

SEXTA PARTE

FENOMENOS

ELECTROMAGNETICOS

CAPITULO XVIII

*Campo magnético*

§ 191. El campo magnético y su característica. De la misma manera que en el espacio que rodea a una carga eléctrica se forma un campo electrostático de determinadas propiedades físicas, en el espacio que rodea a los conductores recorridos por una corriente eléctrica, se crea un campo especial denominado *campo magnético*. La presencia de un campo electrostático se revela por la acción de las fuerzas sobre los cuerpos cargados que se introducen en este campo. El campo magnético se revela por las fuerzas que actúan sobre los conductores introducidos en él y por los cuales fluye una corriente. Así tenemos que dos conductores paralelos por los cuales fluyen corrientes en una misma dirección y sentido, se atraen mutuamente (fig. 174). Este hecho se explica de la siguiente manera: cada una de las corrientes crea un campo magnético en el espacio que la rodea, y este campo actúa sobre el conductor recorrido por la otra corriente. El carácter de la acción de un campo magnético sobre un conductor recorrido por una corriente depende de la forma del conductor, de la posición que ocupe y de la dirección de la corriente que lo recorre. Por eso, para caracterizar el campo magnético hay que examinar la acción que éste ejerce sobre un conductor recorrido por una corriente bien definida. Por ahora consideraremos que los conductores recorridos por corrientes se hallan en el vacío.

En electrostática, para el estudio de las propiedades del campo electrostático hemos utilizado el concepto de carga puntual, es decir, de una carga concentrada en un cuerpo, cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con la distancia de las cargas que crean el campo (véase el § 124). Para el estudio de las propiedades del campo magnético utilizaremos la acción que ejerce éste sobre un contorno plano cerrado recorrido por una corriente. A este contorno lo llamaremos

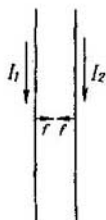


Fig. 174. Atracción recíproca de dos conductores paralelos recorridos por corrientes de un mismo sentido.



Fig. 175. Cuadro con corriente.

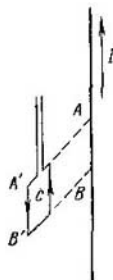


Fig. 176. El cuadro, que gira libremente, se coloca en el plano  $AA'BB'$  que pasa por el conductor.

*cuadro.* Las dimensiones de este contorno deben ser pequeñas en comparación con la distancia que lo separa de los conductores con corriente que crean el campo. Prácticamente, para mantener en el cuadro una corriente continua hay que suministrársela mediante unos conductores cualesquiera. El campo magnético actuará también sobre estos conductores. Para evitar esta acción, los hilos conductores se colocan juntos, con lo cual la acción total del campo magnético sobre ellos será igual a cero (por la dependencia que hay entre la dirección de las fuerzas magnéticas y la de la corriente, que se indica más abajo). Este cuadro, suspendido de un hilo fino y capaz de revelar una deformación de torsión (fig. 175), lo utilizaremos para investigar las propiedades del campo magnético.

La experiencia demuestra que este cuadro rectangular colocado cerca de conductores recorridos por corrientes gira de una manera determinada. *El campo magnético ejerce sobre el cuadro una acción orientadora.*

Sea, por ejemplo, un conductor recto y largo (fig. 176), por el cual fluye una corriente  $I$ . El cuadro  $C$  colocado cerca de este con-

conductor. En este caso la orientación del cuadro dependerá también de la dirección de la corriente que lo recorre: si cambiamos el sentido de la corriente que fluye por el cuadro, éste realizará un giro de  $180^\circ$ .\*)

La acción orientadora del campo sobre el cuadro se puede utilizar ante todo para caracterizar la *dirección del campo magnético*. Para ello tracemos la normal al plano del cuadro. *El sentido positivo de la normal se elige de manera que, mirando desde el extremo de la normal, la corriente del cuadro fluya en el sentido contrario de las agujas del reloj.*

En otras palabras, consideraremos positivo el sentido de la normal que coincide con el de avance del sacacorchos, cuya manilla gira según la corriente que fluye por el cuadro (fig. 177).

De resultas de la acción del campo magnético sobre el cuadro con corriente, éste estará orientado de manera determinada\*\*) en cada caso dado, y su normal tendrá un sentido determinado. Está claro que el hecho de esta determinada orientación del cuadro en un campo magnético nos indica que el propio campo tiene un sentido determinado. *En el lugar en que está el cuadro, el sentido del campo magnético se considera el que coincide con la normal positiva del cuadro.* Así, según la orientación del cuadro se puede determinar unívocamente el sentido del campo magnético.

Además, podemos utilizar el mismo cuadro para determinar la característica cuantitativa del campo magnético.

El hecho de que el cuadro sufra la acción orientadora del campo, indica que *sobre el cuadro situado en un campo magnético actúa un par de fuerzas.*\*\*\*) La magnitud de este par de fuerzas se puede medir considerando la torsión del hilo del que está suspendido el cuadro. La experiencia demuestra que la magnitud del momento  $M$  de este par depende tanto de la intensidad y disposición de las corrientes que crean el campo magnético, como de las propiedades del mismo

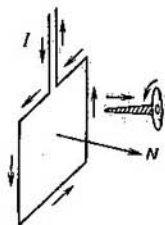


Fig. 177. Sentido positivo de la normal al cuadro con corriente.

\*) Después veremos que sobre un cuadro en un campo magnético actúa un par de fuerzas que desaparece cuando el cuadro adquiere una orientación determinada. Por eso, en general, el cuadro puede oscilar alrededor de su posición de equilibrio en el campo magnético. No obstante, si hay fuerzas de rozamiento, estas oscilaciones se amortiguan rápidamente.

\*\*) Además de esta orientación del cuadro, puede haber una orientación en que la normal vaya en sentido contrario; pero la posición del cuadro correspondiente a esta segunda orientación es inestable.

\*\*\*) En un campo variable, sobre el cuadro actúa además una fuerza (véase el § 197) que, no obstante, no analizaremos por ahora.

cuadro: de sus dimensiones, orientación e intensidad de la corriente que fluye por él.

Detengámonos antes que nada en las propiedades del propio cuadro. Para ello mantendremos invariables la posición e intensidades de las corrientes que crean el campo magnético. Sea un cuadro determinado con una corriente de intensidad también determinada. Cuando la normal del cuadro está orientada según el campo magnético, el momento del par de fuerzas que actúa sobre el cuadro es igual a cero. *El momento del par de fuerzas adquiere el valor máximo cuando la normal del cuadro está orientada perpendicularmente a la dirección del campo.* Por eso consideraremos que, en todos los casos cuando querramos utilizar el cuadro para determinar cuantitativamente la característica del campo magnético, lo debemos disponer de manera que su normal sea perpendicular a la dirección del campo. A continuación es fácil determinar experimentalmente que el momento  $M$  del par de fuerzas es proporcional a la intensidad  $I$  de la corriente que fluye por el cuadro. Por último, la experiencia demuestra que para distintos cuadros planos el momento  $M$  es proporcional al área  $S$  del cuadro, independientemente de su forma (el cuadro puede ser rectangular, circular, elíptico, etc.):

$$M \sim IS. \quad (1)$$

La magnitud proporcional al producto de la intensidad  $I$  de la corriente del cuadro por su área  $S$  se denomina *momento magnético del cuadro*  $p_m$ :

$$p_m \sim IS. \quad (2)$$

En un punto dado del campo magnético, sobre todos los cuadros de un mismo momento magnético  $p_m$  actúan iguales pares de fuerzas  $M$ .

Si un mismo cuadro de determinado momento magnético lo colocamos en distintos puntos del campo magnético, observaremos que sobre el cuadro actuarán diferentes momentos de fuerzas  $M$ . Por ejemplo, cuanto más cerca del conductor recorrido por la corriente que crea el campo, coloquemos el cuadro, tanto mayor será el momento de las fuerzas que actúan sobre él. Este hecho se puede utilizar para caracterizar cuantitativamente el campo magnético, a saber, considerando que el momento  $M$  de las fuerzas que actúan sobre el cuadro de momento magnético  $p_m$  dado, es tanto mayor, cuanto mayor sea la *excitación magnética*  $H$  (*intensidad del campo magnético*) en el lugar en que está el cuadro:

$$M \sim H.$$

Ligando esta conclusión con la relación (1) obtenemos que el momento de un par de fuerzas que actúan sobre un cuadro recorrido

por una corriente y que se halla en un campo magnético, es proporcional al momento magnético del cuadro  $p_m$  y a la excitación magnética  $H$  en el lugar en que se halla el cuadro:

$$M \sim p_m H. \quad (3)$$

Nosotros utilizaremos esta relación para medir, con ayuda del cuadro, la excitación magnética  $H$ . De la (3) y de la (2) tenemos que

$$H \sim \frac{M}{p_m} \sim \frac{M}{IS}. \quad (4)$$

En la última expresión, para pasar del signo de proporcionalidad al de igualdad, hay que introducir el coeficiente de proporcionalidad  $k$ , obteniendo que

$$H = k \frac{M}{IS}. \quad (4a)$$

El valor numérico del coeficiente de proporcionalidad  $k$  depende del sistema elegido de unidades de  $H$ ,  $M$ ,  $I$  y  $S$ . Después de haber elegido determinado valor numérico de  $k$ , podemos medir, basándonos en la ecuación (4a), la excitación magnética  $H$  en función del momento  $M$  de fuerzas que actúan sobre el cuadro de momento magnético conocido  $p_m$ . Sobre las unidades en que se mide la excitación magnética  $H$  se hablará en el § 195.

Como el campo magnético viene caracterizado también por la dirección y sentido y por el valor numérico de la excitación, la excitación magnética  $H$  será una *magnitud vectorial*. Resumiendo lo dicho tenemos que la dirección y sentido del vector de excitación magnética  $H$  en cada punto dado del campo magnético vienen determinados por la dirección y sentido de la normal positiva al cuadro recorrido por una corriente y que adquiere una posición de equilibrio estable en el campo magnético. La magnitud de la excitación viene determinada, según la ecuación (4a), por el momento del par de fuerzas que actúan sobre el cuadro, a condición de que la normal al cuadro sea perpendicular a la dirección del vector  $H$ .

Ahora podemos concretar la cuestión de las dimensiones del cuadro. Está claro que en el caso de un campo variable, el momento de fuerzas que actúan sobre el cuadro, medirá el valor medio de la excitación magnética dentro de los límites del cuadro. Para medir la excitación magnética en el punto dado, *las dimensiones del cuadro deben ser tan pequeñas, que dentro de los límites del cuadro se pueda considerar el campo uniforme.*

§ 192. Representación gráfica de la excitación magnética. De manera análoga a como en electrostática examinamos el método

ráfico de la característica del campo electrostático con ayuda de las líneas de fuerza, para caracterizar el campo magnético introducimos el concepto de líneas de fuerza del campo magnético. Por línea de fuerza del campo magnético tomaremos la línea, cuya tangente en cada uno de sus puntos coincide en dirección y sentido con el vector de excitación  $H$  en el punto dado (fig. 178). Consideremos que la dirección de las líneas de fuerza del campo magnético coincide en todas las zonas con la del vector de excitación magnética  $H$ .

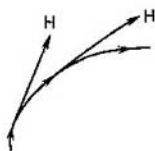


Fig. 178. Línea de fuerza del campo magnético.

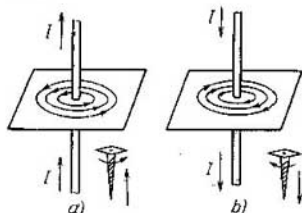


Fig. 179. Dirección y sentido de las líneas de fuerza del campo magnético de una corriente rectilínea.

Utilizando un cuadro con corriente podemos determinar, según el método descrito en el párrafo anterior, el aspecto de las líneas de fuerza del campo magnético para diferentes casos particulares.

En el caso de una corriente rectilínea y larga (una corriente que recorre un conductor rectilíneo), como hemos visto, el cuadro se orienta según el plano por el que pasa la corriente. Por consiguiente, la normal al cuadro se orientará perpendicularmente al radio vector que une el conductor recorrido por la corriente, con el lugar donde esté el cuadro. De esto se deduce que en el caso de un conductor largo recorrido por una corriente, las líneas de fuerza del campo magnético tienen forma de circunferencias que se hallan en los planos perpendiculares al conductor de centro en el lugar por donde pasa la corriente. La dirección de las líneas de fuerza del campo magnético se indica en la fig. 179 a y b. El sentido lo determina la regla del sacacorchos: si el movimiento de traslación del sacacorchos coincide con el de la corriente, el sentido de giro de su manilla nos dará el de las líneas de fuerza del campo magnético.

Con ayuda de un cuadro se pueden analizar los campos magnéticos de las corrientes de cualquier forma. Sea, por ejemplo una corriente que recorre un conductor circular. En este caso, las líneas de fuerza del campo magnético en el plano perpendicular al contorno de la corriente serán las curvas representadas en la fig. 180. Estas

líneas también serán curvas cerradas, o curvas que tienden a cerrarse en su prolongación.

Un sistema de corrientes que pasan por espiras circulares paralelas de eje rectilíneo común, se denomina *solenóide*.

El solenóide generalmente es un conductor arrollado sobre una superficie cilíndrica y recorrido por una corriente. Al examinar el campo magnético de un solenóide obtenemos el cuadro representado en la fig. 181. En la parte media del interior del solenóide, las líneas de fuerza del campo magnético son un sistema de rectas

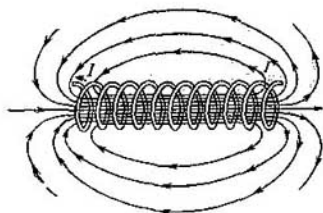
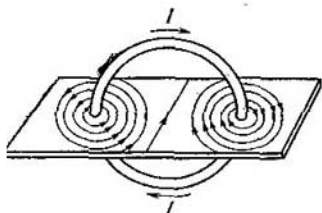


Fig. 180. Dirección y sentido de las líneas de fuerza del campo magnético de una corriente circular.

Fig. 181. Dirección y sentido de las líneas de fuerza del campo magnético de un solenóide.

paralelas al eje del solenóide que, a medida que se acercan a los extremos del solenóide, se transforman en curvas divergentes que se cierran o tienden a cerrarse en el espacio exterior. Las líneas de fuerza del campo magnético de un solenóide en su parte exterior se parecen a las líneas de fuerza del campo de un dipolo (véase la fig. 17, b). Pero la dirección de las líneas de fuerza del campo magnético en el interior del solenóide ininterrumpidamente pasa a ser la dirección de las líneas de fuerza fuera del solenóide; mientras que las líneas de fuerza del campo del dipolo cambian de dirección en las cargas del dipolo. En el espacio exterior al solenóide, el campo magnético tiene cierto valor perceptible solamente en las proximidades de los extremos del solenóide, y al alejarse de los extremos se debilita rápidamente. Fuera del solenóide y en su parte media, el campo magnético es muy débil. Cuanto más largo sea el solenóide, con mayor intensidad se expresarán estas particularidades del campo. *En la parte interior del solenóide, el campo se puede considerar homogéneo.* Esta homogeneidad se altera en cierto grado solamente cerca de los extremos del solenóide.

Un sistema de espiras iguales recorridas por una corriente y cuyos centros están en una circunferencia, forma el *toroide* (fig. 182).

El campo magnético de un toroide se concentra solamente en su parte interior; sobre un cuadro recorrido por una corriente colocado en la parte exterior no actúa ninguna fuerza.

Si la longitud del toroide es grande en comparación con su sección transversal, el campo en el interior del mismo se puede considerar también homogéneo.

La experiencia demuestra que el solenoide se orienta en un campo magnético de la misma manera que el cuadro recorrido por una

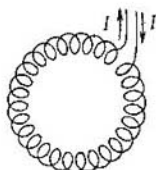


Fig. 182. Toroide.

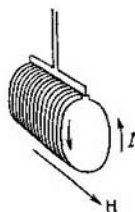


Fig. 183. Orientación de un solenoide en un campo magnético exterior.

corriente. En este caso, si se mira al solenoide en sentido contrario a las líneas de fuerza del campo magnético, veremos que la corriente del solenoide va en sentido contrario a las agujas del reloj (fig. 183). El momento  $M$  de las fuerzas que actúan sobre el solenoide que consta de  $n$  espiras, será, naturalmente,  $n$  veces mayor que el momento que actúa sobre una espira. Así, por analogía con la fórmula (4a) del § 191, se puede escribir que si el eje del solenoide es perpendicular a las líneas de fuerza del campo magnético, sobre él actuará un par de fuerzas de momento

$$M = \frac{1}{k} nIS \cdot H. \quad (1)$$

Momento magnético de un solenoide se denomina la magnitud  $p_s$ , que es  $n$  veces mayor que el momento magnético de una espira:

$$p_s \sim nIS, \quad (2)$$

donde  $I$  es la intensidad de la corriente que fluye por el solenoide y  $S$ , el área de su sección transversal.

El examen de las líneas de fuerza del campo magnético creado por corrientes demuestra que son líneas cerradas. Las líneas de fuerza de un campo magnético siempre encierran en su interior al conductor por donde fluye la corriente. La forma cerrada de las líneas de fuer-



del campo magnético es la diferencia característica que las distingue de las líneas de fuerza del campo electrostático. Este hecho indica que entre los campos magnético y electrostático no hay grandes analogías. La naturaleza de estos campos es distinta.

El campo electrostático, cuyas líneas de fuerza empiezan en unas cargas y terminan en otras o se pierden en el infinito, es un campo potencial. A cada punto de este campo se le puede atribuir determinado valor unívoco de potencial. El campo magnético se caracteriza por la forma cerrada de sus líneas de fuerza. Este campo se denomina campo solenoidal. Como veremos después (véase el § 198), en los puntos del campo magnético no se les puede atribuir un valor unívoco de potencial, como se hace respecto al campo electrostático.

Las líneas de fuerza de excitación magnética  $H$ , indicando la dirección de la excitación en cada punto del campo, no determinan, sin datos complementarios, la magnitud de la excitación. Si convenimos, de manera análoga a como se ha hecho en electrostática, en equiparar la densidad del trazado de líneas de fuerza magnéticas con el valor numérico de la excitación, el cuadro que presentan las líneas de fuerza del campo magnético, caracterizará al campo magnético cuantitativamente. Cualquier campo se puede considerar uniforme en una zona suficientemente pequeña. En una zona de éstas, sea una superficie elemental  $\Delta S_0$  perpendicular a las líneas de fuerza del campo magnético de dicha zona. Convengamos en trazar por esta superficie  $\Delta S_0$  un número  $\Delta N$  de líneas de fuerza, que la relación entre este número y la magnitud del área  $\Delta S_0$  sea igual a la excitación en la zona dada del campo:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S_0} = H.$$

El número de líneas de fuerza que pasa por cualquier superficie  $\Delta S$ , es igual al número de líneas de fuerza que atraviesa a la proyección  $\Delta S_0$  de la superficie  $\Delta S$ , proyección perpendicular a las líneas de fuerza (fig. 184). De aquí que el número de líneas de fuerza  $\Delta N$  que atraviesan la superficie  $\Delta S$ , sea

$$\Delta N = H \Delta S \cos \alpha, \quad (3)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre la dirección de las líneas de fuerza y la normal a la superficie  $\Delta S$ . Como  $H \cos \alpha = H_n$ , donde  $H_n$  es la proyección del vector de excitación magnética  $H$  sobre la normal al elemento de superficie  $\Delta S$ , la ecuación (3) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\Delta N = H_n \Delta S. \quad (3a)$$

La ecuación (3a) determina el flujo magnético elemental  $\Delta N$  que pasa a través de la superficie elemental  $\Delta S$ . Está claro que el signo del

flujo  $\Delta N$  dependerá del de  $H_n$ . El signo de  $H_n$  a su vez viene determinado por la elección del sentido de la normal. Si el elemento  $\Delta S$  pertenece a una superficie cerrada, se ha convenido en tomar como sentido positivo de la normal, el *exterior* respecto al volumen limitado por la superficie dada (compárese con lo dicho en la pág. 32).

El flujo total  $N$  que atraviesa una superficie finita viene determinado por la suma algebraica de los flujos elementales que atraviesan todos los elementos  $\Delta S$  que forman la superficie  $S$  dada:

$$N = \sum \Delta N = \sum H_n \Delta S. \quad (4)$$

Si la superficie  $S$  es cerrada, el número de líneas de fuerza magnéticas que entran en el volumen limitado por la superficie, es

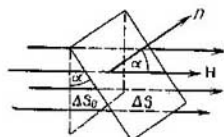


Fig. 184. Líneas de fuerza de un campo magnético que pasan a través de una superficie elemental  $\Delta S$  inclinada.

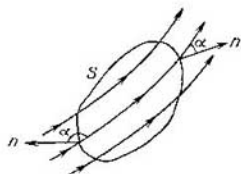


Fig. 185. Flujo de las líneas de fuerza del campo magnético a través de una superficie cerrada.

igual al número de líneas de fuerza que salen de este volumen, ya que las líneas de fuerza de un campo magnético son siempre curvas cerradas. En este caso, las líneas de fuerza entrantes forman un ángulo obtuso con la dirección de la normal exterior (fig. 185) y crean un flujo negativo; mientras que las líneas de fuerza salientes forman un ángulo agudo con la normal exterior y crean un flujo positivo. De esta manera estos dos flujos se compensan mutuamente y llegamos a la conclusión de que *el flujo magnético total a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero*.

De nuevo se refleja aquí la diferencia esencial entre los campos magnético y electrostático. El flujo total de las líneas de fuerza del campo eléctrico  $E$  puede ser diferente de cero, como se deduce del teorema de Ostrogradski — Gauss (§ 126).

Utilizando las notaciones del cálculo integral sustituimos, en la ecuación (4), la suma por la integral y obtenemos para el flujo magnético  $N$  que atraviesa la superficie  $S$ :

$$N = \int_S H_n dS, \quad (4a)$$

donde la integral se extiende a toda la superficie  $S$ .

El flujo magnético a través de una superficie cerrada, como se ha indicado, es igual a cero; por consiguiente, si la integral (4a) la extendemos a una *superficie cerrada*, tendremos que

$$\int_S H_n dS = 0. \quad (5)$$

Sea  $V$  el volumen limitado por la superficie que examinamos, entonces (compárese con lo dicho en la pág. 144, § 156) al reducir el volumen y, por lo tanto, la superficie hasta transformarlo en un punto, tendremos que

$$\lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V} \int_S H_n dS \right) = \text{div } \mathbf{H}.$$

Como  $\int_S H_n dS$  siempre es igual a cero, tendremos que

$$\text{div } \mathbf{H} = 0.$$

Así tenemos que *en el vacío, en cualquier punto del espacio, la divergencia del vector de excitación magnética  $\mathbf{H}$  es igual a cero.*

En electrostática, como se ha indicado en el § 132, tenemos que

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

donde  $\rho$  es la densidad de carga espacial en el punto dado. Solamente en los lugares donde la densidad de carga espacial eléctrica es  $\rho=0$ , la divergencia del vector de intensidad del campo electrostático  $\mathbf{E}$  es igual a cero. Mientras que en todos los lugares donde la densidad de carga espacial eléctrica  $\rho$  no es igual a cero, la divergencia del vector  $\mathbf{E}$  tampoco es igual a cero. Como, según lo dicho, la divergencia del vector  $\mathbf{H}$  en el vacío siempre es igual a cero, se deduce que en la zona de fenómenos magnéticos no hay nada análogo a las cargas eléctricas.

### § 193. Determinación del campo magnético de las corrientes.

Como se ha indicado, la excitación magnética  $\mathbf{H}$  en cualquier punto del espacio depende de la forma de los conductores por donde fluye la corriente, de las intensidades de las corrientes y de la situación de los puntos a examinar respecto a estos conductores. Experimentalmente, la dirección y magnitud de la excitación magnética  $\mathbf{H}$  se pueden determinar en función del momento  $M$  de fuerzas que actúan sobre el cuadro de momento magnético  $p_m$  dado.

Como simple ejemplo podemos elegir un conductor recto y muy largo y determinar la excitación magnética  $H$  a una distancia  $r$  del mismo.

Ante todo determinemos experimentalmente, con ayuda de un cuadro, qué dependencia hay entre la excitación magnética  $H$ , por un lado, y la intensidad de la corriente  $I$  que fluye por el conductor, y la distancia  $r$  al conductor de otro lado. El campo magnético creado por la corriente que fluye por el conductor recto y largo, es variable; pero si las dimensiones del cuadro son pequeñas en comparación con la distancia  $r$ , el campo dentro de los límites del cuadro se puede considerar uniforme. Como se ha indicado en la

pág. 296 el cuadro cerca del conductor recto y largo gira orientándose de manera que su normal sea perpendicular a la recta  $r$  trazada desde la parte más cercana del conductor hasta el cuadro. Si la corriente  $I$  (fig. 186, *a*) fluye por el conductor de arriba hacia abajo, la normal  $N$  al cuadro será perpendicular al plano del dibujo con el extremo positivo dirigido hacia el lector. Para mantener esta normal en la dirección de  $r$  (fig. 186, *b*) hay que aplicar al cuadro un momento  $M$  de fuerzas que, según lo dicho, sea proporcional a

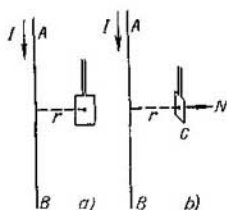


Fig. 186. Determinación de la excitación magnética con ayuda de un cuadro.

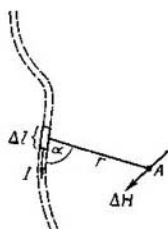


Fig. 187. El elemento de corriente  $\Delta l$  crea en el punto  $A$  una excitación magnética  $\Delta H$  perpendicular al plano que contiene el elemento  $\Delta l$  y el radio vector  $r$ .

la excitación magnética  $H$ . Midiendo el momento  $M$  de fuerzas, siendo constante el momento magnético del cuadro  $p_m$ , es fácil ver ante todo que este momento es proporcional a la intensidad  $I$  de la corriente del conductor  $AB$ . De esto se deduce que la excitación magnética  $H$  es proporcional a la intensidad  $I$  de la corriente que crea el campo:

$$H \sim I.$$

En segundo lugar, colocando el cuadro a diferentes distancias  $r$  del conductor, se puede observar que el momento  $M$  es inversamente proporcional a la distancia  $r$  del conductor, de lo cual se deduce que la excitación magnética  $H$  es inversamente proporcional a  $r$ :

$$H \sim \frac{1}{r}.$$

La razón inversa de la excitación magnética de una corriente rectilínea respecto a la distancia al conductor la aclararon Biot y Savart en 1820. Sin embargo, esta dependencia tiene lugar solamente en el caso particular de un conductor rectilíneo y largo. En cada caso particular, la dependencia de la excitación magnética respecto a

posición general de los conductores recorridos por corrientes, será otra. La única propiedad común es la proporcionalidad de la excitación magnética  $H$  en el punto dado respecto a la intensidad  $I$  de la corriente que crea el campo.

La excitación magnética  $H$  creada por la corriente que fluye por un conductor, viene determinada por la acción de todas las porciones de este conductor. Las distintas porciones originan excitaciones elementales  $\Delta H$ , y la excitación observada  $H$  es la suma vectorial de todas las elementales. Esto, naturalmente, condujo a intentar establecer una ley que relacionase la porción elemental de la corriente con la excitación magnética correspondiente a esta porción de corriente. Experimentalmente no podemos aislar una porción de corriente, por lo tanto no podemos medir directamente el campo creado por un elemento de corriente. Solamente se puede medir la excitación magnética total creada por todos los elementos de la corriente en el punto dado del espacio. No obstante, Laplace consiguió hallar, generalizando los datos experimentales, una ley elemental que, aplicada a las porciones de un contorno de forma arbitraria, permitía calcular, en todos los casos, el valor de la excitación magnética resultante y que coincidía con las mediciones experimentales. Esta ley se ha convenido denominarla *ley de Biot-Savart-Laplace*.

Esta ley consiste en lo siguiente: un elemento  $\Delta l$  del contorno por donde fluye una corriente de intensidad  $I$ , crea en un punto arbitrariamente elegido  $A$  (fig. 187) un campo magnético de excitación  $\Delta H$  igual a

$$\Delta H = k' \frac{I \Delta l \operatorname{sen} \alpha}{r^2}, \quad (1)$$

donde  $r$  es la distancia desde la porción elemental del conductor  $\Delta l$  hasta el punto  $A$ ;  $\alpha$ , el ángulo que forma el radio vector  $r$  desde la porción elemental del conductor hasta el punto  $A$ , con el elemento  $\Delta l$ , y  $k'$ , un coeficiente de proporcionalidad. El vector  $\Delta H$  es perpendicular al plano que contiene el elemento  $\Delta l$  y el radio vector  $r$ ; la dirección y sentido de  $\Delta H$  vienen determinados por la regla del sacacorchos: el sentido de giro de la manilla del sacacorchos coincidirá con el de  $\Delta H$ , si el movimiento de traslación del sacacorchos coincide con el sentido de la corriente  $I$  en el elemento del contorno  $\Delta l$ .

Según lo dicho, la fórmula (1) de Biot-Savart-Laplace no nos da toda la excitación magnética  $H$  creada por la corriente dada en el punto  $A$ , sino solamente la parte creada por el elemento  $\Delta l$  del contorno. La excitación total  $H$  es la suma vectorial de todos los vectores elementales  $\Delta H$  creados por todos los elementos en que mentalmente se ha dividido el contorno de la corriente. La coincidencia

de los resultados obtenidos según la fórmula (1) para diferentes contornos de corriente, con los datos experimentales es una confirmación de su veracidad.

Para determinar el sentido y la magnitud de  $\Delta H$ , la fórmula (1) se puede escribir en forma vectorial:

$$\Delta H = k' \frac{I |\Delta l \times r|}{r^3}, \quad (1a)$$

donde  $[\Delta l \times r]$  es el producto vectorial de los vectores  $\Delta l$  y  $r$ .

Al elemento  $\Delta l$  de longitud del conductor se le atribuye el mismo sentido que el de la corriente. El radio vector  $r$  se traza desde el elemento  $\Delta l$  del conductor hasta el punto  $A$  en que se calcula la excitación. La excitación magnética total  $H$  del punto  $A$  viene determinada por la suma geométrica de todas las excitaciones elementales  $\Delta H$ :

$$H = \sum \Delta H.$$

De la ley elemental (1) se deduce que la excitación magnética  $H$  de una corriente que fluye por un conductor rectilíneo y largo, es proporcional a  $I/r$ . Efectivamente, determinemos la excitación magnética  $H$  del punto  $A$  a la distancia  $r_0$  de un conductor rectilíneo muy largo (fig. 188) como la suma de las excitaciones elementales creadas por los distintos elementos del conductor. Según la fórmula de Biot-Savart-Laplace (1), el elemento  $\Delta l$  del conductor de la corriente crea en el punto  $A$  una excitación

$$\Delta H = k' \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2},$$

donde  $r$  es la distancia del elemento  $\Delta l$  al punto  $A$ .  $\Delta H$  es perpendicular al plano del dibujo y, si la corriente va de arriba hacia abajo,  $\Delta H$  va dirigido hacia el lector.

De esta manera, tenemos que las excitaciones  $\Delta H$  de todos los elementos  $\Delta l$  tendrán el mismo sentido y la excitación total  $H$  vendrá expresada por la suma algebraica:

$$H = \sum k' \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2}.$$

En la fig. 188 tenemos que

$$\Delta l = \frac{r \cdot \Delta \alpha}{\sin \alpha},$$

de donde

$$\frac{\Delta l}{r^2} = \frac{\Delta \alpha}{r \sin \alpha},$$

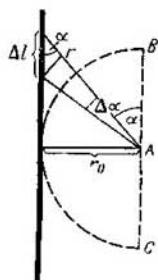


Fig. 188. Representación gráfica para calcular la excitación magnética de una corriente rectilínea.

pero  $r \sin \alpha = r_0$  y, por consiguiente,

$$\frac{\Delta l}{r^2} = \frac{\Delta \alpha}{r_0},$$

después de lo cual, la ecuación de  $H$  adquiere la forma:

$$H = \sum k' \frac{I \sin \alpha \cdot \Delta \alpha}{r_0}. \quad (2)$$

Suponiendo que los elementos  $\Delta l$  en que nosotros mentalmente hemos dividido el conductor, son infinitamente pequeños, nos dará que el ángulo  $\Delta \alpha$  también será infinitamente pequeño, por lo tanto, la suma de la ecuación (2) debe ser sustituida por la integral:

$$H = \int k' \frac{I \sin \alpha \, d\alpha}{r_0}.$$

Hay que integrar según todos los valores de  $\alpha$  empezando de  $\alpha=0$ , que corresponde a los elementos  $dl$  superiores más alejados, hasta  $\alpha=\pi$ , que corresponde a los elementos  $dl$  inferiores más alejados. Por consiguiente, los límites de la integración serán 0 y  $\pi$ . Observando, además, que  $I$  y  $r_0$ , como magnitudes constantes, se pueden sacar del signo de la integral, obtenemos que

$$H = k' \frac{I}{r_0} \int_0^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha = k' \frac{I}{r_0} [-\cos \alpha]_0^{\pi} = k' \frac{2I}{r_0}. \quad (3)$$

Así, de la ley de Biot-Savart-Laplace se deduce realmente que la excitación magnética  $H$  creada por una corriente que fluye por un conductor rectilíneo infinitamente largo, es proporcional a  $I/r_0$ , donde  $r_0$  es la distancia del punto en que se mide la excitación, al conductor.

§ 194. Campo magnético de un conductor circular y de un solenoide recorridos por una corriente. Veamos unos cuantos ejemplos de aplicación de la ley de Biot-Savart-Laplace.

#### 1. Excitación magnética en el centro de una corriente circular.

Sea un contorno en forma de circunferencia de radio  $R$  por el cual, según las agujas del reloj, fluye una corriente de intensidad  $I$  (fig. 189). Cualquier elemento del contorno circular  $\Delta l$  se halla a una misma distancia  $r=R$  del centro. Además, para cualquier elemento  $\Delta l$ , el radio vector  $\mathbf{R}$  será perpendicular a  $\Delta l$ , de donde el ángulo será  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  y, por consiguiente,  $\sin \alpha = 1$ . De aquí que, según la fórmula (1) del § 193, la excitación magnética  $\Delta H$  creada en el centro

de la circunferencia por el elemento  $\Delta l$ , sea

$$\Delta H = k' \frac{I \Delta l}{R^2}.$$

El sentido de  $\Delta H$  viene determinado por la regla del sacacorchos:  $\Delta H$  es perpendicular al plano de la circunferencia y, si el sentido de la corriente es el de las agujas del reloj,  $\Delta H$  irá en el sentido en que se aleje del lector. Así tenemos que todos los elementos  $\Delta l$  del contorno circular de la corriente crean en el centro excitaciones  $\Delta H$  de una misma dirección y sentido y la excitación magnética total  $H$ , en este caso, será la suma algebraica de  $\Delta H$ :

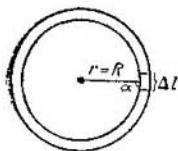


Fig. 189. Representación gráfica para calcular la excitación magnética en el centro de una corriente circular.

$$H = \sum \Delta H = \sum k' \frac{I \Delta l}{R^2}.$$

La intensidad  $I$  de la corriente, el radio  $R$  y el coeficiente  $k'$  de proporcionalidad, como magnitudes constantes pueden sacarse fuera del signo de suma, de donde

$$H = k' \frac{1}{R^2} \sum \Delta l,$$

pero  $\sum \Delta l$  es la suma de todos los elementos en que se ha dividido el contorno circular de radio  $R$ , es decir,  $\sum \Delta l$  es igual a la longitud de una circunferencia de radio  $R$ , de donde  $\sum \Delta l = 2\pi R$  y

$$H = k' \frac{2\pi I}{R}. \quad (1)$$

La relación entre las direcciones de  $H$  o  $I$  se da en la fig. 190.

2. Excitación magnética en el eje de una corriente circular. Llamaremos eje de una corriente circular a la perpendicular trazada por el centro de la circunferencia del contorno. Determinemos la excitación en el punto  $A$  situado a la distancia  $d$  del plano del contorno (fig. 191). Sea  $R$  el radio del contorno circular y  $r$  la distancia del punto  $A$  a los elementos  $\Delta l$ . Veamos qué excitaciones  $\Delta H_1$  y  $\Delta H_2$  crean dos elementos  $\Delta l_1$  y  $\Delta l_2$  diametralmente opuestos del contorno. Como el ángulo  $\alpha$  entre  $r$  y  $\Delta l$  es igual a  $\pi/2$  (por ser el ángulo formado entre la generatriz del cono y el elemento de circunferencia de la base), según la fórmula (1) del § 193 tendremos respectivamente que

$$\Delta H_1 = k' \frac{I \Delta l_1}{r_1^2}, \quad \Delta H_2 = k' \frac{I \Delta l_2}{r_2^2}.$$

Eligiendo iguales a  $\Delta l$  las longitudes de los elementos  $\Delta l_1$  y  $\Delta l_2$



y observando que  $r_1 = r_2$ , obtenemos que

$$\Delta H_1 = \Delta H_2 = k' \frac{I \Delta l}{r^2}, \quad (2)$$

donde  $r = r_1 = r_2$ . Así tenemos que los valores numéricos de  $\Delta H_1$  y  $\Delta H_2$  son iguales; pero tienen distinta dirección:  $\Delta H_1$  es perpendicular a  $r_1$  y al elemento  $\Delta l_1$ , y  $\Delta H_2$  es perpendicular a  $r_2$  y al elemento  $\Delta l_2$ . El sentido de  $\Delta H_1$  y  $\Delta H_2$  se determina por la regla

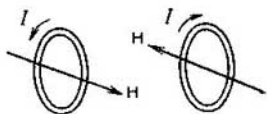


Fig. 190. Dirección y sentido de la excitación magnética  $H$  en el centro de una corriente circular.

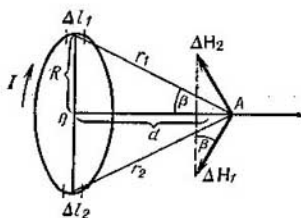


Fig. 191. Representación gráfica para calcular la excitación magnética en el eje de una corriente circular.

del sacacorchos (véase la fig. 191). La suma geométrica  $\Delta H$  de los vectores  $\Delta H_1$  y  $\Delta H_2$  irá dirigida según el eje de la corriente circular y numéricamente será igual a la suma de sus proyecciones sobre el eje  $OA$

$$\Delta H = \Delta H_1 \cos \beta + \Delta H_2 \cos \beta.$$

Observando que, en la fig. 191,  $\cos \beta = \frac{R}{r}$ , y sustituyendo  $\Delta H_1$  y  $\Delta H_2$  por sus valores según la (2), obtenemos que

$$\Delta H = k' 2 \frac{I \Delta l}{r^2} \cdot \frac{R}{r} = k' \frac{2I \Delta l R}{r^3}.$$

Dividiendo todo el contorno circular de la corriente en los indicados pares de elementos  $\Delta l$ , nos da que la excitación magnética resultante  $H$  va dirigida según el eje y numéricamente es igual a la *suma algebraica* de las magnitudes  $\Delta H$ :

$$H = \sum k' \frac{2I \Delta l \cdot R}{r^3} = k' \frac{IR}{r^3} \cdot 2 \sum \Delta l.$$

La suma de todos los elementos  $2 \sum \Delta l$  es igual a la longitud del contorno circular de la corriente  $2\pi R$ , por lo tanto

$$H = k' \frac{2\pi R^2 I}{r^3}.$$

En la fig. 191 vemos que  $r^2 = R^2 + d^2$ , de donde

$$H = k' \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

El sentido de  $\mathbf{H}$ , según el eje, será aquél en que mirando a lo largo del eje según el sentido de  $\mathbf{H}$ , veamos fluir la corriente según las agujas del reloj.

Para el punto situado en el centro de la corriente circular, tenemos que  $d=0$  y la fórmula (3) nos da:

$$H = k' \frac{2\pi I}{R},$$

es decir, pasa a ser la fórmula (1), como era de esperar.

Para grandes distancias  $d$  en comparación con el radio  $R$  de la corriente circular, se puede despreciar la magnitud  $R$  del denominador de la fórmula (3), y aproximadamente tendremos que

$$H \cong k' \frac{2\pi R^2 I}{d^3},$$

es decir,  $H$  varía en razón inversa al cubo de la distancia  $d$ .

**3. Excitación magnética en el eje de un solenoide.** El solenoide como ya se ha indicado, es un conductor arrollado a una superficie cilíndrica. Si las espiras del solenoide se colocan inmediatamente unas junto a otras, el solenoide será equivalente a un sistema de corrientes circulares de radios iguales y de eje común. De esto se deduce que la excitación magnética en el eje de un solenoide se puede obtener sumando las excitaciones creadas por las distintas corrientes circulares.

El cálculo correspondiente (véase el texto de letra de cuerpo menor) nos da que

$$H = k' 4\pi n I, \quad (4)$$

donde  $n$  es el número de espiras por unidad de longitud del solenoide e  $I$  la intensidad de la corriente.

Si se considera un pequeño elemento longitudinal  $dl$  del solenoide, tendremos en él  $ndl$  espiras. Llamando  $I$  a la intensidad de la corriente de cada espira, la porción  $dl$  del solenoide se puede considerar recorrida por una corriente circular de intensidad  $In dl$ . La excitación magnética en un punto  $A$  del eje del solenoide creada por esta porción, según la fórmula (3), es igual a

$$dH = k' \frac{2\pi I R^2 \cdot n}{(R^2 + l^2)^{3/2}} dl, \quad (5)$$

donde  $l$  es la distancia, según el eje, de la porción  $dl$  del solenoide al punto  $A$ . Teniendo en cuenta el ángulo  $\beta$  entre el eje del solenoide y el radio vector trazado

Desde el punto dado a la porción  $dl$  (fig. 192), obtenemos que

$$l = R \operatorname{ctg} \beta, \text{ de donde } dl = -R \frac{d\beta}{\operatorname{sen}^2 \beta};$$

además

$$R^2 + l^2 = \frac{R^2}{\operatorname{sen}^2 \beta};$$

colocando los valores de  $|dl|$  y de  $R^2 + l^2$  en la (5) [en la fórmula (5)  $dl$  es una magnitud positiva], tenemos que

$$dH = k' 2\pi n I \cdot \operatorname{sen} \beta d\beta.$$

Como la excitación magnética de todos los elementos en el punto  $A$  va dirigida según el eje de las corrientes, para obtener el valor resultante de  $H$  en el

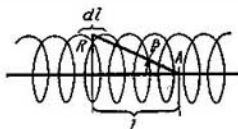


Fig. 192. Representación gráfica para el cálculo de la excitación magnética en el interior de un solenoide.

punto  $A$  hay que integrar la expresión obtenida según todos los valores de  $\beta$ . Si llamamos  $\beta_1$  y  $\beta_2$  los valores de los ángulos correspondientes a los extremos del solenoide, integrando nos da que

$$H = k' 2\pi n I \int_{\beta_1}^{\beta_2} \operatorname{sen} \beta d\beta = k' 2\pi n I (\cos \beta_1 - \cos \beta_2). \quad (6)$$

Este resultado depende de la posición del punto  $A$  y de la longitud del solenoide. Para un solenoide infinitamente largo tenemos que  $\beta_1 = 0$  y  $\beta_2 = \pi$ , de donde

$$H = k' 4\pi n I,$$

que coincide con la fórmula (4).

Para cualquier solenoide finito, la excitación magnética será menor que para el infinitamente largo. En el solenoide finito, el valor máximo de la excitación corresponderá al punto alejado a la misma distancia de los extremos del solenoide. Para el punto situado en el extremo del solenoide, la excitación se determina por la fórmula (6). Si en esta fórmula suponemos uno de los ángulos, por ejemplo el  $\beta_2$ , igual a  $\frac{\pi}{2}$ , tendremos que

$$H = k' 2\pi n I \cos \beta_1.$$

Si el solenoide es muy largo, tendremos que  $\beta_1 = 0$  y

$$H = k' 2\pi n I,$$

es decir, en el extremo de un solenoide largo, la excitación magnética es dos veces menor que en el interior del mismo. El sentido de la excitación en el eje, según la regla del sacacorchos, corresponderá al que mirando según este sentido, veamos fluir la corriente por las espiras según las agujas del reloj.

§ 195. **Unidades de medición de la excitación magnética. Sistema electromagnético absoluto de unidades.** La elección de la unidad de la excitación magnética se puede hacer si en la ley de Biot-Savart-Laplace, fórmula (1) del § 193, consideramos el coeficiente  $k'$  igual a un número determinado cualquiera. En el sistema *CGSE*, el coeficiente  $k'$  se supone igual a la unidad, a condición de que la intensidad  $I$  de la corriente se mida en unidades del sistema *CGSE*, y  $\Delta l$  y  $r$ , en centímetros; con ello se determina la unidad de excitación magnética en el sistema *CGSE*.

En este caso, la fórmula de Biot-Savart-Laplace toma la forma:

$$\Delta H = \frac{I \Delta l \operatorname{sen} \alpha}{r^2}. \quad (1)$$

Como la excitación magnética  $\Delta H$  creada por un elemento  $\Delta l$  independiente del conductor recorrido por la corriente no se puede percibir experimentalmente, para determinar la unidad de excitación magnética  $H$  hay que examinar la excitación creada en un lugar determinado por una unidad de corriente que fluya por un conductor de dimensiones y forma determinadas. Como tal podemos elegir un conductor recto y muy largo. Según la fórmula (3) del § 193, la excitación magnética  $H$  a la distancia  $r$  de este conductor será

$$H = k' \frac{2I}{r}.$$

Si, como hemos convenido, suponemos el coeficiente  $k'$  igual a la unidad, tendremos que

$$H = \frac{2I}{r}. \quad (2)$$

Midiendo la intensidad de la corriente en unidades *CGSE* y  $r$  en centímetros, basándonos en la ecuación (2) estableceremos la unidad *CGSE* de excitación magnética, y obtendremos que *a la distancia de 2 cm de un conductor rectilíneo muy largo por el cual fluye una corriente de intensidad igual a 1 unidad CGSE, la excitación magnética H será igual a 1 unidad CGSE de excitación magnética*.

De la misma manera haciendo  $k'=1$ , según las fórmulas (1) y (4) del § 194, obtenemos que la excitación magnética en el centro de una corriente circular de radio  $R$  es

$$H = \frac{2\pi I}{R}, \quad (3)$$

y en la parte media de un solenoide delgado y largo será

$$H = 4\pi n I, \quad (4)$$

donde  $n$  es el número de espiras del conductor por unidad de longitud del solenoide. De la fórmula (3) obtenemos que *al pasar una*

corriente de intensidad igual a 1 unidad CGSE por un conductor circular de radio  $R=1$  cm, en el centro de la circunferencia formada por el conductor se crea una excitación  $H$  igual a  $2\pi$  unidades CGSE de excitación magnética.

De la fórmula (4) también tenemos que al fluir por un solenoide largo y delgado una corriente de intensidad igual a 1 unidad CGSE, en la parte media del solenoide se crea una excitación magnética  $H$  igual a  $4\pi n$  unidades CGSE de excitación magnética. Es fácil determinar las dimensiones de la excitación magnética en el sistema CGSE basándose en cualquiera de las fórmulas (2), (3) ó (4):

$$[H] = L^{1/2} M^{1/2} T^{-2}.$$

Esta unidad CGSE de excitación magnética  $H$  se utiliza relativamente poco. En física, la excitación magnética generalmente se mide en unidades del llamado sistema electromagnético (véase más abajo).

Según lo dicho en el § 191, la excitación magnética se puede medir basándose en el momento  $M$  de fuerzas que actúan sobre un cuadro recorrido por una corriente. Según la fórmula (4a) del § 191, tenemos que

$$H = k \frac{M}{IS}, \quad (5)$$

donde  $I$  es la intensidad de la corriente en el cuadro y  $S$ , la superficie de este cuadro. Esta fórmula se podría utilizar para determinar la unidad de medición de excitación magnética  $H$  dándole al coeficiente  $k$  un valor numérico determinado y usando las determinadas unidades de medición de  $M$ ,  $I$  y  $S$ . Por ejemplo, se podría suponer que  $k=1$  y medir todas las demás unidades en el sistema CGSE, es decir,  $M$ , en  $\text{din}\cdot\text{cm}$ ,  $S$ , en  $\text{cm}^2$  e  $I$ , en unidades CGSE de intensidad de la corriente.

Sin embargo, al medir la excitación magnética  $H$  en unidades CGSE, debemos atribuir al coeficiente  $k$  de la fórmula (5) una dimensión y un valor numérico determinados. Efectivamente, según la fórmula (5), el momento  $M$  de fuerzas que actúan sobre el cuadro, es igual a

$$M = \frac{1}{k} HIS. \quad (6)$$

En el sistema CGSE, para las cuatro magnitudes físicas  $M$ ,  $H$ ,  $I$  y  $S$  de esta fórmula ya se han elegido las unidades de medición; por lo tanto al coeficiente  $k$  ya no se le puede dar un valor arbitrario. El coeficiente  $k$  será, por consiguiente, una constante de valor y dimensiones determinadas. Para demostrar esto supongamos, por ejemplo, que el cuadro se ha introducido en el interior de un solenoide, en la parte media, donde el campo magnético es uniforme y

la excitación es  $H=4\pi nI'$  (llamamos  $I'$  a la intensidad de la corriente del solenoide para diferenciarla de la intensidad  $I$  de la corriente del cuadro). Si en este caso la normal al cuadro es perpendicular al eje del solenoide, sobre el cuadro actuará el momento  $M$  de fuerzas determinado por la fórmula (6). Sustituyendo  $H$  por su valor  $4\pi nI'$  en esta fórmula obtenemos que

$$M = \frac{l}{k} 4\pi n I' I S. \quad (7)$$

De donde hallamos que las dimensiones del coeficiente  $k$  son

$$[k] = \frac{[n] \cdot [I'] \cdot [S]}{[M]}. \quad (8)$$

Para las dimensiones de  $M$  y  $S$  tenemos las siguientes expresiones:  $[M]=ML^2T^{-2}$  y  $[S]=L^2$ . Las dimensiones de la intensidad de la corriente en el sistema CGSE son  $[I]=M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}$ . La magnitud  $n$  es el número de espiras por unidad de longitud del solenoide, por lo tanto  $[n]=L^{-1}$ . Teniendo en cuenta todas estas dimensiones, de la relación (8) obtenemos que

$$[k] = L^2 T^{-2}.$$

De esta última ecuación se ve que las dimensiones del coeficiente  $k$  coinciden con las del cuadrado de la velocidad:  $[v^2]=L^2T^{-2}$ . Por consideraciones claramente comprensibles al examinar el campo magnético de cargas que se desplazan (§ 215), en lugar de  $k$  se ha establecido introducir otra constante  $c$  igual a  $\sqrt{k}$  y denominada *constante electrodinámica*. Las dimensiones de esta constante electrodinámica coinciden con las de la velocidad.

El valor numérico de la constante electrodinámica  $c$  se puede determinar por la fórmula (7) midiendo en unidades CGSE el momento  $M$  de las fuerzas que actúan sobre el cuadro introducido en el interior del solenoide. Estas mediciones nos dan que

$$c = \sqrt{k} = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ cm/seg.}$$

Establecido esto, la fórmula (7) adquiere la forma:

$$M = \frac{1}{c^2} 4\pi n I' I S. \quad (7a)$$

Como después veremos, la constante electrodinámica  $c$  expresada en unidades CGS coincide, según su valor numérico, con la velocidad de difusión de las ondas electromagnéticas en el vacío, también expresada en cm/seg (y en particular, con la velocidad de las ondas luminosas).

No obstante, se puede idear otro sistema electromagnético de unidades, tomando, por ejemplo, como fórmula básica para deter-

minar el sistema, la fórmula (7) del momento del par de fuerzas que actúa sobre un cuadro recorrido por una corriente y situado en el campo de un solenoide, suponiendo en esta fórmula que el coeficiente  $k$  es igual a la unidad. Como las unidades del momento de fuerzas y de superficie ya se han introducido en el sistema *CGS*, solamente se podrá hacer  $k=1$  introduciendo una nueva unidad para medir la intensidad de la corriente. Esta nueva unidad de intensidad de la corriente se denomina *unidad electromagnética*, y es una de las fundamentales del llamado sistema electromagnético de unidades, sistema *CGSM*.

Veamos la relación que hay entre esta nueva unidad de intensidad de la corriente y la unidad correspondiente del sistema *CGSE*. De la fórmula (7) obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{k} 4\pi n I_{CGSE} I'_{CGSE} = 4\pi n I_{CGSM} I'_{CGSM}.$$

Aquí los subíndices *CGSE* y *CGSM* indican en qué sistema de unidades se han medido las intensidades de las corrientes. Sustituyendo  $k$  por su valor  $c^2$ , hallamos que

$$\frac{I_{CGSE}}{I_{CGSM}} = c, \quad (9)$$

es decir, la intensidad de la corriente medida en unidades *CGSM* es un número  $c$  veces *menor* que el correspondiente a la misma intensidad de la corriente medida en unidades *CGSE*. Por consiguiente, la propia unidad *CGSM* de intensidad de la corriente será  $c$  veces *mayor* que la unidad *CGSE* de intensidad de la corriente:

$$\frac{\text{unid. } CGSM \text{ de intens. de corr.}}{\text{unid. } CGSE \text{ de intens. de corr.}} = c = 2,998 \cdot 10^{10} \cong 3 \cdot 10^{10}.$$

El valor de la constante electrodinámica  $c=2,998 \cdot 10^{10}$  cm/seg se ha determinado experimentalmente y, por lo tanto, con cierto error, aunque pequeño (aproximadamente de 0,002%). De esto se deduce que la relación numérica entre las unidades *CGSE* y *CGSM* de intensidad de la corriente no pueda darse con absoluta exactitud, sino con *cierta aproximación*. Como 2,998 se aproxima mucho a 3, en la mayoría de los casos se puede considerar que 1 unidad *CGSM* de intensidad de la corriente =  $3 \cdot 10^{10}$  unidades *CGSE* de intensidad de la corriente (véase el § 153).

Las dimensiones de la unidad electromagnética de intensidad de la corriente se pueden obtener de la relación (9) y de las dimensiones de la constante electrodinámica  $c$ :

$$[I_{CGSM}] = \frac{[I_{CGSE}]}{[c]} = \frac{M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}}{L T^{-1}} = M^{1/2} L^{1/2} T^{-1}.$$

De esta manera, las dimensiones de la intensidad de la corriente en los sistemas *CGSM* y *CGSE* son diferentes. Insistimos en que una misma magnitud física puede tener diferentes dimensiones en distintos sistemas de unidades (véase el t.I, § 30).

Al tener en cuenta la unidad electromagnética de intensidad de corriente, tendremos que introducir una nueva unidad (electromagnética) de cantidad de electricidad. Como  $Q=It$ , y el tiempo  $t$  en ambos sistemas se mide en segundos, la unidad *CGSM* de cantidad de electricidad será tantas veces mayor que la unidad *CGSE* de cantidad de electricidad, cuantas veces la unidad *CGSM* de intensidad de la corriente sea mayor que la unidad *CGSE* de intensidad de la corriente. Así tenemos que

$$\frac{\text{unidad } CGSM \text{ de cant. de electr.}}{\text{unidad } CGSE \text{ de cant. de electr.}} = c \cong 3 \cdot 10^{10}.$$

Las dimensiones de la unidad *CGSM* de cantidad de electricidad se determinan de la relación  $[Q]=[I] \cdot [t]$ , de donde

$$[Q_{CGSM}] = M^{1/2} L^{1/2}.$$

Por último introducimos la unidad *CGSM* de excitación magnética  $H$ . Para ello utilicemos la relación (3) del § 193:

$$H = \frac{2I}{r}, \quad (10)$$

en que la intensidad  $I$  de la corriente la mediremos en unidades *CGSM*, y la distancia  $r$ , en centímetros, como antes. La unidad de excitación magnética  $H$  establecida de esta manera se denomina oerstedio (oersted) (abreviado Oe) en honor de Oersted, que en 1820 observó la acción magnética de la corriente.

De la relación (10) se deduce que a la distancia de 2 cm de un conductor recto infinitamente largo recorrido por una corriente de 1 unidad *CGSM* de intensidad, se excita un campo magnético de 1 oerstedio. Basándonos en la fórmula (4) también obtenemos que la parte media de un solenoide delgado y largo de  $n$  espiras por cm y por el cual fluye una corriente de una unidad *CGSM* de intensidad, la excitación magnética es igual a  $4\pi n$  oerstedios. En adelante, frecuentemente mediremos la excitación con oerstedios. El oerstedio es  $c$  veces mayor que la unidad *CGSE* de excitación.

En la ley de Biot-Savart-Laplace

$$\Delta H = \frac{I \Delta l \operatorname{sen} \alpha}{r^2},$$

el coeficiente de proporcionalidad  $k'$  en el sistema *CGSM*, lo mismo que en el sistema *CGSE*, es igual a la unidad. Esto es debido a que en el sistema *CGSM*, la unidad de intensidad  $I$  de la corriente y la



de excitación magnética  $H$  son un mismo número de veces ( $c$  veces) mayores que las unidades de estas magnitudes en el sistema  $CGSE$ .

Las dimensiones de la excitación  $H$  en el sistema  $CGSM$  se establecen de la relación (10):

$$H = \frac{[I]}{[r]} = M^{1/2} L^{-1/2} T^{-1}.$$

En el § 196 se habla de las unidades de intensidad de la corriente y de excitación magnética en el sistema internacional de unidades.

§ 196. Fuerzas que actúan sobre la corriente en el campo magnético. Sistema internacional de unidades eléctricas. Los experimentos sobre la desviación del cuadro con corriente en un campo magnético

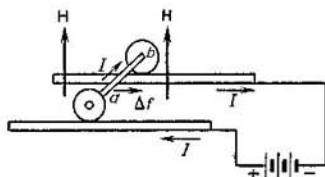


Fig. 193. Esquema del experimento para revelar la fuerza  $\Delta f$  que actúa sobre el conductor con corriente en un campo magnético exterior  $H$ .

demuestran que sobre cualquier cuadro recorrido por una corriente e introducido en un campo magnético actúa un par de fuerzas. Es natural suponer que este par esté formado por fuerzas que actúan sobre cada elemento del contorno de corriente que se halla en el campo magnético.

La existencia de estas fuerzas aplicadas a un elemento, por separado del contorno, se puede comprobar con ayuda del siguiente experimento: por dos barras metálicas paralelas pueden deslizarse dos rodillos unidos con una varilla recta  $ab$ , cuya longitud es  $\Delta l$  (fig. 193). Los extremos de las barras se conectan con los polos de una batería de modo que con la batería y la varilla  $ab$  se forme un circuito cerrado de corriente.

Sea  $I$  la intensidad de la corriente que fluye por la varilla  $ab$  según el sentido indicado por la flecha en la fig. 193. Excitemos un campo magnético uniforme  $H$  de dirección perpendicular al plano en que se hallan las barras. Entonces, sobre la varilla  $ab$  empezará a actuar una fuerza y los rodillos se deslizarán. Esta fuerza  $\Delta f$  es

fácil de medir con ayuda de un resorte u otro dispositivo mecánico cualquiera. La experiencia demuestra que la fuerza  $\Delta f$  es perpendicular al plano en que están  $H$  o  $I$ .

Ampere estableció que la magnitud de la fuerza  $\Delta f$  es proporcional a la intensidad de la corriente  $I$ , a la excitación magnética  $H$  y a la longitud del elemento  $\Delta l$  del conductor.

Además, la magnitud de la fuerza  $\Delta f$  depende de la dirección de  $H$ . Siendo iguales las demás condiciones, cuando  $H$  es perpendicular a la dirección de la corriente  $I$ , la fuerza  $\Delta f$  tendrá el valor

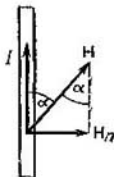


Fig. 194. La acción del campo magnético sobre una corriente viene determinada por la componente normal de la excitación magnética  $H$ .

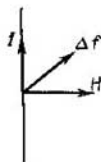


Fig. 195. Dirección y sentido de la fuerza  $\Delta f$  que actúa sobre una corriente en un campo magnético.

máximo. Si el vector  $H$  es paralelo a la dirección de la corriente  $I$ , tendremos que  $\Delta f=0$ . Esto nos hace suponer que la fuerza  $\Delta f$  sólo es debida a la componente de la excitación magnética  $H$  que es perpendicular a la dirección de la intensidad  $I$  de la corriente. Como esta componente (véase la fig. 194) es igual a  $H \text{ sen } \alpha$ , definitivamente obtenemos para la ley de Ampere la expresión:

$$\Delta f \sim IH \text{ sen } \alpha \cdot \Delta l. \quad (1)$$

Para pasar al signo de igualdad hay que introducir un coeficiente de proporcionalidad.

Como se infiere de la experiencia y como confirma el cálculo que se da más abajo, el coeficiente de proporcionalidad es igual a  $1/c^2$ , si las magnitudes  $I$  y  $H$  se miden en unidades electrostáticas, y  $\Delta f$  en dinas.

Por eso escribiremos que

$$\Delta f = \frac{1}{c^2} IH \text{ sen } \alpha \cdot \Delta l. \quad (1a)$$

Como se ha indicado, la fuerza  $\Delta f$  va dirigida perpendicularmente al plano en que se hallan las direcciones de  $I$  y  $H$ . Si la excitación magnética  $H$  es perpendicular a la dirección de la corriente  $I$ , la fuerza  $\Delta f$  tendrá el sentido indicado en la fig. 195.

En el caso general, para determinar la dirección y sentido de la fuerza  $\Delta f$  hay varias reglas.

En primer lugar se puede utilizar la regla del sacacorchos que, en este caso, se aplica de la siguiente manera: se hace girar la manilla del sacacorchos en el sentido desde la dirección de la intensidad de la corriente  $I$  hacia la del vector  $H$  (fig. 196), realizando este giro según el ángulo menor que  $\pi$  formado entre  $I$  y  $H$ , el movimiento de traslación del sacacorchos nos dará la dirección de la fuerza  $\Delta f$ .

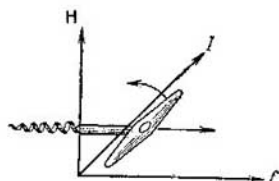


Fig. 196. Determinación del sentido de la fuerza  $\Delta f$  mediante la regla del sacacorchos.



Fig. 197. Regla de la mano izquierda.

La segunda regla que citamos es la llamada *regla de la mano izquierda*: si la palma de la mano izquierda la colocamos de manera que la componente de la excitación magnética  $H$  perpendicular a  $\Delta l$  atraviese normalmente la palma (fig. 197), y los cuatro dedos extendidos indiquen el sentido de la corriente  $I$ , el pulgar nos indicará el sentido de la fuerza  $\Delta f$ .

La magnitud y sentido de la fuerza  $\Delta f$  que actúa sobre un elemento del conductor, se pueden expresar mediante el producto vectorial:

$$\Delta f = \frac{1}{c^2} I [\Delta l \times H], \quad (1b)$$

donde al elemento  $\Delta l$  del conductor se le atribuye el sentido de la corriente  $I$ .

Basándonos en la fórmula de Ampere demosetremos ante todo que el momento  $M$  de fuerzas que actúan sobre un cuadro plano rectangular, cuya normal es perpendicular a la dirección de la excitación magnética  $H$ , es igual a

$$M = \frac{1}{k} IHS. \quad (2)$$

Supongamos que la normal al cuadro  $ABDC$  (fig. 198) es perpendicular al plano del dibujo y las líneas de fuerza del campo

magnético están en el plano del dibujo. Para simplificar supongamos que los lados  $AC$  y  $BD$  del cuadro son paralelos a las líneas de fuerza del campo magnético y, por consiguiente, los lados  $AB$  y  $CD$  son perpendiculares a las mismas. Dentro de los límites del cuadro consideraremos que el campo magnético es uniforme. Por el cuadro fluye una corriente  $I$  según la dirección indicada por las flechas en la fig. 198. Por la regla de la mano izquierda hallamos que sobre

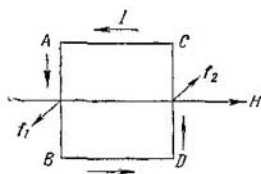


Fig. 198. Fuerzas que actúan sobre un cuadro con corriente situado paralelamente a las líneas de fuerza del campo magnético.

el lado  $AB$  del cuadro actúa la fuerza  $f_1$  perpendicular al plano del dibujo y dirigida hacia el lector. El valor de esta fuerza, según la fórmula (1a), es

$$f_1 = \frac{1}{c^2} I H l_1, \quad (3)$$

donde  $l_1$  es la longitud del lado  $AB$  del cuadro.

La fuerza  $f_2$ , igual a la  $f_1$ , pero de sentido opuesto, actúa sobre el lado  $CD$  del cuadro.

Estas fuerzas forman un par de momento

$$M = f_1 l_2,$$

donde  $l_2$  es la longitud del lado  $BD$  del cuadro.

Sustituyendo en esta ecuación la fuerza  $f_1$  por su valor según la (3), y observando que el producto  $l_1 l_2$  es igual al área  $S$  del cuadro, obtenemos que

$$M = \frac{1}{c^2} I H S.$$

Esta fórmula coincide con la (2) cuando  $k=c^2$ , relación de coeficientes que ya habíamos introducido en el § 195. Por lo tanto, el cálculo hecho no sólo nos da una expresión justa del momento de fuerzas que actúan sobre el cuadro recorrido por una corriente y situado en un campo magnético, sino que indica que en la ley de Ampere, al medir  $I$  y  $H$  en el sistema CGSE debe tenerse en cuenta el coeficiente  $1/c^2$ .

Basándonos en la fórmula de Ampere hallamos la expresión para la fuerza de acción recíproca de dos conductores rectos paralelos e infinitamente largos recorridos por corrientes.

Sea  $d$  la distancia entre los conductores o  $I_1$  e  $I_2$ , las intensidades de las corrientes respectivas.

Veamos con qué fuerza actúa el campo magnético de la corriente  $I_1$  sobre el segmento de longitud  $l$  del segundo conductor.

Para ello observemos que las líneas del vector de excitación magnética del campo de la corriente  $I_1$  son circunferencias concéntricas y, si la corriente  $I_1$  fluye hacia arriba, la excitación  $H_1$  en los puntos del segundo conductor, según la regla

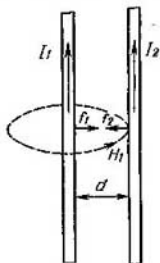


Fig. 199. Acción recíproca de dos corrientes rectilíneas infinitamente largas.

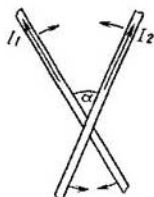


Fig. 200. Acción recíproca de dos corrientes rectilíneas que fluyen formando el ángulo  $\alpha$  entre ellas.

del sacacorchos, va dirigida por detrás del plano del dibujo alejándose del lector (fig. 199), y numéricamente es igual a

$$H_1 = \frac{2I_1}{d}. \quad (4)$$

Para determinar la dirección y sentido de la fuerza  $f_2$  que actúa sobre el segmento  $l$  del segundo conductor, utilizaremos la regla de la mano izquierda. Coloquemos la mano izquierda de manera que el vector de excitación magnética  $H_1$  vaya dirigido perpendicularmente hacia la palma de la mano, y los cuatro dedos extendidos vayan dirigidos en el sentido de la corriente  $I_2$ ; entonces, el pulgar nos indicará la dirección y sentido de la fuerza  $f_2$  que actúa sobre el segmento  $l$  de la corriente  $I_2$ . Si la corriente  $I_2$  fluye hacia arriba, esta fuerza, como se ve, estará dirigida hacia la izquierda, es decir, el segmento  $l$  de la corriente  $I_2$  es atraído hacia la corriente  $I_1$ . Como  $H_1$  es perpendicular a  $l$ , la magnitud de la fuerza de atracción  $f_2$ , según la (1a), será

$$f_2 = \frac{1}{c^2} I_2 H_1 l$$

o, sustituyendo  $H_1$  por su valor según la (4),

$$f_2 = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2}{d} l. \quad (5)$$

Razonando de la misma manera se puede demostrar que la excitación  $H_2$  creada por la corriente  $I_2$  dentro del segmento de longitud  $l$  del primer conductor, va dirigida hacia el lector, es decir, el segmento  $l$  de la corriente  $I_1$  es atraído hacia la corriente  $I_2$ . La magnitud de la fuerza de atracción será:

$$f_1 = \frac{1}{c^2} I_1 H_2 l = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2}{d} l,$$

es decir, es igual a la magnitud de la fuerza  $f_2$  expresada por la fórmula (5).

Así tenemos que dos corrientes paralelas que fluyen en una misma dirección, se atraen mutuamente. Sobre el segmento de longitud  $l$  de cada uno de los conductores, según la (5), actúa una fuerza directamente proporcional al producto de las intensidades de las corrientes e inversamente proporcional a la distancia entre ellas. Si en la fórmula (5) expresamos  $I_1$  e  $I_2$  en unidades CGSE de intensidad de la corriente, y  $l$  y  $d$  en centímetros, la fuerza  $f$  se expresará en dinas.

Un examen análogo nos demuestra que dos corrientes paralelas y de sentido contrario se repelen con una fuerza, cuyo valor numérico se determina también por la fórmula (5).

Si las corrientes fluyen por dos conductores rectilíneos cuyas direcciones se cortan formando cierto ángulo  $\alpha$ , entre las corrientes surgen unas fuerzas que tienden a hacer girar a los conductores de manera que se orienten paralelamente y que sus corrientes fluyan en un mismo sentido (fig. 200).

En todas las fórmulas dadas en este párrafo se supone que las magnitudes eléctricas y magnéticas se miden en unidades del sistema electrostático. Si la excitación magnética y la intensidad de la corriente se miden en unidades del sistema electromagnético, el coeficiente  $1/c^2$  de las fórmulas (1a), (1b), (2), (3) y (5), desaparece.

Por ejemplo, la fórmula de la ley de Ampere en el sistema CGSM adquiere la forma:

$$\Delta f = IH \operatorname{sen} \alpha \cdot \Delta l, \quad (6)$$

y la fuerza de acción recíproca de las corrientes paralelas se expresará por la fórmula:

$$f_1 = f_2 = \frac{2I_1 I_2 l}{d}. \quad (5a)$$

En el sistema internacional de unidades (véase el t. I), la unidad fundamental de electricidad es la de intensidad de la corriente, el

amperio, que se establece basándose en la fórmula (5a). Esta unidad se determina de la siguiente manera: *el amperio es la intensidad de la corriente que, fluyendo por dos conductores paralelos e infinitamente largos y situados a la distancia de 1 m uno de otro en el vacío, crea entre ellos una fuerza de acción recíproca igual a  $2 \cdot 10^{-7}$  newtones sobre cada metro de longitud.* Así pues, midiendo todas las magnitudes que entran en la fórmula (5a) en unidades del sistema internacional, la fórmula adquirirá la forma:

$$f \text{ (newtones)} = \frac{2 \cdot 10^{-7} I_1 (A) \cdot I_2 (A) \cdot l \text{ (m)}}{d \text{ (m)}}.$$

Como 1 newton =  $10^5$  dinas, obtenemos las siguientes relaciones entre el amperio y la unidad CGSM de intensidad de la corriente:

$$1A = 0,1 \text{ unidades CGSM de intensidad de la corriente.}$$

De aquí se ve que, por definición, el amperio es igual exactamente a la décima parte de la unidad CGSM de intensidad de la corriente.

La relación entre el amperio y la unidad CGSE de intensidad de la corriente se determina basándose en que, según la ecuación (9) del § 195:

$$1 \text{ unid. CGSM de intens. de la corr.} = c \cdot \text{unid. CGSE de intens. de la corr.}$$

Como  $c = 2,998 \cdot 10^{10}$  cm/seg, tendremos que:

$$1A = 2,998 \cdot 10^9 \text{ unid. CGSM de intens. de la corr.} \cong \\ \cong 3 \cdot 10^9 \text{ unid. CGSE de intens. de la corr.}$$

Todas las demás unidades eléctricas y magnéticas del sistema internacional se establecen a partir del amperio. Así, por unidad de cantidad de electricidad se toma el culombio, que es igual a la cantidad de electricidad transportada en 1 seg a través de la sección transversal de un conductor por el cual fluye una corriente de 1 A de intensidad (véase el § 153). Está claro que entre el culombio y las unidades CGSM y CGSE de cantidad de electricidad habrá la siguiente relación:

$$1 \text{ culombio} = 0,1 \text{ unid. CGSM de cant. de electr.,} \\ 1 \text{ culombio} = 2,998 \cdot 10^9 \text{ unid. CGSE de cant. de electr.} \cong \\ \cong 3 \cdot 10^9 \text{ unid. CGSE de cant. de electr.}$$

Por unidad de excitación magnética en el sistema internacional de unidades se toma la excitación magnética a la distancia de  $\frac{1}{2\pi}$  m de un conductor rectilíneo infinitamente largo, por el cual fluye

una corriente de 1 A de intensidad. Esta unidad se denomina "amperio por metro" (abreviado A/m). Es fácil ver que  $1 \text{ A/m} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Oe}$ .

En adelante, en todos los casos en que no se diga otra cosa, mediremos las magnitudes magnéticas en unidades *CGSM*.

§ 197. Contorno cerrado recorrido por una corriente en un campo magnético. En el § 196 se ha deducido, basándose en la ley de Ampere, la expresión del momento de fuerzas que actúan en un campo magnético sobre un cuadro plano rectangular.

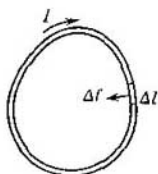


Fig. 201. Fuerza que actúa sobre el elemento  $\Delta l$  del contorno con corriente situado perpendicularmente a la excitación magnética.

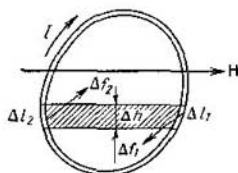


Fig. 202. Representación gráfica para el cálculo del momento de fuerzas que actúan sobre un contorno con corriente paralelo a la excitación magnética.

Veamos ahora el caso de la acción de un campo magnético sobre contornos planos de forma arbitraria. En este caso consideraremos que el conductor que forma el contorno es tan rígido, que bajo la acción de las fuerzas magnéticas aplicadas a todos sus elementos, se comporta como un cuerpo sólido.

1. Contorno cerrado con corriente en un campo magnético. Supongamos primeramente que el contorno plano de forma arbitraria recorrido por una corriente de intensidad  $I$  está en un campo magnético uniforme de excitación  $H$  dirigido perpendicularmente al plano del contorno (fig. 201). Sea un elemento  $\Delta l$  cualquiera del contorno y determinemos la fuerza  $\Delta f$  que actúa sobre él. Como  $H$  es perpendicular a  $\Delta l$ , en el sistema *CGSM*, según la fórmula (6) del § 196, tendremos que

$$\Delta f = IH\Delta l.$$

La dirección y sentido de la fuerza  $\Delta f$  se determinan con ayuda de la regla de la mano izquierda: si la excitación es perpendicular al plano del dibujo y va hacia el lector, y la corriente del contorno fluye según las agujas del reloj, la fuerza irá dirigida hacia el centro del contorno (fig. 201). Como debido a la uniformidad del campo, las fuerzas aplicadas a todos los elementos del contorno tienen el



mismo valor numérico, el contorno sufrirá una compresión uniforme. Si se invierte el sentido del campo magnético o el de la intensidad de la corriente, el de las fuerzas  $\Delta f$  también resultará invertido y el contorno sufrirá una tracción uniforme. Si invertimos al mismo tiempo el sentido de la corriente y el del campo magnético, las fuerzas no cambiarán de sentido.

Dispongamos ahora el contorno de manera que las líneas de fuerza del campo magnético sean paralelas al plano del contorno (fig. 202). Determinemos qué fuerzas  $\Delta f_1$  y  $\Delta f_2$  actúan sobre los elementos  $\Delta l_1$  y  $\Delta l_2$  del contorno comprendidos entre dos líneas paralelas de fuerza del campo. Según la regla de la mano izquierda, para los sentidos de la corriente y de la excitación magnética elegidos en el dibujo, sobre el elemento  $\Delta l_1$  actúa una fuerza perpendicular al plano del contorno y dirigida hacia el lector; y sobre el elemento  $\Delta l_2$  actúa una fuerza perpendicular al plano del contorno y en sentido opuesto al de la anterior. La magnitud  $\Delta f_1$  es

$$\Delta f_1 = I \Delta l_1 \sin \alpha H;$$

observando que  $\Delta l_1 \sin \alpha$  es igual a la distancia  $\Delta h$  entre las dos rectas que limitan los elementos  $\Delta l_1$  y  $\Delta l_2$ , escribiremos la ecuación anterior de la manera siguiente:

$$\Delta f_1 = IH \Delta h.$$

De la misma manera obtenemos que  $\Delta f_2 = IH \Delta h$ , de donde se deduce que las fuerzas  $\Delta f_1$  y  $\Delta f_2$  tienen el mismo valor numérico. Así pues, sobre los elementos  $\Delta l_1$  y  $\Delta l_2$  actúa un par de fuerzas, cuyo momento es  $\Delta M = \Delta f x = IH \Delta h x$ , donde  $x$  es la distancia media entre los elementos  $\Delta l_1$  y  $\Delta l_2$ . El producto  $\Delta h x$  es el área de la superficie  $\Delta S$  rayada de la fig. 202; por lo tanto, la expresión del momento  $\Delta M$  se puede escribir:

$$\Delta M = IH \Delta S.$$

Todo el contorno se puede dividir en pares de elementos análogos a los  $\Delta l_1$  y  $\Delta l_2$ , con lo cual por todo el contorno habrá pares de fuerzas aplicadas, cuyo momento será igual a la suma de los momentos de los pares de fuerzas aplicadas a los elementos. Este momento, claro está, será:

$$M = \sum \Delta M = IH \sum \Delta S,$$

de donde

$$M = IHS, \quad (1)$$

donde  $S$  es el área comprendida en todo el contorno.

Atendiendo a la dirección y sentido del par de fuerzas vemos que el plano del contorno, bajo la acción de este par, tiende a ponerse perpendicular a las líneas de fuerza del campo magnético y a

orientarse de manera que, mirando según las líneas de fuerza del campo, veamos fluir la corriente por el contorno según las agujas del reloj. Esto se puede formular de otra manera: el contorno recorrido por una corriente tiende a colocarse en el campo magnético de manera que el sentido de la excitación magnética creada por la corriente del contorno en su eje, sea paralela a la excitación magnética del campo exterior.

En el § 191 llamamos momento magnético del cuadro a la magnitud  $p_m$  proporcional al producto  $IS$ . En el sistema *CGSM* se considera que  $IS = p_m^*$ , con lo cual la ecuación (1) se transforma en

$$M = H \cdot p_m. \quad (1a)$$

El momento magnético  $p_m$  del contorno es una magnitud vectorial. La dirección y sentido de  $p_m$  se considera que coinciden con los respectivos de la normal positiva al contorno recorrido por la corriente (véase la fig. 177).

Veamos ahora un caso más general cuando el plano del contorno forma un ángulo cualquiera con la dirección de la excitación magnética. Convengamos, como antes, en caracterizar la posición del contorno por la de la normal  $N$  al plano del mismo, determinando el sentido de esta normal según la regla del sacacorchos: la normal estará dirigida en el mismo sentido del movimiento de traslación del sacacorchos al hacer girar su manilla según el sentido de la corriente del contorno. De lo dicho se deduce que el sentido de la normal al contorno coincide con la dirección del vector del momento magnético  $p_m$  del contorno.

Supongamos que la normal forma un ángulo  $\alpha$  con la dirección de la excitación magnética (fig. 203). Descompongamos el vector de excitación magnética  $H$  en dos componentes perpendiculares entre sí: una de ellas  $H_{\perp}$ , perpendicular al plano del contorno, y la otra,  $H_{\parallel}$ , que se halle en el plano del mismo; de donde

$$H_{\perp} = H \cos \alpha, \quad H_{\parallel} = H \sin \alpha.$$

Según lo arriba indicado, el momento de rotación lo crea solamente la componente de la excitación magnética que es paralela al plano del contorno; mientras que la componente normal solamente causa una extensión o una compresión del contorno. Por consiguiente, obtendremos el momento  $M$ , si en la fórmula (1), colocamos, en lugar de la excitación magnética  $H$ , su componente  $H_{\parallel}$ , de donde

$$M = IHS \sin \alpha. \quad (2)$$

---

\*) En el sistema *CGSE* se considera que  $p_m = \frac{1}{c^2} IS$ , con lo cual la fórmula (1a) es la misma para ambos sistemas (*CGSM* y *CGSE*).

De la fórmula (2) se ve que el momento  $M$  de rotación tiene el valor máximo cuando  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , es decir, cuando el plano del contorno es paralelo a las líneas de fuerza del campo magnético, y será igual a cero, cuando  $\alpha = 0$ , es decir, cuando el plano del contorno sea perpendicular al vector de excitación magnética.

Sustituyendo  $IS$  por el momento magnético  $p_m$ , escribiremos la ecuación (2) de la siguiente manera:

$$M = H p_m \sin \alpha. \quad (2a)$$

Si tomamos un conjunto de contornos de manera que formen un solenoide, para el momento del par que actúa sobre él, obtenemos esta misma expresión, en la cual el momento magnético del solenoide será  $p_m = NIS$ , donde  $N$  es el número de espiras del solenoide.

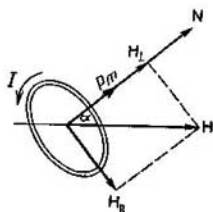


Fig. 203. Descomposición del vector de excitación magnética  $H$  en dos:  $H_{\perp}$  y  $H_{\parallel}$ .

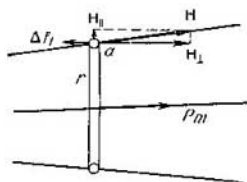


Fig. 204. Contorno con corriente en un campo magnético variable.

Utilizando el concepto de vector  $M$  del momento del par de fuerzas (§ 35, t. 1), la ecuación (2a) se puede escribir en forma vectorial:

$$M = [p_m \cdot H].$$

**2. Contorno cerrado con corriente en un campo magnético variable.** Para simplificar examinemos un contorno circular en un campo magnético variable, cuyas líneas de fuerza divergen en sentido radial. En la fig. 204 se representa la sección de este cuadro en el plano del dibujo. Supongamos que la dirección del momento magnético  $p_m$  del cuadro coincide con la de la excitación magnética  $H$  en el centro del cuadro. Consideremos que la dirección positiva va de izquierda a derecha. Examinemos la fuerza  $\Delta f$  con que actúa el campo magnético sobre el elemento  $\Delta l$  del cuadro. Elijamos el elemento  $\Delta l$  junto al punto  $\alpha$ , que será perpendicular al plano del dibujo. Descompongamos la excitación magnética  $H$  en dos:  $H_{\perp}$  perpendicular al plano del contorno, y  $H_{\parallel}$  paralela al plano del

contorno. La componente  $H_{\perp}$  creará una fuerza  $\Delta f_2$  dirigida hacia fuera del cuadro. El conjunto de todas estas fuerzas aplicadas a todos los elementos del cuadro, solamente lo deformará, pero no le comunicará ningún movimiento, ni de rotación ni de traslación. Por eso, estas fuerzas no nos interesan.

La componente  $H_{\parallel}$  de la excitación magnética, según la regla de la mano izquierda, originará la fuerza  $\Delta f_1$  dirigida perpendicularmente al plano del cuadro. Esta fuerza será

$$\Delta f_1 = -IH_{\parallel}\Delta l, \quad (3)$$

donde  $I$  es la intensidad de la corriente que fluye por el cuadro. El signo menos indica que la fuerza va dirigida hacia la izquierda. Llamemos  $\beta$  al ángulo que forma, cerca del punto  $a$ , la excitación magnética  $H$  con la normal al plano del cuadro. Entonces  $H_{\parallel} = H \operatorname{sen} \beta$ .

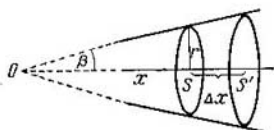


Fig. 205. Representación gráfica para calcular la fuerza que actúa sobre un contorno con corriente en un campo magnético variable.

