, la intensidad del campo E es ϵ veces menor que la intensidad E_0 del mismo campo que originarían las cargas libres dadas sin dieléctrico. Estas fuerzas de acción recíproca entre los cuerpos cargados disminuyen en ϵ veces al sumergirlos en un dieléctrico homogéneo que llene por completo todo el espacio en que el campo es diferente de cero. Por consiguiente, tanto en este caso como en el vacío, la fuerza f que actúa sobre una carga q viene determinada por la igualdad $f = qE$.

Sin embargo esta ecuación no es justa para cualquier dieléctrico. El caso es que la carga q sumergida en el dieléctrico, generalmente no está concentrada en el dieléctrico, sino en otro cuerpo (por ejemplo, en un conductor) y sobre éste actúa un campo diferente del campo que hay en el interior del dieléctrico junto al cuerpo. Esto lo hemos visto en el ejemplo de acción recíproca de dos placas paralelas cargadas, donde el campo en el lugar en que están las cargas, es distinto al del dieléctrico junto a las superficies de las placas. Además, en el mismo ejemplo hemos visto que si queremos determinar la fuerza en función de la intensidad del campo en el lugar donde están las cargas, no obtendremos el verdadero valor de la fuerza. Esto es debido a que no tenemos en cuenta las fuerzas mecánicas complementarias que actúan en el cuerpo de parte del dieléctrico. Estas fuerzas surgen debido a las tensiones que se forman en el die-

léctrico en los lugares de irregularidades del campo, y donde el propio dieléctrico es heterogéneo (incluida la zona limítrofe entre el cuerpo cargado y el dieléctrico).

Solamente en los casos particulares en que la intensidad del campo en el dieléctrico y la fuerza que actúa sobre la carga, son el mismo número de veces (ϵ veces) menores que las mismas magnitudes sin dieléctrico (es decir, dieléctrico homogéneo que llene por completo todo el espacio en que el campo es diferente de cero), la fórmula $f=qE$ es justa y permite determinar la intensidad del campo E en el dieléctrico en función de la fuerza f .

En general, de lo dicho se deduce que *no se puede determinar la intensidad del campo E en el dieléctrico en función de la fuerza que actúa sobre una carga*, si no está concentrada en un cuerpo cualquiera. Y viceversa: la intensidad del campo E en el dieléctrico no determina a las fuerzas que actúan sobre los cuerpos cargados.

En el § 145 se hablará con más detalle del sentido físico del vector E .

En una serie de problemas de electrostática, el cálculo de las fuerzas que actúan se puede realizar basándose en los siguientes razonamientos. Supongamos que en un sistema aislado de cuerpos cargados, la energía del campo electrostático es función de una serie de parámetros que caracterizan la dislocación de los cuerpos en el sistema. Estos parámetros pueden ser, por ejemplo, las coordenadas de los puntos del sistema de cuerpos, o la distancia entre los cuerpos, o los ángulos que determinan la disposición de las barras, hilos, etc.

Llamemos coordenadas generalizadas a estos parámetros y designémoslas con las letras x_1, x_2, \dots, x_n .

Así, para la energía W del sistema tenemos que:

$$W = W(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Al variar uno de los parámetros x_i en la magnitud Δx_i , las fuerzas electrostáticas realizarán un trabajo que será proporcional a Δx_i y, por consiguiente, se puede representar de la siguiente manera:

$$\Delta A_i = f_i \Delta x_i.$$

La magnitud f_i que entra en esta expresión la llamaremos fuerza generalizada.

El trabajo se efectúa a costa de una disminución de la energía del campo electrostático, disminución relacionada con la variación del parámetro x_i . Así tenemos que:

$$\Delta A_i = f_i \Delta x_i = -\Delta W,$$

de donde, para la fuerza generalizada, obtenemos la ecuación:

$$f_i = -\frac{\Delta W}{\Delta x_i}.$$

La relación $\frac{\partial W}{\partial x_i}$ nos da, al tender Δx_i a cero, la derivada parcial de la energía respecto a la coordenada generalizada x_i (los demás parámetros permanecen constantes), es decir, nos da:

$$f_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i}. \quad (3)$$

La energía del sistema no sólo es una función de las coordenadas generalizadas, sino también lo es de las características eléctricas de los cuerpos, por ejemplo, de las cargas que hay en los cuerpos, o de los potenciales de los cuerpos. En un sistema aislado, las cargas de los distintos cuerpos permanecen invariables, mientras que los potenciales de los cuerpos que entran en el sistema, varían. Por consiguiente, en la expresión (3), la energía debe representarse como una *función de las cargas de los cuerpos*.

Si, según la condición del problema, los potenciales de los cuerpos se suponen constantes, las cargas de los mismos no pueden ser constantes y el sistema de cuerpos no puede ser un sistema aislado: el sistema tiene que tener algún contacto con cuerpos exteriores que no entran en el sistema. En este caso se puede demostrar que la fuerza generalizada también se puede representar como una derivada parcial de la energía en función de la coordenada generalizada pero en este caso la energía se debe expresar en función de las coordenadas generalizadas y de los *potenciales de los cuerpos*, lo cual acarrea, como se puede demostrar, el que la derivada que expresa la fuerza generalizada, se debe tomar con el signo más:

$$f_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}.$$

Ilustremos estos razonamientos con ejemplos. Supongamos que se necesita calcular la fuerza que actúa sobre las armaduras de un condensador plano. La energía del sistema en este caso, será:

$$W = \frac{1}{8\pi} \varepsilon E^2 Sd.$$

Esta energía puede expresarse en función de las cargas de las armaduras, o en función de la diferencia de potencial entre las mismas:

$$W = \frac{1}{8\pi} \varepsilon \left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \right)^2 Sd, \quad (4)$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \varepsilon \left(\frac{V_1 - V_2}{d} \right)^2 Sd. \quad (5)$$

En el caso dado, la coordenada generalizada será la distancia d entre las armaduras del condensador. La fuerza generalizada será

sencillamente la fuerza que actúa sobre las armaduras del condensador, ya que al variar la distancia d en la magnitud Δd , las fuerzas que actúan sobre las armaduras realizan un trabajo $f\Delta d$.

Calculemos la fuerza según las ecuaciones (4) y (5). Según la (4) tenemos que:

$$f = -\frac{\partial W}{\partial d} = -\frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} S.$$

El signo menos indica que al aumentar la distancia, se efectúa un trabajo negativo, es decir, en las armaduras actúa una fuerza de *atracción* (de una armadura hacia la otra).

Según la (5) tenemos que:

$$f = \frac{\partial W}{\partial d} = -\frac{1}{8\pi} \epsilon \left(\frac{V_1 - V_2}{d^2} \right)^2 S = -\frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} S,$$

es decir, hemos obtenido una expresión que coincide con lo deducido anteriormente [fórmula (1)].

§ 144. Vector de desplazamiento eléctrico. Cuando tratamos del campo electrostático en el vacío, analizamos las líneas de fuerza. En el vacío, las líneas de fuerza tienen la propiedad de extenderse ininterrumpidamente de unas cargas a otras o se pierden en el infinito. En los dieléctricos ya no es lo mismo, si se tienen en cuenta solamente las cargas libres. Por ejemplo, en las superficies límites del dieléctrico surgen cargas aparentes superficiales, y parte de las líneas de fuerza terminará o empezará en ellas. Así, las líneas de fuerza no atravesarán ininterrumpidas la superficie límite de los dieléctricos. Debido a ello, a los dieléctricos heterogéneos no se puede aplicar el teorema de Ostrogradski-Gauss en la forma dada en el § 126.

No obstante, para caracterizar el campo en el seno del dieléctrico, se puede introducir un nuevo vector \mathbf{D} , cuyas líneas pasan ininterrumpidas por los dieléctricos (tanto homogéneos, como heterogéneos), y por las superficies divisorias. Este vector se denomina *vector de desplazamiento eléctrico* (o *vector de inducción* o *de excitación eléctrica* en un dieléctrico), y está relacionado con el vector de intensidad del campo \mathbf{E} mediante la ecuación:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1)$$

donde ϵ es el valor de la constante dieléctrica en el punto del dieléctrico donde se determina el valor del vector \mathbf{D} .

El valor del vector \mathbf{D} se puede expresar de otra forma. Según lo dicho en el § 139, tenemos que $\epsilon = 1 + 4\pi\kappa$, de donde

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\kappa) \mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi\kappa\mathbf{E},$$

pero $\kappa\mathbf{E}=\mathbf{P}$, donde \mathbf{P} es el vector de polarización (véase el § 141). De esto se deduce que:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (1a)$$

es decir, el vector de desplazamiento se expresa como la suma del vector de intensidad del campo \mathbf{E} y del vector de polarización \mathbf{P} multiplicado por 4π .

De la (1) se deduce que el vector de desplazamiento \mathbf{D} , en cada punto dado, tiene la misma dirección y sentido que al vector de intensidad \mathbf{E} *, pero de valor numérico ϵ veces mayor que el de intensidad. En el vacío, los vectores \mathbf{E} y \mathbf{D} coinciden.

Las líneas de fuerza del vector de desplazamiento las construiremos de la misma manera que construimos en el vacío las líneas de

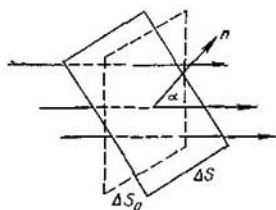


Fig. 60. Superficie elemental inclinada respecto a las líneas del vector de desplazamiento \mathbf{D} .

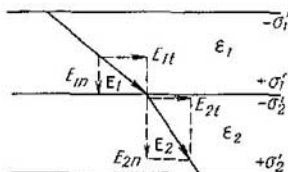


Fig. 61. Determinación de las condiciones límites del vector de intensidad del campo \mathbf{E} .

fuerza del vector de intensidad del campo. Denominaremos *línea de fuerza del vector de desplazamiento* la línea cuya tangente en cada uno de sus puntos coincide con la dirección y sentido del vector de desplazamiento. Consideraremos que la dirección de la propia línea de fuerza coincide con la del vector de desplazamiento en el mismo punto. La cantidad de líneas de fuerza de desplazamiento que hay que trazar, se deduce de la ecuación que dice: la relación entre el número de líneas de fuerza de desplazamiento ΔN que atraviesan una pequeña superficie ΔS_0 perpendicular a estas líneas y el área de la superficie ΔS_0 , es igual numéricamente al valor del vector de desplazamiento en la superficie dada:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S_0} = D. \quad (2)$$

Si tomamos una superficie ΔS arbitrariamente orientada (fig. 60),

* Para los cristales, la dirección del vector \mathbf{D} puede ser distinta de la del vector \mathbf{E} .

nos da que:

$$\Delta N = D \Delta S_0 = D \Delta S \cos \alpha = D_n \Delta S, \quad (3)$$

donde D_n es la proyección del vector de desplazamiento sobre la normal a la superficie ΔS . La magnitud ΔN se puede denominar *flujo del vector de desplazamiento* a través de la superficie ΔS . Si la superficie es de dimensiones finitas, se debe dividir en pequeños elementos ΔS y calcular el flujo a través de cada uno de los elementos; entonces, el flujo total del vector de desplazamiento será la suma de todos los flujos elementales:

$$N = \sum_S D_n \Delta S. \quad (4)$$

Para demostrar que las líneas de fuerza del vector de desplazamiento son continuas, examinemos dos capas planas homogéneas de dieléctricos de constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_2 (fig. 64). Supongamos que la intensidad del campo \mathbf{E}_0 de las cargas libres forma ángulo con la línea divisoria de los dieléctricos. En las superficies límites surgen cargas aparentes superficiales: formando en el primer dieléctrico densidades de carga $+\sigma'_1$ y $-\sigma'_1$, y en el segundo, $+\sigma'_2$ y $-\sigma'_2$. Las cargas $+\sigma'_1$ y $-\sigma'_1$ crean en el primer dieléctrico una intensidad de campo:

$$E'_1 = -4\pi\sigma'_1$$

dirigida perpendicularmente a las superficies límites del dieléctrico en sentido contrario a la componente normal E_{0n} . Fuera de este dieléctrico, las cargas $+\sigma'_1$ y $-\sigma'_1$ no crean ningún campo.

De la misma manera, las cargas $+\sigma'_2$ y $-\sigma'_2$, crean en el segundo dieléctrico una intensidad del campo:

$$E'_2 = -4\pi\sigma'_2,$$

normal a las superficies límites de este dieléctrico. Estas intensidades complementarias E'_1 y E'_2 originadas por las cargas aparentes, varían solamente las componentes normales de la intensidad primitiva \mathbf{E}_0 y no varían las componentes tangentes a la línea divisoria. Como la suma de estas dos intensidades \mathbf{E}_0 y \mathbf{E}' , por definición, nos da la intensidad del campo en los dieléctricos (§ 142), para la componente normal de la intensidad del campo en el primer dieléctrico tenemos:

$$E_{1n} = E_{0n} - 4\pi\sigma'_1, \quad (5)$$

y para la componente tangencial:

$$E_{1t} = E_{0t}. \quad (6)$$

De la misma manera hallamos que las componentes de la intensidad del campo del segundo dieléctrico, son:

$$E_{2n} = E_{0n} - 4\pi\sigma'_2, \quad (5a)$$

$$E_{2t} = E_{0t}. \quad (6a)$$

De las ecuaciones (6) y (6a) obtenemos que:

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad (7)$$

es decir, que la componente tangencial de la intensidad del campo es continua al pasar por la línea divisoria de los dieléctricos.

Para las densidades superficiales de cargas aparentes σ'_1 y σ'_2 tenemos que: $\sigma'_1 = \kappa_1 E_{1n}$ y $\sigma'_2 = \kappa_2 E_{2n}$, donde κ_1 y κ_2 son las susceptibilidades eléctricas de los dieléctricos primero y segundo respectivamente. Por lo tanto, las ecuaciones (5) y (5a) adquieren el aspecto:

$$(1 + 4\pi\kappa_1) E_{1n} = E_{0n}, \quad (1 + 4\pi\kappa_2) E_{2n} = E_{0n}.$$

Observando que $1 + 4\pi\kappa_1 = \epsilon_1$ y $1 + 4\pi\kappa_2 = \epsilon_2$, de estas dos ecuaciones hallamos que:

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}. \quad (8)$$

Así tenemos que la componente normal de la intensidad del campo se interrumpe al pasar la línea divisoria de los dieléctricos. Las ecuaciones (7) y (8) son las *condiciones límites del vector E*. De ellas, y basándonos en la relación $E = \frac{D}{\epsilon}$, obtenemos las *condiciones límites del vector de desplazamiento D*:

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}, \quad D_{1n} = D_{2n}. \quad (9)$$

La componente normal del vector de desplazamiento D_n es continua al pasar la línea divisoria de los dieléctricos, mientras que la componente tangencial se interrumpe.

Supongamos que en el primer dieléctrico el vector de desplazamiento D_1 forma con la normal a la línea divisoria un ángulo α_1 , y en el segundo dieléctrico, el vector D_2 forma el ángulo α_2 . Descomponiendo D_1 en D_{1t} y D_{1n} , y el D_2 en D_{2t} y D_{2n} (fig. 62), tenemos que:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D_{1t}}{D_{1n}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{2t}}{D_{2n}}, \quad \text{de donde} \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{D_{1t}}{D_{2t}} \cdot \frac{D_{2n}}{D_{1n}}.$$

De la última igualdad y teniendo en cuenta las condiciones límites (9), hallamos que:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (10)$$

Esta relación expresa la ley de la refracción de las líneas de fuerza de desplazamiento en las superficies de contacto de dos dieléctricos.

Las condiciones límites (9) del vector de desplazamiento D corresponden precisamente a la continuidad de las líneas de fuerza del desplazamiento eléctrico que atraviesan las líneas divisorias de los dos dieléctricos. Supongamos que las líneas de fuerza del vector de desplazamiento eléctrico atraviesan, refractándose, la línea

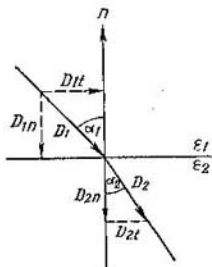


Fig. 62. Refracción de las líneas de fuerza de desplazamiento en las superficies de contacto de dos dieléctricos.

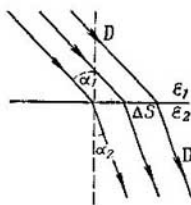


Fig. 63. Continuidad de las líneas de fuerza de desplazamiento al atravesar la línea divisoria de dos dieléctricos.

divisoria de dos dieléctricos (fig. 63). El número de líneas de fuerza del desplazamiento ΔN_1 que penetra por el área ΔS de la superficie divisoria del primer dieléctrico, por definición, es

$$\Delta N_1 = D_{1n} \Delta S.$$

Del segundo dieléctrico, de la misma superficie ΔS , sale un flujo del vector de desplazamiento:

$$\Delta N_2 = D_{2n} \Delta S.$$

Pero, según las condiciones (9), tenemos que $D_{1n} = D_{2n}$, por consiguiente

$$\Delta N_1 = \Delta N_2.$$

Así tenemos que las líneas de fuerza del desplazamiento eléctrico pasan continuamente por la superficie.

En el caso de un dieléctrico heterogéneo, se puede dividir mentalmente en capas tan finas que cada una de ellas se pueda considerar homogénea. Entonces las líneas de fuerza del desplazamiento eléctrico pasarán continuamente de una capa a otra y, por consiguiente, pasarán ininterrumpidamente por el seno del dieléctrico.

Para el dieléctrico homogéneo que llena por completo el espacio donde el campo es distinto de cero, el vector de desplazamiento eléctrico D coincide con el de la intensidad del campo de las cargas libres E_0 . Esto se deduce de que en un dieléctrico de esta clase $E = \frac{E_0}{\epsilon}$ (véase el § 142), de donde $E_0 = \epsilon E = D$.

Para el campo en el seno del dieléctrico, el teorema de Ostrogradski-Gauss adquiere otra forma. Sea un dieléctrico polarizado. Calculemos el flujo eléctrico que pasa a través de una superficie cerrada cualquiera S del interior del dieléctrico. La carga total Q del interior de la superficie consta de dos partes: carga libre Q_0 introducida en el dieléctrico desde fuera, y la carga aparente Q' , formada por la polarización del dieléctrico. Así tenemos que

$$\sum E_n \Delta S = 4\pi Q = 4\pi (Q_0 + Q'), \quad (11)$$

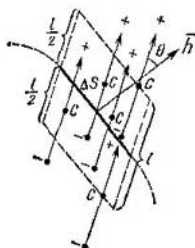
donde n indica la normal exterior en los puntos de la superficie S .

Calculemos la carga Q' . Está claro que las moléculas que caen por entero dentro de la superficie S no crearán en el interior de esta superficie carga libre alguna. Las cargas libres las crearán solamente las moléculas que han sido divididas por la superficie S . Las moléculas en que fuera de la superficie S hayan quedado las cargas posi-

Fig. 64. Representación gráfica para el cálculo de la carga aparente.

tivas, crearán una carga negativa dentro de la superficie, y aquellas en que fuera de la superficie hayan quedado las cargas negativas, crearán dentro de la superficie S una carga positiva. Sea el elemento de superficie ΔS . Calculemos cuántas moléculas divide este elemento. Supongamos que en las proximidades del elemento ΔS los momentos polares de las moléculas son de igual magnitud y dirección e iguales a $p = ql$, donde l es la distancia entre las cargas positivas y negativas de las moléculas. Supongamos que los ejes de los dipolos (de dirección l) forman un ángulo θ con la normal exterior n al elemento ΔS . Está claro que el elemento ΔS dividirá las moléculas cuyos centros C disten del elemento ΔS en no más de $\frac{l}{2}$ según la dirección de

l a ambos lados de la superficie (véase la fig. 64, donde l es la longitud del dipolo). De esta manera, el elemento ΔS divide las moléculas cuyos centros de los dipolos están comprendidos en el volumen de un cilindro oblicuo de base ΔS y de generatriz de longitud igual a l . Suponiendo que el número de centros de dipolos por unidad de volumen es n_0 , tenemos que el número de moléculas que divide el ele-



mento ΔS es de

$$n_0 \Delta S l \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}).$$

Cada molécula dividida forma en el interior de la superficie S una carga negativa q , si la dirección de \mathbf{l} forma un ángulo agudo con la de \mathbf{n} (el sentido de \mathbf{l} es desde la carga positiva a la negativa). Así tenemos que, al dividir el elemento de la superficie ΔS a las moléculas, en el interior de la superficie se crea una carga negativa verdadera igual a

$$-qn_0 l \Delta S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})$$

(si el elemento ΔS tiene una normal exterior que forme ángulo agudo con la dirección de \mathbf{l} , la expresión arriba dada tendrá una carga positiva). Al mismo tiempo tenemos que $qn_0 = \mathbf{P}$, que es el vector de polarización del medio (momento de la unidad de volumen); por consiguiente, la carga excesiva creada por las moléculas divididas por el elemento ΔS , puede representarse de la siguiente manera:

$$-P \cos(\mathbf{n}, \mathbf{P}) \Delta S = -P_n \Delta S.$$

Aquí P_n es la proyección del vector de polarización sobre la normal exterior n al elemento ΔS .

La carga total en el interior de toda la superficie S la obtenemos sumando las cargas de todos los elementos ΔS :

$$Q' = -\sum P_n \Delta S.$$

Colocando en la (11) este valor de Q' , hallamos que

$$\sum E_n \Delta S = 4\pi(Q - \sum P_n \Delta S)$$

o

$$\sum (E_n + 4\pi P_n) \Delta S = 4\pi Q.$$

Pero la suma $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ es el vector de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} , de donde, definitivamente tenemos que

$$\sum D_n \Delta S = 4\pi Q.$$

Este resultado es la expresión del teorema de Ostrogradski-Gauss para los dieléctricos: el flujo del vector del desplazamiento eléctrico a través de una superficie cerrada cualquiera es igual al producto de 4π por la carga *libre* comprendida en el interior de la superficie.