Considerando que el ángulo  $\beta$  es muy pequeño, podemos suponer aproximadamente que  $H_{\parallel} = H\beta$ . Colocando este valor de  $H_{\parallel}$  en la (3), obtenemos que

$$\Delta f_1 = -IH\beta \cdot \Delta l.$$

Iguals fuerzas  $\Delta f_1$  estarán aplicadas a todos los demás elementos del cuadro. Como *tienen el mismo sentido*, la fuerza resultante  $f$  que actúa sobre todo el cuadro, será la suma algebraica de todas las  $\Delta f_1$ :

$$f = \sum \Delta f_1 = -IH\beta \cdot \sum \Delta l. \quad (4)$$

La suma de las longitudes de todos los elementos del cuadro será igual, naturalmente, a la longitud de todo el cuadro, es decir,

$$\sum \Delta l = 2\pi r,$$

donde  $r$  es el radio del cuadro.

Sustituyendo  $\sum \Delta l$  por su valor en la (4), para la fuerza  $f$  que actúa sobre el cuadro, nos da la expresión:

$$f = -2\pi r H I \beta. \quad (5)$$

Así pues, en un campo magnético variable, sobre el cuadro actúa una fuerza que tiende a desplazarlo.

Transformemos la ecuación (5) excluyendo de ella el ángulo  $\beta$ . Para ello veamos el número de líneas de fuerza del campo  $N$  que atraviesan el plano del cuadro (fig. 205). La excitación magnética  $H$  en el lugar donde se halla el cuadro, está relacionada con  $N$  aproximadamente según la siguiente igualdad:

$$H = \frac{N}{S}, \quad (6)$$

donde  $S = \pi r^2$  es el área del cuadro, y el valor del  $\cos \beta$  en la expresión del flujo se ha tomado igual aproximadamente a la unidad. Todas las líneas de fuerza del campo atravesarán la superficie  $S'$  que está a la distancia  $\Delta x$  a la derecha del cuadro. La excitación magnética  $H'$  en los puntos que están a la distancia  $\Delta x$  a la derecha del cuadro, será

$$H' = \frac{N}{S'},$$

y la variación de la excitación magnética  $\Delta H$  en el segmento  $\Delta x$  será

$$\Delta H = H' - H = \frac{N}{S'} - \frac{N}{S}.$$

Si  $\Delta x$  es pequeño,  $S'$  se diferenciará notablemente de  $S$ , y tendremos aproximadamente que

$$\Delta H = \frac{N(S - S')}{S^2}. \quad (7)$$

Prolonguemos mentalmente las líneas de fuerza hacia la izquierda hasta el lugar donde se cortan, es decir, hasta el punto  $O$ . Sea  $x$  la distancia del punto  $O$  hasta el cuadro. Entonces, considerando pequeño el ángulo  $\beta$ , tenemos que  $r = x\beta$ , de donde

$$S = \pi x^2 \beta^2, \quad S' = \pi (x + \Delta x)^2 \beta^2 \cong S \left( 1 + 2 \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Sustituyendo estos valores de  $S$  y  $S'$  en la (7) hallamos que

$$\Delta H = -2 \frac{N}{S} \frac{\Delta x}{x},$$

y, observando que, según la (6),  $\frac{N}{S} = H$  y  $x = \frac{r}{\beta}$ :

$$\Delta H = -2H \frac{\Delta x}{r} \beta, \quad \text{de donde } \beta = -\frac{1}{2} \frac{r}{H} \left( \frac{\Delta H}{\Delta x} \right).$$

Colocando en la (5) este valor de  $\beta$ , obtenemos para la fuerza  $f$

que actúa sobre el cuadro, el valor:

$$f = \pi r^2 I \left( \frac{\Delta H}{\Delta x} \right).$$

El producto  $\pi r^2 I = SI$  es el momento magnético del cuadro  $p_m$ , de donde

$$f = p_m \left( \frac{\Delta H}{\Delta x} \right). \quad (8)$$

La magnitud  $\Delta H/\Delta x$  caracteriza la variación del campo magnético e indica la rapidez con que varía la excitación magnética  $H$  de un punto a otro. Esta magnitud es el gradiente de la excitación magnética. De esta manera, según la (8), la fuerza  $f$  que actúa sobre el cuadro, es proporcional al momento magnético del mismo  $p_m$  y al gradiente de la excitación magnética ( $\Delta H/\Delta x$ ). Para el campo uniforme  $\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right) = 0$ , y sobre el cuadro no actúa ninguna fuerza resultante.

En el caso examinado (en que el momento magnético  $p_m$  tiene el mismo sentido que la excitación magnética), la fuerza  $f$  desplazará al cuadro hacia donde el campo sea más intenso. Si el momento magnético  $p_m$  estuviese dirigido en sentido contrario al de la excitación magnética  $H$ , el cuadro se desplazaría hacia donde el campo es más débil; pero en este último caso, la posición del cuadro sería inestable.

En el caso general de un cuadro orientado arbitrariamente en un campo magnético variable, sobre el cuadro actúa una fuerza  $f$  y un par de rotación de momento  $M$ ; por eso el cuadro, que puede girar y desplazarse libremente por el campo magnético variable, girará de manera que su momento magnético  $p_m$  se oriente según las líneas de fuerza del campo y, después, se desplazará atraído hacia la zona donde el campo es más intenso. Esto se puede demostrar fácilmente. Cerca del extremo de un largo solenoide fijo  $A$  (fig. 206) se coloca el cuadro  $B$  suspendido de dos conductores finos y largos. Sea como fuere la orientación primitiva del cuadro, éste girará primeramente de manera que la corriente que fluye por él lo haga en la misma dirección que en el solenoide, y después se desplazará hacia el solenoide.

La fórmula deducida (8) es fácil de generalizar al caso cuando el momento del cuadro  $p_m$  forme un ángulo  $\alpha$  con la dirección del gradiente de excitación magnética  $H$ ; entonces

$$f = p_m \left( \frac{\Delta H}{\Delta x} \right) \cos \alpha. \quad (8a)$$

Así tenemos que el cuadro recorrido por una corriente se comporta en un campo magnético exterior análogamente al dipolo

eléctrico en un campo eléctrico exterior: en un campo uniforme solamente actúa sobre él un momento de rotación, y en un campo variable, además de este momento, una fuerza proporcional al gradiente del campo.

**Ejemplo.** En el interior de un solenoide que tiene 10 espiras por cm y por el cual fluye una corriente de 10 A, se ha instalado un cuadro formado por un conductor con 5 espiras de área  $S=10 \text{ cm}^2$ . Con ayuda del resorte  $\alpha$  (fig. 207) el cuadro, si por él no pasó corriente, se mantiene paralelamente al eje del solenoide. ¿Qué ángulo  $\alpha$  con respecto al eje del solenoide girará el cuadro al hacerle pasar una corriente de 1 A, si para retorcer el resorte un ángulo  $\alpha$  se necesita un par de fuerzas de momento  $M=k\varphi$ , donde  $k=1 \text{ gf cm/rad}$ ?

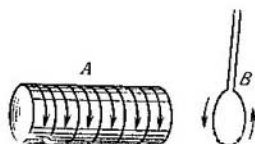


Fig. 206. Acción recíproca de un cuadro con corriente y un solenoide.

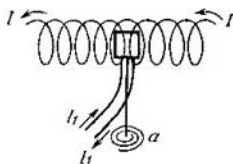


Fig. 207. Cuadro con corriente en el interior de un solenoide.

**Solución.** La excitación magnética  $H$  en el interior del solenoide, según la fórmula (4) del § 195, es

$$H = 4\pi In, \quad (9)$$

donde  $n$  es el número de espiras del solenoide por unidad de longitud e  $I$ , la intensidad de la corriente que lo recorre.

Considerando el cuadro como un conjunto de contornos superpuestos obtenemos, según la fórmula (2), que el momento de fuerzas resultante que actúa sobre él es

$$M = n_1 I_1 S_1 H \sin \alpha,$$

donde  $n_1$  es el número de espiras del cuadro;  $I_1$ , la intensidad de la corriente que fluye por el mismo, y  $S_1$ , su área. Sustituyendo en esta ecuación  $H$  por su valor según la (9), hallamos que

$$M = 4\pi n n_1 I I_1 S_1 \sin \alpha.$$

Este momento debe equilibrarse con el momento de torsión del resorte  $k\varphi$ , de donde

$$4\pi n n_1 I I_1 S_1 \sin \alpha = k\varphi.$$

Observando que  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$  y llamando  $b$  a la magnitud  $4\pi n n_1 I I_1 S_1$ , obtenemos que

$$b \cos \varphi = k\varphi, \text{ de donde } \frac{\cos \varphi}{\varphi} = \frac{k}{b}.$$

Suponiendo que  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ , obtenemos una ecuación cuadrada de  $\varphi$ :

$$\varphi^2 + 2 \frac{k}{b} \varphi - 2 = 0,$$

de donde

$$\varphi = -\frac{k}{b} \pm \sqrt{\frac{k^2}{b^2} + 2}.$$

Expresando  $I$  e  $I_1$  en unidades CGSM y  $k$  en  $\text{din} \cdot \text{cm}/\text{rad}$  obtenemos que

$$\frac{k}{b} = \frac{k}{4\pi n_1 I_1 S_1} = \frac{980}{4 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 0,1 \cdot 10} \approx 1,56,$$

de donde

$$\varphi = -1,56 \pm 2,11.$$

De los dos resultados hay que tomar el que nos dé

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ de donde } \varphi = 0,55 \text{ rad, ó } \varphi \approx 31^\circ.$$

§ 198. Circulación del vector de la excitación magnética. El campo magnético puede caracterizarse por ciertas relaciones generales que tienen gran valor práctico en el cálculo de los campos magnéticos.

Recordemos que en el § 129 hemos analizado la expresión de la circulación del vector de intensidad del campo eléctrico, y al analizar la fuerza electromotriz introdujimos el concepto de circulación del vector de intensidad de las fuerzas ajénas.

Análogamente introduciremos aquí la expresión de la circulación del vector de excitación magnética  $\mathbf{H}$ .

Sea un contorno cerrado  $L$  cualquiera. Llamemos  $H_t$  a la proyección del vector  $\mathbf{H}$  sobre la dirección del elemento  $\Delta l$  del contorno. Sumemos las expresiones  $H_t \Delta l$  de todos los elementos del contorno cerrado:

$$\sum H_t \Delta l$$

y llamemos a esta suma circulación del vector  $\mathbf{H}$  según el contorno  $L$ .

Se puede demostrar que, según la ley de Biot-Savart-Laplace, la circulación del vector  $\mathbf{H}$  por un contorno cerrado cualquiera es igual al producto de  $4\pi$  por la intensidad total de la corriente que atraviesa el contorno según el cual se toma la circulación:

$$\sum H_t \Delta l = 4\pi I. \quad (1)$$

El signo de la circulación se determina por el sentido en que se recorre el contorno: si el sentido del recorrido está relacionado con el de la corriente que lo recorre según la regla del sacacorchos, la circulación se tomará con el signo más, y viceversa, la circulación



se toma con el signo menos, si el sentido del recorrido del contorno al calcular la circulación, es contrario al que se considera positivo según la regla del sacacorchos. En la fig. 208 se indica el sentido del recorrido correspondiente a la circulación positiva.

Nosotros demostraremos la ecuación (1) solamente para el campo de la corriente que fluye por un conductor rectilíneo infinitamente largo.

Sea un contorno cualquiera  $L$  (fig. 209) que circunda a un conductor rectilíneo infinitamente largo, por el cual fluye una corriente de intensidad  $I$ . Demostremos primeramente que la circulación

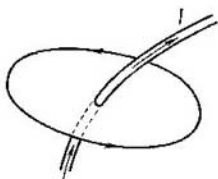


Fig. 208. Dirección y sentido de la corriente en la circulación positiva.

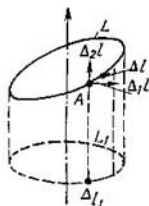


Fig. 209. Representación gráfica para calcular la circulación del vector de excitación magnética  $H$ .

por el contorno  $L$  es igual a la circulación por el contorno  $L_1$ , que es la proyección del contorno  $L$  sobre el plano perpendicular a la corriente. Efectivamente, el elemento  $\Delta l$  se puede considerar como la suma geométrica del elemento  $\Delta_1 l$  que está en el plano perpendicular a la corriente, y el elemento  $\Delta_2 l$  paralelo a la corriente:

$$\Delta l = \Delta_1 l + \Delta_2 l.$$

La excitación magnética de la corriente rectilínea en cada punto del contorno será

$$H = \frac{2I}{r}$$

y estará en el plano perpendicular a la corriente, además es perpendicular a  $r$ , que es la distancia desde el punto  $A$  hasta la corriente. Según el teorema de la proyección de la resultante, tenemos que

$$H_1 \Delta l = H \Delta_1 l \cos(H, \Delta_1 l) + H \Delta_2 l \cos(H, \Delta_2 l).$$

El segundo término de esta suma es igual a cero, ya que  $H$  es perpendicular a  $\Delta_2 l$ . Así pues, obtenemos que

$$H_1 \Delta l = H \Delta_1 l \cos(H, \Delta_1 l) = H_{11} \Delta l_1.$$

Pero  $\Delta l_1$  es la proyección del elemento  $\Delta l$  del contorno  $L$  sobre el plano perpendicular a la corriente, es decir,  $\Delta l_1$  es el elemento del contorno  $L_1$ , proyección del contorno  $L$  sobre el plano perpendicular a la corriente. De donde:

$$\sum H_i \Delta l = \sum H_{i1} \Delta l_1.$$

(según el contorno  $L$ ) (según el contorno  $L_1$ )

Por consiguiente, al demostrar la relación (1), en el caso general y sin limitaciones se puede suponer que el contorno se halla en el plano perpendicular a la corriente.

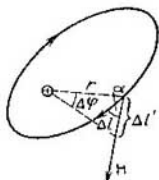


Fig. 210. Representación gráfica para calcular la circulación de  $H$  por un contorno cerrado que abarca a la corriente.

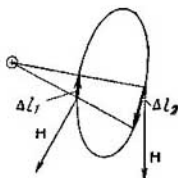


Fig. 211. Representación gráfica para calcular la circulación de  $H$  por un contorno cerrado que no abarca a la corriente.

En la fig. 210 se representa un contorno en el plano perpendicular a la corriente. En el dibujo se ve que

$$H_i \Delta l = H \Delta l \cos(H, \Delta l) = \frac{2l}{r} \Delta l \cos \alpha.$$

Pero  $\Delta l \cos \alpha$  es la proyección de  $\Delta l$  sobre la perpendicular a  $r$ , donde  $r$  es la distancia del punto que se examina, a la corriente. Debido a la pequeñez de  $\Delta l$  se puede suponer que

$$\Delta l \cos \alpha = r \Delta \varphi.$$

Para la circulación obtenemos que

$$\sum H_i \Delta l = 2I \sum \Delta \varphi = 4\pi I.$$

Así pues, tenemos que la circulación del vector de excitación magnética por un contorno cualquiera es igual al producto de  $4\pi$  por la intensidad de la corriente circundada por el contorno. Si el contorno no circunda a la corriente (fig. 211), como es fácil ver, se puede dividir en elementos pares  $\Delta l_1$  y  $\Delta l_2$  en que los elementos de

circulación sean de igual magnitud y de signo contrario:

$$H_1 \Delta l_1 = -\frac{2I}{r} r \Delta \varphi = -2I \Delta \varphi,$$

$$H_2 \Delta l_2 = \frac{2I}{r} r \Delta \varphi = 2I \Delta \varphi.$$

De esta manera tenemos que todos los miembros de la suma en la fórmula de la circulación se compensan a pares y como resultado nos da que la circulación del vector  $H$  según el contorno que no circunda a la corriente, es igual a cero:

$$\sum H_i \Delta l = 0.$$

Estos resultados se pueden generalizar aplicándolos a un campo de corriente cualquiera, pero esta generalización exige la aplicación de cálculos matemáticos más complicados.

En el análisis vectorial, el teorema de la circulación de la excitación magnética se expresa de la siguiente manera:

$$\oint H_i dl = 4\pi I,$$

donde la integral se extiende por todo el contorno que circunda a la corriente  $I$ .

§ 199. Aplicación de la fórmula de la circulación del vector de excitación magnética. El resultado del párrafo anterior es interesante por las consecuencias que se deducen del mismo. Así, por ejemplo, en muchos casos particulares nos permite hallar fácilmente la excitación magnética. Veamos unos cuantos ejemplos.

1. **Excitación magnética en el eje de un toroide.** Veamos el sistema formado de corrientes circulares de igual valor y sentido que envuelven una superficie toroidal común (fig. 182). Llamemos  $I$  a la intensidad de la corriente de las espiras;  $l$ , a la longitud del eje del toroide y  $N$ , al número total de espiras. Supongamos que la longitud  $l$  es grande en comparación con el radio de las circunferencias que describen las corrientes. Por las condiciones de simetría se puede deducir que la excitación magnética  $H$  en el eje del toroide es constante y va dirigida según el eje hacia el lado en que, mirando desde allí, veamos fluir la corriente del toroide según las agujas del reloj. Para calcular el valor numérico de la excitación  $H$  determinemos la circulación del vector  $H$  por el contorno que coincida con la línea media del toroide:

$$\sum H_i \Delta l = \sum H \Delta l = Hl = 4\pi I \quad (H_i = H). \quad (1)$$

Aquí se entiende que la corriente  $I$  es la total abarcada por el contorno. Está claro que esta corriente es igual a la suma de las corrientes que fluyen por todas las espiras del toroide:

$$I = NI,$$

y colocando este valor en la (1) nos da

$$Hl = 4\pi N \mathcal{J},$$

de donde hallamos el valor de  $H$ :

$$H = 4\pi \frac{N}{l} \mathcal{J} = 4\pi n \mathcal{J}, \quad (2)$$

donde  $n$  es el número de espiras por unidad de longitud del toroide.

Así, la excitación magnética  $H$  en el eje del toroide es proporcional al número de espiras por unidad de longitud del toroide y a la intensidad  $\mathcal{J}$  de la corriente de la espira. Si el radio del eje del toroide es infinitamente grande, el toroide se puede considerar equivalente a un solenoide infinitamente largo; por consiguiente, la fórmula (2) expresará al mismo tiempo la excitación magnética en el eje de un solenoide infinitamente largo (§ 194).

2. Campo magnético creado por una corriente que fluye por un conductor cilíndrico y rectilíneo infinitamente largo. Supongamos que por un conductor cilíndrico de radio  $R$  fluye una corriente de intensidad  $I$  uniformemente distribuida por la sección del conductor. Determinemos la excitación magnética  $H$  creada por la corriente en un punto que esté a la distancia  $r$  del eje. Consideremos primeramente que el punto  $A$  del que se quiere determinar la excitación magnética,

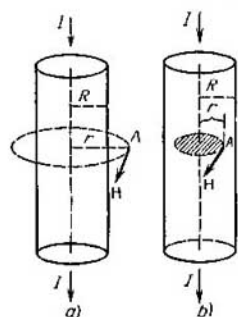


Fig. 212. Representación gráfica para determinar la excitación magnética del campo de una corriente que fluye por un conductor cilíndrico.

se halla fuera del conductor, es decir,  $r > R$ . Las condiciones de simetría nos permiten deducir que la excitación magnética  $H$  para todos los puntos que se hallan a la distancia  $r$  del eje, será la misma. Como la corriente total del conductor cilíndrico es la suma de las corrientes rectilíneas elementales, el vector de la excitación magnética  $H$  estará en el plano perpendicular al eje del conductor y su dirección será perpendicular a  $r$ .

Determinemos la circulación del vector  $H$  por una circunferencia de centro en el eje del cilindro y que este eje pase por el punto en que se determina la excitación magnética (véase la fig. 212). Como la excitación magnética  $H$ , siendo perpendicular a  $r$ , al mismo tiempo es paralela a los elementos de la circunferencia, la expresión de la circulación será

$$\sum H_i \Delta l = H \cdot 2\pi r = 4\pi I \quad (H_i = H). \quad (3)$$

Aquí, como antes,  $I$  es la corriente total abarcada por el contorno según el cual se toma la circulación. Para un punto que esté fuera de la corriente, la magnitud  $I$  de la fórmula (3) será la intensidad de la corriente que fluye por todo el conductor cilíndrico. Teniendo esto en cuenta obtenemos que

$$H \cdot 2\pi r = 4\pi I,$$

de donde para  $H$  hallamos la expresión:

$$H = \frac{2I}{r}.$$

Así tenemos que la excitación magnética creada por la corriente de un conductor cilíndrico en los puntos exteriores coincide con la excitación magnética de una corriente rectilínea de igual intensidad que fluye por el eje del cilindro dado.

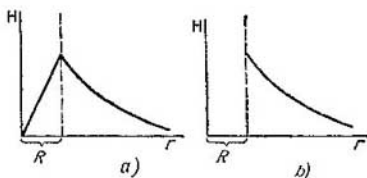


Fig. 213. Dependencia entre la excitación magnética  $H$  y la distancia hasta el eje del cilindro: a) para una corriente que fluye uniformemente por la sección del conductor, y b) para una corriente que fluye por la superficie del conductor.

Para los puntos que están en el interior del cilindro, el contorno según el cual se toma la circulación, abarca una parte solamente de la corriente. Llamando  $r$ , como antes, a la distancia desde el punto dado hasta el eje, vemos que la corriente que abarca el contorno en este caso es

$$I' = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2.$$

Colocando este valor en la fórmula (3) hallamos que

$$H = \frac{2Ir}{R^2}.$$

De aquí se ve que la excitación magnética aumenta a medida que el punto se aleja del eje de la corriente, y en el eje del cilindro, el campo magnético es igual a cero.

En la fig. 213 se representa la dependencia entre la excitación magnética y la distancia del punto al eje del cilindro.

Es fácil demostrar que si la corriente fluye solamente por una fina capa junto a la superficie del conductor, el campo magnético de fuera del conductor será el mismo, que si una corriente de la misma intensidad fluyese uniformemente por toda la sección del conductor. Pero en este caso, en el interior del conductor, la excitación magnética es igual a cero. Efectivamente, la circulación del vector  $\mathbf{H}$  en el interior de la cavidad del cilindro conductor, como en el caso anterior, es

$$\sum H_t \Delta l = H \cdot 2\pi r = 4\pi I.$$

No obstante, en este caso, el contorno de la circulación no abarca a la corriente, por lo cual el término de la derecha de la igualdad es igual a cero. De esto hallamos directamente que para los puntos interiores

$$H = 0.$$

La dependencia entre  $H$  y  $r$  en el caso de la corriente que fluye por la superficie de un conductor cilíndrico, viene representada en la fig. 213, *b*.

§ 200. **Cuerpos magnéticos.** Hasta ahora hemos examinado el campo magnético en el vacío, es decir, en un espacio en que no hay cantidades notables de átomos, electrones u otras partículas elementales de sustancia. Veamos ahora la influencia que ejerce sobre el campo magnético una sustancia capaz de influir sobre él, que denominaremos *sustancia (cuerpo) magnética*.

Recordemos antes que nada, la influencia ejercida por los dieléctricos sobre el campo electrostático. Bajo la acción de un campo electrostático, el dieléctrico adquiere un estado especial, que hemos denominado polarización. Debido a la polarización, en los límites del dieléctrico y en las zonas donde no es homogéneo, se crean cargas eléctricas (cargas "aparentes") con sus correspondientes densidades superficiales y volumétricas  $\sigma'$  y  $\rho'$ . Estas cargas crean su propio campo electrostático, que se suma al campo electrostático primitivo (campo de las cargas "libres").

Si la intensidad del campo electrostático primitivo era igual a  $E_0$ , y la del campo creado como resultado de la polarización del dieléctrico es igual a  $E'$ , la intensidad resultante del campo  $\mathbf{E}$  será igual a la suma vectorial de ambas:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'.$$

De esta misma manera, cualquier cuerpo magnético que se halle en un campo magnético de corrientes que fluyen por conductores, adquiere un estado especial y, como se dice, *se magnetiza*. En el estado de magnetización, el cuerpo magnético crea una excitación

magnética complementaria  $H'$  que se suma a la excitación magnética  $H_0$  del campo magnético creado por las corrientes que fluyen por los conductores. La suma vectorial de estas dos excitaciones magnéticas  $H_0 + H'$ , por analogía con las intensidades respectivas del campo eléctrico en los dieléctricos, habría que llamar intensidad del campo magnético en el cuerpo magnético. Sin embargo, por causas de carácter histórico, el vector

$$B = H_0 + H' \quad (1)$$

se ha denominado *vector de inducción magnética*. Así, *el vector de inducción magnética B es la excitación total magnética creada tanto por las corrientes macroscópicas (exteriores con respecto al medio), como por las microscópicas (creadas por las moléculas del medio)*.

La experiencia demuestra que en los cuerpos magnéticos uniformemente magnetizados que llenan por completo el espacio donde el campo es diferente de cero, la excitación magnética complementaria  $H'$  puede tener el mismo sentido que la excitación magnética primitiva  $H_0$  o el opuesto. Las sustancias en que  $H'$  tiene el mismo sentido que  $H_0$ , se denominan *paramagnéticas*, y aquellas en que  $H'$  va en sentido contrario a  $H_0$ , se denominan *diamagnéticas*. Recordemos que en los dieléctricos homogéneos que llenan por completo el espacio donde el campo es distinto de cero, la intensidad complementaria del campo  $E'$  siempre va dirigida en sentido contrario a la intensidad del campo de las cargas libres. Para todos los cuerpos diamagnéticos y para la mayoría de los paramagnéticos, la excitación magnética (imanación)  $H'$  es muy pequeña en comparación con la  $H_0$ . No obstante, hay un grupo de cuerpos, para los cuales  $H'$  puede ser grande en comparación con la  $H_0$ . Además, estos cuerpos se diferencian por una serie de otras particularidades. Estos cuerpos forman un grupo especial denominado grupo de cuerpos *ferromagnéticos* (entre ellos está el hierro). Sus propiedades las analizaremos después; por ahora nos limitaremos al examen de los cuerpos paramagnéticos y diamagnéticos corrientes.

Según la hipótesis enunciada por Ampere, en las moléculas de los cuerpos paramagnéticos hay corrientes circulares, denominadas *moleculares*. Si no hay campo magnético exterior, los ejes de estas corrientes se orientan arbitrariamente y el campo magnético creado por ellas, como término medio es igual a cero. Bajo la influencia de un campo magnético exterior, estas corrientes se orientan creando un campo magnético de excitación  $H'$  diferente de cero, que se suma a la excitación primitiva  $H_0$  del campo magnético. Así se explica el aumento de la excitación magnética total en las sustancias paramagnéticas. La magnetización de las sustancias paramagnéticas consiste en determinada orientación de sus corrientes moleculares.

En la actualidad se puede afirmar que las propiedades magnéticas de los cuerpos magnéticos no sólo son debidas a las corrientes moleculares, sino también a las propiedades magnéticas de las partículas elementales que forman parte de los átomos (electrones y núcleos). Como se explicará más abajo, las partículas elementales poseen un momento magnético independiente del carácter de su movimiento. Este momento magnético se puede poner de manifiesto al actuar el campo magnético sobre la partícula (compárese con lo dicho en el § 199); sin embargo no hay un modelo representativo que explique la existencia del momento magnético de las partículas elementales mediante cualquier movimiento de las cargas. Hay que tener en cuenta que una serie de propiedades de las partículas elementales tampoco tienen explicación basándonos en los conceptos de la mecánica clásica (véase el t. III).

Las propiedades fundamentales de los cuerpos magnéticos se pueden explicar cualitativamente basándonos en el concepto de Ampere de las corrientes moleculares.

En las moléculas de las sustancias diamagnéticas no hay corrientes circulares constantes (o en cada molécula hay varias corrientes circulares, cuyos momentos magnéticos se compensan mutuamente). Las corrientes circulares surgen en ellas (se inducen) solamente al excitarlas mediante un campo magnético exterior. Más adelante, en este mismo capítulo, veremos que la dirección y sentido de estas corrientes inducidas es tal, que el campo magnético creado por ellas va en sentido contrario al campo magnético exterior. Con ello se explica la disminución de la excitación magnética total en un medio diamagnético.

Corrientes inducidas de sentido contrario surgen también en las moléculas en que primeramente había corrientes circulares. Sin embargo, si estas corrientes primitivas eran suficientemente intensas, la corriente inducida sólo las debilita algo. Así, pues, el efecto diamagnético siempre existe, pero en las sustancias paramagnéticas siempre lo supera el efecto debido a la orientación de las corrientes primitivas. Desde el punto de vista de la electrónica, el surgimiento en las moléculas de corrientes inducidas de sentido contrario se explica por crearse en el campo magnético exterior la llamada precesión de Larmor (véase el § 214).

En electrostática (§ 143) hemos señalado las dificultades que surgían al intentar determinar la intensidad del campo del dieléctrico  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$  en función de la fuerza que actúa sobre un cuerpo macroscópico cargado. Vimos que, además de las fuerzas debidas a la intensidad del campo en el lugar en que se halla la carga (esta intensidad del campo no coincide con  $\mathbf{E}$ ), sobre el cuerpo cargado situado en el interior de un dieléctrico actúan otras fuerzas originadas por las acciones mecánicas de parte del dieléctrico polarizado.



Dificultades completamente análogas surgen al intentar determinar el vector de inducción magnética,  $\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$ , en un cuerpo magnético. Bajo la acción del campo magnético, en el cuerpo se producen cambios mecánicos (*estricción magnética*, véase el § 203), debido a los cuales, sobre un conductor con corriente colocado en un cuerpo magnético actúan fuerzas mecánicas complementarias. Pero si los conductores recorridos por corrientes se hallan en un *cuerpo magnético uniforme e infinito*, las fuerzas de acción recíproca entre ellos son de tal índole, cual si las determinara solamente la acción de la excitación magnética total  $\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$ .

Según la fórmula de Ampere, sobre un elemento del conductor  $\Delta l$  recorrido por una corriente y que se halla en el vacío, de parte de la excitación magnética  $H$  del campo exterior actúa una fuerza  $\Delta f$ :

$$\Delta f = I \cdot H \operatorname{sen} \alpha \cdot \Delta l, \quad (2)$$

donde  $I$  es la intensidad de la corriente y  $\alpha$ , el ángulo entre la dirección de la excitación magnética y la del movimiento de las cargas positivas en el conductor.

Si el cuerpo magnético es homogéneo e infinito, según lo dicho, obtenemos la fuerza  $\Delta f$  sustituyendo en la fórmula (2), la excitación magnética  $H$  por la inducción magnética  $B$ :

$$\Delta f = IB \operatorname{sen} \alpha \cdot \Delta l. \quad (2a)$$

Así, si tenemos un cuerpo magnético infinito, consideramos que *la acción del campo magnético sobre la corriente viene determinada por el vector de inducción magnética  $\mathbf{B}$* .

Como, según lo dicho, la inducción magnética  $\mathbf{B}$  es la suma de las excitaciones  $\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$ , se debería medir en las mismas unidades que  $\mathbf{H}_0$ , es decir, en el sistema *CGSM* en oerstedios. No obstante en el sistema *CGSM* se ha convenido en dar un nombre especial a la unidad de inducción magnética: gaussio. En la realidad, el gaussio coincide con el oerstedio. En el § 195 se señaló que la fórmula (2) era justa en el sistema *CGSM*, es decir, si la intensidad  $I$  de la corriente se medía en unidades *CGSM* de intensidad de la corriente;  $H$ , en oerstedios;  $\Delta l$ , en centímetros, y  $\Delta f$ , en dinas. La fórmula (2a) también es justa en el sistema *CGSM*, es decir, si medimos  $I$  en unidades *CGSM* de intensidad de la corriente y  $B$ , en gaussios.

La fórmula (2a) nos permite determinar en principio el valor del vector de inducción magnética  $\mathbf{B}$  en cada uno de los puntos del campo en función de la fuerza  $\Delta f$  que actúa sobre el elemento del conductor. Está claro que este conductor debe ser lo suficiente fino para que el campo, dentro de los límites de su dimensión, se pueda considerar uniforme y su introducción no debe variar ni la magnitud ni la configuración de las corrientes que originan el campo, ni debe causar

ninguna magnetización complementaria del cuerpo magnético. Todas estas exigencias, sobre todo en el caso de un cuerpo magnético sólido, prácticamente son imposibles de satisfacer. Por ejemplo, para determinar la acción de las fuerzas magnéticas sobre el cuadro recorrido por una corriente y situado en un cuerpo magnético sólido, hay que hacer una cavidad en el cuerpo magnético.

Como en el caso correspondiente de electrostática, la acción sobre el cuadro dependerá de la forma de esta cavidad. Sobre la posibilidad de determinar el vector  $B$  se hablará con más detalle en el § 207.

§ 201. Momentos magnéticos de las moléculas, átomos y electrones. La hipótesis de Ampere sobre la existencia de corrientes moleculares corresponde a los conceptos contemporáneos de la estructura de los átomos y moléculas. Se ha indicado varias veces que el átomo es un complejo sistema eléctrico y que los electrones son partes integrantes del mismo. Según el modelo propuesto por Rutherford, el átomo consta de un pesado núcleo cargado positivamente y de electrones que giran a su alrededor por determinadas órbitas. El electrón que gira por una órbita cerrada se asemeja a la corriente que fluye por un circuito cerrado. El electrón crea un campo magnético y el campo magnético exterior influye en él orientándolo.

Para simplificar supongamos que el electrón gira según una órbita circular de radio  $r$ . Su momento mecánico de cantidad de movimiento  $P$  (momentum) es

$$P = mvr, \quad (1)$$

donde  $m$  es la masa del electrón y  $v$ , su velocidad. Al mismo tiempo, por ser semejante a la corriente, tiene un momento magnético  $\rho_m$ . Determinemos este momento magnético. Si mentalmente hacemos un corte de la órbita, en cada vuelta el electrón transportará por la sección de este corte una carga  $e$  igual a la carga del mismo electrón. Por unidad de tiempo se habrá transportado una carga  $ne$ , donde  $n$  es el número de vueltas del electrón por unidad de tiempo según su órbita.

Como la intensidad de la corriente  $I$  numéricamente es igual a la carga transportada por unidad de tiempo, el electrón girando por la órbita equivale a una corriente de intensidad

$$I = ne.$$

El número de vueltas es  $n = \frac{v}{2\pi r}$ , de donde

$$I = \frac{v}{2\pi r} e.$$

Según lo arriba indicado, el momento magnético  $p_m$  del contorno recorrido por una corriente de intensidad  $I$  es igual a  $IS$ , donde  $S$  es la superficie del contorno.

De aquí que el momento magnético del electrón que gira según una órbita cerrada de radio  $r$ , sea

$$p_m = IS = \frac{v}{2\pi r} e \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} v r e. \quad (2)$$

Comparando las ecuaciones (1) y (2), tenemos que

$$p_m = \frac{1}{2} \frac{e}{m} P, \quad (3)$$

es decir, los momentos magnéticos  $p_m$  y mecánico  $P$  del electrón que se desplaza según una órbita cerrada, están directamente relacionados. La fórmula (3) corresponde al sistema electromagnético de unidades. Si utilizásemos un sistema mixto, a saber, midiendo el momento magnético  $p_m$  en unidades CGSM, y la relación de la carga del electrón a su masa  $e/m$ , en unidades CGSE, como generalmente se hace, habría que introducir en el término de la derecha el coeficiente  $\frac{1}{c} = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}}$  seg/cm, de donde

$$p_m = \frac{1}{2c} \cdot \frac{e}{m} \cdot P. \quad (3a)$$

Si en el átomo o en la molécula hay varios electrones que se desplazan por órbitas diferentes, los momentos mecánicos  $P_i$  de los distintos electrones se suman vectorialmente en un momento resultante  $P$ ; lo mismo ocurre con los momentos magnéticos  $p_{mi}$  de los distintos electrones, cuyo momento magnético  $p_m$  resultante es la suma vectorial del de los distintos electrones del átomo o de la molécula.

Einstein —de Haas en 1915 demostraron experimentalmente que en el interior de la sustancia paramagnética existían corrientes moleculares relacionadas con determinados momentos magnéticos y mecánicos. Al magnetizar una barra de sustancia paramagnética introduciéndola en un campo magnético exterior, las moléculas con su momento magnético giran orientándose según el campo, lo cual acarrea un cambio de dirección de sus momentos mecánicos  $P$ . Como el momento mecánico total de la cantidad de movimiento permanece invariable, la barra debe adquirir un momento de cantidad de movimiento de sentido contrario, es decir, debe girar. Este fenómeno es completamente análogo al descrito en el t. 1, donde se decía que un hombre de pie sobre un taburete que pueda girar, al comunicar un movimiento de rotación al eje de una rueda que sostiene en las manos, el mismo hombre empieza a girar.

En el experimento de Einstein —de Haas, la barra de hierro se suspendía de un hilo fino y se introducía en un solenoide vertical según el eje (fig. 214). Al cambiar el sentido de la corriente del solenoide, la barra se magnetizaba en otro sentido y adquiría con ello una impulsión angular. Su giro se observaba por un haz de luz que se reflejaba en el espejo *a* fijo en el hilo. Para aumentar el ángulo de desviación se aplicó el principio de resonancia, en que la corriente del solenoide cambiaba de sentido con un período igual al de las propias oscilaciones de la barra suspendida del hilo.

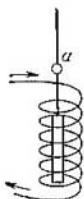


Fig. 214. Esquema del experimento de Einstein-de Haas.

La dirección del giro de la barra correspondía al signo negativo de la carga del electrón. Utilizando la fórmula (3) y midiendo la relación entre los momentos magnético y mecánico, se puede determinar la relación entre la carga y la masa del electrón.

Sin embargo, los resultados de las mediciones de  $e/m$  dieron valores distintos de los obtenidos por otros métodos. Las causas de esta discrepancia se indicarán al final de este párrafo.

Hay otro efecto que es contrario al que acabamos de describir (efecto determinado por el método de Barnett).

Al girar una barra de sustancia paramagnética, los ejes de todas sus corrientes moleculares deben tender a orientarse paralelamente al eje de giro de la barra. Este efecto es completamente análogo al efecto giroscópico observado en mecánica, según el cual, si se coloca una peonza en una plataforma que gira, el eje de la peonza tiende a orientarse paralelamente al de la plataforma. Como resultado del giro de la barra, ésta debe magnetizarse. Efectivamente, se ha conseguido observar una magnetización de la barra de hierro al hacerla girar rápidamente. Así pues, también se ha confirmado cualitativamente este fenómeno; en lo que se refiere al aspecto cuantitativo, estos experimentos, lo mismo que los de Einstein-de Haas, han dado valores de  $e/m$  diferentes a los obtenidos por otros métodos.

En 1917, A. Ioffe y P. Kapitsa también demostraron que en el interior de una sustancia paramagnética existían corrientes moleculares relacionadas con los momentos magnético y mecánico mediante otro experimento. Para ello aprovecharon el hecho de que el llamado magnetismo remanente de los imanes permanentes desaparece al calentarlos (§ 204). Se suspendía de un hilo fino una barra de níquel magnetizada. Al calentarla se creaba una distribución desordenada de los momentos magnéticos de las moléculas en distintas direcciones y el momento mecánico total era igual a cero.

Pero debido al principio de la conservación del momento de la cantidad de movimiento, la barra giraba.

Stern y Gerlach realizaron la medición directa de los momentos magnéticos de los átomos y de las moléculas. La idea de los experimentos de Stern y Gerlach se basa en que en un campo magnético variable exterior, sobre una partícula con momento magnético actúa una fuerza de desplazamiento (véase el § 197). Un haz atómico  $aa'$

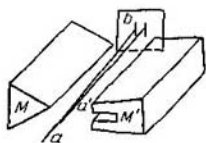


Fig. 215. Esquema del experimento de Stern y Gerlach.

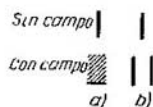


Fig. 216. a) Dispersión esperada del haz atómico en un campo magnético, b) dispersión observada del haz atómico de la plata en el campo magnético.

(fig. 215) obtenido en un alto grado de vacío se lanzaba entre los dos polos  $MM'$  de un electroimán hechos de tal forma que el campo magnético era altamente variable en la dirección perpendicular a la del haz atómico. Al chocar con la placa  $b$ , el haz dejaba en ella una huella en forma de una estrecha franja. La fuerza que actúa sobre el átomo de momento magnético  $p_m$  (véase la pág. 332), es

$$\Delta f = p_m \left( \frac{\Delta H}{\Delta x} \right) \cos \alpha,$$

donde  $(\Delta H/\Delta x)$  es el gradiente de la excitación magnética. De esta manera tenemos que el valor de la fuerza  $\Delta f$  depende del momento magnético del átomo  $p_m$ , del grado de variación del campo magnético y del ángulo  $\alpha$  que forma la dirección del momento  $p_m$  con la dirección del gradiente de la excitación magnética. Podría esperarse que debido al movimiento térmico, los momentos magnéticos de los átomos deberían desplazarse en todas direcciones, con lo cual distintos átomos deberían sufrir diferentes desviaciones y el haz atómico, al pasar a través de un campo magnético variable, se tendría que dispersar (véase la fig. 216, a). En la realidad, los experimentos de Stern y Gerlach dieron otro resultado: *el haz atómico se dividía en varios haces marcadamente señalados*. En el caso de la plata, lo mismo que en el del sodio, potasio y otros metales alcalinos, se descompone en dos haces simétricos (véase la fig. 216, b); los átomos del vanadio han revelado una descomposición del haz en cuatro

haces independientes; los átomos del manganeso, en seis; los del hierro, en nueve. Los haces del mercurio, magnesio y algunos otros no se descomponen en absoluto, lo cual demuestra que los átomos de estos elementos no tienen momentos magnéticos.

La descomposición del haz atómico en haces independientes marcadamente señalados indica que los momentos magnéticos de los átomos en el campo magnético exterior no están orientados de cualquier manera, sino según ángulos determinados con respecto a la dirección del campo magnético. Por ejemplo, los átomos de sodio pueden orientarse de dos maneras, bien su momento magnético tiene el mismo sentido que el campo, bien el contrario; los átomos de vanadio se orientan de cuatro maneras respecto al campo, etc. Esto se explica en la mecánica cuántica (véase el t. III).

Las mediciones de estas desviaciones indican que la proyección de los momentos magnéticos de todos los átomos son fracciones racionales de un momento magnético  $p_0$  completamente determinado:

$$p_m = \frac{q}{r} p_0,$$

donde  $q$  y  $r$  son números enteros. El momento magnético  $p_0$  se denomina *magnetón de Bohr* y su valor es

$$p_0 = 0,9272 \cdot 10^{-20} \text{ erg/gausios}^{*1}.$$

El valor máximo de las proyecciones de los momentos magnéticos de algunos átomos se da en la tabla XV.

El análisis de estos experimentos, lo mismo que el carácter de la estructura de los espectros atómicos (véase el t. III), nos demuestra que cada electrón posee un momento magnético determinado. De esto, naturalmente, dentro de los límites de la electrodinámica clásica surgió la hipótesis de que el electrón gira continuamente alrededor del eje que pasa por su centro. Este giro releva la existencia en el electrón de un constante momento mecánico de cantidad de movimiento  $P_e$  (denominado *spin*, de esta palabra inglesa que significa "giro, rotación") y del momento magnético  $p_m$  constante

\*1 La medición de los momentos magnéticos en unidades erg/gausios se desprende de lo siguiente: el momento de fuerzas  $M$  que actúa sobre un contorno con corriente, es  $M = p_m B \text{ sen } \alpha$ , donde  $p_m$  es el momento magnético de la corriente y  $B$ , la inducción magnética del campo. De aquí que

$$p_m = \frac{M}{B \text{ sen } \alpha}.$$

Como  $M$  se mide en  $\text{din} \cdot \text{cm}$ , y  $B$  en gausios, la unidad de medición de  $p_m$  se escribe  $\frac{\text{din} \cdot \text{cm}}{\text{gausios}}$ , pero  $\text{din} \cdot \text{cm}$  coincide con el ergio, de donde la unidad de medición del  $p_m$  adquiere la notación de erg/gausios.

Tabla XV  
Valores máximos de las proyecciones de  
los momentos magnéticos de los átomos  
(en fracciones de magnetón de Bohr)

Atomo	$P_m$ máx
Hidrógeno . . . . .	1
Sodio . . . . .	1
Vanadio . . . . .	3/5
Cromo . . . . .	6
Hierro . . . . .	6
Indio . . . . .	1/3

relacionado con él, que es igual a un magnetón de Bohr. No obstante, ésta al parecer patente hipótesis resultó demasiado simplificada y fue sustituida por los conceptos generales de la mecánica cuántica sobre las propiedades del electrón. En este caso, para concordar los resultados de la teoría con los de los experimentos se ha tenido que suponer que entre los momentos magnético y mecánico del electrón tiene lugar la siguiente relación:

$$p_m = \frac{e}{m} P_e, \quad (4)$$

es decir, que la relación  $p_m/P_e$  para los propios momentos del electrón es dos veces mayor que la de los momentos orbitales magnético y mecánico del electrón, cuya relación viene determinada por la igualdad (3).

El momento magnético total del átomo (o de la molécula) es la suma de los momentos magnéticos debidos al movimiento de los electrones por las órbitas cerradas, y de los propios momentos magnéticos de los electrones  $p_m$ . En este caso hay que tener en cuenta que en el interior del átomo, según las leyes de la mecánica cuántica, los momentos magnéticos de las distintas órbitas electrónicas y de los mismos electrones se orientan unos respecto a los otros formando ángulos determinados. La relación entre los momentos resultantes mecánicos y magnéticos es mucho más compleja que la representada en la fórmula (3), lo cual explica la aparente contradicción en los resultados de los experimentos de Einstein-de Haas con la teoría.

§ 202. Vector de imanación. Se ha convenido en caracterizar el grado de imanación de un medio con un vector denominado *vector de imanación*, que es igual al momento magnético de la unidad de

volumen del medio. Llamemos  $\sum \mathbf{p}_i$  a la suma geométrica de los momentos magnéticos de las moléculas que hay en el volumen  $\Delta V$  de un cuerpo magnético. Entonces, el vector de imanación  $\mathbf{P}$  de un cuerpo magnético imantado uniformemente vendrá determinado por la igualdad:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}. \quad (1)$$

Si el cuerpo magnético no está uniformemente imantado, el vector de imanación  $\mathbf{P}$  tiene distintos valores en diferentes volúmenes; en este caso, por imanación en el punto dado se entiende el límite a que tiende la expresión (1) al disminuir indefinidamente el volumen  $\Delta V$  \*):

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V} \right). \quad (2)$$

Como hemos visto, la excitación magnética en el interior de un cuerpo magnético es la suma de la excitación magnética  $\mathbf{H}_0$  de las corrientes exteriores dadas (campo magnetizador) y de la excitación magnética  $\mathbf{H}'$  creada por las moléculas de la sustancia magnetizada. La excitación resultante

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}' \quad (3)$$

la hemos llamado *inducción magnética*.

En el caso de un cuerpo magnético uniforme que llena por completo el espacio donde el campo es distinto de cero, la excitación  $\mathbf{H}'$  magnética creada por las moléculas es fácil relacionarla con el vector de imanación  $\mathbf{P}$ . Nosotros estableceremos esta relación utilizando un simple caso particular. Sea un solenoide infinitamente largo, cuyo interior lo llena un cuerpo magnético cilíndrico y uniforme. Al pasar una corriente por el solenoide, el cuerpo magnético se magnetiza uniformemente. Consideraremos que la magnetización es debida a que hay corrientes moleculares ordenadas. Los planos de estas corrientes moleculares son perpendiculares al vector de imanación, que es paralelo al eje del cilindro (fig. 217). Al examinar las corrientes moleculares en una sección del cilindro vemos que en el interior del cilindro cerca de cada punto de la sección fluyen dos corrientes de sentido contrario. Estas corrientes crean campos magnéticos de sentido contrario que se compensan mutuamente. So-

\* Aquí, como en otros problemas físicos análogos, la disminución indefinida del volumen  $\Delta V$  es un concepto convencional: al pasar al límite, el volumen  $\Delta V$  se toma lo suficientemente pequeño para que la propiedad física dada (por ejemplo, la imanación) permanezca constante dentro de sus límites; pero el volumen debe seguir siendo grande en comparación con el volumen de una molécula.



lamente quedan sin compensar los campos creados por las corrientes que fluyen por la superficie exterior del cilindro. Estas corrientes son semejantes a la del solenoide, por eso crean en el interior del cilindro un campo magnético de excitación  $H'$  que se puede calcular utilizando la fórmula (4) del § 195.

Llamando  $I_0$  a la corriente correspondiente a la unidad de longitud del cilindro, tendremos que  $I_0$  será igual al producto de la intensidad de la corriente por el número  $n$  de espiras que hay en esta unidad de longitud, de donde

$$H' = 4\pi I_0. \quad (4)$$

Es fácil establecer la relación entre  $I_0$  y el vector de imanación. El vector de imanación numéricamente es igual al momento magnético de la unidad de volumen. Llamando  $S$  al área de la sección del cilindro, tenemos que el volumen de un trozo del cilindro de longitud  $l$  es igual a  $Sl$ . Por consiguiente, obtendremos el valor del vector de imanación  $P$ , si dividimos el momento magnético del trozo del cilindro, que es  $I_0Sl$ , por el volumen  $Sl$ , es decir,

$$P = \frac{I_0Sl}{Sl} = I_0. \quad (5)$$

Así pues, el vector de imanación  $P$  numéricamente es igual a la intensidad de la corriente molecular por unidad de longitud. La dirección del vector de imanación  $P$  coincide con la de la excitación magnética  $H'$ . De aquí comparando las fórmulas (4) y (5), obtenemos que

$$H' = 4\pi P. \quad (6)$$

Colocando este valor de  $H'$  en la expresión (3) de la inducción magnética  $B$ , nos da que

$$B = H_0 + 4\pi P. \quad (7)$$

Para los cuerpos no ferromagnéticos, el vector de imanación  $P$  se puede considerar *proporcional a la excitación magnética  $H_0$  de las corrientes exteriores dadas (campo magnetizador)*:

$$P = \kappa H_0. \quad (8)$$

La magnitud  $\kappa$  que caracteriza al cuerpo magnético dado, se denomina *susceptibilidad magnética*.

Para las sustancias paramagnéticas, el vector de imanación  $P$  va en el mismo sentido que el  $H_0$  (para estas sustancias  $B > H_0$ ) y,

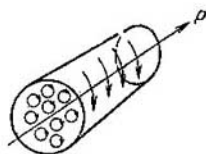


Fig. 217. Suma de corrientes moleculares en un medio magnetizado.

por consiguiente,  $\kappa$  tiene valor positivo. Para las sustancias diamagnéticas, los vectores  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{H}_0$  van en sentido contrario (en ellas  $B < H_0$ ) y  $\kappa$  es negativa.

Sustituyendo  $\mathbf{P}$  por su valor en función de  $\mathbf{H}_0$ , según la (8), en la fórmula (7), obtenemos que

$$\mathbf{B} = (1 + 4\pi\kappa) \mathbf{H}_0. \quad (9)$$

El factor constante  $1 + 4\pi\kappa$  se ha convenido designar con una sola letra  $\mu$ :

$$1 + 4\pi\kappa = \mu \quad (10)$$

y denominarlo *permeabilidad magnética del medio*. Para los medios paramagnéticos tenemos que  $\mu > 1$ , para los diamagnéticos,  $\mu < 1$ , para el vacío,  $\mu = 1$ .

Colocando en la fórmula (9) la permeabilidad magnética  $\mu$  en lugar de  $1 + 4\pi\kappa$ , obtenemos que

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}_0. \quad (9a)$$

Las fórmulas (6), (7), (8), (9) y (9a) solamente son justas para el caso de un cuerpo magnético uniforme que llene completamente el espacio donde el campo magnético es diferente de cero. Para un cuerpo magnético cualquiera, no se puede dar una fórmula general de la excitación  $\mathbf{H}'$ . En cada caso concreto se calcula  $\mathbf{H}'$  teniendo en cuenta todas las corrientes moleculares.

Veamos el caso de un cuerpo magnético cualquiera (es decir, de un cuerpo magnético heterogéneo o de pedazos independientes de cuerpos magnéticos uniformes). En cada uno de los puntos de un medio de esta clase, la susceptibilidad magnética  $\kappa$ , y con ella la permeabilidad magnética  $\mu$  [fórmula (10)], tienen un valor determinado. No nos detendremos por ahora en el modo de medir el vector  $\mathbf{B}$  y lo consideraremos conocido.

Introduzcamos el vector  $\mathbf{H}$  determinado en el punto dado por la ecuación.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad (11)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio en el punto dado. El vector  $\mathbf{H}$  lo llamaremos *vector de excitación magnética en el cuerpo magnético dado*.

Si el cuerpo magnético es uniforme y llena por completo todo el espacio donde el campo es distinto de cero, se satisfacen las condiciones de las fórmulas (11) y (9a).

Comparando estas dos fórmulas se deduce que *en un cuerpo magnético uniforme que llena por completo el espacio donde el campo es distinto de cero, la excitación magnética  $\mathbf{H}$  coincide con la excitación magnética  $\mathbf{H}_0$  creada por las corrientes dadas (magnetizadoras)*.

Para un cuerpo magnético cualquiera, el vector de excitación magnética  $\mathbf{H}$  puede no coincidir con el vector  $\mathbf{H}_0$  (véase el § 203).

Para un cuerpo no ferromagnético cualquiera, el vector de imanación  $\mathbf{P}$  se puede considerar proporcional a la excitación magnética  $\mathbf{H}$  \*):

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{H}, \quad (12)$$

donde  $\kappa$  es la susceptibilidad magnética en el punto dado.

De las fórmulas (10), (11) y (12) se deduce que

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{P}. \quad (13)$$

En el caso particular de un cuerpo magnético uniforme que llena completamente el espacio donde el campo es distinto de cero, tenemos que  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ , y las fórmulas (11), (12) y (13) se transforman en las fórmulas (9a), (8) y (7) respectivamente.

Según lo dicho en el § 200, el vector  $\mathbf{B}$  determina la fuerza de acción recíproca de las corrientes cuando hay cuerpos magnéticos. Esto nos permite determinar en principio la permeabilidad magnética en función de la variación de las fuerzas de acción recíproca entre las corrientes. Sin embargo, este método prácticamente es inaplicable, ya que  $\mu$  se diferencia poco de la unidad, por lo tanto la indicada variación de las fuerzas de acción recíproca entre las corrientes es muy pequeña. Por eso se determina  $\mu$  de manera indirecta en función del momento magnético de un cuerpo magnético de forma determinada.

Una pequeña esfera de la sustancia a analizar se introduce en un intenso campo magnético variable, cuya excitación magnética  $H_0$  y gradiente  $\Delta H_0 / \Delta x$  se conocen. Bajo la acción del campo, la esfera se magnetiza. Si  $P_m$  es su momento magnético, la esfera, lo mismo que en el caso del contorno con corriente (véase el § 197, punto 2), sufrirá la acción de la fuerza

$$f = P_m \left( \frac{\Delta H_0}{\Delta x} \right), \quad (14)$$

proporcional al gradiente del campo.

\*) Sería más lógico (por analogía con la electrostática) suponer que el vector de imanación  $\mathbf{P}$  es proporcional al vector resultante de excitación magnética, es decir, al vector de inducción magnética  $\mathbf{B}$ . No obstante, por causas históricas, se ha convenido en utilizar la ecuación (12).

De hecho, entre estos dos puntos de vista no hay ninguna diferencia en principio, ya que los vectores  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$ , según la (11), son proporcionales mutuamente. Esta disyunción histórica de la forma de las correspondientes fórmulas de electrostática, conduce solamente a que resulten análogas las magnitudes  $\epsilon$  y  $\frac{1}{\mu}$ , en vez de  $\epsilon$  y  $\mu$  como resultaría, si en lugar de la (11) se escribiese:  $\mathbf{H} = \mu \mathbf{B}$ ; y  $\kappa_e$  y  $\kappa_m / \mu$ , en vez de  $\kappa_e$  y  $\kappa_m$  [como si en lugar de la (12) se escribiese:  $\mathbf{P} = \kappa \mathbf{B}$ ], (véase el § 207).

El momento magnético de la esfera  $P_m$  puede estar relacionado con el vector de imanación  $\mathbf{P}$ . Aproximadamente, dentro de los límites de la esfera, la excitación magnética  $\mathbf{H}_0$  se puede considerar constante; por lo tanto (como se puede demostrar para la esfera y para un elipsoide) será también constante el vector de imanación  $\mathbf{P}$ , igual al momento magnético por unidad de volumen. Por consiguiente,

$$P_m = \frac{4}{3} \pi r^3 P, \quad (15)$$

donde  $r$  es el radio de la esfera. En una esfera paramagnética, el momento magnético  $P_m$  va dirigido según el campo; en una esfera diamagnética,  $P_m$  va en sentido contrario al campo. Por eso, la esfera paramagnética será atraída hacia la zona donde la excitación sea mayor, y la diamagnética, repelida hacia donde la excitación sea más débil.

Sustituyendo  $P_m$  en la fórmula (14) por su valor según la (15) y expresando el vector de imanación  $\mathbf{P}$  en función de la excitación magnética  $\mathbf{H}$  en la esfera [según la (12)], obtenemos que

$$f = \frac{4}{3} \pi r^3 \kappa H \left( \frac{\Delta H_0}{\Delta x} \right). \quad (16)$$

El correspondiente cálculo demuestra que para la esfera

$$H = \frac{3}{2 + \mu} H_0.$$

Como para todos los cuerpos diamagnéticos y paramagnéticos el valor de  $\mu$  se diferencia muy poco de la unidad, con gran aproximación se puede considerar que  $H = H_0$ , y en lugar de la fórmula (16) se puede escribir:

$$f = \frac{4}{3} \pi r^3 \kappa H_0 \left( \frac{\Delta H_0}{\Delta x} \right). \quad (17)$$

La fórmula (17) nos permite determinar  $\kappa$  en función de la fuerza que actúa sobre la esfera.

Para determinar la susceptibilidad magnética  $\kappa$  y la permeabilidad magnética  $\mu$ , en lugar de una esfera se utiliza también un elipsoide alargado de revolución. El momento magnético del elipsoide se puede calcular teóricamente. Un elipsoide de esta clase, en un campo magnético exterior y uniforme sufre la acción de un momento  $M$  de fuerzas que lo hacen girar y orientarse a lo largo de las líneas de fuerza del campo.

Los valores de la permeabilidad magnética de una serie de sustancias para- y diamagnéticas se da en la tabla XVI.

Tabla XVI

Valores de la permeabilidad magnética  
(los gases se toman a la presión atmosférica)

Sustancias paramagnéticas		Sustancias diamagnéticas	
sustancia	$(\mu-1) \cdot 10^6$	sustancia	$(1-\mu) \cdot 10^6$
Nitrógeno	0,013	Hidrógeno	0,063
Oxígeno	1,9	Cobre	8,8
Aluminio	23	Sal gema	12,6
Platino	360	Bismuto	176

§ 203. Ferromagnetismo. Como se ha indicado en el § 200, algunas sustancias paramagnéticas tienen la propiedad de crear una excitación complementaria  $H'$  muy grande, por consiguiente se caracterizan por su gran permeabilidad magnética  $\mu$ . Estas sustancias se denominan *ferromagnéticas*. Entre éstas tenemos el hierro, el níquel, el cobalto, el gadolinio y sus aleaciones (por ejemplo, la de Fe-Ni, Fe-Ni-Al, etc.) y algunas aleaciones de sustancias no ferromagnéticas, como la aleación de 61,5% de Cu, 23,5% de Mn y 15% de Al, la de manganeso con el bismuto, la del cromo con telurio, etc.

La particularidad de las sustancias ferromagnéticas no se reduce a tener un gran valor de  $\mu$ , sino también en lo siguiente: 1) las sustancias ferromagnéticas conservan la magnetización después que el campo magnetizador ha cesado de actuar, y 2) la permeabilidad magnética  $\mu$  (lo mismo que la susceptibilidad magnética  $\kappa$ ) para estas sustancias no son magnitudes constantes, sino que dependen de la excitación magnética  $H_0$  del campo magnetizador.

Los cuerpos ferromagnéticos cristalinos, como por ejemplo los monocristales de hierro, revelan una anisotropía en las propiedades magnéticas: en unas direcciones, el cristal se magnetiza con más facilidad que en otras. Desde el punto de vista magnético, el mismo cuerpo, pero con estructura policristalina (de cristales pequeños), es isótropo.

A. Stoliétov, profesor de la universidad de Moscú, fue el primero en investigar minuciosamente la dependencia entre la imanación del hierro y la excitación magnética de un campo exterior, publicando en 1872 la monografía "Investigación de la función de la imanación del hierro dulce". El método experimental de Stoliétov se basaba en el fenómeno de inducción (véase el § 221). Aquí examinaremos otro método de medición del vector de inducción magnética en los ferromagnéticos sólidos. Sea un solenoide toroidal y en su interior un núcleo del ferromagnético a analizar.

El campo magnético total en el interior del núcleo vendrá determinado por el vector de inducción magnética  $\mathbf{B}$ , que es la suma de la excitación magnética  $\mathbf{H}_0$ , creada por la corriente del solenoide, y la  $\mathbf{H}'$  creada por las corrientes moleculares:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'.$$

Si abrimos una pequeña rendija transversal en el núcleo del solenoide (fig. 218), en esta rendija el vector de inducción magnética coincide con el de la excitación magnética, ya que prácticamente no hay más que aire en ella, para el cual  $\mu=1$  (cuyo paramagnetismo despreciamos).

Las magnitudes que se refieran a la rendija las caracterizaremos con el subíndice "r", de donde:

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{H}_r. \quad (1)$$

El vector de inducción magnética  $\mathbf{B}$  en el interior del núcleo es paralelo al eje del toroide. Si la rendija en el interior del toroide es muy fina, como veremos después (véase el § 207), la inducción no varía sensiblemente; por lo tanto, en la zona de la rendija será la misma que en el interior del núcleo:

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{B},$$

de donde, según la (1),

$$\mathbf{H}_r = \mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}',$$

es decir, la excitación  $\mathbf{H}_r$  en el interior de la rendija es igual a la inducción en el interior del núcleo; en otras palabras, es igual a la suma de las excitaciones  $\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$ , creadas por la corriente del solenoide y las moleculares del núcleo.

De esta manera tenemos que el núcleo, gracias a la magnetización, intensifica la excitación magnética en la rendija. Midiendo la excitación magnética  $\mathbf{H}_r$  en la rendija (por ejemplo, por la acción ejercida sobre un contorno con corriente), se mide con ello el valor de la inducción  $\mathbf{B}$  en el núcleo.

Para las sustancias ferromagnéticas, lo mismo que para las diamagnéticas y paramagnéticas, consideraremos que la relación entre el vector de inducción magnética  $\mathbf{B}$  y el de la excitación  $\mathbf{H}$  viene expresada por la fórmula (11) del § 202:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad (2)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad del cuerpo ferromagnético.

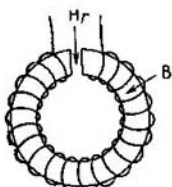


Fig. 218. La excitación magnética  $\mathbf{H}_r$  en la rendija es igual a la inducción magnética  $\mathbf{B}$  en el ferromagnético.

De esta manera determinamos la permeabilidad magnética  $\mu$ :

$$\mu = \frac{B}{H}. \quad (2a)$$

Utilizando la relación entre  $\mu$  y la susceptibilidad magnética  $\kappa$  expresada por la fórmula (10) del § 202 en que

$$\kappa = \frac{\mu - 1}{4\pi},$$

para el vector de imanación  $\mathbf{P}$  obtenemos el valor

$$P = \kappa H = \frac{B - H}{4\pi}. \quad (3)$$

Como el núcleo prácticamente llena todo el espacio ocupado por el campo magnético (la rendija es muy angosta), la excitación magnética  $H$  en el núcleo introducido en el toroide es igual a la excitación

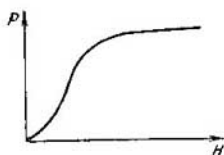


Fig. 219. Dependencia entre el vector de imanación  $P$  y la excitación magnética  $H$  en un ferromagnético.

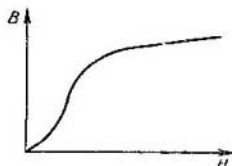


Fig. 220. Dependencia entre la inducción magnética  $B$  y la excitación magnética  $H$  en un ferromagnético.

magnética  $H_0$  del toroide sin núcleo (véase el § 202). Por eso, lo mismo que para el caso del solenoide, será

$$H = H_0 = 4\pi I n,$$

donde  $n$  es el número de espiras por unidad de longitud del toroide. Calculando de esta manera el valor de  $H$  para diferentes intensidades de corriente  $I$  y hallando los valores respectivos de  $B$  midiendo la excitación magnética  $H_r$  en la rendija [fórmula (1)], se pueden determinar  $\mu$  y  $P$  de la sustancia ferromagnética dada para distintas excitaciones magnéticas  $H$  en el ferromagnético, o, lo que es lo mismo, para diferentes excitaciones magnéticas  $H_0$  del campo magnetizador.

Los resultados de las mediciones de estas magnitudes se pueden representar gráficamente. Detengámonos antes que nada en la dependencia entre la imanación y la excitación magnética  $H$  (fig. 219).

Vemos que la imanación  $P$  al principio crece bruscamente con el aumento de  $H$ , y después con menos intensidad, y por último, a partir de cierto valor de  $H$ , el ulterior aumento de la excitación magnética  $H$  no acarrea ningún crecimiento de  $P$ , lo cual corresponde a la rama horizontal del gráfico. Este fenómeno, descubierto por A. Stoliétov, se denomina *saturación magnética*. Este carácter de dependencia entre  $P$  y  $H$  se puede explicar por el hecho de que al principio, bajo la acción del creciente campo magnetizador, aumenta el grado de orientación de los momentos magnéticos moleculares según el campo; pero el incremento de este efecto debido a la orientación empieza a disminuir a medida que quedan cada vez menos y menos momentos no orientados.

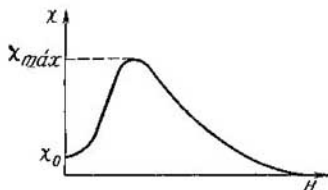


Fig. 221. Dependencia entre el coeficiente de susceptibilidad magnética  $\kappa$  y la excitación magnética  $H$  en un ferromagnético.

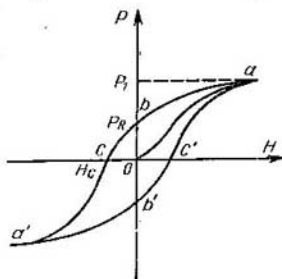


Fig. 222. Ciclo de histéresis.

tados; y por último, cuando todos los momentos moleculares se han orientado según el campo, cesa el ulterior crecimiento de  $P$  y aparece el fenómeno de saturación.

La dependencia entre la inducción magnética  $B$  y la excitación magnética  $H_0 = H$  del campo magnetizador se expresa mediante un gráfico parecido que, no obstante, no tiene rama horizontal (fig. 220), ya que  $B = H + H'$ . En la saturación, la magnitud  $H'$  permanece constante, y  $B$  aumenta proporcionalmente a  $H$ .

La relación de dependencia entre la permeabilidad magnética  $\mu$  (o la susceptibilidad magnética  $\kappa$ ) y  $H$  se caracteriza por un intenso aumento al principio de  $\mu$  (o de  $\kappa$ ) con el aumento de la excitación magnética del campo magnetizador y, después de haber alcanzado el máximo, por empezar a disminuir. A elevados valores de la excitación  $H$  del campo magnetizador, el valor de  $\mu$  tiende a la unidad, y el de  $\kappa$ , a cero. En la fig. 221 se representa la curva de Stoliétov para la susceptibilidad magnética  $\kappa$  del hierro en función de la excitación magnética  $H$ .  $\mu$  tiende a la unidad cuando las exci-



taciones  $H$  del campo magnetizador son tan elevadas, que en la expresión

$$B = H + H'$$

se puede despreciar la excitación  $H'$  del campo molecular por ser pequeña en comparación con  $H$ .

Una importante particularidad de los cuerpos ferromagnéticos es la *histéresis*. El fenómeno de histéresis consiste en que la imanación  $P$  (y, por consiguiente, la inducción magnética  $B$ ) no sólo depende del valor de la excitación magnética  $H$  del campo magnetizador en el momento dado, sino también de la excitación que hubo anteriormente. En la fig. 222 se representa el gráfico de dependencia entre  $P$  y  $H$ . La rama  $Oa$  de la curva representa un aumento de la imanación  $P$  al elevar  $H$ , si la magnetización se hace por primera vez. El punto  $a$  corresponde a la saturación (la imanación alcanza el valor máximo  $P_1$ ).

Si después de alcanzada la saturación se empieza a disminuir la excitación  $H$ , la imanación  $P$  no disminuirá recorriendo la curva  $aO$ , sino por otra curva  $ab$ , con lo cual a los mismos valores de  $H$  tomados en orden inverso les corresponderán unos valores de  $P$  mayores que antes. Cuando sea  $H=0$ , la imanación no desaparecerá, conservándose un *magnetismo remanente* (imanación remanente)  $P_R$  expresado por el segmento  $Ob$ . Para originar una ulterior disminución de  $P$  hay que cambiar la dirección de la excitación  $H$  del campo magnetizador en sentido contrario. A determinado valor de  $H=H_c$ , la imanación  $P$  desaparece. El valor de  $H_c$  expresado por el segmento  $Oc$  se denomina *fuerza coercitiva*. Al aumentar aún más en sentido contrario la excitación  $H$ , aparece una imanación de signo contrario. En este caso también se puede alcanzar la saturación en  $a'$ . Si después se aumenta la excitación  $H$ , la dependencia entre  $P$  y  $H$  se representará por una curva simétrica a la primera,  $a'b'c'a$ , cerrando la curva denominada *ciclo de histéresis*.

Debido al fenómeno de histéresis, a un mismo valor del campo magnetizador  $H$ , le pueden corresponder varios valores de imanación  $P$ . Por ejemplo, a  $H=0$ , le corresponden: 1) carencia de imanación (punto  $O$ ); 2) la imanación expresada por el segmento  $Ob$  (que ocurre después de magnetizar el núcleo); y 3) la imanación expresada por el segmento  $Ob'$  (que tiene lugar después de haber alcanzado el núcleo el valor de saturación).

Diferentes sustancias ferromagnéticas presentan curvas de histéresis de distintas formas. En las aplicaciones técnicas se necesitan diferentes tipos de histéresis. Se ha convenido en distinguir los materiales magnéticos en materiales magnéticamente blandos, "de ciclo estrecho", que se caracterizan por ser pequeña la fuerza coercitiva, y magnéticamente duros "de ciclo ancho", que se caracte-

rizan por poseer una gran fuerza coercitiva. Entre los primeros tenemos el hierro dulce, acero al silicio, aleaciones de hierro con níquel (sobre todo la aleación denominada "permaleación" que contiene 78% de Ni); estos materiales se utilizan, por ejemplo, para fabricar núcleos de transformadores. Entre los magnéticamente duros tenemos los aceros al carbono y especiales (por ejemplo, la aleación que contiene Fe, Al, Cu, Ni y Co). Los materiales magnéticamente duros se utilizan

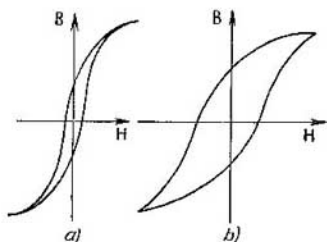


Fig. 223. Ciclo de histéresis: a) material magnéticamente blando b) material magnéticamente duro.

para la fabricación de imanes permanentes. En la fig. 223 se representan las curvas típicas de histéresis para el material magnéticamente blando (a) y magnéticamente duro (b).

Tabla XVII

Propiedades de los típicos materiales magnéticamente blandos

Sustancia	$\mu_{m\acute{a}x}$	$4\pi I_c$ en gau- sios	$H_c$ en oerstedios
Hierro (puro) . . . . .	5 000	21 500	1,0
Acero al silicio . . . . .	10 000	20 000	0,2
Permaleación (Permalloy) . . . . .	100 000	16 000	0,05
Supermaleación (Supermalloy) . . . . .	900 000	8 000	0,004

En la tabla XVII se dan los valores numéricos de la permeabilidad magnética máxima  $\mu_{m\acute{a}x}$ , imanación máxima  $P_I$  y fuerza coercitiva  $H_c$  para varios materiales típicos magnéticamente blandos; pero los valores numéricos de la imanación máxima  $P_I$  se dan multiplicados por  $4\pi$ , ya que según la fórmula (7) del § 202, la induc-

ción magnética  $B$  (que es la magnitud medida directamente) se relaciona con  $P$  mediante la ecuación  $\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + 4\pi\mathbf{P}$ .

En la tabla XVIII se dan los valores numéricos de  $4\pi P_r$ , donde  $P_r$  es la imanación máxima, los de  $4\pi P_R$ , donde  $P_R$  es la imanación remanente, y los de la fuerza coercitiva  $H_c$  de algunos materiales típicos magnéticamente duros.

Tabla XVIII

Propiedades de materiales típicos magnéticamente duros

Sustancia	$4\pi P_R$ en gausios	$4\pi P_r$ en gausios	$H_c$ en oersteds
Acero al carbono . . . . .	10 000	20 000	42
Acero al tungsteno . . . . .	10 500	16 500	65
Acero al cobalto . . . . .	9 000	16 300	250
"Magnico" . . . . .	12 500	14 000	575

El proceso de magnetización de los cuerpos ferromagnéticos va acompañado de una variación de sus dimensiones lineales y del volumen. Este fenómeno se denomina *estricción magnética* (*magnetostricción*). La magnitud y signo de este efecto dependen de la excitación magnética y del ángulo entre la dirección del campo y el eje cristalino (en el caso de los cuerpos monocristalinos). El alargamiento es insignificante y en general es de unas cienmilésimas de la longitud primitiva.

§ 204. Naturaleza del ferromagnetismo. El ferromagnetismo está relacionado de una manera específica con la fase sólida de la sustancia. Los átomos libres de los elementos ferromagnéticos no poseen ninguna clase de propiedades especiales magnéticas. De la tabla XV se ve que los momentos magnéticos de los átomos del hierro y del cromo son iguales, sin embargo el hierro es la sustancia típica ferromagnética, mientras que el cromo es un paramagnético corriente. Hay aleaciones ferromagnéticas formadas de sustancias no ferromagnéticas.

Los paramagnéticos, en todos los campos magnéticos que se pueden crear, no llegan a alcanzar ni mucho menos el estado de saturación. Esto significa que incluso en los campos de mayor excitación, la orientación de las moléculas no es completa. Y viceversa, los ferromagnéticos, alcanzan con relativa facilidad el estado de saturación.

Para cualquier sustancia ferromagnética hay una temperatura  $T = \theta$  a la cual desaparecen sus propiedades magnéticas. Esta temperatura  $\theta$  se denomina temperatura o punto de Curie (en honor

al físico francés P. Curie, que descubrió su existencia). A temperaturas superiores al punto de Curie, los cuerpos ferromagnéticos se comportan como los paramagnéticos corrientes. La susceptibilidad magnética  $\kappa$  de los paramagnéticos corrientes varía con la temperatura según la ecuación:

$$\kappa = \frac{C}{T},$$

donde  $C$  es una constante para el material dado (*constante de Curie*), y la de los cuerpos ferromagnéticos a temperaturas superiores al punto de Curie:

$$\kappa = \frac{C}{T - \theta}.$$

Para el hierro y el níquel puros, los puntos de Curie se hallan respectivamente a las temperaturas de 768 y 365°C. Estas temperaturas son mucho menores que las temperaturas de fusión de estas sustancias (para el hierro la temperatura de fusión es de 1530° C). En el punto de Curie se observan además de la desaparición de la magnetización de los cuerpos, ciertas anomalías en una serie de otras propiedades, por ejemplo, en la capacidad calorífica, en la conductibilidad eléctrica, etc., y también desaparece la extricción magnética. La teoría más elemental del ferromagnetismo que señala la existencia de los puntos de Curie, fue elaborada por Weis.

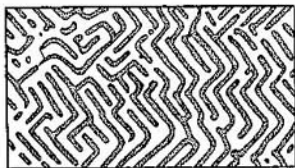


Fig. 224. Dominios de magnetización.

El primer intento de explicar las propiedades ferromagnéticas de los cuerpos lo hizo en 1892 el físico ruso B. Rozing, el cual supuso la existencia de "campos magnéticos moleculares" complementarios en el interior de los cuerpos ferromagnéticos. Estos campos complementarios surgen en las pequeñas zonas espontáneamente magnetizadas del cuerpo ferromagnético. Si no hay campo exterior, los vectores de imanación de estas zonas por separado están orientados arbitrariamente y se compensan mutuamente. En cuanto aparece un campo exterior, los vectores giran de manera que se

refuerzan mutuamente creando un campo complementario. Ulteriormente (en 1907), Weis desarrolló esta hipótesis. Según los conceptos contemporáneos, en los cuerpos ferromagnéticos hay unas pequeñas regiones (dominios) de espontánea magnetización hasta la saturación. Si no hay campo magnético exterior, estos dominios de magnetización espontánea están orientados desordenadamente, con lo cual el cuerpo, como término medio, no está magnetizado. El campo exterior no orienta a las distintas moléculas, sino a los dominios de magnetización espontánea y de esta manera puede causar una intensa magnetización del cuerpo ferromagnético, incluso hasta la saturación. N. Akúlov y M. Diejtiar, con ayuda de polvo magnético esparcido sobre una superficie pulida observaron la formación de figuras que revelaban los límites entre los dominios de magnetización espontánea de un cuerpo ferromagnético desimantado (fig. 224).

La existencia de dominios de magnetización espontánea la demuestra también el carácter a saltos de la curva de magnetización en los campos débiles. Si se aumenta lentamente el campo exterior, la magnetización del ferromagnético en la zona de empinada pendiente de la curva de imanación aumenta a saltos (fig. 225). Esto es debido al repentino cambio de la orientación de la imanación de los distintos dominios.

Desde el punto de vista de la existencia de dominios de magnetización espontánea, el fenómeno de histéresis se puede explicar en términos generales por cierto "frotamiento" que impide variar la orientación de algunos dominios. Al cesar la acción del campo magnetizador, gracias a este frotamiento se conserva cierta orientación de los dominios. La fuerza coercitiva impide que se efectúe una orientación completamente desordenada. Para vencer esta fuerza hay que aplicar un campo magnético de sentido contrario, con lo cual se desimanta la sustancia.

Este punto de vista lo confirma el hecho de que las sacudidas facilitan la desimantación. La magnetización remanente, como se ha indicado, también desaparece al calentar el cuerpo (en el punto de Curie).

La existencia del "frotamiento" que obstaculiza el cambio de la orientación en los dominios, conduce a la dependencia entre las propiedades magnéticas de los cuerpos ferromagnéticos en un campo magnético alterno y la frecuencia. V. Arkádiev y un grupo de sus

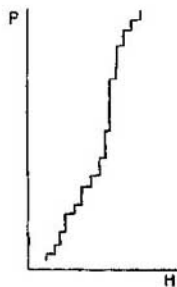


Fig. 225. Aumento a saltos de la magnetización de un ferromagnético.

colaboradores estudiaron minuciosamente esta dependencia hasta las frecuencias correspondientes a las ondas electromagnéticas cortas. A frecuencias de  $10^{10}$  Hz y mayores,  $\mu$  deja de depender de la frecuencia y adquiere el valor de la unidad.

La naturaleza del ferromagnetismo fundamentalmente se ha explicado a raíz del desarrollo de la física atómica. En 1927, Y. Dorfman en sus experimentos sobre la desviación de electrones a gran velocidad (partículas  $\beta$ ) en los cuerpos ferromagnéticos demostró que las fuerzas que originan la magnetización espontánea, no pueden ser las fuerzas de la acción magnética recíproca originada por el movimiento de los electrones en el interior de los átomos. En 1928, Y. Frénkel fue el primero en indicar que la magnetización espontánea puede ser debida a las llamadas "fuerzas de intercambio" que se estudian en la mecánica cuántica. A determinadas condiciones, estas fuerzas tienden a orientar paralelamente los propios momentos magnéticos de los electrones, lo cual conduce al surgimiento de dominios de magnetización espontánea. Heisenberg desarrolló minuciosamente esta idea.

De esta manera se aclaró que los fenómenos ferromagnéticos pueden comprenderse solamente basándose en la mecánica cuántica y teniendo en cuenta los propios momentos magnéticos de los electrones.

Resulta que las propiedades ferromagnéticas están estrechamente ligadas con la estructura cristalina de la sustancia. Las curvas de magnetización (ciclos de histéresis) de los materiales reales dependen de la estructura policristalina y varían bajo la acción de agentes exteriores (por ejemplo, en el tratamiento térmico, en la tracción, etc.). El propio fenómeno de la histéresis es de naturaleza compleja y parcialmente está relacionado con el desplazamiento de los límites ("paredes") entre los distintos dominios.

En la técnica contemporánea tienen gran importancia las sustancias magnéticas denominadas *ferritos*, que son compuestos químicos del tipo  $MeO \cdot Fe_2O_3$ , donde Me es uno, o dos, de los siguientes metales: Mn, Co, Ni, Cu, Mg, Zn o Cd, por ejemplo,  $CuO \cdot Fe_2O_3$ , o  $NiOZnO \cdot Fe_2O_3$ , etc. Los ferritos son ferromagnéticos magnéticamente blandos. Al mismo tiempo, por sus propiedades eléctricas son semiconductores de gran resistencia óhmica, del orden de  $10^2$ — $10^8$   $\Omega \cdot cm$ . Esta última propiedad es importante en la aplicación de los ferritos en la electrotecnia, ya que en ellos no se crean corrientes parásitas (o de Foucault, véase el § 231). De ferritos se fabrican los núcleos de los transformadores, de las bobinas inductoras, etc.

Una especie particular de las sustancias magnéticas son los cuerpos denominados antiferromagnéticos. Los cuerpos antiferromagnéticos, a una temperatura  $T$  superior a determinada tempera-

tura  $\theta$  para el ferromagnético dado, se transforman en paramagnéticos corrientes y la susceptibilidad magnética  $\chi$  disminuye con la temperatura tendiendo a cero cuando  $T \rightarrow 0$  (fig. 226). La temperatura  $\theta$  se halla en la zona de bajas temperaturas (del orden de 20—30° K e inferiores). Ejemplo de cuerpo antiferromagnético pueden ser las sales  $\text{CoCl}_2$ ,  $\text{CrCl}_3$ ,  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ , etc.

La explicación teórica de las propiedades de los cuerpos antiferromagnéticos se puede hallar solamente basándose en los postulados de la mecánica cuántica.

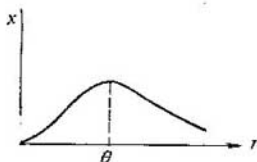


Fig. 226. Dependencia entre el coeficiente de susceptibilidad magnética  $\chi$  y la temperatura en los cuerpos antiferromagnéticos.

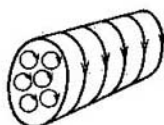


Fig. 227. Corrientes moleculares (de Ampere) en un imán permanente.

§ 205. Imanes permanentes. La posibilidad de tener magnetismo remanente en las sustancias ferromagnéticas nos permite la creación de *imanes permanentes*, es decir, cuerpos que, sin necesidad de corriente eléctrica producida por fuentes exteriores cualesquiera, crean un campo magnético en el espacio que los rodea.

Los imanes permanentes se hacen de sustancias ferromagnéticas de magnetismo remanente y fuerza coercitiva grande (aceros magnéticamente duros).

El magnetismo remanente de los cuerpos ferromagnéticos es debido a la conservación de la orientación de los dominios de magnetización espontánea. La existencia de los mismos, como se ha indicado en el párrafo anterior, se puede explicar teniendo en cuenta los propios momentos magnéticos de los electrones. Sin embargo, para la descripción cualitativa de las propiedades del magnetismo remanente, se puede examinar solamente el movimiento de los electrones y las corrientes moleculares que se crean como resultado de este movimiento. Consideraremos que el magnetismo remanente es debido a la conservación de la orientación de las corrientes moleculares, con lo cual la corriente molecular total, como término medio, es diferente de cero y crea un campo magnético. En la fig. 227 se representa la sección de un imán circular recto. Razonando de la misma manera que se ha hecho en la pág. 350 podemos consi-

derar que, en el interior del imán, las corrientes moleculares se compensan mutuamente, pero en la superficie se crea una corriente resultante no compensada (corriente superficial). Esta corriente circunda al imán superficialmente, a lo cual se debe la semejanza del imán recto con el solenoide.