En el § 130 se ha demostrado que entre la intensidad del campo electrostático \mathbf{E} y la densidad de las cargas volumétricas ρ hay la siguiente relación:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (12)$$

o

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (12a)$$

En el caso del dieléctrico, ρ es la densidad volumétrica tanto de las cargas libres como de las aparentes. Si hay dieléctricos, la densidad volumétrica de las cargas libres ρ_0 determina la divergencia del vector D . Efectivamente, según la fórmula (1a),

$$D = E + 4\pi P,$$

donde P es el vector de polarización. De donde:

$$\operatorname{div} D = \operatorname{div} E + 4\pi \operatorname{div} P. \quad (13)$$

Según lo dicho en el § 141, $\operatorname{div} P = -\rho'$, donde ρ' es la densidad volumétrica de las cargas aparentes. Colocando en la (13) este valor de $\operatorname{div} P$ y el de $\operatorname{div} E$ de la (12a), obtenemos que:

$$\operatorname{div} D = 4\pi (\rho - \rho'),$$

pero $\rho' - \rho = \rho_0$, donde ρ_0 es la densidad volumétrica de las cargas libres, de donde hallamos que:

$$\operatorname{div} D = 4\pi \rho_0. \quad (14)$$

Así tenemos que la divergencia del vector D viene determinada solamente por la densidad de las cargas libres.

La ecuación (12a) del vector E la hemos obtenido como corolario del teorema de Ostrogradski — Gauss. Se puede demostrar, a la inversa, que si se satisface la ecuación (12a), se cumple el teorema de Ostrogradski — Gauss. De la misma manera, de la ecuación (14) se deduce que en cualquier dieléctrico, el vector D cumple el teorema de Ostrogradski — Gauss, pero se han de tener en cuenta solamente las cargas libres.

§ 145. Determinación de los vectores E y D por las fuerzas que actúan sobre la carga. En el vacío hemos determinado la intensidad del campo E en función de la fuerza que actúa sobre una carga unidad positiva (§ 124). Si sobre la carga q colocada en el punto dado del campo, actúa la fuerza f , la intensidad del campo E en este punto la determina la ecuación:

$$E = \frac{f}{q}. \quad (1)$$

En este caso es muy importante tener en cuenta las dos circunstancias siguientes: 1) la carga de prueba q debe ser puntual, es decir, debe estar concentrada en un cuerpo de dimensiones tan pequeñas, que la intensidad del campo dentro de sus límites sea constante; 2) la introducción de la carga q no debe producir ninguna variación ni en la magnitud ni en la disposición de las cargas que crean el campo. Prácticamente se pueden satisfacer estas dos condiciones tomando una carga q muy pequeña y concentrándola en un cuerpo de dimensiones pequeñas en comparación con la distancia a cualquiera de las cargas que crean el campo.

En el dieléctrico la intensidad del campo E la hemos determinado (§ 142) como la suma de intensidades: E_0 , producida por las cargas

libres, y E' , originada por las cargas aparentes:

$$E = E_0 + E'.$$

Como se ha indicado en el § 143, las fuerzas que actúan sobre los cuerpos cargados situados en el interior de un dieléctrico, no vienen determinadas, estrictamente hablando, por la ecuación $f=qE$, donde q es la carga concentrada en el cuerpo a examinar. Esto es debido a que en la superficie límite entre el cuerpo

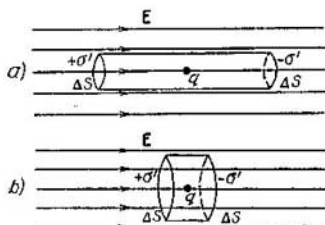


Fig. 65. Cavidad en un dieléctrico: a) en forma de cilindro estrecho y largo y b) en forma de cilindro corto y ancho.

y el dieléctrico surgen cargas aparentes superficiales y complementarias, cuyo valor depende de la magnitud de la carga q y de las dimensiones y forma del cuerpo en que se halla la carga. Además, en el mismo dieléctrico y en las zonas limítrofes con el cuerpo aparecen tensiones mecánicas, que también crean ciertas fuerzas. Las cargas aparentes complementarias no desaparecen incluso cuando las dimensiones del cuerpo son pequeñas; por eso no se puede determinar la intensidad del campo E en el dieléctrico basándose en la ecuación (1) y utilizando una carga de prueba q .

Se pueden evitar las fuerzas mecánicas originadas por las tensiones en el dieléctrico, si hacemos una cavidad en el dieléctrico y colocamos en su interior la carga de prueba de modo que no toque las paredes. No obstante, en este caso, la fuerza que actúa sobre la carga de prueba q depende de la forma y dimensiones de la cavidad y, por consiguiente, rigurosamente hablando, no la determina sólo la intensidad del campo E en el interior del dieléctrico.

Sea un dieléctrico homogéneo infinito. Hagamos una cavidad en su interior en forma de cilindro estrecho y largo de generatrices paralelas a las líneas de fuerza de la intensidad E (fig. 65,a). Introduzcamos en la parte media de esta cavidad una carga de prueba q tan pequeña y concentrada en un cuerpo de dimensiones tan pequeñas,

que se puedan despreciar las cargas aparentes que pueda originar esta carga q en las superficies de la cavidad, y se pueda considerar que sobre esta carga actúa solamente el campo \mathbf{E} y las cargas aparentes $\pm\sigma'$ que este campo crea en las superficies límites de la cavidad. En estas condiciones, la fuerza que actúa sobre la carga de prueba q , es igual a

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + \mathbf{f}', \quad (2)$$

donde \mathbf{f}' es la fuerza originada por las cargas aparentes $\pm\sigma'$. Como las generatrices del cilindro son paralelas al vector \mathbf{E} , las cargas aparentes surgirán solamente en las bases ΔS del cilindro, y la magnitud de estas cargas será igual a $Q_i = \pm\sigma'\Delta S$. Si el cilindro es estrecho y largo, las cargas Q_i son pequeñas (las superficies ΔS son pequeñas), y estarán lejos de la carga de prueba q . Por eso, la fuerza \mathbf{f}' será pequeña en comparación con $q\mathbf{E}$ y se puede despreciar; entonces la ecuación (2) nos da:

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}$$

Por consiguiente, la fuerza que actúa sobre una pequeña carga de prueba situada en la parte media de una cavidad en forma de cilindro largo y estrecho, cuyas generatrices son paralelas a las líneas de fuerza de la intensidad, viene determinada en función de la intensidad del campo \mathbf{E} en el dieléctrico.

Veamos ahora una cavidad de otra forma: en la de un corto y ancho cilindro de base ΔS perpendicular a las líneas de fuerza de la intensidad \mathbf{E} (fig. 65, b). Ahora no se puede despreciar la acción de las cargas aparentes $Q_i = \pm\sigma'\Delta S$.

Considerando las bases del cilindro como dos planos paralelos infinitamente grandes, tenemos que las cargas aparentes Q_i crean un campo entre ellas, cuyo valor de la intensidad es

$$E' = 4\pi\sigma' = 4\pi\kappa E.$$

Esta intensidad origina una fuerza de valor

$$\mathbf{f}' = q \cdot 4\pi\kappa E,$$

después de lo cual, la ecuación (2) nos da

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + 4\pi\kappa E) \text{ ó } \mathbf{f} = q(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}),$$

donde \mathbf{P} es el vector de polarización. Pero, según la ecuación (1a) del § 144

$$\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \mathbf{D},$$

donde \mathbf{D} es el vector del desplazamiento eléctrico. Por lo tanto,

$$\mathbf{f} = q\mathbf{D}, \quad (3)$$

es decir, la fuerza que actúa sobre una pequeña carga de prueba situada en la parte media de una cavidad en forma de cilindro corto y ancho de bases perpendiculares a las líneas de fuerza, viene determinada en función del vector del desplazamiento eléctrico D en el dieléctrico.

De lo dicho, vemos de nuevo que la fuerza que actúa sobre una carga de prueba introducida en una cavidad depende de las dimensiones y forma de la cavidad. En particular, a la cavidad se le puede dar tal forma, que la fuerza que actúa sobre la carga de prueba introducida en ella, venga determinada en función de la intensidad del campo E en el dieléctrico, o en función del desplazamiento eléctrico D .

Al mismo tiempo se puede aclarar el sentido físico del vector E de otra manera. Para ello, como carga de prueba no elegimos una carga concentrada en un cuerpo macroscópico (aunque sea muy pequeño), sino una partícula elemental cargada cualquiera, por ejemplo, el electrón. Un electrón individual siempre se halla en el vacío, incluso si está entre moléculas de un cuerpo sólido. El valor de la fuerza f que actúa sobre este electrón, dividido por la magnitud de su carga e , determinará la intensidad del campo en el punto donde se halla el electrón. Este valor de la intensidad lo designaremos por E_{micro} , donde el subíndice "micro" denota que la intensidad del campo viene determinada con ayuda de una partícula microscópica. El valor de la intensidad del campo E_{micro} será diferente, según el electrón esté cerca de una u otra carga que entre en la composición de las moléculas. Pero si colocamos consecutivamente al electrón en puntos de pequeño volumen físico elegidos arbitrariamente y hallamos el valor medio de E_{micro} , este valor vendrá determinado solamente con el conjunto de todas las cargas, libres y aparentes, es decir, nos dará precisamente la intensidad del campo E en los límites del volumen dado del dieléctrico.

Es importante señalar que al determinar E_{micro} , hemos situado al electrón en puntos arbitrariamente elegidos respecto a las moléculas del dieléctrico. Si se eligen determinadas moléculas en el interior del dieléctrico, la intensidad media del campo E_1 que actúa en los límites del volumen donde hay una molécula, será distinta de la E_{micro} y, por consiguiente, de la intensidad del campo E . Esto es debido a que, en este caso, se trata del valor medio de la intensidad del campo, determinado para los puntos donde están los centros de las moléculas, suponiendo que cada vez la propia molécula ha sido retirada. Así tenemos que los puntos para los cuales se ha tomado el valor medio, no han sido elegidos arbitrariamente y, con respecto a ellos, las demás moléculas del dieléctrico polarizado no están situadas caóticamente ni crean su campo complementario.

Los cálculos correspondientes demuestran que la intensidad media del campo E_1 que actúa sobre la molécula que se halla en el

interior de un dieléctrico isótropo, es igual a

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}, \quad (4)$$

donde \mathbf{P} es el vector de polarización.

§ 146. Dieléctricos dipolares. Determinación de los momentos dipolares de las moléculas. Hasta ahora hemos considerado que el resultado de polarización del dieléctrico es el mismo independientemente de que las moléculas tuvieran primeramente momento polar o de que este momento dipolar haya surgido bajo la influencia de un campo exterior. Sin embargo, hay fenómenos que permiten establecer la diferencia entre los dieléctricos de moléculas polares y de las apolares y calcular los momentos dipolares de las moléculas propiamente polares.

Hasta ahora hemos considerado que el valor del vector de polarización \mathbf{P} lo determina la ecuación

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E},$$

donde \mathbf{E} es la intensidad del campo en el dieléctrico y κ la susceptibilidad eléctrica. Supongamos ahora que \mathbf{P} pueda ser expresado de la manera siguiente:

$$\mathbf{P} = \alpha n_0 \mathbf{E}_1, \quad (1)$$

donde n_0 es el número de moléculas por unidad de volumen, \mathbf{E}_1 el valor medio de la intensidad del campo que actúa sobre las moléculas, y α la susceptibilidad de las moléculas.

Colocando en la (1) el valor de \mathbf{E}_1 según la fórmula (4) del § 145, hallamos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \alpha n_0 \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right), \\ \mathbf{P} \left(1 - \frac{4\pi}{3} \alpha n_0 \right) &= \alpha n_0 \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2)$$

No obstante, utilizando la relación $\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}$ y observando que $1 + 4\pi\kappa = \epsilon$, donde ϵ es la constante dieléctrica, podemos escribir, por otro lado:

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}.$$

Colocando este valor de \mathbf{P} en la fórmula (2), tenemos:

$$\frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} \left(1 - \frac{4\pi}{3} \alpha n_0 \right) = \alpha n_0 \mathbf{E},$$

de donde, después, de simples transformaciones algebraicas hallamos que:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot \frac{1}{n_0} = \frac{4\pi}{3} \alpha.$$

El número de moléculas por unidad de volumen n_0 es igual a $N \frac{\delta}{\mu}$, donde μ es el peso molecular de la sustancia del dieléctrico, δ su densidad y N el número de Avogadro; de donde obtenemos que:

$$\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \cdot \frac{\mu}{\delta} = \frac{4\pi}{3} \alpha N. \quad (3)$$

Como la susceptibilidad eléctrica de las moléculas α es una magnitud constante para cada clase de moléculas, la magnitud $\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \cdot \frac{\mu}{\delta}$ para cada dieléctrico dado será también una magnitud constante, independiente de la variación de su densidad originada por cualquier causa exterior, por ejemplo, por la presión, variación de temperatura, etc. La magnitud $\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \cdot \frac{\mu}{\delta}$ se denomina *polarización molecular*. La independencia de la polarización molecular respecto a la densidad δ se puede comprobar experimentalmente en los gases, cuya densidad varía fácilmente bajo la acción de una presión exterior.

La ecuación (3) de la polarización molecular es justa para los dieléctricos no polares (apolares). En los dieléctricos dipolares, las moléculas, como ya se ha indicado, tienen un momento polar (eléctrico) propio p_0 . Bajo la influencia de un campo eléctrico exterior, los dipolos tienden a orientarse a lo largo del campo. Pero a este movimiento de orientación se opone el movimiento térmico caótico. Cuanto mayor sea la temperatura T , mayor será la energía media del movimiento térmico de las moléculas y, por consiguiente, más débil será la acción orientadora del campo eléctrico exterior. Esto acarrea el que el vector de polarización dieléctrica \mathbf{P} dependa de la temperatura. Los correspondientes cálculos nos dan que

$$P = n_0 \frac{p_0^2 E_1}{3kT},$$

donde k es la constante de Boltzmann.

Si además, los dipolos aumentan bajo la influencia del campo E (es decir, la susceptibilidad eléctrica α de las moléculas no es igual a cero), el valor numérico del vector de polarización del dieléctrico \mathbf{P} será igual a

$$P = \alpha n_0 E_1 + n_0 \frac{p_0^2 E_1}{3kT},$$

de donde en lugar de la ecuación (3), nos da para la polarización molecular:

$$\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \cdot \frac{\mu}{\delta} = \left(\frac{4\pi}{3} \alpha + \frac{4\pi}{9} \frac{p_0^2}{kT} \right) N. \quad (4)$$

Así tenemos que para los dieléctricos polares, la polarización molecular tiene un término que depende de la temperatura absoluta del dieléctrico T . Esta dependencia se ve bien en los gases. Al determinar experimentalmente el proceso de la polarización molecular en función de la temperatura T , se puede hallar el momento eléctrico p_0 para las diferentes moléculas polares. Resulta que los momentos eléctricos de las moléculas polares son magnitudes del orden desde $1 \cdot 10^{-18}$ hasta $6 \cdot 10^{-18}$ unidades CGSE. Estos momentos corresponden al momento eléctrico (polar) de dos cargas puntuales iguales a las cargas del electrón alejadas a una distancia de unos 10^{-8} cm.

Los átomos de los gases inertes y de algunas moléculas biatómicas (por ejemplo del H_2 y del N_2) tienen los momentos polares iguales a cero. La determinación de los momentos eléctricos de las moléculas desempeña una gran función en el estudio de su estructura (sobre todo en la química orgánica). Ciertas clases de sustancias tienen unos valores de α muy próximos, característicos para el compuesto químico dado. Los valores de los momentos polares de algunas sustancias se dan en la tabla II.

En los dieléctricos líquidos y sólidos hay que tener en cuenta la acción mutua de las moléculas. Esto acarrea el que en el giro de una molécula bajo la influencia de un campo eléctrico exterior, se necesita cierto tiempo que, aunque pequeño, es perceptible. Si el dieléctrico se introduce en un campo eléctrico alterno de rápida variación en magnitud y dirección, las moléculas no tienen tiem-

Tabla II
Momentos eléctricos polares

Sustancia	$p_e \cdot 10^{18}$ unid. CGSE
Cloruro de hidrógeno HCl	1,03
Agua H_2O	1,85
Amoníaco NH_3	1,5
Alcoholes	1,7
Eteres	1,2
Acidos orgánicos	1,4

po de girar en el campo y la función del segundo término de la fórmula (4) disminuye en importancia.

Señalemos por último la siguiente circunstancia: en todos los casos examinados, la existencia de una constante dieléctrica independiente de la intensidad del campo es debida a la proporcionalidad entre el vector de polarización \mathbf{P} y la intensidad del campo \mathbf{E} .

Sin embargo, hay cuerpos para los cuales la "constante dieléctrica" ϵ no es una magnitud constante, sino que depende de la intensidad del campo E . Esta clase de dieléctricos tienen una serie de propiedades sui generis parecidas a las propiedades magnéticas de los cuerpos ferromagnéticos, a los cuales se aproximan.

Estas propiedades fueron descubiertas en la sal de Seignette (sal de Rochelle o tartrato sódico-potásico) por los físicos soviéticos B. Kurchátov y P. Kobeko y que, por el nombre de la sal, se llaman propiedades *seignetoeléctricas*. El comportamiento de la sal de Seignette varía mucho según su temperatura sea mayor o menor que determinada temperatura θ , igual a 25°C (análoga a los "puntos de Curie" de los cuerpos ferromagnéticos; véase el § 203). Si $T > \theta$, se observa proporcionalidad entre la intensidad del campo y el vector de polarización; $P = \kappa E$; en este caso, el coeficiente κ depende de la temperatura T según la ecuación $\kappa (T - \theta) = \text{const}$. Si $T < \theta$, se altera la proporcionalidad entre el vector P y la intensidad del campo E . Al variar E , el vector P

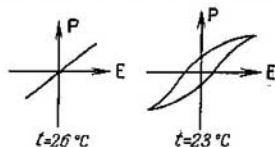


Fig. 66. Dependencia de la polarización de la sal de Seignette respecto a la intensidad del campo que varía con el tiempo.

P "se retrasa", es decir, adquiere valores que corresponden a los de E anteriormente adquiridos. Este fenómeno se llama *histéresis* (análogamente a la histéresis de los cuerpos ferromagnéticos; véase el § 203) Si la intensidad del campo E varía periódicamente en magnitud y dirección, la curva de P en función de E , a $T < \theta$, adquiere la forma indicada en la fig. 66. B. Vul descubrió estas mismas propiedades en ciertas sales de titanio en donde ϵ alcanza valores de varios millares.

§ 147. Propiedades dieléctricas de los cristales. Piezoelectricidad. Hasta ahora hemos examinado los dieléctricos que constan de moléculas independientes en las cuales las cargas pueden desplazarse u orientarse bajo la acción de un campo eléctrico exterior. Este concepto que nos hemos formado es justo para los cuerpos gaseosos, líquidos o amorfos. La polarización de los *cristales* iónicos tiene otro carácter. Como se ha dicho en el t. I, los cristales iónicos son redes espaciales con una alternancia regular de iones de diferente signo. Por ejemplo, el cristal de la sal gema es una red espacial de iones positivos de sodio y iones negativos de cloro. En un cristal de esta clase no se puede considerar una molécula por separado. En correspondencia con ello, la polarización del cristal se reduce al despla-

miento de todos los iones positivos según el sentido del campo, y de los negativos en sentido contrario.

El grado de polarización de los cristales puede ser distinto según sea la dirección del vector de intensidad electrostática E respecto a la dirección de los ejes cristalográficos. En este caso, la dirección del vector de polarización P no coincide con la del vector E y, por consiguiente, la relación entre los vectores P y E no se puede expresar por la simple ecuación (2) del § 141. En lugar de la magnitud κ hay que introducir en el caso general nueve magnitudes κ_{jk} con las cuales se expresa la relación lineal entre los componentes de los vectores P y E según los ejes de coordenadas:

$$P_x = \kappa_{xx}E_x + \kappa_{xy}E_y + \kappa_{xz}E_z,$$

$$P_y = \kappa_{yx}E_x + \kappa_{yy}E_y + \kappa_{yz}E_z,$$

$$P_z = \kappa_{zx}E_x + \kappa_{zy}E_y + \kappa_{zz}E_z.$$

En correspondencia con ello, el vector de desplazamiento eléctrico D no es paralelo al vector E , y en lugar de la constante dieléctrica ϵ , en el caso general, también hay que introducir nueve magnitudes ϵ_{jk} .

La disposición regular de las partículas en el espacio de la red cristalina acarrea la aparición de un efecto especial denominado *efecto piezoeléctrico*. Este efecto reside en que en las caras de ciertos cristales, al sufrir deformaciones mecánicas (por ejemplo, de compresión o de tracción) surgen cargas eléctricas.

El efecto piezoeléctrico se observa en el cuarzo, turmalina, sal de Seignette, azúcar, blenda de zinc y una serie de cristales más. El más estudiado es el efecto piezoeléctrico del cuarzo. Al comprimirlo con una fuerza de 1 kg, en las caras opuestas del cristal de cuarzo surge una diferencia de potencial aproximadamente de unas centésimas de voltio. En los cristales de la sal de Seignette, el efecto es más intenso.

Además del efecto piezoeléctrico directo que hemos descrito, tenemos también el efecto piezoeléctrico inverso, que consiste en la variación de las dimensiones del cristal, es decir, su alargamiento o contracción, al someterlo a la acción de un campo eléctrico (*electrostricción*). La variación de las dimensiones de un cristal en la electrostricción es pequeña: es una magnitud del orden de 10^{-7} cm al aplicarle una diferencia de potencial de centenares de voltios.

Los efectos piezoeléctricos, directo e inverso, en la actualidad tienen gran aplicación en la técnica. En el t. I ya se ha hablado de la aplicación del cuarzo piezoeléctrico para obtener y estudiar el ultrasonido. En radiotecnica, el cuarzo piezoeléctrico se utiliza para estabilizar las oscilaciones eléctricas. El cuarzo piezoeléctrico se utiliza también en diferentes instrumentos de medida y para construir relojes de (cristal de) cuarzo.