Las líneas de fuerza de un imán recto y largo se parecen a las exteriores de un solenoide (fig. 228). La diferencia entre un imán y un solenoide consiste solamente en que en el caso del solenoide podemos seguir la marcha de las líneas de fuerza incluso en el interior del mismo solenoide y convencernos de que cada línea forma

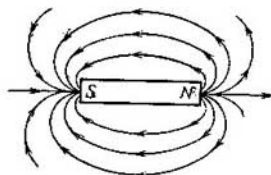


Fig. 228. Líneas de fuerza del campo magnético de un imán recto permanente.

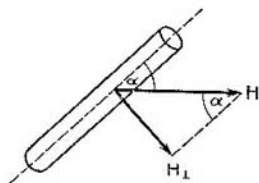


Fig. 229. Componente de la excitación magnética  $H$  perpendicular al eje del imán.

una curva cerrada. En el caso del imán permanente no podemos determinar directamente la marcha de las líneas de fuerza en el interior del mismo. Nos parece que las líneas de fuerza salen de un extremo del imán, denominado polo norte, y terminan en el otro extremo (polo sur). Un caso particular del imán recto es el imán en forma de aguja (*aguja magnética*).

El imán recto experimenta una acción orientadora de parte de un campo magnético uniforme. Esta acción tiende a hacer girar al imán de manera que se oriente según las líneas de fuerza del campo de excitación  $H$ . Cuando el imán se dispone a lo largo de las líneas de fuerza, el momento de las fuerzas que actúan sobre él es  $M=0$  y el imán se halla en equilibrio; el momento  $M$  de las fuerzas adquiere el valor máximo cuando el imán está situado perpendicularmente a las líneas de fuerza.

De lo dicho es natural suponer que el momento  $M$  se determine solamente mediante la componente de la excitación  $H$  que es perpendicular al eje del imán:

$$M = p \cdot H_{\perp},$$

donde  $p$  es una magnitud que depende solamente de las propiedades del mismo imán. En la fig. 229 tenemos que  $H_{\perp} = H \sin \alpha$ , donde



$\alpha$  es el ángulo entre el eje del imán y la dirección del campo; de donde

$$M = p l \operatorname{sen} \alpha. \quad (1)$$

Comparando esta expresión con la del momento  $M$  que actúa sobre un solenoide (véase el § 192), vemos su completo parecido. La magnitud  $p$  se denomina *momento magnético* del imán.

Resumiendo podemos decir que el momento del par de fuerzas con que actúa un campo magnético exterior sobre un contorno con corriente, sobre un solenoide o sobre una aguja magnética, se expresa por una misma fórmula (1). Un contorno con corriente, un solenoide o una aguja magnética de igual momento magnético  $p$  experimentan una misma acción orientadora en el campo magnético dado. En el caso de un contorno con corriente, su momento magnético viene determinado por la intensidad  $I$  de la corriente que lo recorre y por el área  $S$ . El momento magnético  $p$  del imán depende de sus propiedades individuales: de sus dimensiones, y del "grado de magnetización".

Las fuerzas aplicadas a un imán situado en un campo magnético exterior, actúan sobre todos sus elementos. Si la aguja magnética se rompe por el medio, cada una de las mitades experimentará la acción orientadora en un campo magnético exterior.

Sin embargo, en el análisis de una serie de problemas es conveniente localizar estas fuerzas. Esta localización se puede hacer basándonos en las siguientes razones: Sabemos que el momento de un par de fuerzas es igual al producto del valor de una de ellas  $f$  por el brazo del par  $l$ ; además hay que tener en cuenta que, considerando la acción que ejercen, todos los pares de un mismo momento  $M$ , es decir, en que el producto  $fl$  es igual, son equivalentes. Por eso las fuerzas aplicadas a todos los elementos del imán, teniendo en cuenta su momento total, son completamente equivalentes a dos fuerzas  $f$  iguales aplicadas a sus extremos: una dirigida según el campo, y otra, contra el campo (fig. 230), si es que estas fuerzas se han elegido de manera que su momento sea igual al momento de las fuerzas que realmente actúan sobre el imán.

Así pues, formalmente podemos considerar que del lado del campo magnético, sobre el imán actúan dos fuerzas  $f$  aplicadas a sus extremos. En la fig. 230 se ve que el brazo del par de fuerzas  $f$  es igual a  $l \operatorname{sen} \alpha$ , donde  $l$  es la longitud del imán; de donde el momento será  $M = fl \operatorname{sen} \alpha$ . Igualando este momento con el de las fuerzas que

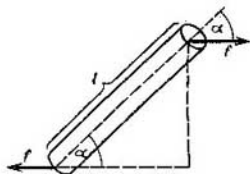


Fig. 230. Representación gráfica para determinar el momento de fuerzas que actúan sobre un imán.

actúan sobre el imán de parte del campo magnético, según la fórmula (1), obtenemos que

$$f l \sin \alpha = p H \sin \alpha,$$

de donde

$$f l = p H. \quad (2)$$

Ahora podemos establecer cierta analogía entre el momento magnético  $p$  del imán y el momento eléctrico del dipolo  $p_q$ . Esta analogía es debida a que un imán recto y largo crea en un punto bastante alejado del imán, lo mismo que el dipolo, una excitación proporcional a su momento magnético e inversamente proporcional al cubo de la distancia del mismo. No obstante, esta analogía tiene solamente un carácter exterior y formal. Sin embargo, en una serie de casos se utiliza, porque simplifica el cálculo. En el § 124 hemos visto que el momento eléctrico del dipolo es igual al producto de la carga  $q$  de uno de los dos cuerpos que forman el dipolo, por la distancia entre los cuerpos:

$$p_q = ql.$$

Formalmente podemos suponer también que el momento  $p$  del imán es igual al producto de su longitud  $l$  por una carga magnética imaginada  $m$  (o, como se dice generalmente, *masa magnética*), aunque en la realidad no hay cargas magnéticas; es decir, podemos suponer que

$$p = ml. \quad (3)$$

Los lugares en que se encuentran estas masas magnéticas imaginarias se ha convenido en denominarlos *polos*. Los polos están situados, en correspondencia con la ecuación (3), en los extremos del imán. De la (3) se deduce que la masa magnética situada en los polos es

$$m = \frac{p}{l} = p_0, \quad (4)$$

donde  $p_0$  es el momento magnético por unidad de longitud del imán.

De las ecuaciones (2) y (3) obtenemos que

$$f l = m H l, \text{ de donde } f = m H, \quad (5)$$

es decir, *sobre el polo magnético imaginario del imán actúa una fuerza numéricamente igual al producto de la masa magnética  $m$  situada en el polo, por la excitación  $H$  del campo magnético exterior*. El extremo del imán recto que gira orientándose hacia el lado del vector de excitación magnética  $\mathbf{H}$  se denomina "polo norte", y el que se orienta en sentido contrario, "polo sur". Si consideramos positiva la masa magnética  $m$  situada en el polo norte, y negativa la del polo sur, la igualdad (5) se puede escribir de la siguiente forma vectorial:

$$\mathbf{f} = m \mathbf{H}. \quad (5a)$$

La introducción de las fuerzas  $f$  que actúan sobre las masas magnéticas  $m$  en el análisis del fenómeno, simplifica en mucho la explicación de numerosas cuestiones, por ejemplo, la de orientación y atracción de las agujas magnéticas. Esto explica por qué el concepto de las masas magnéticas se conserva en cierto grado en el estudio del magnetismo, aunque en realidad no hay masas magnéticas. En un campo magnético uniforme, las fuerzas  $f$  tienden a orientar la aguja según el campo. Si la aguja se coloca de manera que su eje coincida con la dirección de las líneas magnéticas, el momento del par que actúa sobre la aguja será igual a cero: la aguja se halla

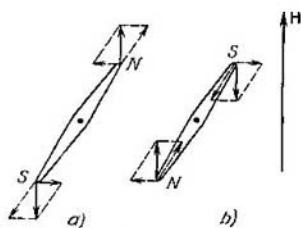


Fig. 231. Pares de fuerzas que actúan sobre la aguja magnética en un campo magnético exterior.

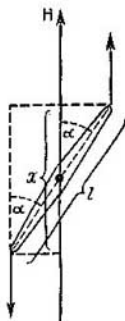


Fig. 232. Acción de las fuerzas sobre la aguja magnética en un campo magnético variable.

en equilibrio. Sin embargo este equilibrio será estable solamente si la dirección de sur a norte coincide con la de las líneas magnéticas. Efectivamente, en este caso, si la aguja se desvía de la posición de equilibrio, las fuerzas del par que se crean con ello, tienden a devolver la aguja a la posición inicial (fig. 231, a). Y viceversa, si la aguja está situada paralelamente al campo de manera que la dirección de sur a norte sea contraria a la del campo, al desviarse de esta posición surgirán fuerzas que contribuirán a una mayor declinación (fig. 231, b).

En un campo magnético uniforme, como hemos visto, sobre la aguja magnética (lo mismo que sobre un solenoide o un contorno con corriente) actúa solamente un par de fuerzas. La aguja magnética tiende solamente a girar orientando su eje según el campo. Pero si el campo magnético es variable, sobre la aguja, además de este par de fuerzas, actuará una fuerza que le comunicará un movimiento de traslación, análogo al movimiento con que una fuerza actúa sobre un cuadro con corriente situado en un campo variable.

Supongamos que la aguja magnética se halla formando un ángulo  $\alpha$  con la dirección de la excitación de un campo magnético exterior (fig. 232) y, para simplificar, que la excitación magnética varía en el mismo sentido que la dirección del propio campo. Sea  $H$  la excitación magnética en el lugar donde se halla el extremo sur de la aguja; por consiguiente, la excitación en el lugar donde se halla el extremo norte de la aguja será  $H' = H + \left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)x$ , donde la magnitud  $\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)$  es el gradiente del campo. Las fuerzas que actúan sobre los polos de la aguja, serán respectivamente:

$$f_S = mH, \quad f_N = mH + m\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)x.$$

Sea  $f_N > f_S$ , entonces sobre la aguja actuará un par de fuerzas de momento  $M = f_S l \cdot \sin \alpha = p H \sin \alpha$ , donde  $p = ml$  es el momento magnético de la aguja, y la fuerza dirigida a lo largo del campo será

$$\Delta f = f_N - f_S = m\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)x.$$

En la fig. 232 se ve que  $x = l \cos \alpha$ , de donde

$$\Delta f = ml\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right) \cos \alpha, \quad \text{o} \quad \Delta f = p\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right) \cos \alpha. \quad (6)$$

Así tenemos que en un campo magnético variable, sobre la aguja magnética actúa una fuerza proporcional a su momento magnético  $p$ , al gradiente del campo  $(\Delta H/\Delta x)$  y que, además, depende del coseno del ángulo  $\alpha$ .

Es importante señalar que todos los resultados obtenidos de este párrafo hasta ahora son aplicables no sólo a los imanes permanentes situados en el vacío, sino para *los imanes situados en el interior de otro cuerpo magnético*. En este caso, en todas las fórmulas hay que entender que  $H$  es la *excitación magnética del cuerpo magnético* en el lugar donde se halla el imán. La explicación de esto se dará en el § 209.

La fuerza que actúa sobre un imán o un solenoide situado en un campo magnético variable, es el origen de la atracción o repulsión de los imanes, lo mismo que de los solenoides. En un campo magnético *uniforme*, el imán (o el solenoide) experimenta solamente una acción orientadora. Si se colocan dos imanes (o solenoides) uno cerca del otro, cada uno de ellos se hallará en el campo variable del otro y, por consiguiente, además de un par de fuerzas, actuará sobre ellos la fuerza de atracción o de repulsión, según el sentido en que aumente el campo.

De la misma manera se explica la atracción de los pedazos de hierro por el imán (o por el solenoide). Estos pedazos primeramente se magnetizan en el campo y después adquieren el movimiento de traslación debido a la variación del campo magnético cerca del imán (o del solenoide).

§ 206. Líneas del vector de inducción magnética. Circulación del vector de inducción magnética y del vector de excitación magnética. Condiciones límites. Análogamente a como hemos introducido en el vacío el concepto de líneas de fuerza del campo magnético, introducimos en el caso general el concepto de líneas de fuerza de la inducción magnética. Por *línea de inducción magnética* se sobreentiende la línea en que la tangente a cada uno de sus puntos coincide con la dirección del vector de inducción  $\mathbf{B}$  en el punto dado. El sentido de la línea en cada punto coincide con el del vector  $\mathbf{B}$  en este mismo punto.

A través de la unidad de superficie normal al vector de inducción trazaremos una cantidad de líneas de inducción igual numéricamente al valor de la inducción magnética dentro de los límites de la superficie dada. El número total de líneas que atraviesan una superficie elemental  $\Delta S_0$  normal a ellas, determinará el *flujo elemental*  $\Delta\Phi$  de inducción magnética a través de esta superficie:

$$\Delta\Phi = B\Delta S_0. \quad (1)$$

En el caso en que la superficie elemental  $\Delta S$  esté orientada arbitrariamente, el flujo de inducción magnética  $\Delta\Phi$  que la atraviesa se determina por la ecuación:

$$\Delta\Phi = B\Delta S \cos \alpha = B_n \Delta S, \quad (2)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre la dirección del vector de inducción  $\mathbf{B}$  y la normal  $\mathbf{n}$  a la superficie  $\Delta S$ , y  $B_n$  es la componente de  $\mathbf{B}$  normal a  $\Delta S$ .

El flujo de inducción magnética elemental  $\Delta\Phi$  a través de la superficie  $\Delta S$ , como indica la ecuación (2), puede ser una magnitud positiva o negativa, según sea agudo u obtuso el ángulo  $\alpha$  que forman las líneas de inducción  $\mathbf{B}$  con el sentido elegido de la normal  $\mathbf{n}$ . El flujo de inducción magnética total  $\Phi$  que atraviesa una superficie finita será la suma algebraica de los flujos elementales a través de todos los elementos de superficie, es decir, será

$$\Phi = \sum \Delta\Phi = \sum B_n \Delta S. \quad (3)$$

Si la superficie es cerrada, el sentido positivo de la normal a la superficie se considerará el de la exterior que sale del volumen limitado por la superficie; por consiguiente, las líneas que salgan del volumen crearán un flujo positivo y las que entren, negativo.

La experiencia demuestra que las líneas de inducción magnética siempre son cerradas; por consiguiente, para cualquier superficie cerrada, el número total de líneas que entran y salen, es igual a cero, de donde el flujo de inducción magnética total de cualquier superficie cerrada es igual a cero:

$$\Phi = 0. \quad (4)$$

Este teorema es análogo al de Ostrogradski — Gauss de electrostática cuando en el interior del volumen no hay cargas (véase el § 126), y corresponde al hecho de que no existen ningunas cargas magnéticas reales.

En el § 192 se ha demostrado que en el vacío, en el interior de un campo magnético, siempre se cumple la condición de que  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ . Si hay cuerpos magnéticos, el flujo del vector de la inducción magnética  $\mathbf{B}$  a través de una superficie cerrada es igual a cero:

$$\int_S B_n dS = 0,$$

de donde se deduce que en el caso general (si hay cuerpos magnéticos), el campo magnético siempre satisface la condición:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (4a)$$

Las unidades en que se mide el flujo de inducción magnética dependen de la elección de unidades de la inducción y del área de la superficie. Si se utiliza el sistema *CGSM*, es decir, midiendo la inducción en gausios y el área en centímetros cuadrados, el flujo será en unidades denominadas *maxwelios*; así, la unidad *CGSM* de flujo de inducción magnética es igual al flujo a través de  $1 \text{ cm}^2$  de superficie perpendicular a las líneas de inducción en un campo magnético uniforme de inducción igual a 1 gausio. La unidad del flujo magnético en el Sistema Internacional de unidades se da en el § 223.

Veamos la circulación del vector  $\mathbf{B}$ . En el § 198 se ha demostrado que la circulación del vector de excitación magnética según un contorno cerrado cualquiera es igual a  $4\pi I$ , donde  $I$  es la intensidad de la corriente que abarca el contorno. En un cuerpo magnético, la excitación magnética total creada tanto por las corrientes macroscópicas, como microscópicas, es el vector  $\mathbf{B}$ . Por consiguiente, la circulación del vector  $\mathbf{B}$  según el contorno será  $4\pi(I + I_M)$ , donde  $I$  e  $I_M$  son las intensidades de las corrientes macroscópicas y moleculares respectivamente que abarca el contorno:

$$\sum B_i \Delta l = 4\pi (I + I_M). \quad (5)$$

Calculemos la corriente molecular  $I_M$ . Está claro que la corriente no compensada que fluye por el interior del contorno, la crearán

las moléculas cuyas corrientes moleculares son atravesadas por las líneas del contorno. Veamos qué corriente no compensada crean las corrientes moleculares que el elemento  $\Delta l$  del contorno atraviesa. Supongamos que las corrientes moleculares son corrientes circulares de intensidad  $i$  y de superficie, encerrada en el interior de la corriente circular, igual a  $S$ . A esta corriente molecular le corresponde un momento magnético  $p_m$  de valor igual a  $iS$ . La dirección del momento magnético  $p_m$  forma un ángulo  $\alpha$  con el elemento  $\Delta l$  del

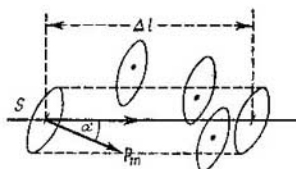


Fig. 233. Representación gráfica para calcular la cantidad de corrientes moleculares.

contorno (fig. 233). Está claro que  $\Delta l$  cortará solamente las corrientes moleculares cuyos centros caigan en el interior del cilindro de base  $S$  y de generatriz  $\Delta l$ . Si  $n_0$  es el número de moléculas por unidad de volumen, en el interior de un cilindro de éstos habrá  $n_0 S \Delta l \cos \alpha$  centros de corrientes moleculares. Estas corrientes moleculares formarán una corriente no compensada, abarcada por el elemento  $\Delta l$  del contorno. La intensidad de la corriente no compensada en el elemento  $\Delta l$  es:

$$i n_0 S \Delta l \cos \alpha. \quad (6)$$

La intensidad de la corriente molecular  $I_M$  abarcada por todo el contorno se obtiene sumando la expresión (6) según toda la longitud del contorno:

$$I_M = \sum i n_0 S \cos \alpha \Delta l. \quad (7)$$

Pero, según lo indicado,  $iS$  es el valor del momento  $p_m$  de la corriente molecular; por consiguiente,  $i n_0 S$  será el momento de la unidad de volumen, es decir, el vector de imanación  $\mathbf{P}_m$ . Así tenemos que, según la (7):

$$I_M = \sum \mathbf{P}_m \Delta l \cos \alpha = \sum (\mathbf{P}_m)_t \Delta l,$$

donde  $(\mathbf{P}_m)_t$  es la proyección del vector de imanación sobre el elemento  $\Delta l$ . Colocando este valor obtenido de  $I_M$  en la ecuación (5) de la circulación del vector  $\mathbf{B}$ , obtenemos que:

$$\sum B_t \Delta l = 4\pi [I + \sum (\mathbf{P}_m)_t \Delta l].$$

Pasemos a la izquierda los miembros que contienen la proyección del vector de imanación, de donde:

$$\sum [B_t - 4\pi \langle \mathbf{P}_m \rangle_t] \Delta l = 4\pi I.$$

Como se ha indicado más arriba,  $\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{P}_m$  es el vector de excitación magnética:

$$\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{P}_m = \mathbf{H}.$$

Por consiguiente obtenemos que la expresión de la circulación del vector de excitación magnética es

$$\sum H_t \Delta l = 4\pi I.$$

De esta manera tenemos que la circulación del vector de excitación magnética, incluso cuando hay un cuerpo magnético es igual al producto de  $4\pi$  por la intensidad de la corriente *macroscópica* que abarca el contorno. La magnitud de la corriente molecular no entra en la ecuación de la circulación del vector de excitación magnética.

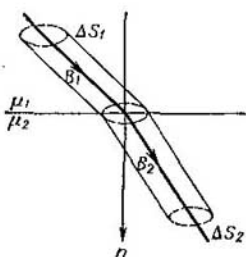
Veamos el comportamiento de las líneas de inducción en la superficie límite de dos sustancias de diferente permeabilidad magnética. Supongamos que tenemos una superficie divisoria de sustancias, cuyas permeabilidades magnéticas sean  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . Si tomamos un pequeño sector  $\Delta S$  de la superficie divisoria, este sector se puede considerar plano, y el campo en sus proximidades, de uno y otro

Fig. 234. Flujo del vector de inducción a través de las superficies elementales  $\Delta S_1$  y  $\Delta S_2$ .

lado, uniforme. El valor del vector de inducción en la sustancia de permeabilidad magnética  $\mu_1$  lo llamaremos  $\mathbf{B}_1$ , y en la sustancia de permeabilidad magnética  $\mu_2$ ,  $\mathbf{B}_2$ . Junto a la superficie divisoria, el vector de inducción  $\mathbf{B}$  se puede descomponer en dos: uno  $\mathbf{B}_n$ , perpendicular a la superficie límite, y otro  $\mathbf{B}_t$ , paralelo a la superficie. Entonces,

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_{1n} + \mathbf{B}_{1t}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_{2n} + \mathbf{B}_{2t}.$$

Establezcamos primeramente la relación entre las componentes normales de los vectores de inducción magnética de ambos lados de la superficie divisoria. Para ello veamos el flujo de inducción magnético que atraviesa la superficie cerrada de forma de cilindros truncados (fig. 234), de bases  $\Delta S_1$  y  $\Delta S_2$  iguales y paralelas al sector  $\Delta S$  límite, y de generatrices paralelas a las líneas de inducción





en los lugares en que se halla la parte dada del cilindro. El flujo total a través de la superficie de este cilindro, como a través de cualquier superficie cerrada, es igual a cero, según la (4). Este flujo consta de dos partes: del flujo  $\Delta\Phi_1$  que atraviesa la base  $\Delta S_1$ , y del flujo  $\Delta\Phi_2$  que atraviesa la base  $\Delta S_2$ , ya que el flujo a través de la superficie lateral es igual a cero por ser paralelo a las líneas de inducción. Por consiguiente tenemos que:

$$\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = 0. \quad (8)$$

Si el sentido de las líneas de inducción es el indicado en la fig. 234, el flujo  $\Delta\Phi_2$  será positivo, y el  $\Delta\Phi_1$ , negativo. Dirijamos la normal  $n$  a la superficie divisoria desde la primera sustancia hacia la segunda; entonces, para la base  $\Delta S_2$  este sentido será el correspondiente a la normal exterior, y para la base  $\Delta S_1$  tendrá sentido contrario a la normal exterior, por lo tanto, para los flujos  $\Delta\Phi_1$  y  $\Delta\Phi_2$  que atraviesan las superficies  $\Delta S_1$  y  $\Delta S_2$  obtenemos que

$$\Delta\Phi_1 = -B_{1n}\Delta S_1, \quad \Delta\Phi_2 = B_{2n}\Delta S_2.$$

El signo menos de la primera igualdad es debido a que  $B_{1n}$  es la proyección de  $B$  sobre la dirección contraria a la normal exterior al elemento  $\Delta S_1$  de superficie. Colocando estos valores de  $\Delta\Phi_1$  y  $\Delta\Phi_2$  en la expresión (8) y observando que  $\Delta S_1 = \Delta S_2$ , tenemos que

$$-B_{1n} + B_{2n} = 0,$$

de donde

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (9)$$

Así tenemos que la componente normal del vector de inducción magnética no varía al pasar de una sustancia a otra.

Para aclarar la correlación existente entre las componentes tangenciales de los vectores  $B_1$  y  $B_2$  volvamos a la expresión de la circulación del vector  $H$ . Sea el contorno  $abcd$  (fig. 235), según el cual se toma la circulación, de lados  $ad$  y  $bc$  paralelos a la superficie divisoria de las sustancias, y  $ab$  y  $dc$  infinitamente pequeños. Como en la línea divisoria de las sustancias se supone que no hay corrientes, la circulación  $H$  según este contorno será igual a cero. Por otra parte, esta circulación puede expresarse por el vector  $H$  en ambos medios. Recorramos el contorno  $abcd$  según las agujas del reloj y elijamos positiva la dirección de la tangente a la superficie divisoria que va de izquierda a derecha (fig. 235). Como los sectores  $ab$  y  $dc$  se suponen infinitamente pequeños, toda la circulación vendrá expresada



Fig. 235. Contorno de recorrido en la superficie divisoria de dos cuerpos magnéticos.

en función de las magnitudes que se refieran a los sectores  $bc$  y  $da$ . Llamando  $H_1$  y  $H_2$  a la excitación respectiva de ambas sustancias, tenemos que:

$$H_{1t}bc - H_{2t}da = 0.$$

El signo menos del segundo término es debido a que en el medio de la sustancia inferior, el sentido elegido del recorrido es contrario al sentido positivo de la tangente. Como  $bc=da$ , reduciendo tenemos que

$$H_{1t} = H_{2t}, \quad (10)$$

es decir, la componente tangente del vector de excitación no varía cuando se pasa a través de la superficie divisoria de dos sustancias. Pasando a examinar el vector de inducción magnética, basándonos en la ecuación  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , tenemos que

$$H_{1t} = \frac{B_{1t}}{\mu_1}, \quad H_{2t} = \frac{B_{2t}}{\mu_2},$$

En estas ecuaciones  $B_{1t}$  y  $B_{2t}$  son las proyecciones de los vectores  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{B}_2$  sobre la tangente a la superficie divisoria. Colocando estos valores de  $H_{1t}$  y  $H_{2t}$  en la (9), obtenemos que

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (11)$$

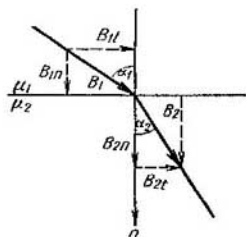


Fig. 236. Refracción de las líneas de inducción magnética  $\mathbf{B}$  en la superficie divisoria de dos cuerpos magnéticos.

Así tenemos que la componente tangente del vector de inducción magnética  $\mathbf{B}$  de ambos lados de la superficie divisoria de las dos sustancias está en razón directa con las permeabilidades magnéticas  $\mu$  de estas sustancias.

Las relaciones (9) y (11) determinan la variación del vector de inducción magnética  $\mathbf{B}$  al pasar a través de la superficie divisoria. Es fácil ver que cuando la superficie divisoria no es perpendicular a las líneas de inducción, éstas sufren una refracción. Descomponiendo cada uno de los vectores  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{B}_2$  en dos, uno paralelo a la superficie divisoria y otro perpendicular a la misma (fig. 236), tenemos que

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\frac{B_{1t}}{B_{1n}}}{\frac{B_{2t}}{B_{2n}}}$$

de donde utilizando las relaciones (9) y (11), hallamos que

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (12)$$

es decir, las tangentes de los ángulos formados por los vectores de inducción con las normales a las dos sustancias están en razón directa con las permeabilidades magnéticas de estas sustancias. Al pasar de una sustancia de permeabilidad magnética  $\mu$  menor a otra sustancia de permeabilidad magnética mayor, las líneas de inducción se inclinan desviándose de la perpendicular y se hacen más densas, es decir, la cantidad de líneas correspondiente a la unidad de superficie normal a ellas es mayor. Si las líneas de inducción en una sustancia son perpendiculares a la superficie divisoria, estas líneas pasarán a la otra sustancia sin refractarse; en este caso y debido a que  $B_{1t}=0$  y  $B_{2t}=0$ , los vectores de inducción serán iguales a sus componentes normales:

$$B_1 = B_{1n}, \quad B_2 = B_{2n},$$

y de la condición expresada por la (9) obtenemos que

$$B_1 = B_2,$$

es decir, el vector de inducción en este caso no varía al atravesar la superficie divisoria de las dos sustancias. En el § 203 ya hemos utilizado esta relación.

En la ley de refracción de las líneas de inducción se basa la llamada *pantalla magnética*. La pantalla magnética se debe a que gracias a la refracción de las líneas de inducción, en la cavidad interna de la sustancia de mayor valor de permeabilidad magnética, el campo magnético es casi igual a cero. En la fig. 237 se representa un ejemplo de disposición de las líneas de inducción de un cuerpo de gran permeabilidad magnética con cavidad interna. Las pocas líneas de inducción en el interior de la cavidad indican lo débil que es el campo en ella. Prácticamente, como pantallas magnéticas se utilizan macizas envolturas de hierro.

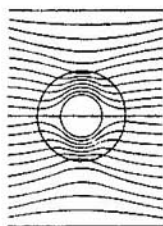


Fig. 237. Disposición de las líneas de inducción magnética en un cuerpo con cavidad interna.

§ 207. Analogía entre los campos magnético y electrostático. Históricamente, la ciencia del magnetismo surgió como estudio de los imanes permanentes. Según la tradición, los pastores del Asia Menor de los alrededores de la ciudad de Magnesia observaron que los trozos de piedra imán magnetita que se hallaban allí, se atraían mutuamente. Del nombre de esta ciudad surgieron las palabras

magnetita y derivadas. Los trozos de magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) poseen un notable magnetismo remanente, por lo tanto son imanes naturales permanentes.

A finales del siglo XVIII Coulomb, al establecer la ley de acción recíproca entre cargas eléctricas puntuales, intentó hallar una ley análoga para la acción recíproca de los imanes. Efectivamente, descubrió que si se toman dos imanes delgados y largos, la fuerza de atracción recíproca entre los polos, en el caso de que la distancia entre ellos sea pequeña en comparación con la longitud de los imanes y grande en comparación con la sección transversal, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Coulomb introdujo el concepto de "cantidad de magnetismo", gracias a lo cual el ulterior estudio del campo magnético se basaba en la analogía con el campo electrostático. Esta analogía se ha reflejado en el parecido de las denominaciones de las magnitudes que caracterizan los campos electrostático y magnético: hablamos de la intensidad  $E$  del campo electrostático y de la inducción electrostática  $D$ ; de la excitación magnética  $H$  (intensidad del campo magnético) y de la inducción magnética  $B$ . No obstante, estas analogías no siempre, ni mucho menos, resultaron justas y en correspondencia con la naturaleza de los campos electrostático y magnético.

Hemos visto que entre los fenómenos electrostáticos y magnéticos hay una profunda diferencia. Hay cargas eléctricas; las líneas de fuerza del campo electrostático empiezan en unas cargas y terminan en otras o se pierden en el infinito. Sin embargo, el campo magnético surge alrededor de las corrientes eléctricas, las líneas del campo magnético circundan a las corrientes eléctricas formando curvas cerradas o se pierden en el infinito, y en la realidad no hay ninguna clase de cargas magnéticas. La analogía se puede hacer solamente entre el campo magnético del solenoide, o de un imán recto permanente (en la región del espacio exterior al solenoide o al imán), y el campo de un dipolo eléctrico.

La ley de la proporcionalidad inversa de las fuerzas respecto al cuadrado de la distancia entre los cuerpos de acción recíproca (ley de Coulomb) corresponde a un campo caracterizado por una distribución radial y uniforme de las líneas de fuerza. Los cuerpos cargados de electricidad, a distancias grandes en comparación con sus dimensiones, presentan una distribución de esta clase de líneas de fuerza (véase la fig. 16); en correspondencia con ello, las fuerzas de acción recíproca entre cuerpos cargados vienen expresadas con mucha exactitud por la ley de Coulomb, si sus dimensiones son pequeñas en comparación con la distancia entre los cuerpos. Pero con ninguna combinación de corrientes o de imanes permanentes se puede crear un campo magnético de líneas de fuerza distribuidas radial y uniformemente. Cerca del polo de un imán largo y delgado,

solamente en una zona limitada (circunscrita por la línea de puntos en la fig. 238), las líneas de fuerza divergen en sentido radial. En correspondencia con ello, como acabamos de indicar, la ley de Coulomb tiene un sentido muy limitado, si se aplica a la acción recíproca de los polos magnéticos.

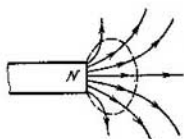


Fig. 238. Líneas de fuerza del campo magnético en las proximidades del extremo de un imán rectilíneo y largo.

En el estudio del campo electrostático se ha sobrentendido que la intensidad  $\mathbf{E}$  del campo en el vacío es una magnitud que determina la fuerza que actúa sobre la carga  $q$ :

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}. \quad (1)$$

En presencia de un dieléctrico, debido a su polarización, se forma un campo complementario  $\mathbf{E}'$ , de donde:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}', \quad (2)$$

donde  $\mathbf{E}_0$  es la intensidad del campo creada por estas cargas ("libres"). Con el nombre de *inducción electrostática*  $\mathbf{D}$  se ha sobrentendido el vector relacionado con el vector de intensidad del campo  $\mathbf{E}$  en el punto dado por la ecuación:

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}. \quad (3)$$

El estado de polarización de un dieléctrico se ha determinado por el vector de polarización:

$$\mathbf{P}_e = \kappa_e \mathbf{E}. \quad (4)$$

La susceptibilidad eléctrica  $\kappa_e$  está relacionada con la constante dieléctrica  $\epsilon$  mediante la ecuación  $\epsilon = 1 + 4\pi\kappa_e$ . Basándose en esta ecuación, de las fórmulas (3) y (4) obtenemos que

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}_e. \quad (5)$$

En el caso de un dieléctrico homogéneo que llena por completo el espacio ocupado por el campo, la intensidad del campo comple-

\*) Para diferenciar las correspondientes magnitudes eléctricas y magnéticas utilizaremos los subíndices  $e$  y  $m$ .

mentario va dirigida contra  $E_0$  y satisface la igualdad (véase el § 142):

$$E' = -4\pi P_c. \quad (6)$$

En este caso, comparando las ecuaciones (2) y (5), tenemos que  $D = E_0$ , es decir, el vector de inducción electrostática  $D$  en un dieléctrico homogéneo que llena por completo el espacio ocupado por el campo, coincide con la intensidad del campo  $E_0$  de las cargas libres en el vacío. En el caso general, la coincidencia no tiene lugar (a excepción de los casos de simetría especial; véase la llamada de la pág. 89).

En los fenómenos magnéticos, como se ha visto (véase lo dicho en el § 196), la fuerza que actúa en el vacío sobre un elemento de conductor con corriente es

$$\Delta f = H_0 I \Delta l \operatorname{sen} \alpha, \quad (1a)$$

donde  $H_0$  es la excitación magnética en el vacío. Si hay un cuerpo magnético, la excitación total (denominada inducción magnética  $B$ ) se compone de la excitación magnética  $H_0$  creada por las corrientes que fluyen por los conductores, y de la excitación complementaria  $H'$  creada por el cuerpo magnético magnetizado:

$$B = H_0 + H'. \quad (2a)$$

Se entiende por *excitación magnética  $H$*  en un cuerpo magnético el vector relacionado con el de inducción magnética  $B$  en el punto dado por la relación:

$$H = \frac{1}{\mu} B. \quad (3a)$$

El estado del cuerpo magnético lo caracteriza el vector de imantación

$$P_m = \kappa_m H = \frac{\kappa_m}{\mu} B. \quad (4a)$$

La susceptibilidad magnética  $\kappa_m$  está relacionada con la permeabilidad magnética  $\mu$  mediante la ecuación:  $\mu = 1 + 4\pi\kappa_m$ . Basándonos en esta relación, de las fórmulas (3a) y (4a) obtenemos que

$$H = B - 4\pi P_m. \quad (5a)$$

En el caso de un cuerpo magnético homogéneo que llena por completo el espacio ocupado por el campo, la excitación magnética  $H'$  complementaria puede ir tanto en sentido contrario al de  $H_0$  (cuerpos diamagnéticos), como según el sentido de  $H_0$  (cuerpos paramagnéticos). En ambos casos se verifica la ecuación (véase el § 202):

$$H' = 4\pi P_m. \quad (6a)$$

En este caso, comparando las fórmulas (2a) y (5a) obtenemos que  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ . No obstante, hay que tener en cuenta que esta coincidencia de la excitación magnética  $\mathbf{H} = 1/\mu \mathbf{B}$  en un cuerpo magnético con la excitación  $\mathbf{H}_0$  creada en el vacío por las corrientes que fluyen por los conductores, solamente tiene lugar para el cuerpo magnético homogéneo que llena por completo el espacio ocupado por el campo.

En el caso general de un cuerpo magnético heterogéneo, esta coincidencia no tiene lugar. Efectivamente, es fácil convencerse de que la excitación magnética  $\mathbf{H}$  en un cuerpo magnético heterogéneo no coincide con la excitación magnética  $\mathbf{H}_0$  creada por las corrientes que fluyen por los conductores, y que se determina por la ley de Biot-Savart-Laplace. En el § 206 hemos visto que en la superficie divisoria de dos cuerpos magnéticos, la componente normal del vector de inducción magnética  $\mathbf{B}$  satisface la condición véase la fórmula (6)]:

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

Utilizando la relación entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  expresada por la fórmula (3a), obtenemos que

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

es decir, hallamos que en la superficie divisoria de dos cuerpos magnéticos, la componente normal de la excitación magnética  $H_n$  es discontinua; en esto se diferencia  $\mathbf{H}$  de la excitación  $\mathbf{H}_0$ , cuyas líneas de fuerza son continuas en todas partes. En un cuerpo magnético heterogéneo, cuyas propiedades varían continuamente de punto a punto, también se produce una variación de  $\mathbf{H}$  originada por la heterogeneidad del cuerpo magnético.

De la comparación de las fórmulas (2) y (2a) se deduce que (a pesar del nombre que lleva) la inducción magnética  $\mathbf{B}$  es análoga a la intensidad del campo electrostático  $\mathbf{E}$ . La diferencia consiste en que el campo magnético complementario  $\mathbf{H}'$  puede tener sentido inverso respecto a  $\mathbf{H}_0$  (cuerpos diamagnéticos), o el mismo sentido que  $\mathbf{H}_0$  (cuerpos paramagnéticos); de donde la inducción magnética  $\mathbf{B}$  puede ser menor o mayor que  $\mathbf{H}_0$ .

La excitación magnética  $\mathbf{H}$  en un cuerpo magnético es análoga a la inducción electrostática  $\mathbf{D}$ , como se deduce al comparar las fórmulas (3), (5) y (3a) y (5a). De la comparación de estas mismas fórmulas se deduce que la magnitud inversa de la permeabilidad magnética  $1/\mu$  es análoga a la constante dieléctrica  $\epsilon$ . La comparación de las fórmulas (4) y (4a) demuestra que la magnitud  $\kappa_m/\mu$  es análoga a  $\kappa_e$ . Hemos visto también que el vector de la inducción electrostática  $\mathbf{D}$  coincide con el vector de la intensidad del campo electrostático  $\mathbf{E}_0$  de las cargas libres solamente en el caso de un

dieléctrico homogéneo que llene por completo el espacio ocupado por el campo; en el caso general, el vector  $D$  se diferencia del  $E_0$ ; por consiguiente, también en este caso el vector  $D$  es análogo al  $H$ .

Los dieléctricos se parecen a las sustancias diamagnéticas. Para la inmensa mayoría de las sustancias, la constante dieléctrica  $\epsilon$  no depende de  $E$ ; por lo tanto, en electrostática la mayoría de los cuerpos no revelan el fenómeno de histéresis ni poseen polarización electrostática remanente. Una excepción de ello son la sal de Seignette y algunas sales de titanio (véase el § 146), que revelan poseer histéresis y electrización remanente, y a este respecto son análogas a las sustancias ferromagnéticas.

§ 208. Determinación de los vectores  $H$  y  $B$  en función de las fuerzas que actúan sobre un cuadro recorrido por una corriente. En el § 200 hemos señalado las dificultades en determinar el vector  $B$  en función de las fuerzas que actúan sobre un conductor situado

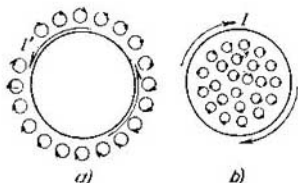


Fig. 239. Suma de corrientes moleculares en la superficie de la cavidad.

en el interior de un cuerpo magnético. En un cuerpo magnético sólido hay que hacer una cavidad y, colocando en su interior un cuadro recorrido por una corriente, se puede determinar la excitación magnética en la cavidad. La magnitud de esta excitación, siendo iguales las demás condiciones, depende de las dimensiones y de la forma de la cavidad.

Demostremos que se pueden elegir una forma y dimensiones de la cavidad en que el valor de la excitación medida en ella, coincida bien con el valor de  $H$ , bien con el de  $B$  para los puntos del interior del cuerpo magnético. Las partes del cuerpo magnético exteriores a esta cavidad crearán, en el interior de la misma una excitación magnética complementaria  $H''$ , debido a lo cual la acción sobre el cuadro se determina por la excitación magnética en el interior de la cavidad  $H_{cav}$ , que es

$$H_{cav} = B + H''. \quad (1)$$

El valor de  $H''$  dependerá de las dimensiones y forma de la cavidad.

Sea en el interior del cuerpo magnético una larga cavidad cilíndrica de pequeño diámetro y de eje paralelo al vector  $B$ . Consideraremos que la magnetización del cuerpo magnético es debida a que las corrientes moleculares tienen la misma orientación. Entonces, en la superficie límite de la cavidad (fig. 239, a) se crea una corriente no compensada  $I'$ ; si las corrientes elementales van diri-



gidas según las agujas del reloj, la corriente  $I'$  irá contra las agujas del reloj. Está claro que esta corriente  $I'$  es de igual magnitud y de signo contrario a la corriente  $I$  (fig. 239, b) creada como resultado de la suma de las corrientes elementales en la superficie del trozo del cuerpo magnético, que coincide en dimensiones y forma con las de la cavidad. En la pág. 351 se ha indicado que esta corriente  $I'$  crea en el interior del trozo del cuerpo magnético que circunda, una excitación:

$$H' = 4\pi I = 4\pi P_m,$$

donde  $P_m$  es el valor numérico del vector de imanación. (Estrictamente hablando esta fórmula es justasolamente para el caso de un cilindro infinitamente largo. Para un cilindro de longitud finita se cumple en lo que se refiere a la parte media, y la exactitud será mayor, cuanto menor sea el radio del cilindro, sobre todo si es muy pequeño en comparación con su longitud). Como la corriente  $I'$  va en sentido contrario a la  $I$ , en el interior de la cavidad se creará una excitación:

$$H'' = -H' = -4\pi P_m.$$

De esto y de la (1), hallamos que la excitación en el interior de la cavidad de la forma dada será

$$H_{\text{cav}} = B + H'' = B - 4\pi P_m,$$

o, según la (5a) del § 207,

$$H_{\text{cav}} = H.$$

Por consiguiente nos da que la excitación en la parte media de la cavidad en forma de cilindro largo, de pequeño diámetro y de eje paralelo al vector  $\mathbf{B}$ , coincide con la excitación magnética  $\mathbf{H}$ , en el interior del cuerpo magnético, determinada por la ecuación (3a) del § 207.

Si en el interior de una cavidad de éstas se coloca un cuadro, el momento de fuerzas que actúa sobre él permite medir el valor de  $\mathbf{H}$ .

Si la cavidad se hace en forma de un cilindro corto y ancho de bases perpendiculares a la dirección del vector  $\mathbf{B}$ , la corriente  $I'$  crea en la parte media de esta cavidad un campo extremadamente débil:  $H'' \cong 0$ ; por consiguiente, en el interior de una cavidad de éstas:

$$H_{\text{cav}} = B.$$

Así tenemos que en la parte media de una cavidad en forma de cilindro corto y ancho y de eje paralelo al vector  $\mathbf{B}$ , la excitación magnética coincide con el valor del vector de inducción magnética  $\mathbf{B}$  en el cuerpo magnético.

En el § 145 hemos visto que la intensidad del campo electrostático en la parte media de una cavidad hecha en un dieléctrico en forma de cilindro largo y estrecho y de generatriz paralela a las líneas de fuerza del campo, coincide con la intensidad  $E$  del campo en el dieléctrico. Si la cavidad del dieléctrico tiene la forma de un cilindro corto de bases perpendiculares a las líneas de fuerza, la intensidad del campo en la parte media de una cavidad de esta clase coincide con el valor del vector de inducción electrostática  $D$  del dieléctrico. De lo dicho se podría suponer, en contra de la analogía señalada antes, que el vector  $H$  es análogo al  $E$  y el vector  $B$  es análogo al  $D$ ; pero esto no es así. En el caso del dieléctrico, la excitación magnética en el interior de un cilindro largo y estrecho coincide con  $E$ , ya que las cargas superficiales complementarias  $\sigma'$  que aparecen en las superficies de la cavidad, *no influyen sensiblemente sobre los puntos interiores de la cavidad*. Sin embargo, en el caso de un cuerpo magnético, *las corrientes complementarias  $I'$  que surgen en las superficies de la cavidad, no influyen sensiblemente, si la cavidad tiene la forma de cilindro corto y ancho*. En este caso, la intensidad del campo en la cavidad coincide con el vector  $B$ . De esta manera resulta de nuevo que  $E$  y  $B$  son análogos. También resulta que, en el caso del dieléctrico, las cargas superficiales complementarias desempeñan un papel notable en la cavidad en forma de cilindro corto y ancho, mientras que en el caso en un cuerpo magnético, las corrientes complementarias desempeñan un papel notable en la cavidad en forma de cilindro largo y estrecho. De esto y en correspondencia con lo dicho anteriormente se obtiene que el vector  $D$  se debe comparar con el  $H$ .

Por último indiquemos que el concepto del vector de inducción magnética  $B$  se puede aclarar también de otra manera, a saber, pasando a examinar la estructura microscópica de la sustancia.

En lugar de intentar determinar el vector  $B$  por la acción que ejerce sobre un conductor macroscópico cualquiera recorrido por una corriente, podemos determinarlo por la fuerza que actúa sobre una corriente elemental originada por el movimiento de una partícula elemental cualquiera cargada. Por ejemplo, podemos considerar el electrón moviéndose según una órbita circular en el átomo. Este electrón en movimiento es equivalente a una corriente circular y experimenta la acción del campo magnético exterior. La excitación magnética determinada con ayuda de esta corriente elemental se compone de la excitación magnética  $H_0$  originada por las corrientes que fluyen por los conductores microscópicos, y de la excitación magnética originada por las moléculas vecinas. Llamemos  $H_{\text{micro}}$  a esta excitación total. El valor de  $H_{\text{micro}}$  dependerá de la distancia a que coloquemos la corriente elemental de una u otra molécula. Pero como *término medio* de muchos puntos elegidos

arbitrariamente, se obtiene un valor  $H_{\text{micro}}$  determinado solamente por los valores de  $H_0$  y el valor medio de la excitación magnética complementaria  $H'$  que hay en el interior del cuerpo magnético como resultado de la ordenación y orientación de sus partículas. Así tenemos que

$$\bar{H}_{\text{micro}} = H_0 + H',$$

es decir, el valor  $\bar{H}_{\text{micro}}$  coincide con el del vector de inducción magnética  $B$ .

§ 209. Diferencia entre el solenoide y el imán. Las diferencias, según el concepto físico, de los vectores  $H$  y  $B'$  indicadas en el párrafo anterior se revelan muy claramente en el caso de acción mutua de solenoides e imanes.

Al situar un solenoide en un cuerpo magnético cualquiera, *el cuerpo magnético llena todo el espacio tanto fuera del solenoide como en el interior del mismo*. Los conductores que forman el solenoide están en el interior del cuerpo magnético. Si el cuerpo magnético es uniforme e infinito, sobre cada elemento del conductor actúa una fuerza de parte del campo magnético exterior que, según la fórmula (2a) del § 200, es

$$\Delta f = IB \sin \alpha \cdot \Delta l;$$

el momento de las fuerzas que actúan sobre todo el solenoide, vendrá determinado por la inducción magnética  $B = \mu H$ , donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio. Siendo invariables las corrientes, el momento de fuerzas que actúan sobre un solenoide, aumenta  $\mu$  veces cuando un cuerpo magnético homogéneo e infinito llena el espacio.

Otra cosa ocurre con el imán. El imán es un cuerpo sólido y la parte del espacio que ocupa el propio imán no puede ser ocupada al mismo tiempo por otro cuerpo magnético. En otras palabras, *el imán resulta que siempre está en la cavidad interna de un cuerpo magnético y la función de esta cavidad hay que tenerla en cuenta*.

Sobre el imán actuará el campo que surge en el interior de la cavidad. Sea un imán recto y largo colocado en un campo magnético creado por ciertas corrientes y orientado según las líneas de fuerza del campo. En este caso la cavidad tiene la forma de un cilindro largo y estrecho y de eje paralelo a las líneas de fuerza del campo. Como hemos visto en el § 208, en el interior de esta cavidad, la excitación magnética es igual a  $H$ . Por lo tanto, *sobre un imán recto y largo, de parte del campo magnético de la corriente actúa una fuerza determinada por la excitación magnética  $H$* . Por consiguiente, la presencia del cuerpo magnético no varía la fuerza que

actúa sobre el imán. En el § 205 se ha indicado que la fuerza que actúa sobre el polo magnético  $m$ , es

$$f = mH;$$

ahora vemos que esta fórmula es justa tanto en el vacío como en el caso de que haya un cuerpo magnético, si el imán considerado es recto y largo.

En el vacío, el imán recto y largo y el solenoide son completamente equivalentes, si son iguales sus momentos magnéticos. Pero si hay un cuerpo magnético, se percibe la diferencia entre el imán y el solenoide. Efectivamente, si tenemos dos solenoides y la fuerza de acción recíproca entre ellos en el vacío es igual a  $f$ , al llenar el espacio con un cuerpo magnético de permeabilidad magnética  $\mu$ , la fuerza de acción recíproca entre ellos es ya igual a  $\mu f$ . Si nosotros examinamos la acción recíproca entre un solenoide y un imán recto y largo, la fuerza de acción recíproca entre ellos seguirá siendo la misma al llenar el espacio con un cuerpo magnético. Así tenemos que al sustituir un solenoide por un imán, la fuerza disminuye  $\mu$  veces. Si sustituimos ambos solenoides por imanes, habrá que tener en cuenta que en el cuerpo magnético hay dos cavidades. Gracias a ello, resulta que la fuerza de acción recíproca entre dos imanes rectos y largos disminuye  $\mu$  veces. Así tenemos que *si dos imanes rectos y largos actúan recíprocamente en el vacío con una fuerza  $f$ , al llenar el espacio con un cuerpo magnético de permeabilidad magnética  $\mu$ , la fuerza de acción recíproca entre ellos es igual a  $\frac{1}{\mu} f$ .*

Resumiendo lo dicho arriba tenemos que:

1) la fuerza de acción recíproca entre corrientes es directamente proporcional a  $\mu$ ;

2) la fuerza de acción recíproca entre un imán recto y largo y una corriente no depende de  $\mu$ ;

3) la fuerza de acción recíproca entre dos imanes rectos y largos es inversamente proporcional a  $\mu$ . Esta dependencia respecto a  $\mu$  de las fuerzas de acción recíproca de los imanes permanentes, es justa solamente cuando se trate de imanes rectos y largos. Para imanes de forma cualquiera no se pueden indicar simples relaciones de dependencia entre las fuerzas y la permeabilidad magnética  $\mu$  del cuerpo magnético en que se halla sumergido el imán, ya que la función del cuerpo magnético, como se ha dicho, depende de la forma de la cavidad que forma en él el imán.

§ 210. Trabajo del desplazamiento de un contorno con corriente por un campo magnético. En el § 200 se ha indicado que sobre un elemento de corriente que se halla en un campo magnético, actúa una fuerza que es  $\Delta f = BI\Delta l \sin \alpha$ , cuya dirección se determina por

la regla de la mano izquierda. De esto se deduce que el desplazamiento de un sector con corriente por un campo magnético está relacionado con el trabajo que realiza esta fuerza. Determinemos el valor de este trabajo.

Supongamos que tenemos un contorno con un sector rectilíneo y móvil de longitud  $l$  (fig. 240). Supongamos también que este contorno se halla en un campo magnético uniforme de sentido perpendicular al plano del dibujo alejándose del lector. El vector de inducción magnética  $B$  será, por consiguiente, constante y estará dirigido

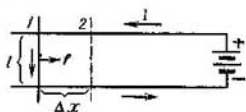


Fig. 240. Contorno con corriente y con un sector  $l$  móvil y rectilíneo.

perpendicularmente al sector  $l$ . Aplicando la regla de la mano izquierda vemos que sobre el sector móvil  $l$  del contorno actúa una fuerza  $f$  dirigida hacia la derecha. Como  $\sin \alpha = 1$ , la magnitud de esta fuerza será

$$f = IBl.$$

Bajo la acción de esta fuerza el sector se desplazará hacia la derecha. Consideraremos que la intensidad  $I$  de la corriente es siempre constante, por consiguiente, al desplazar el sector de la posición 1 a la posición 2, cuya distancia es  $\Delta x$ , la fuerza  $f$  realizará un trabajo:

$$\Delta A = f \cdot \Delta x = IBl \Delta x.$$

El producto  $l \Delta x$  es igual a la superficie  $\Delta S$  que barre el sector  $l$  al desplazarse, de donde

$$\Delta A = IB \Delta S. \quad (1)$$

Introduciendo en la (1) el concepto de flujo de inducción magnética

$$\Delta \Phi = B \cdot \Delta S, \quad (2)$$

tenemos que la expresión del trabajo será:

$$\Delta A = I \cdot \Delta \Phi. \quad (3)$$

Esta misma expresión es justa también para el caso en que el sector  $l$  no se desplace paralelamente a la fuerza  $f$ , en cuyo caso

$$\Delta A = f \Delta x \cos \beta = IBl \Delta x \cos \beta.$$

Pero  $l \Delta x \cos \beta$  es de nuevo la superficie barrida por el sector  $l$ , de donde

$$\Delta A = l B \Delta S = l \cdot \Delta \Phi.$$

De esta manera tenemos que *el trabajo mecánico de desplazamiento de un sector con corriente por un campo magnético es igual al producto de la intensidad de la corriente que fluye por el sector, por la magnitud del flujo de inducción magnética que atraviesa el sector.*

El resultado obtenido es fácil de generalizar para el caso de un campo cualquiera y una orientación mutua cualquiera entre el sector del contorno y el campo.

Sea un pequeño sector  $dl$  de un contorno con corriente. Dividamos el desplazamiento de este sector en pequeños desplazamientos  $dx$ . Consideraremos que el sector  $dl$  y el desplazamiento  $dx$  son tan pequeños que dentro de sus límites el

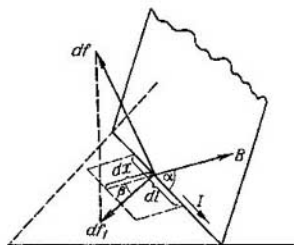


Fig. 241. Representación gráfica para calcular el trabajo de desplazamiento del sector con corriente  $dl$  en el campo magnético.

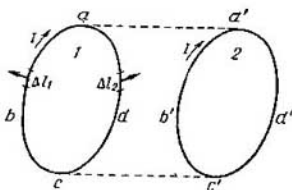


Fig. 242. Representación gráfica para calcular el trabajo de desplazamiento de un contorno cerrado con corriente en un campo magnético.

sector de inducción magnética es constante. Sea el vector  $B$  formando un ángulo  $\alpha$  cualquiera con la dirección  $dl$  (fig. 241). La fuerza  $df$  que actúa sobre el sector  $dl$  es

$$df = l B \operatorname{sen} \alpha \cdot dl.$$

El sentido de la fuerza  $df$ , que es perpendicular a  $B$  y a  $dl$ , se determina por la regla de la mano izquierda. Al desplazarse el sector  $dl$  a una distancia  $dx$ , barrerá cierta superficie plana de área  $dS$ . En este desplazamiento la fuerza realiza el trabajo:

$$dA = df_1 \cdot \cos \beta \cdot dx,$$

donde  $df_1$  es la proyección de la fuerza  $df$  sobre la superficie de desplazamiento, y  $\beta$  es el ángulo entre  $df_1$  y  $dx$ . Como la fuerza que actúa sobre el elemento de la corriente en el campo magnético siempre es perpendicular al vector de inducción magnética, está claro que la proyección de la fuerza  $df_1$ , que está en el plano de desplazamiento, vendrá determinada por la componente del vector de inducción perpendicular al plano de desplazamiento, de donde

$$df_1 = l B \perp dl.$$

donde  $B_{\perp}$  es la proyección del vector de inducción magnética sobre la perpendicular a la superficie de desplazamiento. De aquí que

$$dA = IB_{\perp} \cos \beta \cdot dl \, dx.$$

Pero  $\cos \beta \, dl \, dx = dS$ , de donde

$$dA = IB_{\perp} dS.$$

El producto del área de la superficie atravesada  $dS$  por la proyección del vector de inducción magnética sobre la perpendicular a esta superficie  $B_{\perp}$  es el flujo de inducción magnética  $d\Phi$  atravesado por el elemento  $dl$ , de donde

$$dA = I d\Phi,$$

que coincide por el sentido con la fórmula (3).

El resultado obtenido se puede aplicar al cálculo del trabajo de un contorno cerrado recorrido por una corriente desplazándose por un campo magnético, si la intensidad de la corriente se conserva constante durante todo el desplazamiento del contorno. Para ello, claro está, tendremos que dividir mentalmente el contorno en sectores y sumar el trabajo de las fuerzas aplicadas a estos sectores. En la fig. 242 se representa un contorno con corriente que se desplaza de la posición 1 a la 2. Supongamos que el desplazamiento del contorno tiene lugar en el plano del dibujo y el campo magnético es perpendicular al plano del dibujo alejándose del lector. La corriente fluye por el contorno según las agujas del reloj. En este caso, las fuerzas aplicadas a cada elemento  $\Delta l_1$  de la mitad  $abc$  del contorno forman ángulo obtuso con la dirección del desplazamiento, por consiguiente, realizan un trabajo negativo. El trabajo total de las fuerzas aplicadas el sector  $abc$  se obtiene, si sumamos el trabajo de los distintos elementos. El trabajo de desplazamiento de cada elemento es igual al producto de la intensidad de la corriente, por el flujo de inducción que atraviesa el sector  $abc$  al pasar a la posición  $a'b'c'$ :

$$A_1 = -I\Phi_1.$$

En la fig. 242 se ve que  $\Phi_1$  es el flujo de inducción magnética a través del área de la figura  $abcc'b'a'$ . El trabajo de desplazamiento del sector  $adc$  a la posición  $a'd'c'$  será positivo, ya que, según la regla de la mano izquierda, sobre los elementos  $\Delta l_2$  de este sector actúan unas fuerzas que forman un ángulo agudo con la dirección del desplazamiento. El valor de este trabajo será el producto de la intensidad de la corriente  $I$  por el flujo de inducción magnética atravesado por el sector  $adc$ . Este flujo  $\Phi_2$ , evidentemente será igual al flujo que atraviesa el área de la figura  $adcc'd'a'$ .

Así obtenemos que

$$A_2 = I\Phi_2.$$

El trabajo  $A$  resultante del desplazamiento del contorno es igual a la suma de los trabajos analizados:

$$A = A_1 + A_2 = I (\Phi_2 - \Phi_1). \quad (4)$$

Es fácil ver que la diferencia  $\Phi_2 - \Phi_1$  es igual a la variación del flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por el contorno con corriente. Efectivamente, el flujo a través de la superficie  $adcc'b'a'$  entra como parte componente del flujo  $\Phi_1$  y del  $\Phi_2$ , y, por consiguiente, la diferencia  $\Phi_2 - \Phi_1$  no contiene el flujo a través de esta superficie. Queda la diferencia de flujos a través de las superficies  $a'b'c'd'$  y  $abcd$ . Definitivamente tenemos que el trabajo mecánico realizado en el desplazamiento de un contorno cerrado, recorrido por una corriente de intensidad constante, de una posición a otra es igual al producto de la intensidad de la corriente del contorno por la diferencia de flujos de inducción magnética que atraviesan la superficie limitada por el contorno en su posición inicial y final. Por consiguiente, si el flujo de inducción magnética a través de una superficie limitada por un contorno no varía, el trabajo de desplazamiento es igual a cero. Si, por ejemplo, el contorno con corriente se desplaza con movimiento de traslación por un campo magnético uniforme, el flujo de inducción magnética a través de la superficie del contorno no varía y el trabajo resultante es igual a cero.

Al deducir las fórmulas (3) y (4) hemos supuesto que la intensidad  $I$  de la corriente permanece constante todo el tiempo. Después (cap. XX) veremos que el fenómeno de inducción electromagnética, en determinadas condiciones, puede variar la intensidad de la corriente del contorno durante su desplazamiento. Por eso, si en estas condiciones no se toman medidas especiales para mantener constante la intensidad  $I$  de la corriente en el contorno (por ejemplo, con ayuda de baterías o reóstatos complementarios conectados en el momento necesario), las fórmulas (3) y (4) serán justas solamente para un desplazamiento infinitamente pequeño del conductor en cuyo tiempo invertido la intensidad  $I$  de la corriente se puede considerar constante. En este caso, el trabajo de un desplazamiento finito se puede determinar integrando.

La expresión (4) nos da, además de la magnitud, el signo del trabajo realizado. Para ello hay que dejar establecido qué sentido del flujo de inducción se considera positivo. Consideremos que el flujo positivo crea las líneas de inducción magnética que forman un ángulo agudo con la dirección de la normal positiva a la superficie del contorno. El sentido positivo de la normal  $N$  está relacionado con el de la corriente del contorno mediante la regla del sacacorchos (fig. 243). Entonces, si el flujo de inducción a través de la superficie del contorno aumenta, las fuerzas que actúan sobre los



elementos del contorno realizan un trabajo total positivo; si el flujo a través de la superficie limitada por el contorno disminuye, el trabajo resultante de las fuerzas aplicadas al contorno es negativo.

Veamos unos cuantos casos particulares.

### 1. Trabajo de giro de un cuadro en un campo magnético uniforme.

Sea un cuadro plano de superficie  $S$  por el cual fluye una corriente continua  $I$ . Tracemos la normal  $N$  al plano del cuadro relacionando su sentido positivo con el de avance del sacacorchos al girar éste según la corriente.

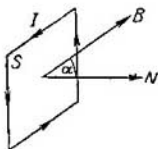


Fig. 243. Representación gráfica para calcular el flujo de inducción magnética a través de la superficie de un cuadro.

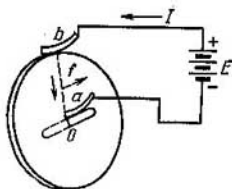


Fig. 244. Disco con contactos de corredera.

Sea  $\alpha$  el ángulo que forma la normal  $N$  con la dirección de las líneas de inducción  $B$  del campo magnético; entonces, el flujo de inducción magnética  $\Phi$  a través de la superficie del cuadro (fig. 243) será:

$$\Phi = BC \cos \alpha.$$

Al girar el cuadro se efectúa un trabajo [véase la fórmula (4)]:

$$A = IBC (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), \quad (5)$$

donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son los valores de los ángulos que ha formado la normal con la dirección de las líneas de inducción antes y después del giro respectivamente. Observando que  $IS = p_m$  es el momento magnético del cuadro, podemos escribir la ecuación (5) de la manera siguiente:

$$A = p_m B (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (6)$$

### 2. Trabajo de rotación de un disco con contactos de corredera.

Sea un disco metálico normal a las líneas de fuerza del campo magnético. El disco puede girar alrededor del eje  $O$  (fig. 244), que pasa por su centro paralelamente a las líneas de fuerza. La corriente se comunica al disco mediante los contactos de corredera  $a$  y  $b$  y lo atraviesa radialmente.\*) Si el campo magnético va en el sentido

\*) En realidad, la corriente no fluirá solamente a lo largo de un radio solo; pero esta suposición se puede hacer para simplificar el cálculo.

en que se aleja del lector y la corriente va según el radio del disco de arriba abajo, sobre la corriente, de parte del campo, actúa una fuerza dirigida hacia la derecha, y el disco girará. En este caso, el flujo de inducción a través del contorno de la corriente  $EbaE$  será constante, sin embargo, se realizará un trabajo. Esto es debido a que la corriente no fluye por conductores determinados, sino por diferentes radios del disco que gira continuamente. Al girar el disco un ángulo infinitamente pequeño  $\Delta\varphi$  se puede considerar que el radio según el cual fluye la corriente, gira un ángulo  $\Delta\varphi$  y barrerá la superficie

$$\Delta S = \frac{1}{2} R^2 \Delta\varphi,$$

donde  $R$  es el radio del disco. El flujo de inducción a través de esta superficie será  $\Delta\Phi = B\Delta S$ . Al girar el disco continuamente, nuevos y nuevos radios se pondrán en contacto con las correderas y la suma total de la superficie barrida por ello será

$$S = \sum \frac{1}{2} R^2 \Delta\varphi = \frac{1}{2} R^2 \sum \Delta\varphi;$$

para una vuelta del disco tendremos que  $\sum \Delta\varphi = 2\pi$ , de donde  $S = \pi R^2$  y la variación del flujo de inducción  $\Phi_2 - \Phi_1 = BS = \pi R^2 B$ . Según la fórmula (4), el trabajo realizado en este caso será

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = \pi R^2 IB.$$

Este ejemplo demuestra que la fórmula (4) hay que utilizarla con cuidado en el caso cuando la corriente fluya por conductores móviles macizos, si hay contactos de corredera.

§ 211. **Leyes del circuito magnético.** El conjunto de cuerpos magnéticos por los cuales pasa un flujo de inducción magnética se denomina *circuito magnético*. Si el flujo pasa totalmente de un medio a otro, se dice que los flujos de inducción magnética de uno y otro medio están *conectados en serie*; si el flujo se bifurca en distintas partes que después vuelven a unirse, se dice que las partes bifurcadas del flujo están unidas en paralelo.

Ejemplo de circuito magnético no bifurcado puede ser el flujo de inducción  $\Phi$  a través de las espiras de un toroide. Veamos un toroide, cuyo número de espiras sea  $N$ , la longitud del eje,  $l$ , y la sección transversal,  $S$ . Supongamos que las espiras están arrolladas sobre un núcleo, cuyo material posee una permeabilidad magnética igual a  $\mu$ . Sea  $I$  la intensidad de la corriente que fluye por la bobina. Escribamos la ecuación del flujo  $\Phi$  que atraviesa la sección transversal del toroide. Considerando el campo uniforme y paralelo al eje del toroide, tenemos que

$$\Phi = SB = \mu HS.$$

Según la fórmula (1) del § 199, la excitación magnética  $H$  en el interior del toroide es igual a  $4\pi nI$ , donde  $n$  es el número de espiras por unidad de longitud del toroide, de donde

$$\Phi = 4\pi\mu nIS.$$

Observando que  $n = \frac{N}{l}$ , obtenemos que

$$\Phi = 4\pi\mu \frac{N}{l} IS.$$

que, evidentemente, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\Phi = \frac{4\pi NI}{l/\mu S} \quad (1)$$

Esta fórmula tiene un parecido formal con la de Ohm para un circuito de corriente no bifurcado.

Efectivamente, si llamamos a la expresión  $4\pi NI$  del numerador de la fórmula (1) *fuerza magnetomotriz*  $\mathcal{E}_m$ , y a la expresión  $l/\mu S$  del denominador *resistencia magnética* o *reluctancia*  $r_m$ , es decir, si hacemos

$$\mathcal{E}_m = 4\pi NI, \quad (2)$$

$$r_m = \frac{l}{\mu S}, \quad (3)$$

la fórmula (1) se transforma en:

$$\Phi = \frac{\mathcal{E}_m}{r_m} \quad (1a)$$

De la fórmula (1a) se deduce que *el valor del flujo de inducción magnética es igual a la relación entre la fuerza magnetomotriz  $\mathcal{E}_m$  y la resistencia magnética  $r_m$  del circuito*. Obsérvese que la resistencia magnética es directamente proporcional a la longitud del circuito e inversamente proporcional a la sección transversal y a la permeabilidad magnética del circuito. La fuerza magnetomotriz es proporcional al producto  $NI$ , que es la intensidad total de la corriente abarcada por el circuito magnético.

Si en la fórmula (1) expresamos la intensidad de la corriente  $I$  en unidades electromagnéticas absolutas,  $l$  y  $S$  en centímetros y en centímetros cuadrados respectivamente, el flujo de inducción  $\Phi$  se obtendrá en maxwelios. Si en la fórmula (1) medimos la intensidad de la corriente en amperios y el flujo en maxwelios, habrá que introducirle un coeficiente numérico igual a 0,1; entonces,

$$\Phi \text{ (Mx)} = 0,1 \frac{4\pi NI \text{ (A)}}{l/\mu S},$$

donde  $l$  y  $S$ , como antes, se expresan en centímetros y en centímetros cuadrados. Más abajo (§ 223) se hablará de las unidades de la

fuerza magnetomotriz  $\mathcal{E}_m$  y del flujo de inducción magnética  $\Phi$  en el sistema internacional de unidades.

La introducción de estas magnitudes, fuerza magnetomotriz y resistencia magnética (reluctancia), está justificada porque las analogías entre los circuitos eléctrico y magnético no se reducen solamente a lo examinado, sino que son más amplias. Para demostrar esto examinemos los sectores unidos en serie de un circuito magnético. Como ejemplo podemos citar el toroide arriba examinado, si suponemos que en el núcleo de longitud  $l_1$  y de permeabilidad magnética  $\mu$ , hay una rendija de longitud (anchura)  $l_0$  con aire y de permeabilidad magnética  $\mu_0$  (fig. 245). Esta rendija, como ahora veremos, varía sensiblemente la magnitud del flujo.

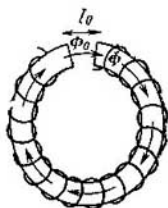


Fig. 245. Flujo magnético a través de la rendija  $l_0$ .

Para hallar el flujo utilizaremos la expresión de la circulación del vector  $\mathbf{H}$  según el contorno que representa la línea media del toroide. La corriente total que abarca este contorno, es igual a  $IN$  (la corriente de todas las espiras del toroide), por lo tanto obtenemos que

$$\sum H_l \Delta l = 4\pi IN.$$

Como la dirección de la excitación magnética en el interior del toroide coincide con la de su línea media, llamando  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{H}_0$  a la excitación en el núcleo y en la rendija respectivamente, tenemos que

$$4\pi NI = Hl_1 + H_0l_0$$

o, introduciendo en lugar de las excitaciones  $H$  y  $H_0$  las inducciones magnéticas  $B = \mu H$  y  $B_0 = \mu_0 H_0$ :

$$4\pi NI = \frac{B}{\mu} l_1 + \frac{B_0}{\mu_0} l_0. \quad (4)$$

Introduzcamos en esta relación el flujo  $\Phi$ , que es el mismo en el núcleo y en la rendija.

Sea  $S$  la sección transversal de las espiras del toroide y  $S_0$ , la sección transversal de la parte de la rendija por el cual pasa el flujo (se supone que la sección del flujo en la rendija es constante), de donde

$$B = \frac{\Phi}{S}, \quad B_0 = \frac{\Phi}{S_0},$$

después de lo cual, la fórmula (4) adquiere la forma:

$$4\pi NI = \Phi \left( \frac{l_1}{S\mu} + \frac{l_0}{S_0\mu_0} \right). \quad (5)$$

Pero  $4\pi NI$  es la fuerza magnetomotriz  $\mathcal{E}_m$ , y  $l_1/S\mu$  y  $l_0/S_0\mu_0$  pueden representarse respectivamente como las resistencias magnéticas del núcleo  $r_m$  y de la rendija  $r_{m0}$ , de donde

$$\mathcal{E}_m = \Phi (r_m + r_{m0}), \quad \text{o} \quad \Phi = \frac{\mathcal{E}_m}{r_m + r_{m0}}.$$

Llamando  $R_m$  a la suma de las resistencias  $r_m + r_{m0}$ , obtenemos que

$$\Phi = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m}. \quad (5a)$$

El flujo  $\Phi$  de nuevo viene expresado por la relación entre la fuerza magnetomotriz  $\mathcal{E}_m$  y la resistencia magnética  $R_m$ , en que *la resistencia magnética del circuito  $R_m$  es igual a la suma de resistencias magnéticas de sus sectores unidos en serie.*

Analicemos ahora el caso de conexión en paralelo de un circuito magnético. El esquema de esta conexión viene representado en la fig. 246.

En la parte media del circuito hay una bobina que crea la fuerza magnetomotriz  $\mathcal{E}_m = 4\pi NI$ . El flujo de inducción  $\Phi$  en la parte media del circuito se bifurca formando los flujos  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  en las dos partes correspondientes del circuito, por consiguiente

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Para cada una de las partes paralelamente unidas tenemos las relaciones:

$$\Phi_1 = \frac{\mathcal{E}_m}{r_{m1}}, \quad \Phi_2 = \frac{\mathcal{E}_m}{r_{m2}},$$

donde  $r_{m1}$  y  $r_{m2}$  son las resistencias magnéticas de las partes del circuito por donde pasan los flujos, y  $\mathcal{E}_m$ , la fuerza magnetomotriz total. Como  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ ,

$$\Phi = \mathcal{E}_m \left( \frac{1}{r_{m1}} + \frac{1}{r_{m2}} \right) = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m},$$

de donde se deduce que la resistencia total  $R$  de las partes del circuito conectadas en paralelo viene determinada por la relación:

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{r_{m1}} + \frac{1}{r_{m2}} \quad (6)$$

que es análoga a la resistencia de los conductores conectados en paralelo.

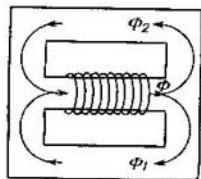


Fig. 246. Circuito magnético en paralelo (en derivación).

En estas leyes del circuito magnético se basa la construcción de los electroimanes, es decir, de los instrumentos que permiten obtener intensos campos magnéticos. En los electroimanes, el campo magnético lo crea la corriente que fluye por el solenoide. Para intensificar el campo del solenoide se introducen núcleos de hierro. Para aclarar la función del núcleo de hierro analicemos el siguiente caso. Sea un toroide de longitud de eje igual a  $l$ , de área de la sección transversal,  $S$ , y de número total de espiras,  $N$ . Al pasar la corriente de intensidad  $I$  por el interior del toroide, se crea un campo magnético de excitación:

$$H = 4\pi \frac{N}{l} I. \quad (7)$$

Introduzcamos ahora en el interior del toroide un núcleo de hierro de manera que llene casi todo el toroide, y que la parte no ocupada por el hierro sea una pequeña rendija (fig. 245). Determinemos la excitación magnética  $H_0$  en la rendija (entrehierro). Para ello hallemos primeramente el flujo de inducción en el interior del toroide según la fórmula (5):

$$\Phi = \frac{4\pi N I}{\frac{l_1}{S\mu} + \frac{l_0}{S_0}}; \quad (8)$$

aquí,  $l_1$  es la longitud del núcleo de hierro;  $\mu$ , su permeabilidad magnética;  $l_0$ , la anchura de la rendija;  $S_0$ , el área de la sección del flujo en la rendija (la permeabilidad magnética del aire en la rendija  $\mu_0$  se considera igual a 1). Si la rendija es tan pequeña que  $l_0 \ll \frac{l_1}{\mu}$ , se puede despreciar el término  $\frac{l_0}{S_0}$  del denominador de la fórmula (8) por ser muy pequeño en comparación con el  $\frac{l_1}{S\mu}$ , y tendremos que

$$\Phi = 4\pi \frac{N}{l_1} I S \mu.$$

La inducción en el núcleo,  $B = \frac{\Phi}{S}$ , será

$$B = 4\pi \frac{N}{l_1} I \mu.$$

Si la rendija es muy estrecha, las líneas de inducción pasarán normalmente a la superficie divisoria del núcleo y de la rendija, por eso la inducción  $B_0$  en la rendija será igual a la inducción  $B$  en el núcleo (véase el § 206).

En la zona del entrehierro, donde la permeabilidad magnética es  $\mu_0 = 1$ , la excitación magnética es  $H_0 = B_0$ ; de donde, suponiendo

aproximadamente que  $l_1=l$ , tenemos que

$$H_0 = 4\pi \frac{N}{l} I \mu.$$

Comparando esta ecuación con la (7) vemos que en una rendija bastante estrecha, la excitación magnética es  $\mu$  veces mayor que la creada en el toroide sin núcleo.

Estos toroides con núcleo son los electroimanes anulares. Habitualmente, a los electroimanes de laboratorio se les da otra forma; pero para que sea efectivo el empleo del núcleo de hierro, el circuito magnético debe estar casi cerrado, con una pequeña rendija. En la

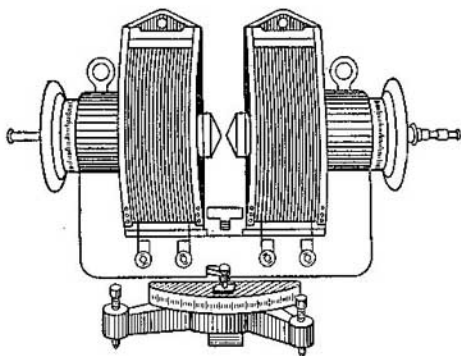


Fig. 247. Electroimán.

fig. 247 se representa uno de los tipos usuales de electroimanes de laboratorio. Para apreciar en lo justo la función del núcleo de los electroimanes, hay que recordar que para el hierro, material de que se hace siempre el núcleo, la permeabilidad magnética  $\mu$  depende de la excitación magnética; por eso, la función del núcleo a distintas excitaciones magnéticas es diferente. Si la rendija del circuito magnético del electroimán es estrecha, la excitación magnética  $H_0$  en ella será igual a la inducción  $B$  en el núcleo. La relación de dependencia entre  $B$  y la excitación magnética  $H$  en el núcleo viene representada en la fig. 220. La excitación magnética  $H$  en el núcleo es proporcional a la intensidad de la corriente  $I$  de la bobina del electroimán. De aquí que la relación de dependencia entre  $B$ , y, por consiguiente, entre la excitación magnética  $H_0$ , en la rendija,

y la intensidad  $I$  de la corriente de la bobina se exprese por una curva parecida a la de la fig. 220. En la fig. 248 se representa esta relación de dependencia entre  $H_0$  e  $I$  para un electroimán determinado con un núcleo de hierro de clase determinada. En la misma figura se representa una recta que indica el incremento de  $H$  con el aumento de la intensidad  $I$  de la corriente. Si en el electroimán no hubiese núcleo, el campo magnético que crearía tendría la excitación  $H$ . Como se ve, al principio  $H_0$  aumenta con la intensidad

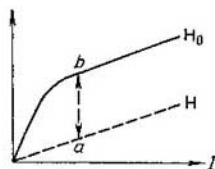


Fig. 248. Dependencia entre la excitación magnética  $H_0$  del campo entre los polos del electroimán y la intensidad de la corriente  $I$  de la bobina.

de la corriente mucho más de prisa que  $H$ ; esto tiene lugar hasta que se llegue a la saturación y sea grande el valor de la permeabilidad magnética  $\mu$  del hierro. Alcanzada la saturación, el aumento de  $H_0$  es de carácter lineal, permaneciendo todo el tiempo la excitación magnética  $H_0$  mayor que  $H$  en la misma magnitud, determinada por el segmento  $ab$ .

Analícemos el siguiente ejemplo concreto. Sea  $l_1=60$  cm la longitud del núcleo de hierro del toroide (fig. 245);  $l_0=0,1$  cm, la anchura de la rendija;  $S=12$  cm<sup>2</sup>, el área de la sección transversal del toroide;  $N=1000$ , el número total de espiras, y supongamos que por las espiras fluye una corriente de 1 A de intensidad. La permeabilidad magnética  $\mu$ , como se ha indicado, no sólo depende de la clase del hierro, sino también de la magnitud de la excitación magnética  $H$  determinada por la intensidad  $I$  de la corriente. Supongamos que para las condiciones del ejemplo dado sea  $\mu=600$ .

Determinemos la excitación magnética  $H_0$  en el entrehierro. El flujo de inducción en el toroide será

$$\Phi = \frac{0,4\pi N I a}{\frac{l_1}{S\mu} + \frac{l_0}{S_0}}$$

donde  $I_0$  es la intensidad de la corriente en amperios. Si la rendija es estrecha, la inducción en ella es igual a la del núcleo, y  $S_0$  se puede suponer igual a  $S$ . La excitación magnética  $H_0$  en el entrehierro, numéricamente igual a la inducción magnética, se expresará, por consiguiente, en función del flujo  $\Phi$  de la siguiente manera:

$$H_0 = \frac{\Phi}{S} = \frac{0,4\pi N I a}{\frac{l_1}{\mu} + l_0}$$

Colocando en esta ecuación los datos del problema hallamos que

$$H_0 = \frac{0,4 \cdot 3,14 \cdot 1000 \cdot 1}{\frac{60}{600} + 0,1} \text{ Oe} \cong 6280 \text{ oerstedios.}$$



si el toroide no tuviese el núcleo de hierro, la excitación magnética sería igual a

$$H = 0,4\pi \frac{N}{l} I_a = 0,4 \cdot 3,14 \cdot \frac{1000}{60} I_a \cong 21 \text{ oerstedios.}$$

Así vemos que si hay núcleo, la excitación magnética en el entrehierro es 300 veces mayor. Si el entrehierro es más ancho, la excitación magnética en él será menor.

§ 212. Ecuación de Kirchof para el circuito magnético. Los cálculos del circuito magnético complejo se realizan con ayuda de ecuaciones análogas a las de Kirchof en el circuito eléctrico.

En la fig. 246 se representa un circuito con sectores conectados en paralelo. En los lugares donde el flujo se bifurca, la magnitud del flujo que arriba es igual a la suma de los flujos que se alejan. Si convenimos en considerar positivos los flujos que llegan, y negativos los que se alejan, en cada lugar de bifurcación ("nudo") se cumplirá la condición de que la suma algebraica de los flujos del "nudo" es igual a cero:

$$\sum \Phi = 0. \quad (1)$$

Las ecuaciones (1) son análogas a las primeras ecuaciones de Kirchof en el circuito con corrientes bifurcadas.

Si se separa en un circuito magnético un contorno cerrado cualquiera, aplicándole la ecuación de la circulación del vector  $H$ , obtenemos que

$$\oint H l = 4\pi \sum NI. \quad (2)$$

Aquí la suma se extiende a todos los sectores del contorno cerrado:  $\sum NI$  expresa la suma de los productos de los números de espiras que abarca el contorno, por la intensidad de la corriente que fluye por ellos. La magnitud  $NI$  se debe considerar positiva, si el recorrido se hace en el mismo sentido que el del campo creado por la corriente  $I$ , y negativa, en el caso contrario. Expresando la excitación magnética en función del flujo

$$H = \frac{\Phi}{S\mu},$$

donde  $S$  es la sección transversal del flujo, y  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio, podemos escribir la ecuación (2) de la forma siguiente:

$$\sum \frac{\Phi l}{S\mu} = 4\pi \sum NI \quad (3)$$

o

$$\sum \Phi r_m = \sum \mathcal{E}_m.$$

Esta relación es análoga al segundo sistema de ecuaciones de Kirchof: la suma de los productos de los flujos magnéticos por las resistencias magnéticas de un circuito cerrado es igual a la suma de las fuerzas magnetomotrices que actúan en el circuito.

Es importante señalar que el parecido de las leyes del circuito magnético y del circuito eléctrico es puramente formal, ya que los fenómenos físicos no tienen nada de común.

Para ilustrar la comodidad del empleo de estas relaciones examinemos unos ejemplos de cálculo de circuitos magnéticos.

Ejemplo 1. Sea un electroimán, cuyo núcleo tiene la forma representada en la fig. 249. Determinar la excitación magnética en la randa del electroimán, cuyo medio es el aire, si el número de amperio-vueltas es

$NI_a=1\ 800$ , la anchura de la rendija es  $l_0=2$  cm. y la resistencia magnética en la rendija es 30 veces mayor que la de cada uno de los sectores  $a$ ,  $b$ , y  $c$  del circuito. Las resistencias de los sectores  $a$ ,  $b$  y  $c$  son iguales.