Para obtener un efecto piezoeléctrico, de un cristal de cuarzo se corta un paralelepípedo rectangular (fig. 67) en que unas aristas sean paralelas al llamado eje óptico L^3 , y las otras sean paralelas a uno de los ejes binarios L^2 (ejes eléctricos). Al actuar la fuerza f de compresión paralela al eje L^2 sobre el cuarzo así cortado, en las caras perpendiculares al eje L^2 surgen cargas $+q$ y $-q$ iguales y de signo contrario. La cantidad de electricidad q es proporcional a la fuerza de compresión f y no depende de las dimensiones de la placa de cuarzo:

$$q_{\parallel} = kf;$$

este efecto se denomina *efecto piezoeléctrico longitudinal*. La magnitud k se llama *constante piezoeléctrica* del cuarzo, que aproximadamente es igual a $6,5 \cdot 10^{-8}$, si q se expresa en unidades CGSE de carga, y f , en dinas.

Si la fuerza f es paralela al eje óptico L^3 , no surgen cargas.

Si la fuerza f actúa en la dirección de n , perpendicular al plano que contiene los ejes L^2 y L^3 , aparece el llamado *efecto piezoeléctrico transversal*. Surgen también cargas en las caras perpendiculares a L^2 , pero el signo de estas cargas es contrario al que se observa en el efecto longitudinal. En este caso, la cantidad de electricidad q_{\perp} que surge en cada cara, es:

$$q_{\perp} = k \frac{a}{b} f,$$

donde k tiene el mismo valor de antes, a es el espesor de la lámina en la dirección en que actúa la fuerza f , y b es el espesor de la misma en dirección del eje L^3 .

Al cambiar el signo de la fuerza f , varía el de las cargas q : en la cara en que en la compresión surge una carga positiva, en la tracción aparece una carga negativa, y viceversa.

Para observar el efecto piezoeléctrico inverso, se pegan a las caras del cuarzo piezoeléctrico unas armaduras metálicas a las cuales se les comunica cargas eléctricas, y en este caso, según la dirección del campo, la lámina de cristal se contrae o se dilata.

§ 148. Condensadores. En el § 136 hemos estudiado el condensador plano en el vacío y dedujimos que su capacidad C era

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{S}{4\pi d}, \quad (1)$$

donde S es la superficie de una placa del condensador, y d , la distancia entre las placas. Si entre las placas del condensador hay un dieléctrico de constante dieléctrica ϵ , su capacidad C , según lo dicho en el § 139, aumenta en ϵ veces y, por consiguiente, será

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}. \quad (2)$$

Así tenemos que la capacidad del condensador plano es directamente proporcional a la superficie de la placa S y a la constante dieléctrica ϵ , e inversamente proporcional a la distancia d entre las placas.

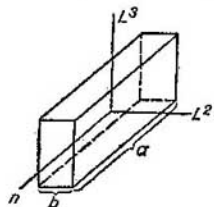


Fig. 67. Paralelepípedo de cuarzo.

Veamos ahora la asociación de condensadores. Los condensadores pueden asociarse en serie o en paralelo.

En la fig. 68 se representa el caso de conexión en serie de dos condensadores de capacidades C_1 y C_2 respectivamente. Al cargar la placa 1 con una carga $+Q$, en las placas 2 y 3, que son un mismo conductor, aparecen por inducción las cargas $-Q$ y $+Q$ respectivamente, y en la placa 4 la carga será $-Q$.

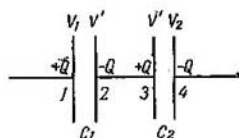


Fig. 68. Asociación en serie de condensadores.

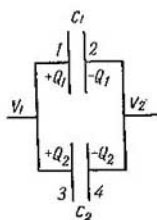


Fig. 69. Asociación en paralelo de condensadores.

Designemos el potencial de la placa 1 por V_1 , y el de la 4 por V_2 ; el potencial común de las placas 2 y 3 lo designaremos V' . Para cada par de placas se pueden escribir las relaciones:

$$V_1 - V' = \frac{1}{C_1} Q, \quad V' - V_2 = \frac{1}{C_2} Q,$$

donde C_1 y C_2 son las capacidades de los condensadores conectados. Sumando estas ecuaciones tenemos que:

$$V_1 - V_2 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q;$$

por otro lado, podemos escribir:

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{C} Q,$$

donde C es la capacidad resultante del conjunto (como condensador único). Comparando las últimas dos ecuaciones tenemos que:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (3)$$

o

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (3a)$$

Así tenemos que en la agrupación en serie de condensadores resulta un condensador (equivalente) cuya inversa de la capacidad es igual a la suma de las inversas de las capacidades agrupadas.

En la asociación en paralelo de condensadores de capacidades C_1 y C_2 (fig. 69), los potenciales de las placas unidas serán iguales. Las cargas en las armaduras de diferentes condensadores serán distintas. Designémoslas por Q_1 y Q_2 . Apliquemos a cada condensador la fórmula que relaciona la carga de las armaduras con la diferencia de potencial y la capacidad:

$$Q_1 = C_1 (V_1 - V_2), \quad Q_2 = C_2 (V_1 - V_2).$$

Sumando estas ecuaciones tenemos que:

$$Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) (V_1 - V_2).$$

Por otro lado, se puede escribir:

$$Q = Q_1 + Q_2 = C (V_1 - V_2),$$

donde C es la capacidad del conjunto de los dos condensadores. Comparando las dos últimas ecuaciones, tenemos que:

$$C = C_1 + C_2, \quad (4)$$

es decir, la capacidad de dos condensadores conectados en paralelo es igual a la suma de sus capacidades.

Está claro que los resultados obtenidos se pueden generalizar para cualquier número de condensadores asociados.

Esta agrupación de condensadores formando un conjunto tiene gran aplicación. Frecuentemente se emplean condensadores planos de panes metálicos entre los cuales se colocan hojas de papel parafinado o de mica. Los panes metálicos se unen entre sí (fig. 70) de manera que todos los panes impares formen una armadura del condensador, y los pares, la otra armadura. Estos condensadores tienen capacidades de centenares de microfaradios y más, y resisten una diferencia de potencial de varios centenares de voltios, siendo de dimensiones pequeñas.

Sea un ejemplo numérico. Hay que construir un condensador plano de capacidad de $3\mu F$, utilizando como dieléctrico papel parafinado de 0,05 mm de espesor y de constante dieléctrica $\epsilon = 1,8$. Determinar sus dimensiones.

De la fórmula (2) tenemos que la capacidad de un condensador plano es

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d},$$

de donde la superficie de la placa S deberá ser:

$$S = \frac{4\pi d C}{\epsilon}$$

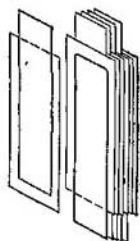


Fig. 70. Condensador plano de panes metálicos con hojas de papel parafinado entre ellos.

colocando en esta ecuación los valores de $C=1 \cdot 10^{-9}$, $F=9 \cdot 10^9$ cm, $d=0,005$ cm, y $\epsilon=1,8$, tenemos que $S \approx 31\ 000$ cm². Como cada pan metálico (excepto los extremos) se carga por ambos lados, la superficie total de los mismos deberá ser aproximadamente de $31\ 000$ cm². Si los panes los hacemos de 10×10 cm², su número total será de 310. Siendo 0,001 cm el espesor de los panes, el volumen del condensador será aproximadamente de $2 \times 10 \times 10$ cm³, es decir, todo el condensador cabe en una pequeña caja plana.

§ 149. **Diferentes tipos de condensadores.** 1. *Condensador plano con láminas de diferentes dieléctricos.* Supongamos que el espacio entre las armaduras de un condensador plano está lleno de dos capas de dieléctrico de constantes ϵ_1 y ϵ_2 . Sean d_1 y d_2 los espesores respectivos de estas capas (fig. 71).

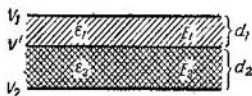


Fig. 71. Condensador plano con placas de diferentes dieléctricos.

En este caso, como en el anterior, la capacidad C se determina por la relación

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (1)$$

Sin embargo, como tenemos una zona limítrofe entre dos dieléctricos, la intensidad del campo variará al pasar de un dieléctrico a otro. Sea E_0 la intensidad del campo que se crearía entre las armaduras cargadas en el vacío; entonces:

$$E_0 = 4\pi\sigma.$$

En los dieléctricos, las intensidades E_1 y E_2 serán respectivamente (véase la llamada de la pág. 89):

$$E_1 = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_1} = \frac{E_0}{\epsilon_1}, \quad E_2 = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_2} = \frac{E_0}{\epsilon_2}.$$

La carga de una de las armaduras será:

$$Q = \sigma S = \frac{E_0 S}{4\pi} \quad (2)$$

La diferencia de potencial de las armaduras se puede calcular en función de la intensidad del campo. Sea V' el potencial de la zona limítrofe de los dieléctricos, entonces:

$$\frac{V_1 - V'}{d_1} = E_1, \quad \frac{V' - V_2}{d_2} = E_2,$$

de donde

$$V_1 - V_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2 = E_0 \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) \quad (3)$$

Colocando los valores hallados en (2) y (3) en la (1), nos da la capacidad del condensador:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{E_0 S}{4\pi E_0 \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)},$$

de donde

$$C = \frac{S}{4\pi \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)}. \quad (4)$$

Es fácil de ver que la capacidad no depende del orden de disposición de las capas. Esta fórmula se transforma en fórmula de la capacidad para un condensador con un dieléctrico, si ponemos en ella $d_2=0$.

Veamos otros tipos de condensadores.

2. *Condensador esférico.* El condensador esférico consta de dos armaduras esféricas concéntricas, cuyos radios los llamaremos R_1 y R_2 . El espacio entre las armaduras está lleno de un dieléctrico de constante ϵ ; las cargas de las armaduras están uniformemente distribuidas por las superficies y las llamaremos $+Q$ y $-Q$, y los potenciales de las armaduras, V_1 y V_2 respectivamente.

Como se ha demostrado (véase el § 127), la intensidad del campo creado por una superficie esférica uniformemente cargada en su interior es igual a cero, y en el exterior, coincide con la intensidad de una carga puntual colocada en el centro de la esfera e igual en la magnitud, a la carga de la propia superficie. De aquí que la intensidad del campo entre las armaduras del condensador la crean solamente las cargas de la armadura interior y es igual a

$$E = \frac{Q}{\epsilon r^2},$$

donde r es la distancia desde el centro de la armadura esférica.

La dirección de r coincide con la de la normal n a las superficies equipotenciales; de aquí que, según la fórmula (2a) del § 131, tenemos que:

$$E = -\frac{dV}{dr}, \quad \text{de donde } dV = -\frac{Q}{\epsilon r^2} dr.$$

La variación total del potencial al pasar de una armadura a otra la obtenemos integrando esta expresión entre los límites desde R_1 hasta R_2 :

$$V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{\epsilon r^2} dr = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{Q}{R_2} - \frac{Q}{R_1} \right).$$

De aquí que la capacidad buscada del condensador esférico sea:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q\epsilon}{\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2}},$$

$$C = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (5)$$

Utilizando esta fórmula es fácil calcular que, por ejemplo, el condensador esférico formado por dos esferas concéntricas de $R_1=2$ m y $R_2 = R_1+1$ mm, y con un dieléctrico entre las esferas de constante $\epsilon=2,5$, tendrá una capacidad aproximadamente de $1 \mu F$. Este resultado es interesante compararlo con los datos del § 136, según los cuales una esfera individual de radio igual a 9 km tiene esta misma capacidad de $1 \mu F$.

3. *Condensador cilíndrico.* El condensador cilíndrico está formado de dos cilindros coaxiales huecos de radios R_1 y R_2 y de longitud total l (fig. 72). El espacio entre los cilindros está lleno de un dieléctrico de constante ϵ . Sean $+Q$ y $-Q$ las cargas de las armaduras, y V_1 y V_2 los potenciales de las mismas.

La intensidad del campo entre las armaduras la creará solamente la carga del cilindro interno, y en el punto que se halla a la distancia r del eje del mismo, será:

$$E = \frac{2\eta}{\epsilon r},$$

donde η es la carga por unidad de longitud del cilindro. La variación del

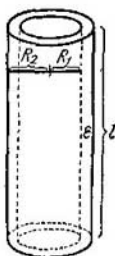


Fig. 72. Condensador cilíndrico.

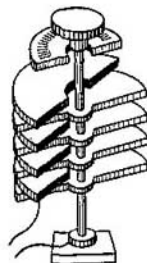


Fig. 73. Condensador de capacidad variable.

potencial en el espacio dr está relacionada con la intensidad del campo según:

$$- \frac{dV}{dr} = E, \text{ de donde } dV = -E dr = -\frac{2\eta}{\epsilon r} dr.$$

La diferencia de potencial entre las armaduras $V_2 - V_1$, la obtenemos integrando esta expresión en los límites desde R_1 hasta R_2 :

$$V_2 - V_1 = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\eta}{\epsilon r} dr = -\frac{2\eta}{\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Por consiguiente, la capacidad del condensador cilíndrico será:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon l}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (6)$$

Así tenemos que la capacidad de un condensador cilíndrico es proporcional a la longitud del condensador y, como siempre, a la constante dieléctrica de la sustancia con que se llena el condensador; además depende solamente de la relación de los radios de los cilindros, aumentando con la disminución de esta relación.

4. *Condensador de capacidad variable.* En radiotecnica frecuentemente se utilizan condensadores de capacidad variable, cuya construcción viene representada en la fig. 73. Las placas en forma de semicírculo (fig. 74,a) se unen entre sí alternativamente. La mitad de las placas están fijas, la otra mitad pueden girar, mediante una manilla, alrededor del eje vertical. Al girar, las placas móviles se introducen en mayor o menor grado entre los espacios de las placas in-

móviles formando de esta manera una serie de condensadores agrupados en paralelo.

Los condensadores formados por las placas se pueden considerar aproximadamente planos, por eso la capacidad C' de uno de ellos se puede considerar igual

$$C' = \frac{\epsilon S}{4\pi d},$$

donde ϵ es la constante dieléctrica del medio en que se hallan las placas; d , la distancia entre las placas, y S , la superficie de la parte de la placa móvil que se halla entre las fijas. Si las placas han girado un ángulo α unas respecto a las

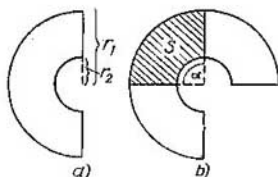


Fig. 74. Placas del condensador variable.

otras, S será la superficie rayada de la fig. 74.b. Designando por r_1 el radio exterior de la placa y por r_2 el interior, tenemos que:

$$S = \pi (r_1^2 - r_2^2) \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{(r_1^2 - r_2^2) \alpha}{2},$$

donde el ángulo α se expresa en radianes.

De aquí que la capacidad de un condensador sea:

$$C' = \frac{\epsilon (r_1^2 - r_2^2) \alpha}{8\pi d}.$$

Si en el condensador hay en total n espacios entre las placas, será una agrupación en paralelo de n condensadores de capacidad C' cada uno.

Por consiguiente, la capacidad C de todo el condensador será:

$$C = nC' = \frac{\epsilon n (r_1^2 - r_2^2) \alpha}{8\pi d}, \quad (7)$$

donde α está expresado en radianes. Esta fórmula no sirve para ángulos pequeños.

Si expresamos el ángulo α en grados, basándonos en la relación de que

$$\alpha \text{ (radianes)} = \frac{2\pi}{360} \alpha \text{ (grados)},$$

la ecuación (7) se puede escribir de la siguiente manera:

$$C = \frac{\epsilon n (r_1^2 - r_2^2) \alpha}{1440 \cdot d}. \quad (8)$$

Generalmente entre las placas de un condensador de estos, hay aire, y prácticamente ϵ es igual a la unidad.

Resolvamos un ejemplo numérico. Determinar la capacidad máxima de un condensador de la construcción indicada y, de los datos siguientes: radio

interior de las placas $r_2=1$ cm, radio exterior $r_1=3$ cm, distancia entre las placas $d=1$ mm, número de placas $n=40$. Entre las placas hay aire.

S o l u c i ó n. La capacidad máxima será cuando $\alpha=180^\circ$; por lo tanto, según la fórmula (8), tenemos que:

$$C = \frac{1 \cdot 40 \cdot (3^2 - 1^2) \cdot 180}{1 \cdot 440 \cdot 0,1} \text{ cm} = 400 \text{ cm} \cong 4,5 \cdot 10^{-4} \mu F.$$

§ 150. Medición de la diferencia de potencial. En el § 121, al describir la construcción del electroscopio, indicamos que el grado de separación de sus placas era una expresión métrica de la carga que había en las placas. Sin embargo, el electroscopio mide al mismo

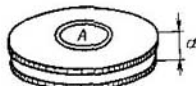


Fig. 75. Condensador con anillo de protección.

tiempo la diferencia de potencial entre las placas y la caja del electroscopio. Al cargar las placas, en la caja surgen cargas inducidas; si en este caso la caja está unida a tierra, en ella quedarán las cargas de signo contrario al de las cargas de las placas. Las placas del electroscopio y la caja son dos armaduras de un condensador, y la diferencia de potencial entre estas armaduras será tanto mayor, cuanto mayor sea la carga Q de las placas. Así tenemos que el grado de separación de las placas del electroscopio medirá la diferencia de potencial entre las placas y la caja. Si el electroscopio lleva una escala graduada en voltios, se llama *voltímetro electrostático*.

El voltímetro electrostático se puede graduar con el *electrómetro absoluto*. En principio, la medición con el electrómetro absoluto se reduce a la medición de las fuerzas de atracción entre dos placas de un condensador plano, que puede ser expresada por la diferencia de potenciales. Para poder utilizar las fórmulas deducidas para el condensador plano de placas infinitas, se utiliza el condensador *con anillo de protección*. Representémosnos un condensador de dos discos horizontales paralelos y en el disco superior una pequeña parte A aislada del resto por una rendija denominada anillo de protección (fig. 75). El campo debajo de esta parte A es uniforme, ya que el campo se va diferenciando del uniforme solamente en los extremos de las placas. Por eso, la capacidad de la parte media se expresará con la misma fórmula que la del condensador plano:

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d},$$

donde S es la superficie de la placa A , y d la distancia entre las placas. La fuerza que actúa sobre la placa A es igual al producto de la intensidad del campo de la placa inferior, por la carga Q de la placa A .

La placa inferior crea en el interior del condensador una intensidad del campo dos veces menor que la intensidad total del campo E del interior del condensador; por lo tanto, la fuerza que actúa sobre la placa A , será:

$$f = \frac{E}{2} \cdot Q \quad (1)$$

Observando que $E = \frac{V_1 - V_2}{d}$ y $Q = C(V_1 - V_2)$, donde $V_1 - V_2$ es la diferencia de potencial entre las placas, obtenemos que:

$$f = \frac{C}{2d} (V_1 - V_2)^2;$$

colocando en esta ecuación el valor de C según la (1), hallamos que:

$$f = \frac{eS}{8\pi d^2} (V_1 - V_2)^2, \quad (2)$$

es decir, la fuerza de acción recíproca se expresa en función de la diferencia de potencial $V_1 - V_2$.

Si entre las placas hay aire, consideramos que $\epsilon = 1$, y de la (2) tenemos que:

$$V_1 - V_2 = d \sqrt{\frac{8\pi f}{S}}.$$

Conociendo la distancia d entre las placas, la superficie S de las mismas y midiendo la fuerza f , determinamos de manera absoluta la diferencia de potencial $V_1 - V_2$.

La fuerza f se puede determinar "pesándola", si uno de los platillos de la balanza los sustituimos por la placa atraída por la cargada. Este principio de determinación de las magnitudes eléctricas "pesándolas" lo elaboró Thomson, físico inglés. En la fig.

76 se representa, basado en el mismo principio, el esquema de graduación del voltímetro electrostático D . En una balanza corriente se ha sustituido uno de los platillos por la parte media A del condensador. Si la placa superior de este condensador junto con el anillo de protección y todo el cuerpo de la balanza lo conectamos a tierra, y la

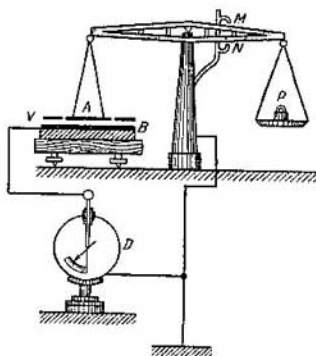


Fig. 76. Esquema de graduación del voltímetro electrostático mediante un electrómetro absoluto.

lámina inferior B del condensador, aislada de la tierra, la cargamos hasta alcanzar determinado potencial V , la parte media de la placa superior será atraída hacia la inferior. Para conservar el equilibrio de la balanza hay que colocarle en el otro platillo un peso P que medirá la fuerza f . De aquí, según la fórmula deducida, determinamos el potencial V (el potencial de la Tierra $V_2=0$). Las láminas del voltímetro que se gradúa D se unen a la placa B , y la caja se une a tierra. Así el potencial V medirá el de las láminas del voltímetro que se gradúa.

Ciertas dificultades representa la circunstancia de que la balanza, equilibrada por un lado con pesas y por otro con fuerzas eléctricas de atracción de las placas, no se halla en equilibrio estable. Un insignificante exceso en las pesas acarrea un aumento de la distancia d entre las placas, como resultado de lo cual disminuye la fuerza de atracción y se acentúa el desequilibrio. Y viceversa, si la pesa es insuficiente, las placas del condensador se acercan y la fuerza de atracción entre ellas aumenta. Para evitar estos inconvenientes se colocan en un brazo de palanca dos topes M y N . La fuerza de atracción se determina por la carga que tiende a separar el brazo de palanca de uno de los topes.

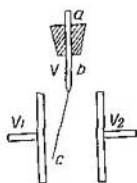


Fig. 77. Electroscopio con láminas cargadas.

Estos electrómetros de placas son poco sensibles, y funcionan de la siguiente manera. Se comunica a ambas placas una carga Q de igual magnitud y signo. La fuerza de repulsión es proporcional al producto de las cargas de las placas, es decir, es proporcional al cuadrado de la carga (Q^2). Si la carga Q es pequeña, la magnitud Q^2 y, por consiguiente, la fuerza de repulsión, será muy pequeña. Pero si la misma carga Q la colocamos en un campo eléctrico E , la fuerza que actúa sobre la carga, será proporcional a QE y, por lo tanto, puede hacerse lo suficientemente grande, si se toma un campo E bastante grande, aunque Q sea pequeña.