**S o l u c i ó n.** Llamemos  $\Phi_a$ ,  $\Phi_b$ , y  $\Phi_c$ , a los flujos de inducción magnética respectivos en los sectores  $a$ ,  $b$  y  $c$ , y  $\Phi_0$  al flujo en la rendija. Como la permeabilidad magnética de la rendija es igual a la unidad, la excitación magnética en la rendija será

$$H_0 = \frac{\Phi_0}{S}, \quad (4)$$

donde  $S$  es el área de la sección transversal de la rendija.

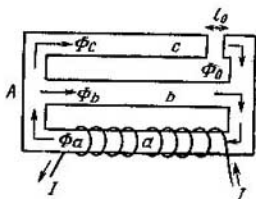


Fig. 249. Electroimán con el circuito magnético en derivación.

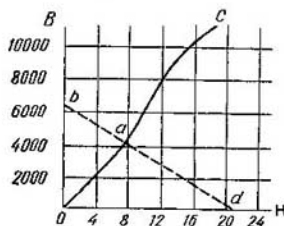


Fig. 250. Método gráfico para hallar la inducción magnética  $B$  del electroimán.

El segundo sistema de ecuaciones de Kirchhof para el contorno cerrado formado por los sectores  $a$ ,  $c$  y la rendija, y para el contorno formado por los sectores  $a$  y  $b$ , será

$$\Phi_a r_m + \Phi_c r_m + \Phi_0 \cdot 30 r_m = 0,4\pi N I_a; \quad (5)$$

$$\Phi_a r_m + \Phi_b r_m = 0,4\pi N I_a. \quad (6)$$

La fuerza magnetomotriz de ambos contornos es la misma y viene expresada en las unidades correspondientes suponiendo que  $I_a$  se da en amperios. Debido a la continuidad del flujo de inducción magnética, tenemos que

$$\Phi_0 = \Phi_c, \quad (7)$$

ya que todo el flujo del sector  $c$  pasa por la rendija. Examinando la bifurcación en el "nudo"  $A$  obtenemos la primera ecuación de Kirchhof:

$$\Phi_a = \Phi_0 + \Phi_b. \quad (8)$$

Utilizando las ecuaciones (7) y (8) escribiremos las (5) y (6) de la siguiente manera:

$$\Phi_a r_m + 31\Phi_0 r_m = 0,4\pi N I_a; \quad (5a)$$

$$\Phi_a r_m - \Phi_0 r_m = 0,4\pi N I_a; \quad (6a)$$

Multiplicando la (5a) por 2 y restándole la (6a), hallamos que

$$63\Phi_0 r_m = 0,4\pi N I_a. \quad (9)$$

La resistencia magnética de la rendija es igual a  $L \cdot S$  y la resistencia de los

sectores, según se ha establecido, es 30 veces menor, de donde

$$r_m = \frac{l_0}{S \cdot 30}.$$

Colocando este valor de  $r_m$  en la (9), hallamos el valor del flujo de inducción:

$$\Phi_0 = \frac{0,4 \cdot \pi N I_a}{63 r_m} = \frac{0,4 \cdot \pi N I_a}{63 \cdot \frac{l_0}{S \cdot 30}},$$

de donde la excitación magnética  $H_0$  en la rendija, según la (4), será

$$H_0 = \frac{\Phi_0}{S} = \frac{0,4 \cdot \pi N I_a}{63 \cdot \frac{l_0}{30}} = \frac{0,4 \cdot 3,14 \cdot 1800}{63 \cdot \frac{2}{30}} \text{Oe} \approx 540 \text{Oe}.$$

**Ejemplo 2.** Determinar el valor de la excitación magnética  $H_0$  en la rendija del electroimán anular descrito en el ejemplo de la pág. 396, si la anchura de la rendija se aumenta hasta el valor de 0,2 cm. La relación de dependencia entre la inducción magnética  $B$  en el hierro del núcleo y la excitación magnética  $H$  viene dada por la curva  $OC$  de la fig. 250.

**Solución.** Llamando  $\Phi$  al flujo en el núcleo,  $\Phi_0$ , al de la rendija y  $r_m$  y  $r_{m0}$  respectivamente a las resistencias magnéticas del núcleo y de la rendija, el segundo sistema de ecuaciones de Kirchof para el circuito del electroimán será

$$\Phi r_m + \Phi_0 r_{m0} = 0,4 \pi N I_a \quad (10)$$

Considerando, como antes, que las áreas de las secciones de los flujos en el núcleo y en la rendija son iguales a  $S$ , tenemos que

$$\Phi = BS = \mu HS, \quad \Phi_0 = B_0 S,$$

$$r_m = \frac{l_1}{\mu S}, \quad r_{m0} = \frac{l_0}{S}.$$

Colocando estos valores de  $\Phi$ ,  $\Phi_0$ ,  $r_m$  y  $r_{m0}$  en la (10) hallamos que

$$H l_1 + B_0 l_0 = 0,4 \pi N I_a$$

y sustituyendo  $l_1$ ,  $l_0$ ,  $N$  e  $I_a$  por sus valores:

$$60H + 0,2B_0 = 1256.$$

Como la inducción magnética  $B_0$  en la rendija es igual a la inducción magnética  $B$  en el núcleo, esta ecuación se puede escribir de la manera siguiente:

$$60H + 0,2B = 1256. \quad (11)$$

Esta ecuación tiene dos incógnitas: la excitación magnética  $H$  y la inducción magnética  $B$  en el núcleo.

La segunda ecuación será la relación entre  $H$  y  $B$  expresada por la curva de la fig. 250. Para resolver estas ecuaciones utilizaremos el método gráfico, a saber, hallando el punto  $a$  de intersección de la recta  $bd$ , correspondiente a la ecuación (11), con la curva del gráfico (fig. 250). A este punto de intersección le corresponde la inducción  $B = 4000$  gaussios. Como  $B = B_0$ , y  $B_0$ , a su vez, es igual numéricamente a la excitación magnética  $H_0$  en la rendija, la excitación magnética buscada será

$$H_0 = 4000 \text{Oe}.$$

Si la anchura de la rendija es de 0,1 cm, la excitación magnética será  $H_0 = 6280$  Oe (véase la pág. 398). Como se ve, el aumento de la anchura de la rendija disminuye notablemente la excitación magnética.

§ 213. Instrumentos de medición. Las acciones recíprocas entre conductores por los cuales fluye una corriente, o entre conductores con corriente e imanes permanentes pueden servir para medir intensidades de corrientes. En estas acciones recíprocas se basa el funcionamiento de gran número de instrumentos de medición, los cuales se pueden dividir en tres clases: 1) instrumentos de acción recíproca entre imanes permanentes y conductores con corriente (magnetoeléctricos); 2) instrumentos, en los cuales las partes de

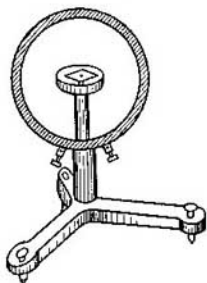


Fig. 251. Galvanómetro de tangentes.

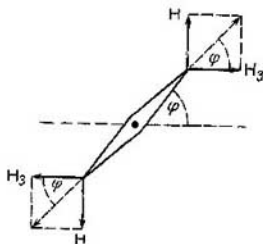


Fig. 252. Representación gráfica para determinar la posición de equilibrio de la aguja del galvanómetro de tangentes.

hierro dulce se introducen en las bobinas con corriente (electromagnéticos); 3) instrumentos, en los cuales actúan recíprocamente dos bobinas con corriente (electrodinámicos).

El instrumento más simple de la primera clase es el *galvanómetro de tangentes*, que consta de un arrollamiento circular en el interior del cual hay una pequeña aguja magnética (fig. 251) que puede girar alrededor del eje vertical. La aguja magnética debe ser muy pequeña para que la excitación magnética de la corriente de las espiras se pueda considerar constante en la zona donde se halla la aguja, e igual a la excitación en el centro de las espiras. Do donde, según lo dicho en el § 194, tenemos que

$$H = \frac{2\pi nI}{R}, \quad (1)$$

donde  $I$  es la intensidad de la corriente que fluye por las espiras,  $n$ , el número de espiras por unidad de longitud del conductor circular, y  $R$ , su radio. Si no hay corriente, la aguja se orienta según el meridiano magnético terrestre. Si en este momento hacemos coincidir el plano de las espiras con el del meridiano, con lo cual la aguja

se hallará en el plano de las espiras, el instrumento estará listo para su funcionamiento. Al conectarle la corriente, el campo magnético  $H$  de las espiras estará dirigido perpendicularmente al plano de las espiras y la aguja magnética se orientará según la dirección de la fuerza resultante de las dos que actúan sobre ella: de la del campo magnético y de la componente horizontal del campo magnético terrestre. En este caso, como se ve en la fig. 252, el ángulo  $\varphi$  que forma la aguja con el plano de las espiras, viene determinado por la relación:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{H_T},$$

donde  $H_T$  es la componente horizontal de la excitación magnética del campo de la Tierra. Colocando en lugar de  $H$  su valor según la (1), tenemos que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi n I}{RH_T},$$

de donde

$$I = \frac{RH_T}{2\pi n} \operatorname{tg} \varphi. \quad (2)$$

Si en esta ecuación se mide la componente horizontal de la excitación magnética del campo de la Tierra  $H_T$  en oerstedios y  $R$  en centímetros, la intensidad de la corriente se medirá en unidades electromagnéticas de intensidad de la corriente. La magnitud  $RH_T/2\pi n$  es constante para el instrumento dado en el punto dado de la esfera terrestre, de donde

$$I = C \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad (2a)$$

es decir, la intensidad de la corriente  $I$  es proporcional a la tangente del ángulo de inclinación  $\varphi$ . La constante  $C$  del galvanómetro se puede calcular, conociendo  $R$  y  $H_T$ , o se puede determinar graduando el galvanómetro, haciendo pasar por él corrientes de intensidades conocidas.

Una variante de este tipo es el instrumento de medición con un sistema móvil de imanes representado en la fig. 253. El sistema de imanes empleado en este instrumento se denomina *astático*. Consta de dos grupos de imanes, en uno de los cuales los polos norte de todos los imanes están dirigidos hacia un lado, y en el otro, en sentido contrario. Gracias a esta disposición de los imanes, la acción ejercida sobre ellos de parte del campo magnético de la Tierra está compensada. Cada uno de los grupos de imanes se coloca en el interior de una

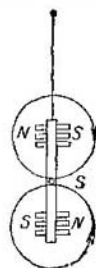


Fig. 253. Esquema del galvanómetro con un sistema astático de imanes.

bobina, por cuyas espiras fluye la corriente a medir. La corriente fluye por las bobinas en sentidos opuestos, por eso la acción de las bobinas se suma. Las fuerzas elásticas del hilo del cual se suspende el sistema de imanes, los mantiene en el plano de las bobinas cuando no hay corriente. Al pasar la corriente por las bobinas, el sistema de imanes gira y el ángulo de giro permite medir la intensidad de la corriente. Construyendo un sistema muy ligero de imanes suspendidos de un hilo fino de cuarzo y observando su inclinación por la desviación del rayo de luz reflejado de un espejo fijo en el hilo, se pueden medir corrientes de intensidades muy pequeñas, del orden de  $10^{-12}$ A.

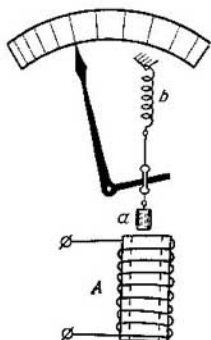


Fig. 254. Amperímetro de Dolivo-Dobrovolski.

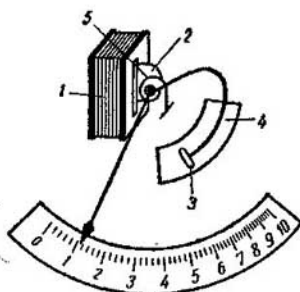


Fig. 255. Amperímetro técnico de corriente continua.

Al segundo tipo pertenecen unos instrumentos muy difundidos, pero menos sensibles, cuyo funcionamiento se basa en la atracción de un trozo de hierro hacia el interior de la bobina. El primero en proponer y en construir un instrumento de esta clase fue M. O. Dolivo-Dobrovolski, ingeniero electrotécnico ruso. El esquema de este instrumento se representa en la fig. 254, donde A es la bobina por la cual fluye la corriente a medir; a es una barra de hierro suspendida del resorte b. La corriente que fluye por la bobina, crea un campo magnético, bajo cuya acción se magnetiza la barra de hierro a y es atraída hacia la zona donde el campo magnético es más intenso, es decir, hacia el interior de la bobina. La barra está unida a la aguja indicadora, la cual gira al ser atraída la barra por la bobina.

En este mismo principio se basa la construcción de los amperímetros modernos para fines industriales. En la fig. 255 se representa el corte de un amperímetro de corriente continua, donde 1 es la bobina, 2, el pedazo de hierro que se magnetiza, mantenido por el

resorte 5. Al fluir la corriente por la bobina, el trozo de hierro 2 es atraído por la bobina introduciéndose en ella y haciendo girar la aguja indicadora. Para que el trozo de hierro y la aguja no realicen oscilaciones periódicas, se utiliza un amortiguador, que consta del émbolo 3 que se desplaza por el interior del cilindro 4.

Al primer tipo de instrumentos de medición pertenecen también los galvanómetros de cuadro (o bobina) móvil. En ellos, el campo magnético lo crea un imán permanente en forma de herradura. Los extremos polares *N* y *S* (fig. 256) están uno enfrente de otro con sus superficies cóncavo-cilíndricas de igual radio. Entre los polos se fija inmóvil un cilindro de hierro de radio un poco menor, con lo cual, el circuito magnético casi se cierra por completo, y las líneas de inducción se concentran en la rendija cilíndrica entre los polos y el cilindro. En esta rendija se coloca un cuadro *ad* que consta de varias espiras de un conductor por el cual fluye la corriente a medir. Un fino resorte *c* mantiene el cuadro en una posición determinada.

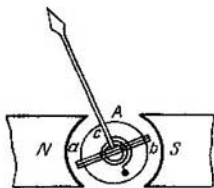


Fig. 256. Esquema de un galvanómetro de cuadro (bobina) móvil.

Al pasar la corriente por el cuadro, éste girará hasta que el momento de las fuerzas electromagnéticas que actúan sobre el cuadro, se equilibre con el momento mecánico del resorte. Una ligera aguja unida al cuadro indicará el ángulo de giro. Debido a la forma radial del campo magnético en la rendija en que se halla el cuadro, su ángulo de giro será proporcional, en amplios límites, a la intensidad de la corriente.

Los galvanómetros de este tipo son muy cómodos debido a la constancia de su sensibilidad y a la pequeña dependencia de sus indicaciones respecto a los campos exteriores. El principio en que se basa su funcionamiento se utiliza en la construcción de la mayoría de instrumentos de medición de corriente continua, tanto para fines técnicos como para los laboratorios. Se pueden utilizar como voltímetros y amperímetros, conectando en serie con el cuadro una gran resistencia constante, o en paralelo con el mismo una resistencia en derivación (véase lo dicho en el § 158).

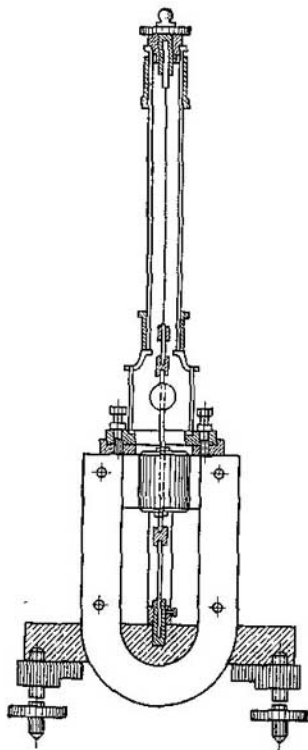


Fig. 257. Galvanómetro de espejo.

Instrumentos más sensibles se hacen suspendiendo el cuadro con corriente de un hilo fino (fig. 257). El ángulo de giro del cuadro se determina por la inclinación del rayo de luz que se refleja en un espejo fijo en el cuadro. Este galvanómetro se denomina *galvanómetro de espejo* (de reflexión o *galvanómetro D'Arsonval*).

Al tipo de instrumentos de medición con conductor móvil pertenece también el *galvanómetro de cuerda* (de hilo). Este galvanómetro consta de un conductor *ab* muy fino (fig. 258) extendido entre los polos de un imán de intenso campo. Al pasar la corriente por el conductor, éste se desplaza en correspondencia con la regla de la mano izquierda (véase el § 196). El desplazamiento del conductor se observa con ayuda de un microscopio de medición a través del núcleo de imán. La sensibilidad del galvanómetro de cuerda puede ser de  $10^{-12}$  A. Debido a la pequeña inercia del conductor fino, este galvanómetro se puede utilizar para medir y registrar en fotografía las corrientes que varían con el tiempo.

El límite de sensibilidad de todos los galvanómetros lo restringen las fluctuaciones de la intensidad de la corriente (véase el § 186).

Por último, se puede construir un instrumento de medición de tercer tipo (electrodinámico), en el cual no hay ninguna clase de imanes permanentes, y cuyas indicaciones se basan en la acción recíproca de los conductores con corrientes. El esquema más simple de un instrumento de esta clase es un cuadro con corriente suspendido en el interior de un solenoide (compárese con lo dicho en el § 197). La magnitud del momento de torsión aplicado al cuadro es proporcional a la intensidad de la corriente  $I_1$ , que fluye por el



cuadro, y a la intensidad de la corriente  $I_2$  que fluye por el solenoide. Si por el solenoide y por el cuadro fluye la misma corriente  $I$  a medir, la magnitud del momento de torsión del cuadro es proporcional a  $I^2$ .

La acción recíproca de dos bobinas con corriente también se utiliza para construir *vatímetros*, es decir, instrumentos que miden la potencia absorbida en el sector dado del circuito. Hay que recordar que la potencia del sector dado del circuito es proporcional

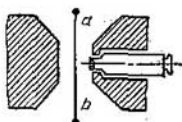


Fig. 258. Galvanómetro de cuerda.

a la intensidad de la corriente que fluye por el sector y a la diferencia de potencial  $V_1 - V_2$  de sus extremos. El vatímetro consta de dos bobinas de acción recíproca. Una de ellas tiene un arrollamiento de poca resistencia y está conectada en serie con el sector del circuito, y la otra, de gran resistencia conectada en paralelo con el sector del circuito. Por lo tanto, la intensidad de la corriente de la primera bobina será igual a la intensidad  $I$  de la del circuito, y la corriente  $I'$  de la segunda bobina será proporcional a la diferencia de potencial  $V_1 - V_2$ . A cada una de las bobinas se aplica un momento de torsión, cuya magnitud es proporcional a  $II'$ , es decir, proporcional a  $I(V_1 - V_2)$ , o, en otras palabras, es proporcional a la potencia  $W$  consumida en el sector del circuito.

En este mismo principio de utilización de dos bobinas se basa la construcción del *contador* que mide la energía eléctrica consumida en el tiempo  $t$ .

## *Desviación de las partículas cargadas en los campos eléctrico y magnético*

§ 214. Fuerza que actúa sobre una carga que se desplaza por un campo magnético. En el § 196 se ha indicado que, según la ley de Ampere, sobre un elemento de conductor de longitud  $\Delta l$ , por el cual fluye una corriente de intensidad  $I$ , de parte de un campo magnético exterior de excitación  $H$  actúa una fuerza:

$$f = I \Delta l H \sin \alpha, \quad (1)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre la dirección de la corriente y la excitación magnética. Todas las magnitudes de esta fórmula se deben medir en el sistema *CGSM*. El sentido de la fuerza  $f$  se determina por la regla de la mano izquierda (véase el § 196). Pero toda corriente es debida a un desplazamiento de partículas cargadas: electrones o iones. De aquí que sea natural considerar la fuerza que en un

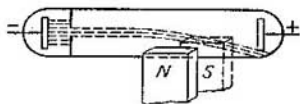


Fig. 259. Desviación del haz de electrones en un campo magnético.

campo magnético exterior actúa sobre un conductor recorrido por una corriente, como resultado de las fuerzas que actúan sobre las distintas partículas cargadas de parte del campo magnético. Esta deducción se puede comprobar directamente en la práctica: si a un tubo en el cual surge un haz de electrones, se aplica un campo magnético exterior creado, por ejemplo, por un imán permanente (fig. 259), el haz electrónico se desvía, lo cual se puede observar fácilmente por la desviación de la mancha luminosa que se forma en una pantalla fluorescente. En el tubo, en el cual se ha hecho el vacío, los electrones se desplazan libremente y solicitados por las fuerzas del campo magnético, se desvían recorriendo una trayectoria curvilínea. Si los electrones u otras partículas cargadas se desplazan por el interior de un cuerpo compacto (sólido o líquido), debido a las colisiones que sufren con los átomos del cuerpo, la fuerza que actúa sobre ellos se transmite a este cuerpo. Esta clase de transferencia de fuerzas se puede demostrar con ayuda del disco que gira,

representado en la fig. 244. En este caso los electrones se desplazan por el interior del disco según uno de sus radios. El campo magnético, perpendicular al plano del disco, los desvía hacia un lado. Debido a las continuas colisiones de los electrones con los átomos, la fuerza que actúa sobre los electrones se comunica al disco y éste gira. Un experimento análogo se puede realizar también en el caso de conducción electrolítica. Para ello se toma un recipiente en forma de anillo de paredes metálicas y de fondo de material aislador. Las paredes del recipiente servirán de electrodos. La corriente fluye en dirección radial a través del electrólito, que se halla entre las paredes. En el electrólito, la corriente es debida al movimiento de iones de ambos signos, teniendo en cuenta que los iones de diferente signo se desplazan en sentidos opuestos. Supongamos que el recipiente se introduce en un campo magnético perpendicular a su fondo. Esto se puede hacer colocando el recipiente, por ejemplo, en el extremo de un imán rectilíneo colocado verticalmente (fig. 260). En este caso, de parte del campo magnético actuarán sobre los iones en movimiento fuerzas perpendiculares a la dirección

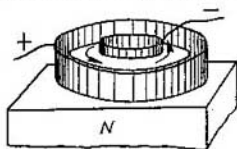


Fig. 260. Desviación de los iones electrolíticos en el campo magnético.

de su movimiento y dirigidas paralelamente a la superficie del líquido. Estas fuerzas tienen la misma dirección para con los iones de ambos signos, ya que éstos se desplazan en sentidos opuestos. Bajo la acción de estas fuerzas los iones empiezan a desviarse de su trayectoria y arrastran al líquido, en el cual surge una corriente circular.

Hallemos ahora la expresión de la fuerza que actúa de parte del campo magnético sobre una carga en movimiento. Para ello utilicemos la expresión (1) de la fuerza que actúa sobre un elemento del conductor recorrido por una corriente, es decir, por el cual se desplazan cargas. La intensidad  $I$  de la corriente numéricamente es igual a la carga transportada por unidad de tiempo a través de la sección transversal del conductor. Si la magnitud de una carga es  $e$  y el número de cargas transportadas a través de la sección transversal del conductor por unidad de tiempo es igual a  $n$ , tenemos que  $I = en$ . Está claro que  $n = n_0 v S$ , donde  $n_0$  es el número de cargas

por unidad de volumen que se desplazan,  $v$ , su velocidad, y  $S$ , el área de la sección transversal del conductor. Por consiguiente, para  $I$  obtenemos que

$$I = en_0vS.$$

Colocando este valor de  $I$  en la (1), tenemos que

$$f = en_0vS \Delta l H \operatorname{sen} \alpha. \quad (2)$$

Esta fuerza actúa sobre el elemento del conductor de longitud  $\Delta l$ , por consiguiente, es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre todas las cargas que se desplazan por dicho elemento del conductor; el número de estas cargas es  $n' = n_0S\Delta l$ . De aquí que la fuerza que actúa sobre una carga sea

$$\Delta f = \frac{f}{n'} = \frac{f}{n_0S \Delta l}.$$

Sustituyendo en esta ecuación la fuerza  $f$  por su valor según la (2), obtenemos que

$$\Delta f = evH \operatorname{sen} \alpha. \quad (3)$$

Esta fórmula, que se denomina *fórmula de Lorentz*, nos da la fuerza buscada que actúa sobre una carga que se desplaza a la velocidad  $v$  por un campo magnético de excitación  $H$ . Si  $v=0$ , según la fórmula de Lorentz tendremos también que  $\Delta f=0$ , que corresponde al hecho de que sobre una carga en reposo (que es el caso que tiene lugar en electrostática), el campo magnético no ejerce ninguna acción. En la fórmula de Lorentz hay que considerar la velocidad  $v$  respecto al sistema de coordenadas en que se mide la fuerza  $\Delta f$  y la excitación magnética  $H$ . La fuerza es perpendicular a la velocidad  $v$  de la carga y a la excitación magnética  $H$ , es decir, la fuerza

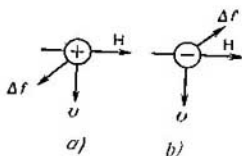


Fig. 261. Sentido de la fuerza de Lorentz  $\Delta f$  que actúa sobre una carga que se desplaza a la velocidad  $v$  por un campo magnético de excitación  $H$ .

$\Delta f$  es perpendicular al plano que contiene los vectores  $v$  y  $H$ . En el caso de desplazamiento de una carga positiva, el sentido de la fuerza se determina por la regla de la mano izquierda: si los dedos (excepto el pulgar) señalan el sentido de movimiento de la carga y la palma de la mano es perpendicular a las líneas del campo magnético de modo que éstas penetren en aquélla, el sentido de la fuerza  $\Delta f$  vendrá indicado por el dedo pulgar, perpendicular a los otros. Si se desplaza una carga negativa, esta fuerza irá en sentido contrario (fig. 261).

La magnitud de la fuerza de Lorentz depende no sólo del valor de la velocidad  $v$  y de la excitación magnética  $H$ , sino también

del  $\sin \alpha$ , es decir, de sus direcciones relativas. La fuerza adquiere el valor máximo cuando la carga se desplaza perpendicularmente a la dirección de la excitación magnética  $H$ , y es igual a cero, cuando se desplaza a lo largo de las líneas de fuerza del campo.

En la fórmula (3), en la cual no se ha introducido ningún coeficiente de proporcionalidad, todas las magnitudes deben medirse en unidades del sistema *CGSM*. Generalmente se utiliza un sistema mixto de unidades:  $e$  se mide en unidades *CGSE*, y la excitación magnética, en oerstedios; entonces, en la fórmula (3) hay que introducir un coeficiente de proporcionalidad:

$$\Delta f = \frac{1}{c} evH \sin \alpha, \quad (3a)$$

donde

$$\frac{1}{c} \cong \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \frac{\text{seg}}{\text{cm}}.$$

La fórmula (3a) se puede escribir en forma vectorial observando que la dirección de la fuerza  $\Delta f$  coincide con la del producto vectorial  $[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$ , de donde

$$\Delta f = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (3b)$$

Si además del campo magnético hay un campo eléctrico de intensidad  $E$ , la fuerza total que actúa sobre la carga  $e$  que se desplaza a la velocidad  $\mathbf{v}$ , es la suma de la fuerza eléctrica  $eE$ , y de la fuerza de Lorentz (3b):

$$\Delta f = e \left\{ E + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\}. \quad (3c)$$

La fuerza de Lorentz actúa no solamente sobre la carga elemental en movimiento (electrón o ion), sino también sobre cualquier carga macroscópica que se desplace por el campo magnético. Así, por ejemplo, si cargamos una esfera y la hacemos desplazarse por el campo magnético, aparece una fuerza que actúa sobre ella en dirección perpendicular a la de su movimiento y a la dirección del campo, y su magnitud vendrá determinada por la fórmula (3) o (3a). Sin embargo, como se puede ver fácilmente, en las cargas, campos y velocidades que habitualmente se logran, esta fuerza será pequeña. Así, por ejemplo, si una esfera de 1 cm de radio se carga hasta alcanzar el potencial de 3 000 V, su carga será igual a  $e = VC = \frac{3000}{300} \cdot 1 \text{ CGSE} = 10 \text{ CGSE}$ . Si esta esfera se desplaza perpendicularmente al campo de excitación magnética  $H = 1\,000 \text{ Oe}$  a la velocidad de  $v = 10^5 \text{ cm/seg}$  (velocidad de una bala!), aparece una fuerza:

$$\Delta f = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \cdot 10 \cdot 10^5 \cdot 1\,000 \text{ dinas} = \frac{1}{30} \text{ dinas},$$

es decir, es una fuerza muy insignificante, como se puede apreciar. A primera vista puede parecer que este resultado se halla en contradicción con la circunstancia de que sobre un conductor recorrido por una corriente, actúan en un campo magnético fuerzas considerables. Pero el caso es que en las corrientes de intensidad habitual, las cargas transportadas son muy grandes; es suficiente recordar que si la intensidad de la corriente es de 1 A, a través de la sección transversal del conductor se transporta por segundo 1 culombio, es decir,  $3 \cdot 10^9$  unidades *CGSE*.

Veamos, además, la acción del campo magnético sobre un electrón que se mueve alrededor de una carga positiva inmóvil según una órbita circular de radio

$r$  y con una velocidad angular  $\omega$ . El movimiento del electrón se debe a la influencia de la fuerza de Coulomb  $f = \frac{eE}{r^2}$ , donde  $e$  es la carga del electrón, y  $E$ , la magnitud de la carga positiva. Llamemos  $w_n$  a la aceleración centrípeta del electrón; entonces, según la segunda ley de Newton, tendremos que

$$mw_n = \frac{eE}{r^2}. \quad (4)$$

Supongamos ahora que tenemos un campo magnético uniforme de excitación  $H$  perpendicular al plano de la órbita del electrón. En este caso, a la fuerza de Coulomb  $f$  se debe añadir la fuerza de Lorentz:

$$\Delta f = \frac{e}{c} vH.$$

Introduciendo la velocidad angular del electrón  $\omega$ , obtenemos que  $v = r\omega$ , después de lo cual, la expresión de la fuerza de Lorentz adquiere la forma de

$$\Delta f = \frac{e}{c} r\omega H.$$

La fuerza de Lorentz va dirigida a lo largo del radio y, por consiguiente, si hay un campo magnético, la ecuación del movimiento (4) se sustituye por la ecuación:

$$mw_n = \frac{eE}{r^2} + \frac{e}{c} r\omega H.$$

Introduzcamos ahora un sistema de coordenadas que gire a una velocidad angular constante  $\Delta\omega$  alrededor del eje perpendicular al plano de la órbita del electrón. Si queremos escribir la ecuación respecto a este sistema que gira, a esta fuerza que actúa  $f + \Delta f$  deberemos añadir la fuerza centrífuga de inercia  $mr\Delta\omega^2$  y la fuerza de Coriolis  $2mr\omega\Delta\omega$  (véase el § 24 del t. I).

De esta manera, la ecuación del movimiento respecto al sistema que gira, adquiere la forma:

$$mw_n = \frac{eE}{r^2} + \frac{e}{c} r\omega H + 2mr\omega\Delta\omega + mr\Delta\omega^2.$$

Considerando que  $\Delta\omega$  es pequeño, despreciamos el miembro  $mr\Delta\omega^2$ ; entonces

$$mw_n = \frac{eE}{r^2} + \frac{e}{c} r\omega H + 2mr\omega\Delta\omega.$$

Si se elige la magnitud  $\Delta\omega$  de manera que

$$\frac{e}{c} r\omega H + 2mr\omega\Delta\omega = 0, \quad (5)$$

la ecuación del movimiento respecto a un sistema que gira, adquiere la forma de

$$mw_n = \frac{eE}{r^2}.$$

Comparando esta ecuación con la (4) tenemos que con respecto a un sistema de coordenadas que gira y para el cual se cumple la condición (5), se conserva la forma primitiva de la ecuación del movimiento, y, por consiguiente, la trayectoria primitiva del electrón. De esto se deduce que con respecto a un sistema de coordenadas inmóvil, el electrón continúa desplazándose en el campo magnético según una circunferencia de radio  $r$ , pero con otra velocidad angular  $\omega + \Delta\omega$ .

De la condición (5) hallamos el valor de  $\Delta\omega$ :

$$\Delta\omega = -\frac{eH}{2mc}. \quad (6)$$

En el caso general, cuando la dirección del campo magnético  $H$  forma un ángulo cualquiera con el plano de la órbita, el electrón conserva el aspecto primitivo de la trayectoria con relación a un sistema de coordenadas que gire respecto al vector  $H$  con una velocidad angular  $\Delta\omega$  constante. Esta perturbación de la órbita se denomina *precesión*, y la magnitud  $\omega\Delta$ , *velocidad angular de precesión*.

El resultado obtenido es justo, si el campo magnético exterior es de tal naturaleza, que la fuerza de Lorentz sea pequeña en comparación con la fuerza de Coulomb  $f$ , ya que sólo en este caso se puede despreciar el miembro  $mv\Delta\omega^2$ .

Debido a que la carga del electrón es de signo negativo, si  $H > 0$ , según la fórmula (6), la velocidad angular de precesión es  $\Delta\omega > 0$ . Como, por otro lado, siendo  $\omega < 0$ , el momento magnético del electrón que se desplaza según una órbita circular, es positivo (véase el § 201), se llega a la siguiente conclusión: el campo magnético exterior acarrea una disminución del valor numérico de la velocidad de rotación del electrón por la órbita, si el momento magnético de esta órbita está dirigido según el campo. De resultas de ello disminuye también el momento magnético inicial del electrón que gira. De esta manera, suponiendo la existencia de electrones que giran en el interior de los átomos y de las moléculas, se puede explicar el efecto diamagnético.

§ 215. Campo magnético de una carga en movimiento. Si un campo magnético exterior actúa sobre una carga en movimiento, a su vez, la carga en movimiento crea en el espacio que la circunda un campo magnético. Esto es debido a que la corriente eléctrica, que no es más que un conjunto de cargas en movimiento, crea en el espacio circundante un campo magnético. La magnitud del campo creado por la carga en movimiento se puede determinar partiendo de la fórmula de Biot-Savart-Laplace (véase el § 193), según la cual, un elemento de corriente  $\Delta l$  crea en el punto que se halla a la distancia  $r$  de este elemento, un campo magnético de excitación:

$$\Delta H = \frac{I\Delta l}{r^2} \sin \alpha,$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre la dirección de la corriente y el radio vector  $r$ .

Sustituyendo en esta fórmula la intensidad  $I$  de la corriente por su valor en función de la magnitud de las cargas  $e$  en movimiento, de su número por unidad de volumen  $n_0$  y de su velocidad  $v$ , es decir, suponiendo que  $I = en_0vS$ , obtenemos que

$$\Delta H = \frac{en_0vS\Delta l}{r^2} \sin \alpha,$$

donde  $S$  es el área de la sección transversal del conductor. Como por el elemento del conductor que examinamos, se desplazan  $n' = n_0S\Delta l$  partículas cargadas, se puede considerar que cada una de ellas crea

un campo de excitación:

$$\Delta H = \frac{ev}{r^3} \sin \alpha. \quad (1)$$

En esta fórmula, la velocidad  $v$  de la carga se considera con respecto al sistema de coordenadas en que se mide  $\Delta H$ .

Las líneas de excitación magnética  $\Delta H$  del campo creado por una carga en movimiento, son perpendiculares al plano que contiene al vector velocidad  $v$  y al radio vector  $r$ . Si la carga en movimiento es positiva, la dirección de la excitación magnética  $\Delta H$  se determina mediante la regla del sacacorchos: si el sentido del movimiento de

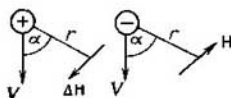


Fig. 262. Sentido de la excitación magnética  $\Delta H$  del campo creado por una carga que se desplaza a la velocidad  $v$ .

avance del sacacorchos lo hacemos coincidir con el de la velocidad  $v$ , el sentido de giro de su manilla nos dará el sentido de  $\Delta H$ ; si la carga en movimiento es negativa, el sentido de  $\Delta H$  será el opuesto (fig. 262). La fórmula (1), tal como se ha dado en este párrafo, es justa si se miden todas sus magnitudes en un mismo sistema de unidades, indiferentemente de que sea el *CGSM* o el *CGSE*.

Esto es debido a que la fórmula de Biot-Savart-Laplace sin coeficientes de ninguna clase, es justa tanto para el sistema *CGSM* como para el *CGSE*. Sin embargo, la fórmula de Ampere no tiene coeficiente numérico solamente en el sistema *CGSM* (véase el § 195), por eso, la fórmula de Lorentz (§ 214) también es justa solamente con unidades del sistema *CGSM*; si se quiere aplicar el sistema *CGSE*, el término de la derecha tiene que llevar el factor  $1/c^2$ .

Si se utiliza el sistema mixto de unidades midiendo la carga  $e$  en unidades *CGSE*, la magnitud  $\Delta H$ , en oerstedios,  $v$ , en cm/seg y  $r$  en centímetros, hay que introducir el coeficiente  $1/c$  en el término de la derecha de la fórmula (1):

$$\Delta H = \frac{1}{c} \frac{ev}{r^2} \sin \alpha. \quad (1a)$$

La fórmula (1a) determina la excitación magnética en el punto que se halla a la distancia  $r$  de la carga en movimiento. Pero los valores de  $\Delta H$  obtenidos por esta fórmula serán justos del todo solamente en el caso de distancias  $r$  y velocidades  $v$  no muy grandes; de lo contrario hay que tener en cuenta la velocidad finita de propagación del campo electromagnético.



La fórmula (1a), lo mismo que la fórmula de Lorentz, se puede escribir en forma vectorial. Como se ve en la fig. 262, la excitación magnética  $\Delta H$  tiene el mismo sentido que el producto vectorial  $[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]$ , de donde

$$\Delta H = \frac{e}{c} \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (2)$$

Si al mismo tiempo se desplazan dos cargas, entre ellas, además de las fuerzas eléctricas de acción recíproca, surge una fuerza magnética de acción recíproca debida a que cada una de las cargas crea un campo magnético en el espacio que la circunda y la segunda carga se mueve en este campo magnético. Comparemos las magnitudes de estas fuerzas. Sean dos cargas  $e$  y  $e'$  de un mismo signo situadas a la distancia  $r$  una de otra. Según la ley de Coulomb, la fuerza de acción recíproca de estas cargas es

$$f_e = \frac{ee'}{r^2}. \quad (3)$$

En la forma indicada, la ley de Coulomb no lleva ningún coeficiente de proporcionalidad distinto de la unidad, es decir, se ha supuesto que las cargas  $e$  y  $e'$  se miden en el sistema CGSE.

Supongamos ahora que ambas cargas se desplazan según las rectas paralelas  $ab$  y  $a'b'$  (fig. 263) a la misma velocidad  $v$ . La carga  $e$ , según la fórmula (1a), en el lugar en que está la segunda carga, crea un campo magnético, cuya excitación en unidades del sistema CGSE será

$$H = \frac{1}{c} \cdot \frac{ev}{r^2}.$$

Este campo será perpendicular al plano que contiene los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{r}$ .

Según la fórmula de Lorentz [ (3a) del § 214], este campo actuará sobre la carga  $e'$  con una fuerza

$$f_H = \frac{1}{c} e' v H = \frac{ee'}{r^2} \left( \frac{v}{c} \right)^2, \quad (4)$$

y esta fuerza estará dirigida hacia el lado de la carga  $e$ . Con una fuerza de igual magnitud actuará la carga  $e'$  sobre la  $e$ . Así tenemos que en la acción recíproca de dos cargas del mismo signo que se desplazan paralelamente una con respecto a la otra y a una velocidad constante, interviene, además de la fuerza de Coulomb, una fuerza magnética complementaria.

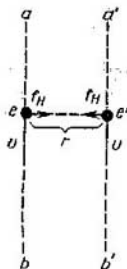


Fig. 263. Representación gráfica para calcular la acción recíproca de cargas que se desplazan.

Comparando las magnitudes de las fuerzas magnética y de Coulomb, (4) y (3), obtenemos que

$$\frac{f_H}{f_e} = \left(\frac{v}{c}\right)^2. \quad (5)$$

Como la relación de las dos fuerzas  $f_H/f_e$  es una magnitud sin dimensiones, de la fórmula (5) se deduce claramente que la constante electrodinámica  $c$  tiene las mismas dimensiones que la velocidad.

Como se ha indicado (véase el § 195), la constante electrodinámica  $c$  numéricamente es igual a la velocidad de propagación de las perturbaciones electromagnéticas en el vacío. Teniendo esto en cuenta vemos que de las fórmulas (4) y (5) se deduce que la magnitud de la fuerza magnética de acción recíproca de las cargas viene determinada por el cuadrado de la relación de su velocidad  $v$  a la velocidad de propagación de las perturbaciones electromagnéticas  $c$ . Como en la mayoría de los casos  $v \ll c$ , la fuerza magnética de acción recíproca entre las cargas generalmente es pequeña en comparación con la fuerza de Coulomb.

A la existencia de la fuerza magnética de acción recíproca entre las cargas expresada por la fórmula (4) se debe la atracción de dos conductores paralelos recorridos por corrientes de un mismo sentido.

§ 216. **Estudio experimental del campo magnético de las cargas en movimiento.** Históricamente, el revelar experimentalmente la existencia de un campo magnético de las cargas en movimiento ha tenido gran importancia, ya que ha confirmado la opinión de que, en los conductores, la corriente eléctrica es un transporte de cargas. Además, los resultados del estudio del campo magnético de las cargas en movimiento han sido muy importantes por la influencia que han ejercido en el desarrollo de la teoría del campo electromagnético y, en particular, en la teoría del éter.

La corriente eléctrica debida al transporte de cualquier cuerpo macroscópico cargado se denomina *corriente de convección*.

El que más plenamente ha estudiado el campo magnético de la corriente de convección, ha sido A. Eijvald, profesor de la Universidad de Moscú, a principios de nuestro siglo.

El esquema del experimento de Eijvald es el siguiente. Una lámina circular  $B$  de material aislador (fig. 264) está recubierta por los bordes con una hoja de estaño  $a$  en forma de anillo. La placa se fija a un eje de rotación  $O$  con contacto de corredera, con ayuda del cual el revestimiento  $a$  se carga de una batería hasta un potencial constante determinado. Este revestimiento  $a$  es una de las armaduras del condensador; la segunda armadura es la caja metálica inmóvil

*AC*, que al mismo tiempo desempeña la función de protección electrostática.

Al disco *B* junto con el anillo *a* se le comunicaba un rápido movimiento. De esta manera, la carga eléctrica concentrada en el anillo *a* se hallaba en movimiento y creaba un campo magnético en el espacio circundante. La excitación magnética *H* de este campo se medía con ayuda de la aguja magnética *b* suspendida de un hilo largo y fino. El giro de la aguja se medía por la desviación del rayo de luz reflejado en el espejo *s* fijo en el mismo hilo. La aguja magnética se situaba en el interior de una caja metálica para pre-

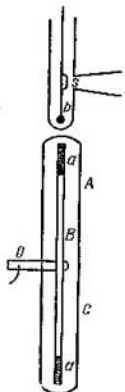


Fig. 264. Esquema del experimento de Eijenvald.

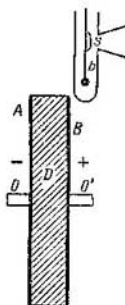


Fig. 265. Esquema del experimento de Eijenvald para determinar el campo magnético de un dieléctrico en movimiento.

servarla contra las posibles perturbaciones de parte del campo eléctrico. La excitación magnética medida de esta manera estaba en completa consonancia con la calculada según la fórmula (1) del § 215.

El profesor A. Eijenvald también investigó experimentalmente el campo magnético creado al desplazarse un dieléctrico con cargas superficiales que aparecen al polarizarse éste. En una de las variantes de su experimento, Eijenvald hizo girar alrededor del eje *OO'* (fig. 265) un condensador de dos armaduras circulares *A* y *B* y con un dieléctrico *D* entre ellas. El condensador junto con el dieléctrico giraba formando un todo. Supongamos que la aguja magnética *b* está tan cerca de una de las armaduras del condensador, que prácticamente mida el campo magnético creado solamente por

el movimiento de esta armadura y de la superficie más próxima del dieléctrico. Supongamos también que el condensador está cargado hasta la diferencia de potencial  $V_1 - V_2$ . Entonces, en su armadura surgirán unas cargas de densidad superficial:

$$\sigma = C (V_1 - V_2) \varepsilon, \quad (1)$$

donde  $\varepsilon$  es la constante dieléctrica del medio entre las armaduras, y  $C$ , una constante que depende solamente de las dimensiones y forma del condensador. En la superficie del dieléctrico colindante con la armadura surgirán cargas superficiales de signo contrario. Según lo dicho en el § 139, la densidad de estas cargas será:

$$\sigma' = \frac{4\pi\kappa\sigma}{\varepsilon},$$

donde  $\kappa$  es la susceptibilidad eléctrica. Como la susceptibilidad eléctrica  $\kappa$  está relacionada con la constante dieléctrica  $\varepsilon$  mediante la ecuación  $\varepsilon = 1 + 4\pi\kappa$ , la ecuación anterior se puede escribir de la forma:

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$$

o, sustituyendo  $\sigma$  por su valor según la (1):

$$\sigma' = C (V_1 - V_2) (\varepsilon - 1). \quad (2)$$

Las densidades  $\sigma$  y  $\sigma'$  de las cargas tienen signos contrarios, por eso, al desplazarse las armaduras y el dieléctrico crean campos magnéticos de sentido contrario. El valor resultante de la excitación magnética  $H$  vendrá determinado por la diferencia de densidades de las cargas  $\sigma - \sigma'$ .

Según las ecuaciones (1) y (2) tenemos que

$$\sigma - \sigma' = C (V_1 - V_2).$$

Como se ve, este valor de la diferencia de densidades  $\sigma - \sigma'$  no depende de la constante dieléctrica  $\varepsilon$ . De esta manera tenemos que para un condensador de dimensiones, formas y diferencia de potencial  $V_1 - V_2$  dadas, gracias a la polarización del dieléctrico, la carga total que crea el campo magnético no depende de la naturaleza del dieléctrico. Efectivamente, Eijenvald observó que al girar los discos  $A$  y  $B$  cargados a determinada diferencia de potencial  $V_1 - V_2$ , el campo magnético creado por ellos no dependía de la naturaleza del dieléctrico  $D$  que se colocaba entre ellos. Con esto se demostró también que las cargas aparentes del dieléctrico polarizado, en su movimiento crean un campo magnético en el espacio que las rodea.

Por último, el académico A. Yoffe midió el campo magnético de los electrones libres en movimiento. Un cátodo caliente  $K$  (fig. 266) era el manantial de electrones que después se aceleraban en

el espacio entre el cátodo  $K$  y el ánodo  $A$ . Luego, después de pasar por el orificio  $a$ , los electrones se desplazaban uniformemente sin colisiones. Al final del trayecto iban a parar a la caja de Faraday  $F$  y le comunicaban su carga; la corriente creada por éstas se medía en el galvanómetro  $G$ . Aproximadamente en la parte media del tubo se colocaba un sistema astático de imanes. El campo magnético excitado por el flujo de electrones causaba una desviación de estos imanes.

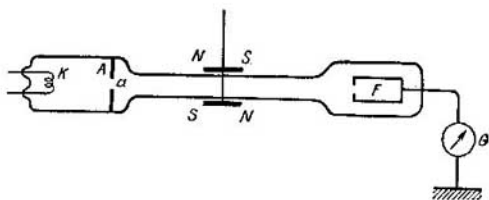


Fig. 266. Esquema del experimento de Yoffe para determinar el campo magnético de un haz de electrones.

El haz de electrones se podía sustituir por un conductor recorrido por una corriente eléctrica. Para obtener esta misma desviación de las agujas magnéticas había que hacer pasar por el conductor una corriente de intensidad igual a la indicada por el galvanómetro  $G$  en el caso del haz electrónico. Así se demostró la equivalencia del fenómeno de excitación del campo magnético por un haz electrónico y por la corriente habitual de un conductor.

Es importante señalar que en las fórmulas del § 215, por velocidad  $v$  de la carga hay que entender la velocidad respecto al sistema de coordenadas en que se mide la fuerza  $f$ . A fines del siglo pasado, cuando se suponía que el portador de los procesos electromagnéticos era el éter, que llenaba todo el espacio formando un medio continuo, se creía que el campo magnético debía aparecer al moverse las cargas respecto al éter. Por lo tanto, cabía esperar que la observación del campo magnético de las cargas permitiera poner de manifiesto el movimiento respecto al éter. Como el éter se consideraba un medio que llenaba todo el espacio al alcance de las observaciones, este movimiento debía considerarse absoluto. Según el principio mecánico de la relatividad (véase el § 19 del t. I) era imposible revelar el movimiento absoluto de traslación con ayuda de procesos mecánicos.

En el § 215 hemos examinado el movimiento de dos cargas  $e$  y  $e'$  recorriendo trayectorias paralelas a la misma velocidad  $v$ . Además de actuar con la fuerza de Coulomb, estas cargas actúan recíprocamente con una fuerza magnética:

$$f_H = \frac{ee'}{r^2} \left( \frac{v}{c} \right)^2. \quad (3)$$

En este caso sobre todo se ve claramente la alternativa de si la creación del campo magnético se debe: 1) al movimiento relativo de la carga respecto al siste-

ma de coordenadas en que se mide la fuerza  $f$ , o 2) al movimiento respecto al éter. Efectivamente, en el primer caso no debe haber fuerzas magnéticas si ambas cargas están inmóviles respecto al sistema dado de coordenadas, aunque junto con este sistema intervengan en el movimiento general de traslación. En el segundo caso las fuerzas magnéticas deben existir incluso cuando las cargas estén en reposo respecto al sistema de coordenadas que se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme. Supongamos que en un laboratorio de la esfera terrestre hay cargas inmóviles respecto a la misma. La esfera terrestre se desplaza en su movimiento diario y anual junto con todo el sistema solar respecto a otras estrellas. Se pregunta: ¿existen, además de las fuerzas de Coulomb, otras fuerzas magnéticas complementarias de acción recíproca entre las cargas? Basándonos en la primera suposición, no debe haber esta clase de acción recíproca; en el segundo

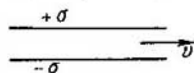


Fig. 267. Esquema del experimento de Trouton y Noble.

de la luz es muy grande ( $3 \cdot 10^{10}$  cm/seg), esta relación, como se ha indicado, generalmente es muy pequeña. No obstante, se puede concebir una variante del experimento en que se deban observar estas fuerzas complementarias. En 1904 Trouton y Noble propusieron y realizaron un experimento de esta clase.

Sea un condensador plano desplazándose a una velocidad  $v$  paralela a las armaduras del mismo (fig. 267). Si el condensador está cargado, cada una de sus placas creará un campo magnético en el espacio que la rodea. Por la fórmula (1a) del § 125 se puede calcular que la excitación magnética  $H$  en el espacio entre las placas del condensador (si las densidades superficiales de sus cargas son respectivamente iguales a  $+\sigma$  y a  $-\sigma$  y la permeabilidad magnética del medio entre las mismas es  $\mu=1$ ) es igual a

$$H = \frac{4\pi}{c} \sigma v.$$

Además, entre las placas del condensador hay un campo eléctrico de intensidad

$$E = 4\pi\sigma.$$

(Se considera que la constante dieléctrica del medio entre las placas es  $\epsilon=1$ ).

Fuera del condensador, la excitación magnética y la intensidad del campo eléctrico son iguales a cero. En el § 138 se ha visto que el campo electrostático posee una energía de densidad volumétrica  $ED/8\pi$ . De donde se obtiene que la energía eléctrica de todo el condensador es

$$W_e = 2\pi\sigma^2 V,$$

donde  $V$  es el volumen del espacio comprendido entre las placas del condensador.

En el § 227 veremos que el campo magnético también posee una energía de densidad volumétrica  $HB/8\pi$ , de donde la energía magnética del condensador será

$$W_m = 2\pi\sigma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 V.$$

Por consiguiente, la energía total del condensador será

$$W = W_e + W_m = 2\pi\sigma^2 V + 2\pi\sigma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 V$$

o

$$W = W_e \left[ 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]. \quad (4)$$

Si la velocidad  $v$  forma un ángulo  $\alpha$  con las placas del condensador, habrá que tener en cuenta solamente la proyección de la velocidad sobre la dirección paralela a estas placas con lo cual la fórmula (4) adquiere la forma:

$$W = W_e \left[ 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \cos^2 \alpha \right]. \quad (4a)$$

Así tenemos que la energía del condensador depende del ángulo  $\alpha$  y su valor será el mínimo cuando sea  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , es decir, cuando el condensador se oriente perpendicularmente a la dirección del movimiento. El estado más estable corresponderá al mínimo de energía; por eso el condensador tendrá a volver a la posición en que  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . El momento del par orientador es igual a la derivada de la energía respecto al ángulo  $\alpha$  tomada con signo negativo:

$$M = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} = W_e \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin 2\alpha.$$

Trouton y Noble intentaron descubrir la existencia de este momento de fuerzas de la siguiente manera. Un pequeño condensador se suspendía de un hilo fino y largo. El condensador se cargaba hasta alcanzar la diferencia de potencial de 3 000 V. Con ayuda de un rayo de luz reflejado de un espejo unido al condensador, observaron sus oscilaciones de torsión. De aquí dedujeron la posición de equilibrio del condensador. Esta posición de equilibrio se determinaba por las propiedades elásticas del hilo y la existencia del momento  $M$ . La dirección y velocidad del movimiento de la Tierra respecto al éter son desconocidas. Pero por lo menos, en el transcurso de un día, el ángulo  $\alpha$  varía debido a la rotación de la Tierra y, por consiguiente, debía variar la posición de equilibrio del condensador. Las observaciones demostraron que no había ninguna clase de desviaciones sistemáticas durante el día. Las desviaciones diarias, según su magnitud, no eran superiores a las que podrían ser originadas por el movimiento de la Tierra respecto al éter a la velocidad de 12 km/seg. Mientras que en la realidad, la velocidad del movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol es de 30 km/seg. Los experimentos se repitieron en distintas estaciones del año de manera que no hubiese lugar a ninguna posibilidad de compensación recíproca casual de las velocidades de la Tierra y del movimiento de todo el sistema solar en el espacio. Después se repitió reiteradamente este experimento. En 1926, Tomasek elevó a tal grado la sensibilidad del método de Trouton y Noble, que podría haber notado el movimiento de la Tierra respecto al éter a la velocidad de 0,5 km/seg. Todas las observaciones de Tomasek tampoco revelaron la presencia del momento  $M$ .

Así, las observaciones demostraron sin lugar a dudas que el campo magnético de las cargas es debido a su movimiento respecto al sistema en que se lleva a cabo la medición. Los experimentos sobre los fenómenos electromagnéticos, lo mismo que los experimentos puramente mecánicos, no permiten revelar el movimiento absoluto uniforme de un sistema en el espacio. El éter no puede servir de sistema de referencia (compárese con lo dicho en el § 152). Después veremos (t. III)

que las observaciones de los fenómenos luminosos tampoco permiten revelar el movimiento absoluto uniforme. Todos estos hechos fueron generalizados en la teoría de la relatividad de Einstein, que aclaró totalmente la función de la relatividad del movimiento.

La esencia de la teoría de la relatividad se examinará detalladamente en el t. III. Aquí solamente señalaremos que la afirmación de la dependencia de los procesos físicos respecto a la velocidad relativa de los sistemas de referencia, de ninguna manera está relacionada con el falso relativismo filosófico que afirma

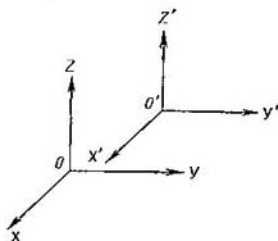


Fig. 268. Dos sistemas de coordenadas.

la relatividad de todos nuestros conocimientos. La teoría de la relatividad revela al fin y al cabo la independencia de las leyes físicas respecto al sistema de referencia en que se formulan (ofrece el método de hallar la forma invariante, o, como se ha convenido en denominar, "covariante", de las leyes respecto al paso de un sistema de referencia a otro que se desplaza en movimiento rectilíneo y uniforme respecto al primero).

Sean dos sistemas de referencia:  $XYZ$  y  $X'Y'Z'$  (fig. 268). Supongamos que el sistema  $X'Y'Z'$  se desplaza respecto al  $XYZ$  a la velocidad constante  $v$ . Llamemos  $E$  y  $H$  respectivamente a los valores de la intensidad del campo eléctrico y a la excitación magnética del campo medidas en el sistema  $XYZ$ , y  $E'$  y  $H'$ , a los correspondientes valores medidos en el sistema  $X'Y'Z'$ . Supongamos que en el sistema  $X'Y'Z'$  hay unos manantiales de campos eléctricos y magnéticos, cuyas intensidad y excitación respecto a este sistema de coordenadas son  $E'$  y  $H'$ . Entonces, en el sistema  $X'Y'Z'$ , según la fórmula de Lorentz, sobre la carga  $e$ , inmóvil en el sistema de coordenadas  $XYZ$ , actuará una fuerza:

$$f' = E'e + \frac{1}{c}e[H' \times v]. \quad (5)$$

En comparación con la fórmula (3c) del § 214, aquí se ha cambiado el orden de los factores del producto vectorial, ya que la velocidad de la carga respecto al sistema  $X'Y'Z'$  es igual a  $v$ .

Si la velocidad  $v$  es pequeña en comparación con la de la luz  $c$ , la fuerza  $f'$  será igual a la fuerza  $f$  medida en el sistema  $XYZ$ . Así tenemos que en el sistema de coordenadas  $XYZ$  sobre la carga  $e$ , inmóvil respecto a este sistema, actúa una fuerza

$$f = E'e + \frac{1}{c}e[H' \times v]. \quad (5a)$$

En electrostática, la intensidad del campo eléctrico se mide mediante la relación entre la fuerza  $f$ , que actúa sobre la carga, y la magnitud de la carga:  $f/e$ . Por eso, la presencia de la fuerza  $f$  dada por la fórmula (5a) equivale a lo mismo que si en el sistema  $XYZ$  existiese un campo eléctrico de intensidad:

$$E = E' + \frac{1}{c}[H' \times v]. \quad (6)$$

En este mismo sistema de coordenadas  $XYZ$ , además de la excitación magnética  $H'$  hay otro campo magnético complementario debido a que cualquier carga  $e'$  inmóvil en el sistema  $X'Y'Z'$  se mueve con respecto al sistema  $XYZ$  a la



velocidad  $v$ . La excitación de este campo complementario es

$$\mathbf{H}_1 = \frac{e'}{c} \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{1}{c} \left[ \mathbf{v} \times \frac{e' \mathbf{r}}{r^3} \right].$$

Pero  $e' \mathbf{r}/r^3$  es la intensidad del campo eléctrico  $E'$  medida en el sistema  $X'Y'Z'$  en el punto que se halla a la distancia  $r$  de la carga  $e'$ . Por lo tanto tenemos que

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times E']$$

y, por consiguiente, la excitación magnética total  $H$  en el sistema  $XYZ$  será

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times E']. \quad (7)$$

Las fórmulas (6) y (7) expresan la relación entre la intensidad del campo eléctrico y la excitación magnética de magnético medidas en dos sistemas que se desplazan uno respecto al otro. Estas fórmulas permiten analizar cualquier caso de movimiento relativo.

Supongamos, por ejemplo, que en el sistema  $X'Y'Z'$  se tiene solamente la carga  $e'$  inmóvil respecto a este sistema. En cierto punto  $B$  de este sistema a la distancia  $r$  de la carga, la intensidad del campo eléctrico será  $E' = \frac{e' \mathbf{r}}{r^3}$ . En el sistema  $X'Y'Z'$  no habrá ningún campo magnético ( $H' = 0$ ). Por consiguiente, si en el punto  $B$  se coloca otra carga  $e$ , inmóvil también respecto al sistema  $X'Y'Z'$ , entre las cargas no habrá ninguna otra fuerza aparte de la de Coulomb, aunque el sistema  $X'Y'Z'$  se desplace a la velocidad  $v$  respecto al sistema  $XYZ$ . Esto corresponde a las condiciones del experimento de Trouton y Noble y a su resultado negativo.

Sin embargo, en el sistema  $XYZ$  se debe observar, según la fórmula (7), además del campo eléctrico, un campo magnético de excitación:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times E'] = \frac{1}{c} \left[ \mathbf{v} \times \frac{e' \mathbf{r}}{r^3} \right]. \quad (8)$$

Este campo se puede notar colocando en el punto  $B$  una aguja magnética. Un esquema de esta clase corresponde al experimento de Eijensvald, en el cual la carga que se mueve con respecto a un sistema de coordenadas crea un campo magnético en este sistema.

Por último, en el punto  $B$  se puede colocar una carga  $e$  en lugar de una aguja magnética. Si esta carga está inmóvil respecto al sistema  $XYZ$ , sobre ella, según la fórmula (6), actuará solamente un campo eléctrico de intensidad  $E = E'$ . Esto corresponde al hecho de que sobre las cargas eléctricas inmóviles no actúa el campo magnético. Sin embargo, si a la carga  $e$  se le comunica un movimiento respecto al sistema  $XYZ$  de velocidad  $v_1$ , según la fórmula de Lorentz sobre esta carga actuará, además, una fuerza:

$$f = \frac{e}{c} [v_1 \times H]. \quad (9)$$

Si el vector velocidad  $v_1$  se hace igual al vector  $v$ , la carga  $e$  permanecerá inmóvil respecto a la carga  $e'$ , pero ambas cargas se moverán con respecto al sistema de coordenadas  $XYZ$  según rectas paralelas a la misma velocidad. Si, para simplificar, suponemos además que la velocidad  $v$  es perpendicular a  $r$ , la fórmula (8) adquirirá la forma:

$$H = \frac{1}{c} \frac{e' v}{r^2},$$

y la fórmula (9), la forma:

$$f = \frac{ev'}{r^2} \left( \frac{v}{c} \right)^2,$$

que coincide con la fórmula (3) y corresponde al caso de atracción de dos conductores paralelos recorridos por corrientes de una misma dirección.

Las fórmulas (6) y (7) de transformación de los campos son justas solamente para el caso cuando la velocidad  $v$  de las cargas es pequeña en comparación con la de la luz  $c$ . La teoría de la relatividad da fórmulas generales de paso de un sistema de referencia a otro, justas para cualesquiera velocidades.

§ 217. **Efecto Hall.** La existencia de la fuerza de Lorentz actuando sobre una carga eléctrica que se desplaza por un campo magnético, permite explicar el siguiente fenómeno: al fluir una corriente  $I$  a lo largo de una lámina perpendicular a las líneas de un campo magnético exterior de excitación  $H$  (fig. 269), entre los bordes  $A$  y  $B$  de la lámina surge una diferencia de potencial  $V_A - V_B$ . Este fenómeno se denomina *efecto Hall*.

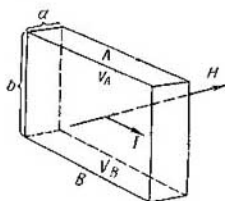


Fig. 269. Diferencia de potencial  $V_A - V_B$  en el campo magnético.

La diferencia de potencial creada  $V_A - V_B$  es directamente proporcional al producto de la intensidad de la corriente por la excitación magnética  $IH$  e inversamente proporcional al espesor de la lámina  $d$ :

$$V_A - V_B = K \frac{IH}{d}, \quad (1)$$

donde  $K$  es una constante.

Si la corriente se debe al transporte de cargas  $e$ , en el campo magnético  $H$  actuará sobre ellas la fuerza de Lorentz que las desvía en dirección perpendicular a la de la corriente. Debido a ello, las cargas empezarán a acumularse hacia el borde  $A$  de la lámina hasta que el campo eléctrico creado por ellas equilibre la acción de la fuerza magnética.

Según la fórmula de Lorentz [ (3) del § 214], la fuerza que actúa sobre la carga, (en nuestro caso  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ), será

$$f_H = e\bar{v}H,$$

donde  $\bar{v}$  es la velocidad media de las cargas en la dirección en que fluye la corriente.

La intensidad del campo eléctrico creado al surgir la diferencia de potencial  $V_A - V_B$ , será

$$E = \frac{V_A - V_B}{b},$$

donde  $b$  es la anchura de la lámina.

Por consiguiente, la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga, será

$$f_e = e \frac{V_A - V_B}{b}.$$

El estado estacionario tendrá lugar cuando las fuerzas sean iguales:  $f_H = f_e$ , de donde obtenemos la relación:

$$e \frac{V_A - V_B}{b} = e \bar{v} H. \quad (2)$$

La velocidad media  $\bar{v}$  de las cargas en el conductor se obtendrá utilizando la relación entre la intensidad  $I$  de la corriente, el número de cargas  $n$  por unidad de volumen y las velocidades de sus desplazamientos (véase el § 214):

$$I = b d n e \bar{v}, \quad \text{de donde,} \quad \bar{v} = \frac{I}{b d n e}.$$

Colocando este valor de  $\bar{v}$  en la (2), obtenemos que

$$V_A - V_B = \frac{1}{n e} \cdot \frac{I H}{d}. \quad (3)$$

De esta manera, en correspondencia con la fórmula empírica (1), la magnitud  $V_A - V_B$  es directamente proporcional al producto  $I H$  e inversamente proporcional al espesor  $d$  de la lámina. La constante  $K$  ha resultado ser igual a

$$K = \frac{1}{n e}. \quad (4)$$

De esto se ve que el signo de la constante  $K$  debe depender del signo de la carga  $e$ . El signo positivo de la constante  $K$  indica que el potencial del punto  $A$  (fig. 269) es mayor que el del punto  $B$ .

Según lo dicho en el § 161, la conductibilidad eléctrica de los metales es debida a la presencia de electrones libres, teniendo en cuenta que por cada átomo del metal hay aproximadamente un electrón libre. De esta manera, para los metales, la constante  $K$  debe ser negativa y su valor numérico debe venir determinado por la carga del electrón  $e$  y el número de electrones libres  $n$  por unidad de volumen del metal.

La deducción de la fórmula (4) para la constante  $K$  no es exacta. Efectivamente, no se puede expresar la fuerza  $f_H$  que actúa sobre una carga en un campo magnético, en función de la velocidad media  $\bar{v}$  de la carga. Si se tiene en cuenta que en el recorrido libre del electrón su velocidad en el sentido en que fluye la corriente, aumenta uniformemente, en la expresión para el valor de  $K$  tendrá que entrar, además, el factor numérico  $2/3$ ; entonces

$$K = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n e}. \quad (4a)$$

Llamemos  $n_0$  al número de átomos por unidad de volumen del metal y supongamos que  $n=zn_0$ ; entonces  $z$  indicará en términos medios qué número de electrones libres le corresponde a un átomo. El número de átomos por unidad de volumen  $n_0$  es fácil de relacionar con el número de Avogadro  $N$ . Efectivamente, la masa de un átomo, por un lado, es igual a  $A/N$ , donde  $A$  es el peso atómico, y de otro lado, es igual a  $\rho/n_0$ , donde  $\rho$  es la densidad. De aquí que

$$\frac{\rho}{n_0} = \frac{A}{N} \quad \text{o} \quad n_0 = \frac{N\rho}{A},$$

de donde

$$n = \frac{N\rho}{A} \cdot z.$$

Colocando este valor de  $n$  en la (4a), obtenemos que

$$K = \frac{2}{3} \frac{A}{N e \rho z};$$

Pero  $Ne = -F$ , donde  $F$  es el número de Faraday; de donde para la constante  $K$  en los metales obtenemos que

$$K = -\frac{2}{3} \frac{A}{F \rho z}. \quad (5)$$

Efectivamente, muchos metales nos dan una constante  $K$  negativa de magnitud esperada. Del valor de  $K$  hallado en el experimento se puede determinar la magnitud  $z$ . Para una serie de metales monovalentes  $z$  es igual aproximadamente a la unidad; así, por ejemplo, para el sodio el valor es  $z=0,65$ , para la plata,  $z=0,75$ , para el oro,  $z=0,9$ . Para los metales de valencia más elevada  $z$  es mayor, por ejemplo, para el aluminio,  $z=2,0$ . Sin embargo, hay metales (como el Zn, Cd, Pb, Fe y otros) que dan un valor positivo de la constante  $K$ . Este hecho es incomprensible desde el punto de vista de la teoría elemental aducida y sólo se puede explicar basándose en la mecánica cuántica.

El efecto Hall solamente se observa en los conductores de conductibilidad electrónica. En los electrólitos, con su conducción iónica, no hay ningún efecto perceptible. Esto se explica porque los iones pesados poseen una velocidad mucho menor que los electrones.

En los semiconductores, la constante  $K$  aumenta intensamente con la disminución de la temperatura, lo cual corresponde a la rápida disminución del número de electrones libres por unidad de volumen al disminuir la temperatura. En los semiconductores, el signo del efecto Hall nos permite juzgar si la conducción es por exceso (electrónica) o por huecos (véase el § 171). Para el semiconductor de conducción mixta, el fenómeno tiene un carácter más complicado.

§ 218. **Determinación de la carga específica de los electrones.** La ecuación de la fuerza de Lorentz nos permite determinar la relación de la carga  $e$  de una partícula móvil respecto a su masa  $m$ . Esta relación  $e/m$  se denomina *carga específica*.

Sea un haz de partículas cargadas que se desplazan a velocidad constante  $v$  en el vacío y según el plano perpendicular a la dirección de la excitación magnética  $H$  de un campo exterior (fig. 270; aquí la excitación magnética  $H$  es perpendicular al plano del dibujo).

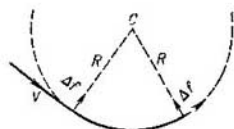


Fig. 270. Fuerza  $\Delta f$  actúa sobre la carga que se desplaza perpendicularmente a la dirección del campo magnético.

El ángulo formado entre la dirección de la velocidad  $v$  de la partícula y la excitación magnética  $H$  es igual a  $\pi/2$ , y, según la fórmula (3a) del § 214, sobre la partícula actúa una fuerza constante:

$$\Delta f = \frac{1}{c} evH. \quad (1)$$

Esta fuerza será perpendicular a la dirección del vector velocidad  $v$  de la partícula durante todo el transcurso del movimiento. Como en este caso, sobre la partícula, según las condiciones establecidas, no actúa ninguna otra fuerza, la magnitud de su velocidad  $v$  será constante y, por consiguiente, la trayectoria de la partícula será una circunferencia. Si el radio de esta circunferencia es  $R$ , la aceleración centrípeta de la partícula será igual a  $v^2/R$  y, según la segunda ley de Newton, la relación entre esta aceleración y la fuerza  $\Delta f$  vendrá expresada por la ecuación:

$$\Delta f = \frac{mv^2}{R}.$$

Sustituyendo en esta ecuación la fuerza  $\Delta f$  por su valor según la (1), tenemos que

$$\frac{1}{c} evH = \frac{mv^2}{R},$$

de donde, para la carga específica de la partícula hallamos que

$$\frac{e}{m} = \frac{cv}{RH}. \quad (2)$$

El radio de curvatura  $R$  de la trayectoria de las partículas y la excitación magnética  $H$  se pueden medir directamente. Así, para la determinación de  $e/m$  queda por saber la velocidad  $v$  de la partícula. Esta velocidad se puede determinar de distintas maneras. Se puede determinar, por ejemplo, por la diferencia aceleradora de potencial  $V_1 - V_2$ . Al desplazarse la partícula por el vacío, todo el trabajo de las fuerzas eléctricas  $e(V_1 - V_2)$  se invierte en aumentar su energía cinética  $mv^2/2$ , de donde

$$\frac{mv^2}{2} = e(V_1 - V_2)$$

y, por consiguiente,

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m} \cdot V_1 - V_2}.$$

Colocando este valor de  $v$  en la (2) y elevando al cuadrado los términos de la derecha y de la izquierda, obtenemos, después de simplificar, que

$$\frac{e}{m} = \frac{2c^2}{R^2 H^2} (V_1 - V_2). \quad (3)$$

Thomson utilizó otro método para despejar la velocidad  $v$  de la ecuación de la carga específica  $e/m$ . Para ello hizo desplazarse al mismo tiempo el haz de partículas por un campo magnético y

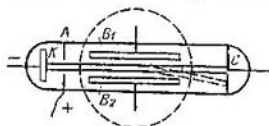


Fig. 271. Esquema del experimento de Thomson para determinar la carga específica del electrón.

otro eléctrico perpendicular al primero. El esquema del experimento de Thomson realizado para determinar la carga específica del electrón viene representado en la fig. 271, donde  $K$  es el cátodo, fuente de electrones; y  $A$ , un diafragma para crear el haz electrónico. Entre  $K$  y  $A$  se ha aplicado una diferencia de potencial que comunica a los electrones la velocidad  $v$  con que después se desplazan por el espacio tras el diafragma. La circunferencia de puntos indica la zona donde se excita un campo magnético  $H$  perpendicular al plano del dibujo. Este campo se obtiene con ayuda de un electroimán entre cuyos polos se coloca el tubo.  $B_1$  y  $B_2$  son dos placas paralelas, entre las cuales se crea un campo eléctrico.  $C$  es una pantalla fluorescente en que una mancha luminosa determina el lugar sobre el cual incide el haz catódico. Supongamos que la dirección del campo

magnético desvía hacia abajo al haz electrónico. Entonces, si solamente hay un campo magnético, los electrones se desplazarán por la zona del campo según una circunferencia (línea de puntos) y la mancha luminosa de la pantalla fluorescente se desplazará hacia abajo. Por la magnitud de esta desviación se calcula el radio de curvatura  $R$ . Después, al mismo tiempo que el campo magnético, se crea un campo electrostático entre las placas  $B_1$  y  $B_2$  de intensidad  $E$  y de tal dirección, que la fuerza eléctrica  $eE$  que actúa sobre el electrón, sea de sentido opuesto a la de la fuerza magnética  $\Delta f$  (en nuestro caso la fuerza eléctrica debe ir dirigida hacia arriba). La magnitud del campo eléctrico se elige de manera que el haz de electrones no sufra ninguna desviación, lo cual tendrá lugar cuando sean iguales las fuerzas eléctrica y magnética:

$$eE = \frac{1}{c} evH, \text{ de donde } v = \frac{cE}{H}.$$

Colocando este valor de  $v$  en la (2), hallamos que

$$\frac{e}{m} = \frac{c^2 E}{RH^2}.$$

De esta manera, basándose en la intensidad del campo eléctrico  $E$ , en la excitación  $H$  del magnético y en el radio  $R$  de curvatura se determina la carga específica  $e/m$ .

Existe una serie de variantes del método de Thomson (véase el texto de cuerpo menor), cuyos fines son elevar la exactitud de las mediciones. Como ya se ha indicado, a pequeñas velocidades de electrones tenemos que

$$\frac{e}{m} = 5,273 \cdot 10^{17} \frac{\text{unidades CGSE de carga}}{\text{g}}.$$

De esta ecuación, por el valor conocido de la carga  $e$  del electrón, se calcula su masa  $m$ .

Si los electrones se desplazan a grandes velocidades, se hace perceptible la dependencia entre la masa y la velocidad en correspondencia con el principio de la relatividad, y, como resultado de ello, la relación  $e/m$  disminuye con el aumento de la velocidad. Como las velocidades de los electrones pueden ser muy grandes, la disminución de  $e/m$  con el aumento de la velocidad resulta completamente perceptible y es una confirmación experimental de la relación de dependencia entre la masa y la velocidad. Para los electrones, una investigación experimental minuciosa de la relación  $e/m$  en función de la velocidad ha demostrado que se halla en muy buena concordancia con las deducciones teóricas.

En la fig. 272 se representan con puntos las mediciones de la masa del electrón a diferentes velocidades; la curva de línea continua

representa la dependencia entre la masa y la velocidad según la fórmula de la teoría de la relatividad:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

donde  $m$  es la masa a la velocidad dada  $v$ ;  $m_0$ , la masa correspondiente a una velocidad infinitamente pequeña ("masa en reposo"), y  $\beta = \frac{v}{c}$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Como se ha indicado en la pág. 160, la "masa en reposo" del electrón es

$$m_0 = 9,109 \cdot 10^{-28} \text{ g.}$$

Quando se descubrió la relación de dependencia entre la masa y la velocidad, muchos científicos burgueses intentaron aprovechar este hecho para fundamentar la falsa afirmación de que la materia, al parecer, desaparece. Desenmascarándolos, Lenin escribió \*: «La materia desaparece»: quiere decir que el límite hasta el que conocimos la materia hasta ahora se esfuma, y que nuestro conocimiento

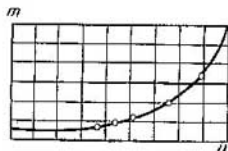


Fig. 272. Dependencia entre la masa del electrón y su velocidad.

se profundiza; desaparecen propiedades de la materia que anteriormente nos parecían absolutas, inmutables, primarias (impenetrabilidad, inercia, masa, etc.) y que hoy se revelan como relativas, inherentes solamente a ciertos estados de la materia».

Veamos ahora el método de determinación de la magnitud  $e/m$  mediante el enfoque de un haz de electrones por un campo magnético longitudinal. Sea un electrón que se desplaza a una velocidad constante  $v$  que forma un ángulo  $\alpha$  con la dirección del campo magnético  $H$ . En este caso se determina fácilmente el aspecto que adquiere la trayectoria del electrón, si descomponemos su movimiento en dos: uno a lo largo del campo magnético y otro, perpendicular al mismo. La componente de la velocidad que va a lo largo del campo magnético es  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ , y la componente perpendicular al mismo es  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ .

\* V. I. Lenin, *Materialismo y empiriocriticismo*, Ediciones Pueblos Unidos, Uruguay, 1948, pág. 290.



La proyección del trayecto recorrido por el electrón sobre el plano perpendicular a  $H$  es una circunferencia, cuyo radio viene determinado por la relación (2):

$$R = \frac{cv_{\perp} m}{eH} \quad (4)$$

La proyección del movimiento del electrón sobre la dirección paralela a  $H$  será un movimiento uniforme de velocidad  $v_{\parallel}$ , ya que en el campo magnético no hay ninguna componente de fuerza que actúe sobre la carga a lo largo del campo. De esta manera tenemos que la propia trayectoria del electrón será una *espiral*.

El tiempo  $t$  necesario para que el electrón recorra una vuelta de esta espiral, será:

$$t = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}$$

Sustituyendo en esta ecuación  $R$  por su valor según la (4) obtenemos que

$$t = \frac{2\pi c}{\frac{e}{m} H} \quad (5)$$

Así pues, el tiempo  $t$  no depende ni de la magnitud, ni de la dirección de la velocidad del electrón  $v$ , sino que viene determinado solamente por la excitación magnética  $H$  y la carga específica del electrón  $e/m$ . En esta ecuación se basa el método de determinación de  $e/m$ , el cual consiste en lo siguiente.

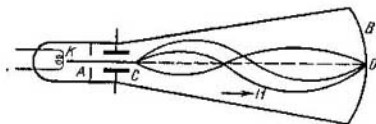


Fig. 273. Esquema del aparato para determinar la carga específica del electrón por el método del enfoque magnético (método de Busch).

Los electrones emitidos por el cátodo caliente  $K$  situado en el interior de un tubo en el que se ha hecho el vacío (fig. 273), pasan a través del orificio del diafragma  $A$ . Entre el cátodo  $K$  y el diafragma  $A$  se aplica un campo acelerador de diferencia de potencial  $V_1 - V_2$ . De esta manera se crea un haz de electrones, cuya velocidad  $v$  se determina por la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2} mv^2 = e(V_1 - V_2) \quad (6)$$

Después, el haz de electrones pasa entre las armaduras del condensador  $C$ , entre las cuales se excita un campo eléctrico variable de intensidad  $E$ . Solicitados por este campo variable, los electrones se desviarán, en diferentes instantes de tiempo, en distintos ángulos  $\alpha$  con respecto al eje de la instalación. Entre el condensador  $C$  y la pantalla fluorescente  $B$  se excita un campo magnético longitudinal mediante un solenoide, en cuyo interior se coloca el tubo. Según lo dicho, en estas condiciones los electrones se mueven describiendo una espiral.

En el tiempo  $t$ , durante el cual los electrones describen una vuelta de la espiral, avanzan un espacio de:

$$l = v_{\parallel} t.$$

Sustituyendo en esta ecuación el tiempo  $t$  por su valor según la (5), obtenemos que

$$l = \frac{2\pi cv \cdot \cos \alpha}{\frac{e}{m} H}.$$

Si el ángulo  $\alpha$  es pequeño, tendremos que  $\cos \alpha \approx 1$ , y

$$l \approx \frac{2\pi cv}{\frac{e}{m} H}. \quad (7)$$

Así, pues, el espacio  $l$ , con un grado bastante elevado de aproximación, es independiente del ángulo  $\alpha$  de desviación de los electrones en el condensador  $C$ .

Como en este intervalo de tiempo  $t$  todos los electrones llegan a realizar una vuelta de espiral, todos ellos pasarán por el eje de la instalación a la misma distancia  $l$  del condensador  $C$ . En la fig. 273 se representan varias trayectorias de electrones. Se ve que todas las trayectorias se cortan en el punto  $O$ . Este punto, por analogía con el lugar en que se intersecan los rayos ópticos, se denomina *foco* de

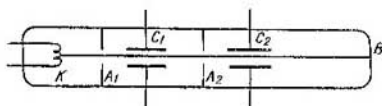


Fig. 274. Esquema del aparato para determinar la carga específica del electrón por el método del filtro de velocidades.

*electrones*. La posición del foco varía al variar la excitación  $H$  del campo magnético longitudinal. La excitación  $H$  puede elegirse de manera que el foco venga a caer sobre la pantalla  $B$ , lo cual se establece fácilmente viendo la huella ostensible (punto luminoso) del haz en la pantalla. En este caso, la distancia  $l$  será la que hay entre el condensador  $C$  y la pantalla  $B$ , y, por consiguiente, se puede medir. Conociendo  $l$ , es fácil determinar la carga específica del electrón  $e/m$ . Efectivamente, de la (7) tenemos que

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi cv}{lH}.$$

Sustituyendo en esta ecuación la velocidad  $v$  por su valor según la (6), hallamos que

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 c^2 (V_1 - V_2)}{l^2 H^2}.$$

En esta ecuación, las magnitudes de la derecha se pueden medir directamente, determinando de esta manera la magnitud  $e/m$ .

Otro método exacto de determinación de la carga específica del electrón  $e/m$  es el denominado *método del filtro de velocidades*. En un tubo en que se ha hecho el vacío (fig. 274), con ayuda del cátodo caliente  $K$  y del diafragma  $A_1$  se obtiene un haz de electrones. Luego, este haz pasa por entre las armaduras de dos condensadores  $C_1$  y  $C_2$ . Entre los condensadores se coloca un segundo dia-

fragma  $A_2$  que solamente deja pasar los electrones que no han sido desviados por el condensador  $C_1$ . A las armaduras de ambos condensadores se les aplica al unísono una diferencia de potencial alterna, que varía con el tiempo según una ley sinusoidal de período  $T$ . Entonces, a través del diafragma pasarán solamente los electrones que atravesaron el espacio entre las armaduras del condensador  $C_1$  cuando la diferencia de potencial entre ellas era igual a cero. En el tiempo  $t$ , durante el cual los electrones llegan al segundo condensador, la diferencia de potencial aplicada a los condensadores varía y los electrones se desvían. No habrá desviación solamente cuando el tiempo  $t$  sea múltiplo de  $T/2$ . En este caso el haz de electrones dejará una huella en el centro de la pantalla fluorescente  $B$ .

Así, pues, para que el haz no lo desvíe ninguno de los dos condensadores, se debe satisfacer la condición:

$$t = n \frac{T}{2}, \quad (8)$$

donde  $n$  es un número entero.

Por otro lado, el tiempo  $t$  se determina de la siguiente manera: supongamos que  $l$  es la distancia entre los condensadores, entonces  $t = \frac{l}{v}$ , donde  $v$  es la velocidad de los electrones. Esta velocidad se puede hallar en función de la diferencia aceleradora de potencial  $V_1 - V_2$ , aplicada entre el cátodo  $K$  y el diafragma  $A_1$ , según la ecuación:

$$\frac{1}{2} mv^2 = e(V_1 - V_2), \quad \text{de donde} \quad t^2 = \frac{l^2}{v^2} = \frac{l^2 m}{2e(V_1 - V_2)}.$$

Utilizando este valor de  $t^2$  y la fórmula (8), obtenemos que

$$\frac{e}{m} = \frac{2l^2}{n^2 T^2 (V_1 - V_2)}. \quad (9)$$

La medición se realiza disminuyendo el período  $T$  hasta que el haz de electrones empiece a concentrarse en el centro de la pantalla  $B$ . Esto corresponderá al valor de  $n=1$ , de donde, según la (9) y conociendo  $l$  y  $V_1 - V_2$  se halla la carga específica  $e/m$ .