En la forma más sencilla, este principio se ha utilizado en el electroscopio representado en la fig. 77. Una ligera hoja metálica bc cuelga entre dos láminas a las cuales se les comunica una diferencia de potenciales V_1-V_2 . Al cargar la hoja bc , ésta se desvía. Además de tener una mayor sensibilidad en comparación con el electroscopio corriente, este instrumento tiene la ventaja de que permite determinar el signo de la carga comunicada a la hoja bc , según se incline a uno u otro lado.

Este mismo principio se utiliza en el electrómetro de los laboratorios modernos denominado *electrómetro de cuerda* o *electrómetro de filamento*.

Un hilo muy fino de platino (de 2 ó 3 μ de diámetro) se mantiene tenso y verticalmente entre dos prismas (cuchillas) (fig. 78). Los prismas están aislados y pueden cargarse hasta determinada diferencia de potencial $V_1 - V_2$. El hilo de platino se une a la fuente de electricidad que se quiere medir. Al cargarlo, el hilo se comba a una u otra parte, según el signo de la carga. Esta flexión se puede medir observándola con un microscopio o fotografiándola. Los electrómetros de filamento alcanzan exactitudes de 0,01 V y tienen una propiedad muy importante que consiste en que al hilo, gracias a su pequeña masa, recobra rápidamente el estado de equilibrio. Esto permite registrar y medir cargas que varían rápidamente con el tiempo.

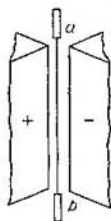


Fig. 78. Electrómetro de filamento.

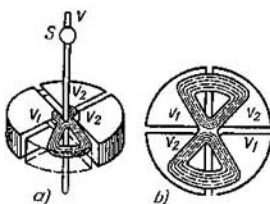


Fig. 79. Electrómetro de cuadrantes.

Por último, señalemos otro electrómetro construido para medir pequeñas diferencias de potencial, denominado *electrómetro* de cuadrantes (o de Kelvin). Una caja metálica (véase la fig. 79, donde se representa en una proyección sobre el plano horizontal la parte interior de esta caja y en otra, la caja con un corte) de forma cilíndrica está cortada según los radios formando cuatro cuadrantes aislados. En el interior de esta caja, de un delgado hilo se cuelga una aguja en forma de 8. Si orientamos el eje de la aguja según una de las ranuras que separan los cuadrantes y la cargamos hasta cierto potencial V_0 , después de conectar a tierra los cuadrantes, la aguja permanecerá en equilibrio, debido a la simetría. Como es difícil conseguir una simetría exacta en los cuadrantes, uno de ellos se hace móvil y, después de cargar la aguja, se desplaza hasta que se consigue el equilibrio. Luego se comunica a dos cuadrantes opuestos el potencial V_1 y a los otros dos, el V_2 , y la aguja gira. Como se ha demostrado teóricamente, el giro de la aguja es proporcional a la diferencia de potencial $V_1 - V_2$, dentro de unos límites bastante amplios. Así tenemos que según el giro de la aguja se mide la diferencia de potencial. El giro de la aguja se mide ópticamente con ayuda de un espejo S fijo en el hilo de que cuelga la aguja.

El electrómetro de cuadrantes posee una elevada sensibilidad: se pueden medir potenciales de 1 V con una exactitud de 0.001 V. Un inconveniente del electrómetro de cuadrantes es el gran período de oscilación de la aguja.

§ 151. Medición de cargas muy pequeñas. Carga del electrón.

Hay un método muy sencillo de medir cargas extremadamente pequeñas concentradas en gotas microscópicas. La idea de este método está en lo siguiente: supongamos que una gota microscópica con una

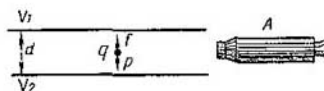


Fig. 80. Determinación de la carga por el método de las gotas suspendidas entre las placas de un condensador.

carga positiva $+q$ se halla entre las placas horizontales de un condensador plano (fig. 80).

Si la placa superior se carga negativamente y la inferior positivamente, sobre la gota actúa una fuerza eléctrica *dirigida hacia arriba*

$$f = Eq,$$

donde E es la intensidad del campo entre las placas del condensador. Esta fuerza actúa en sentido contrario a la de gravedad p de la gota.

Cuando estas fuerzas sean iguales en valor absoluto, tendremos que

$$Eq = p. \quad (1)$$

En este caso, la gota quedará suspendida e inmóvil entre las placas del condensador.

Expresando la intensidad E en función de la diferencia de potenciales de las placas $V_1 - V_2$ y de la distancia d entre las mismas, tenemos que:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}.$$

De aquí que, según la (1), la carga q de la gota que se pesa sea:

$$q = p \frac{d}{V_1 - V_2}. \quad (2)$$

Conociendo el peso de la gota p , la distancia entre las placas d y la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ que hay que aplicar para que la gota quede suspendida, mediante la fórmula (2) hallamos el valor de la carga q .

El peso p de la gota en el aire se puede hallar sabiendo la densidad ρ de la sustancia de que consta y su radio r :

$$p = \frac{4}{3} \pi (\rho - \rho') r^3 g, \quad (3)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y ρ' la densidad del medio en que se halla la gota (el aire).

El radio de la gota r se determina en función de la velocidad de caída debido a la fuerza de la gravedad cuando no hay campo eléctrico. La velocidad v de esta caída, como se ha explicado en el § 42 del t. I, se expresa por la fórmula de Stokes:

$$v = \frac{2}{9} \frac{\rho - \rho'}{\eta} \cdot g r^2, \quad (4)$$

donde ρ' es la densidad y η la viscosidad del medio en que se efectúa la caída (en nuestro caso, el aire). Sabiendo ρ , ρ' y η y midiendo la velocidad de caída de la gota v , hallamos, según la (4), su radio r .

Este método permite medir gotas extremadamente pequeñas. Efectivamente, sea $r = 10^{-4}$ cm el radio de la gota microscópica y $\rho = 1$ gr/cm³ su densidad (la densidad ρ' del aire la despreciamos); entonces su masa será $m = \frac{4}{3} \pi \rho r^3 \cong 4 \cdot 10^{-12}$ gr. Sea $d = 2,5$ cm la distancia entre las placas y $V_1 - V_2 = 3\,000$ V la diferencia de potencial, que equivalen a 10 unidades CGSE de potencial. Entonces, según la (2):

$$q = 4 \cdot 10^{-12} \cdot 981 \cdot \frac{2,5}{10} \text{ unid. CGSE, de donde } q \cong 10^{-9} \text{ unid. CGSE.}$$

De esta manera se puede medir una carga del orden de 10^{-9} unid. CGSE.

Millikan utilizó este método para medir exactamente la carga del electrón. En el espacio entre las placas de un condensador se introducían pulverizadas gotas microscópicas de aceite, que al rozar con el aire se cargaban. Las gotas se alumbraban de un lado con un foco luminoso y se observaban al microscopio A (fig. 80). Eligiendo la debida diferencia de potencial $V_1 - V_2$ entre las placas, se puede conseguir que algunas gotas queden suspendidas e inmóviles.

Después, el aire entre las placas del condensador se somete a la acción de los rayos X. Los rayos X ionizan el aire, es decir, crean moléculas cargadas y electrones libres en el aire. Entonces, la gota, apoderándose de un ion o electrón, varía de carga bruscamente; el cambio de carga se refleja en la alteración del equilibrio. De esta manera se puede medir no sólo la carga que la gota ya tenía, sino variar la carga de la gota durante el experimento.

Las mediciones de Millikan demostraron que las cargas q de las gotas eran, en todos los casos, múltiplos de una carga mínima e :

$$q = ne,$$

donde n era un número entero. Estas mediciones demostraron directamente la discontinuidad de la carga eléctrica y permitieron medir la magnitud de la carga elemental e . Esta carga elemental es la carga de la partícula eléctrica elemental denominada *electrón*.

Según las últimas mediciones efectuadas por el método de Millikan, y también por otros métodos, la carga del electrón es

$$e = 4,802 \cdot 10^{-10} \text{ unid. CGSE} = 1,601 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

Los experimentos sobre los electrones libres han demostrado que su carga es negativa y poseen una masa en reposo de

$$m_0 = 9,107 \cdot 10^{-28} \text{ gr.}$$

En los experimentos corrientes sobre la electrización de los cuerpos electrizados parece que las cargas de los cuerpos pueden variar ininterrumpidamente, ya que la carga de un electrón es muy pequeña. Las partículas que observamos en estos experimentos son tan pequeñas que las cargas que poseen son iguales a las de varios electrones solamente; en este caso, la variación discontinua, a saltos, de las cargas ya se hace perceptible.

Es interesante señalar que las fuerzas eléctricas son relativamente grandes: basta que en la gota haya unos cuantos electrones de más, para que la fuerza eléctrica pueda equilibrar la de la gravedad, aunque la gota microscópica conste de gran cantidad de átomos.

Para representarnos más concretamente la carga y masa del electrón, hagamos el siguiente cálculo: una esfera maciza de cobre de radio $r=1$ cm se carga negativamente hasta el potencial de 3 000 V; determinemos el número de electrones que hay que comunicarle.

La carga de la esfera

$$Q = C \cdot V = 1 \cdot \frac{3\,000}{300} = 10 \text{ unid. CGSE.}$$

Como la carga de un electrón $e=4,803 \cdot 10^{-10}$ unid. CGSE, el número de electrones buscado n será:

$$n = \frac{10}{4,8 \cdot 10^{-10}} \cong 2,1 \cdot 10^{10};$$

así tenemos que la esfera debe tener $2,1 \cdot 10^{10}$ electrones de más. Este número que de por sí es muy elevado, sigue siendo muy pequeño en comparación con el número de átomos que contiene la esfera. Efectivamente, la masa de la esfera

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 8,9 \cdot 1^3 \text{ gr} \cong 37 \text{ gr,}$$

es decir, es aproximadamente $1/2$ de un mol de cobre; por consiguiente, el número de átomos de cobre en la esfera será igual a $\frac{6,02 \cdot 10^{23}}{2} \cong$

$\cong 3 \cdot 10^{23}$. De esto se ve que el número de electrones añadidos es aproximadamente de $\frac{1}{1,5 \cdot 10^{13}}$ parte del número de átomos que contiene.

Por último, es interesante señalar que la masa de todos los electrones que se han añadido a la esfera, es muy pequeña. Esta masa $m_1 = nm_0 = 2,1 \cdot 10^{10} \cdot 9,1 \cdot 10^{-28}$ gr $\cong 1,9 \cdot 10^{-17}$ gr es decir, es centenas de millares de veces menor que la masa de una partícula microscópica de polvo. De aquí se ve que, prácticamente, la electrificación que se logra en los cuerpos, no acarrea ninguna variación sensible de sus masas, aunque los electrones tienen masa.

Los electrones poseen una carga negativa. En la actualidad, como hemos indicado, se han descubierto electrones positivos, llamados *positrones*. Su carga, al parecer, es igual, en valores absolutos, a la del electrón, pero de signo positivo; su masa, al parecer, también es igual a la del electrón. No obstante los positrones aparecen solamente en los procesos relacionados con las transformaciones de los núcleos atómicos o de los fotones, y libres existen durante intervalos muy pequeños de tiempo (véase el t. III). Por eso, en todas las especulaciones sobre las propiedades eléctricas de los cuerpos, producción de corriente eléctrica, etc, hay que hablar de electrones.