§ 219. Determinación de la carga específica de los iones positivos. Los métodos indicados, que se basan en la desviación de las partículas en los campos eléctrico y magnético, en principio son útiles para determinar no sólo la carga específica  $e/m$  de los electrones, sino también de cualquier clase de iones. Sin embargo, la dificultad de su aplicación para determinar la carga específica  $e/m$  de los iones atómicos o moleculares consiste en que el manantial de iones no es un electrodo sólido cualquiera, sino un gas en el cual se producen descargas. En este caso, los iones surgen en distintos sitios, en zonas de diferentes potenciales, con lo cual sus velocidades son distintas. Pero a distintas velocidades, los iones se desplazarán de manera diferente en los mismos campos, lo cual hace imposible la medición. Para evitar la influencia de la velocidad, Thomson utilizó un método que se denominó el *método de las parábolas*. Este método se basa en la aplicación de los campos eléctrico y magnético dirigidos hacia un mismo lado. Representémosnos una partícula

que se desplaza a lo largo del eje  $OZ$  con una velocidad inicial de  $v_0$  (fig. 275). Supongamos que la intensidad  $E$  del campo eléctrico y la excitación  $H$  del magnético van dirigidas a lo largo del eje  $OX$  y actúan sobre un mismo trayecto  $z$  de la partícula. De parte del campo electrostático, sobre la partícula de carga  $e$  actúa una fuerza constante dirigida a lo largo del eje  $OX$ :

$$f_x = eE. \quad (1)$$

Del lado del campo magnético, sobre la misma partícula actúa la fuerza de Lorentz dirigida, según la regla de la mano izquierda, a lo largo del eje  $OY$ :

$$f_y = \frac{1}{c} ev_0 H. \quad (2)$$

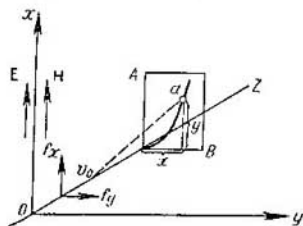


Fig. 275. Esquema del método de las parábolas.

perpendiculares mutuamente, y la partícula atravesará el plano  $AB$ , paralelo al  $XOY$ , en un punto  $a$  de coordenadas  $x$  e  $y$ .

Sea  $m$  la masa de la partícula, de donde la componente  $w_x$  de su aceleración, según la (1), será

$$w_x = \frac{f_x}{m} = \left(\frac{e}{m}\right) E.$$

Como esta componente de la aceleración es constante, la desviación de la partícula según el eje  $OX$  tendrá el carácter de un movimiento uniformemente acelerado, y en el tiempo  $\Delta t$ , durante el cual la partícula recorre el trayecto  $z$ , se desviará a lo largo del eje  $OX$  en la magnitud:

$$x = \frac{1}{2} w_x \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{m}\right) \cdot E \Delta t^2;$$

pero  $\Delta t = \frac{z}{v_0}$ , de donde

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{m}\right) \cdot E z^2 \frac{1}{v_0^2}.$$

La magnitud  $\frac{1}{2} E z^2$ , que es constante en las condiciones dadas del experimento, la llamaremos  $C_1$ , de donde

$$x = C_1 \left(\frac{e}{m}\right) \cdot \frac{1}{v_0^2}. \quad (3)$$

De la (2), hallaremos de la misma manera que la componente  $w_y$  de la aceleración de la partícula es

$$w_y = \frac{I_y}{m} = \frac{1}{c} \left( \frac{e}{m} \right) v_0 H.$$

Como  $w_y$  también es constante, la desviación de la partícula a lo largo del eje  $OY$  será

$$y = \frac{1}{2} w_y \Delta t^2 = \frac{1}{2c} \left( \frac{e}{m} \right) v_0 H \Delta t^2,$$

y, sustituyendo como antes  $\Delta t$  por su valor  $z/v_0$ , hallamos que

$$y = \frac{1}{2c} \left( \frac{e}{m} \right) H z^2 \frac{1}{v_0}.$$

Llamando  $C_2$  a la magnitud  $\frac{1}{2c} H z^2$ , que es constante en las condiciones dadas del experimento, obtenemos que

$$y = C_2 \left( \frac{e}{m} \right) \frac{1}{v_0}. \quad (4)$$

Las fórmulas (3) y (4) determinan las coordenadas de la desviación de la partícula en los campos eléctrico y magnético. Como se ve, en las condiciones dadas del experimento, las coordenadas de la desviación vienen determinadas por dos factores: por la carga específica de la partícula  $e/m$  y por su velocidad  $v_0$ . A las partículas de iguales cargas específicas  $e/m$ , pero de distintas velocidades  $v_0$ , les corresponderán diferentes puntos de intersección de sus trayectorias con el plano  $AB$ . Todos estos puntos de intersección vendrán a colocarse a lo largo de una curva determinada, cuya ecuación obtendremos eliminando la velocidad  $v_0$  de las ecuaciones (3) y (4):

$$y^2 = \frac{C_2^2}{C_1} \left( \frac{e}{m} \right) x. \quad (5)$$

Como se ve, es la ecuación de una parábola. Thomson colocó en el trayecto de las partículas una placa fotográfica, en la cual se revelaron las huellas de las partículas en forma de curvas parabólicas. Cada parábola corresponde a una misma relación  $e/m$ , pero a distintas velocidades. Diferentes parábolas corresponden a partículas con distintas relaciones  $e/m$ . Hallando para la parábola examinada  $y^2 = px$ , el valor de su parámetro  $p = \frac{C_2^2}{C_1} \left( \frac{m}{e} \right)$  y conociendo  $C_1$  y  $C_2$ , se puede hallar la relación entre las cargas de los iones y sus masas.

En los experimentos de Thomson no se observaron solamente iones de una carga, sino también de varias cargas. Si estos iones

son de la misma naturaleza (por ejemplo,  $O^+$  y  $O^{++}$ ) sus cargas específicas  $e_1/m$  y  $e_2/m$  se relacionarán exactamente como números enteros y mltiplos de la carga del electr3n  $e$ , ya que las cargas  $e_1$  y  $e_2$  pueden ser solamente mltiplos de  $e$ .

Si se trata de iones de la misma carga, pero de distinta naturaleza (por ejemplo,  $H^+$  y  $O^+$ ), sus cargas específicas  $e/m_1$  y  $e/m_2$  se relacionar3n como las masas  $m_1$  y  $m_2$  de dichas partculas. De esta

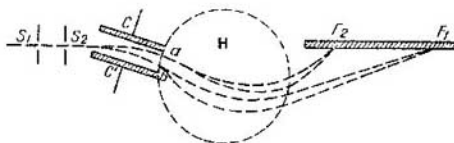


Fig. 276. Espect3grafo de masas.

manera, el m3todo de las par3bolas nos permite comparar directamente las masas de los 3tomos o de las mol3culas entre s3. Observando las par3bolas correspondientes al ne3n, Thomson descubri3 junto a la intensa par3bola correspondiente al peso at3mico del ne3n 20, otra m3s d3bil que correspond3a a otra relaci3n  $e/m$  distinta; las mediciones demostraron que esta relaci3n correspond3a a 3tomos de peso at3mico 22. As3 result3 que exist3an dos clases de 3tomos de ne3n de una misma carga, pero de masas algo diferentes.

En la actualidad se sabe que la mayor parte de los elementos es una mezcla de dos y m3s is3topos, es decir, sustancias bastante parecidas por sus propiedades f3sicas y qu3micas, pero de pesos at3micos algo diferentes.

El m3todo de comparaci3n de las masas de los iones seg3n su desviaci3n en los campos el3ctrico y magn3tico lo moderniz3 Aston. En el m3todo de Aston, los iones pasan consecutivamente por las zonas de acci3n de los campos el3ctrico y magn3tico que causan su desviaci3n en direcciones contrarias.

El esquema del instrumento de Aston se representa en la fig. 276. Los diafragmas  $S_1$  y  $S_2$  delimitan un haz fino de iones que a continuaci3n pasa por entre las armaduras paralelas  $C$  y  $C'$ . A las armaduras  $C$  y  $C'$  se les comunica una diferencia de potencial determinada de modo que entre ellas se forme un campo el3ctrico de intensidad  $E$ . Supongamos que del haz hemos aislado unas partculas de una misma carga espec3fica  $e/m$ . Estas partculas tendr3n diferentes velocidades, por lo tanto se inclinar3n en una magnitud distinta y el haz se ensanchar3. El extremo  $b$  corresponder3 a las partculas m3s lentas, y el  $a$ , a las m3s r3pidas. En la zona que abarca

la circunferencia de puntos, las partículas pasan a través del campo magnético, que es perpendicular al plano del dibujo. Aquí sufren una desviación hacia el lado contrario a que se han desviado en el campo eléctrico. Las partículas de distintas velocidades se desviarán de nuevo de manera diferente: las más lentas,  $b$ , se desviarán más, y las más rápidas,  $a$ , menos. Gracias a ello, las trayectorias de las partículas de diferentes velocidades se interceptarán en un punto  $F_1$ . De la misma manera, para las partículas de otra carga específica  $e/m$  se obtendrá una intercepción de las trayectorias de las partículas de distintas velocidades en cierto punto  $F_2$ . Los lugares

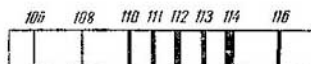


Fig. 277. Espectrograma de masas.

de intercepción de las trayectorias de las partículas con otras relaciones  $e/m$  se dispondrán aproximadamente a lo largo de la recta  $F_1F_2$ . Así, pues, si a lo largo de la recta  $F_1F_2$  se coloca una placa fotográfica, se obtendrán en ella rayas netas, "imágenes" de las rendijas, cada una de las cuales corresponderá a las partículas de determinada carga específica  $e/m$ . En el caso de iones de una misma carga, la posición de las rayas se determinará solamente por las relaciones de sus masas  $m$ . Midiendo las distancias relativas de estas rayas se puede hallar la relación de las masas  $m$ .

El fotograma obtenido (fig. 277) recuerda al espectro lineal obtenido en el espectrógrafo óptico. Por eso Aston denominó a su instrumento *espectrógrafo de masas*.

Con ayuda del espectrógrafo de masas se puede determinar con gran exactitud la relación de las masas de diferentes isótopos.

En la tabla XIX se dan los resultados de algunas mediciones de las masas de isótopos.

Los resultados de los experimentos sobre los isótopos, que son de valor excepcional para la teoría de la estructura de los átomos, se estudian en el t. III.

De otros métodos de determinación de la carga específica de los iones indicaremos el basado en el enfoque de las partículas de velocidad determinada en un campo magnético transversal. En la fig. 278 se representa el esquema del aparato (para simplificar, en el esquema no viene indicada la caja metálica en la cual se ha hecho el vacío y va parte del instrumento). El filamento incandescente  $D$  es el ánodo, que se recubre de una fina capa de sales que contienen el elemento a investigar. En estas condiciones, el filamento es un manantial de iones positivos. El campo eléctrico con una diferencia de potencial  $V_1 - V_2$  aplicado entre el filamento  $D$  y la rendija  $S_1$ , acelera a los iones. Los iones, después de pasar

Tabla XIX  
Masas de los isótopos

Atomo	Peso atómico químico	Masas de los isótopos comparadas con el O <sup>16</sup>
N . . . . .	1,00756	{ 1,00812 2,01471
He . . . . .	4,00128	{ 4,00391
Li . . . . .	6,940	{ 6,0167 7,0180
O . . . . .	16,0000 (por definición)	{ 16,0000 17,0046 18,0057
Cl . . . . .	35,457	{ 34,9800 36,9775

por la rendija, van a parar a la zona en que sobre ellos actúa un campo magnético uniforme de excitación  $H$  perpendicular al plano del dibujo. Solicitados por este campo se desplazan según una circunferencia de radio  $r$  que se determina por la fórmula (2) del § 218:

$$r = \frac{cv}{H} \cdot \frac{m}{e}, \quad (6)$$

donde  $m$  es la masa de los iones;  $e$ , sus cargas, y  $v$ , la velocidad.

Por la rendija  $S_1$  pasan los iones, cuyas velocidades poseen direcciones algo diferentes debido a las dimensiones finitas del filamento  $D$ . La línea de trazo

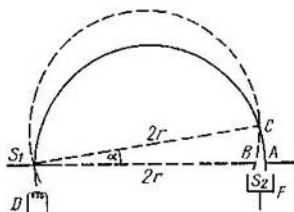


Fig. 278. Esquema de la desviación de las partículas en un campo magnético transversal.

continuo representa la trayectoria de los iones que se desplazan por el espacio entre  $D$  y  $S_1$  perpendicularmente al plano de la rendija  $S_1$ . Estos iones atravesarán por segunda vez el plano que contiene la rendija  $S_1$  en el punto  $A$  a la distancia  $2r$  de  $S_1$ . Los iones que pasan entre  $D$  y  $S_1$  formando un ángulo  $\alpha$  con la trayectoria examinada, interceptarán el plano que contiene la rendija  $S_1$ , en el



punto *B*. Suponiendo pequeño el ángulo  $\alpha$  (véase la fig. 278), tenemos que

$$AB = AS_1 - BS_1 = 2r - S_1 C \cos \alpha$$

o, como  $S_1 C = 2r$ ,

$$AB = 2r(1 - \cos \alpha) = 4r \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Como el ángulo  $\alpha$  es pequeño, aproximadamente tendremos que

$$AB = r\alpha^2.$$

Si el ángulo  $\alpha$  es pequeño, la magnitud  $r\alpha^2$  es muy pequeña en comparación con  $r$ ; por consiguiente, todas las trayectorias de los iones interceptarán el plano  $S_1 A$  dentro de los límites de un pequeño segmento  $AB$ . En este lugar se coloca la rendija  $S_2$  y detrás de ella la caja de Faraday *F*. Esta caja se conecta con un electrómetro y de esta manera se registran los iones que vienen a parar a ella. La velocidad de los iones  $v$  se determina en función de la diferencia de potencial  $V_1 - V_2$  con ayuda de la ecuación:

$$\frac{1}{2} mv^2 = e(V_1 - V_2). \quad (7)$$

Excluyendo la velocidad  $v$  de las fórmulas (6) y (7) tenemos que

$$\frac{m}{e} = \frac{1}{2} \left( \frac{rH}{c} \right)^2 \cdot \frac{1}{V_1 - V_2}.$$

De esta manera, a la distancia dada  $2r$  entre las rendijas  $S_1$  y  $S_2$  y a la excitación magnética  $H$  dada, a la caja de Faraday vienen a parar iones de relación  $m/e$  inversamente proporcional a la diferencia aceleradora de potencial  $V_1 - V_2$ . Variando  $V_1 - V_2$  se pueden registrar diferentes iones. En la fig. 279 se representa la curva obtenida cuando se recubre el ánodo *D* con una sal de magnesio. En el eje de las abscisas se indican las magnitudes inversas a la diferencia aceleradora de potencial  $V_1 - V_2$ , y en el eje de las ordenadas, las desviaciones  $n$  del electrómetro. La curva ofrece cuatro vértices. El del extremo de la derecha corresponde a los iones moleculares del nitrógeno ( $N_2^+$ ) de peso molecular 28. Los otros tres corresponden a los iones de una carga de los isótopos del magnesio de pesos atómicos 24, 25 y 26.

Ultimamente se han modernizado aún más los métodos de determinación de las masas de los isótopos. Por ejemplo, se utiliza el espectrógrafo de masas de doble enfoque con campos eléctrico y magnético. El poder resolutivo (separador) de este aparato es tan alto, que se pueden observar independientemente las huellas de los iones del isótopo pesado del hidrógeno de peso atómico 2,01471 y del ion molecular del isótopo ligero del hidrógeno de peso molecular 2,01624.

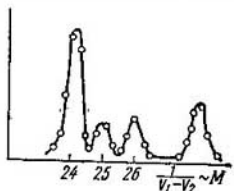


Fig. 279. Curva de los isótopos de magnesio.

§ 220. Aplicación técnica del haz electrónico. En la actualidad el haz electrónico se utiliza para diferentes fines técnicos. Describamos primeramente la construcción del *oscilógrafo de rayos catódicos*, aparato para estudiar los procesos eléctricos rápidos y alternos. En la fig. 280 se representa esquemáticamente la estructura del oscilógrafo de rayos catódicos. En el interior de un tubo de vidrio en que se ha hecho el vacío, hay un cátodo incandescente *K*, manantial de electrones. Un campo constante acelera los electrones.

Con ayuda de los diafragmas  $a$  y  $b$  se limita el haz haciéndolo muy fino. Este haz pasa a través de todo el tubo y en la pared opuesta  $C$ , cubierta de sustancia fluorescente, forma una mancha luminosa. En su trayectoria, el haz electrónico pasa por entre dos pares de placas  $AA'$  y  $BB'$  situadas en planos perpendiculares mutuamente. A las placas  $AA'$  se aplica la diferencia de potencial  $V_1 - V_2$ , cuya dependencia del tiempo se desea estudiar. Generalmente se trata de diferencia de potencial que varía periódicamente con el tiempo.

Entre las placas  $AA'$  se crea un campo, cuya intensidad  $E$  varía en función del tiempo con el mismo período que la diferencia de potencial  $V_1 - V_2$ . Bajo la acción de este campo, el haz electrónico se desviará, con la particularidad de que, debido a la masa excesivamente pequeña de los electrones, sus desviaciones concordarán prácticamente con las del campo. El punto luminoso formado por el haz de electrones en la pantalla  $C$ , debido a las desviaciones del haz, también empezará a oscilar. Si la frecuencia es bastante elevada,

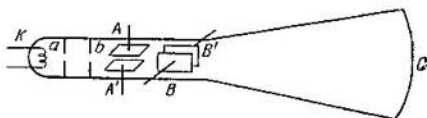


Fig. 280. Oscilógrafo de rayos catódicos.

que es lo que ocurre en la mayoría de los casos, estas oscilaciones no se pueden observar a simple vista, el punto luminoso se extiende transformándose en una raya continua. Para poder observar las oscilaciones, entre el segundo par de placas  $BB'$  se crea un campo  $E_0$  que varíe con el tiempo de manera conocida. Por ejemplo, entre el par de placas  $BB'$  se puede crear un campo que varíe con el tiempo según la ley de oscilaciones armónicas de frecuencia angular conocida  $\omega_0$ ; entonces:

$$E_0 = A_0 \cos \omega_0 t.$$

Si la diferencia de potencial  $V_1 - V_2$  que se estudia, también varía armónicamente con el tiempo,

$$V_1 - V_2 = A \cos(\omega t + \delta),$$

el haz electrónico participará de dos movimientos oscilatorios armónicos perpendiculares entre sí (véase el t. I), y el punto luminoso describirá en la pantalla  $C$  una de las figuras de Lissajous. Determinando la forma de esta figura y conociendo la frecuencia y la amplitud que caracterizan la variación con el tiempo de  $E_0$ , se puede determinar el carácter de la variación con el tiempo de la diferencia de potencial  $V_1 - V_2$  que se estudia. Si las frecuencias  $\omega$  y  $\omega_0$  coin-

ciden, en la pantalla fluorescente  $C$  se forma una elipse que en casos particulares puede transformarse en una circunferencia o en una recta. Las figuras observadas en la pantalla  $C$  se pueden fotografiar, obteniendo en este caso el llamado *oscilograma*.

Ultimamente se ha empezado a utilizar otra exploración más cómoda de oscilaciones del haz electrónico creadas por influencia del campo variable excitado entre las placas  $AA'$ , que se denomina "tiempo lineal básico". Para ello, entre las placas  $BB'$  se crea un campo de intensidad  $E_0$  que durante cierto intervalo de tiempo aumente proporcionalmente con el tiempo:

$$E_0 = At.$$

Esto se consigue conectando en paralelo a las placas  $BB'$  un condensador que durante este intervalo de tiempo se cargue continuamente. Entonces, el punto luminoso describe en la pantalla  $C$  la

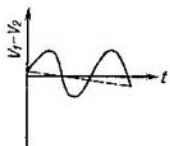


Fig. 281. Oscilograma.

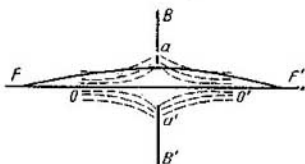


Fig. 282. Lente electrónica.

curva que obtendríamos, si marcásemos en el eje de ordenadas los valores de  $V_1 - V_2$ , que es una función del tiempo  $f(t)$ , y en el de abscisas, el tiempo  $t$  (fig. 281). Como el aumento continuo del campo  $E_0$  sacaría al haz fuera de los límites de la pantalla  $C$ , al cabo de cierto tiempo  $t = \tau$  se hace que el valor de  $E_0$  disminuya bruscamente hasta cero, después de lo cual vuelve a aumentar proporcionalmente con el tiempo. Esta caída súbita de la intensidad  $E_0$  hasta el valor cero se puede conseguir, por ejemplo, conectando en los terminales del condensador un tubo de descarga; mientras la diferencia de potencial de las armaduras del condensador sea menor que el potencial de encendido, la resistencia del tubo es tan grande, que la presencia de éste no influye en el proceso de carga del condensador. En cuanto la diferencia de potencial alcance el potencial de encendido, el tubo produce una descarga y el condensador pierde la carga. Al proceso de descarga del condensador le corresponde el rápido retorno del punto luminoso a la posición inicial (recta de puntos de la fig. 281). Luego, el punto luminoso empieza de nuevo a describir la curva. Si la variación de la diferencia de potencial que se estudia  $V_1 - V_2$  tiene carácter puramente periódico, se puede conseguir, con el tiempo, que la nueva curva coincida con la inicial.

Los oscilógrafos modernos permiten estudiar las oscilaciones de frecuencia hasta  $10^7 \text{ seg}^{-1}$  y producen una desviación del punto luminoso de hasta 1 mm por voltio.

Los oscilógrafos tienen gran aplicación en el estudio de las corrientes alternas (véase el § 232).

Otra de las aplicaciones del haz electrónico está relacionada con su desviación en un campo eléctrico o magnético variable. En este caso resulta posible enfocar el haz electrónico. Con ello se establece la analogía entre la desviación de los haces electrónicos y la refracción de los haces luminosos en las lentes. Debido a ello, los fenómenos de propagación de los haces electrónicos en los campos variables se han denominado *óptica electrónica*.

Un ejemplo muy elemental de "lente electrónica" puede ser el campo eléctrico uniforme creado junto a un agujero circular  $aa'$  de la placa  $BB'$  (fig. 282) cargada negativa y uniformemente. Las líneas de fuerza en las proximidades de un agujero de éstos se

representan con líneas de puntos. Los electrones que se desplazan a lo largo del eje  $OO'$  del orificio, gracias a la simetría del campo no sufren ninguna desviación. Cualquier electrón que se desplace interceptando el eje  $OO'$  en cierto punto  $F$ , se desviará y su desviación será tanto mayor, cuanto más cerca pase del borde del orificio  $aa'$ .

Así, pues, por detrás de la placa, la trayectoria del electrón interceptará de nuevo al eje  $OO'$  en cierto punto  $F'$ .

Si por el punto  $F$  pasa un haz de trayectorias comprendidas en los límites de un ángulo sólido pequeño, todas volverán de nuevo a interceptarse en un mismo punto  $F'$ , que será de esta manera la imagen del punto  $F$ . Si los haces son más anchos, no todas las trayectorias se cortarán en el punto  $F'$ , es decir, se observará el fenómeno correspondiente a la aberración esférica de la óptica.

Los métodos de la óptica electrónica se basan en la analogía formal de las leyes a que se subordina la difusión de los haces electrónicos en un campo electrostático variable y la propagación de los rayos luminosos en las sustancias diáfanos de coeficiente de refracción variable. Aclaremos esta analogía con un simple ejemplo. Supongamos que los electrones se desplazan con movimiento rectilíneo a la velocidad constante  $v_1$  en la zona  $A$  del espacio (fig. 283), donde el potencial

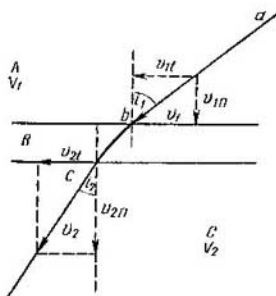


Fig. 283. Refracción del haz electrónico.

$V_1$  tiene un valor constante. Luego van a parar a la zona  $C$ , donde el potencial también es constante, pero tiene otro valor  $V_2$ . Aquí los electrones se desplazan también en línea recta. En la zona límite  $B$ , el potencial varía desde el valor  $V_1$  hasta el valor  $V_2$ , con lo cual en esta zona hay una intensidad del campo  $E$  diferente de cero y, por consiguiente, sobre cada electrón actúa una fuerza perpendicular a la línea divisoria de las zonas. Bajo la influencia de esta fuerza variará la componente normal  $v_n$  de la velocidad del electrón, mientras que la tangencial  $v_t$  seguirá invariable. Llamando  $i_1$  e  $i_2$  a los ángulos que forman las trayectorias de los electrones  $ab$  y  $cd$  en ambas zonas con las normales a sus líneas divisorias, obtenemos que

$$\text{sen } i_1 = \frac{v_{1t}}{v_1}, \quad \text{sen } i_2 = \frac{v_{2t}}{v_2}.$$

Como  $v_{1t} = v_{2t}$ , se deduce que

$$\frac{\text{sen } i_1}{\text{sen } i_2} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Esta relación es análoga a la ley de la refracción óptica:

$$\frac{\text{sen } i_1}{\text{sen } i_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción de dos sustancias diáfanas.

El método de enfoque electrostático encuentra una amplia aplicación en la técnica moderna. En la fig. 284 se indica el sistema de enfoque de un oscilógrafo

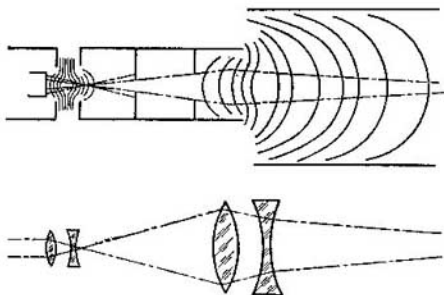


Fig. 284. Sistema de enfoque de un oscilógrafo.

moderno que consta de una serie de cilindros y diafragmas con orificios circulares. En la parte inferior de la misma se representa el correspondiente sistema análogo de lentes ópticas.

En la fig. 285 se representa el esquema de un aparato que se denomina *transformador de imágenes* que ha adquirido gran aplicación en los últimos tiempos. En éste,  $g$  es el objeto, cuya imagen real lanza sobre la placa transparente  $B$

la lente óptica  $L$ . La superficie de la placa  $B$  se ha cubierto de una fina capa de metal, que se utiliza como cátodo  $K$ . De este cátodo se desprenden electrones arrancados por los rayos ópticos emitidos por el objeto  $g$  (véase el efecto fotoeléctrico en el I. III). El flujo de estos electrones se enfoca con ayuda de las lentes electrostáticas  $A_1$  y  $A_2$  sobre la pantalla fluorescente  $E$ . De esta manera, en la pantalla  $E$  se obtiene una imagen visible del objeto  $g$ . El objetivo de esta transformación consiste en lo siguiente: el objeto  $g$  puede emitir rayos ultravioletas o infrarrojos, que son invisibles; el transformador de imágenes, sin embargo, nos permite obtener la imagen del objeto en rayos visibles emitidos por la pantalla

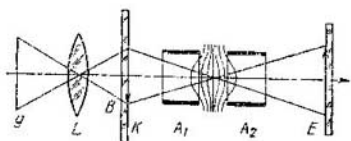


Fig. 285. Transformador de imágenes.

fluorescente  $E$ . Además, el transformador de imágenes puede funcionar como "amplificador": la intensidad de la emisión del objeto puede ser muy pequeña, mientras que la emisión de la pantalla fluorescente puede ser mucho más clara gracias a la gran energía adquirida por los electrones en el campo electrostático acelerador.

La acción enfocadora del campo magnético se ha indicado ya al describir el método de determinación de la carga específica del electrón (§ 218). El electrón que viene a parar a un campo magnético uniforme con una velocidad inicial que forme un ángulo agudo  $\alpha$  con la dirección del campo, se desplazará en éste describiendo una espiral. Si los ángulos  $\alpha$  son pequeños el paso de esta espiral prácticamente no depende del valor de  $\alpha$ . Gracias a ello, el haz de electrones, cuyas trayectorias están dentro de los límites de un cono de pequeño ángulo de apertura, se concentra en un foco puntual por el campo magnético dirigido según el eje del cono. De esta manera, el campo magnético actúa análogamente a una simple lente colectora en óptica. El campo magnético variable creado en las proximidades de unas bobinas con terminales de forma especial también puede enfocar haces de electrones.

La posibilidad de enfocar haces electrónicos permite construir *microscopios electrónicos*. El haz de electrones emitido por el cátodo atraviesa el objeto que se investiga, cuyas diferentes partes retienen en mayor o menor grado a los electrones. Con ayuda de un sistema de lentes electrónicas se obtiene una imagen final aumentada del objeto. La imagen se revela con ayuda de una pantalla fluorescente, o con una placa fotográfica que tiene la propiedad de ennegrecer

al choque de los rápidos electrones. En la fig. 286 se comparan los esquemas del microscopio electrónico con lentes magnéticas y el microscopio óptico con cámara fotográfica. Las partes análogas de ambos microscopios se indican con las mismas letras: para el microscopio electrónico con letras mayúsculas  $A, B, C, \dots$ , y para el óptico, con minúsculas  $a, b, c, \dots$ . En el microscopio electrónico  $A$  es el manantial de electrones;  $B$ , la lente magnética colectora que dirige el haz de electrones hacia el objeto  $C$ ;  $D$ , el objetivo magnético;  $E$ , la imagen intermedia;  $F$ , el ocular (de proyección), y  $G$ , la imagen final formada en la placa fotográfica  $H$ . Todas las partes del microscopio electrónico están encerradas en un tubo hermético en el cual se ha hecho un vacío tal, que el recorrido libre medio de los electrones sea mayor que la distancia desde el manantial hasta la placa fotográfica. En el microscopio óptico (luminoso):  $a$  es el manantial de luz;  $b$ , el condensador;  $c$ , el objeto;  $d$ , el objetivo;  $e$ , la imagen real (intermedia);  $f$ , el ocular;  $g$ , la imagen virtual (final), y  $h$ , la placa fotográfica. Los modernos microscopios electrónicos permiten alcanzar aumentos enormes de 40 000 veces y mayores. Estos aumentos superan notablemente los alcanzados por los mejores microscopios luminosos (que es de unas 2 000 veces). Así, pues, los microscopios electrónicos permiten estudiar objetos que no pueden ser estudiados con ayuda de los microscopios luminosos corrientes. En el t. III se hablará de las causas que permiten obtener aumentos mayores con ayuda de los microscopios electrónicos que con los luminosos.

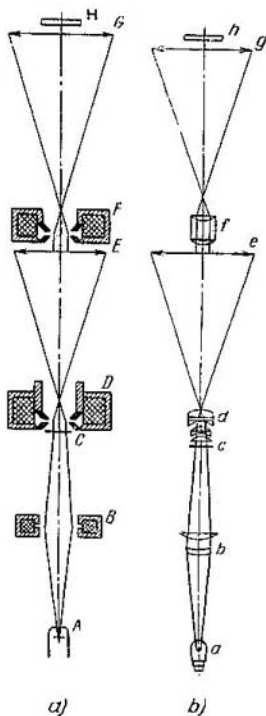


Fig. 286. Esquemas de los microscopios electrónico (a) y luminoso (b).

En la fig. 287 se representa la fotografía de partículas de ZnO pulverizadas obtenida en el microscopio electrónico. Las partículas son cristales aciculares extremadamente pequeños. A la izquierda



Fig. 287. Fotografía de las partículas de ZnO obtenida mediante el microscopio electrónico.

de la fotografía se indica la escala correspondiente a  $1 \mu$ . Una construcción original de microscopio electrónico ha sido realizada en la Unión Soviética por los académicos A. Lébedev y V. Vértssner.



## Inducción electromagnética

§ 221. **Fenómeno de inducción electromagnética.** El fenómeno de inducción electromagnética lo descubrió Faraday en 1831. Este fenómeno consiste en lo siguiente: *en cualquier contorno conductor cerrado, al variar el flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por este contorno, se crea una corriente eléctrica. Esta corriente se denomina corriente inducida.*

El fenómeno de inducción electromagnética se puede observar en los siguientes experimentos.

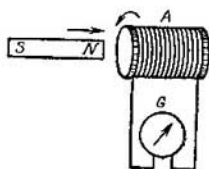


Fig. 288. Inducción de corriente en un solenoide al desplazar un imán.

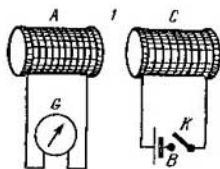


Fig. 289. Inducción de corriente en un solenoide al conectar o desconectar la corriente en un solenoide vecino.

1. Sea un solenoide *A* (fig. 288) cerrado a través de un galvanómetro *G*. Acerquemos a uno de sus extremos un imán permanente. En el solenoide se crea una corriente eléctrica que revela la inclinación de la aguja del galvanómetro. Esta corriente cesa de fluir al cesar de moverse el imán. Si empezamos a alejar el imán, en el solenoide se crea de nuevo una corriente, pero de sentido contrario. El mismo fenómeno tendrá lugar si conservamos inmóvil al imán y desplazamos el solenoide. Por último, en lugar del imán se puede utilizar un segundo solenoide, por el cual fluye una corriente continua: al desplazarlo, en el primer solenoide se crea una corriente.

2. Sean dos solenoides inmóviles *A* y *C* (fig. 289). Supongamos que el solenoide *A* se cierra igual que antes, a través de un galvanómetro *G* y que el solenoide *C* está conectado a un circuito con una pila *B* y un interruptor *k*. Al conectar la corriente al solenoide *C* con el interruptor *k*, en el *A* se crea una corriente instantánea que revela el salto de la aguja del galvanómetro *G*. Al continuar fluyendo por

el solenoide  $C$  una corriente continua, en el solenoide  $A$  no se observa ninguna corriente. En el momento de desconectar la corriente en el solenoide  $C$ , en el  $A$  se crea de nuevo una corriente instantánea; pero de sentido contrario a la primera.

Estos mismos experimentos se pueden realizar utilizando, en lugar de solenoides, contornos de una espira; pero el fenómeno será más débil.

Examinemos los resultados de estos experimentos. En el primero es característica la circunstancia de que en el solenoide  $A$  la corriente fluye solamente mientras el imán se acerca o se aleja del solenoide, es decir, mientras varíe el campo en las proximidades del solenoide, o mientras el propio solenoide se desplace en el campo magnético variable del imán. En cuanto cese el desplazamiento del imán respecto al solenoide (o el del solenoide respecto al imán), el campo magnético en las proximidades del solenoide se hace constante y la corriente deja de fluir por el solenoide. En el segundo experimento, el fenómeno es análogo: en este caso, la aparición o el cese de la corriente en el solenoide  $C$  crea la variación del campo magnético. En ambos casos, en las proximidades del contorno conductor, varía la magnitud del campo magnético y, por consiguiente, *varía también el flujo de inducción magnética* a través de la superficie que comprende el contorno. Que todo esto consiste precisamente en la variación del *flujo* de inducción magnética, se deduce de lo siguiente: la corriente inducida surge, si *se hace girar un contorno conductor cerrado en un campo magnético uniforme*. En este caso, la magnitud de la inducción magnética del campo en las proximidades del conductor permanece constante, varía solamente el flujo a través de la superficie del contorno. Si el contorno cerrado *se desplaza en movimiento de traslación por un campo magnético uniforme*, el flujo de inducción a través del contorno será constante y no habrá corriente de inducción. Así se explica lo expuesto al principio del párrafo de que la corriente inducida se crea en un contorno conductor cerrado al variar el flujo de inducción a través de la superficie del contorno.

No obstante hay que observar que en los experimentos descritos no se ve si la aparición de la corriente inducida viene determinada por la variación del flujo de inducción magnética  $B$  o de la excitación magnética  $H$ . Si no hay cuerpos magnéticos, esto no tiene importancia, ya que la inducción magnética  $B$  y la excitación magnética  $H$  son iguales; pero si hay un cuerpo magnético, debe reflejarse la diferencia entre  $B$  y  $H$ . Prácticamente es difícil llenar todo el espacio en que están los contornos conductores, con un cuerpo magnético de permeabilidad magnética  $\mu$  suficiente, ya que un cuerpo magnético de esta clase (hierro, níquel, etc.) es un cuerpo sólido. Sin embargo, se puede realizar el experimento de manera que, aun-

que el cuerpo magnético llene parte del espacio, todo el campo magnético esté concentrado solamente en el interior de aquél. Para ello, tomemos el toroide *A* entrelazado con el contorno conductor *C* de la misma manera con que se enganchan mutuamente dos eslabones consecutivos de una cadena (fig. 290). Supongamos que por el toroide *A* fluye una corriente. El campo magnético creado por ella se concentra solamente en el interior del toroide y, por consiguiente,

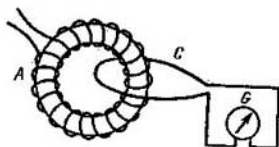


Fig. 290. Inducción de corriente en el conductor entrelazado con el toroide.

todo el flujo de este campo atraviesa el contorno *C*. Si desconectamos la corriente del toroide *A*, habrá una variación del flujo (desaparece) y en el contorno se crea una corriente de inducción. Llenemos ahora el interior del toroide *A* con hierro. El campo magnético del toroide, como antes, estará concentrado en el interior del mismo. En este caso, la excitación magnética *H* sigue siendo la misma, ya que la excitación magnética del campo de la corriente no depende de que haya o no un cuerpo magnético (si éste llena por completo el espacio en que el campo es diferente de cero); pero la inducción magnética  $B = \mu H$  aumentará  $\mu$  veces. Desconectando otra vez la corriente del toroide *A* (la intensidad de la corriente inicial se considera la misma) se observa un aumento notable de la corriente inducida en el contorno *C*. Esto demuestra que la creación de la corriente inducida es debida a la variación del flujo de inducción magnética.

Determinemos ahora la dirección de la corriente inducida. Lenz, generalizando en 1833 los resultados de los experimentos expuso la regla siguiente: *la corriente que se crea en un contorno cerrado tiene un sentido tal, que esta corriente crea a través de la superficie limitada por el contorno, un propio flujo de inducción magnética que se opone a la variación del flujo de inducción magnética que la origina.*

Basándonos en la regla de Lenz examinemos los experimentos descritos. En el primer experimento, al acercarse al solenoide el polo norte del imán, en el solenoide se crea una corriente dirigida contra las agujas del reloj, si se mira el solenoide del lado en que se le acerca el imán (fig. 288). En este caso, el flujo de inducción creado

por el imán, va hacia el interior del solenoide y al acercarse el imán, aumenta. El campo magnético de la corriente de inducción en el solenoide irá dirigido desde el solenoide hacia afuera y, por consiguiente, compensará el incremento del campo del imán. Al alejar el polo norte del imán en el solenoide se crea una corriente dirigida según las agujas del reloj, si de nuevo miramos el solenoide por el lado del imán. El flujo de inducción creado por el imán, lo mismo que antes, va dirigido hacia el interior del solenoide; pero ahora va decreciendo. El campo magnético de la corriente de inducción en el solenoide, en este caso, va dirigido hacia el interior del solenoide y, por consiguiente, compensa el decrecimiento del campo del imán. Así tenemos que ambos casos se hallan en concordancia con la regla de Lenz.

Analizando los resultados de estos dos casos se puede llegar a otra conclusión: al acercar al solenoide el polo norte del imán, la dirección de la corriente de inducción es tal, que el extremo del solenoide más cercano al imán se transforma en manantial de líneas de fuerza magnéticas y, por consiguiente, el imán y el solenoide se repelen, es decir, entre ellos surge una fuerza que se opone al movimiento del imán que conduce a la creación de la corriente de inducción. Al alejar el imán, éste y el solenoide se atraen, es decir, de nuevo surge entre ellos una fuerza que se opone al movimiento del imán.

Ahora veremos también que en el caso del segundo experimento analizado al principio de este párrafo, es justa la regla de Lenz. Al conectar la corriente en el solenoide  $C$ , en el  $A$  se crea una corriente de *dirección contraria*. Al *desconectar* la corriente del solenoide  $C$ , en el  $A$  se crea una corriente del *mismo sentido*. Estos resultados corresponden precisamente a la regla de Lenz: supongamos que en el solenoide  $C$ , al conectarlo, fluye una corriente contra las agujas del reloj, si lo miramos desde su extremo  $I$  (fig. 289). El flujo de inducción magnética creado por esta corriente penetrará en el solenoide  $A$  y aumentará al conectar la corriente. El flujo de inducción magnética creado por la corriente de inducción en el solenoide  $A$ , saldrá del mismo y, por consiguiente, compensará el incremento del flujo del solenoide. Con la misma facilidad se puede uno convencer de que al desconectar la corriente del solenoide  $C$ , el campo magnético de la corriente de inducción del  $A$  compensa el decrecimiento del flujo del solenoide  $C$ .

§ 222. Determinación de la fuerza electromotriz de inducción. La creación de la corriente inducida en un contorno cerrado es debida a que en este contorno, bajo la influencia de la variación del flujo magnético de inducción, aparece una f. e. m. Faraday fue el primero en relacionar la magnitud de esta f. e. m. con la velocidad

de variación del flujo de inducción magnética. Esta relación, dada por Faraday, se deduce de la ley de la conservación de la energía.

Hagamos el cálculo energético de un caso particular utilizando un contorno con una parte móvil  $AC$  (fig. 291). Este contorno ya se ha estudiado al calcular el trabajo de desplazamiento del contorno con corriente en un campo magnético (§ 210).

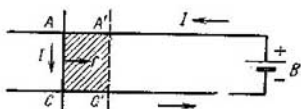


Fig. 291. Representación gráfica para deducir la expresión de la fuerza electromotriz de inducción.

Supongamos que en el contorno está conectada una pila  $B$  de f. e. m. igual a  $\mathcal{E}$ . El trabajo total realizado por esta f. e. m. durante el tiempo  $\Delta t$  es igual a  $\mathcal{E}I\Delta t$ , donde  $I$  es la intensidad de la corriente del contorno. Si el contorno se halla fuera del campo magnético, todo el trabajo se invertirá en desprender el calor de Lenz-Joule,  $I^2R\Delta t$ . En este caso, la intensidad de la corriente, según la ley de Ohm, es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (1)$$

Supongamos ahora que el contorno se halla en un campo magnético constante todo el tiempo. Para simplificar consideraremos que este campo es uniforme y va dirigido perpendicularmente al plano del contorno alejándose por detrás del plano del dibujo. Sobre la parte móvil  $AC$  actuará la fuerza  $f$  dirigida perpendicularmente a  $AC$  y hacia la derecha. Solicitada por esta fuerza, la parte móvil  $AC$  del contorno se desplazará. Supongamos que en el tiempo  $\Delta t$  se desplaza hasta la posición indicada en la figura por una línea de puntos  $A'C'$ . Según lo dicho en el § 210, en este caso se habrá realizado un trabajo:

$$\Delta A = I \cdot \Delta \Phi,$$

donde  $\Delta \Phi$  es el flujo de inducción magnética a través de la parte rayada  $ACA'C'$  del contorno, e  $I$ , la intensidad de la corriente que pasará por el contorno durante el desplazamiento que examinamos. Este trabajo se realizará a costa del trabajo de la f. e. m. de la pila  $B$ . De esta manera tenemos que el trabajo total de la f. e. m. de la pila,  $\mathcal{E}I\Delta t$ , se invierte en este caso, no sólo en el desprendimiento del calor de Lenz-Joule, sino también en el trabajo de desplazamiento

del sector  $AC$  del contorno:

$$\mathcal{E} \Delta t = I^2 R \Delta t + I \Delta \Phi.$$

Hablando en general, la intensidad  $I$  de la corriente puede no permanecer constante en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ ; por eso hay que considerar un intervalo de tiempo  $dt$  tau pequeño, que en este instante de tiempo no llegue a variar notablemente la intensidad  $I$  de la corriente. Entonces,

$$\mathcal{E} I dt = I^2 R dt + I d\Phi. \quad (2)$$

En esta ecuación,  $d\Phi$  es el flujo de inducción a través de la parte rayada  $ACA'C'$  del contorno, que en este caso tiene la forma de una franja infinitamente estrecha. Despejando la intensidad  $I$  de la corriente de la ecuación (2) hallamos que

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R}.$$

Comparando esta ecuación con la ley de Ohm para el circuito cerrado (1) vemos que en ella, la función de f. e. m. la desempeña una magnitud que se compone de dos términos: de la f. e. m.  $\mathcal{E}$  de la pila y de la magnitud  $-\frac{d\Phi}{dt}$ . Este término es una f. e. m. complementaria de inducción que se debe a la variación del flujo de inducción  $\Phi$  a través de la superficie limitada por el contorno. Llamándola  $\mathcal{E}_i$ , tenemos que

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3)$$

La ecuación (3) se denomina *ley de Faraday*.

La ley de Faraday de la f. e. m. de inducción se ha obtenido examinando el caso cuando el flujo de inducción a través de un contorno varía a costa de la variación de la forma del propio contorno. Sin embargo, se puede demostrar que esta ecuación es justa para todos los casos de variación del flujo de inducción a través del contorno independientemente de las causas que originen esta variación, como son, la variación de su forma, su giro, desplazamiento por un campo variable, o, por último, la variación con el tiempo de la inducción magnética del propio campo.

A la derecha de la ecuación (3) tenemos la derivada con respecto al tiempo del flujo de inducción  $\Phi$  a través del contorno. Esto significa que el valor numérico de la f. e. m. de inducción  $\mathcal{E}_i$  es proporcional a la velocidad de variación del flujo de inducción respecto al tiempo. Queda por aclarar el sentido del signo (menos) de la parte derecha de la ecuación (3). Para ello elijamos como positivo un sentido cualquiera de recorrido del contorno. El sentido de la co-

riente lo consideraremos positivo, si coincide con el sentido positivo de recorrido del contorno. También consideraremos positiva la f.e.m., si crea en el circuito una caída de potencial en el sentido del recorrido positivo del contorno. Tracemos una normal al contorno, cuyo sentido positivo esté relacionado con el sentido positivo de recorrido del contorno mediante la regla indicada en la pág. 389. El flujo positivo de inducción a través de la superficie del contorno lo crearán las líneas de inducción que van paralelas a la normal o que forman con ella un ángulo agudo.

El flujo negativo de inducción a través del contorno lo crearán las líneas de inducción de sentido opuesto al de la normal, o que forman con ella un ángulo obtuso. Entonces, el signo menos de la derecha de la ecuación (3) indica que el aumento del flujo de inducción  $\left(\frac{d\Phi}{dt} > 0\right)$  crea una f. e. m. que actúa en el sentido negativo de recorrido del contorno; la disminución del flujo de inducción  $\left(\frac{d\Phi}{dt} < 0\right)$  crea una f. e. m. que actúa en el sentido positivo de recorrido del contorno. De esta manera tenemos que la expresión (3) nos da al mismo tiempo la dirección y la magnitud de la f. e. m. de inducción. Es fácil comprobar que este sentido concuerda con la regla de Lenz.

Queda por analizar la cuestión de las unidades en que se mide la f. e. m. de inducción. Si el flujo de inducción se mide en maxwelios, es decir, en unidades CGSM, y el tiempo  $t$  en segundos, la fórmula (2), en la cual no hay coeficiente alguno de proporcionalidad, determinará la unidad CGSM de f. e. m. Esta nueva unidad de f. e. m. se puede denominar Mx/seg y numéricamente es igual a la f. e. m. de inducción creada en un contorno cerrado al variar el flujo de inducción magnética a través de la superficie de este contorno en 1 Mx por 1 seg.

La relación entre la unidad CGSM de f. e. m. Mx/seg y la unidad CGSE de f. e. m. se obtiene basándose en lo siguiente. La magnitud  $I\mathcal{E}$  es una potencia y si se mide la intensidad de la corriente  $I$  y la f. e. m.  $\mathcal{E}$  en unidades CGSE o en unidades CGSM, en ambos casos la potencia se expresará en erg/seg. Por lo tanto debe cumplirse la relación:

$$I_{CGSE} \cdot \mathcal{E}_{CGSE} = I_{CGSM} \cdot \mathcal{E}_{CGSM}$$

donde los subíndices CGSE y CGSM indican respectivamente en qué unidades se han medido  $I$  y  $\mathcal{E}$ . De donde:

$$\frac{\mathcal{E}_{CGSE}}{\mathcal{E}_{CGSM}} = \frac{I_{CGSM}}{I_{CGSE}} \quad (4)$$

Pero, según lo dicho en el § 195, la unidad CGSM de intensidad de la corriente es  $c$  veces mayor que la unidad CGSE de intensidad

de la corriente, donde  $c$  es la velocidad de la luz, aproximadamente igual a  $3 \cdot 10^{10}$  cm/seg. Por consiguiente, de la relación (4), obtenemos que

$$1 \text{ unid. CGSM de f. e. m.} = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \text{ unid. CGSE de f. e. m.}$$

(Sobre las unidades de medición de las magnitudes de la fórmula (3) en el sistema internacional, véase el § 223).

Analicemos la ley de inducción desde el punto de vista electrónico. Sea el sector  $ab$  de un conductor colocado en un campo magnético de excitación  $H$  dirigido hacia la parte posterior del dibujo (fig. 292). Los electrones libres, en movimiento térmico desordenado, en el campo magnético sufren la acción de la fuerza de Lorentz. No obstante, como término medio, esta fuerza no crea ninguna corriente, ya que las direcciones de las fuerzas aplicadas a distintos electrones, son desordenadas. Si ahora empezamos a desplazar el sector  $ab$  del conductor, por ejemplo, hacia la derecha a la velocidad  $v$ , los electrones del metal adquirirán una componente complementaria de la velocidad igual a  $v$ . Por consiguiente, sobre los electrones actuará una fuerza complementaria de Lorentz de la misma dirección y sentido para todos los electrones e igual a

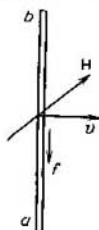


Fig. 292. Sentido de la fuerza de Lorentz que actúa sobre una carga al desplazar el conductor por un campo magnético  $H$  exterior.

$$f_l = evH.$$

Si el campo va dirigido hacia la parte posterior del dibujo y el sector  $ab$  se desplaza hacia la derecha, la fuerza que actúa sobre los electrones (carga negativa) irá dirigida hacia abajo. Los electrones, solicitados por esta fuerza se desplazarán hacia abajo, por consiguiente se creará una corriente dirigida hacia arriba.

La fuerza eléctrica equivalente,  $f = eE$ , que comunicaría este mismo desplazamiento a los electrones, se determina de la ecuación:

$$f = eE = evH.$$

Por consiguiente, la intensidad equivalente del campo eléctrico  $E$  será

$$E = vH$$

e irá dirigida hacia arriba.

La fuerza electromotriz que se crea en el sector, se mide por la diferencia de potencial que crearía la fuerza eléctrica equivalente en los extremos del sector. Como la intensidad del campo es el cociente de dividir la diferencia de potencial en los extremos del sector por la longitud del mismo, la f. e. m. será el producto de la intensidad equivalente  $E$  del campo eléctrico por la longitud del sector  $l$ , es decir,

$$\mathcal{E}_l = lE = vHl. \quad (5)$$

Pero el producto  $vl$  es el área de la superficie que barre el sector al desplazarse por unidad de tiempo y, por consiguiente, todo el término de la derecha de la ecuación (5) expresará el flujo de la excitación magnética  $H$  que atraviesa el sector del conductor en la unidad de tiempo. Ya que cuando no hay cuerpos magnéticos, el flujo de excitación magnética coincide con el de inducción, tendremos



que  $vHl = \frac{d\Phi}{dt}$ . De donde el valor de la f. e. m. de inducción será

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt},$$

que coincide con la fórmula (3).

La f. e. m. va dirigida hacia el lado en que se desplazan las cargas positivas, es decir, en el caso de la fig. 292, hacia arriba. Es cómodo hallar esta dirección con ayuda de la regla de la mano derecha: si se coloca la mano derecha, con el dedo pulgar extendido formando ángulo recto con los demás, de manera que las líneas de inducción magnética penetren por la palma perpendicularmente y el pulgar indicando la dirección del desplazamiento del conductor, los demás dedos extendidos indicarán la dirección y sentido de la f. e. m. de inducción. Para un contorno cerrado, esta regla nos dará la dirección de la f. e. m. total en correspondencia con la regla de Lenz.

De esta manera tenemos que la creación de la corriente inducida al desplazar el conductor por un campo magnético exterior viene explicada por la acción de la fuerza de Lorentz sobre los electrones del conductor. Sin embargo, como se ha visto, la corriente inducida aparece también en el caso de que el contorno conductor permanezca inmóvil y varíe en las proximidades del mismo la magnitud de la inducción magnética. Para este caso no es aplicable la explicación aducida. Para explicar en este caso la creación de la corriente inducida, hay que admitir que en cada punto del espacio, al variar la magnitud de la inducción magnética con el tiempo, se crea una fuerza eléctrica. Esta suposición es la base de la teoría de Maxwell, que analizamos más abajo (§§ 243, 244).

§ 223. Cantidad de electricidad transportada por la corriente inducida. Unidades de las magnitudes magnéticas en el sistema internacional. Al crearse en el contorno una corriente de inducción, por el conductor hay un transporte de cargas. Si  $\mathcal{E}_i$  es la f. e. m. de inducción y  $R$ , la resistencia total del contorno examinado, la intensidad de la corriente creada en él será

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R}.$$

El valor de la fuerza electromotriz de inducción, según lo dicho en el § 222, será

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt},$$

de donde

$$I = \frac{d\Phi/dt}{R}. \quad (1)$$

La cantidad de electricidad  $dq$  transportada durante el tiempo  $dt$  a través de la sección transversal del conductor, es igual a  $I dt$ , de donde, basándonos en la (1), se tiene que

$$dq = \frac{1}{R} d\Phi. \quad (2)$$

donde  $d\Phi$  es la variación del flujo de inducción magnética a través del contorno durante el tiempo  $dt$ .

Supongamos que al comienzo de un intervalo finito de tiempo el flujo de inducción magnética a través del contorno que se examina es  $\Phi_1$ , y al final del intervalo de tiempo, es  $\Phi_2$ . La cantidad  $q$  total de electricidad que pasa por la sección transversal del conducto debido a la creación de la corriente inducida, vendrá expresada por la ecuación que se obtenga sustituyendo en la fórmula (2) la variación infinitesimalmente pequeña del flujo de inducción  $d\Phi$ , por la variación total  $\Phi_2 - \Phi_1$ :

$$q = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R}. \quad (2a)$$

La fórmula (2a) nos permite determinar la cantidad de electricidad que pasa por la sección transversal del contorno en función de la variación del flujo de inducción magnética a través de la superficie del contorno, y viceversa, determinar la variación del flujo de inducción magnética  $\Phi_2 - \Phi_1$  a través de la superficie del contorno en función de la cantidad de electricidad  $q$ .

La fórmula (2a) se utiliza en el sistema internacional de unidades para establecer la unidad del flujo magnético. Por unidad de flujo magnético  $\Phi$  se toma el flujo a través de un contorno cerrado de  $1\Omega$  de resistencia, en el que disminuyendo el flujo hasta cero bajo la acción de la f. e. m. de inducción, por el contorno fluye una cantidad de electricidad de 1 C. Esta unidad de flujo se denomina *weber*. Como es fácil de calcular,  $1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ Mx}$ . La unidad de inducción magnética  $B$  en el sistema internacional de unidades se establece basándose en la relación:

$$B_n = \frac{\Phi}{S},$$

de donde la unidad de inducción magnética se toma en  $\text{Wb/m}^2$ . A esta unidad, la 11ª Conferencia General de pesos y medidas (1960) la denominó *tesla*. Entre esta unidad de inducción magnética y el gaussio hay la siguiente relación:

$$1 \text{ tesla} = 10^4 \text{ gaussios.}$$

Fácilmente se ve que, si en la ley de Faraday [ (3) del § 222] se mide el flujo de inducción magnética  $\Phi$  en webers y el tiempo en segundos, la fuerza electromotriz de inducción  $\mathcal{E}_i$  resultará en voltios. Así tenemos que en el sistema internacional de unidades

$$\mathcal{E}_i \text{ (V)} = - \frac{d\Phi}{dt} \left( \frac{\text{Wb}}{\text{seg}} \right). \quad (3)$$

Si se mide la f. e. m. de inducción  $\mathcal{E}_i$  en voltios y la variación de flujo de inducción  $\frac{d\Phi}{dt}$  en  $\text{Mx/seg}$ , la ecuación (3) se transforma en

$$\mathcal{E}_i \text{ (V)} = - 10^{-8} \frac{d\Phi}{dt} \left( \frac{\text{Mx}}{\text{seg}} \right). \quad (3a)$$

Veamos un ejemplo numérico: un cuadro de superficie  $S=1\ 000\text{ cm}^2$  y de resistencia óhmica  $R=0,5\ \Omega$ , al principio está paralelo a las líneas de inducción del campo magnético de la Tierra; después, el cuadro gira de manera que su plano se oriente perpendicularmente a las líneas de inducción magnética. ¿Qué cantidad de electricidad se induce en el cuadro, si la inducción magnética del campo de la Tierra es  $B=0,5$  gaussios?

**S o l u c i ó n.** La variación del flujo de inducción a través de la superficie del cuadro es igual, en el caso dado, al flujo a través del cuadro en su segunda posición:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = BS.$$

Expresando, en esta ecuación,  $B$  en gaussios y  $S$  en  $\text{cm}^2$ , se obtiene el flujo en unidades *CGSM*. Para pasar al sistema internacional de unidades, hay que multiplicar este valor por  $10^{-8}$ :

$$\Phi_2 - \Phi_1 = 10^{-8} \cdot 0,5 \cdot 10^3\ \text{Wb}$$

De donde, según la fórmula (2a), la cantidad de electricidad inducida en culombios será

$$q = \frac{10^{-8} \cdot 0,5 \cdot 10^3}{0,5}\ \text{C} = 10^{-5}\ \text{C}.$$

La cantidad de electricidad  $q$  que surge debido a la breve variación del flujo de inducción magnética se puede medir con ayuda de un aparato denominado *galvanómetro balístico*. En principio, la construcción del galvanómetro balístico coincide con la de los galvanómetros corrientes. Su sistema móvil consta de un cuadro entre dos polos de un imán permanente. Al cuadro se fija una aguja. Un resorte mantiene al cuadro en una posición determinada. Al fluir por el cuadro una corriente inducida  $I$ , sobre el cuadro actuará un momento de fuerzas:

$$M = HSn,$$

donde  $H$  es la excitación magnética del campo del imán,  $n$ , el número de espiras del conductor del cuadro y  $S$ , el área del mismo. Como las magnitudes  $S$ ,  $n$  y  $H$  son constantes para el instrumento dado, tenemos que

$$M = cI,$$

donde  $c$  es una constante denominada *constante dinámica del galvanómetro*.

Bajo la influencia de la impulsión angular  $Mdt$ , el cuadro empieza a girar y su momento de la cantidad de movimiento variará en la magnitud  $Jd\omega$ , donde  $J$  es el momento de inercia de todo el sistema móvil, y  $d\omega$ , la variación de la velocidad angular del cuadro. Como la variación del momento de la cantidad de movimiento es igual a la impulsión angular (véase el t. I), tenemos que

$$Jd\omega = M dt = cI dt. \quad (4)$$

Si el tiempo  $t$  durante el cual fluye la corriente  $I$ , es pequeño en comparación con el período de las propias oscilaciones del sistema

de suspensión del galvanómetro, la acción del momento de las fuerzas sobre este sistema tiene el carácter de impulso, con lo cual el sistema adquiere una velocidad angular  $\omega_0$ . Por eso, integrando la ecuación (4) entre los límites cero y  $t$ , obtenemos que

$$\int_0^{\omega_0} J d\omega = \int_0^t cI dt \quad \text{o} \quad J\omega_0 = cq,$$

donde  $q$  es la cantidad de electricidad que pasa durante el tiempo  $t$ . Y de aquí tenemos que

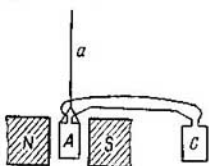
$$\omega_0 = \frac{c}{J} q.$$

Bajo la influencia de la velocidad angular adquirida  $\omega_0$ , el sistema móvil empieza a girar, teniendo en cuenta que el ángulo límite  $\varphi_0$  en que ha girado ("ángulo de repulsión") se puede considerar proporcional a la velocidad inicial:

$$\varphi_0 = k\omega_0 \frac{kc}{J} q.$$

De esta manera tenemos que el "ángulo de repulsión"  $\varphi_0$  de la aguja del galvanómetro es proporcional a la cantidad de electricidad que pasa por el galvanómetro. De ello, a la inversa, se deduce que se puede determinar  $q$  en función del ángulo de repulsión  $\varphi_0$ . Para que el ángulo de repulsión sea proporcional a  $q$ , los parámetros del sistema de suspensión del galvanómetro deben elegirse de manera que el período de las propias oscilaciones sea bastante grande. La constante del galvanómetro  $kc/J$  de ordinario se determina empíricamente graduándolo, es decir, haciendo pasar por él una cantidad  $q$  conocida de electricidad, por ejemplo, descargando un condensador de capacidad determinada.

Fig. 293. Esquema del fluxómetro.



Como según la ecuación (2a), la cantidad de electricidad  $q$  que pasa debido a la creación de una corriente inducida, es proporcional a la variación del flujo de inducción magnética  $\Phi$ , el galvanómetro balístico puede servir para medir los flujos magnéticos. El galvanómetro balístico especialmente construido para medir el flujo de inducción magnética se denomina *fluxómetro*. El esquema estructural del fluxómetro ordinario se diferencia algo del del galvanómetro balístico que se acaba de describir. En la fig. 293  $N$  y  $S$  son los polos de un imán permanente y  $A$ , el cuadro situado entre ellos. Este cuadro está suspendido de un hilo  $a$  tan largo y de resistencia

a la torsión tan insignificante, que el momento de torsión que aparece al girar el cuadro es infinitamente pequeño, y el cuadro, en cualquier posición entre los polos  $N$  y  $S$  está en equilibrio indiferente. Los extremos de los conductores del cuadro  $A$  se unen a otro cuadro  $C$ . Este cuadro  $C$  se sitúa en el espacio donde se desea medir el valor del flujo de inducción magnética. Si el cuadro  $C$  al principio se hallaba fuera del campo magnético, la variación del flujo de inducción magnética es igual al valor del flujo final  $\Phi_2 n_2$ , donde  $\Phi_2$  es el flujo a través de la superficie del cuadro y  $n_2$ , el número de espiras del mismo. Debido a la variación del flujo de inducción magnética a través de la superficie del cuadro  $C$ , en éste se crea una corriente inducida  $I_2$  que fluirá también por el cuadro  $A$  y le causará un giro en el campo magnético del imán  $NS$ . Este giro originará a su vez una variación del flujo de inducción magnética a través del cuadro y, por consiguiente, la aparición de una corriente inducida  $I_1$ , cuya dirección y sentido, según la regla de Lenz, serán aquellos en que las fuerzas magnéticas frenen el cuadro  $A$ . Como resultado de ello, el cuadro  $A$  se detiene. El momento  $M$  de las fuerzas que actúan sobre el cuadro, será

$$M = HS_1 n_1 (I_1 + I_2),$$

donde  $H$  es la excitación magnética entre los polos  $N$  y  $S$ ;  $n_1$ , el número de espiras del cuadro  $A$ , y  $S_1$ , el área del mismo. Como en las posiciones inicial y final el cuadro está en reposo, la impulsión angular debe ser igual a cero:

$$\int_0^t M dt = \int_0^t HS_1 n_1 (I_1 + I_2) dt = 0,$$

de donde

$$\int_0^t I_2 dt = - \int_0^t I_1 dt \quad \text{o} \quad |q_2| = |q_1|,$$

es decir, las cantidades de electricidad transportadas por las corrientes inducidas  $I_2$  e  $I_1$  son numéricamente iguales. Pero según la fórmula (2a):

$$q_2 = \frac{\Phi_2 n_2}{R}, \quad q_1 = \frac{\Delta\Phi_1 n_1}{R},$$

donde  $\Delta\Phi_1$  es la variación del flujo de inducción magnética a través del cuadro  $A$  y  $R$ , la resistencia total de todo el circuito. De donde

$$|\Phi_2| n_2 = |\Delta\Phi_1| n_1.$$

A pequeños ángulos  $\alpha$  de giro del cuadro  $A$ , la variación del

flujo  $\Delta\Phi_1$  es proporcional a  $\alpha$ , de donde  $|\Phi_2|$  también lo será:

$$|\Phi_2| = k\alpha,$$

donde  $k$  es una magnitud constante para el aparato dado. Así, según el ángulo de giro del cuadro  $A$  se puede medir el flujo a través del cuadro  $C$ . Está claro que con ello se puede determinar también el valor de la inducción magnética  $B$  en el lugar del campo magnético en que se introduce el cuadro  $C$ . Si el cuadro  $C$  se sitúa normalmente a las líneas de inducción del campo, tendremos que  $\Phi_2 = BS_2$ .

§ 224. Determinación de la fuerza electromotriz de inducción para casos particulares. Utilizando el método de determinación de la f. c. m. en los contornos analicemos una serie de casos particulares.

1. Examinemos la creación de una corriente inducida en un cuadro que gira en un campo magnético uniforme. Supongamos

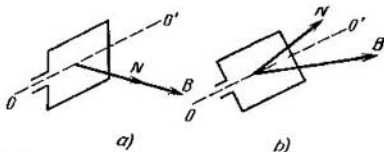


Fig. 294. Cuadro que gira en un campo magnético exterior.

que en el momento inicial el cuadro es perpendicular a las líneas de inducción. Convengamos en caracterizar la posición del cuadro por la dirección de la normal  $N$  al plano del cuadro, normal que dirigimos paralelamente a las líneas de inducción en la posición inicial del cuadro (fig. 294, *a*). Al girar el cuadro, la normal cambiará de dirección. En la posición inicial del cuadro, el flujo de inducción magnética a través de la superficie  $S$  limitada por el cuadro, será

$$\Phi_0 = BS.$$

Supongamos que el cuadro gira uniformemente a la velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje  $OO'$ . Entonces, en la posición del cuadro en que la normal  $N$  forma un ángulo  $\varphi = \omega t$  con la dirección inicial (fig. 294, *b*), el flujo de inducción será

$$\Phi = BS \cos \omega t = \Phi_0 \cos \omega t.$$

La fuerza electromotriz de inducción se determina de la ecuación (3) del § 222:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_0 \operatorname{sen} \omega t. \quad (1)$$

Vemos que la mayor f. e. m. se obtiene en las posiciones en que el flujo es igual a cero [ $\varphi = (2k+1) \frac{\pi}{2}$ , donde  $k$  es un número entero].

En estas posiciones, la rapidez de variación del flujo es la máxima. En las posiciones en que el flujo es el máximo ( $\varphi = k\pi$ ), la f. e. m. es igual a cero. La fuerza electromotriz será positiva, si el ángulo  $\varphi$  está entre los límites

$$0 < \varphi < \pi.$$

Esto significa que en la primera mitad de una revolución, por el cuadro fluye una corriente creada por el campo magnético paralelo a la normal  $N$ . Si  $\varphi$  está entre los límites

$$\pi < \varphi < 2\pi,$$

la f. e. m. de inducción es negativa, lo cual significa que la corriente inducida crea un campo magnético dirigido en sentido contrario al de la normal  $N$ . Por consiguiente, en el transcurso de una revolución, la f. e. m. cambia dos veces de signo.

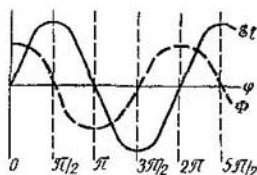


Fig. 295. Gráfico de la variación del flujo de inducción  $\Phi$  y de la fuerza electromotriz de inducción  $\mathcal{E}_i$  de un cuadro que gira.

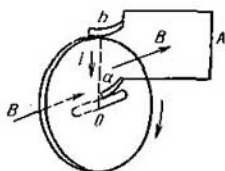


Fig. 296. Corriente inducida en un disco en rotación.

En la fig. 295 se representan los gráficos de variación del flujo de inducción (línea de puntos) y de la f. e. m. (línea de trazo continuo) en función del ángulo de giro  $\varphi$ .

La obtención de la f. e. m. al girar una espira en un campo magnético es la base de la construcción de las dinamos (véase el § 235).

2. Veamos el caso de la creación de una f. e. m. en un disco que gira con contactos de corredera. Sea un disco normal a las líneas de inducción de un campo magnético y que pueda girar alrededor del eje  $O$  que pasa por su centro (fig. 296). Con ayuda de los contactos de corredera  $a$  y  $b$  se forma el circuito cerrado  $AbaA$ . Si se hace girar el disco, en el circuito se crea una corriente ininterrumpida. La dirección y sentido de la corriente inducida se determina

por la regla de Lenz: si las líneas de inducción magnética van dirigidas hacia el lector y el disco gira según las agujas del reloj, la corriente inducida fluirá por el disco desde el contacto  $b$  hasta  $a$ .

Este experimento es el inverso al que se ha hecho cuando se hace girar al disco en un campo magnético al aplicarlo una corriente (véase el § 210). Tanto en aquel caso como en éste, el flujo de inducción a través del contorno  $AbaA$  de la corriente permanece constante. Aplicando formalmente la ley de inducción, habría que esperar que no hubiese corriente inducida. En la realidad hay que tener en cuenta el desplazamiento en cada momento del radio del disco que cierra el circuito entre los puntos  $a$  y  $b$ . Al girar el disco un ángulo infinitamente pequeño  $d\varphi$ , el radio gira el ángulo  $d\varphi$  y barre la superficie  $dS = \frac{1}{2} R^2 d\varphi$ , donde  $R$  es el radio del disco. El flujo de inducción a través de esta superficie será  $d\Phi = B dS$ , y la velocidad de su variación:

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dS}{dt} = B \frac{1}{2} R^2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Observando que  $d\varphi/dt$  es la velocidad angular  $\omega$  del disco, obtenemos que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} R^2 \omega B.$$

Colocando este valor de  $d\Phi/dt$  en la ecuación (3) del § 222, hallamos el valor de la f. e. m. de inducción:

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{1}{2} \omega R^2 B. \quad (2)$$

Lo que se acaba de examinar es el esquema de una simple dínamo.

Veamos unos cuantos ejemplos numéricos más.

**Ejemplo 1.** Un toroide de alambre (sin núcleo) tiene  $n=25$  espiras por cm; el área de la sección transversal del toroide es  $S=20$  cm<sup>2</sup>. El toroide está entrelazado con un aro de una espira de conductor (como se indica en la fig. 290). Con ayuda de un reóstato se consigue una caída de la intensidad  $I$  de la corriente en el toroide de 20 A por seg. ¿Cuál es la f. e. m. creada en el aro?

**Solución.** La inducción magnética del campo en el interior del toroide es igual a

$$B = 4\pi\mu In,$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio del interior del toroide. Como el campo está concentrado solamente en el interior del toroide, el flujo de inducción será

$$\Phi = 4\pi\mu InS,$$

y su variación con el tiempo:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 4\pi\mu nS \frac{dI}{dt}.$$

Midiendo la intensidad  $I$  de la corriente en unidades CGSM,  $S$  en cm<sup>2</sup> y  $n$  en



$\text{cm}^{-1}$ , obtenemos la variación del flujo en  $\text{Mx}/\text{seg}$ . El valor de la f. e. m.  $\mathcal{E}_i$  en voltios se obtiene con la fórmula (3a) del § 222]:

$$|\mathcal{E}_i| = 10^{-8} \cdot 4\pi\mu n S \frac{dI}{dt}.$$

Colocando en esta fórmula  $\frac{dI}{dt} = 20 \text{ A}/\text{seg} = 2 \text{ unid. CGSM}/\text{seg}$ ,  $S = 20 \text{ cm}^2$ ,  $n = 25 \text{ cm}^{-1}$  y  $\mu = 1$ , hallamos que

$$|\mathcal{E}_i| = 10^{-8} \cdot 12.56 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 20 \text{ V} \cong 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ V}.$$

**Ejemplo 2.** Un cuadro con un área de sección  $S = 100 \text{ cm}^2$  y un número de espiras  $n = 50$  gira en un campo magnético uniforme de inducción  $B = 1000$  gaussios haciendo 50 r. p. seg. El eje de giro del cuadro es perpendicular a las líneas de inducción. Determinar el valor máximo de la f. e. m. en el cuadro.

**Solución.** Según la fórmula (1), la f. e. m. máxima en un cuadro de una espira es

$$\mathcal{E}_i \text{ máx} = \omega BS,$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular de giro del cuadro. Para un cuadro de  $n$  espiras de conductor tenemos que

$$\mathcal{E}_i \text{ máx} = \omega BS n.$$

Colocando en esta ecuación  $B = 10^3$  gaussios,  $S = 100 \text{ cm}^2$ ,  $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ seg}^{-1} = 3.14 \times 100 \text{ seg}^{-1}$  obtenemos que

$$\mathcal{E}_i \text{ máx} = 10^{-8} \cdot 3.14 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 50 \text{ V} \cong 15.7 \text{ V}.$$

**Ejemplo 3.** Un disco de cobre colocado perpendicularmente a las líneas de inducción del campo magnético terrestre gira a la velocidad de 50 r. p. seg. El radio del disco es  $R = 50 \text{ cm}$ . Determinar la diferencia de potencial entre el centro y el borde del disco. La inducción magnética del campo de la Tierra es  $B = 0.5$  gaussios.

**Solución.** Entre el centro y el borde del disco se crea una diferencia de potencial igual a la f. e. m.  $\mathcal{E}_i$  determinada por la fórmula (2):

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{2} R^2 \omega B.$$

Colocando en esta ecuación  $R = 50 \text{ cm}$ ,  $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ seg}^{-1}$  y  $B = 0.5$  gaussios, obtenemos que

$$V_1 - V_2 = 10^{-8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 50^2 \cdot 3.14 \cdot 10^2 \cdot 0.5 \text{ V} \cong 2 \cdot 10^{-3} \text{ V}.$$

**§ 225. Autoinducción.** El fenómeno de inducción electromagnética se observa en todos los casos en que varíe el flujo de inducción a través de una superficie limitada por un conductor. En este caso es indiferente qué es lo que produce la variación del flujo. Si en un contorno cerrado fluye una corriente no continua, el campo magnético creado por esta corriente será variable. Por consiguiente variará el flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por el contorno de esta misma corriente. La variación del flujo de inducción magnética acarreará la aparición en el contorno de una f. e. m. Así, pues, la variación de la corriente en el contorno acarrea la aparición de una f. e. m. de inducción en el mismo contorno. Este fenómeno se denomina *autoinducción*.

Ejemplos característicos del fenómeno de autoinducción son las llamadas extracorrientes de cierre y de ruptura. Supongamos que cerramos el contorno, con lo cual se crea en el mismo una corriente eléctrica. En este caso el campo magnético de la corriente aumenta y, por consiguiente, aumenta el flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por el contorno. Según la regla de Lenz, la corriente inducida que se produce, creará un flujo de inducción que se oponga al aumento del flujo magnético inicial. Por consiguiente, la corriente inducida crea un campo magnético dirigido

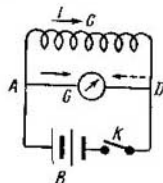


Fig. 297. Observación de la extracorrente de ruptura.

en sentido contrario al campo magnético de la corriente inicial. De esto se deduce que la corriente inducida va en sentido contrario al de la corriente de cierre. Esta corriente inducida de sentido contrario se denomina *extracorrente de cierre*. La extracorrente de cierre disminuye la corriente que fluye por el contorno.

Un fenómeno análogo se observa al interrumpir el circuito. Si en el contorno la intensidad de la corriente disminuye, disminuirá el flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por el contorno. En el contorno se induce una corriente que, según la regla de Lenz, crea un flujo de inducción que acrecienta el flujo que va disminuyendo, es decir, se induce una corriente en el mismo sentido en que fluía la corriente principal. Esta corriente inducida se denomina *extracorrente de ruptura*. La extracorrente de ruptura va en el mismo sentido que la corriente principal.

La extracorrente de cierre conduce a que el aumento de la corriente al cerrar el circuito se efectúe más lentamente que cuando no hay extracorrente. Si por ejemplo, se conecta una lámpara en un circuito que se caracteriza por tener una notable autoinducción, la lámpara se encenderá más lentamente que cuando en el circuito en que está conectada, no se percibe autoinducción.

La extracorrente de ruptura se puede observar en el aparato cuyo esquema se representa en la fig. 297. La corriente de la batería *B* fluye por el circuito que en *A* se bifurca en dos direcciones, una, *ACD*, se caracteriza por la propiedad de crear notables corrientes de autoinducción. En la segunda, *AGD*, se conecta el galvanómetro *G*. Supongamos que la corriente fluye de izquierda a derecha por las derivaciones *ACD* y *AGD*, como indican las flechas de trazo continuo. Si se desconecta el interruptor *k*, en la derivación *ACD* surgirá una extracorrente de ruptura del mismo sentido que el de la inicial. Esta extracorrente fluirá por la parte *DGA* cerrando el circuito, ya que la otra parte del circuito se ha interrumpido.

Evidentemente esta corriente, en la parte *DGA* fluirá de derecha a izquierda (flecha de trazos), lo cual se revela por la inclinación de la aguja del galvanómetro hacia el lado contrario al inicial.

En el experimento observado, la extracorrente de ruptura se crea fundamentalmente en la parte *ACD* del circuito, que es un conductor con varias espiras; la extracorrente que se crea en la parte rectilínea *AGD* no influye perceptiblemente. Esto indica que los conductores de distintas formas poseen diferentes capacidades de crear la autoinducción. La propiedad del contorno de poseer un fenómeno más o menos relevante de autoinducción viene caracterizado por una magnitud denominada *coeficiente de autoinducción*. Aclaremos el concepto de esta magnitud.

Sea un circuito cerrado cualquiera por el que fluye una corriente *I*. Según la ley de Biot-Savart-Laplace, la excitación magnética del campo y, por consiguiente, el vector de inducción creados por esta corriente son proporcionales en cada punto a la intensidad de la corriente. De esto se deduce que el flujo de inducción  $\Phi$  que atraviesa la superficie limitada por el contorno de la corriente es proporcional a la intensidad de la corriente *I*:

$$\Phi = LI. \quad (1)$$

El coeficiente de proporcionalidad *L* se denomina *coeficiente de autoinducción del circuito*. Suponiendo en la igualdad (1) que la intensidad de la corriente *I* es igual a la unidad, vemos que *el coeficiente de autoinducción es igual al flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por el contorno, si por este contorno fluye una corriente de intensidad igual a la unidad*.

La fuerza electromotriz de autoinducción  $\mathcal{E}_a$  se obtiene de la ley general de inducción expresada por la fórmula (3) del § 222, de donde:

$$\mathcal{E}_a = - \frac{d\Phi}{dt};$$

donde  $\Phi$  es el flujo de inducción magnética a través del contorno que se examina, creado por la corriente que fluye por este mismo contorno. Sustituyendo en esta ecuación la magnitud  $\Phi$  por su valor en función del coeficiente de autoinducción *L* y la intensidad de la corriente *I* del contorno, según la (1), obtenemos que, en el caso de una autoinducción constante:

$$\mathcal{E}_a = -L \frac{dI}{dt}. \quad (2)$$

Esta ecuación nos permite formular otra definición (dinámica) del coeficiente de autoinducción: *el coeficiente de autoinducción de un circuito es igual a la f. e. m. inducida en el circuito, si la intensidad de la corriente del mismo varía en una unidad por unidad de tiempo*.

El coeficiente de autoinducción viene determinado solamente por la forma geométrica del contorno y por el medio en que se halla el contorno.

Las ecuaciones (1) o (2) nos permiten establecer la unidad de medición del coeficiente de autoinducción. Generalmente se utilizan dos unidades diferentes del coeficiente de autoinducción: unidad absoluta electromagnética *CGSM* y unidad del sistema internacional. La unidad *CGSM* del coeficiente de autoinducción, según la fórmula (1), se ha convenido en considerar el coeficiente de autoinducción de un circuito, cuyo flujo de inducción a través del mismo es igual a un maxwell siendo la intensidad de la corriente del mismo igual a una unidad electromagnética. La unidad del coeficiente de autoinducción en el sistema internacional se denomina *henrio* y es igual al coeficiente de autoinducción de un contorno, atravesado por un flujo de inducción de  $1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ Mx}$ , siendo de  $1 \text{ A}$  la intensidad de la corriente que fluye por el mismo.

Es fácil determinar cuántas veces  $1\text{H}$  es mayor que la unidad *CGSM* de autoinducción. Para ello se utiliza la ecuación (1), en que

$$1\text{H} \times 1\text{A} = 10^8 \text{ Mx.} \quad (3)$$

$1$  unid. *CGSM* de autoinducción  $\times 1$  unid. *CGSM* de intensidad de corriente =  $1 \text{ Mx}$ .

Observando que  $1$  unid. *CGSM* de intensidad de corriente =  $10 \text{ A}$ , transformaremos la última ecuación en:

$$1 \text{ unid. } CGSM \text{ de autoinducción} \times 10\text{A} = 1 \text{ Mx.} \quad (4)$$

Comparando la (3) y la (4), tenemos que

$$1\text{H} = 10^9 \text{ unid. } CGSM.$$

Utilizando la ecuación (2) podemos definir de otra manera al henrio: *el coeficiente de autoinducción es igual a 1 henrio, si en el circuito se crea una f. e. m. de autoinducción de 1 voltio al variar la intensidad de la corriente 1 amperio por segundo.*

Utilizando la definición del coeficiente de autoinducción deduzcamos su valor para el solenoide.

Sea un solenoide de  $N$  espiras, de sección  $S$  de la espira, y de longitud  $l$ . Supongamos que el solenoide tiene un núcleo de sustancia con una permeabilidad magnética  $\mu$ . Calculemos el coeficiente de autoinducción de este solenoide considerando que el solenoide es tan largo, que se le pueda aplicar con un grado bastante elevado de exactitud, la fórmula (4) del § 194, según la cual la excitación magnética  $H$  en el interior del solenoide es

$$H = 4\pi \frac{N}{l} I, \quad (5)$$

donde  $I$  es la intensidad de la corriente que fluye por el solenoide.

Llamando  $B$  a la inducción del solenoide, tenemos que el flujo de inducción magnética a través de la sección transversal del solenoide es

$$\Phi' = BS = \mu HS.$$

El flujo a través de todas las  $N$  espiras del solenoide será

$$\Phi = N \cdot \Phi' = \mu HSN.$$

Sustituyendo  $H$  por su valor según la (5), tenemos que

$$\Phi = 4\pi\mu \frac{N^2}{l} SI.$$

Introduzcamos en esta ecuación el concepto de número de espiras por unidad de longitud del solenoide  $n = \frac{N}{l}$  y el de volumen del solenoide  $V = lS$ . Entonces tendremos que

$$\Phi = 4\pi\mu n^2 VI.$$

De esta ecuación y de la (1) hallamos que el coeficiente de autoinducción del solenoide es

$$L = \frac{\Phi}{I} = 4\pi\mu n^2 V. \quad (6)$$

Así, pues, el coeficiente de autoinducción del solenoide es proporcional al cuadrado del número de espiras por unidad de longitud y al volumen del solenoide. El coeficiente de autoinducción, por definición, no depende de la intensidad de la corriente de la bobina; sin embargo, si el núcleo del solenoide es de sustancia ferromagnética, la permeabilidad magnética  $\mu$  depende de la excitación magnética y, por consiguiente, de la intensidad de la corriente; y en este caso, esta dependencia puede ser muy considerable (véase el § 203). Hay que tener presente esta circunstancia al calcular los coeficientes de autoinducción de los solenoides con núcleos.

Calculemos el valor del coeficiente de autoinducción de un solenoide con los siguientes datos: la longitud del solenoide es  $l = 50$  cm, la sección transversal es  $S = 10$  cm<sup>2</sup>, el número total de espiras es  $N = 3\,000$  y  $\mu = 1$ .

Según la fórmula (6) tenemos que

$$L = 4\pi \left(\frac{3\,000}{50}\right)^2 \cdot 10 \cdot 50 \cong 2,3 \cdot 10^7 \text{ unid. CGSM,}$$

o pasando a henrios:

$$L \cong 0,023 \text{ H.}$$

No obstante, el valor verdadero del coeficiente de autoinducción de un solenoide de esta longitud y con este número de espiras será menor debido primeramente, a que aquí no se ha tenido en cuenta que el solenoide es finito, ni que las espiras del solenoide generalmente forman capas superpuestas unas sobre otras, con lo cual el flujo de inducción no pasará por completo a través de cada espira.

De lo dicho se deduce que las extracorrientes de cierre se revelarán con mayor intensidad, cuanto mayor sea el coeficiente de autoinducción del circuito dado. Este último es elevado para los conductores arrollados formando un solenoide, sobre todo si el núcleo es una sustancia ferromagnética.

Para observar la extracorrente de ruptura se ha utilizado el circuito en derivación de la fig. 297. Sin embargo, la extracorrente de ruptura surge también en un circuito no bifurcado. En un circuito de esta clase, en el momento de desconectar el interruptor, la corriente inicial desciende bruscamente, lo cual acarrea la creación de una gran f. e. m. de ruptura. Esta puede llegar a ser tan elevada que se produzca la perforación del aire entre los polos del interruptor produciéndose un arco entre ellos.

El surgimiento de intensas chispas o la formación de un arco entre los polos del interruptor debido a la extracorrente de ruptura, puede estropear el interruptor; por eso representa un peligro que se combate en electrotecnia.

§ 226. **Extracorrientes de cierre y de ruptura.** Examinemos con más detalle el carácter de las extracorrientes de cierre y de ruptura.

Para aclarar el carácter de la extracorrente de ruptura supongamos que en cierto circuito hay una f. e. m. inicial  $\mathcal{E}_0$  que mantiene en el mismo una corriente de intensidad  $I_0$ . Después, en un instante de tiempo que consideraremos igual a  $t=0$ , esta f. e. m. se desconecta del circuito; pero éste se mantiene cerrado, teniendo en cuenta que la resistencia total del mismo es  $R$ . La corriente del circuito no cesa instantáneamente, sino que continuará fluyendo cierto lapso de tiempo a costa de la f. e. m. de autoinducción.

Según la fórmula (2) del § 225, esta f. e. m. de autoinducción es

$$\mathcal{E}_a = -L \frac{dI}{dt},$$

donde  $L$  es el coeficiente de autoinducción del circuito dado. La intensidad de la corriente  $I$  de autoinducción viene determinada por la ley de Ohm:

$$I = \frac{\mathcal{E}_a}{R} = -\frac{L}{R} \cdot \frac{dI}{dt}.$$

Esta ecuación se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt, \quad (1)$$

que es una ecuación diferencial que determina la dependencia entre la intensidad de la corriente  $I$  de autoinducción y el tiempo  $t$ . Integrando los términos de la derecha y de la izquierda de la ecuación (1) hallamos que

$$\ln I = -\frac{R}{L} t + \ln C, \quad (2)$$

donde  $C$  es una constante cualquiera. El valor de esta constante se obtiene de la condición de que  $I=I_0$  cuando  $t=0$ ; de donde, según la (2):

$$\ln I_0 = \ln C.$$

Así, la ecuación (2) se transforma en:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t, \quad (3)$$

o

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (3a)$$

Esta ecuación indica que la intensidad de la corriente al desconectar la f. e. m. disminuye según una ley exponencial, disminuyendo con más lentitud cuanto mayor sea el coeficiente  $L$  de autoinducción y cuanto menor sea la resistencia  $R$ . La dependencia de la intensidad de la extracorrente de ruptura respecto al tiempo se representa gráficamente en la fig. 298.

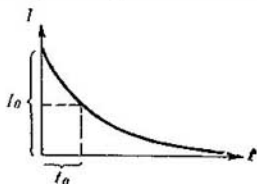


Fig. 298. Dependencia entre la intensidad de la extracorrente de ruptura y el tiempo.

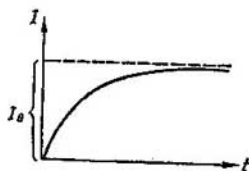


Fig. 299. Dependencia entre la intensidad de la corriente y el tiempo al cerrar un circuito con autoinducción.

El tiempo  $t_0$  durante el cual la intensidad de la extracorrente de ruptura disminuye hasta la mitad de su valor inicial, viene determinado por la ecuación (3a), si hacemos en ella  $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2}$ , de donde

$$t_0 = \ln 2 \cdot \frac{L}{R}. \quad (4)$$

Como  $\ln 2 \cong 0,7$ , aproximadamente tendremos que

$$t_0 \cong 0,7 \frac{L}{R}. \quad (4a)$$

Así, por ejemplo, el tiempo durante el cual la intensidad de la corriente disminuye hasta el valor mitad del inicial al desconectar un circuito con autoinducción  $L=0,1$  H y  $R=0,7 \Omega$ , será, según la fórmula (4a):

$$t_0 \cong 0,7 \cdot \frac{0,1}{0,7} \text{ seg} = 0,1 \text{ seg}.$$

Pasemos ahora a examinar la extracorrente de cierre. Consideraremos que en el circuito de resistencia dada  $R$  se conecta una f. e. m.  $\mathcal{E}_0$  independiente. En este caso, gracias a la autoinducción, la f. e. m. total del circuito será

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_a = \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt},$$

de donde la intensidad de la corriente  $I$  será

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 - \frac{dI}{dt}}{R}.$$

Observando que la magnitud  $\mathcal{E}_0/R$  numéricamente es igual a la intensidad  $I_0$  de la corriente que fluiría por el circuito, si no hubiese autoinducción, escribiremos esta última ecuación de la siguiente manera:

$$I_0 - I = \frac{L}{R} \cdot \frac{dI}{dt}$$

Como  $I_0$  es constante,  $dI$  se puede sustituir por  $-d(I_0 - I)$ , con lo cual obtenemos que

$$\frac{d(I_0 - I)}{I_0 - I} = -\frac{R}{L} dt.$$

Integrando ambos miembros de esta ecuación obtenemos que

$$\ln(I_0 - I) = -\frac{R}{L} t + \ln C_1. \quad (5)$$

La constante de integración  $\ln C_1$  se determina de la condición de que  $I=0$  cuando  $t=0$ , de donde  $\ln C_1 = \ln I_0$ , y la ecuación (5) adquiere la forma:

$$\ln \frac{I_0 - I}{I_0} = -\frac{R}{L} t, \text{ de donde } I_0 - I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t},$$

o, definitivamente:

$$I = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) \quad (6)$$

Esta ecuación indica que al conectar la f. e. m., la corriente del circuito no alcanza inmediatamente el valor  $I_0$ , sino que lo hace gradualmente y tanto más despacio, cuanto mayor sea el coeficiente de autoinducción  $L$  del circuito y menor sea la resistencia  $R$  del mismo. La dependencia entre la intensidad de la corriente y el tiempo al conectar la f. e. m. se representa en la fig. 299. Teóricamente, la corriente debe alcanzar su valor final  $I_0$  solamente al cabo de un intervalo infinitamente largo de tiempo. Prácticamente, para los valores ordinarios del coeficiente de autoinducción  $L$ , la corriente alcanza su valor final muy pronto.

Examinemos un ejemplo numérico: sean  $L=0,1$  H y  $R=1$   $\Omega$  el coeficiente de autoinducción y la resistencia de un circuito respectivamente; determinemos el valor de la intensidad de la corriente en partes del valor de la intensidad  $I_0$  final, al cabo de 0,01 seg y de 1 seg después de conectar en el circuito la f. e. m.

Según la fórmula (6) tenemos que

$$I = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) = I_0 (1 - e^{-10t}),$$

de donde para  $t=0,01$  seg, tenemos que

$$I = I_0 (1 - e^{-0,1}) \cong 0,1I_0;$$

y para  $t=1$  seg:

$$I = I_0 (1 - e^{-10}) \cong 0,99995I_0.$$

Así tenemos que al cabo de 0,01 seg la intensidad de la corriente de nuestro caso será solamente de 0,1 del valor final, y al cabo de 1 seg se diferenciará del



valor final solamente en un 0,005 %, es decir, prácticamente coincide con el valor final.

La existencia de extracorrientes de ruptura ha permitido descubrir el fenómeno de superconductibilidad (véase el § 154). En la superconductibilidad tenemos que  $R=0$  y, según la fórmula (3a), la corriente, después de desconectar la f. e. m., continuará fluyendo por el circuito todo el tiempo que se quiera sin disminuir su intensidad. Los experimentos de Kamerlingh Onnes que condujeron al descubrimiento de la superconductibilidad, se realizaron de la siguiente manera: se colocaba un solenoide, cuyos extremos se unían entre sí, entre los polos de un electroimán, después de lo cual el solenoide se enfriaba con helio hasta la temperatura en que el material del hilo conductor se hacía superconductor. Luego se desconectaba el campo magnético del electroimán. En este caso, en el solenoide surgía una corriente inducida. En las condiciones ordinarias, esta corriente habría cesado de fluir al cabo de un intervalo de tiempo bastante pequeño; sin embargo, debido a la superconductibilidad continuó fluyendo por el solenoide durante muchas horas, sin revelar debilitación alguna perceptible.

§ 227. Inducción mutua. Pasemos al análisis del fenómeno de inducción mutua. Este fenómeno, en sus rasgos fundamentales ya se ha examinado al analizar los experimentos sobre la inducción electromagnética. Consiste en que al variar la intensidad de la corriente eléctrica en un contorno cualquiera, el campo magnético

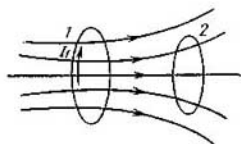


Fig. 300. Flujo de inducción que atraviesa dos contornos.

variable de esta corriente induce una f. e. m. en los contornos vecinos. Sean dos contornos 1 y 2 (fig. 300). Supongamos que la intensidad de la corriente del primer contorno es  $I_1$ . El flujo  $\Phi$  de inducción magnética creado por esta corriente es proporcional a  $I_1$ . Llamemos  $\Phi_{21}$  a la parte del flujo  $\Phi$  que atraviesa el contorno 2, entonces podemos suponer que

$$\Phi_{21} = L_{21} \cdot I_1. \quad (1)$$

En la fig. 300, el flujo  $\Phi_{21}$  viene representado por las líneas de inducción magnética que atraviesan a ambos contornos (1 y 2).

Al variar la intensidad  $I_1$  de la corriente del primer contorno, variará el flujo  $\Phi_{21}$ , y en el segundo contorno se creará una f. e. m. de inducción  $\mathcal{E}_2$ , cuya magnitud vendrá determinada por la ecuación (3) del § 222:

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d\Phi_{21}}{dt}.$$

Si las dimensiones y la posición de los contornos son invariables, el coeficiente  $L_{21}$  de la fórmula (1) será constante y

$$\frac{d\Phi_{21}}{dt} = L_{21} \frac{dI_1}{dt},$$

de donde

$$\mathcal{E}_2 = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (2)$$

El coeficiente  $L_{21}$  se denomina *coeficiente de inducción mutua del circuito 2 y del 1*.

Está claro que todo lo dicho se puede repetir en el caso cuando varía la corriente en el contorno 2 y se induce corriente en el 1. Entonces, llamando  $I_2$  a la intensidad de la corriente del segundo circuito, y  $\mathcal{E}_1$  a la f. c. m. que se crea en el primero, obtenemos que

$$\mathcal{E}_1 = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (2a)$$

El coeficiente  $L_{12}$  se denomina *coeficiente de inducción mutua del circuito 1 y del 2*.

Como se demostrará más abajo, siempre tiene lugar que

$$L_{21} = L_{12}. \quad (3)$$

Así tenemos que se puede hablar simplemente del coeficiente de inducción mutua de dos circuitos.

Utilizando la relación (1) podemos formular lo siguiente: *el coeficiente de inducción mutua de dos circuitos  $L_{12}$  numéricamente es igual al flujo de inducción magnética creado por una corriente de unidad de intensidad en uno de los contornos y que atraviesa al segundo contorno*. De la ecuación (2) hallamos una segunda definición (dinámica): *el coeficiente  $L_{12}$  de inducción mutua de dos circuitos numéricamente es igual a la f. e. m. de inducción que se crea en uno de los circuitos al variar la intensidad de la corriente en el otro en una unidad por unidad de tiempo*.

*La magnitud del coeficiente de inducción mutua viene determinada solamente por la forma geométrica y dimensiones de los circuitos y su posición relativa*. Sólo en el caso de que haya cuerpos ferromagnéticos, el coeficiente de inducción mutua depende de las intensidades de las corrientes (debido a la dependencia de  $\mu$  respecto a la excitación magnética  $H$  del campo).

Las unidades del coeficiente de inducción mutua se denominan de la misma manera que las respectivas unidades del coeficiente de autoinducción. La unidad electromagnética absoluta del coeficiente de inducción mutua es la inducción mutua de dos contornos que tienen la propiedad de que si en uno de ellos fluye una corriente de intensidad igual a una unidad electromagnética, creará un flujo,

que atravesará el segundo contorno, de magnitud igual a un maxwellio. Prácticamente, la unidad del coeficiente de inducción mutua es el henrio, que es igual a  $10^9$  unidades absolutas electromagnéticas del coeficiente de inducción mutua. De la definición dinámica del coeficiente de inducción mutua se deduce que el *henrio* es igual al coeficiente de inducción mutua de tales circuitos en que en uno de ellos se crea una f. e. m. de 1 V, si en el otro varía la intensidad de la corriente en 1 A por seg.

§ 228. Energía del campo magnético de las corrientes. Al fluir una corriente continua por los conductores, toda la potencia desarrollada por los generadores de f. e. m. se invierte en el desprendimiento del calor de Lenz-Joule. No ocurre lo mismo cuando las corrientes no son constantes (aumentan o disminuyen sus intensidades). Al aumentar la intensidad de la corriente, en el circuito se crea, como hemos visto, una f. e. m. de autoinducción, dirigida en sentido contrario al de la f. e. m. de la corriente que la genera. De resultas de ello, la intensidad de la corriente será menor, teniendo en cuenta que sólo una parte del trabajo realizado por la f. e. m. exterior se invertirá en el desprendimiento del calor de Lenz-Joule. Y viceversa, al disminuir la intensidad de la corriente, en el circuito se crea una f. e. m. de autoinducción del mismo sentido que la exterior; la corriente resulta de mayor intensidad; en el circuito se desprende más calor de Lenz-Joule, que debería desprenderse con la f. e. m. dada. Está claro que el trabajo de más que se invierte al aumentar la corriente, se puede consumir solamente en la creación de una clase de energía que después, al disminuir la intensidad de la corriente, retorne de nuevo al circuito. Como al incrementar la corriente, aumenta también el campo magnético creado por ella, está claro que esta energía que surge, es la *energía del campo magnético o energía electromagnética de la corriente*.

Para calcular la energía del campo magnético examinemos un circuito con autoinducción  $L$  en el que la intensidad de la corriente crece desde cero hasta cierto valor finito  $I$ . Al aumentar la intensidad de la corriente, en el circuito se crea una f. e. m.  $\mathcal{E}_a$  de autoinducción. El trabajo realizado que va en contra de esta f. e. m. se invierte en la creación de la energía del campo magnético. Si en el momento dado la intensidad de la corriente del circuito es  $I$ , la potencia desarrollada por la f. e. m. de autoinducción será igual a  $I \mathcal{E}_a$  y, por consiguiente, el trabajo realizado en un pequeño intervalo de tiempo  $dt$ , será

$$dA = I \mathcal{E}_a dt.$$

Según lo dicho en el § 225, la f. e. m.  $\mathcal{E}_a$  de autoinducción será numéricamente igual a  $d\Phi/dt$ , donde  $\Phi$  es el flujo de inducción

magnética que atraviesa el circuito que se examina. De aquí que el trabajo elemental  $dA$  en el tiempo  $dt$  sea

$$dA = I \frac{d\Phi}{dt} \cdot dt = I d\Phi.$$

Si el coeficiente de autoinducción es constante, tenemos que  $d\Phi = L dI$ , y la expresión del trabajo elemental  $dA$  se puede escribir de la manera siguiente:

$$dA = IL dI. \quad (1)$$

Para calcular la reserva de energía magnética  $W_m$  igual al trabajo realizado al aumentar la intensidad de la corriente desde el valor cero hasta determinado valor  $I$ , hay que sumar todos los trabajos elementales, es decir, hay que integrar la ecuación (1) entre los límites desde 0 hasta  $I$ , de donde obtenemos que

$$W_m = \int_0^I IL dI,$$

o, ués de integrar:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2. \quad (2)$$

En esta ecuación la energía magnética viene en función de los parámetros que caracterizan al circuito con corriente: intensidad  $I$  de la corriente y coeficiente  $L$  de autoinducción. Después veremos que esta misma energía  $W_m$  se puede expresar en función de parámetros que caractericen el propio campo, a saber, en función de la excitación magnética  $H$  del campo, de la inducción magnética  $B$  y del volumen del espacio ocupado por el campo. Esto permite localizar la energía magnética en la parte del espacio donde hay campo magnético, de manera análoga a como se hizo con las cargas electrostáticas que se podían localizar en el espacio en que hay campo electrostático.

Generalicemos este análisis tomando dos circuitos en los cuales fluyen las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ . La energía de este sistema no sólo depende del coeficiente de autoinducción, sino también del coeficiente de inducción mutua. Para demostrarlo calculemos el trabajo de creación de las corrientes. Supongamos primeramente que los dos circuitos están desconectados. Después el primer circuito se cierra y la f. e. m. conectada a este circuito realiza un trabajo que se invierte en el desprendimiento del calor de Lenz-Joule y en vencer la f. e. m. de autoinducción. Esta última parte del trabajo que determina la energía del campo magnético de la corriente, como se ha demostrado, es

$$A_1 = \frac{1}{2} L_1 \cdot I_1^2,$$

donde  $L_1$  es el coeficiente de autoinducción del primer circuito. Después de crearse la corriente en el primer circuito, cerremos el segundo, en cuyo caso, la f. e. m. conectada realiza en el segundo circuito un trabajo que se invierte en el desprendimiento del calor de Lenz-Joule y en vencer la f. e. m. de autoinducción del segundo circuito. El trabajo invertido en salvar la f. e. m. de autoinducción, según lo expuesto anteriormente, es

$$A_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2,$$

donde  $L_2$  es el coeficiente de autoinducción del segundo circuito. Con ello no se agota el trabajo, ya que al crearse la corriente en el segundo circuito, en el primero surge una f. e. m. de inducción mutua de valor:

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi_{12}}{dt}, \quad (3)$$

donde  $\Phi_{12}$  es el flujo de inducción magnética creado por la corriente  $I_2$  en el segundo circuito y que atraviesa al primer circuito.

Para mantener constante la corriente  $I_1$ , la f. e. m. suministrada al primer circuito debe realizar un trabajo complementario venciendo a la f. e. m. de inducción mutua. Este trabajo  $A_{12}$  se puede calcular de la siguiente manera. El trabajo elemental  $dA_{12}$  durante un pequeño intervalo de tiempo  $dt$  es

$$dA_{12} = |\mathcal{E}_i| I_1 dt$$

o, sustituyendo  $\mathcal{E}_i$  por su valor según la (3):

$$dA_{12} = I_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} dt = I_1 d\Phi_{12}.$$

Como la intensidad  $I_1$  de la corriente se mantiene constante, el trabajo total para vencer la f. e. m. de inducción mutua será

$$A_{12} = I_1 \int_0^{\Phi_{12}} d\Phi_{12} = I_1 \Phi_{12},$$

donde  $\Phi_{12}$  es el valor final del flujo de inducción magnética.

Teniendo en cuenta que  $\Phi_{12} = L_{12} I_2$ , donde  $L_{12}$  es el coeficiente de inducción mutua de los circuitos primero y segundo, obtenemos que

$$A_{12} = L_{12} I_1 I_2.$$

La energía del campo magnético de un sistema de dos corrientes se obtiene, si sumamos los trabajos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_{12}$ , así obtenemos que

$$W_m = A_1 + A_2 + A_{12} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2. \quad (4)$$

Evidentemente, este mismo sistema de corrientes se podría crear en otro orden: primeramente creando la corriente en el segundo circuito, después, en el primero. Repitiendo los razonamientos arriba aducidos, en este caso se obtendría para la energía del sistema la expresión:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{21} I_1 I_2. \quad (4a)$$

Como la energía del sistema de corrientes no debe depender del orden de su creación, las expresiones (4) y (4a) deben ser idénticas, de donde se obtiene que

$$L_{21} = L_{12},$$

relación que ya se había dado en la pág. 472.

La fórmula (2) expresa la energía del campo magnético de la corriente en función de la intensidad  $I$  de la corriente y del coeficiente de autoinducción  $L$ . Pero ya se ha indicado que esta fórmula se puede transformar de manera que represente la energía en función de las magnitudes que caractericen al campo magnético en el espacio circundante. Hagamos esta transformación en el caso particular de un campo magnético uniforme en el interior de un solenoide largo.

La energía magnética de la corriente que fluye por el solenoide, según la fórmula (2), es

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2.$$

El coeficiente de autoinducción del solenoide, según la fórmula (6) del § 225, es

$$L = 4\pi\mu n^2 V,$$

donde  $V$  es el volumen del solenoide,  $n$ , el número de espiras por unidad de longitud del solenoide, y  $\mu$ , la permeabilidad magnética del medio que llena la parte interna del solenoide.

Además, la intensidad  $I$  de la corriente y la excitación magnética del campo en el interior del solenoide están relacionadas según la ecuación:

$$I = \frac{H}{4\pi n}.$$

Colocando estos valores de  $L$  e  $I$  en la (2), hallamos que

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \mu H^2 V, \quad (5)$$

u, observando que  $\mu H$  es igual a la inducción magnética  $B$ , escribiremos la (5) de la manera siguiente:

$$W_m = \frac{1}{8\pi} H B V. \quad (6)$$

Como el campo magnético se puede considerar concentrado solamente en el interior del solenoide, es decir, en el volumen  $V$ , la densidad de energía del campo magnético será

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{8\pi} HB. \quad (7)$$

De esta manera tenemos que la densidad de la energía magnética es un producto de la excitación magnética  $H$  por la inducción magnética  $B$ . Si en la fórmula (7) estas dos magnitudes se miden en unidades del sistema  $CGSM$ , es decir, en oerstedios y gaussios respectivamente,  $w_m$  resultará en  $\text{erg/cm}^3$ .

En el caso de un campo magnético variable, el espacio se puede considerar dividido en partes tan pequeñas, que en sus límites los vectores  $H$  y  $B$  se puedan considerar constantes. Entonces la fórmula (7) expresa la magnitud de la energía magnética dentro de los límites de esta parte del espacio. La energía correspondiente al volumen elemental  $dV$  será

$$dW_m = w_m dV = \frac{1}{8\pi} HB dV. \quad (7a)$$

Y la energía comprendida dentro de un volumen finito  $V$  vendrá determinada por la ecuación

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int HB dV, \quad (8)$$

donde la integración se extiende a todo el volumen  $V$ .

**§ 229. Trabajo invertido en la histéresis.** La imantación de un cuerpo magnético no es una función unívoca de la excitación magnética del campo magnetizador. En el § 203 se ha examinado el fenómeno de histéresis, que indica que la imantación, a un valor dado de  $H$ , depende del camino recorrido para conseguir este valor de  $H$ .

Veamos el estado del cuerpo magnético caracterizado por el punto  $a$  de la fig. 301, en la cual se da el ciclo de la histéresis. Supongamos que partiendo del estado  $a$  imantamos el cuerpo magnético en un sentido y en otro recorriendo el ciclo de la histéresis según el trayecto  $abkfela$  volviendo de nuevo al estado  $a$ . Demostremos que este proceso de imantación está relacionado con una inversión de trabajo. Para ello utilicemos la ecuación deducida en el párrafo

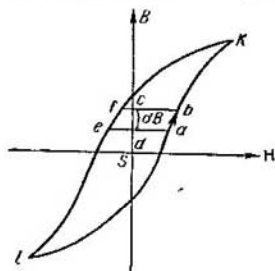


Fig. 301. Representación gráfica para calcular el trabajo invertido en la histéresis.

este proceso de imantación está relacionado con una inversión de trabajo. Para ello utilicemos la ecuación deducida en el párrafo

anterior, según la cual el trabajo elemental  $dA$  invertido en la creación de energía del campo magnético de un circuito, al aumentar el flujo de inducción magnética a través de este circuito en la magnitud  $d\Phi$  (a costa del aumento de la intensidad de la corriente), es

$$dA = Id\Phi, \quad (1)$$

donde  $I$  es la intensidad de la corriente en el contorno \*).

Supongamos que el cuerpo magnético que examinamos es el núcleo de un largo solenoide. Sea  $N$  el número total de espiras del solenoide, y  $S$ , el área de la sección transversal de las espiras (y del núcleo). Entonces, el flujo total de inducción a través de las  $N$  espiras del solenoide será

$$\Phi = NBS,$$

donde  $B$  es la inducción magnética del campo en el núcleo del solenoide.

La intensidad de la corriente en el arrollamiento del solenoide está relacionada con la excitación magnética  $H$  creada por aquél, según la ecuación (véase el § 194):

$$I = \frac{H}{4\pi N/l},$$

donde  $l$  es la longitud del solenoide. Por consiguiente, según la (1), el trabajo elemental relacionado con la variación del flujo de inducción, será

$$dA = \frac{H}{4\pi N/l} d(NBS) = \frac{Sl}{4\pi} HdB.$$

Como  $Sl$  es el volumen del cuerpo magnético el trabajo  $dA'$  por unidad de volumen del núcleo será

$$dA' = \frac{1}{4\pi} HdB,$$

es decir, es proporcional al incremento  $dB$  del vector de inducción.

Volviendo a la fig. 300, vemos que el producto  $H \cdot dB$  para cierto sector  $ab$  de la curva de histéresis, es la superficie de la franja  $abcd$ , ya que a este sector le corresponde el incremento del vector de inducción  $dB=dc$ . Este mismo valor  $dB=cd$  corresponde también al sector  $fe$  de la curva de histéresis, pero en éste, el incremento  $dB$  es negativo, ya que en él la inducción disminuye (paso del punto  $f$  al punto  $e$ ). El vector  $H$  en el trayecto  $fe$  también es negativo; por

\*) Hay que observar que sería erróneo utilizar la fórmula (1) del párrafo anterior en el caso que estamos examinando de cuerpos ferromagnéticos, ya que para éstos el coeficiente de autoinducción  $L$  no es una magnitud constante y  $d\Phi \neq L dI$ .



consiguiente, el producto  $H \cdot dB$  será positivo y vendrá expresado por el área de la franja  $cdef$ . De esta manera; al valor examinado de  $dB$  en la imantación le corresponde un trabajo proporcional al área de la franja  $abcd$ , y en la desimantación, un trabajo proporcional al área de la franja  $cdfe$ . Teniendo en cuenta ambos trabajos, se puede decir que a los sectores  $ab$  y  $ef$  de la curva de histéresis corresponde un trabajo igual a  $\frac{1}{4\pi} \times$  el área ( $abfe$ ).

El ciclo completo de imantación se puede representar como una suma de estos sectores; por consiguiente, el trabajo total de imantación de una unidad de volumen del núcleo del solenoide será proporcional a la suma de las áreas de las franjas análogas a la  $abfe$ , es decir, será proporcional al área  $S_1$  del ciclo de histéresis:

$$A' = \frac{1}{4\pi} S_1.$$

El trabajo invertido en la imantación de ciclo completo debe transformarse en energía complementaria del campo magnético del solenoide, o transformarse en calor. Como al volver al punto inicial  $a$ , el estado del campo magnético no ha cambiado, no puede haber variado su energía. De esto se deduce que la imantación en el ciclo completo de histéresis debe causar un calentamiento del núcleo, lo cual se observa en la práctica. Para calcular el trabajo hay que conocer la forma del ciclo de histéresis del material magnético en cuestión.

La pérdida de energía en la imantación del ciclo completo de los núcleos de sustancias ferromagnéticas hay que tenerla en cuenta al resolver diferentes problemas técnicos. En este caso, para determinar el trabajo se utiliza la siguiente fórmula empírica, que da resultados bastante satisfactorios para muchos materiales magnéticos:

$$A' = \eta B_{\text{máx}}^{1.6},$$

donde  $B_{\text{máx}}$ , es el valor máximo de la inducción magnética alcanzada en el ciclo dado de imantación. El coeficiente  $\eta$  depende de las propiedades del material; así, para aceros de transformadores

$$\eta = 0.0008 \text{ erg/cm}^3 \cdot (\text{gausios})^{1.6};$$

para el acero magnéticamente duro

$$\eta = 0.08 \text{ erg/cm}^3 \cdot (\text{gausios})^{1.6}.$$

§ 230. Coeficiente de autoinducción de un cable concéntrico. Como ejemplo de aplicación de las fórmulas deducidas en el § 227 calculemos el coeficiente de autoinducción de un sector de cable concéntrico, cilíndrico e infinitamente largo. Llamaremos cable concéntrico a dos conductores cilíndricos coaxiales, teniendo en cuenta que la corriente que fluye por el cilindro interior es igual y de sentido contrario a la que fluye por el cilindro exterior (fig. 302).

Llamemos  $R_1$  y  $R_2$  a los radios de los cilindros interior y exterior respectivamente. Consideremos un sector del cable de longitud  $l$ . La energía magnética de la corriente que fluye por este sector se puede representar de dos maneras:

en primer lugar, en función del coeficiente de autoinducción  $L$  del sector dado del cable según la fórmula (2) del § 227:

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad (1)$$

y en segundo lugar, en función de las magnitudes que caracterizan el campo magnético de las corrientes, según la fórmula (8) del § 227:

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int_V \mu H^2 dV, \quad (2)$$

donde la integral se extiende al volumen en que el campo magnético es distinto de cero según la longitud  $l$  del sector considerado del cable. La comparación de estas dos ecuaciones nos permite determinar el valor del coeficiente de autoinducción. Calculemos primeramente la energía  $W_m$  según la fórmula (2). Para ello recordemos (véase el § 199) que la excitación magnética del campo creada por la corriente que fluye por un conductor cilíndrico hueco, en el interior del cilindro es igual a cero. Por consiguiente, en el interior del cilindro de radio  $R_1$ , la excitación magnética del campo es igual a cero y esta zona queda fuera de la integración. La excitación entre las superficies cilíndricas se determinará solamente por la corriente que fluye por el cilindro interior, ya que la excitación magnética del campo del cilindro exterior en esta zona también es igual a cero. La excitación magnética del campo de la corriente que fluye por un conductor cilíndrico, según lo dicho en el § 199, en la parte exterior del cilindro es la misma que la creada por una corriente lineal de la misma intensidad que fluya por el eje del cilindro. Por consiguiente, en la zona entre los cilindros, la excitación magnética  $H$  del campo será

$$H = \frac{2I}{r},$$

donde  $r$  es la distancia al eje del cilindro. En todos los puntos que están fuera de los dos cilindros, la excitación magnética es igual a cero, ya que es igual a la suma de dos excitaciones iguales y de sentido contrario creadas por dos corrientes de igual intensidad y de sentido contrario que fluyen por conductores cilíndricos de eje común. Por consiguiente, la integración de la fórmula (2) hay que extenderla solamente al sector de la capa cilíndrica de longitud  $l$  comprendida entre los cilindros.

Para el cálculo, dividamos todo el volumen en capas infinitamente delgadas de volumen  $dV = 2\pi r \cdot dr \cdot l$ ; en los límites de esta capa, la excitación magnética  $H$  del campo se puede considerar constante. La energía correspondiente a esta capa será

$$w_m \cdot dV = \frac{1}{8\pi} \mu H^2 dV = \mu I^2 l \frac{dr}{r}.$$

La energía total  $W_m$  se obtiene integrando esta ecuación en función de  $r$  entre los límites desde  $R_1$  hasta  $R_2$ :

$$W_m = \mu I^2 l \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \mu I^2 l \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

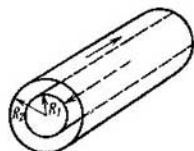


Fig. 302. Cable formado de dos conductores cilíndricos coaxiales.

Comparando esta expresión de la energía  $W_m$  con la (1) que representa la misma energía en función del coeficiente de autoinducción  $L$ , obtenemos que el coeficiente de autoinducción del sector del cable de longitud  $l$  es

$$L = 2\mu l \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Como la permeabilidad magnética  $\mu$  del medio entre los conductores cilíndricos es aproximadamente igual a la unidad, tendremos que

$$L = 2l \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

**§ 231. Corrientes de Foucault. Efecto pelicular.** Las corrientes inducidas surgen también en los conductores macizos, que no se pueden considerar contornos lineales. En este caso se denominan *corrientes de Foucault*, en honor de su investigador. Un pedazo de metal macizo en un campo magnético variable es un conductor de poca resistencia, debido a lo cual las corrientes inducidas en él alcanzan grandes valores.

Como la f. e. m. de inducción es proporcional a la rapidez de variación del flujo de inducción magnética, la magnitud de las corrientes de Foucault será tanto mayor, cuanto mayor sea la rapidez de variación del campo magnético en que se halla el conductor en cuestión. Por eso es más fácil observar las corrientes de Foucault si se introduce el conductor en el interior de un solenoide, por cuyo arrollamiento se hace pasar una corriente alterna de alta frecuencia, la cual origina un campo magnético que varía rápidamente de magnitud. En este caso, las corrientes de Foucault en los cuerpos macizos y buenos conductores alcanzan una intensidad tan elevada, que el calor desprendido es suficiente para caldear el cuerpo. Este método se utiliza ampliamente en la técnica del vacío para caldear las piezas metálicas del interior del aparato en que se hace el vacío a fin de eliminar los gases. Este mismo método se utiliza para fundir metales en el vacío.

En muchos casos, no obstante, el caldeo originado por las corrientes de Foucault es perjudicial, como el calentamiento que sufren los núcleos de los transformadores (véase el § 236) y, en general, los núcleos metálicos de toda clase de arrollamientos por los cuales fluye corriente alterna. Para evitar este calentamiento, los núcleos se hacen de láminas aisladas una de otra por un material aislante fino y laminar situado perpendicularmente a la dirección de las corrientes de Foucault.

Las corrientes de Foucault se pueden observar también con ayuda de la siguiente instalación. Al hacer oscilar un péndulo compuesto de un trozo de metal y suspendido de un hilo entre los polos de un electroimán, las oscilaciones se amortiguarán débilmente, si no hay

corriente en el electroimán; pero si se conecta la corriente al electroimán, las oscilaciones se amortiguan casi instantáneamente y el movimiento del péndulo hasta su completa detención se parece al movimiento de un cuerpo en un medio viscoso. Esto se explica porque las corrientes de Foucault que surgen al desplazarse el péndulo por el campo magnético, están dirigidas de manera que las fuerzas que actúan sobre ellas de parte del campo magnético, frenen el movimiento del péndulo.

Las corrientes de Foucault pueden surgir en el propio conductor por el cual fluye una corriente alterna. La aparición de estas corrientes acarrea el surgimiento de un efecto especial denominado

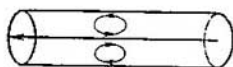


Fig. 303. Aparición del efecto pelicular.

*efecto pelicular o Kelvin.* Si la corriente alterna fluye por un conductor cilíndrico, al aumentar su intensidad las corrientes de Foucault irán dirigidas según se indica en la fig. 303. Estas corrientes, en la superficie del conductor fluirán en el mismo sentido que la corriente primitiva, y en el eje del conductor, en sentido contrario. Como resultado de ello, en el interior del conductor se debilita la corriente, y en la superficie del mismo, se intensifica. De esta manera, debido a la creación de las corrientes de Foucault, la corriente se distribuirá irregularmente por la sección del conductor. En las corrientes alternas de alta frecuencia, la densidad de la corriente cerca del eje del conductor prácticamente será igual a cero, y toda la corriente fluirá por la superficie del mismo. Debido a ello, el campo magnético en el interior del conductor también se reduce a cero. Este fenómeno provoca un aumento de la resistencia del conductor, ya que por las partes internas del conductor no fluye corriente. Como estas partes internas resultan inútiles, para economizar metal los conductores de corrientes alternas de alta frecuencia se hacen huecos. Las corrientes de Foucault también conducen a una disminución del coeficiente de autoinducción del conductor. Esto se puede aclarar examinando el ejemplo del conductor cilíndrico, en el cual el coeficiente de autoinducción  $L$ , según la fórmula (2) del § 227, está relacionado con la energía magnética de la corriente mediante la ecuación:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2. \quad (1)$$

La energía del campo magnético  $W_m$  depende de la excitación magnética. Cuando tiene lugar el efecto pelicular, el campo magnético en el interior del conductor es igual a cero, y el campo fuera del mismo, a la intensidad dada de la corriente sigue siendo el mismo que en el caso en que la corriente tuviese una densidad constante por la sección del conductor; debido a ello la energía del campo disminuye, de donde, según la fórmula (1), disminuye el coeficiente de autoinducción  $L$ .

En los conductores macizos, como resultado del efecto pelicular se produce un desprendimiento irregular de calor: el calor se desprendo principalmente junto a la superficie del conductor. Este efecto lo utilizó V. Volodgin para crear el método del temple superficial del acero.

§ 232. Corriente alterna. Al actuar sobre un circuito cerrado una f. c. m. variable se crea en él una corriente alterna. La intensidad de esta corriente puede ser distinta en diferentes secciones de un conductor no bifurcado. Esta disconformidad con la regla fundamental que satisface la corriente continua, es debida a la velocidad finita de propagación de los campos electromagnéticos. Sin embargo, esta disconformidad será despreciable, si la intensidad de la corriente y la distribución de las cargas varían poco en el tiempo  $t$  durante el cual las perturbaciones magnéticas recorren la distancia que separa las partes más distantes del sistema eléctrico que se examina. Las corrientes que se someten a esta condición, se denominan *cuasiestacionarias*. En los §§ 232—234 se examinarán solamente estas corrientes. Para las corrientes cuasiestacionarias, en cada momento dado se cumplen las leyes de Kirchhoff.

Hemos visto (en el § 224) que al girar un contorno por un campo magnético uniforme, el flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por el contorno, varía periódicamente debido a que en el contorno se induce una corriente que también varía periódicamente. Veamos con más detalle el carácter de este proceso.

Como se ha indicado en el § 224, al girar un cuadro en un campo magnético con una velocidad angular  $\omega$ , el flujo de inducción magnética  $\Phi$  que atraviesa la superficie limitada por el contorno del cuadro, varía con el tiempo  $t$  según la ley:

$$\Phi = \Phi_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

donde  $\Phi_0$  es el valor máximo del flujo a través de la superficie del contorno. La fuerza electromotriz que se crea en el circuito, en este caso, es

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_0 \sin \omega t = \mathcal{E}_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

Esto será el caso más simple de f. e. m. variable que cambia con el tiempo según la ley sinusoidal. La magnitud  $\mathcal{E}_0 = \omega \Phi_0$  se denomina *amplitud* de la f. e. m. y es su máximo valor.

Además de la f. e. m. exterior  $\mathcal{E}$ , en el circuito actuará la f. e. m. de autoinducción, ya que la intensidad de la corriente en el contorno varía. Sea  $L$  el coeficiente de autoinducción del circuito examinado. La fuerza electromotriz de autoinducción, como se sabe, es

$$\mathcal{E}_a = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3)$$

La suma  $\mathcal{E} + \mathcal{E}_a$  de las f. e. m. debe ser igual, según la ley de Kirchhof, al producto de la resistencia del circuito por la intensidad de la corriente  $I$  en el mismo:

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_a. \quad (4)$$

Sustituyendo  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}_a$  por sus valores según la (2) y la (3), en la fórmula (4), obtenemos que

$$RI + L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_0 \text{ sen } \omega t. \quad (5)$$

Esta ecuación diferencial determina la intensidad de la corriente  $I$  en el contorno de f. e. m.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \text{ sen } \omega t$  dada y de coeficiente de autoinducción  $L$  y resistencia  $R$  conocidos. Una solución particular de esta ecuación para la intensidad  $I$  de la corriente se halla suponiendo que la corriente es una función periódica del tiempo, cuyo período es igual al de la f. e. m., es decir, hallamos una solución de  $I$  en la forma:

$$I = I_0 \text{ sen } (\omega t - \varphi). \quad (6)$$

donde  $I_0$  y  $\varphi$  son constantes que debemos determinar. Colocando en la ecuación (5) este valor de  $I$  y diferenciando obtenemos que

$$RI_0 \text{ sen } (\omega t - \varphi) + LI_0 \omega \cos (\omega t - \varphi) = \mathcal{E}_0 \text{ sen } \omega t \quad (5a)$$

$$RI_0 (\text{sen } \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \text{ sen } \varphi) + LI_0 \omega (\cos \omega t \cos \varphi + \text{sen } \omega t \text{ sen } \varphi) - \mathcal{E}_0 \text{ sen } \omega t = 0.$$

Para que esta ecuación se cumpla en cualquier instante de tiempo, es necesario que los coeficientes de  $\text{sen } \omega t$  y de  $\cos \omega t$  sean iguales a cero en distintas circunstancias; esta condición nos da las dos ecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} LI_0 \omega \cos \varphi - RI_0 \text{ sen } \varphi &= 0, \\ LI_0 \omega \text{ sen } \varphi + RI_0 \cos \varphi - \mathcal{E}_0 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

escribamos la última de estas ecuaciones de la siguiente manera:

$$LI_0 \omega \text{ sen } \varphi + RI_0 \cos \varphi = \mathcal{E}_0. \quad (8)$$

Dividiendo la primera ecuación del sistema (7) por  $RI_0 \cos \varphi$  nos da que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}. \quad (9)$$

Elevando al cuadrado la primera de las ecuaciones del sistema (7) y la ecuación (8), y sumándolas, hallamos que

$$I_0^2 (L^2 \omega^2 + R^2) = \mathcal{E}_0^2,$$

de donde

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}}. \quad (10)$$

Las ecuaciones (9) y (10) determinan las constantes desconocidas  $I_0$  y  $\varphi$ . Basándonos en la (6) y utilizando estos valores hallados de  $I_0$  y  $\varphi$ , obtenemos la ecuación de la intensidad de la corriente  $I$  en el circuito examinado:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}} \operatorname{sen} \left( \omega t - \operatorname{arctg} \frac{L\omega}{R} \right). \quad (11)$$

Comparando esta fórmula con la de la f. e. m. de inducción (2), vemos que tanto la corriente  $I$  como la f. e. m.  $\mathcal{E}$  son sinusoides,



Fig. 304. Curvas de la variación con el tiempo de la f. e. m.  $\mathcal{E}$  y de la intensidad de la corriente  $I$  en el caso de una corriente alterna en un circuito con autoinducción.

pero con un ángulo  $\varphi$  de desfase. La corriente y la f. e. m. no alcanzan al mismo tiempo los valores máximos y mínimos ni el valor cero. En la fig. 304 se representa gráficamente la variación en función del tiempo de la f. e. m.  $\mathcal{E}$  y de la intensidad  $I$  de la corriente para un caso particular de desfase igual a  $\varphi$ . La ecuación (9) indica que el desfase entre la f. e. m. y la intensidad de la corriente, a la frecuencia  $\omega$  dada, viene determinado por la relación  $L/R$ . Cuanto mayor sea la relación  $L/R$ , mayor será el valor de  $\operatorname{tg} \varphi$ , es decir, mayor será el desfase  $\varphi$ .  $\varphi$  adquiere el máximo valor cuando la resistencia del circuito se pueda considerar igual a cero, siendo  $L \neq 0$ , en cuyo caso  $\operatorname{tg} \varphi = \infty$ , de donde,

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

es decir, la intensidad de la corriente se retrasa con respecto a la f. e. m. en una cuarta parte de período.

La fórmula (10), que determina la dependencia de la amplitud de la intensidad de la corriente  $I_0$  respecto a la amplitud de la f. e. m.  $\mathcal{E}_0$ , recuerda la ley de Ohm, en que la función de la resistencia la desempeña la magnitud:

$$z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad (12)$$

denominada *resistencia aparente o impedancia*. La magnitud  $L\omega$  se denomina *resistencia inductiva*. Llamando  $R_\omega$  a la resistencia inductiva, tenemos que

$$R_\omega = L\omega \quad (13)$$

La amplitud de la intensidad de la corriente, como se ve, depende de la resistencia aparente  $z$ , la cual, siendo constante la resistencia óhmica  $R$ , será mayor, cuanto mayor sean el coeficiente de autoinducción  $L$  y la frecuencia  $\omega$ .

Para apreciar la función de la resistencia inductiva determinemos la intensidad de la corriente que fluye por un solenoide, cuyo coeficiente de autoinducción hemos determinado en el § 225. Sea  $R=20 \Omega$  la resistencia óhmica de este solenoide; su coeficiente de autoinducción, como se ha determinado, es  $L=0,023$  H. Calculemos la amplitud de la intensidad  $I_0$  de la corriente que fluye por este solenoide siendo  $V_1 - V_2=100$  V la amplitud de la diferencia de potencial de los extremos del solenoide y el número de períodos por segundo de: a) 50, b) 250, c) 500. Según la fórmula (10), la amplitud de la intensidad de la corriente es

$$I_0 = \frac{V_1 - V_2}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}$$

La frecuencia angular  $\omega$  para los tres casos indicados será

- a)  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ seg}^{-1}$ ,
- b)  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 250 = 1570 \text{ seg}^{-1}$ ,
- c)  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 500 = 3140 \text{ seg}^{-1}$ .

Las amplitudes de la intensidad de las corrientes serán:

- a)  $I_0 = \frac{100}{\sqrt{(0,023 \cdot 314)^2 + 20^2}} \cong 4,8 \text{ A}$ ,
- b)  $I_0 = \frac{100}{\sqrt{(0,023 \cdot 1570)^2 + 20^2}} \cong 2,4 \text{ A}$ ,
- c)  $I_0 = \frac{100}{\sqrt{(0,023 \cdot 3140)^2 + 20^2}} \cong 1,3 \text{ A}$ .

La corriente continua que fluyese por el mismo solenoide siendo la diferencia de potencial de sus extremos igual a 100 V, sería

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = 5 \text{ A}$$



Comparando los resultados obtenidos se aprecia la función que desempeña la frecuencia de la corriente; a 50 ciclos por segundo, la importancia de la resistencia inductiva no es muy grande en nuestro caso; pero a 500 ciclos por segundo la intensidad de la corriente es casi cuatro veces más débil que la de la corriente continua.

La fórmula (5a) se puede utilizar para caracterizar gráficamente las magnitudes que determinan la corriente alterna. Para ello la escribiremos de la siguiente manera:

$$RI_0 \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) + LI_0\omega \operatorname{sen}\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t. \quad (5b)$$

El miembro de la izquierda es la suma de dos oscilaciones armónicas de un mismo período con una diferencia de fases igual a  $\pi/2$ . Las amplitudes de estas oscilaciones son  $RI_0$  y  $LI_0\omega$ . Para obtener el valor resultante se pueden sumar gráficamente las amplitudes

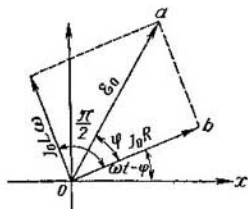


Fig. 305. Diagrama vectorial de un circuito de corriente alterna con autoinducción.

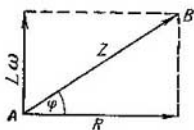


Fig. 306. Determinación gráfica de la resistencia aparente  $z$  de un circuito de corriente alterna con autoinducción conocidas la resistencia óhmica  $R$  y la inductiva  $L\omega$ .

como se ha indicado en el § 97 del t. I. Para ello (fig. 305) se traza el vector de la amplitud  $RI_0$  formando el ángulo  $\omega t - \varphi$  con el eje  $OX$ , y el vector de la amplitud  $LI_0\omega$ , formando el ángulo  $\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}$  con el mismo eje. La suma geométrica de estas amplitudes nos dará, según la (5b), el vector de amplitud de la f. e. m.  $\mathcal{E}_0$ . En la figura se ve que el ángulo entre la amplitud  $RI_0$  y la amplitud  $\mathcal{E}_0$  es igual a  $\varphi$ , ya que

$$\frac{LI_0\omega}{RI_0} = \frac{L\omega}{R} = \operatorname{tg} \varphi.$$

La proyección del vector de la amplitud  $\mathcal{E}_0$  sobre el eje  $OX$  expresará, en cada instante dado de tiempo, el valor de la f. e. m. La proyección de los vectores  $RI_0$  y  $L\omega I_0$  sobre el mismo eje expresarán respectivamente la caída de potencial en el circuito debido a

la resistencia óhmica  $R$  y al fenómeno de autoinducción. Del triángulo  $Oab$  se deduce que la tangente del ángulo  $\varphi$  no depende del valor de  $I_0$ ; por eso, para hallar gráficamente el desfase y la resistencia aparente conociendo las resistencias óhmica e inductiva, se puede construir un triángulo rectángulo, cuyos catetos sean  $R$  y  $L\omega$ ; la hipotenusa  $AB$  de este triángulo (fig. 306) será igual a la resistencia aparente  $z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ , y el ángulo  $\varphi$ , a la diferencia de fases entre la intensidad de la corriente y la f. e. m.

Hasta ahora hemos utilizado solamente una solución particular de la ecuación (5). La solución general de la ecuación (5) se obtiene, si a la solución particular (11) añadimos la solución de la correspondiente ecuación homogénea

$$RI + L \frac{dI}{dt} = 0.$$

La solución de esta ecuación tiene la forma:

$$I = Ae^{-\frac{R}{L}t},$$

donde  $A$  es una constante que se determina de las condiciones iniciales. Esta solución nos da la parte de la corriente que disminuye con el tiempo y generalmente se reduce muy pronto a cero. Así, pues, sólo es de interés la expresión de la corriente estacionaria, que representa la ecuación (11).

§ 233. Potencia en el circuito de corriente alterna. Examinemos la potencia que se desarrolla en el circuito de corriente alterna. El valor instantáneo de la potencia se obtiene, si se toma el producto del valor instantáneo de la intensidad de la corriente por el valor instantáneo de la f. e. m.:

$$M = I\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t \cdot I_0 \sin (\omega t - \varphi). \quad (1)$$

Este valor instantáneo de la potencia varía con el tiempo y, en particular, será igual a cero cuando sean iguales a cero bien  $I$ , bien  $\mathcal{E}$ . Por eso a nosotros no nos interesa el valor instantáneo de la potencia, sino su valor medio durante el período. Para calcular este valor medio, se transforma la ecuación (1) para  $W$  de la siguiente manera:

$$W = \mathcal{E}_0 I_0 \sin \omega t \cdot \sin (\omega t - \varphi) = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)].$$

De esta manera, el valor medio  $\bar{W}$  por período es la suma de los valores medios de los términos

$$\frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2} \cos \varphi \quad \text{y} \quad -\frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2} \cos (2\omega t - \varphi).$$

El primer término no depende del tiempo, por consiguiente, expresa su propio valor medio; el segundo término varía con el tiempo por variar el factor  $\cos(2\omega t - \varphi)$ . El valor medio de  $\cos(2\omega t - \varphi)$  por período, evidentemente será igual a cero, ya que en un período el factor  $\cos(2\omega t - \varphi)$  adquiere la misma cantidad e iguales valores positivos que negativos. Por lo tanto, el valor medio de la potencia desarrollada en un circuito durante un período será

$$\overline{W} = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2} \cos \varphi. \quad (2)$$

Introduzcamos las notaciones:

$$\mathcal{E}_{ef} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Las magnitudes  $\mathcal{E}_{ef}$  o  $I_{ef}$  son los valores eficaces de la f. e. m. y de la intensidad de la corriente. Colocándolos en la (2), obtenemos para el valor medio de la potencia durante un período:

$$\overline{W} = \mathcal{E}_{ef} I_{ef} \cos \varphi \quad (2a)$$

Si la diferencia de fases entre la corriente y la f. e. m. es igual a cero, la potencia media será el producto del valor eficaz de la intensidad de la corriente por el valor eficaz de la f. e. m. De esta manera tenemos que los valores eficaces de la intensidad de la corriente y de la f. e. m. desempeñan la misma función que la intensidad de la corriente y la f. e. m. en el caso de la corriente continua.

El valor medio de la potencia depende de la diferencia de fases (desfase). El valor máximo se alcanzará cuando la diferencia de fases sea igual a cero, lo cual ocurrirá cuando en el circuito no haya autoinducción. Si la diferencia de fases es igual a  $\pi/2$ , el valor medio de la potencia será igual a cero. Esto es debido a que la energía suministrada por el generador en un cuarto de período, vuelve al generador en el siguiente cuarto de período a causa de la energía electromagnética de autoinducción. Este caso solamente tiene lugar cuando es igual a cero la resistencia óhmica del circuito, lo cual nunca se cumple en la práctica.

La potencia desarrollada por una corriente se desprende en forma de calor. Por eso, la cantidad total de calor desprendido en todo el circuito durante el tiempo  $t$ , será

$$Q = \mathcal{E}_{ef} \cdot I_{ef} \cos \varphi \cdot t. \quad (4)$$

Como, según la fórmula (3), los valores eficaces de la intensidad de la corriente  $I_{ef}$  y de la f. e. m.  $\mathcal{E}_{ef}$  se diferencian de los correspondientes valores máximos  $I_0$  y  $\mathcal{E}_0$  solamente en un factor constante:

$$I_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 \cong 0,707 I_0, \quad \mathcal{E}_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{E}_0 \cong 0,707 \mathcal{E}_0.$$

entre  $I_{ef}$  y  $\mathcal{E}_{ef}$  habrá la misma relación que entre  $I_0$  y  $\mathcal{E}_0$  véase la fórmula (10) de la pág. 485, de donde

$$I_{ef} = \frac{\mathcal{E}_{ef}}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}.$$

Utilizando esta relación, escribamos la expresión (4) para el calor desprendido en el circuito, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q &= I_{ef}^2 \sqrt{L^2\omega^2 + R^2} \cdot \cos\varphi \cdot t, \\ \text{o} \quad Q &= I_{ef}^2 \cdot R \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2} \cos\varphi \cdot t. \end{aligned} \quad (4a)$$

La diferencia de fases se determina [según la fórmula (9) de la pág. 485] por la ecuación:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R},$$

de donde

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}}.$$

Colocando este valor del  $\cos\varphi$  en la (4a) hallamos que

$$Q = I_{ef}^2 R t, \quad (5)$$

de donde se deduce que la cantidad de calor desprendido en un circuito de corriente alterna de resistencia óhmica  $R$  dada viene expresada por la fórmula ordinaria de Lenz-Joule (véase el § 157), si sobreentender por intensidad de la corriente el valor eficaz de la misma.

Así, pues, la cantidad de calor desprendido viene determinada solamente por el valor eficaz de la intensidad de la corriente  $I_{ef}$  y de la resistencia óhmica  $R$ . La resistencia inductiva  $L\omega$  no desempeña directamente ningún papel en el proceso de desprendimiento de calor. Si la resistencia óhmica  $R$  del circuito es muy pequeña, será pequeña también la cantidad de calor desprendido en él mismo; la resistencia aparente  $z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$  de este circuito puede ser grande, solamente si lo es la autoinducción y es considerable la frecuencia  $\omega$  de la corriente alterna que fluye por el circuito.

Para medir la intensidad de la corriente alterna se puede utilizar amperímetros térmicos (§ 158). El amperímetro térmico que está graduado para medir corrientes continuas, al medir corrientes alternas indica el valor eficaz de la intensidad de la corriente. El valor máximo de la intensidad de la corriente se determina por la relación (3), según la cual  $I_0 = I_{ef} \cdot \sqrt{2} \cong 1,41 I_{ef}$ .

En el § 237 se hablará de otros métodos de medición de las corrientes alternas.

§ 234. Circuito de corriente alterna con autoinducción y capacidad. El circuito de corriente alterna, a diferencia del de corriente continua, permite que se conecten en serie condensadores.

Si las armaduras de un condensador se conectan a un generador de corriente continua, por el circuito fluirá corriente sólo hasta que en las armaduras del condensador no se cree una diferencia de potencial que compense la f. e. m. del generador. Pero si las armaduras de un condensador se conectan a un generador de f. e. m. alterna, se descargarán y volverán a cargarse continuamente y en el circuito fluirá todo el tiempo corriente alterna.

Supongamos que a los terminales  $S$  (fig. 307) se aplica una f. e. m. alterna  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \text{ sen } \omega t$ . El circuito consta de capacidad  $C$ , autoinducción  $L$  y resistencia óhmica  $R$  conectadas en serie (la resistencia óhmica de los demás conductores se desprecia). En la parte del circuito que posee la autoinducción  $L$  se crea una f. e. m. de autoinducción  $\mathcal{E}_a = -L \frac{dl}{dt}$ , donde  $l$  es la intensidad

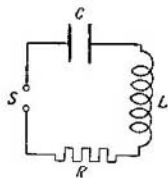


Fig. 307. Circuito con resistencia óhmica  $R$ , autoinducción  $L$  y capacidad  $C$ .

de la corriente en el circuito. La f. e. m. total que actúa sobre el circuito, será igual a  $\mathcal{E} - L \frac{dl}{dt}$ . En cada instante dado debe ser igual a la suma de las caídas de potencial a lo largo del circuito. Estas caídas de potencial se componen de la diferencia de potencial de las armaduras del condensador  $V = V_1 - V_2$  y de la caída de potencial  $IR$  a lo largo de la parte del circuito con resistencia óhmica  $R$ . Así tenemos que

$$IR + V = \mathcal{E} - L \frac{dl}{dt},$$

de donde, sustituyendo  $\mathcal{E}$  por su valor  $\mathcal{E}_0 \text{ sen } \omega t$ , hallamos que

$$L \frac{dl}{dt} + IR + V = \mathcal{E}_0 \text{ sen } \omega t. \quad (1)$$

La diferencia de potencial  $V$  de las armaduras del condensador está relacionada con la carga  $Q$  concentrada en la armadura del condensador mediante la ecuación:

$$Q = VC, \quad (2)$$

donde  $C$  es la capacidad del condensador. En el intervalo de tiempo  $dt$ , la carga  $Q$  aumenta en la magnitud  $dQ = Idt$ , de donde, basán-

donos en la (2), tenemos que

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt},$$

o

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C} I. \quad (3)$$

Diferenciando con respecto al tiempo la ecuación (1), tenemos que

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dt} = \mathcal{E}_0 \omega \cos \omega t.$$

Colocando en esta ecuación el valor de  $dV/dt$  según la (3), hallamos la ecuación diferencial que debe satisfacer la intensidad de la corriente en un circuito con capacidad, autoinducción y resistencia conectadas en serie:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \mathcal{E}_0 \omega \cos \omega t. \quad (4)$$

La solución de esta ecuación será una función periódica del tiempo de período igual al de la f. e. m.:

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi), \quad (5)$$

donde  $I_0$  y  $\varphi$  son constantes que tenemos que determinar. La primera y la segunda derivadas de  $I$  respecto al tiempo serán:

$$\frac{dI}{dt} = I_0 \omega \cos(\omega t - \varphi), \quad \frac{d^2 I}{dt^2} = -I_0 \omega^2 \sin(\omega t - \varphi).$$

Colocando estos valores de  $dI/dt$ ,  $d^2 I/dt^2$  e  $I$  en la ecuación (4) y reduciendo en  $\omega$ , hallamos que

$$RI_0 \cos(\omega t - \varphi) - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0 \sin(\omega t - \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (4a)$$

Sustituyendo las funciones de  $\cos(\omega t - \varphi)$  y  $\sin(\omega t - \varphi)$  por las respectivas funciones de los senos y cosenos de  $\omega t$  y  $\varphi$ , hallamos que

$$RI_0 \cos \omega t \cos \varphi + RI_0 \sin \omega t \sin \varphi - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0 \sin \omega t \cos \varphi + \\ + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0 \cos \omega t \sin \varphi - \mathcal{E}_0 \cos \omega t = 0. \quad (5a)$$

Como esta ecuación debe satisfacerse para cualquier instante de tiempo, los factores que acompañan a  $\sin \omega t$  y a  $\cos \omega t$  deben ser iguales a cero, de donde obtenemos dos ecuaciones:

$$R \sin \varphi - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \cos \varphi = 0, \quad (6)$$

$$R \cos \varphi + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \sin \varphi = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0}. \quad (7)$$

De la ecuación (6) obtenemos que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}. \quad (8)$$

Elevando al cuadrado los términos de las ecuaciones (6) y (7) y sumando, hallamos que

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{I_0^2},$$

de donde

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}. \quad (9)$$

Las ecuaciones (5), (8) y (9) nos dan la solución buscada: en el circuito fluye una corriente  $I$  del mismo período que el de la f. e. m. aplicada; la amplitud de esta corriente  $I_0$  se determina por la ecuación (9). La corriente  $I$  está desfasada respecto a la f. e. m.  $\mathcal{E}$  en un ángulo  $\varphi$  determinado por la ecuación (8).

La magnitud  $z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  es la resistencia aparente (impedancia) y depende de los valores de  $R$ ,  $L$ ,  $C$  y de la frecuencia  $\omega$  de la corriente. Si  $\omega$  satisface la ecuación:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0, \quad (10)$$

la resistencia aparente alcanza el valor mínimo, y a esta frecuencia la amplitud de la intensidad de la corriente alcanza el valor máximo:

$$I_0 \text{ máx} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

Todo el fenómeno del paso de una corriente alterna por un circuito con capacidad y autoinducción recuerda el fenómeno de la resonancia mecánica: la amplitud de la intensidad de la corriente depende de la frecuencia  $\omega$  y alcanza el máximo a determinado valor de  $\omega_{\text{res}}$  denominada *frecuencia de resonancia*, cuyo valor, según la (10), es

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (10a)$$

El máximo de la curva de resonancia será tanto más agudo, cuanto menor sea la resistencia óhmica  $R$ .

En la resonancia, según la fórmula (8), la diferencia de fases será  $\varphi=0$ .

Cuando  $\omega \rightarrow 0$ , la diferencia de fases  $\varphi \rightarrow -\pi/2$ , es decir, la intensidad de la corriente adelanta a la f. e. m.; cuando  $\omega \rightarrow \infty$ , la diferencia de fase  $\varphi \rightarrow +\pi/2$ ; en este caso la intensidad de la corriente se retarda respecto a la f. e. m. En la fig. 308, la curva 1 representa la variación de la intensidad de la corriente en función de la frecuencia a una f. e. m. dada siendo constantes  $L$  y  $C$ ; la curva 2 representa la dependencia de  $\varphi$  respecto a la frecuencia.

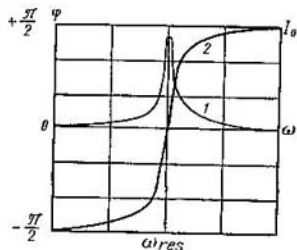


Fig. 308. Dependencia de la intensidad de la corriente ( $I$ ) y diferencia de fase ( $\varphi$ ) respecto de la frecuencia.

Si el condensador se sustituye por un conductor, en el circuito no se origina una diferencia de potencial complementaria  $V = \frac{Q}{C}$ . Por consiguiente, la sustitución del condensador por un conductor corresponde al caso en que  $C = \infty$ , y entonces las fórmulas (8) y (9) se transforman en las fórmulas (9) y (10) del § 232, que se refieren a un circuito con autoinducción y resistencia, pero sin condensador.

Al variar  $\omega$ , junto con la intensidad de la corriente varía también la caída de potencial en cada sector del circuito de corriente alterna. En el circuito representado en la fig. 307, la resistencia óhmica  $R$ , la autoinducción  $L$  y la capacidad  $C$  están conectadas en serie. Llamando  $V_R$ ,  $V_L$  y  $V_C$  a las diferencias de potencial de los extremos de cada uno de estos sectores del circuito, tenemos que la caída total de potencial en el circuito, que coincide con la f. e. m., que actúa en el circuito, se puede representar de la siguiente manera:

$$\mathcal{E}_0 \sin \omega t = V_R + V_L + V_C.$$

Según lo dicho en la pág. 492

$$\left. \begin{aligned} V_R &= IR = RI_0 \sin(\omega t - \varphi), \\ V_L &= L \frac{dI}{dt} = L\omega I_0 \cos(\omega t - \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

o

$$V_L = L\omega I_0 \sin(\omega t - \varphi + \pi/2). \quad (12)$$

Para determinar la diferencia de potencial de las armaduras del condensador, veamos el caso cuando el circuito carece de resistencia óhmica y de autoinducción ( $R=0$  y  $L=0$ ), entonces la fór-



mula (9) nos da que

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{1/C\omega}.$$

De esta ecuación se deduce que el condensador es equivalente a una resistencia óhmica de valor  $1/C\omega$ . En este caso, según la (8), tenemos que  $\operatorname{tg} \varphi = -\infty$ , y, por consiguiente,  $\varphi = -\pi/2$ , es decir, la intensidad de la corriente adelanta a la f. e. m. en  $\pi/2$ . De aquí se obtiene que el valor de la amplitud de la diferencia de potencial de las armaduras del condensador es igual a  $\frac{1}{C\omega} I_0$ ; el valor de la diferencia de potencial en cada momento dado va retardado del de la intensidad de la corriente en  $\pi/2$ . De esta manera, para  $V_C$  podemos escribir la ecuación:

$$V_C = \frac{1}{C\omega} I_0 \operatorname{sen}(\omega t - \varphi - \pi/2)$$

o

$$V_C = -\frac{1}{C\omega} I_0 \operatorname{sen}(\omega t - \varphi + \pi/2). \quad (13)$$

Sumando las ecuaciones (11), (12) y (13) obtenemos que

$$\mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t = RI_0 \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) I_0 \operatorname{sen}(\omega t - \varphi + \pi/2). \quad (14)$$

En la resonancia, cuando la amplitud de la intensidad de la corriente alcanza el máximo valor,

$$\omega = \omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \varphi = 0.$$

En estas condiciones, la fórmula (14) nos da que

$$\mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t = RI_{0 \text{ máx}} \cdot \operatorname{sen} \omega t,$$

es decir, la caída total de potencial del circuito coincide con la caída del mismo en la resistencia óhmica  $R$ . Al mismo tiempo la amplitud de cada una de las caídas de potencial  $V_L$  y  $V_C$  alcanza el valor máximo:

$$\mathcal{E}_{0L} = L\omega_{\text{res}} \cdot I_{0 \text{ máx}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

y

$$\mathcal{E}_{0C} = \frac{1}{C\omega_{\text{res}}} \cdot I_{0 \text{ máx}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Pero como ambas caídas de potencial varían según fases opuestas, su suma será igual a cero.

El fenómeno examinado se denomina *resonancia de tensión*.

Para determinar la función de un condensador en un circuito de corriente alterna calculemos a cuántos ohmios equivale la resistencia de un condensador de  $1 \mu\text{F}$  al fluir por él una corriente alterna de 50 períodos por segundo.

De lo dicho anteriormente se deduce que al fluir por el condensador de capacidad  $C$  una corriente alterna de frecuencia angular  $\omega$ , el condensador equivale a una resistencia  $R = \frac{1}{C\omega}$ . Considerando en el caso dado la capacidad en faradios y

determinando la frecuencia angular  $\omega = 2\pi\nu = 314 \text{ seg}^{-1}$ , obtenemos que

$$R = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{314 \cdot 10^{-6}} \Omega = 3\,200 \Omega.$$

Si la frecuencia de la corriente alterna es mayor, este mismo condensador equivaldrá a una resistencia óhmica menor.

Los fenómenos en los circuitos de corriente alterna con capacidad y autoinducción se pueden representar también con ayuda

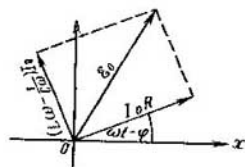


Fig. 309. Diagrama vectorial de un circuito de corriente alterna con autoinducción y capacidad.

de diagramas vectoriales, como se ha hecho en el § 232 para el circuito con autoinducción. Para ello escribimos la ecuación (4a) de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} RI_0 \operatorname{sen} \left( \omega t - \varphi + \frac{\pi}{2} \right) - I_0 \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \operatorname{sen} (\omega t - \varphi) &= \\ = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Como lo esencial es solamente la diferencia de fases y no las fases iniciales, esta ecuación se puede sustituir por la:

$$RI_0 \operatorname{sen} (\omega t - \varphi) + I_0 \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \operatorname{sen} \left( \omega t - \varphi + \frac{\pi}{2} \right) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t. \quad (15)$$

Los dos términos de la izquierda de esta igualdad se pueden representar como dos vectores de amplitud perpendiculares mutuamente  $RI_0$  e  $I_0(L\omega - \frac{1}{C\omega})$ , que forman con el eje  $OX$  los correspondientes ángulos  $\omega t - \varphi$  y  $\omega t - \varphi + \pi/2$  (fig. 309). La amplitud resultante

vendrá representada por el vector  $\mathcal{E}_0$ , cuya longitud la determina la igualdad:

$$\mathcal{E}_0^2 = R^2 I_0^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 I_0^2,$$

de donde se deduce la fórmula (9). Como se ve fácilmente, el vector  $\mathcal{E}_0$  forma el ángulo  $\varphi$  con el vector  $I_0 R$ .

La solución de la ecuación (4) se puede obtener más fácilmente, si se utiliza el método, indicado en el § 105 del t. I, de representar los procesos armónicos mediante números complejos. Sustituyendo en la ecuación (4) el  $\cos \omega t$  por una función exponencial con exponente complejo, tenemos que

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \mathcal{E}_0 \omega e^{i\omega t}, \quad (16)$$

Una solución particular de esta ecuación es

$$I = I_0 e^{i(\omega t + \alpha)}, \quad (17)$$

donde  $I_0$  y  $\alpha$  son números reales que hay que determinar. Diferenciando la (17) obtenemos que

$$\frac{dI}{dt} = i I_0 \omega e^{i(\omega t + \alpha)}, \quad \frac{d^2 I}{dt^2} = -I_0 \omega^2 e^{i(\omega t + \alpha)}.$$

Colocando estos valores de  $dI/dt$  y  $d^2 I/dt^2$  en la (16); hallamos que

$$-L I_0 \omega^2 e^{i(\omega t + \alpha)} + i R I_0 \omega e^{i(\omega t + \alpha)} + \frac{1}{C} I_0 e^{i(\omega t + \alpha)} = \mathcal{E}_0 \omega e^{i\omega t}, \quad (18)$$

Dividiendo los términos de la derecha y de la izquierda de esta ecuación por  $I_0 \omega e^{i(\omega t + \alpha)}$ , obtenemos que

$$-L\omega + \frac{1}{C\omega} + iR = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} e^{-i\alpha}.$$

Sustituyendo  $e^{-i\alpha}$  por  $\cos \alpha - i \sin \alpha$ , hallamos que

$$-L\omega + \frac{1}{C\omega} + iR = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} \cos \alpha - i \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} \sin \alpha. \quad (19)$$

Como se sabe, dos números complejos serán iguales mutuamente, si son iguales sus partes reales e imaginarias, por eso, de la (19) se deduce que

$$-L\omega + \frac{1}{C\omega} = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} \cos \alpha, \quad R = -\frac{\mathcal{E}_0}{I_0} \sin \alpha. \quad (20)$$

Dividiendo la segunda de estas ecuaciones por la primera obtenemos que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}. \quad (21)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones de la (20) y sumando, hallamos que

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} \quad (22)$$

Las expresiones (17), (21) y (22) son la solución buscada. Es fácil ver que esta solución coincide con la solución de la ecuación (4) hallada en el texto fundamental de este párrafo. Efectivamente, la parte real de la expresión (17) nos da que

$$I = I_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{o} \quad I = I_0 \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Haciendo

$$\alpha + \frac{\pi}{2} = -\varphi,$$

obtenemos que

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

que, en correspondencia con la fórmula (5), nos da la corriente que varía según una sinusoidal con una frecuencia angular  $\omega$  y amplitud  $I_0$ , determinada por la fórmula (22), que coincide con la (9). Queda por demostrar que para la diferencia de fases  $\varphi$  también obtenemos por ambos métodos el mismo valor. Efectivamente, según la (21):

$$\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R},$$

lo cual coincide con la (8).

Para la representación gráfica de los procesos que tienen lugar en un circuito de corriente alterna no hay necesidad de pasar de las magnitudes complejas a las reales. Para ello es suficiente convenir en que la magnitud compleja  $ae^{i\alpha}$  es igual a un vector de longitud  $a$  que forme un ángulo  $\alpha$  con el eje dado. Observemos en este caso que el producto por la unidad imaginaria  $i$  corresponderá a un giro de noventa grados del vector. Efectivamente:  $iae^{i\alpha} = e^{i\frac{\pi}{2}} ae^{i\alpha} = ae^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})}$ . De esto se deduce que el multiplicar por  $i^2 = -1$  corresponde a un giro de  $180^\circ$ . Teniendo en cuenta esta observación escribimos la ecuación (18) de la siguiente manera:

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0 e^{i(\omega t + \alpha + \pi)} + RI_0 e^{i(\omega t + \alpha + \pi/2)} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t},$$

o, sustituyendo  $\alpha$  por  $-\varphi - \frac{\pi}{2}$ :

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0 e^{i(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})} + RI_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Esta expresión relaciona entre sí a los tres vectores, cuyas longitudes y direcciones corresponden a la fig. 309.

§ 235. **Dínamos y electromotores.** Las dínamos (o generadores de corriente) son máquinas para obtener corrientes utilizando el fenómeno de inducción electromagnética. La dínamo más simple de corriente alterna es un cuadro de una espira de conductor que gira en el campo de un imán permanente. La creación de la corriente alterna en un cuadro de éstos se ha examinado en el § 224. En la fig. 310 se indica cómo se puede obtener la corriente del cuadro que gira utilizando dos anillos y las escobillas  $a$  y  $b$ , y enviarla al circuito exterior  $R$ . En la práctica, claro está, no se utiliza un cuadro, sino un gran número de espiras del conductor arrolladas sobre un tambor (rotor). En la técnica también se utilizan máquinas

con bobinas inmóviles y electroimanes en lugar de imanes permanentes. El esquema de una máquina de éstas se representa en la fig. 311. Las bobinas en que se induce la corriente, están arrolladas en las piezas polares  $A_1, A_2, A_3, \dots$  del núcleo de hierro. La corriente que fluye por las bobinas  $C_1, C_2, C_3, \dots$ , procedente de un pequeño generador  $B$  de corriente independiente, magnetiza el núcleo. La parte móvil de la máquina (rotor) tiene la forma de un anillo con dientes  $D_1, D_2, D_3, \dots$ . Al girar el rotor, los dientes se desplazan respecto a las piezas polares  $A_1, A_2, A_3, \dots$  y de esta manera cierran, unas veces más, otras menos, el circuito magnético entre las piezas polares vecinas. Debido a ello varía el flujo de inducción magnética a través de las bobinas arrolladas en las piezas polares  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , y en ellas se induce corriente.

Además de los generadores de corriente alterna indicados, se pueden construir generadores de corriente continua. Si los extremos del cuadro que gira, se conectan con dos semianillos (colectores) aislados uno de otro (fig. 312), las escobillas  $a$  y  $b$  harán contacto alternativamente con uno y con otro semianillo, y en el circuito externo fluirá una corriente de un mismo sentido que sólo variará su intensidad. En la fig. 313,  $a$  se representa gráficamente la dependencia de la intensidad de esta corriente  $I$  respecto al tiempo. Utilizando en vez de un cuadro,

un sistema de bobinas, cuyos terminales se conecten a las secciones independientes de un colector complejo, se puede obtener una corriente continua, cuya intensidad sólo variará ligeramente (pulsará) con el tiempo (fig. 313,  $b$ ). El campo magnético de todas las máquinas de corriente continua y de dimensiones más o menos grandes lo crea un electroimán; en este caso se utiliza generalmente el principio de la

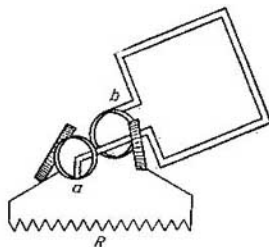


Fig. 310. Transmisión al circuito exterior, de la corriente del cuadro que gira, mediante los anillos  $a$  y  $b$ .

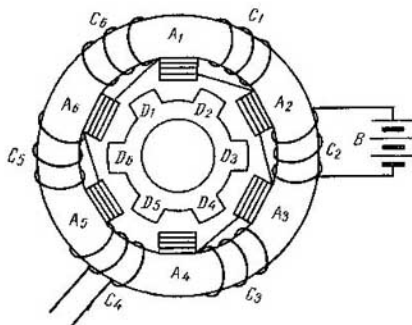


Fig. 311. Esquema de un generador de corriente alterna con bobinas inmóviles.

*autoexcitación*, que consiste en que el electroimán se alimenta de la corriente creada por la propia máquina. Hay dos maneras fundamentales de suministrar corriente al electroimán: 1) en serie (motor en serie o motor serie) y 2) en derivación (motor en derivación o motor derivación).

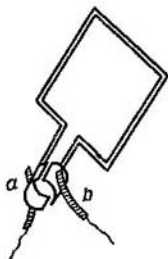


Fig. 312. Esquema del colector de un generador de corriente continua.

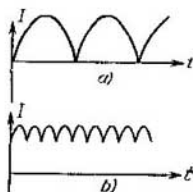


Fig. 313. Dependencia entre la intensidad de la corriente y el tiempo: a) de un generador con colector de dos semianillos, b) de un generador con un colector complejo.

En los motores con *excitación en serie* el arrollamiento está conectado en serie con el circuito exterior (fig. 314). Esta máquina empieza a funcionar a costa de la magnetización remanente del núcleo del electroimán y, después, la corriente excitada en él pasa enteramente a través del arrollamiento del electroimán  $M$  intensificando el campo magnético en que gira el rotor. Al desconectar el circuito exterior, la

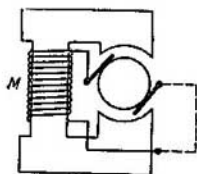


Fig. 314. Esquema de un generador con excitación en serie.

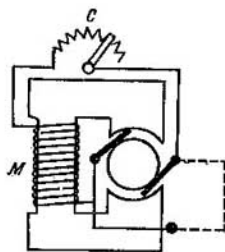


Fig. 315. Esquema de un generador con excitación en derivación.

f. e. m. de esta máquina disminuye hasta adquirir valores pequeños debido a la magnetización remanente.

En los motores con *excitación en derivación*, el arrollamiento del electroimán se conecta en derivación con el circuito exterior (fig. 315). La intensidad de la corriente del arrollamiento se puede regular con un reóstato  $C$ . Los motores en

derivación son los más difundidos. Se utilizan, además, motores (generadores) compound o de excitación compuesta, que tienen dos arrollamientos: uno se conecta en serie con el circuito exterior y el otro, en derivación.

Cualquier dínamo de corriente continua se puede transformar en electromotor; para ello se hace fluir por el rotor a través de las escobillas una corriente de un generador cualquiera (exterior). En este caso, bajo la influencia de las fuerzas de acción mutua de las corrientes que fluyen por los arrollamientos del rotor, y del campo magnético, el rotor gira.

B. Jacobi fue el primero en aplicar en la práctica el electromotor como fuerza de tracción de las barcas del río Nevá.

Al girar el rotor del electromotor, en su arrollamiento se induce una corriente de sentido contrario al de la corriente que origina el movimiento. Por eso, la intensidad de la corriente que fluye a través del arrollamiento del rotor procedente de un generador exterior, disminuirá. Si la f. e. m. exterior es suficiente para mantener, cuando el electromotor gira, una corriente de intensidad necesaria, en el momento inicial, al poner en marcha el electromotor, la corriente puede resultar excesivamente intensa y quemar el arrollamiento del rotor. Para evitarlo se conecta un réostato en derivación con el motor, denominado *réostato de arranque*. A medida que aumentan las revoluciones del motor se va reduciendo la resistencia del réostato.

Las dinamos y los electromotores modernos son máquinas de alto rendimiento, que en las grandes alcanza el 95%. Las pérdidas inevitables en el rozamiento, en el desprendimiento del calor de Lenz-Joule, en las corrientes de Foucault y en la histéresis se han podido reducir hasta dejarlas en un 5%.

§ 236. Transformadores. Para muchos fines técnicos se necesitan f. e. m. mayores que las que dan las dinamos. Sobre todo es importante en la técnica poseer f. e. m. elevadas al transmitir energía eléctrica por conductores de un lugar a otro (a veces el consumidor está a centenares de kilómetros de la central eléctrica). El caso es que la potencia total desarrollada en el circuito es igual al producto de la f. e. m. por la intensidad de la corriente,  $\mathcal{E}I$ , de donde se deduce que cuanto mayor sea la f. e. m.  $\mathcal{E}$ , menor será la intensidad de la corriente  $I$ , siendo la potencia la misma. Mientras tanto, la pérdida de energía en los conductores que la transmiten, debido al calor de Lenz-Joule, es  $Q=RI^2$ , es decir, es tanto mayor, cuanto mayor sea la intensidad de la corriente. Por eso, para disminuir las pérdidas perjudiciales, es conveniente poseer una gran f. e. m. y una pequeña intensidad de corriente.

En el caso de la corriente alterna, el aumento de la f. e. m. (o, como se dice en la técnica, de la "tensión") es fácil de realizar con ayuda de los transformadores elevadores. P. Yáblochkov (en 1876) e I. Usaguin (en 1882), técnicos electricistas rusos, fueron los primeros que construyeron y aplicaron en la práctica los transformadores. El transformador, en su forma más simple, consta de dos arrollamientos (fig. 316) sobre un núcleo común cerrado y de hierro. El arrollamiento primario  $A_1$  consta de una pequeña cantidad de espiras de un conductor grueso, el secundario,  $A_2$ , de una cantidad elevada de espiras de un conductor más delgado. La corriente que pasa por el primario  $A_1$ , crea un flujo variable de inducción magnética  $\Phi$ , que casi por entero se concentra en el interior del núcleo y, por consiguiente, por completo atraviesa las espiras del secundario.

Si el secundario "está abierto", el primario es una parte del circuito con cierta resistencia óhmica e inductiva. Si se considera la resistencia óhmica tan pequeña, que se pueda despreciar, la f. e. m.  $\mathcal{E}_1$  que actúa sobre el primario, será igual

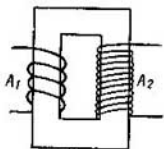


Fig. 316. Transformador.

numéricamente y de signo contrario a la f. e. m. de autoinducción  $\mathcal{E}_a$  que se crea en el mismo:

$$\mathcal{E}_1 = -\mathcal{E}_a.$$

En cada espira del primario surge una f.o.m. de autoinducción igual a  $-\frac{d\Phi}{dt}$ , de donde,

$$\mathcal{E}_a = -N_1 \frac{d\Phi}{dt},$$

donde  $N_1$  es el número de espiras del primario. De aquí que para la f.e.m.  $\mathcal{E}_1$  que actúa sobre el primario, sea

$$\mathcal{E}_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

Como este mismo flujo atraviesa el secundario, en cada una de sus espiras se crea una f.e.m. de inducción igual a  $-\frac{d\Phi}{dt}$ , y en total, en el secundario se crea una f.e.m.  $\mathcal{E}_2$ :

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2)$$

donde  $N_2$  es el número de espiras del secundario. Comparando la (1) y la (2), vemos que la f.e.m. de inducción creada en el secundario es

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_1. \quad (3)$$

Así tenemos que el transformador eleva la f. e. m. en una cantidad igual a la relación del número de espiras del secundario respecto al del primario. El signo menos indica que la f. e. m. del primario es de fase opuesta respecto a la del secundario.

Generalmente, los transformadores con el secundario abierto poseen un alto coeficiente de autoinducción del primario. Esto acarrea que la resistencia inductiva del primario sea grande. Gracias a ello, estando abierto el secundario, la corriente  $I_1$  del primario es débil. Esta corriente se denomina *corriente en vacío*. Al cerrar el secundario, se induce en el mismo una corriente que crea su campo magnético, que compensa, según la regla de Lenz, el campo magnético del primario. Esto acarrea una disminución de la resistencia inductiva del primario y un aumento de la intensidad  $I_1$  de la corriente. Así tenemos que la potencia consumida en el circuito primario depende de la potencia que se consume en el circuito secundario.