Al realizar experimentos con una gota suspendida entre dos placas de un condensador, es difícil conseguir un equilibrio completo de la fuerza eléctrica qE y de la fuerza de gravedad de la gota p . Pero esto tampoco hace falta.

Supongamos que, cuando no actúa la fuerza eléctrica, bajo la acción solamente de la fuerza de la gravedad, la gota cae uniformemente a la velocidad de v_0 ; pero según la ley de Stokes esta velocidad es proporcional a la fuerza de la gravedad p . Consideremos positiva la dirección hacia abajo. Si hay un campo eléctrico que tire de la gota hacia arriba, sobre la gota actuará una fuerza igual a la diferencia entre la fuerza de la gravedad y la fuerza eléctrica: $p - qE$. Solicitada por esta fuerza, la gota se desplazará uniformemente a la velocidad de v_1 . Como esta velocidad es proporcional a la fuerza $p - qE$, tenemos que:

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{p}{p - qE},$$

de donde la carga de la gota será:

$$q = \frac{p}{Ev_0}(v_0 - v_1). \quad (5)$$

Colocando en esta ecuación el valor del peso de la gota p según la (3), tenemos que:

$$q = \frac{4}{3} \pi \frac{(\rho - \rho') r^2 g}{Ev_0} (v_0 - v_1).$$

El radio de la gota lo hallamos aplicando la fórmula de Stokes (4):

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2(\rho - \rho') g}}.$$

Colocando esta expresión de r en la de q , obtenemos que:

$$q = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{9}{2} \eta \right)^{3/2} \cdot \left[\frac{1}{g(\rho - \rho')} \right]^{1/2} \cdot \frac{(v_0 - v_1) v_0^{1/2}}{E}. \quad (6)$$

Las velocidades de caída de la gota v_1 y v_0 se miden con ayuda del microscopio con una escala y un cronómetro. Las demás magnitudes de la fórmula (6) también se pueden medir directamente. De esta manera se determina q .

Tabla III

Cargas de las gotas observadas $\times 10^{16}$	Magnitudes múltiples de 4,917
19,66	$4,917 \times 4 = 19,66$
24,60	$4,917 \times 5 = 24,59$
29,62	$4,917 \times 6 = 29,50$
34,47	$4,917 \times 7 = 34,42$
39,38	$4,917 \times 8 = 39,34$
44,42	$4,917 \times 9 = 44,25$

Como se ha indicado, las mediciones han demostrado que la carga de la gota es proporcional a una carga elemental e . Los datos de la tabla III están tomados del trabajo de Millikan. En la primera columna se dan los valores observados de las cargas de las gotas, y en la segunda, las magnitudes múltiples de una carga igual a 4,917 unid. CGSE de carga.

La tabla demuestra indudablemente que la gota lleva una carga que solamente es múltiple de cierta carga elemental. Según los datos de esta tabla, la magnitud de esta carga elemental debe ser igual a $4,917 \cdot 10^{-10}$ unid. CGSE. No obstante, Millikan señaló después que, para las gotas tan pequeñas que había utilizado, había que hacer ciertas correcciones a la ley de Stokes. Como resultado de numerosas mediciones, en 1916 obtuvo el valor de la carga del electrón igual a $e = 4,774 \times 10^{-10}$ unid. CGSE.

Después se introdujeron las correcciones del valor de la viscosidad del aire η en los experimentos de Millikan, y se obtuvo el siguiente valor de la carga del electrón $e = 4,803 \cdot 10^{-10}$ unid. CGSE, valor que hemos dado en el texto.

§ 152. Naturaleza del campo electrostático. Lo dicho en los párrafos anteriores nos confirma que en el espacio que rodea al cuerpo cargado, se producen ciertos cambios que se reflejan, ante todo, en que en otro cuerpo cargado cualquiera colocado en este espacio actúan determinadas fuerzas. Hemos caracterizado esta propiedad que se revela en la acción de determinadas fuerzas sobre las cargas, mediante el vector de intensidad E , y este espacio en que actúan las cargas, lo hemos llamado *campo electrostático*. Todo punto del campo se caracteriza por un valor determinado del vector E . Para mayor comodidad en la representación gráfica del conjunto de los valores de E introdujimos el concepto de líneas de fuerza. Por último, para caracterizar el trabajo efectuado al trasladar cargas

por el campo electrostático, introdujimos el concepto de potencial V , que para cada punto del campo también tiene un valor determinado y, en general, varía de un punto a otro.

Como se ha indicado en el § 123, al principio, la descripción de las propiedades del campo electrostático tenía un carácter formal y se basaba en la analogía con la teoría matemática del campo de gravedad; teniendo en cuenta que en este caso se suponía que las fuerzas eléctricas y las de atracción universal se transmitían momentáneamente, que eran cierta "acción a distancia" sin ninguna función del espacio intermedio.

Este punto de vista tenía carácter idealista y ya en el s. XVIII fue debatido por varios científicos, entre ellos M. Lomonósov, que suponía que las fuerzas eléctricas eran debidas a la rotación de partículas del éter, sustancia que llenaba todo el espacio.

En la primera mitad del s. XIX, la idea sobre la función del campo la utilizó ampliamente M. Faraday (1791—1867). El desarrollo ulterior de la ciencia sobre los fenómenos eléctricos ha confirmado la idea de la existencia del campo eléctrico y obligó a renunciar a la hipótesis de la "acción a distancia". Entre las cargas de acción recíproca hay un campo eléctrico, cuyas propiedades objetivas las determinan las magnitudes como la intensidad del campo E y el potencial V .

No obstante, es necesario señalar que los físicos que han desarrollado la teoría del campo, se basaban en los conceptos mecanicistas que reinaban entonces: intentaban explicar los fenómenos electrostáticos construyendo un modelo mecánico. A las líneas de fuerza se les atribuía propiedades mecánicas, considerándolas tensiones (mecánicas) en un medio elástico. Las líneas de fuerza se representaban como hilos elásticos y tensos que iban de unas cargas a otras. La tensión de los hilos explicaba la atracción mutua de los cuerpos cargados de distinto signo; la presión normal a los hilos producía la repulsión mutua de los hilos y podía explicar la repulsión de los cuerpos con cargas de igual signo. Esta teoría exigía el reconocimiento de la existencia de un fluido elástico universal que se hallaba en todos los cuerpos conocidos y llenaba todo el espacio vacío, el éter universal. La difusión del proceso ondulatorio en el mismo éter debía explicar los fenómenos luminosos.

Esta hipótesis del éter mecánico resultó, sin embargo, insolvente ante los nuevos descubrimientos de finales del siglo pasado. Numerosos hechos han revelado la naturaleza peculiar de los procesos eléctricos, que no se pueden reducir a fenómenos puramente mecánicos. Esta renuncia a dar una explicación mecánica a los procesos eléctricos no es, ni mucho menos, una renuncia de la explicación materialista. V. Lenin, criticando los físicos idealistas de principios de este siglo que veían, en la sustitución de las teorías mecánicas por las

electromagnéticas, una renuncia del materialismo, escribía: "...que parezca la limitación de las leyes mecánicas del movimiento a un solo plano de los fenómenos de la naturaleza y su subordinación a las más profundas leyes de los fenómenos electromagnéticos, etc., todo ello no hace más que confirmar una vez más el materialismo dialéctico". *) Y más: "Desde luego, es completamente absurdo decir que el materialismo tenga por "menos" la realidad de la conciencia o afirme como obligatorio el cuadro mecánico y no el electromagnético, ni cualquier otro cuadro infinitamente más complejo del mundo, como *materia en movimiento*". **)

Entre los hechos que confirman la realidad del campo electrostático, están los siguientes. Como hemos visto (§ 138), el campo electrostático se caracteriza por tener determinado valor de energía distribuida con cierta densidad volumétrica. Posteriormente se descubrió que el campo se extiende a velocidad finita. Los experimentos de Faraday sobre la inducción electromagnética (§ 221) han señalado la estrecha relación entre los fenómenos eléctricos y magnéticos. En los años 60 del siglo pasado, Maxwell desarrolló la teoría general de los fenómenos electromagnéticos y demostró que el campo electrostático es un caso particular de otro más general, por su naturaleza, del *campo electromagnético*. Esta teoría abarcó una región extremadamente amplia de fenómenos eléctricos y magnéticos; y condujo al descubrimiento de las ondas electromagnéticas y aclaró la naturaleza electromagnética de la luz. De esta manera surgió la teoría única de los fenómenos eléctricos, magnéticos y ópticos, basándose en el concepto del campo electromagnético.

La teoría de Maxwell, al parecer, confirmaba la teoría del éter universal. Según la teoría de Maxwell, desarrollada después por Lorentz, los átomos de que constan los cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos, están sumergidos en el éter. Cada átomo es un sistema eléctrico complicado: consta de un núcleo positivo y de electrones. De esta manera se consideraba que existían solamente el éter y las cargas eléctricas: positivas (núcleos de los átomos) y negativas (electrones). El espacio "vacío" estaba lleno solamente de éter. En la parte del espacio donde había algún cuerpo, en el éter estaban incrustadas las cargas que formaban parte de los átomos de este cuerpo. Estas cargas originaban en el éter las variaciones que nosotros percibimos como campo electromagnético.

En la teoría de Lorentz, el éter se consideraba como un medio material inmóvil, con propiedades distintas de las propiedades mecánicas de los cuerpos elásticos conocidos. Las propiedades del éter

*) V. I. Lenin, *Materialismo y empiriocriticismo*, Ediciones Pueblos Unidos, Uruguay, 1948, pág. 291.

**) *Ibidem*, pág. 313.

se expresaban mediante ecuaciones, formuladas por Maxwell, que se deducían de la generalización de numerosos hechos experimentales referentes a los fenómenos electromagnéticos. La teoría de Maxwell-Lorentz tenía algo nuevo respecto a la mecánica: daba una explicación no mecánica a la naturaleza del campo electromagnético. El éter mecánico de las viejas teorías de la luz cedió su lugar al éter electromagnético.

No obstante, el éter se seguía considerando como un medio continuo que, como cualquier otro medio continuo mecánico, podía servir de sistema de referencia (compárese lo expuesto en el § 4 del t. I). Se podía hablar de movimiento de los cuerpos, por ejemplo, del movimiento de la esfera terrestre respecto al éter. Los experimentos de Michelson (véase el t. III) y los de Trouton y Noble y una serie más de experimentos (véase el § 216), con los cuales se intentaba determinar el movimiento de la Tierra respecto al éter, resultaron negativos. La teoría de la relatividad generalizó estos resultados experimentales demostrando que no hay movimiento absoluto respecto al éter. Esto deshizo la última analogía entre el éter y los medios mecánicos continuos. En relación con ello y como quiera que con el concepto de éter se había arraigado históricamente el concepto de medio con respecto al cual se podía determinar el movimiento, la física teórica contemporánea ha dejado de utilizar el concepto de "medio etéreo". Ahora hablamos del campo electromagnético como un aspecto particular de la materia. El campo electromagnético no sólo posee propiedades diferentes de las propiedades de los medios mecánicos que conocemos, sino que se caracteriza por la peculiaridad de que no puede servir de sistema de referencia.