Cuando el circuito secundario está cargado, la ecuación (3) deja de ser exacta. Esta ecuación es justa mientras la corriente del circuito primario no se diferencie mucho de la corriente en vacío. La teoría general de los transformadores, sobre todo cuando se tiene en cuenta la función de la histéresis del núcleo, es muy compleja.

Las pérdidas en el transformador son las invertidas en el desprendimiento de calor de Lenz-Joule en los arrollamientos, en la dispersión de las líneas de inducción magnética, en las corrientes de Foucault en el núcleo y en el trabajo invertido en la histéresis del núcleo.

Para disminuir la importancia de estas dos últimas causas, los núcleos de los transformadores se hacen de las clases de hierro más dulces en forma de chapas independientes y separadas con capas aislantes. En los grandes transformadores modernos, las pérdidas se han logrado reducir hasta un 2% de la potencia total y, de esta manera, su rendimiento llega a ser de 98%.



Considerando que para estos transformadores, las potencias desarrolladas en los circuitos primario y secundario prácticamente son iguales, obtenemos que

$$\mathcal{E}_1 I_1 = \mathcal{E}_2 I_2,$$

de donde basándonos en la (3), tenemos que

$$I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1; \quad (4)$$

Por lo tanto, las intensidades de las corrientes de los circuitos primario y secundario son inversamente proporcionales al número de espiras de los arrollamientos primario y secundario.

Cualquier transformador elevador, se puede utilizar también como *reductor*; para ello, la corriente primaria se hace fluir por un arrollamiento de conductor más delgado y de mayor número de espiras. En el otro arrollamiento se crea

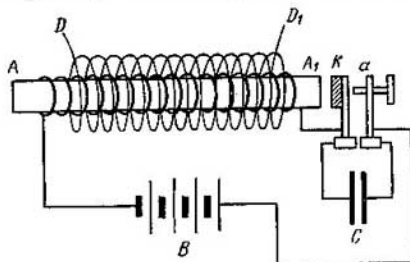


Fig. 317. Bobina de inducción.

una corriente de intensidad mayor y de f. e. m. menor que en el primero. Generalmente, la corriente de "alta tensión" que se transmite por los conductores desde la central, se reduce de nuevo en el lugar del consumidor, con ayuda de un transformador reductor, a una "tensión" menor.

Además de las aplicaciones técnicas indicadas, los transformadores hallan gran aplicación en los laboratorios técnicos (tanto los elevadores como los reductores). Según las exigencias, los transformadores se construyen dándoles distintas formas. Para obtener f. e. m. elevadas a pequeñas potencias, se utiliza la llamada *bobina de inducción*. Consta de dos solenoides cilíndricos sobre un núcleo común de hierro no cerrado (fig. 317). El primario es el arrollamiento del solenoide interior  $AA_1$  formado de un número relativamente pequeño de espiras de un conductor grueso. El secundario es el arrollamiento del solenoide exterior  $DD_1$  construido de un gran número de espiras de un conductor muy fino. Generalmente el primario se alimenta de un generador de corriente continua, por ejemplo de una batería de acumuladores  $B$ . Para que el primario cree un campo magnético variable, se interrumpe y conecta periódicamente la corriente del mismo. La interrupción y el cierre se hace con ayuda de un interruptor automático, que puede ser de diferentes construcciones. El más simple es el *interruptor de martillo*, que consta de un resorte con una armadura de hierro  $k$  (fig. 317). Cuando la corriente empieza a fluir por el primario, el núcleo de la bobina se magnetiza y atrae el resorte, con ello se interrumpe el circuito en el lugar de contacto entre el resorte  $k$  y el tornillo  $a$ . Para que al interrumpir el contacto no se produzca una chispa intensa, entre  $k$  y  $a$  se conecta un condensador  $C$ , en cuyo caso la

corriente de la batería  $B$ , al interrumpir el circuito, pasa a cargar el condensador y no se produce chispa.

La corriente del primario interrumpida por un interruptor de martillo u otro dispositivo mecánico, no es una corriente alterna sinusoidal. La curva de dependencia de la intensidad de esta corriente respecto al tiempo viene representada en la fig. 318. *a*. Después de conectar el circuito, la intensidad de la corriente se eleva relativamente despacio, lo cual es debido al fenómeno de autoinducción, y al desconectar el circuito, disminuye rápidamente. Como la f. e. m. del circuito secundario es proporcional a la variación de la intensidad de la corriente del primario respecto al tiempo,  $dI_1/dt$  (véase el § 226), en el momento de la desconexión alcanzará valores mucho mayores que en el momento de la conexión. La dependencia de la f. e. m. del circuito secundario respecto al tiempo viene representada en la fig. 318. *b*. El valor negativo de la f. e. m. indica que la corriente creada en el secundario debido a esta f. e. m., va en dirección opuesta a la de la corriente del primario; el valor positivo indica que la corriente del secundario va en el mismo sentido que en el primario.

Si en el secundario se forma un cortocircuito, fluirá por el mismo una corriente alterna no simétrica; pero la cantidad de electricidad transportada en ambas

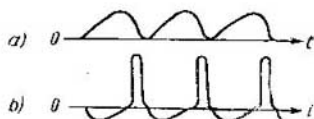


Fig. 318. Curva de dependencia de la intensidad de la corriente respecto al tiempo en una bobina de inducción: a) en el arrollamiento primario, b) en el secundario.

direcciones será la misma. Si en el circuito secundario se deja una considerable distancia disruptiva, la f. e. m. creada en la conexión puede resultar insuficiente para producir la descarga; entonces la chispa saltará solamente al desconectar el circuito primario, y en el secundario fluirá una corriente interrumpida; pero cada vez de un mismo sentido.

§ 237. Rectificación y medición de las corrientes alternas. Gracias a la comodidad que representa la generación y transmisión de corrientes alternas, éstas han adquirido amplia aplicación técnica. No obstante, en muchos casos se necesita consumir corriente continua; por eso la técnica moderna utiliza diferentes métodos para *rectificar* la corriente alterna.

La rectificación de la corriente se puede efectuar de distintas maneras, por ejemplo, con ayuda de rectificadores secos de semiconductores o de rectificadores electrolíticos (§ 178). El contacto entre dos semiconductores o entre un semiconductor y el metal, como se ha dicho en el § 171, posee distinta resistencia según sea el sentido de la corriente. Por eso, en un sentido, la corriente fluye a través del contacto sin debilitarse sensiblemente, y en otro puede dejar pasar solamente una corriente muy débil. En la técnica moderna, los rectificadores de semiconductores han adquirido amplia difusión. Como ejemplo se puede citar el *rectificador de germanio*, que consta de una lámina de germanio a la cual, de un lado se le ha soldado una esfera de indio, y del otro, de estaño. Junto al electrodo de indio surge una conducción por huecos y después se forma una zona  $p - n$  de rectificación. Este rectificador es capaz de dejar pasar corrientes hasta cien am-

perios por  $\text{cm}^2$  de contacto. Como otro ejemplo de rectificador de semiconductores indiquemos el *rectificador de selenio* que consta de una capa fina de selenio extendida entre dos discos metálicos.

En lugar de rectificadores secos se pueden utilizar *diodos* (*kenotrones* o *válvulas de dos electrodos*), que también poseen la propiedad de que la corriente puede fluir por ellos solamente en un sentido, a saber, del ánodo al cátodo calentado. Por fin, son de gran difusión los llamados *rectificadores de mercurio*. Son tubos de descarga en los cuales ésta se produce en vapor de mercurio entre las superficies del mercurio líquido y un electrodo de grafito, donde la superficie calentada de mercurio generalmente desempeña la función de cátodo. Como resultado de ello, la descarga se produce cada vez que el mercurio hace la función de cátodo y el grafito de ánodo, y se apaga la descarga cuando la corriente es de

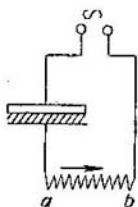


Fig. 319. Conexión de un rectificador seco en un circuito de corriente alterna.

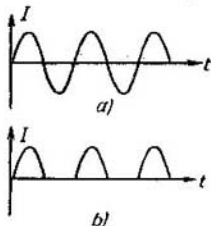


Fig. 320. Variación con el tiempo de las intensidades: a) de la corriente alterna, y b) de la corriente que ha pasado por un rectificador.

sentido opuesto. Al conectar un rectificador seco o de otra clase a un circuito de corriente alterna (fig. 319), en la parte  $ab$  del circuito fluirá corriente de un sentido. Sin embargo, la intensidad de esta corriente, evidentemente, no será constante, sino que variará con el tiempo.

En la fig. 320,  $a$  se representa la variación con el tiempo de la intensidad de una corriente alterna sinusoidal, y en la 320,  $b$ , la corriente que ha pasado a través de un rectificador. Utilizando el transformador y dos rectificadores se puede aprovechar también el "segundo semiperíodo" de la corriente alterna.

En la fig. 321,  $A_1$  es el primario de un transformador conectado a un circuito de corriente alterna y  $A_2$ , el secundario. Dos rectificadores 1 y 2 se conectan a los terminales del secundario. De la parte media del secundario se hace una derivación  $ba$ . Entonces, en un semiperíodo funciona la parte  $C_1b$  del secundario y la corriente fluirá por el rectificador 1. En el segundo semiperíodo, actuará la parte  $C_2b$  del arrollamiento y la corriente fluirá por el rectificador 2. En la parte  $ab$  del circuito, la corriente fluirá siempre en un sentido. En la fig. 322,  $a$  se representa de nuevo una corriente alterna sinusoidal, y en la 322,  $b$ , la corriente rectificada según el esquema descrito. Las oscilaciones de la intensidad de la corriente se pueden rectificar también con ayuda de autoinducciones o de capacidades.

Para medir las corrientes alternas no sirven los instrumentos magnetoelectrícos de cuadro móvil, ya que la dirección de giro del cuadro varía al variar el sentido de la corriente. Como se ha indicado en el § 233, las corrientes alternas pueden medirse con ayuda de instrumentos térmicos.

Para medir las corrientes alternas se utilizan instrumentos electrodinámicos con dos bobinas o instrumentos electromagnéticos en los cuales en la bobina se introduce atrávida una barra de hierro que posea el mínimo de histéresis.

Además, las corrientes alternas se pueden medir con ayuda de los llamados instrumentos electrodinámicos de inducción. El funcionamiento de estos instru-

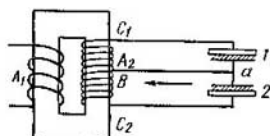


Fig. 321. Esquema de conexión de dos rectificadores con el secundario de un transformador con derivación en el punto medio.

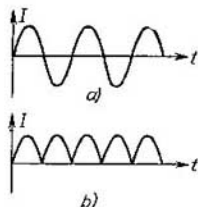


Fig. 322. Variación con el tiempo de la intensidad:  $a)$  de la corriente alterna, y  $b)$  de la corriente rectificadora según el esquema de la fig. 321.

mentos es el siguiente (fig. 323): la corriente alterna, cuya intensidad se mide, fluye por la bobina  $\Phi$  del electroimán y excita entre sus polos un campo magnético variable. La parte móvil  $D$  del instrumento es una placa que, con respecto a este campo magnético, está situada de manera que sólo en parte sirve de pantalla del campo. En la placa surgen las corrientes inducidas de Foucault, sobre las

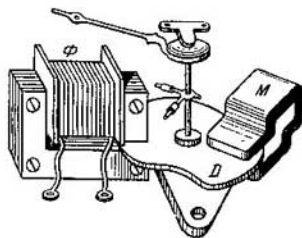


Fig. 323. Esquema de un amperímetro de inducción.

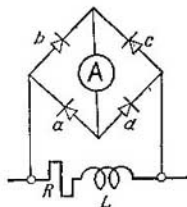


Fig. 324. Conexión de rectificadores para medir la intensidad de la corriente alterna.

cuales el campo magnético actúa con fuerzas que tienden a sacar a la placa de los límites del campo, con lo cual gira la placa y con ella la aguja que lleva unida. El imán permanente  $M$  es para amortiguar las oscilaciones de la placa.

Por último, las corrientes alternas se pueden medir con instrumentos magnetoelectrónicos de cuadro móvil, si se les añade un rectificador. Para este fin generalmente se utilizan rectificadores secos (de óxido de cobre). En la fig. 324 se representa el esquema de conexión del amperímetro  $A$  a un circuito de corriente

alterna mediante cuatro rectificadores de óxido de cobre *a, b, c, d*, que aseguran el paso de la corriente a través del amperímetro *A* en un sentido. La resistencia *R* y la autoinducción *L* desempeñan la función de resistencia en derivación.

§ 238. **Corriente trifásica.** Junto con la corriente alterna sinusoidal ordinaria, en la técnica se utiliza ampliamente la llamada *corriente trifásica*. Se denomina corriente trifásica la que surge en una red bifurcada de conductores con tres f. e. m. variables, cuyas fases se diferencian una de otra en un ángulo de  $\frac{2}{3}\pi$  (o. midiendo en grados, en  $120^\circ$ ).

Veamos primeramente tres circuitos cerrados no conectados entre sí  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2$  y  $A_3B_3C_3D_3$  (fig. 325). Sean las f. e. m.:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \mathcal{E}_0 \text{ sen } \omega t, \\ \mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_0 \text{ sen } \left( \omega t + \frac{2}{3}\pi \right), \\ \mathcal{E}_3 &= \mathcal{E}_0 \text{ sen } \left( \omega t + \frac{4}{3}\pi \right) \end{aligned}$$

que se inducen respectivamente en las partes  $A_1D_1$ ,  $A_2D_2$  y  $A_3D_3$  de los circuitos. Supongamos que en los circuitos que examinamos no hay autoinducción y que en cada uno de ellos van conectadas resistencias óhmicas iguales  $R_1=R_2=R_3=R$ .

Entonces, según lo dicho en el § 232, en estos circuitos surgen corrientes respectivamente iguales a

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 \text{ sen } \omega t, \\ I_2 &= I_0 \text{ sen } \left( \omega t + \frac{2}{3}\pi \right), \\ I_3 &= I_0 \text{ sen } \left( \omega t + \frac{3}{4}\pi \right), \end{aligned}$$

donde la amplitud total de las corrientes es  $I_0 = \mathcal{E}_0/R$ . Unamos los puntos  $D_1, D_2$  y  $D_3$  de los tres circuitos. Entonces sus potenciales serán iguales; los potenciales de los respectivos puntos  $C_1, C_2$ , y  $C_3$  también serán iguales y también se podrán unir, sin variar las corrientes  $I_1, I_2$ , e  $I_3$  que fluyen por las resistencias. En esta conexión, los conductores  $D_1C_1, D_2C_2$  y  $D_3C_3$  se pueden sustituir por un conductor *F* y con ello se obtiene el circuito representado en la fig. 326. Por el conductor *F*, evidentemente, fluirá una corriente igual a la suma de las corrientes  $I_1+I_2+I_3$ . Es fácil ver que esta corriente total siempre es igual a cero. Efectivamente:

$$I_1 + I_2 = I_0 \text{ sen } \omega t + I_0 \text{ sen } \left( \omega t + \frac{2}{3}\pi \right) = I_0 \text{ sen } \left( \omega t + \frac{1}{3}\pi \right),$$

de donde

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= I_0 \text{ sen } \left( \omega t + \frac{1}{3}\pi \right) + I_0 \text{ sen } \left( \omega t + \frac{4}{3}\pi \right) = \\ &= 2I_0 \text{ sen } \left( \omega t + \frac{5}{6}\pi \right) \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

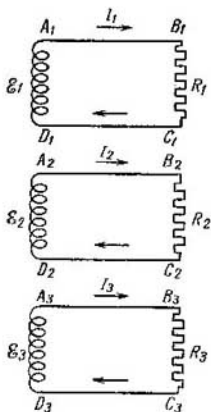


Fig. 325. Esquema de excitación de una corriente trifásica

El mismo resultado se puede obtener sumando gráficamente los tres vectores de la corriente  $I_0$ , los cuales forman una línea quebrada cerrada a manera de un triángulo equilátero.

Como la intensidad total de las corrientes  $I_1 + I_2 + I_3$  es igual a cero todo el tiempo, el conductor  $F$  resulta de más y se puede quitar. Con ello resulta que tres

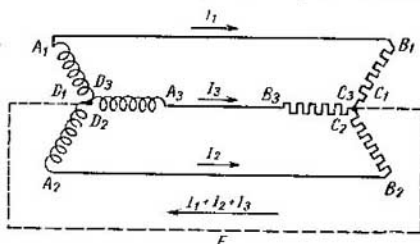


Fig. 326. Esquema de conexión en estrella.

corrientes alternas  $I_1, I_2, I_3$ , desfasadas mutuamente en  $120^\circ$ , se pueden transmitir desde el lugar de su generación a las resistencias  $R_1, R_2, R_3$  por tres conductores, en lugar de tres pares de conductores que se necesitarían de estar los circuitos desconectados entre sí. Este circuito de corriente trifásica se dice que está *conectado en estrella*.

Los tres circuitos independientes representados en la fig. 325, se pueden unir según otro esquema denominado *conexión en triángulo* (fig. 327).

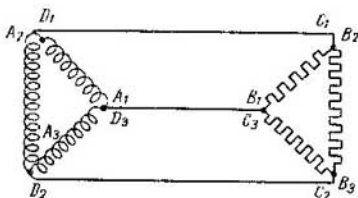


Fig. 327. Esquema de conexión en triángulo.

Según este esquema, se unen los puntos  $A_1D_3, A_2D_1, A_3D_2$  y  $B_1C_3, B_2C_1, B_3C_2$ . Este esquema también permite sustituir los tres pares de conductores por tres conductores sin variar las corrientes que fluyen por las resistencias  $R_1, R_2$  y  $R_3$ .

La igualdad a cero de la suma de las corrientes  $I_1 + I_2 + I_3$  tiene lugar solamente si son iguales las resistencias  $R_1, R_2$  y  $R_3$ . Si las resistencias no son iguales mutuamente, la corriente total  $I_1 + I_2 + I_3$ , siendo invariable la diferencia de fases entre ellas, resulta diferente de cero. No obstante, en la realidad, como los puntos  $C_1, C_2$ , y  $C_3$  (en la conexión en estrella) están unidos, forman un nudo para el cual, según la ley de Kirchhoff, la suma de las corrientes que afluyen y se

alejan del mismo debe ser igual a cero. Así tenemos que, de hecho, incluso cuando las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$ , y  $R_3$  no son iguales, la suma de las corrientes es  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ . Esto es debido a que surgen diferencias complementarias de fase entre los puntos  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$ .

La comodidad de utilizar corrientes trifásicas consiste en que permiten crear el llamado campo giratorio.

Veamos el circuito magnético anular con tres pares de piezas polares representado en la fig. 328. Cada par de piezas polares crea su campo magnético, cuyos vectores de excitación magnética  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$  estarán dirigidos según los correspondientes diámetros del anillo. Supongamos que cada par de piezas polares tiene arrollamientos alimentados por las componentes de la corriente trifásica. Entonces, si se desprecian los fenómenos de histéresis en el material del anillo, se obtiene que las excitaciones magnéticas  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$  de los campos variarán con el tiempo según la ley:

$$H_1 = H_0 \operatorname{sen} \omega t,$$

$$H_2 = H_0 \operatorname{sen} \left( \omega t + \frac{2}{3} \pi \right),$$

$$H_3 = H_0 \operatorname{sen} \left( \omega t + \frac{4}{3} \pi \right).$$

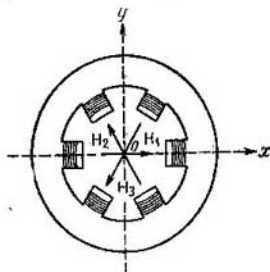


Fig. 328. Circuito magnético anular.

Tracemos los ejes de coordenadas  $OXY$  como se indica en la fig. 328 y hallemos la suma de las proyecciones  $H_1$ ,  $H_2$ , y  $H_3$  sobre cada uno de los ejes:

$$H_x = H_0 \operatorname{sen} \omega t + H_0 \operatorname{sen} \left( \omega t + \frac{2}{3} \pi \right) \cos \frac{2}{3} \pi + H_0 \operatorname{sen} \left( \omega t + \frac{4}{3} \pi \right) \cos \frac{4}{3} \pi,$$

$$H_y = H_0 \operatorname{sen} \left( \omega t + \frac{2}{3} \pi \right) \operatorname{sen} \frac{2}{3} \pi + H_0 \operatorname{sen} \left( \omega t + \frac{4}{3} \pi \right) \operatorname{sen} \frac{4}{3} \pi.$$

Después de las correspondientes transformaciones hallamos que

$$H_x = \frac{3}{2} H_0 \operatorname{sen} \omega t, \quad H_y = \frac{3}{2} H_0 \cos \omega t$$

Según lo dicho en el t. 1, estas dos componentes determinan al vector  $\Pi$  que gira a una velocidad angular  $\omega$  constante según las agujas del reloj.

El campo giratorio actúa sobre un conductor situado en él, con cierta fuerza mecánica, ya que en el conductor surgen corrientes inducidas sobre las cuales actúa el campo magnético. Por ejemplo, si en un campo giratorio se coloca un cuadro con un arrollamiento cerrado, en el eje perpendicular a la dirección del campo, el cuadro empezará a girar en el mismo sentido que lo hace el vector de excitación magnética. Esto nos permite construir electromotores alimentados por una corriente alterna trifásica. M. Dolivo-Dobrovolski, ingeniero ruso, en 1891 fue el primero en transmitir energía con ayuda de una corriente trifásica utilizando un electromotor con campo giratorio. En la actualidad, la mayoría de los electromotores utilizados en la técnica se construyen basándose en el funcionamiento del campo giratorio.

*Oscilaciones y ondas electromagnéticas*

§ 239. Descarga oscilante del condensador. Sea el condensador  $C$  (fig. 329), cuyas armaduras se unen a través de una bobina de autoinducción  $L$  y una resistencia  $R$ . Supongamos que a las armaduras del condensador se les ha comunicado una diferencia de potencial  $V$  en un momento dado, después de lo cual se ha desconectado el generador de esta diferencia de potencial. Si no hubiese bobina de autoinducción, por el conductor que une las armaduras del condensador fluiría la corriente hasta que los potenciales de las armaduras se

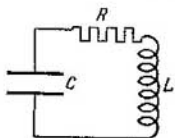


Fig. 329. Circuito oscilante con capacidad  $C$ , resistencia óhmica  $R$  y autoinducción  $L$ .

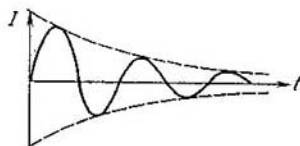


Fig. 330. Oscilaciones amortiguadas.

equilibrasen. Habiendo autoinducción en el circuito, el proceso transcurre de otra manera. En el momento cuando los potenciales de las armaduras se equilibren, la f. e. m. de autoinducción mantendrá a la corriente que tiende a disminuir, y las armaduras del condensador volverán a cargarse. Después de esto se crea de nuevo una corriente, pero de sentido opuesto, con lo cual la carga y la descarga de las armaduras tendrá lugar periódicamente y en el circuito con capacidad y autoinducción se producirán oscilaciones. Como parte de la energía de la corriente se invierte en el desprendimiento del calor de Lenz-Joule en la resistencia  $R$ , las oscilaciones se amortiguarán poco a poco. El carácter general de las oscilaciones se representa en la fig. 330. El amortiguamiento será tanto menor, cuanto menor sea la resistencia  $R$ ; en el límite, cuando la resistencia es  $R=0$ , las oscilaciones deberían ser continuas (no amortiguadas).

Como se demostrará más adelante, la descarga adquiere carácter oscilatorio, si se satisface la siguiente desigualdad:

$$L > \frac{CR^2}{4}. \quad (1)$$



Si el valor del coeficiente de autoinducción es menor que el determinado por la desigualdad (1), la f. e. m. de autoinducción es insuficiente para volver a cargar las armaduras del condensador: la descarga es aperiódica.

Si la resistencia  $R$  es pequeña, el período  $T$  de la descarga oscilante se determina por la fórmula (que más abajo se deduce):

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (2)$$

Así, pues, cuanto menores sean la autoinducción y la capacidad, tanto menor será el período, es decir, tanto mayor será la frecuencia de las oscilaciones eléctricas. Generalmente, el período de las oscilaciones eléctricas es muy pequeño. Si incluso se toman capacidades y autoinducciones relativamente muy grandes, por ejemplo de  $C=1\mu\text{F}$  y  $L=1\text{ H}$ , (teniendo en cuenta que  $1\mu\text{F}=10^{-6}\text{F}$ ) obtenemos que:

$$T = 2\pi\sqrt{10^{-6} \cdot 1} \text{ seg} \cong 0,0063 \text{ seg.}$$

Las oscilaciones eléctricas examinadas son análogas a las oscilaciones mecánicas como por ejemplo, a las del péndulo. Al soltar el péndulo desviado, por inercia éste pasa por la posición de equilibrio sin detenerse y se desvía hacia el lado opuesto y continúa su movimiento oscilatorio amortiguándose poco a poco debido a las fuerzas de rozamiento. De esta comparación se ve que la autoinducción desempeña la función de inercia, y la resistencia óhmica, la de resistencia mecánica. La analogía es más profunda si pasamos a examinar las relaciones energéticas. Al oscilar, la energía potencial del péndulo se transforma en energía cinética, que, a su vez, después de pasar el péndulo por la posición de equilibrio, se transforma en potencial, y viceversa. Al cargar el condensador, el sistema adquiere una reserva de energía eléctrica (potencial). En la fig. 331, *a*, las líneas que van de una a otra armadura del condensador expresan que entre éstas hay un campo eléctrico. Al descargar el condensador, se crea una corriente eléctrica, que excita en el solenoide (autoinducción) un campo magnético con una reserva de energía análoga a la energía cinética del péndulo en movimiento. En la fig. 331, *b*, con líneas de puntos se representa el surgimiento de

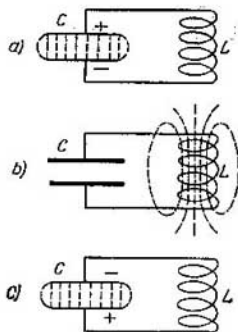


Fig. 331. Aparición alternativa de los campos eléctrico y magnético en la descarga periódica del condensador.

En la fig. 331, *a*, las líneas que van de una a otra armadura del condensador expresan que entre éstas hay un campo eléctrico. Al descargar el condensador, se crea una corriente eléctrica, que excita en el solenoide (autoinducción) un campo magnético con una reserva de energía análoga a la energía cinética del péndulo en movimiento. En la fig. 331, *b*, con líneas de puntos se representa el surgimiento de

un campo magnético en el interior de las espiras de la autoinducción. Luego el condensador se vuelve a cargar (fig. 331, c): la energía "cinética" de la corriente se transforma en energía potencial del campo eléctrico del condensador, y así sucesivamente.

Examinemos con más detalle la descarga oscilante del condensador. Sea  $Q$  la carga comunicada a una de las armaduras del condensador. La intensidad de la corriente del circuito será igual a la variación de esta carga por unidad de tiempo:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (3)$$

Llamando  $V$  a la diferencia de potencial de las armaduras del condensador en el momento dado, la caída total de potencial en el circuito que examinamos, será  $IR + V$ , y deberá ser igual a la f. e. m. que actúa en el circuito. Pero en el circuito actúa solamente la f. e. m. de autoinducción, que es  $-L \frac{dI}{dt}$ , de donde:

$$IR + V = -L \frac{dI}{dt}. \quad (4)$$

La diferencia de potencial de las armaduras del condensador se puede expresar de la manera ordinaria, es decir, en función de la capacidad del condensador y de la carga de sus armaduras:  $V = \frac{Q}{C}$ . Está claro que tanto esta carga  $Q$  como la diferencia de potencial  $V$  son magnitudes variables. Colocando este valor de  $V$  en la fórmula (4) y utilizando la ecuación (3), obtenemos que

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0; \quad (5)$$

esta ecuación es diferencial y resolviéndola se halla la dependencia entre  $Q$  y el tiempo. La solución de esta clase de ecuaciones se ha dado en el t. I al examinar las oscilaciones elásticas amortiguadas de un punto material. Reproducámosla aquí otra vez. Escribamos la ecuación (5) introduciendo las siguientes notaciones:

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{CL} = \omega_0^2. \quad (6)$$

Entonces obtenemos que

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\beta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0. \quad (5a)$$

Introduzcamos en la (5a) una nueva variable:

$$Q = ze^{-\beta t}. \quad (7)$$

Diferenciando en función del tiempo obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} = \beta z e^{-\beta t}; \\ \frac{d^2 Q}{dt^2} &= \frac{d^2 z}{dt^2} e^{-\beta t} - 2\beta \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} + \beta^2 z e^{-\beta t};\end{aligned}$$

colocando estos valores de  $Q$ ,  $dQ/dt$  y  $d^2 Q/dt^2$  en la ecuación (5a) y reduciendo el factor común  $e^{-\beta t}$ , tenemos que

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2) z = 0.$$

La solución de esta ecuación, como se puede comprobar fácilmente mediante la correspondiente sustitución, para el caso en que  $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$ , es

$$z = A \cos(\omega t - \varphi),$$

donde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}; \quad (8)$$

$A$  y  $\varphi$  son constantes que se pueden determinar de las condiciones iniciales. Por consiguiente, según la (7), para  $Q$  se cumplirá la ecuación:

$$Q = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t - \varphi). \quad (9)$$

Esta solución es la ecuación de una oscilación amortiguada. La magnitud  $A \cdot e^{-\beta t}$  es la amplitud, que disminuye con el tiempo según una ley exponencial: cuanto mayor sea  $\beta$ , con más rapidez disminuirá la amplitud. Como, según la (6), tenemos que  $\beta = \frac{R}{2L}$ , el amortiguamiento de la oscilación se efectuará con tanta mayor rapidez, cuanto mayor sea la resistencia óhmica  $R$  y cuanto menor sea la autoinducción. El período de oscilación  $T$ , según la (8), es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Sustituyendo en esta ecuación las magnitudes  $\omega_0$  y  $\beta$  por sus valores según la (6), hallamos que

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}. \quad (8a)$$

Si la resistencia óhmica  $R$  del circuito es muy pequeña y el coeficiente de autoinducción  $L$  no lo es, tendremos el caso de oscilaciones de amortiguamiento muy lento, y en la fórmula (8a) se puede despreciar la magnitud  $\left(\frac{R}{2L}\right)^2$  por ser muy pequeña en compa-

ración con la magnitud  $\frac{1}{LC}$ ; por consiguiente, el período de estas oscilaciones de lenta amortiguación será

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (8b)$$

que es la fórmula (2) del principio del párrafo.

Comparando la (8a) y la (8b) vemos que la presencia de la resistencia en el circuito conduce a aumentar el período de oscilación  $T$ .

Si la resistencia del circuito o la capacidad del condensador son tan grandes que

$$\omega_0^2 - \beta^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 < 0, \quad \text{ó} \quad L < \frac{CR^2}{4},$$

la ecuación (9) no se cumplirá y tendremos una descarga *aperiódica*, en la cual no se crean oscilaciones eléctricas en el circuito; como este caso no nos interesa, en adelante no se hablará más de él.

El proceso oscilatorio se ha examinado en función de la carga  $Q$  que en cada instante dado hay en la armadura del condensador. En correspondencia con la fórmula (9), la magnitud de esta carga oscila, variando de signo periódicamente y disminuyendo. Al fin y al cabo la carga desaparece debido a que las cargas  $+Q$  y  $-Q$ , iguales y de signo contrario, comunicadas a las armaduras del condensador se compensan mutuamente. Está claro que, además de con la carga  $Q$ , el sistema se puede caracterizar en función de la diferencia de potencial  $V$  de las armaduras del condensador, o en función de la intensidad  $I$  de la corriente que fluye por el circuito.

Basándonos en la ecuación  $V = \frac{Q}{C}$ , obtenemos que

$$V = \frac{A}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t - \varphi). \quad (10)$$

Así tenemos que la diferencia de potencial también es una función que representa una oscilación amortiguada con el mismo período  $T$ . El valor de la intensidad de la corriente se halla de la (3):

$$I = \frac{dQ}{dt} = -A\beta e^{-\beta t} \cos(\omega t - \varphi) - A\omega e^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi). \quad (11)$$

Si no hay amortiguamiento, tenemos que  $\beta = 0$ , de donde

$$I = -A\omega \sin(\omega t - \varphi). \quad (11a)$$

En este caso, la diferencia de potencial es

$$V = \frac{A}{C} \cos(\omega t - \varphi). \quad (10a)$$

Por lo tanto, si las oscilaciones no se amortiguan, la intensidad de la corriente y la diferencia de potencial están desfasadas una respecto de la otra en un ángulo igual a  $\pi/2$ .

§ 240. Oscilaciones eléctricas forzadas. La descarga oscilante del condensador que hemos examinado en el párrafo anterior es análoga a la oscilación de un péndulo que al principio se desvía de su posición de equilibrio y después realiza oscilaciones amortiguadas con su período correspondiente. Pero tanto el péndulo como cualquier sistema mecánico elástico, puede realizar también oscilaciones forzadas bajo la influencia de una fuerza periódica exterior. En este caso tiene lugar el fenómeno característico de resonancia (véase el t. I, § 103), en el cual la amplitud de las oscilaciones forzadas se hace sobre todo grande a determinado valor de la frecuencia de la fuerza exterior. Esta frecuencia se denomina de *resonancia (resonante)*, que si el amortiguamiento es débil, prácticamente coincide con la frecuencia de las propias oscilaciones del sistema.

Actuando sobre el sistema oscilante con una fuerza exterior se pueden mantener continuamente las oscilaciones del sistema a una amplitud invariable, es decir, obtener oscilaciones no amortiguadas o continuas. De ejemplo puede servir el escape de áncora de los relojes de péndulo, que periódicamente impulsa el péndulo y le obliga a realizar oscilaciones continuas. En estos casos, el trabajo que vence las fuerzas de rozamiento se realiza a costa de una fuente de energía exterior.

Análogamente, aplicándole a un circuito con capacidad, resistencia y autoinducción una f. c. m. que varíe periódicamente, se pueden excitar en el circuito oscilaciones forzadas. Sea un circuito oscilante con una capacidad  $C$ , autoinducción  $L$  y resistencia óhmica  $R$ , interrumpido en determinado lugar, y en cuyos extremos  $a$  y  $b$  (terminales) (fig. 332) se conectan los conductores de un generador exterior de f. c. m.  $\mathcal{E}$ . Si suponemos que la f. c. m. exterior es puramente periódica, es decir, varía con el tiempo según la ley:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \text{sen } \omega t, \quad (1)$$

tendremos el caso ya examinado en el § 234. Ahora examinemos los resultados obtenidos en el § 234 desde otro punto de vista. En nuestro circuito [véase la fórmula (5) del § 234] fluirá una corriente  $I$  de la misma frecuencia  $\omega$  que la de la f. c. m. exterior  $\mathcal{E}$ :

$$I = I_0 \text{sen}(\omega t - \varphi). \quad (2)$$

Esta ecuación (2) es una solución particular de la ecuación diferencial que satisface la intensidad  $I$  de la corriente en el caso que examinamos. La solución total tendrá además un término

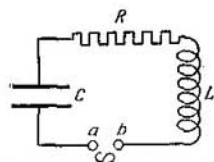


Fig. 332. Excitación de las oscilaciones forzadas en un circuito con capacidad  $C$ , resistencia óhmica  $R$  y autoinducción  $L$ .

$I_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$ ; pero este término representa una oscilación amortiguada que en la práctica cesa rápidamente y, entonces, la dependencia entre la intensidad de la corriente y el tiempo se expresa totalmente por la fórmula (2). Si la fuerza periódica exterior (1) actúa continuamente, las oscilaciones de la corriente  $I$ , según la (2), continuarán todo el tiempo que se quiera, es decir, el sistema realizará oscilaciones continuas forzadas de frecuencia  $\omega$ . Según la fórmula (9) del § 234, la amplitud  $I_0$  de esta corriente será

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}; \quad (3)$$

y alcanzará el máximo a la frecuencia de resonancia:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (4)$$

El período de las oscilaciones propias del circuito, según la fórmula (8a) del § 239, es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

de donde se ve que la resonancia tiene lugar a la frecuencia  $\omega_{\text{res}}$  un poco mayor que la frecuencia de las oscilaciones propias  $\omega_0$ .

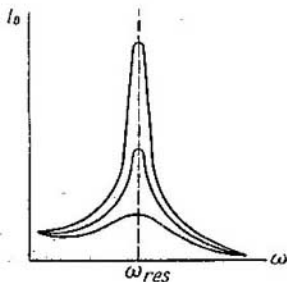
Si la resistencia óhmica es infinitamente pequeña, la frecuencia de resonancia coincide con la de las propias oscilaciones.

Cuando la frecuencia es la de resonancia, la intensidad  $I_0$  de la corriente adquiere el valor de  $I_{0\text{máx}} = \mathcal{E}_0/R$ ; y será tanto mayor, cuanto menor sea la resistencia óhmica  $R$ .

En la fig. 333 se representan varias curvas de resonancia correspondientes a diferentes valores de la resistencia óhmica  $R$ . Cuanto menor sea la resistencia  $R$ , más agudo será el máximo de la curva.

Fig. 333. Curvas de resonancia de la intensidad de la corriente  $I$ .

Así, pues, el circuito de amortiguamiento débil ofrece una resonancia aguda. Esto permite, en el caso de que sea complejo el carácter de la f. e. m. exterior, "sintonizar" este circuito según las componentes armónicas que se quiera de la f. c. m.



Efectivamente, sea una f. e. m. exterior representada por la suma de sinusoides:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{01} \text{sen}(\omega_1 t - \varphi_1) + \mathcal{E}_{02} \text{sen}(\omega_2 t - \varphi_2) + \mathcal{E}_{03} \text{sen}(\omega_3 t - \varphi_3) + \dots$$

Eligiendo una capacidad  $C$  y autoinducción  $L$  del circuito de manera que se satisfaga la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_1,$$

obtenemos que la condición de resonancia se cumplirá para la componente  $\mathcal{E}_{01} \text{sen}(\omega_1 t - \varphi_1)$ , y las oscilaciones forzadas del circuito originadas por esta componente se producirán a amplitud máxima. Las amplitudes de las oscilaciones forzadas de frecuencia  $\omega_2, \omega_3, \dots$  serán pequeñas, ya que para ellas no se cumplen las condiciones de resonancia. Variando continuamente la capacidad o la autoinducción del circuito, se le puede obligar a "responder" consecutivamente a todas las frecuencias  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ . De esta manera se puede efectuar el análisis armónico de una oscilación compleja.

Además del esquema representado en la fig. 332, para obtener oscilaciones eléctricas continuas se puede utilizar el esquema de la fig. 334, donde de nuevo se tiene un circuito con capacidad  $C$  y autoinducción  $L$ . Para simplificar, la resistencia  $R$  de todo el circuito se considera igual a cero. La f. e. m. exterior  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \text{sen} \omega t$  se aplica a los puntos  $a$  y  $b$  del circuito. De esta manera, en los puntos  $a$  y  $b$ , el circuito se bifurca y consta de dos partes conectadas en paralelo. Una de estas partes contiene la capacidad  $C$ , y la otra, la autoinducción  $L$ . La intensidad de la corriente de cada una de estas partes se obtiene de nuevo con ayuda de las fórmulas deducidas en el § 234, suponiendo en ellas  $C = \infty$ , o  $L = 0$ , respectivamente.

Según la fórmula (5) del § 234, en la rama  $aCb$  fluirá la corriente

$$I_1 = I_{01} \text{sen}(\omega t - \varphi_1). \quad (5)$$

La amplitud de esta corriente  $I_{01}$  se obtiene suponiendo  $L = 0$  y  $R = 0$  en la fórmula (9) (de la pág. 493), de donde

$$I_{01} = \mathcal{E}_0 C \omega. \quad (6)$$

La ecuación (8) del § 234 determina la fase inicial  $\varphi_1$  de esta corriente:

$$\text{tg} \varphi_1 = -\infty,$$

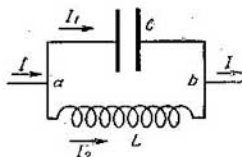


Fig. 334. Circuito con conexión en paralelo de la capacidad  $C$  y de la autoinducción  $L$ .

de donde

$$\varphi = (2k + 3/2)\pi, \text{ donde } k = 1, 2, 3, \dots$$

Por la rama  $aLb$  fluirá la corriente:

$$I_2 = I_{02} \text{ sen } (\omega t - \varphi_2), \quad (7)$$

cuya amplitud se obtiene suponiendo  $C = \infty$  y  $R = 0$  en la fórmula (9) del § 234, de donde

$$I_{02} = \frac{\mathcal{E}_0}{L\omega}. \quad (8)$$

La fase inicial  $\varphi_2$  viene determinada por la fórmula

$$\text{tg } \varphi_2 = +\infty, \text{ de donde } \varphi_2 = (2k + 1/2)\pi.$$

Así tenemos que la diferencia de fases de las corrientes de las ramas  $aCb$  y  $aLb$  es igual a  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ , es decir, las fases de estas corrientes son opuestas, y por los conductores que van a los puntos  $a$  y  $b$  fluirá una corriente de amplitud:

$$I_0 = I_{01} - I_{02}.$$

Colocando en esta ecuación los valores de  $I_{01}$  e  $I_{02}$  según las ecuaciones (6) y (8), obtenemos que

$$I_0 = \mathcal{E}_0 \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right). \quad (9)$$

Así, pues, la corriente de los conductores abastecedores es más débil que en las distintas ramas del circuito, y será igual a cero, cuando

$$C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0,$$

o cuando la frecuencia de la f.e.m. exterior sea

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

es decir, precisamente en las condiciones de resonancia. La igualdad a cero de esta corriente se obtiene por haber supuesto igual a cero la resistencia óhmica del circuito, por consiguiente, para mantener las oscilaciones del circuito no se necesita ningún suministro de energía de fuera. Si hay resistencia óhmica  $R$ , la diferencia de fases  $\varphi_1 - \varphi_2$  no será igual a  $\pi$ , y en correspondencia con ello, la amplitud de la corriente  $I_0$  incluso en las condiciones de resonancia será diferente de cero. La energía suministrada al circuito se invertirá en el mantenimiento (entretenimiento) de las oscilaciones amortiguadas. Esta energía será tanto menor cuanto menor sea la resistencia  $R$ .



Como en la resonancia aguda, la corriente de los conductores abastecedores es considerablemente más débil que las que circulan por el propio circuito, el fenómeno examinado se denomina *resonancia de corriente* (o *resonancia en paralelo*).

§ 241. Excitación de las oscilaciones continuas con ayuda del tubo catódico. Para crear una f. e. m. alterna capaz de mantener las *oscilaciones continuas* en el circuito, en la actualidad se utilizan

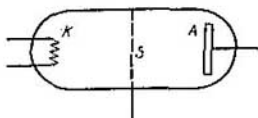


Fig. 335. Válvula de tres electrodos (triódico).

ampliamente los *tubos catódicos*. Como hemos visto en el § 172, el tubo catódico es un recipiente en que se ha hecho el vacío y donde se han introducido dos electrodos: el cátodo incandescente  $K$  y el ánodo  $A$ . El cátodo  $K$  emite electrones que, bajo la acción del campo acelerador, se desplazan hacia el ánodo formando la corriente electrónica (termoiónica). Esta clase de tubo se denomina *tubo* (o *válvula*) *de dos electrodos* o *diodo*. Para generar oscilaciones continuas se utiliza generalmente el *tubo de tres electrodos* o *triódico*, el cual consta de cátodo  $K$ , ánodo  $A$  y una rejilla  $S$  introducida entre ellos (fig. 335). Los electrones emitidos por el cátodo pueden pasar por los huecos de la rejilla y alcanzar de esta manera el ánodo.

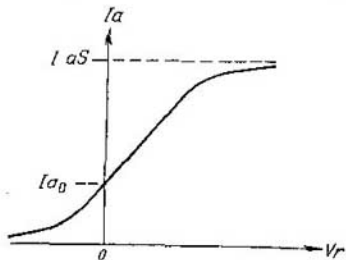


Fig. 336. Dependencia entre la corriente anódica  $I_a$  y la tensión de rejilla  $V_r$ .

Si a la diferencia dada de potencial entre el cátodo  $K$  y el ánodo  $A$  se aplica a la rejilla un potencial que retenga a los electrones emitidos por el cátodo, la corriente que llega al ánodo ("corriente anódica" o "corriente de placa") se debilita. Y viceversa, si a la rejilla se aplica una tensión que acelere los electrones, la corriente anódica se intensifica. Así tenemos que la magnitud de la corriente anódica depende del potencial de la rejilla. En la fig. 336 se representa la dependencia entre la intensidad de la corriente anódica y la "tensión de rejilla"  $V_r$ , es decir, la diferencia de potencial entre

el cátodo  $K$  y la rejilla  $S$ . En este caso se supone que la tensión anódica  $V_a$  (diferencia de potencial entre el cátodo  $K$  y el ánodo  $A$ ) es constante. Si la tensión de la rejilla es igual a cero, hay cierta corriente anódica  $I_{a0}$ , creada por la tensión anódica dada  $V_a$ . Para que esta corriente disminuya hasta desaparecer, hay que aplicar a la rejilla una tensión determinada de repulsión. Si la tensión de la rejilla es de aceleración de los electrones, la corriente anódica aumenta y, por último, alcanza el valor de saturación  $I_{as}$ . La característica de la corriente anódica es lineal en su parte media. En el triodo, la

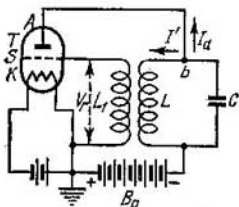


Fig. 337. Excitación de oscilaciones continuas según el esquema de acoplamiento de reacción.

corriente anódica varía intensamente a pequeñas variaciones de la tensión de rejilla. Esto es debido a que, por la poca distancia entre la rejilla y el cátodo, la tensión de rejilla crea una intensidad del campo bastante grande cerca del cátodo. La mayoría de las líneas de fuerza que salen del ánodo, terminan en la rejilla sin alcanzar al cátodo. Por eso, la tensión anódica del triodo influye poco en la magnitud de la corriente anódica. Parte de los electrones emitidos por el cátodo van a parar a la rejilla creando de esta manera la corriente de rejilla. Sin embargo, esta corriente de rejilla es muy pequeña en comparación con la anódica, si la superficie de los huecos de la rejilla es grande en comparación con la ocupada por los hilos de la misma. El triodo se utiliza tanto para la excitación (generación) de oscilaciones continuas, como para el reforzamiento de las oscilaciones.

El esquema de excitación de las oscilaciones continuas mediante un tubo de tres electrodos se representa en la fig. 337. El funcionamiento de este esquema es análogo al de los sistemas mecánicos de autooscilación, por ejemplo, del péndulo del reloj, en que las oscilaciones se mantienen sin amortiguarse gracias a los impulsos del áncora. Si no se suministra energía de fuera, las oscilaciones del circuito se amortiguan debido a la gradual radiación de energía y, en parte, a la transformación de la energía en el calor de Joule-Lenz en la resistencia óhmica del circuito. En el esquema de la fig. 337, la energía se suministra al circuito  $LC$  con ayuda del tubo de tres electrodos  $T$  de la batería del ánodo  $B_a$ .

La rejilla  $S$  del tubo se conecta con la bobina  $L_1$ . La bobina está relacionada por influencia inductiva con la autoinducción  $L$  del circuito oscilante  $LC$ . Esta relación se denomina *acoplamiento de reacción*, o simplemente *reacción*, y origina la excitación de las oscilaciones continuas. Efectivamente, la variación de la intensidad

de la corriente  $I'$  del circuito oscilante crea la f. e. m. de la bobina  $L_1$ , la cual produce la variación de la tensión de rejilla  $V_r$ . Debido a la variación de la tensión de rejilla, la corriente anódica que fluye a través del triodo  $T$  procedente de la batería  $B_a$ , variará con una frecuencia igual a la de oscilación del circuito  $LC$ . Eligiendo convenientemente la fase de la tensión de rejilla, estas variaciones de la corriente anódica mantendrán las oscilaciones del circuito  $LC$ . De esta manera las oscilaciones se pueden hacer continuas a costa de la energía suministrada por la batería  $B_a$ . Se puede demostrar que, al funcionar el triodo en la parte media rectilínea de la característica, las oscilaciones generadas en el circuito oscilante son de simple carácter sinusoidal.

Excribamos la ecuación de las oscilaciones del esquema representado en la fig. 337. Al descargar el condensador  $C$ , la corriente  $I$  creada en el circuito se bifurca en el nudo  $b$  descomponiéndose en dos: corriente anódica  $I_a$  y corriente  $I'$  que fluye a través de la bobina. Considerando que las corrientes son cuasiestacionarias (véase el § 232), se obtiene para el nudo  $b$ , según la ley de Kirchhof:

$$I = I' + I_a. \quad (1)$$

Llamemos  $V$  a la diferencia de potencial de las armaduras del condensador  $C$  y  $R$ , a la resistencia óhmica de la bobina  $L$ . Se desprecia la resistencia de los conductores. Según la segunda ley de Kirchhof, la suma de las caídas de potencial del contorno  $LC$  es  $RI' + V$  y debe ser igual a la suma de las f. e. m. que actúan en este contorno. En el contorno  $LC$  actúa solamente la f. e. m. de autoinducción  $-L \frac{dI'}{dt}$ , de donde

$$RI' + V = -L \frac{dI'}{dt}. \quad (2)$$

La diferencia de potencial  $V$  de las armaduras del condensador está relacionada en cada instante con la carga  $Q$  de una de las armaduras mediante la ecuación  $V = \frac{Q}{C}$ , donde  $C$  es la capacidad del condensador. Basándonos en esto, la ecuación (2) se puede escribir de la manera siguiente:

$$L \frac{dI'}{dt} + RI' + \frac{Q}{C} = 0.$$

Diferenciando esta ecuación en función de  $t$  obtenemos que

$$L \frac{d^2I'}{dt^2} + R \frac{dI'}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = 0.$$

Observando que  $\frac{dQ}{dt} = I$  y utilizando la ecuación (1), hallamos que

$$L \frac{d^2I'}{dt^2} + R \frac{dI'}{dt} + \frac{1}{C} (I' + I_a) = 0. \quad (3)$$

La intensidad de la corriente anódica  $I_a$ , como se ha indicado, depende de la tensión de rejilla  $V_r$ . Esta dependencia viene representada por la curva de la fig. 336. En la parte rectilínea del gráfico, la dependencia será, naturalmente, lineal. Despreciando el valor de  $I_{a0}$ , en el caso más simple se puede escribir esta depen-

dencia de la manera siguiente:  $I_a = kV_r$ , donde  $k$  es una magnitud constante. Llamando  $L_{12}$  al coeficiente de autoinducción de las bobinas  $L$  y  $L_1$ , obtenemos que

$$V_r = -L_{12} \frac{dI'}{dt}, \text{ de donde } I_a = kV_r = -kL_{12} \frac{dI'}{dt}.$$

Colocando este valor de  $I_a$  en la ecuación (3), hallamos que

$$L \frac{d^2 I'}{dt^2} + \left( R - \frac{kL_{12}}{C} \right) \frac{dI'}{dt} + \frac{1}{C} I' = 0. \quad (4)$$

El factor de la magnitud  $dI'/dt$  es la resistencia óhmica  $R$  disminuida en la magnitud  $kL_{12}/C$ . Si se elige esta magnitud (variando el coeficiente  $L_{12}$ ) de manera que

$$R - \frac{kL_{12}}{C} = 0,$$

la ecuación (4) se transforma en:

$$L \frac{d^2 I'}{dt^2} + \frac{1}{C} I' = 0. \quad (5)$$

Es fácil ver que la solución de esta ecuación es

$$I' = A \cos \omega t,$$

donde  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ .

De esta manera tenemos que en el circuito  $LC$  se producen oscilaciones continuas de amplitud  $A$  y de frecuencia angular  $\omega$ . La obtención de esta clase de oscilaciones continuas se puede conseguir funcionando el triodo en la parte lineal de la característica, ya que sólo en este caso la ecuación (3) se transforma en la ecuación (5) de oscilaciones continuas.

En la radiotecnica moderna se utilizan diferentes tipos de generadores (osciladores) termoiónicos (o de válvulas) que fundamentalmente se distinguen entre sí por el modo de acoplamiento de reac-

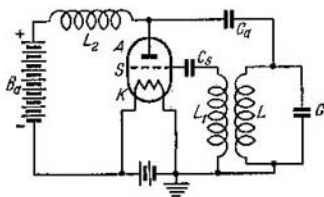


Fig. 338. Excitación de oscilaciones continuas según el esquema con alimentación anódica en paralelo.

ción. Este acoplamiento puede ser inductivo (como el representado en la fig. 337), capacitivo o autoinductivo. Además, los generadores pueden ser de alimentación en serie, cuando la válvula y el circuito oscilante están conectados en serie con la batería anódica, y de

alimentación en paralelo o en derivación, cuando la válvula y el circuito están conectados en paralelo con la batería. Por último, los esquemas pueden diferenciarse uno de otro según que en ellos se utilice una o dos válvulas. En la fig. 338 se representa un esquema de acoplamiento inductivo de reacción con alimentación anódica en paralelo. El condensador  $C_a$  se conecta para no permitir el cierre de la batería anódica a través de la bobina  $L$ ; al mismo tiempo no deja pasar la corriente de alta frecuencia al circuito oscilante  $LC$ . La función de la inducción  $L_2$  consiste en no permitir el paso de las oscilaciones de alta frecuencia a la batería anódica  $B_a$ .

§ 242. Corriente de desplazamiento. Veamos con más detalle el proceso que tiene lugar al fluir la corriente alterna por un circuito con condensador. En el caso de una corriente continua, como se ha visto, las líneas del flujo eléctrico siempre son cerradas (§ 156). No ocurre lo mismo cuando la corriente es alterna. En el dieléctrico de entre las armaduras del condensador, las cargas no pueden desplazarse, con lo cual las líneas del flujo eléctrico que llegan a la armadura del condensador, se *interrumpen* en su superficie. La corriente de conducción que fluye por el conductor que une las armaduras del condensador, resulta *interrumpida*.

Supongamos que en un instante determinado, la armadura de la izquierda  $A$  de un condensador plano (fig. 339) posee una carga positiva en su superficie con una densidad de  $+\sigma$ , y la de la derecha, una carga negativa de densidad  $-\sigma$ . Al descargar el condensador a través del conductor que une las armaduras, fluye una corriente de la armadura de la izquierda hacia la de la derecha. El valor de la densidad  $i$  de esta corriente en el interior de la armadura se obtiene tomando la derivada de la densidad de carga en función del tiempo (véase el § 155):

$$i = \frac{d\sigma}{dt} . \quad (1)$$

La corriente de esta densidad se desplaza desde la armadura de la izquierda  $A$ .

Veamos ahora qué ocurre en el espacio entre las armaduras del condensador. Si nos limitamos a las corrientes alternas de frecuencia

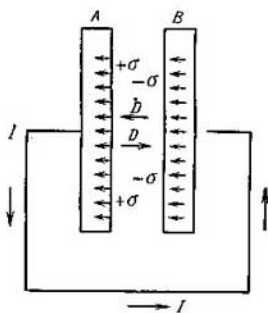


Fig. 339. Aparición de la corriente de desplazamiento entre las armaduras de un condensador.

no muy elevada, se puede determinar fácilmente la variación del campo eléctrico entre las armaduras. Efectivamente, en este caso, el valor instantáneo del campo en el interior del condensador se puede calcular basándose en los valores instantáneos de las densidades superficiales de las cargas. Como se deduce del § 144, el valor del vector  $\mathbf{D}$  de inducción eléctrica entre las armaduras del condensador es

$$D = 4\pi\sigma.$$

Derivando en función del tiempo los términos de la derecha y de la izquierda de esta ecuación, obtenemos que

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt},$$

o, llamando  $\dot{D}$  a la derivada de la inducción eléctrica en función del tiempo, tenemos que

$$\frac{1}{4\pi} \dot{D} = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (2)$$

En el caso examinado el vector  $\dot{\mathbf{D}}$  va dirigido desde la armadura  $B$  a la  $A$ . Efectivamente, al descargar el condensador, el campo entre sus armaduras disminuye, de donde se deduce que la derivada respecto al tiempo  $dD/dt$  es negativa, es decir, el vector  $\dot{\mathbf{D}}$  va en sentido contrario al de  $\mathbf{D}$ , que, como se sabe, va de izquierda a derecha en el espacio entre las armaduras. Por lo tanto se llega a la conclusión de que en el interior de la armadura  $A$  van dirigidas hacia la izquierda las líneas del vector de densidad de la corriente de conducción  $\mathbf{i}$ ; mientras que en el espacio entre las armaduras, en la misma dirección van las líneas del vector  $\dot{\mathbf{D}}$ . Según las igualdades (1) y (2), los valores de los vectores  $\mathbf{i}$  y  $\frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}}$  son iguales. Así tenemos que las líneas de densidad de la corriente  $\mathbf{i}$  y las líneas del vector  $\dot{\mathbf{D}}$  dividido por  $4\pi$ , se sustituyen mutuamente.

Introduzcamos la notación:

$$\frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{i}_d. \quad (3)$$

Entonces resulta que las líneas de densidad de la corriente de conducción  $\mathbf{i}$  en el interior de una armadura conductora se transforman continuamente en líneas del vector  $\mathbf{i}_d$  entre las armaduras. Maxwell, que fue el primero en introducir la magnitud  $\mathbf{i}_d$ , la llamó densidad de la corriente de desplazamiento. El nombre de "corriente de desplazamiento" fue debido al concepto, que actualmente ha perdido el valor, de que la aparición de las fuerzas electrostáticas estaba relacionada con la deformación mecánica del medio elástico, del éter.

Así, la continuidad de las líneas del flujo de corriente resulta restablecida formalmente, si la densidad de la corriente de conducción  $i$  de los conductores se compara con la densidad de la corriente de desplazamiento  $i_d$  de los dieléctricos determinada por la variación del campo eléctrico con el tiempo. No obstante, en la realidad se trata no sólo de la analogía formal entre la corriente de conducción y la de desplazamiento. El desarrollo ulterior del estudio de los fenómenos electromagnéticos ha demostrado que la corriente de desplazamiento explica ciertas propiedades reales del campo electromagnético. Según la hipótesis enunciada por Maxwell, la corriente de desplazamiento crea en el espacio circundante un campo magnético de la misma naturaleza que el campo magnético de la corriente equivalente de conducción. Esta hipótesis, en la actualidad se ha confirmado completamente por numerosos experimentos de verificación de las consecuencias que se deducen de ella.

Hay que tener en cuenta que la corriente de desplazamiento es equivalente a la corriente de conducción solamente en lo que respecta a la capacidad de crear un campo magnético. En todos los demás casos la corriente de desplazamiento no se puede equiparar a la corriente de conducción; por ejemplo, al fluir la corriente de desplazamiento no se desprende calor de Joule-Lenz.

Además de la corriente de conducción y la de desplazamiento, Maxwell introdujo en su análisis el concepto de corriente total, cuya densidad  $u$  se determina como la suma geométrica de la densidad de la corriente de conducción y la de la corriente de desplazamiento:

$$u = i + i_d \quad (4)$$

Como se puede demostrar, la corriente total siempre es cerrada. En nuestro ejemplo, suponiendo que la frecuencia de las oscilaciones no es muy elevada, la propiedad de ser cerrada la corriente total se deduce de las siguientes razones: en el conductor que une las armaduras del condensador, la corriente total se puede considerar igual a la corriente de conducción; entre las armaduras del condensador, la corriente total es igual a la corriente de desplazamiento; y como en la superficie de las armaduras, según las ecuaciones (1) y (2), las densidades de la corriente de desplazamiento y de la corriente de conducción son iguales y del mismo sentido, la corriente total en la superficie no varía.

Rigurosamente hablando, la corriente de desplazamiento tampoco es igual a cero en el interior del conductor. Su magnitud se puede determinar de la siguiente manera:

$$i_d = \frac{\dot{D}}{4\pi} = \frac{\epsilon \dot{E}}{4\pi}.$$

La intensidad del campo eléctrico  $E$  de una descarga periódica es una función periódica del tiempo,  $E = E_0 \sin \omega t$ , y su derivada respecto al tiempo es  $\dot{E} = E_0 \omega \cos \omega t$ , de donde la densidad de la corriente de desplazamiento  $i_d$  será

$$i_d = \frac{1}{4\pi} \epsilon \omega E_0 \cos \omega t.$$

La densidad de la corriente de conducción se expresa en función de la intensidad del campo  $E$  según la ley de Ohm:

$$i = \sigma E = \sigma E_0 \sin \omega t,$$

donde  $\sigma$  es la conductibilidad del conductor.

La relación de las amplitudes de las densidades de las corrientes de desplazamiento y de conducción es

$$\frac{i_d}{i} = \frac{\omega \epsilon}{4\pi \sigma}.$$

Para los conductores metálicos,  $\sigma$  es una magnitud del orden de  $10^{17}$  unidades CGSE. Mediante mediciones indirectas, se ha deducido que la constante dieléctrica de los metales es una magnitud no mayor de 10. De aquí que para  $\omega \approx 10^7$  seg, tengamos la relación  $\frac{\omega \epsilon}{\sigma} = 10^{-9}$ , de donde se ve que en los conductores metálicos se puede despreciar la corriente de desplazamiento por su pequeñez en comparación con la de conducción.

§ 243. **Campo electromagnético.** Según la hipótesis de Maxwell citada en el párrafo anterior, la corriente de desplazamiento crea, lo mismo que la de conducción, un campo magnético. Pero la corriente de desplazamiento, cuya densidad es

$$i_d = \frac{1}{4\pi} \dot{D},$$

surge cada vez que es diferente de cero la derivada del vector de inducción eléctrica  $D$  respecto al tiempo, es decir, cuando haya un campo eléctrico que varíe con el tiempo. De esta manera llegamos a la siguiente conclusión: *cualquier campo eléctrico que varíe con el tiempo crea un campo magnético.*

El campo electrostático, es decir, el campo de cargas eléctricas de magnitud invariable e inmóviles unas respecto de las otras, actúa solamente sobre las cargas eléctricas; pero no revela ninguna clase de acción magnética. Sin embargo, si las cargas se desplazan unas respecto de las otras, o varían de magnitud, variará el campo eléctrico creado por ellas, y entonces se percibirán las acciones magnéticas al mismo tiempo que las eléctricas.

En un caso particular se puede concebir un campo eléctrico que aumente (o disminuya) uniformemente, en cuyo caso la corriente de desplazamiento sería constante y crearía un campo magnético constante. Sin embargo, en la práctica, un campo eléctrico variable siempre tiene una derivada variable respecto al tiempo, es decir crea una corriente de desplazamiento variable, de lo cual se deduce



que el campo magnético que aparece también varía según el tiempo. De esta manera, rigurosamente hablando, el espacio ocupado por el campo eléctrico variable, al mismo tiempo está ocupado por un campo magnético variable.

De los razonamientos ulteriores se ve que el campo magnético variable también crea, a su vez, un campo eléctrico.

Sea un campo magnético variable caracterizado por el vector de inducción  $\mathbf{B}$  y su derivada respecto al tiempo  $d\mathbf{B}/dt$ , que llamaremos  $\dot{\mathbf{B}}$ . Supongamos que en este campo hay un contorno cerrado conductor e inmóvil. Debido a la variación del vector de inducción magnética  $\mathbf{B}$ , el flujo de inducción magnética  $\Phi$  a través de la superficie limitada por este contorno, variará, y en el contorno se creará una f. e. m. de inducción  $\mathcal{E}_i$ . La magnitud de esta f. e. m.  $\mathcal{E}_i$ , según la ley de Faraday, es igual a la derivada respecto al tiempo del flujo de inducción magnética  $d\Phi/dt$ , es decir, en nuestro caso (en que el contorno está inmóvil) se determina por la derivada respecto al tiempo del vector de inducción  $\dot{\mathbf{B}}$ . La creación de la f. e. m. en el conductor indica que ha aparecido en él una fuerza eléctrica que obliga a las cargas libres del conductor a desplazarse en un sentido determinado. Por consiguiente llegamos a la conclusión de que la presencia de un campo magnético variable con el tiempo origina la aparición de una fuerza eléctrica en la región donde se halla el conductor. Maxwell, generalizando este resultado, enunció que *el campo eléctrico aparece en todos los puntos del espacio en que haya un campo magnético que varíe con el tiempo, independientemente de que haya o no conductores*. Según el concepto de Maxwell, el conductor en que aparece una f. e. m. sólo es el instrumento en que se revelan las fuerzas eléctricas.

Así, pues, se puede resumir diciendo que *cualquier campo magnético que varíe con el tiempo está relacionado con la presencia de un campo eléctrico*.

El campo magnético constante, es decir, el campo de corrientes continuas que fluyen por conductores inmóviles unos respecto de otros, o el campo de imanes permanentes inmóviles unos respecto de otros, actúa solamente sobre las corrientes o sobre los imanes; no actúa de ninguna manera sobre las cargas eléctricas inmóviles. Pero si el campo magnético varía con el tiempo, junto a las acciones magnéticas aparecen acciones eléctricas.

Prácticamente siempre se tienen campos magnéticos variables en que además del vector de inducción magnética  $\mathbf{B}$ , es variable también su derivada respecto al tiempo  $\dot{\mathbf{B}}$ . Pero en este caso aparecerá también un campo eléctrico variable. De aquí que, en general, el espacio ocupado por un campo magnético variable, al mismo tiempo está ocupado por un campo eléctrico variable.

Ambos campos variables, el eléctrico y el magnético, están invariablemente relacionados entre sí y forman el *campo electromagnético*.

El campo electromagnético tiene carácter *turbulento* (*turbillonario*). Se dice que el campo de un vector cualquiera  $\mathbf{A}$  es turbulento, si en él hay dos puntos infinitamente próximos en los cuales el vector  $\mathbf{A}$  tiene sentidos opuestos. Por ejemplo, al formarse torbellinos en un líquido o en un gas, en las proximidades del eje del torbellino, por los lados opuestos del eje, el movimiento se efectúa en sentidos opuestos.

Veamos primeramente el carácter turbulento del campo magnético. El campo magnético creado por la corriente de desplazamiento se calcula por las mismas fórmulas por que se ha calculado el campo



Fig. 340. Creación de las líneas concéntricas circulares de excitación magnética alrededor del vector de densidad de la corriente de desplazamiento  $i_d$  (a) y de la intensidad del campo eléctrico alrededor del vector  $\mathbf{B}$  (b).

magnético de la corriente de conducción (§ 193) sustituyendo solamente en ellas la densidad de la corriente de conducción por la densidad de la corriente de desplazamiento. En el campo magnético de las corrientes de desplazamiento, las líneas de la excitación magnética tienen el mismo aspecto que las de las proximidades de las corrientes análogas de conducción, es decir, siempre son cerradas y comprenden las líneas de la corriente. Supongamos que en cierto punto, el vector de densidad de la corriente de desplazamiento se representa por el vector  $i_d$  (fig. 340). Las líneas del campo magnético en las proximidades de  $i_d$  formarán circunferencias concéntricas, cuyos radios serán tanto menores, cuanto más próximas se hallen de  $i_d$ . Si en el límite pasamos a los puntos infinitamente próximos al vector  $i_d$ , la curvatura de las líneas de la excitación magnética será infinitamente grande y, por consiguiente, siempre se podrán hallar dos puntos de estos infinitamente próximos, en los cuales la excitación magnética tiene sentido opuesto.

El campo eléctrico creado por un campo magnético variable también es de carácter turbulento. Supongamos que en cierto punto,

la variación del vector de inducción magnética con el tiempo se representa por el vector  $\dot{\mathbf{B}}$  (fig. 340, b). Si rodeamos el vector  $\dot{\mathbf{B}}$  por un contorno conductor, cuyo plano sea perpendicular al vector  $\dot{\mathbf{B}}$ , la f. e. m. de inducción que se crea en este contorno, según la regla de Lenz, irá dirigida como indican las flechas de líneas de puntos de la fig. 340. En cada punto dado, la f. e. m. será perpendicular a la normal trazada desde el punto al vector  $\dot{\mathbf{B}}$ . Según lo dicho, la aparición de la f. e. m. de inducción es debida a la existencia de un campo eléctrico, cuya intensidad  $\mathbf{E}$  en cada punto tiene el mismo sentido que la f. e. m. Por consiguiente, las líneas de la intensidad del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  forman alrededor del vector  $\dot{\mathbf{B}}$  circunferencias concéntricas. Para los puntos infinitamente próximos al vector  $\dot{\mathbf{B}}$ , la curvatura de las circunferencias será infinitamente grande y, por lo tanto, habrá pares de puntos vecinos de esta clase en los que los vectores de intensidad eléctrica sean de sentido opuesto. Así tenemos que *el campo eléctrico creado por un campo magnético variable, tendrá carácter turbulento*. Sus líneas de intensidad serán siempre cerradas. Con ello se diferencia esencialmente del campo electrostático de las cargas inmóviles, cuyas líneas de intensidad, como se ha indicado varias veces, no son cerradas: empiezan en unas cargas y terminan en otras. De esta manera, el campo eléctrico puede ser tanto potencial (electrostático), como turbulento (electromagnético). El campo magnético siempre tiene carácter turbulento.

En el § 129 se ha demostrado que la expresión matemática del carácter potencial del campo electrostático es

$$\oint E_r dl = 0, \quad (1)$$

donde la integral se extiende por el contorno cerrado.

El carácter turbulento del campo magnético se expresa por la ecuación del § 198:

$$\oint H_r dl = 4\pi I. \quad (2)$$

A esta ecuación se le puede dar otra forma algo distinta. La magnitud  $I$  es la intensidad de la corriente que fluye a través de la superficie  $S$  abarcada por el contorno, a lo largo del cual se toma la integral  $\oint H_r dl$ . Si llamamos  $i_n$  a la componente de la densidad de la corriente normal a la superficie  $S$ , está claro que  $I$  puede ser representada de la manera siguiente:

$$I = \int_S i_n dS.$$

donde la integral se extiende a toda la superficie  $S$ . Teniendo esto en

cuenta, la ecuación (2) adquiere la forma:

$$\oint H_{\rho} dl = 4\pi \int_S i_n dS. \quad (2a)$$

En el caso general, según la hipótesis de Maxwell, en el término de la derecha de la (2a) debe estar la densidad total de la corriente, que se compone de la densidad de la corriente de conducción  $i$  y de la densidad de la corriente de desplazamiento  $\frac{1}{4\pi} \dot{D}$ , de donde, definitivamente tenemos que

$$\oint H_{\rho} dl = \int_S (4\pi i_n + \dot{D}_n) dS. \quad (3)$$

Si la integral  $\oint H_{\rho} dl$  se toma según el contorno que abarca a la superficie, a través de la cual no es igual a cero la corriente total, la integral de la derecha de la ecuación (3) no es igual a cero y, por consiguiente,

$$\oint H_{\rho} dl \neq 0,$$

que es lo mismo que afirmar que el campo magnético es de carácter turbulento.

(Si en cierta parte del espacio, la corriente total es igual a cero, en esta parte del espacio el campo magnético se puede caracterizar por un potencial).

Demostremos que una relación análoga tiene lugar en el campo eléctrico turbulento. Efectivamente, supongamos que en una zona del campo magnético variable hay un contorno conductor cerrado. Según la ley de inducción de Faraday, en este contorno se creará una f. e. m. de inducción:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt},$$

donde  $\Phi$  es el flujo de inducción magnética a través de la superficie  $S$  limitada por el contorno. Llamando  $B_n$  a la componente del vector de inducción magnética normal a la superficie  $S$ , obtenemos que

$$\Phi = \int_S B_n dS,$$

de donde

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d}{dt} \int_S B_n dS = - \int_S \dot{B}_n dS, \quad (4)$$

donde  $\dot{B}_n$  es la derivada de  $B_n$  respecto al tiempo, y la integral se extiende a toda la superficie  $S$ .

Según lo arriba dicho, la f. e. m. puede ser representada como la circulación de la intensidad del campo, es decir, la f. e. m.  $\mathcal{E}_i$  es

$$\mathcal{E}_i = \oint E_{\rho} dl,$$

donde la integral se extiende a todo el contorno que se examina.

Por consiguiente, la ecuación (4) se puede escribir:

$$\oint E_{\rho} dS = - \int_S \dot{B}_n dS. \quad (5)$$

Según la hipótesis de Maxwell explicada en el texto fundamental de este párrafo, la ecuación (5) se cumple independientemente de que haya o no un con-

torno conductor en el campo magnético variable que examinamos; en este último caso, la integral de la izquierda de la ecuación (5) se toma según un contorno cerrado imaginario cualquiera.

La ecuación (5) es análoga a la (3) y expresa el carácter turbulento del campo eléctrico creado debido a la existencia de un campo magnético variable. Si no hay campo magnético, o si es uniforme,  $\dot{B}_n = 0$ , la ecuación (5) se transforma en la (1); en este caso el campo eléctrico  $E$  puede crearse sólo si hay cargas eléctricas inmóviles y de magnitud invariable, en cuyo caso el campo es potencial.

§ 244. Ecuaciones de Maxwell. El cálculo exacto de los campos electromagnéticos se efectúa con ayuda de las ecuaciones propuestas por Maxwell y que se basan en los conceptos indicados de la naturaleza de los fenómenos electromagnéticos. Las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones diferenciales que relacionan entre sí las derivadas respecto a las coordenadas y al tiempo de las magnitudes que caracterizan el campo electromagnético. Nosotros examinaremos un cálculo simplificado de las ecuaciones de Maxwell.

Las ecuaciones de Maxwell se dividen en dos sistemas. El primer sistema relaciona las derivadas espaciales de las proyecciones del vector de excitación magnética con las proyecciones de las densidades de las corrientes de desplazamiento y de conducción. El segundo sistema de ecuaciones de Maxwell relaciona las derivadas espaciales de las proyecciones del vector de intensidad del campo eléctrico con las derivadas temporales de las proyecciones del vector de inducción magnética.

Hallemos primeramente el primer sistema de ecuaciones de Maxwell. Sea  $u$  el vector de la densidad de la corriente total en cierto instante de tiempo y en una pequeña región del espacio. Esta densidad se compondrá de la densidad de la corriente de conducción  $i$  y de la densidad de la corriente de desplazamiento

$\frac{1}{4\pi} \dot{D}$ , de donde,

$$u = i + \frac{1}{4\pi} \dot{D}. \quad (1)$$

Según la hipótesis de Maxwell, las dos corrientes, de conducción y de desplazamiento, desempeñan la misma función en la creación del campo magnético. Para determinar el campo magnético creado por estas corrientes veamos primeramente la proyección del vector  $u$  sobre el eje  $OZ$  (fig. 341). Como la excitación magnética creada por la corriente siempre es perpendicular a la dirección de la corriente (véase el § 192), la proyección de la densidad de la corriente  $u_z$  estará relacionada solamente con las proyecciones  $H_x$  y  $H_y$  de la excitación magnética.

Sea un pequeño contorno rectangular  $abcd$  de lados  $dx$  y  $dy$  en el plano  $OXY$ . Calculemos la circulación  $H$  en este contorno. En el lado  $ab$  tenemos que

$$A_{ab} = -H_y dy,$$

donde  $H_y$  es la proyección de la excitación magnética  $H$  determinada para el lugar donde está el lado  $ab$ . El signo menos indica que el desplazamiento se realiza en el sentido negativo del eje  $OY$ .

En el lado  $bc$  tenemos que

$$A_{bc} = H_x dx,$$

donde  $H_x$  es la magnitud de la proyección  $H_x$  en el lugar en que se halla el lado  $bc$ .

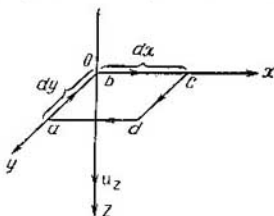


Fig. 341. Representación gráfica para determinar el primer sistema de ecuaciones de Maxwell.

En el caso de un campo magnético variable, el valor de la excitación  $H$  en el lugar en que se halla el lado  $cd$ , es diferente del correspondiente a la región donde se halla el lado  $ab$ . Llamémosle  $H'$ , de donde en el lado  $cd$  obtenemos que

$$A_{cd} = H' y dy.$$

Es evidente que el incremento de la proyección  $H_y$  en la distancia entre los lados  $ab$  y  $cd$  se puede representar como  $\frac{\partial H_y}{\partial x} dx$ , de donde  $H'_y = H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx$  y, por consiguiente,

$$A_{cd} = \left( H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx \right) dy.$$

De la misma manera obtenemos para  $da$ :

$$A_{da} = - \left( H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy \right) dx.$$

La circulación total por el contorno cerrado  $abcd$  es igual a la suma:

$$A = -H_y dy + H_x dx + \left( H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx \right) dx - \left( H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy \right) dx.$$

Abriendo paréntesis y reduciendo hallamos que

$$A = \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2)$$

Por otro lado, la circulación debe ser igual numéricamente a la intensidad de la corriente que fluye por la superficie  $abcd$  según el sentido del eje  $OZ$ , multiplicada por  $4\pi$  (véase el § 198), es decir,

$$A = 4\pi I_z.$$

Considerando constante la proyección de la densidad  $u_z$  de la corriente dentro de los límites de la superficie  $abcd$ , tenemos que

$$I_z = u_z dx dy, \text{ de donde } A = 4\pi u_z dx dy.$$

Según la ecuación (1), podemos sustituir  $u_z$  por la suma de las densidades de las corrientes de conducción y de desplazamiento  $i_z + \frac{1}{4\pi} \dot{D}_z$ , de donde para  $A$  hallamos que

$$A = (4\pi i_z + \dot{D}_z) dx dy. \quad (3)$$

Comparando las ecuaciones (2) y (3) obtenemos que

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 4\pi i_z + \dot{D}_z.$$

Ecuaciones completamente análogas se obtienen para las otras dos componentes de la densidad de la corriente total  $u_x$  y  $u_y$ , de donde todo el primer sistema de ecuaciones de Maxwell será:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= 4\pi i_x + \dot{D}_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= 4\pi i_y + \dot{D}_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 4\pi i_z + \dot{D}_z. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Así, pues, el primer sistema de ecuaciones de Maxwell determina la relación entre la densidad de la corriente de conducción  $i$ , la derivada respecto al tiempo de la inducción  $D$  del campo eléctrico y las derivadas respecto al espacio de la excitación del campo magnético  $H$  creado por las corrientes.

El sistema (4) de ecuaciones es justo, si todas las magnitudes que entran en el mismo se miden en el mismo sistema de unidades, por ejemplo, en el sistema electromagnético. Si la excitación magnética  $H$  se mide en el sistema CGSM de unidades, y las magnitudes  $i$  y  $D$ , en el sistema CGSE de unidades, en la parte de la derecha habrá que introducir el factor  $1/c$ , que corresponde al paso de las unidades electrostáticas a las unidades electromagnéticas. Entonces las ecuaciones de Maxwell tendrán la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{4\pi}{c} i_x + \frac{1}{c} \dot{D}_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{4\pi}{c} i_y + \frac{1}{c} \dot{D}_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{4\pi}{c} i_z + \frac{1}{c} \dot{D}_z \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

Al primer sistema de ecuaciones de Maxwell hay que añadir la ecuación que relacione el vector de inducción eléctrica  $D$  con la distribución de la densidad de las cargas eléctricas libres  $\rho$ . Según lo dicho en el § 144, esta ecuación tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 4\pi\rho. \quad (5)$$

Obsérvese que el vector de inducción eléctrica  $D$  está relacionado con la intensidad del campo eléctrico mediante la ecuación  $D = \epsilon E$ . La permeabilidad magnética del medio  $\mu$  no entra en el primer sistema de ecuaciones de Maxwell, ya que la excitación magnética del campo creado por las corrientes no depende (en los cuerpos magnéticos uniformes que llenan por completo el espacio, donde el campo es diferente de cero) de la permeabilidad magnética del medio (véase lo dicho en el § 202).

Como se sabe del cálculo vectorial, las expresiones de la izquierda de las ecuaciones (4) o (4a) de Maxwell son componentes de la "rotación" del vector  $H$ ; por lo tanto, en la forma vectorial, el primer sistema de ecuaciones de Maxwell se puede escribir así:

$$\text{rot } H = \frac{4\pi}{c} i + \frac{1}{c} \dot{D}. \quad (4b)$$

A esta ecuación se añade la (5) en forma vectorial:

$$\text{div } D = 4\pi\rho. \quad (5a)$$

El segundo sistema de ecuaciones de Maxwell se obtiene utilizando la generalización de la ley de inducción de Faraday dada por Maxwell. Como se ha indicado en la pág 527 según la generalización de Maxwell, las fuerzas eléctricas aparecen al variar el vector de inducción magnética  $B$  independientemente de que haya o no un contorno conductor. La circulación de  $E$  por un contorno cerrado es igual numéricamente a la variación con el tiempo del flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por el contorno [fórmula (5) del § 243]. Calculemos esta circulación para un cuadro rectangular cerrado, análogo al considerado al determinar el primer sistema de ecuaciones de Maxwell.

Sea  $\vec{B}$  el vector que caracteriza, en un instante de tiempo, la variación del campo magnético en cierta región pequeña del espacio. Para determinar el campo

eléctrico creado por este campo magnético variable, veamos primeramente la proyección del vector  $\vec{B}$  sobre el eje  $OZ$  (fig. 342).

Como la magnitud de la f. e. m. inducida se determina por la variación de la componente del vector de inducción magnética normal a la superficie del contorno dado, la proyección  $\dot{B}_z$  estará relacionada solamente con las proyecciones  $E_x$  y  $E_y$  de la intensidad del campo eléctrico.

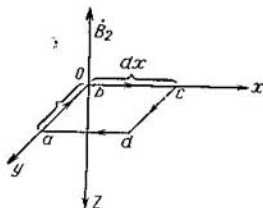


Fig. 342. Representación gráfica para determinar el segundo sistema de ecuaciones de Maxwell.

hecho al calcular la circulación de la excitación magnética cuando se ha determinado el primer sistema de ecuaciones de Maxwell, obtenemos para los sectores  $cb$  y  $da$ , respectivamente:

$$A_{cb} = \left( E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \right) dy, \quad A_{da} = - \left( E_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \right) dx.$$

De aquí que la circulación total por todo el contorno cerrado  $abcd$ , sea

$$A = \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (6)$$

Por otro lado, la circulación es igual a la derivada con respecto al tiempo del flujo de inducción magnética que atraviesa el contorno  $abcd$ , con signo negativo:

$$A = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Pero como el flujo  $\Phi$  a través del contorno  $abcd$  es igual a  $B_z dx dy$ , tenemos que

$$- \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \dot{B}_z dx dy. \quad (7)$$

Igualando las ecuaciones (6) y (7) obtenemos que

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = - \dot{B}_z.$$

De manera análoga se obtiene la ecuación con las otras dos componentes de la derivada respecto al tiempo  $\dot{B}_x$  y  $\dot{B}_y$  del vector de inducción magnética. En defi-

Sea un pequeño contorno rectangular y cerrado  $abcd$  en el plano  $OXY$  y de lados  $dx$  y  $dy$ . Calculemos la circulación de  $E$  según este contorno:

$$A_{ab} = -E_y dy,$$

donde  $E_y$  es la proyección de la intensidad del campo eléctrico  $E$  del lugar en que se halla el sector  $ab$ . El signo menos indica que el desplazamiento se efectúa en sentido contrario al del eje  $OY$ .

En el sector  $bc$ , de manera análoga, hallamos que

$$A_{bc} = E_x dx.$$



nitiva, el segundo sistema de ecuaciones de Maxwell es

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\dot{B}_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\dot{B}_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\dot{B}_z, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Así, pues, el segundo sistema de ecuaciones de Maxwell establece la relación entre la derivada respecto al tiempo del vector de inducción magnética  $\mathbf{B}$  y las derivadas respecto al espacio de la intensidad del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  creado por la variación del campo magnético.

El sistema (8) de ecuaciones es justo si todas sus magnitudes se miden en el sistema *CGSM*. Si la intensidad del campo eléctrico  $E$  se mide en el sistema *CGSE* de unidades y la inducción magnética  $B$ , en el sistema *CGSM* de unidades, a la derecha habrá que introducir el factor  $1/c$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \dot{B}_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \dot{B}_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{1}{c} \dot{B}_z. \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

Al segundo sistema de ecuaciones de Maxwell hay que añadir la ecuación correspondiente a que las líneas del vector de inducción son siempre cerradas. Esta ecuación, según lo dicho en el § 200, es

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

En la forma vectorial, el segundo sistema de ecuaciones de Maxwell (8a) y la ecuación (9) adquieren la forma:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, \quad (8b)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (9a)$$

Los sistemas primero y segundo de las ecuaciones de Maxwell deben resolverse juntamente. El primer sistema de ecuaciones permite determinar, dadas las densidades  $i$  de las corrientes y las densidades volumétricas de las cargas eléctricas  $\rho$ , el campo magnético creado por ellas. El segundo sistema permite determinar el campo eléctrico turbulento creado por el campo magnético variable con el tiempo. En este caso hay que tener en cuenta que la relación entre los vectores  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  se determina por la ecuación:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio; y la relación entre los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  se determina mediante la ecuación:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

donde  $\epsilon$  es la constante dieléctrica.

En el caso en que el medio no sea homogéneo, en las líneas divisorias de las diferentes zonas del medio deben satisfacerse las condiciones límites obtenidas para el vector  $D$  en el § 144, y para el vector  $B$  en el § 206:

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2};$$

donde los subíndices  $n$  y  $t$  indican que se toma la componente normal o tangencial del vector correspondiente.

Por último, si el medio es conductor, la densidad de la corriente de conducción  $i$  satisface la ley de Ohm:

$$i = \sigma (E + E'),$$

donde  $\sigma$  es la conductibilidad del medio, y  $E'$ , la intensidad del campo creado por generadores exteriores.

§ 245. Ecuaciones de Maxwell — Lorentz. En la teoría de Maxwell, las propiedades de la sustancia se caracterizan mediante tres constantes: constante dieléctrica  $\epsilon$ , permeabilidad magnética  $\mu$  y conductibilidad  $\sigma$ . Como no hay cargas magnéticas, no puede haber analogía magnética de la conductibilidad de la sustancia. Las cargas eléctricas vienen determinadas por la densidad de su distribución.

El campo electromagnético es originado por la presencia de estas cargas y sus movimientos. Así tenemos que la teoría de Maxwell no examina la estructura atómica de la sustancia y describe formalmente su influencia sobre el campo electromagnético mediante las constantes  $\epsilon$ ,  $\mu$  y  $\sigma$ . La estructura de la sustancia la tuvo en cuenta Lorentz en la teoría electrónica. Del punto de vista de la teoría de Lorentz, el espacio ocupado por la sustancia se diferencia del espacio vacío en que lleva incrustadas cargas elementales positivas y negativas por separado. Las cargas elementales negativas son los electrones, y las positivas, los núcleos de los átomos. Los electrones junto con los núcleos forman átomos neutros o iones. Los átomos y los iones pueden formar parte de las moléculas. Los electrones, en el interior de los átomos o de las moléculas, se mueven según órbitas cerradas y pueden también desplazarse en el interior de los átomos o de las moléculas, causando su polarización. En los conductores, parte de los electrones se halla en estado libre y, al desplazarse, crea la corriente de conducción. Los campos eléctrico y magnético son originados por estas cargas y por sus movimientos.

Debido a la dimensión microscópica de las cargas, los campos varían notablemente de un punto a otro a distancias comparables con las dimensiones de los átomos. Así, en las proximidades de un electrón o ion aislado, el campo eléctrico es muy intenso, mientras que en la parte media de la distancia entre dos electrones vecinos puede ser igual a cero. De esta manera, los campos eléctrico y magnético examinados en la teoría de Lorentz son de carácter microscópico. Llamemos  $e$  y  $h$  respectivamente la intensidad y excitación magnética de estos campos para diferenciarlas de las magnitudes macroscópicas medias que figuran en la teoría de Maxwell. Estos campos tienen lugar en el espacio entre dos cargas independientes, es decir, la teoría de Lorentz examina de hecho solamente el campo en el vacío. Por eso, en la teoría de Lorentz se analiza solamente un par de vectores: la intensidad del campo eléctrico  $e$  y la excitación  $h$  del campo magnético, en lugar de dos pares de vectores  $E$ ,  $B$ ,  $H$  y  $D$ , que entran en las ecuaciones de Maxwell.

Cualquier corriente eléctrica, según la teoría electrónica de Lorentz, es una corriente de convección debido al movimiento de las cargas elementales. La densidad de esta corriente es igual a  $\Sigma \rho v$ , donde  $\rho v$  es la corriente creada por una carga elemental, y la suma se extiende a todas las cargas elementales ( $\rho$  es la densidad de una carga, que es igual a cero fuera de la propia carga, y  $v$ , su vector de velocidad).

De esta manera tenemos que para el espacio vacío entre las cargas, las ecuaciones de Maxwell serán:

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \Sigma \rho \mathbf{v} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{e}}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi \Sigma \rho, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{h}}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0. \quad (4)$$

En esta forma, las ecuaciones se denominan *ecuaciones de Maxwell-Lorentz*.

Los vectores  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  que entran en las ecuaciones de Maxwell-Lorentz, no se pueden medir directamente, ya que no se pueden medir las intensidades ni las excitaciones de los campos entre los átomos y en el interior de los propios átomos o moléculas. Por eso, para pasar a magnitudes que se puedan medir, hay que considerar el valor medio de las magnitudes que entran en las ecuaciones (1)–(4). La intensidad  $\mathbf{e}$  y excitación  $\mathbf{h}$  medias, las densidades de las cargas  $\Sigma \rho$  y la corriente  $\Sigma \rho \mathbf{v}$ , hay que tomarlas para volúmenes grandes en comparación con los átomos independientes; pero que sean lo suficientemente pequeñas, para que todas las magnitudes macroscópicas no varíen notablemente dentro de sus límites. Este valor medio hay que considerarlo para intervalos de tiempo grandes en comparación con el período de los movimientos intraatómicos; pero lo suficientemente pequeños, para que las magnitudes macroscópicas no varíen notablemente en estos intervalos de tiempo.

Llamemos  $\bar{\mathbf{e}}$ ,  $\bar{\mathbf{h}}$ ,  $\bar{\Sigma \rho}$  y  $\bar{\Sigma \rho \mathbf{v}}$  respectivamente a estas magnitudes medias. En este caso, las ecuaciones de Maxwell-Lorentz serán

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{h}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\Sigma \rho \mathbf{v}} + \frac{1}{c} \dot{\bar{\mathbf{e}}}, \quad (1a)$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{e}} = 4\pi \bar{\Sigma \rho}, \quad (2a)$$

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{e}} = -\frac{1}{c} \dot{\bar{\mathbf{h}}}, \quad (3a)$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{h}} = 0. \quad (4a)$$

Estas ecuaciones deben coincidir con las de Maxwell.

Es fácil ver que las ecuaciones (3a) y (4a) coinciden con el segundo sistema de ecuaciones de Maxwell [ (8b) y (9a) del § 244], si se considera que

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{h}}.$$

De aquí, según lo dicho en los §§ 145 y 208, se obtiene que *la intensidad macroscópica del campo eléctrico E es la intensidad microscópica media del campo e, y la inducción magnética B es la excitación microscópica media h del campo magnético*. Esto corresponde a la circunstancia arriba indicada de que, cuando hay un dieléctrico, la intensidad del campo eléctrico E viene determinada tanto por las cargas "exteriores" introducidas en el medio dieléctrico, como por la polarización del propio medio; si hay un cuerpo magnético, la inducción magnética B viene determinada tanto por las corrientes, como por la "magnetización" del medio. De esto se deduce otra vez la analogía entre la intensidad del campo eléctrico E y la inducción magnética B.

No obstante, en esta comparación de los vectores  $\bar{\mathbf{e}}$  y  $\bar{\mathbf{h}}$  con los E y B puede parecer que las ecuaciones (1a) y (2a) no corresponden al primer sistema de ecuaciones de Maxwell. Pero un análisis más profundo demuestra que en este caso hay coincidencia. Para ello, primeramente hay que tener en cuenta que el vector  $\bar{\Sigma \rho \mathbf{v}}$  estima no solamente el transporte de cargas libres que originan la

aparición de la densidad de la corriente de conducción  $i$ , sino también los movimientos intratómicos de las cargas y la variación con el tiempo de la polarización de los átomos y de las moléculas. En segundo lugar, la densidad macroscópica de las cargas libres  $\rho$  no coincide con la densidad media de las cargas elementales  $\bar{\Sigma}\rho$  ya que en aquélla no entra la parte  $\bar{\Sigma}\rho$  que consiste en la polarización del dieléctrico.

§ 246. **Ondas electromagnéticas.** Como se ha visto, la formación de los campos eléctrico o magnético variables acarrea la aparición de los correspondientes campos turbulentos magnético o eléctrico. Si este campo electromagnético se crea en una región limitada de espacio, se propaga, como enseña la experiencia, por el resto de espacio a una velocidad finita. Esta velocidad es muy grande y en el vacío coincide con la de la luz ( $3 \cdot 10^{10}$  cm/seg). En los casos en que el campo electromagnético creado es de carácter periódico, la propagación de este campo es ondulatoria. El carácter ondulatorio de la propagación del campo electromagnético se deduce de la teoría general de los fenómenos electromagnéticos de Maxwell enunciada en 1863. Hertz en 1888, fue el primero en estudiar experimentalmente las ondas electromagnéticas.

Examinemos el proceso de formación de ondas electromagnéticas primeramente según el esquema teórico más simple, y después indicando los métodos técnicos de su realización. Supongamos que tenemos un circuito en el cual, de una manera u otra, se mantienen oscilaciones eléctricas. Sean  $C$  la capacidad y  $L$  el coeficiente de autoinducción que caracterizan a este circuito. Si las oscilaciones del circuito se producen con un período  $T$  igual al período de las oscilaciones propias, la magnitud de este período viene determinada por la fórmula (2) del § 239:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Debido a estas oscilaciones, en la región del circuito se crean campos variables eléctrico y magnético. Por ejemplo, si se examina el espacio entre las armaduras de un condensador, en este espacio variará periódicamente, con un período  $T$ , la intensidad del campo eléctrico y la magnitud de la corriente de desplazamiento, debido a lo cual se creará un campo magnético turbulento y variable con el tiempo. Para que la propagación de las ondas electromagnéticas desempeñe una función perceptible, o, como se dice, para que el sistema realice radiaciones sensibles, hay que crear las condiciones para que la región en que aparece la corriente de desplazamiento y donde el vector  $\mathbf{B}$  es diferente de cero, esté lo menos aislada posible del espacio que lo rodea. Si se toma un condensador plano con una pequeña distancia entre las armaduras, con una autoinducción en forma de solenoide (fig. 343, a) y con espiras estrechamente situadas, el campo estará prácticamente casi por completo con-

centrado entre las armaduras y en el interior del solenoide. Para que aumente la radiación hay que aumentar la distancia entre las armaduras del condensador y construir la parte del circuito con autoinducción no en forma de bobina, sino en forma de un circuito

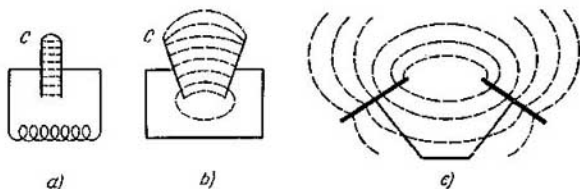


Fig. 343. Circuitos oscilantes de diferente grado de abertura.

más abierto. Aumentando la distancia entre las armaduras y sustituyendo el solenoide por un conductor rectilíneo, se obtiene un circuito del tipo representado en las fig. 343, b y c. Está claro que la capacidad y la autoinducción en esta variante de contorno serán mucho menores que en el esquema inicial y, por consiguiente, el

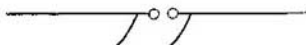


Fig. 344. Circuito oscilante formado por dos varillas con espacio disruptivo.

período de las oscilaciones propias también será menor que en el esquema inicial. Las oscilaciones en esta clase de circuitos se mantienen suministrando energía a las armaduras del condensador de cualquier generador de f. e. m. alterna. Para aumentar la diferencia de potencial inicial de carga de las armaduras, se puede hacer una interrupción en el conductor que une las armaduras del condensador. Este espacio interruptor se denomina distancia disruptiva. Gracias a la distancia disruptiva el circuito resulta interrumpido hasta el instante en que la diferencia de potencial de ambas partes del circuito alcance el valor del potencial de disrupción. Cuando se produce la descarga, en la distancia disruptiva salta una chispa que une ambas partes formando un circuito conductor, en el cual se forman las oscilaciones eléctricas. Se puede prescindir por completo de las armaduras del condensador y hacer el sistema oscilante de dos varillas metálicas separadas por la distancia disruptiva (fig. 344). Este sistema oscilante se denomina *dipolo*. La eliminación de las armaduras acarrea una disminución excesiva de la capacidad.

Para aumentar la capacidad, las varillas que forman el sistema oscilante, se pueden abastecer, en los extremos del espacio disruptivo, de esferas. Un circuito oscilante de esta clase utilizó Hertz en sus experimentos. En la fig. 345 se representa el circuito oscilante de Hertz denominado *oscilador de Hertz*. En el oscilador de Hertz, las oscilaciones se excitan uniéndolo al secundario de una bobina de inducción. En este caso, el proceso oscilatorio lleva el siguiente carácter: Cuando la diferencia de potencial alcanza una magnitud considerable y en el espacio disruptivo salta la chispa, en el oscilador

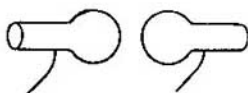


Fig. 345. Oscilador de Hertz.

se crean oscilaciones amortiguadas, cuyo período viene determinado por la capacidad y la autoinducción del oscilador. Después de cargar y descargar varias veces ambas partes del oscilador, las oscilaciones se amortiguan debido a que la energía adquirida por el oscilador al cargarlo se invierte en la radiación y en el calor de Lenz-Joule. Después de ello, el inductor carga de nuevo al oscilador y el proceso se repite. El período de carga del oscilador por el inductor se determina por el período de funcionamiento del interruptor del inductor; este período es mucho mayor que el de oscilación del oscilador. Durante la oscilación, en el propio dipolo fluye una corriente de alta frecuencia (en los experimentos de Hertz, la frecuencia era del orden de  $10^8$  Hz), la cual se refleja en los extremos del dipolo y cambia el sentido que tenía, en el opuesto: en el dipolo se produce una interferencia de la onda móvil (progresiva) y de la reflejada (inversa), debido a lo cual se forman ondas estacionarias. Esto significa que la amplitud de la corriente en distintos lugares del dipolo tiene diferentes valores, y en los extremos del dipolo la intensidad de la corriente forma el nodo, y en el centro, el vientre. De esta manera, en las distintas secciones del conductor del dipolo oscilante, la intensidad de la corriente en un mismo instante de tiempo tiene diferentes valores. Esto es un ejemplo de proceso "no cuasiestacionario". Según la teoría de Maxwell, la corriente total, es decir, el conjunto de la corriente de conducción y de la de desplazamiento, permanece la misma en todas las secciones del dipolo. De esto se deduce que en los lugares en que la corriente de conducción es igual a cero, la corriente de desplazamiento tiene el valor máximo. En el proceso periódico, la amplitud de la corriente de desplazamiento es máxima

en los lugares donde el valor de la amplitud de la intensidad eléctrica es máximo.

De esta manera tenemos que la amplitud de la intensidad eléctrica es máxima en los puntos donde la amplitud de la corriente de conducción es igual a cero. Los vientres de la intensidad eléctrica están en los extremos del dipolo, el nodo, en el centro.

La distribución de las amplitudes de la intensidad de la corriente y de las amplitudes de la intensidad del campo eléctrico a lo largo del dipolo se representa en la fig. 346.

Examinemos el carácter del campo electromagnético creado en el espacio que rodea al dipolo.

Esquemáticamente, el dipolo se puede representar en forma de dos cargas iguales y de signo contrario,  $+q$  y  $-q$ , cuya distancia  $l$  entre ellas varía periódicamente. Como se ha visto (en el § 125), el campo eléctrico de un dipolo invariable se caracteriza por las líneas de intensidad del campo, que salen de una carga y van a parar a la otra.

No sucede lo mismo, hablando en general, si las cargas que forman el dipolo, se mueven. Esto es debido a que el campo se propaga por el espacio a una velocidad finita y, por consiguiente, el valor de la intensidad del campo  $E$  en un punto cualquiera alejado del dipolo, en un instante determinado de tiempo corresponde a la disposición de las cargas del dipolo en un instante de tiempo anterior.

Aclaremos esto gráficamente. Partamos del estado cuando las cargas  $+q$  y  $-q$  que forman el dipolo, se hallan a una distancia  $l$  (fig. 347, *a*), y examinemos una línea cualquiera de intensidad del campo, por ejemplo, la línea *abc*. A medida que se aproximen las cargas, la línea de intensidad del campo variará de forma, ya que, por ejemplo, en el punto *b*, el valor de la intensidad  $E$  no corresponde a la posición dada de las cargas, sino a la posición que tenían en un instante de tiempo anterior. La línea adquiere la forma representada en la fig. 347, *b*. Cuando ambas cargas coinciden, la línea de intensidad del campo tendrá la forma de lazo (fig. 347, *c*). Durante el movimiento ulterior de las cargas, en el campo se forma una línea cerrada de la intensidad del campo *abc'b'* (fig. 347, *d*). De esta manera, el campo eléctrico creado será de carácter turbulento.

La formación de las líneas cerradas del campo eléctrico variable acarrea, según la hipótesis de Maxwell, la creación de las líneas cerradas del campo magnético variable. Estas últimas, a su vez,

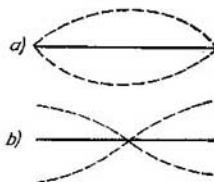


Fig. 346. Distribución de la amplitud de la intensidad de la corriente (*a*) y de la amplitud de la intensidad del campo eléctrico (*b*) a lo largo de un dipolo.

originan la formación de líneas cerradas de la intensidad del campo eléctrico, y así sucesivamente. Alrededor del dipolo oscilante se forma una onda electromagnética.

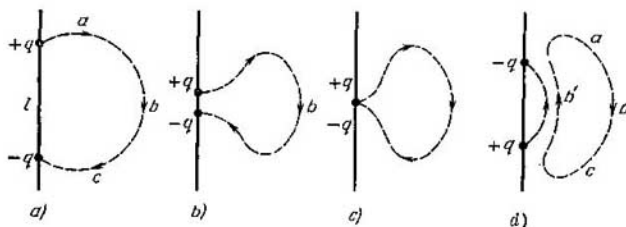


Fig. 347. Líneas de intensidad del campo en las proximidades del dipolo en distintos momentos.

En la fig. 348 se representa la distribución de las líneas de la intensidad del campo eléctrico alrededor del dipolo de Hertz en un instante dado de tiempo.

La dirección y la magnitud relativa de la intensidad del campo eléctrico y excitación del campo magnético en la onda que se crea en las proximidades del dipolo, se puede calcular; pero también se puede determinar experimentalmente.

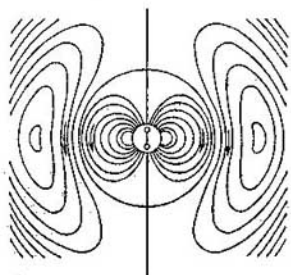


Fig. 348. Líneas de intensidad del campo en las proximidades del dipolo.

El campo eléctrico se puede investigar colocando en diferentes lugares un "resonador eléctrico" capaz de reaccionar a determinadas intensidades del campo. Este resonador puede ser un conductor rectilíneo con un espacio de chispa  $ab$  (fig. 349), donde a la izquierda del resonador se representa el oscilador emisor). Si este dipolo no es perpendicular a las líneas de intensidad del campo eléctrico, entre sus extremos se crea una diferencia de potencial, debido a lo cual en este espacio salta una chispa. Esta chispa será la señal indicadora de que hay campo eléctrico. El espacio de chispa del dipolo receptor debe ser pequeño, porque la diferencia de potencial de sus extremos es pequeña.

El campo eléctrico se puede investigar colocando en diferentes lugares un "resonador eléctrico" capaz de reaccionar a determinadas intensidades del campo. Este resonador puede ser un conductor rectilíneo con un espacio de chispa  $ab$  (fig. 349), donde a la izquierda del resonador se representa el oscilador emisor). Si este dipolo no es perpendicular a las líneas de intensidad del campo eléctrico, entre sus extremos se crea una diferencia de potencial, debido a lo cual en este espacio salta una chispa. Esta chispa será la señal indicadora de que hay campo eléctrico. El espacio de chispa del dipolo receptor debe ser pequeño, porque la diferencia de potencial de sus extremos es pequeña.



El campo magnético se puede estudiar, basándose en su capacidad de inducir, colocando en distintos lugares del campo un circuito que mida la corriente de inducción. Esta corriente depende del lugar en que se sitúa el circuito y de su orientación. La acción inductiva del campo variable será máxima cuando el vector de inducción magnética sea normal al plano del circuito, ya que en esta posición

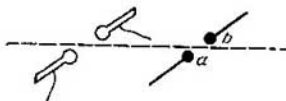


Fig. 349. Resonador *ab*.

varía con la mayor rapidez el flujo magnético a través de la superficie limitada por el circuito. La magnitud relativa del vector de excitación magnética en distintos lugares es proporcional a la magnitud de la corriente de inducción creada en el circuito, si éste es normal a la excitación magnética.

Esta clase de experimentos permite establecer el carácter del campo electromagnético que rodea al dipolo. En las proximidades del dipolo, el campo es de carácter complejo; pero a grandes distancias en comparación con sus dimensiones, en la región denominada *zona de onda*, el campo tiene una forma relativamente simple.

Sea la dirección del dipolo el eje de una superficie esférica (fig. 350). Tracemos en esta esfera y con respecto a este eje, paralelos y meridianos. La intensidad del campo eléctrico  $E$  en cualquier punto irá dirigida según la tangente al meridiano, y la excitación  $H$  del campo magnético, según la tangente al paralelo. Las magnitudes de la excitación magnética y de la intensidad del campo eléctrico disminuirán desde el ecuador hacia el polo: para los puntos situados en la continuación del eje del dipolo, estas dos magnitudes serán iguales a cero; para los puntos situados en la región ecuatorial, estas magnitudes tendrán el valor máximo. En correspondencia con ello, la densidad del flujo de la energía radiada también dependerá del ángulo  $\theta$  que forma la dirección de la radiación con el eje del dipolo. Esta dependencia se representa en forma de diagrama

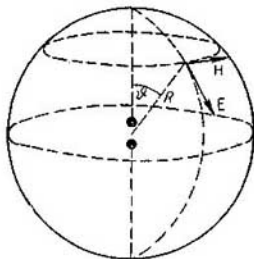


Fig. 350. Dirección y sentido de los vectores  $E$  y  $H$  en la zona de onda del dipolo.

vectorial en la fig. 351. Con el aumento de la distancia al dipolo (es decir, con el aumento del radio de la esfera), la intensidad del campo eléctrico y la excitación magnética disminuyen. Es importante notar que la *intensidad del campo eléctrico E* en el punto dado es perpendicular a la *excitación magnética H* en el mismo punto, y ambos

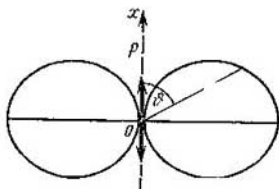


Fig. 351. Distribución de la intensidad de radiación en función del ángulo  $\theta$ .

vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son perpendiculares al radio de la esfera, es decir, perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Si la f. e. m.  $\mathcal{E}$  del dipolo varía según la ley:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t,$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular de las oscilaciones, la intensidad del campo  $\mathbf{E}$  en cada punto del espacio también varía periódicamente con la misma frecuencia  $\omega$ ; pero con retraso de fase. El retraso de fase es tanto mayor, cuanto mayor sea la distancia del dipolo al punto examinado. Este retraso de fase es debido a que el campo electromagnético se propaga a una velocidad  $v$  finita. De esta manera, alrededor del dipolo se crea una onda electromagnética esférica. Si llamamos  $r$  a la distancia desde el dipolo al punto dado, las oscilaciones del vector  $\mathbf{E}$  se representarán por la ecuación:

$$E = \frac{E_0 \sin \theta}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) = \frac{E_0 \sin \theta}{r} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right),$$

donde  $T$  es el período,  $\lambda$ , la longitud de onda y  $\theta$ , el ángulo polar (fig. 350).

En la dirección de propagación, la onda electromagnética se puede representar mediante dos sinusoides en planos mutuamente perpendiculares. Una de ellas representa las oscilaciones del vector de intensidad del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , y la otra, las del vector de excitación magnética  $\mathbf{H}$ . En el vacío, las amplitudes de las oscilaciones de los dos vectores son numéricamente iguales (si  $\mathbf{E}$  se mide en el sistema electrostático de unidades, y  $\mathbf{H}$ , en el electromagnético); ambos vectores poseen la misma fase de oscilación (fig. 352, a).

La dirección de propagación de la onda se puede determinar por la regla del sacacorchos: si la manilla del sacacorchos gira en el sentido del vector  $E$  hacia el vector  $H$ , la dirección de su movimiento de traslación determina la dirección de propagación de la onda (fig. 352, *b*).

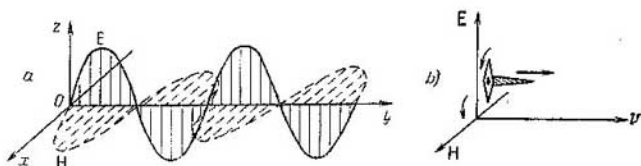


Fig. 352. Onda electromagnética.

En sus experimentos, Hertz obtuvo ondas electromagnéticas de unos 60 cm de longitud. Observó su reflexión sobre espejos metálicos, su refracción en el prisma de parafina y el fenómeno de interferencia. Todos estos experimentos demostraron sin lugar a dudas que el campo electromagnético variable puede propagarse en forma de ondas a velocidad finita.

§ 247. Velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas. Debido a la gran velocidad de las ondas electromagnéticas, su medición experimental directa presenta ciertas dificultades.

Hertz determinó esta velocidad de manera indirecta midiendo la longitud de la onda electromagnética  $\lambda$ ; de donde, sabiendo el período  $T$  de oscilación determinado por la capacidad y la autoinducción del oscilador, calculó la velocidad  $v$  de la relación:

$$v = \frac{\lambda}{T}. \quad (1)$$

Para medir la longitud de onda, Hertz utilizó ondas electromagnéticas estacionarias obtenidas en la interferencia de ondas de sentido opuesto. Hertz obtuvo las ondas de sentido opuesto reflejando la onda directa (móvil) sobre un espejo metálico.

Para que la intensidad de la onda estacionaria se perciba hay que realizar el experimento con una onda electromagnética que se propague según una dirección determinada. Esta "orientación" de la onda electromagnética se realiza sencillamente mediante el esquema representado en la fig. 353. La distancia disruptiva del dipolo se sitúa entre dos conductores paralelos unidos por los extremos como se indica en la figura. El campo electromagnético fundamentalmente

está comprendido entre los conductores, y en éstos se crean corrientes de conducción. El sector  $ab$  del conductor hace de espejo, que refleja las ondas que llegan hasta el mismo. Por lo tanto, en la región limitada por los conductores se forman ondas estacionarias, cuya posición de nodos y vientres se determina experimentalmente. Situando entre los conductores un tubo de descarga  $A$  sobre contactos de corredera, se puede observar, desplazándolo a lo largo de los conductores, su luminiscencia intermitente. La luminiscencia máxima

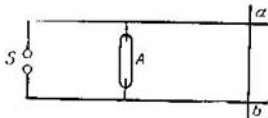


Fig. 353. Obtención de ondas electromagnéticas estacionarias.

tiene lugar en los vientres de la intensidad del campo eléctrico; la luminiscencia desaparece donde se hallan los nodos de la intensidad del campo eléctrico. La distancia entre los nodos vecinos o entre los vientres vecinos será igual a la mitad de la onda. Los nodos y los vientres de la excitación magnética se pueden revelar desplazando a lo largo de los conductores un cuadro cerrado con un galvanómetro y observando la acción inductiva del campo magnético variable, como se ha indicado arriba. Estas observaciones demuestran que los vientres de la excitación magnética coinciden con los nodos de la intensidad del campo eléctrico, y viceversa. En el lugar de la reflexión  $ab$  se observa un nodo de la intensidad del campo eléctrico y un vientre de la excitación magnética. De esto se deduce que la reflexión de las oscilaciones del vector de intensidad del campo eléctrico sobre una superficie metálica se efectúa con pérdida de una semionda, mientras que la reflexión de las oscilaciones del vector de excitación magnética se efectúa sin pérdida de esta semionda.

Habiendo determinado por la distancia entre los nodos la longitud de onda  $\lambda$  y sabiendo el período de oscilación  $T$ , se puede hallar la velocidad de propagación  $v$  de las ondas electromagnéticas por la fórmula (1). El período de oscilación  $T$ , como se ha indicado, se puede calcular por la fórmula (2) del § 239; pero también se puede determinar empíricamente. Para ello, con ayuda de un espejo giratorio se observa la chispa que salta en el espacio disruptivo del circuito oscilante. Si el espejo gira muy rápidamente, la imagen de la chispa resulta intermitente en correspondencia con la intermitencia y el salto de la chispa en el transcurso de cada período de oscilación. De esta manera, la velocidad de propagación de las

ondas electromagnéticas en el vacío se determinó que era igual a  $c=3 \cdot 10^{10}$  cm/seg. Mediciones más modernas y exactas de la longitud de las ondas estacionarias, lo mismo que de la velocidad de la luz (la luz es una radiación de ondas electromagnéticas de longitud muy pequeña), dan para  $c$  el valor de

$$c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ cm/seg.}$$

Este valor coincide con mucha aproximación con el de la constante electrodinámica  $c$  determinada respecto a las unidades electromagnética y electrostática de la intensidad de la corriente. Esta coincidencia no es casual: la teoría de Maxwell (véase el texto de cuerpo menor) enseña que las ondas electromagnéticas en el vacío se propagan a una velocidad igual numéricamente a la constante electrodinámica  $c$ .

Si los conductores a lo largo de los cuales se propagan las ondas electromagnéticas, se introducen en un dieléctrico, la distancia entre los nodos de las ondas estacionarias disminuye. Esto indica que la velocidad de propagación de la onda disminuye. Según la teoría de Maxwell, la velocidad de propagación de las ondas  $v$  en una sustancia es

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (2)$$

donde  $\epsilon$  y  $\mu$  son respectivamente la constante dieléctrica y la permeabilidad magnética de la sustancia.

Analizando el sistema de ecuaciones de Maxwell se puede demostrar que la solución del sistema, a determinadas condiciones, es de carácter ondulatorio. Por no haber posibilidad de exponer el método de solución de las ecuaciones de Maxwell, nos limitaremos a demostrar que la solución de carácter ondulatorio satisface las ecuaciones de Maxwell, y sacaremos conclusiones acerca del carácter de la onda y de la velocidad de propagación de la misma.

Partiremos de la suposición de que las oscilaciones electromagnéticas se propagan en forma de ondas de período determinado,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , en una dirección determinada, por ejemplo, a lo largo del eje  $OY$  (fig. 352). Para simplificar, admitamos que la onda es plana, es decir, que en todos los puntos del plano perpendicular a la dirección de propagación de las oscilaciones, cada uno de los vectores  $E$  y  $H$ , en un mismo instante de tiempo tiene el valor dado. Estas suposiciones permiten escribir "las ecuaciones de las ondas" para los vectores  $E$  y  $H$  de la forma siguiente:

$$E = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{y}{v} \right), \quad H = H_0 \cos \omega \left( t - \frac{y}{v} \right); \quad (3)$$

donde  $E_0$  y  $H_0$  son respectivamente las amplitudes vectoriales de los vectores de la intensidad del campo eléctrico y de la excitación magnética, y  $v$ , la velocidad de propagación de la onda electromagnética. La velocidad de la onda  $v$  está relacionada con el período y la longitud de onda mediante la ecuación ordinaria:

$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

Como se ha supuesto que la onda es plana, las derivadas parciales de las proyecciones de los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  respecto a las coordenadas  $x$  y  $z$  serán iguales a cero, ya que en el instante dado, las magnitudes  $E$  y  $H$  varían solamente a lo largo de la dirección de propagación de las oscilaciones, es decir, solamente a lo largo del eje  $OY$ . De esta manera tenemos que de las ecuaciones de Maxwell desaparecen todos los miembros que tienen derivadas parciales respecto a  $x$  y  $z$ . Esto nos da el sistema de ecuaciones de Maxwell (véanse las págs. 532 y 535) en la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} &= \frac{\epsilon}{c} E_x, \\ 0 &= \frac{\epsilon}{c} E_y, \\ -\frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\epsilon}{c} E_z; \end{aligned} \right\} (4) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\mu}{c} H_x, \\ 0 &= \frac{\mu}{c} H_y, \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} &= \frac{\mu}{c} H_z. \end{aligned} \right\} (5)$$

Para que se cumplan las segundas ecuaciones de ambos sistemas de Maxwell es necesario que las derivadas respecto al tiempo de las proyecciones de los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  sobre el eje  $OY$  sean iguales a cero.

De las ecuaciones (3) se deduce que si la derivada respecto al tiempo de cualquier proyección de los vectores  $\mathbf{E}$  o  $\mathbf{H}$  siempre es igual a cero, esta proyección también será igual a cero. De esto se deduce que

$$E_y = H_y = 0. \quad (6)$$

De esto se saca una conclusión muy importante: *los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en la onda electromagnética plana están situados perpendicularmente a la dirección de propagación de las oscilaciones y la onda electromagnética es transversal.*

Para concretar supongamos que el vector  $\mathbf{E}$  oscila conservando invariable la dirección, y que esta dirección coincide con la del eje  $OZ$ . Esta clase de onda en que el vector conserva su dirección se denomina *onda planopolarizada*. Nuestra suposición nos obliga a llegar a la conclusión de que la proyección de  $\mathbf{E}$  sobre la dirección del eje  $OX$  es igual a cero, es decir,  $E_x = 0$ , de donde,

$$E_z = E. \quad (7)$$

La tercera ecuación del segundo sistema (5) de Maxwell, en estas condiciones, nos da que

$$H_z = 0, \text{ y, por consiguiente, } H_x = 0$$

Con ello se satisface también la primera ecuación del sistema (4). De esta manera, el vector de excitación magnética oscila paralelamente al eje  $OX$ , de donde,

$$H_x = H.$$

De esto se deduce que *el vector de intensidad del campo eléctrico (dirigido a lo largo del eje  $OZ$ ) y el vector de excitación magnética (dirigido a lo largo del eje  $OX$ ) son mutuamente perpendiculares.*

Utilicemos la tercera ecuación del primer sistema (4) y la primera ecuación del segundo sistema (5), que ahora se transforman en

$$-\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\epsilon}{c} \dot{E}, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{\mu}{c} \dot{H}.$$

Para excluir de estas ecuaciones una de las incógnitas, por ejemplo,  $H$ , se diferencia respecto al tiempo la primera ecuación:

$$-\frac{\partial \dot{H}}{\partial y} = \frac{\epsilon}{c} \ddot{E};$$

sustituyendo en esta ecuación  $\dot{H}$  por su valor según la segunda ecuación, obtenemos que

$$\frac{c}{\mu} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon}{c} \dot{E} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Está claro que excluyendo  $E$  se obtiene una ecuación análoga para  $H$ . La ecuación (8) es la ecuación de onda (compárese con lo dicho en el § 141 del t. I). Veamos que, efectivamente, la solución de esta ecuación diferencial la satisface la ecuación de la forma:

$$E = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{y}{v} \right).$$

Para ello hallemos las segundas derivadas de  $E$  respecto al tiempo  $t$  y a la coordenada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= -\omega^2 E_0 \cos \omega \left( t - \frac{y}{v} \right) = -\omega^2 E; \\ \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} &= -\frac{\omega^2}{v^2} E_0 \cos \omega \left( t - \frac{y}{v} \right) = -\frac{\omega^2}{v^2} E. \end{aligned}$$

Colocando estos valores de  $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$  y  $\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}$  en la (6), hallamos que

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2}, \quad (9)$$

relación que siempre se puede satisfacer. Así tenemos que la solución de la ecuación (8) es una onda plana de frecuencia  $\omega$ , que se propaga a la velocidad  $v$ , velocidad que, según la (9) es

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (10)$$

Para el vacío tenemos que  $\varepsilon=1$  y  $\mu=1$ , de donde la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío es igual a la magnitud  $c$ , que es la relación de la unidad electromagnética (CGSM) de intensidad de la corriente a la unidad electrostática (CGSE).

§ 248. Vector de Umov-Poynting (vector de Poynting). La propagación de la onda electromagnética va acompañada de un transporte de energía, que caracteriza al campo electromagnético. Más arriba se ha indicado que la energía de los campos eléctrico y magnético se distribuye por el espacio con las densidades de  $\varepsilon E^2/8\pi$  y  $\mu H^2/8\pi$ . Se puede demostrar que el campo *electromagnético* viene caracterizado por la energía total distribuida con una densidad  $w$ :

$$w = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}.$$

(esta fórmula es justa tanto en el sistema electrostático de unidades, como en el electromagnético). Como la energía es una función de la intensidad y de la excitación de los campos, se transmitirá al espacio a la velocidad  $v$  de propagación del campo. La propagación de la energía se puede describir introduciendo el concepto de vector

de densidad de flujo de energía electromagnética. N. Umov, profesor de la Universidad de Moscú, fue el primero en deducir e introducir el concepto de vector de densidad de flujo de energía en su forma general y en la aplicación a las ondas elásticas (véase el § 112 del t. I), mientras que para el caso particular del campo electromagnético, lo empleó Poynting.

Si llamamos  $S$  al valor del vector de Umov-Poynting, la energía que durante el tiempo  $dt$  fluye a través de una superficie unidad perpendicular a la dirección de la propagación de las ondas, se expresa por la fórmula:

$$Sdt = w \cdot v \cdot dt, \quad (1)$$

donde  $v$  es la velocidad de propagación de la onda.

Si los vectores  $E$  y  $H$  son mutuamente perpendiculares, como ocurre en el caso de la onda electromagnética en el vacío y en los medios isótropos, el valor del vector de Umov-Poynting se determina por la ecuación:

$$S = \frac{c}{4\pi} EH, \quad (2)$$

que es justa en el sistema absoluto (físico) de unidades.

La magnitud y dirección del vector de Umov-Poynting  $S$  se determina por el producto vectorial de los vectores  $E$  y  $H$ :

$$S = \frac{c}{4\pi} (E \times H). \quad (3)$$

Demostremos que el vector de Umov-Poynting determinado por las ecuaciones (2) y (3) satisface la ecuación (1), es decir, que efectivamente es el vector de la densidad de flujo de energía. Supongamos, como se ha hecho arriba, que la onda que se propaga a lo largo del eje  $OY$ , tiene los vectores eléctrico y magnético dirigidos respectivamente según los ejes  $OZ$  y  $OX$  (fig. 352). Entonces tendremos que  $E = E_z$  y  $H = H_x$ , y el vector  $S$  irá dirigido según el eje  $OY$  en el sentido de la propagación de la onda.

De la primera ecuación del sistema (5) del § 247, teniendo en cuenta la fórmula (3) del mismo párrafo, tenemos que

$$\frac{\omega}{v} E = \frac{\mu\omega}{c} H;$$

y colocando en esta ecuación el valor de  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ , obtenemos que

$$\sqrt{\epsilon E} = \sqrt{\mu H}.$$

{Obsérvese que  $E$  viene expresada en unidades electrostáticas, y  $H$  en unidades electromagnéticas}. Por consiguiente, la densidad de la energía electromagnética se puede expresar de la siguiente manera:

$$w = \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} = \frac{\epsilon E^2}{4\pi} = \frac{\mu H^2}{4\pi}. \quad (4)$$



Tomemos el producto del valor del vector de Umov-Poynting por el elemento de tiempo  $dt$ :

$$Sdt = \frac{c}{4\pi} E \cdot H \cdot dt = \frac{c\sqrt{\epsilon} E^2}{4\pi\sqrt{\mu}} dt = \frac{ceE^2}{\sqrt{\epsilon\mu} \cdot 4\pi} dt$$

o, utilizando la magnitud  $w$  de la (4) y sustituyendo  $c/\sqrt{\epsilon\mu}$  por  $v$ :

$$Sdt = w \cdot v \cdot dt,$$

que coincide con la (1). Se puede demostrar que en el caso general, la energía electromagnética que sale de (o entra en) cierto volumen durante el intervalo  $dt$  de tiempo, es  $\int S_n dt ds$ , donde la integral se toma según la superficie que limita el volumen dado. Así, pues, de lo analizado se ve que el vector  $S$  es el vector de densidad del flujo de energía electromagnética.

§ 249. Radiotecnia. Métodos modernos de excitación y registro (detección) de las ondas electromagnéticas. El método primitivo de Hertz de excitar ondas electromagnéticas con ayuda del oscilador representado en la fig. 345 permitió obtener ondas de 1 m de longitud aproximadamente. Los experimentos de Hertz permitieron observar y analizar importantes propiedades de las ondas electromagnéticas: reflexión, refracción, etc. Estos experimentos fueron la confirmación directa de la naturaleza electromagnética de la luz. Después se han hecho muchos intentos de obtener ondas de menor longitud. En 1906, P. Lébedev, construyó un oscilador muy pequeño y obtuvo ondas electromagnéticas de unos 3 mm de longitud. Luego (en 1924), M. Levítskaya obtuvo ondas de 0,2 mm de longitud. V. Arkádiev y A. Glagóleva-Arkádieva, profesores de la Universidad de Moscú, elaboraron un método original de generación de ondas cortas electromagnéticas basándose en las chispas que saltan entre limaduras metálicas suspendidas en aceite. Consiguieron obtener ondas aproximadamente de 0,1 mm de longitud. Estas ondas son de bastante menor longitud que las ondas infrarrojas más largas (véase el t. III). Al mismo tiempo se elaboraron métodos de obtención de ondas más largas.

Los experimentos con las ondas electromagnéticas condujeron al célebre físico ruso A. Popov a descubrir el método de telegrafía sin hilos. En 1895, A. Popov utilizando la propiedad de las limaduras metálicas de adherirse y elevar con ello la conductibilidad eléctrica bajo la influencia de oscilaciones eléctricas de alta frecuencia, construyó el primer receptor sensible de ondas electromagnéticas.

En la fig. 354 se representa el esquema del receptor de A. Popov. Su parte fundamental es el *detector*  $AB$ , que es un tubo de cristal con limaduras metálicas. El detector está conectado en un circuito

que consta de la batería *P* y del relé *CDE*. Cuando las ondas electromagnéticas alcanzan el instrumento, la conductibilidad eléctrica de las limaduras aumenta y en el circuito se crea una corriente. Bajo la influencia de esta corriente el electroimán atrae al núcleo (armadura) del relé *D* y cierra el contacto *E*. Gracias a ello se cierra el segundo circuito, que también alimenta la batería *P*, en el cual está conectado el timbre eléctrico *HG*. El martillo del timbre, en su movimiento de retroceso golpea el tubo del detector, con lo cual se

restablece la resistencia de las limaduras. De esta manera, el receptor cesa automáticamente de actuar en cuanto las ondas electromagnéticas dejan de llegar.

Un año después, en marzo de 1896, A. Popov demostró en la sesión de la Sociedad Físico-Química la transmisión del primer radiograma. El radiograma se transmitió en el territorio de la Universidad de Petersburgo desde el edificio del Instituto de química a una distancia de 250 m del edificio donde se celebraba la sesión de la Sociedad. El descubrimiento del telégrafo sin hilos de A. Popov produjo una gran revolución en la técnica.

El desarrollo ulterior de la radiotecnica se encanizó a sustituir los

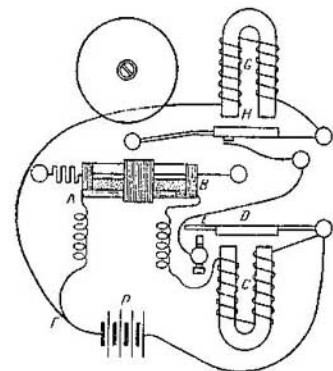


Fig. 354. Esquema del receptor de A. Popov.

generadores de chispa, que ofrecían la posibilidad de obtener solamente oscilaciones amortiguadas, por generadores de oscilaciones continuas. Esta última circunstancia permitió pasar de la transmisión de señales a la transmisión de la palabra, música, imágenes. Por eso, en los años veinte de nuestro siglo, la radiotecnica ha pasado a la generación con ayuda de válvulas electrónicas.

El esquema de un generador de esta clase se ha descrito en el § 241. Para los fines de radiotransmisión, el circuito oscilante se acopla por inducción a una antena. En su forma más simple, la antena es un alambre vertical con su extremo inferior conectado a tierra. La longitud del alambre se elige de manera que se establezca en él una onda estacionaria con el vientre de la intensidad de la corriente en el extremo inferior y el nodo en el superior. Esta antena es análoga a la mitad del oscilador de Hertz y asegura una radiación de oscilaciones en forma de ondas electromagnéticas creadas a su alrededor (fig. 355).

La revelación (detección) de las ondas electromagnéticas se realiza mediante una antena receptora y un sistema de amplificación. El circuito oscilante  $LC$  de un sistema de éstos (fig. 356) se acopla por inducción con la antena (en la figura no viene representada la antena). En el circuito, bajo la influencia de las ondas

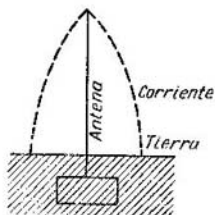


Fig. 355. Oscilaciones libres de la antena vertical simple.

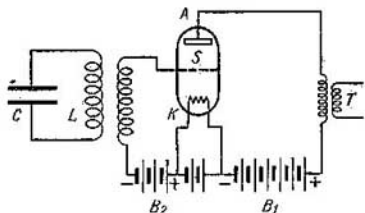


Fig. 356. Esquema de amplificación de oscilaciones electromagnéticas.

electromagnéticas se crean oscilaciones forzadas. La amplitud de estas oscilaciones será la máxima en la resonancia, pero de todas maneras, rigurosamente hablando, será demasiado pequeña para poder medir directamente las corrientes creadas. Para poderlas medir se intensifican con ayuda de un *esquema amplificador* especial. En una forma muy simple, representado en la fig. 356, este esquema consta de una válvula de tres electrodos. El circuito oscilante se acopla por inducción con la rejilla  $S$  de la válvula. Al aparecer las oscilaciones eléctricas en el circuito  $LC$ , la "tensión de rejilla" (véase el § 241) varía y, por consiguiente, varía la intensidad de la corriente que fluye a través de la válvula desde la batería  $B_1$ . Las condiciones de funcionamiento de la válvula se eligen de manera que lo haga dentro de la parte rectilínea de la característica (fig. 357). Si esta parte rectilínea forma una gran pendiente, a pequeños valores de variación de la tensión de rejilla  $\Delta V_r$ , le corresponderán notables variaciones de la corriente anódica  $\Delta I_a$ . Por lo tanto, débiles oscilaciones en el circuito resonante  $LC$  acarrearán oscilaciones mucho mayores de la intensidad de la corriente anódica del circuito

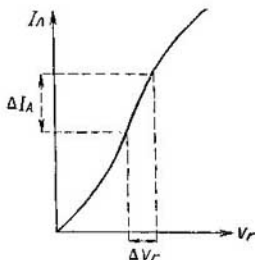


Fig. 357. Característica de una válvula de tres electrodos.

de la válvula. En el esquema de amplificación examinado, el generador de energía del circuito de la válvula es la batería  $B_1$ ; las oscilaciones del circuito  $LC$  causadas por la onda electromagnética incidente, solamente actúan sobre la válvula y originan las variaciones de la intensidad de la corriente de la batería  $B_1$ . Las oscilaciones

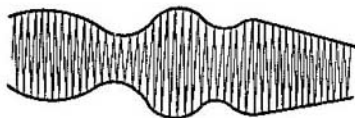


Fig. 358. Envolvente de las oscilaciones de alta frecuencia.

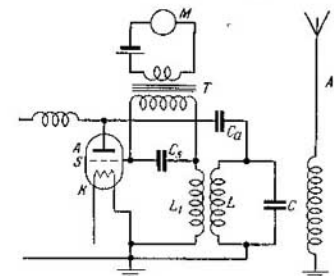
de la corriente anódica, con ayuda del transformador  $T$  se pueden transmitir a los aparatos registradores o a la rejilla de la segunda válvula para una segunda amplificación.

Para transmitir sonidos, las oscilaciones electromagnéticas se *modulan*, es decir, su amplitud varía al unísono con las oscilaciones

audibles. En este caso, la envolvente de las oscilaciones electromagnéticas de alta frecuencia es la oscilación de las frecuencias audibles (fig. 358). Estas variaciones de la amplitud permiten obtener de nuevo los sonidos en la estación receptora con ayuda de un altavoz.

El esquema más simple de modulación viene representado en la fig. 359. En esta figura se representa la parte del esquema generador correspondiente a la fig. 338, y a la derecha, la antena  $A$  con la cual se acopla por inducción

Fig. 359. Esquema de modulación de las oscilaciones de alta frecuencia.



la parte generadora. En la parte superior de la figura se representa el micrófono  $M$ . Las oscilaciones de la tensión originadas en el micrófono se amplifican en el transformador  $T$  y se transmiten a las armaduras del condensador de la rejilla  $C_s$ . Las oscilaciones de alta frecuencia creadas en la bobina  $L_1$  pasan fácilmente a través del condensador  $C_s$  y se transmiten a la rejilla de la válvula  $S$ . Al mismo tiempo, debido a la elevada inducción de los arrollamientos del transformador  $T$ , no pasan bifurcándose al circuito del micrófono. Así, pues, el sistema generador funciona

de la misma manera que si no tuviese conectado el micrófono. Las oscilaciones creadas en el micrófono tienen una frecuencia audible, es decir, mucho inferior que la frecuencia creada por el oscilador de válvulas. Por eso el condensador  $C_s$  ofrece una resistencia mucho mayor para las corrientes del transformador  $T$  que para las corrientes

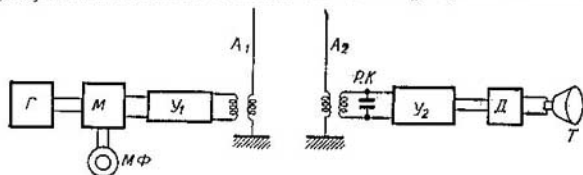


Fig. 360. Esquema de un transmisor y un receptor.

del oscilador. Debido a ello, en las armaduras del condensador  $C_s$  aparece solamente una diferencia complementaria de potencial que varía la tensión de rejilla  $V_r$ , con lo cual se consigue la modulación de las oscilaciones.

El esquema general de un receptor y un transmisor viene representado en la fig. 360. En el transmisor el generador de oscilaciones de alta frecuencia  $\Gamma$  produce oscilaciones armónicas continuas de determinada frecuencia  $\omega$ . Estas oscilaciones se modulan en el modulador  $M$ , según las oscilaciones audibles que vienen del micrófono  $M\Phi$ . Después, las oscilaciones se intensifican en el sistema  $Y_1$  amplificador de válvulas y se transmiten a la antena  $A_1$  por acoplamiento inductivo, la cual emite las ondas electromagnéticas. Las ondas, al llegar a la antena  $A_2$  del receptor, crean en ella oscilaciones forzadas. La antena  $A_2$  está acoplada por inducción con el circuito resonante  $PK$ . Las oscilaciones forzadas que aparecen en el circuito resonante se intensifican en el amplificador de válvulas  $Y_2$ . Las oscilaciones amplificadas se rectifican en el rectificador (detector)  $D$ . La corriente rectificada  $I_o$ , que reproduce en función del tiempo a la corriente del micrófono del transmisor, se transmite después de pasar por el amplificador de baja frecuencia (no representado en el esquema) al altavoz  $T$ .

La propagación de las ondas de la radiodifusión no se produce en el espacio libre, sino a lo largo de la superficie terrestre, que es un buen conductor. Por eso, alrededor de la antena emisora no se forman ondas esféricas análogas a las que se han examinado en el § 246. Las ondas emitidas por la antena sufren la acción guiadora (conductor) de la superficie de la Tierra y, de esta manera, rodean la esfera terrestre. El académico V. Fok resolvió totalmente el problema de la propagación de las ondas a lo largo de la superficie de la Tierra. En la propagación de las ondas cortas electromagnéticas

desempeñan también un gran papel las altas capas atmosféricas, donde hay gran cantidad de iones (formados principalmente por la acción de la radiación ultravioleta del Sol). Esta parte de la atmósfera se denomina *ionosfera*. Las ondas cortas electromagnéticas se reflejan en la ionosfera, lo cual influye altamente en el carácter de su propagación a lo largo de la superficie de la esfera terrestre.

En la actualidad, en la Unión Soviética, junto a la radiotelefonía, radiotelegrafía y televisión, se elaboran ampliamente otras aplicaciones de las ondas electromagnéticas. Un éxito notable en el desarrollo de la radiotecnica ha sido el paso a las ondas cortas electromagnéticas (métricas y centimétricas), que han permitido obtener con ayuda de antenas de forma especial, radioseñales dirigidas.

Las ondas electromagnéticas, al encontrar en su camino diferentes obstáculos, pueden ser retenidas por ellos y, en parte, reflejarse y dispersarse desde estos obstáculos. A. Popov, ya en 1897, en los experimentos de radiotelegrafía en el mar observó que el barco hace de pantalla, detrás del mismo se produce una "sombra". En el fenómeno de reflexión de las ondas electromagnéticas en los cuerpos metálicos se funda el método de revelación de objetos a grandes distancias y de determinación de su posición. Los primeros que elaboraron en la URSS este método, denominado *radiolocalización*, fueron D. Rozhanski y Y. Kóbsariév. Este método consiste en lo siguiente: con ayuda de un generador y un sistema especial de antenas se obtiene un haz dirigido de ondas electromagnéticas; después de reflejarse en el objeto (barco, avión) las ondas llegan al receptor y se registran. Para que la emisión de señales no entorpezca su recepción, las señales se emiten con intermitencia. Cada señal dura no más de unas millonésimas de segundo, mientras que los intervalos de señal a señal son decenas y centenares de veces mayores. La recepción de las ondas reflejadas se hace en los intervalos de señal a señal. Según el tiempo transcurrido entre la emisión y retorno de la onda reflejada se determina la distancia del objeto observado. El equipo que permite determinar de esta manera la posición de los objetos con ayuda de radioseñales, se denomina *radar*.

Los científicos soviéticos L. Mandelstam y N. Papalexí han elaborado un método de determinación muy exacta de la distancia con ayuda de radioseñales, basado en la determinación del desfase entre las ondas reflejadas.

La esfera de aplicación de los métodos radiotécnicos en la actualidad se desarrolla intensamente y en este desarrollo, los científicos soviéticos ocupan un lugar preeminente.

Mediante las ondas cortas se mantiene la comunicación no sólo con los sputniks, sino también con los cohetes cósmicos a distancias de varios millones de kilómetros.

## *Sistemas de unidades eléctricas y magnéticas*

En distintas partes del curso se han introducido unas u otras unidades de medición para las magnitudes eléctricas y magnéticas. Resumamos lo dicho.

En física se ha adoptado el sistema *CGS* basado en lo siguiente (véase el § 3 del t. 1). Como unidades fundamentales se han escogido: de unidad de longitud, el centímetro; de masa, el gramo, y de tiempo, el segundo; las unidades de las demás magnitudes físicas se establecen basándose en las relaciones regulares con las de longitud, masa y tiempo, teniendo en cuenta que en las fórmulas correspondientes, los coeficientes de proporcionalidad se suponen igual a la unidad. No obstante este método no es unívoco. Ya se ha indicado (t. I, § 32) que, por ejemplo, la unidad de fuerza puede establecerse de dos maneras: 1) basándose en la segunda ley de Newton,  $f = mv$ , en la cual el coeficiente de proporcionalidad se considera igual a la unidad, y 2) basándose en la ley de la gravitación universal,  $f = \frac{m_1 m_2}{r^2}$ , en la cual también se considera igual a la unidad el coeficiente de proporcionalidad. En el primer caso deberemos escribir la ley de la gravitación universal de la siguiente manera:

$$f = k \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

donde la "constante de gravitación" es  $k = 6,685 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{g} \cdot \text{seg}^2$ . En el segundo caso tendremos que escribir la segunda ley de Newton de la siguiente manera:

$$f = k' mv,$$

donde la "constante dinámica" es  $k' = 1,496 \cdot 10^7 \text{ g} \cdot \text{seg}^2/\text{cm}^3$ .

De esta manera se pueden formar dos sistemas *CGS* de medición de las magnitudes mecánicas: 1) "dinámico" y 2) "gravitatorio". Como se sabe, generalmente se emplea el sistema dinámico.

Análogamente, en el estudio de los fenómenos electromagnéticos se han formado dos sistemas *CGS* basados bien en las leyes de las acciones recíprocas electrostáticas de las cargas (sistema *CGSE*), bien en las acciones recíprocas magnéticas de las corrientes (sistema *CGSM*).

1. Sistema electrostático absoluto (CGSE). En este sistema, la unidad de cantidad de electricidad  $q$  se establece partiendo de la ley de Coulomb referida al vacío, en que el coeficiente de proporcionalidad se considera igual a la unidad:

$$f = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1)$$

La fuerza  $f$  de la fórmula (1) se mide en dinas, la distancia  $r$ , en centímetros (para más detalle véase la pág. 20). Para los dieléctricos:

$$f = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (2)$$

donde  $\epsilon$ , constante dieléctrica, es un número abstracto [para el vacío, según la (1), tenemos que  $\epsilon=1$ , para los demás medios,  $\epsilon>1$ ].

Basándose en las unidades CGSE de cantidad de electricidad se establecen las unidades CGSE de intensidad del campo, de diferencia de potencial, de resistencia, etc.

Para establecer en este sistema las unidades de medición de la excitación magnética se parte de la siguiente relación: la excitación magnética  $H$  del campo a la distancia  $r$  de un conductor con corriente infinitamente largo y recto se supone igual a (véase la pág. 309):

$$H = \frac{2I}{r}, \quad (3)$$

donde  $I$  es la intensidad de la corriente.

Midiendo  $I$  en unidades CGSE de intensidad de corriente, se establece la unidad CGSE de excitación magnética.

El momento  $M$  de fuerzas que actúan en un campo magnético de excitación  $H$  sobre un contorno plano de área  $S_1$  por el cual fluye una corriente de intensidad  $I_1$ , según lo dicho en el § 191, es proporcional al producto  $HI_1S_1$ : •

$$M \sim HI_1S_1.$$

En el sistema CGS, la magnitud  $M$  se mide en dinas  $\times$  centímetro,  $S_1$ , en centímetros cuadrados; para  $H$  e  $I_1$  se han elegido las unidades CGSE. De esta manera resulta que ya se han elegido las unidades de medición para las cuatro magnitudes  $M$ ,  $S_1$ ,  $H$  e  $I_1$ , de donde se deduce que, al pasar a la igualdad entre  $M$  y el producto  $HI_1S_1$ , no podemos considerar igual a la unidad el coeficiente de proporcionalidad, sino que tenemos que introducir un coeficiente igual a  $1/c^2$ :

$$M = \frac{1}{c^2} HI_1S_1; \quad (4)$$

donde el valor numérico del coeficiente  $c$  se puede determinar experimentalmente. Las mediciones de esta magnitud dan el valor de



$c = 2,998 \cdot 10^{10}$  cm/seg; y se denomina *constante electrodinámica*. Como se ha visto, la magnitud  $c$ , según el valor numérico y dimensiones, coincide con la velocidad de propagación del campo electromagnético en el vacío.

La unidad de medición de la inducción magnética  $B$  en el sistema *CGSE* se establece determinando el momento  $M$  de las fuerzas que actúan sobre el contorno con corriente mediante la relación:

$$M = BI_1S_1. \quad (5)$$

Comparando las ecuaciones (4) y (5) obtenemos para el vacío:

$$B = \frac{1}{c^2} H. \quad (6)$$

Para una sustancia determinada se supone que

$$B = \mu H. \quad (6a)$$

La magnitud  $\mu$  tiene las dimensiones de  $L^{-2}T^2$  y su valor numérico es  $c^2$  veces menor que los valores ordinarios de la permeabilidad magnética. De las fórmulas (6) y (6a) se ve que en el sistema *CGSE*, los vectores  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  tienen distintas dimensiones.

La expresión (6a) se puede conservar refiriéndola al vacío, si se escribe de la siguiente manera:

$$B = \mu_0 H. \quad (6b)$$

Para igualar esta fórmula con la (6) se debe cumplir la igualdad  $\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ . La magnitud  $\mu_0$  se denomina a veces "permeabilidad magnética en el vacío" ("permeabilidad del espacio vacío"), aunque esta denominación no tiene ningún valor físico. Se ha visto (§ 201) que la permeabilidad magnética  $\mu$  de una sustancia está relacionada con la capacidad de magnetizarse que, a su vez, es debida a la existencia de los momentos magnéticos (permanentes o inducidos) de los átomos y de las moléculas. Por "vacío" se sobrentiende la parte del espacio en que sólo hay un campo electromagnético (compárese con lo dicho en el § 152), es decir, un estado especial de la materia sin átomos ni moléculas. El campo electromagnético posee determinadas propiedades físicas, entre ellas la de transmitir perturbaciones electromagnéticas a una velocidad igual a  $c$ . De este modo, la constante electrodinámica  $c$  expresa determinadas propiedades objetivas del campo electromagnético, y no de cierta sustancia compuesta de átomos y moléculas. Por eso la magnitud  $\mu_0 = \frac{1}{c^2}$  no tiene ninguna analogía con la permeabilidad magnética  $\mu$  de la sustancia.

Las unidades *CGSE* de medición de las magnitudes magnéticas se emplean raramente.

2. Sistema electromagnético absoluto (CGSM). En este sistema, la unidad de la intensidad  $I$  de la corriente se establece basándose en la expresión de las fuerzas de acción recíproca de dos conductores rectos, paralelos e infinitamente largos con corriente y entre los cuales hay un espacio vacío (véase el § 196):

$$f = \frac{2I_1 I_2}{r} l, \quad (7)$$

donde  $f$  es la fuerza que actúa sobre la longitud  $l$  de una de las corrientes, y  $r$ , la distancia entre las corrientes. La unidad de excitación magnética  $H$  se establece basándose en la unidad CGSM de intensidad de la corriente según la ecuación (3). Esta unidad de excitación del campo magnético se denomina *oerstedio*.

La unidad de inducción magnética  $B$  se determina de la relación

$$B = \mu H,$$

donde la permeabilidad magnética  $\mu$  es una magnitud sin dimensiones que indica cuántas veces aumentan las fuerzas de acción mutua entre las corrientes al introducir los conductores por los cuales fluyen, en la sustancia en cuestión. La unidad CGSM de inducción magnética  $B$  se denomina *gausio*. La magnitud y las dimensiones del *gausio* coinciden con las del *oerstedio*. La unidad de flujo de inducción magnética  $\Phi$ , se establece de la relación

$$\Phi = B_n S,$$

y se denomina *maxwellio*.

La unidad de cantidad de electricidad  $q$ , en el sistema CGSM se establece basándose en la intensidad de la corriente  $I$  de la relación  $q = It$ . Así, pues, la unidad de cantidad de electricidad ha sido elegida *independientemente* de las acciones recíprocas electrostáticas de las cargas. Por eso resulta que en la ley de Coulomb (1), las tres magnitudes físicas  $f$ ,  $q$  y  $r$  que entran en ella, ya tienen unidades de medición. Por consiguiente, en la ley de Coulomb hay que introducir un coeficiente de proporcionalidad de valor numérico y dimensiones determinadas. El valor de este coeficiente es fácil de calcular: en el sistema CGSM, la unidad de medición de la carga  $q$  es  $c$  veces mayor que la unidad del sistema CGSE; mientras que las unidades de la fuerza  $f$  y de la distancia  $r$  son las mismas. Por eso, para que el valor de la fuerza  $f$  resulte el mismo que utilizando el sistema CGSE, hay que introducir en la parte de la derecha de la ecuación de Coulomb un factor igual a  $c^2$ :

$$f = c^2 \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (8)$$

Para los dieléctricos, en el sistema CGSM, la ley de Coulomb se escribe, lo mismo que en el sistema CGSE, de la forma si-

guiente:

$$f = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (8a)$$

En este caso la constante dieléctrica  $\epsilon$  tendrá las dimensiones  $L^{-2}T^2$  y su valor numérico será  $c^2$  veces menor que el de  $\epsilon$  en el sistema *CGSE*. En el sistema *CGSM* se puede conservar formalmente la expresión (8a) referida al vacío, haciéndola:

$$f = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Comparando esta fórmula con la (8) se ve que se debe satisfacer la igualdad:  $\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ . La magnitud  $\epsilon_0$  se denomina a veces "constante dieléctrica del vacío" ("permitividad del espacio vacío"). Esta denominación, lo mismo que la indicada arriba de "permeabilidad magnética del vacío" para la magnitud  $\mu_0 = \frac{1}{c^2}$  en el sistema *CGSE*, no tiene sentido físico.

En el sistema *CGSM*, la intensidad del campo eléctrico se determina de la ecuación:

$$E = \frac{f}{q}, \quad (9)$$

de donde, para las dimensiones de  $E$  hallamos que  $[E] = \frac{[f]}{[q]} = L^{-1} \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}$ . La unidad de la intensidad electrostática  $E$  en el sistema *CGSM* es  $c$  veces menor que la unidad de intensidad electrostática en el sistema *CGSE*.

La inducción electrostática  $D$  se determina de la ecuación:

$$D = \epsilon E. \quad (10)$$

Como en el sistema *CGSM* la magnitud  $\epsilon$  tiene dimensiones, las dimensiones del vector de inducción electrostática  $D$  en el sistema *CGSM* se diferencian de las dimensiones del vector de intensidad electrostática. Efectivamente,  $[D] = [\epsilon] \cdot [E] = L^{-2} \cdot M^{-1} \cdot T^{-2}$ .

El valor de la inducción electrostática  $D$  en el vacío, en el sistema *CGSM*, es  $c^2$  veces menor que el de la intensidad del campo  $E$ .

**3. Sistema absoluto (físico) de unidades.** En este sistema, las unidades de todas las magnitudes eléctricas coinciden con las unidades del sistema *CGSE*, y las de las magnitudes magnéticas coinciden con las unidades del sistema *CGSM*. La constante dieléctrica  $\epsilon$  y la permeabilidad magnética  $\mu$ , en este sistema son magnitudes sin dimensiones, en que para el vacío:

$$\epsilon = 1 \quad \text{y} \quad \mu = 1.$$

Al utilizar el sistema absoluto de unidades en todas las fórmulas que contengan al mismo tiempo magnitudes eléctricas y magnéticas, se introducen coeficientes numéricos expresados por la constante electrodinámica  $c$ , por ejemplo, la ley de Biot-Savart-Laplace se expresará de la siguiente manera:

$$H = \frac{1}{c} \cdot \frac{I \Delta l \operatorname{sen} \alpha}{r^2};$$

la expresión de la fuerza que actúa sobre un elemento de corriente  $\Delta l$  en el seno de un campo magnético, será:

$$\Delta f = \frac{1}{c} IB \operatorname{sen} \cdot \Delta l.$$

La ley de inducción de Faraday se expresará de la siguiente manera:

$$E = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Tabla XX

Dimensiones de las principales magnitudes eléctricas y magnéticas en los sistemas absolutos de unidades

Magnitud	Sistemas		
	CGSE	CGSM	FISICO
Constante dieléctrica $\epsilon$ . . .	sin dimensiones	$L^{-2}T^2$	sin dimensiones
Carga eléctrica $q$ . . . . .	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$
Intensidad del campo eléctrico $E$ . . . . .	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Inducción del campo eléctrico $D$ . . . . .	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-3/2}M^{1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Potencial $V$ . . . . .	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Intensidad de la corriente $I$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$
Resistencia $R$ . . . . .	$L^{-1}T$	$LT^{-1}$	$L^{-1}T$
Capacidad $C$ . . . . .	$L$	$L^{-1}T^2$	$L$
Permeabilidad magnética $\mu$	$L^{-2}T^2$	sin dimensiones	sin dimensiones
Excitación magnética $H$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Inducción del campo magnético $B$ . . . . .	$L^{-3/2}M^{1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Flujo de inducción magnética $\Phi$ . . . . .	$L^{1/2}M^{1/2}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$
Coefficiente de autoinducción $L$ . . . . .	$L^{-1}T^2$	$L$	$L$

Las ecuaciones de Maxwell en el sistema absoluto se expresarán por las ecuaciones (4a) y (8a) del § 244.

En la tabla XX se dan las dimensiones de las principales magnitudes eléctricas y magnéticas en los sistemas *CGSE*, *CGSM* y en el físico, y en la tabla XXI, las relaciones de las unidades de estos tres sistemas.

**4. Sistema internacional de unidades.** El sistema de unidades adoptado por la Conferencia Internacional de pesos y medidas de 1960 se basa en las siguientes cuatro unidades fundamentales: metro, kilogramo, segundo y amperio (véase el t. I). En este sistema, por unidad de fuerza se ha adoptado 1 newton =  $10^5$  dinas, por unidad de trabajo, 1 julio =  $10^7$  ergios y por unidad de potencia, 1 vatio =  $10^7$  ergios/seg. La unidad de intensidad de la corriente, el amperio, se establece basándose en la fuerza de acción recíproca de dos conductores paralelos infinitamente largos recorridos por corrientes (véase el § 196): el amperio es igual a la intensidad de la corriente que, fluyendo por dos conductores paralelos infinitamente largos y situados a la distancia de 1 m uno de otro en el vacío, crea entre ellos una fuerza de acción recíproca igual a  $1 \cdot 10^{-7}$  newtones por cada metro de longitud. Basándonos en esta definición tenemos que  $1 \text{ A} = 0,1$

Tabla XXI

Relaciones de las unidades de los sistemas absolutos

$$c = 2,998 \cdot 10^{10} \approx 3 \cdot 10^{10}$$

Magnitud	1 unidad <i>CGSE</i> es igual a ... unida- des <i>CGSM</i>	1 unidad física es igual a	
		... unida- des <i>CGSM</i>	... unida- des <i>CGSE</i>
Constante dieléctrica $\epsilon$ . . . . .	$1/c^2$	$1/c^2$	1
Carga eléctrica $q$ . . . . .	$1/c$	$1/c$	1
Intensidad del campo eléctrico $E$ . . . . .	$c$	$c$	1
Inducción del campo eléctrico $D$ . . . . .	$1/c$	$1/c$	1
Potencial $V$ . . . . .	$c$	$c$	1
Intensidad de la corriente $I$ . . . . .	$1/c$	$1/c$	1
Resistencia $R$ . . . . .	$c^2$	$c^2$	1
Capacidad $C$ . . . . .	$1/c^2$	$1/c^2$	1
Permeabilidad magnética $\mu$ . . . . .	$c^2$	1	$1/c^2$
Excitación del campo magnético $H$ . . . . .	$1/c$	1	$c$
Inducción del campo magnético $B$ . . . . .	$c$	1	$1/c$
Flujo de inducción magnética $\Phi$ . . . . .	$c$	1	$1/c$
Coefficiente de autoinducción $L$ . . . . .	$c^2$	1	$1/c^2$

unidades CGSM de intensidad de corriente. Las demás unidades eléctricas se introducen basándose en las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} 1 \text{ amperio} \times 1 \text{ seg} &= 1 \text{ culombio}, \\ 1 \text{ amperio} \times 1 \text{ voltio} &= 1 \text{ vatio}, \\ 1 \text{ amperio} \times 1 \text{ ohmio} &= 1 \text{ voltio}, \\ 1 \text{ faradio} \times 1 \text{ voltio} &= 1 \text{ culombio}. \end{aligned}$$

Las unidades magnéticas se introducen basándose en la ley de inducción, a saber: por unidad de flujo magnético  $\Phi$  se toma el flujo a través de un contorno de 1 ohmio de resistencia en el cual, al disminuir el flujo hasta cero, bajo la acción de la f. e. m. de inducción se transporta por el contorno 1 C de cantidad de electricidad. Esta unidad se denomina *weber*. Como es fácil de calcular,  $1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ Mx}$ .

La unidad de inducción magnética  $B$  se establece basándose en la relación:

$$B_n = \frac{d\Phi}{S},$$

de donde por unidad de inducción magnética se toma la inducción en la zona del espacio donde el flujo magnético uniforme de 1 Wb atraviesa una superficie normal al mismo de  $1 \text{ m}^2$ . Esta unidad de inducción magnética se denomina *tesla*. Entre esta unidad de inducción magnética y el gaussio existe la siguiente relación:

$$1 \text{ tesla} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 10^4 \text{ gaussios}.$$

En el sistema internacional de unidades se utiliza la denominada notación "racional" de las fórmulas. Se basa en la elección de las unidades de medición de tal manera, que las ecuaciones de Maxwell [(4b) y (5a) de la pág. 533 y las (8b) y (9a) de la pág. 535] tengan la forma:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{i} + \nabla \times \mathbf{D}, & \text{rot } \mathbf{E} &= -\mathbf{B}, \\ \text{div } \mathbf{D} &= \rho, & \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Las relaciones entre los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ , y  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  vienen expresadas respectivamente por las fórmulas:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

En este caso, las leyes de Coulomb y de Biot-Savart-Laplace se escribirán de la siguiente manera:

$$I = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon r^2}, \quad (11)$$

$$\Delta H = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{I M \sin \alpha}{r^2}. \quad (12)$$

Para el vacío, la ley de Coulomb (11) se puede escribir de la siguiente manera:

$$f = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

donde  $\epsilon_0$  es la "constante dieléctrica del vacío". Como es fácil de calcular, la "constante dieléctrica del vacío"  $\epsilon_0$  en el sistema internacional es una magnitud dimensional e igual a

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2 \cdot 10^{-7}},$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío en m/seg, es decir,  $c=2,998 \cdot 10^8$  m/seg.

Tabla XXII

## Sistema MKSA de unidades

Magnitud	Denominación	Dimensiones	1 unidad MKSA es igual a ... unidades CGSM
Constante dieléctrica $\epsilon$ . . . . .	—	$L^{-2}T^2$	$4\pi 10^{-7} \cong 1,26 \cdot 10^{-9}$
Carga eléctrica $q$ . . . . .	culombio	$L^{1/2}M^{1/2}$	$10^{-1}$
Intensidad del campo eléctrico $E$ . . . . .	voltio por metro	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}$	$10^6$
Inducción del campo eléctrico $D$ . . . . .	culombio por metro cuadrado	$L^{-3/2}M^{1/2}$	$4\pi 10^{-4} \cong 1,26$
Potencial $V$ . . . . .	voltio	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$10^8$
Intensidad de corriente $I$ . . . . .	amperio	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$10^{-1}$
Resistencia $R$ . . . . .	ohmio	$LT^{-1}$	$10^1$
Capacidad $C$ . . . . .	faradio	$L^{-1}T^2$	$10^{-9}$
Permeabilidad magnética $\mu$ . . . . .	—	sin dimensiones	$\frac{10^7}{4\pi} \cong 7,96 \cdot 10^5$
Excitación magnética $H$ . . . . .	amperio por metro	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$4\pi 10^{-3} \cong 1,26 \cdot 10^{-2}$
Inducción del campo magnético $B$ . . . . .	tesla	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$10^1$
Flujo de inducción magnética $\Phi$ . . . . .	weber	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$10^8$
Coefficiente de autoinducción $L$ . . . . .	henrio	$L$	$10^9$

De la ley de Biot-Savart-Laplace escrita de la forma (12) se deduce que la excitación del campo magnético  $H$  a la distancia  $r$  de un conductor recto y largo es

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

A base de esta igualdad se establece la unidad de medición de la excitación magnética de "amperio por metro" (indicada en la pág. 326), que es igual a la excitación magnética que aparece a la distancia  $r = \frac{1}{2\pi}$  m de un conductor recto y largo recorrido por una corriente de un amperio.

Comparando las unidades de  $B$  y de  $H$  se deduce que en el sistema práctico, la "permeabilidad magnética del vacío" es  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  (número sin dimensiones).

El sistema internacional de unidades coincide con el "sistema práctico" adoptado últimamente en la URSS, denominado sistema *MKSA*. Las unidades de medición de las magnitudes eléctricas y magnéticas en el sistema internacional se dan en la tabla XXII. Las dimensiones de las magnitudes en el sistema internacional coinciden con las dimensiones en el sistema *CGSM*, y todas las unidades eléctricas y magnéticas del sistema internacional son múltiples de las del sistema *CGSM*.



## INDICE ALFABETICO

- Acoplamiento por reacción 520  
 Acumulador 245  
 Acumulador alcalino ferro-níquel 247  
 Acumulador de plomo 246  
 Aopinus 14  
 Agrupación de condensadores en paralelo 114  
 Agrupación de condensadores en serie 114  
 Aislador 15  
*Akátov* N. 362  
 Amperímetro 151, 404  
 Amperímetro térmico 152  
 Amperio 133, 565  
 Amperio hora 247  
 Amperio internacional 565  
 Amperio-vuelta 394  
 Amplitud de la (intensidad de) corriente 486, 493  
 Amplitud de la fuerza electromotriz 484  
 Anión 228  
 Anodo 215  
 Antena 553  
 Aplicación del teorema de Ostrogradski-Gauss 35  
 Arco eléctrico 293  
*Arkádiev* V. 363, 551  
 Autoinducción 463
- Balanza de torsión 18  
 Banda de conducción 211  
 Barrera 139, 214  
 Batería 189  
 Batería termoelectrónica 206  
*Bogoliúbov* N. 138  
 Bobina de inducción 503  
 Brújula de tangentes 402
- Caída (de tensión) catódica 291  
 Caída de potencial 175  
 Caída normal de tensión 291  
 Caja de Faraday 58  
 Caja de resistencias 150  
 Campo electromagnético 526  
 Campo electrostático 128  
 Campo magnético, 295, 299  
 Campo magnético de corrientes 305, 343  
 Campo magnético de las cargas en movimiento 413, 416  
 Campo magnético de un imán permanente 365  
 Campo magnético de un solenoide 312  
 Campo magnético giratorio 509  
 Cantidad de electricidad 19  
 Capa de detención 139, 214  
 Capacidad 65  
 Capacidad de un acumulador 247  
 Capacidad de un conductor 71  
 Capacidad eléctrica 65  
 Característica de caída (del arco) 293  
 Carga aparente 85  
 Carga del electrón 124, 127  
 Carga eléctrica 11  
 Carga específica de los iones positivos 433  
 Carga específica del electrón 427, 429  
 Carga libre 85  
 Carga puntual (concentrada) 18  
 Cation 228  
 Cátodo 215  
 Centelleo (parpadeo) de la corriente anódica 274  
 Circuito de corriente alterna 483  
 Circuito de corriente continua 171  
 Circuito magnético 392

- Circulación del vector de excitación magnética 334  
 Circulación del vector de intensidad de las fuerzas ajenas 177  
 Circulación del vector de intensidad del campo eléctrico 48  
 Coeficiente de autoinducción 465  
 Coeficiente de autoinducción de un cable concéntrico 479  
 Coeficiente de autoinducción del solenoide 466  
 Coeficiente de inducción mutua 471  
 Coeficiente de recombinación 232  
 Colisión de los electrones con los átomos y las moléculas 279  
 Concentración equivalente 238  
 Condensador 67  
 Condensador cilíndrico 117  
 Condensador con anillo de protección 120  
 Condensador con láminas de dieléctricos 116  
 Condensador de capacidad variable 118  
 Condensador electrolítico 248  
 Condensador esférico 117  
 Condensador plano 67  
 Condiciones límites del vector de excitación magnética 376  
 Condiciones límites del vector de desplazamiento eléctrico 100  
 Condiciones límites del vector de inducción magnética 375, 376  
 Condiciones límites del vector de intensidad del campo electrostático 99  
 Conducción 136  
 Conducción electrolítica 225, 236, 248  
 Conducción electrolítica de los sólidos 248  
 Conducción por agente ionizante 251, 253  
 Conducción sin agente ionizante 251, 288  
 Conductancia equivalente 239  
 Conductibilidad 136  
 Conductibilidad de los semiconductores 208  
 Conductibilidad eléctrica 136, 165  
 Conductibilidad equivalente 239  
 Conductibilidad (eléctrica) mixta 212  
 Conductibilidad por defecto (por huecos) 212  
 Conductibilidad por exceso (por electrones) 212  
 Conductor 15  
 Conductor de primera clase (o electrónico) 15  
 Conductor de segunda clase (o electrolítico) 15  
 Conductor en un campo electrostático 56  
 Conexión de conductores en paralelo 148  
 Conexión de conductores en serie 148  
 Conexión de pilas en paralelo 190  
 Conexión de pilas en serie 189  
 Conexión en estrella 170  
 Conexión en triángulo 508  
 Conservación de las cargas 142  
 Constante de Curie 362  
 Constante de emisión 219  
 Constante de Hall 424  
 Constante de Planck 270  
 Constante dieléctrica 79  
 Constante electrodinámica 562  
 Constante piezoeléctrica 111  
 Contorno con corriente en un campo magnético uniforme 326  
 Contorno con corriente en un campo magnético variable 329  
 Contorno recorrido por una corriente 296  
 Corriente alterna 483, 488, 491, 504  
 Corriente anódica 216  
 Corriente continua 132  
 Corriente cuasiestacionaria 483  
 Corriente de convección 416  
 Corriente de cortocircuito 179  
 Corriente de desplazamiento 324  
 Corriente de inducción 449  
 Corriente de saturación 217  
 Corriente electrónica (termoiónica) en el vacío 215, 267, 270  
 Corriente en vacío 502  
 Corriente molecular 341  
 Corriente trifásica 507  
 Corrientes de Foucault 481  
 Cuerpo diamagnético 341  
 Cuerpo magnético 340  
 Cuerpo paramagnético 341  
 Cuerpos ferromagnéticos 341  
 Culombio 21  
 Chispa 293  
  
*Davidov B.* 214  
 Densidad de energía 75, 477, 549  
 Densidad de la corriente 139, 140  
 Densidad de la energía eléctrica 75  
 Densidad de la energía magnética 477

- Densidad superficial de las cargas eléctricas 36  
 Densidad volumétrica de las cargas eléctricas 36  
 Dependencia de la resistividad respecto a la temperatura 136  
 Descarga aperiódica 514  
 Descarga luminiscente 290  
 Descarga oscilante 510  
 Desfase 485, 489, 493, 517  
 Detección de ondas electromagnéticas 551  
 Diámetro eficaz 262, 278  
*Diejtjar* M. 362  
 Dieléctrico 15, 16, 81  
 Dieléctrico dipolar 108  
 Diferencia de fase 485, 489, 493, 517  
 Diferencia de potencial 46  
 Diferencia de potencial de contacto 193  
 Dínamo 498  
 Diodo 505  
 Dipolo 24, 63  
 Disociación 232  
 Disociación electrofítica 232  
 Distancia disruptiva 294  
 Divergencia del vector de inducción eléctrica 533  
 Divergencia del vector de inducción magnética 534  
 Divergencia del vector de intensidad del campo eléctrico 57  
*Dolico-Dobrowolski* M. 41, 509  
*Dorfman* Y. 364  
  
 Ecuación de Kirchhoff para el circuito magnético 399  
 Ecuaciones de Maxwell 531  
 Ecuaciones de Maxwell-Lorentz 536  
 Efecto de centelleo (de parpaleo o fluctuante) 274  
 Efecto de Schottky 274  
 Efecto Hall 424  
 Efecto pelicular 481  
 Efecto Peltier 207  
 Efecto piezoeléctrico 111  
*Eijenvald* A. 415  
 Electrización por frotamiento 11  
 Electrización por influencia 14  
 Electrólisis 225, 244  
 Electrólito 225  
 Electrometalurgia 247  
 Electrómetro 13  
 Electrómetro de cuadrantes 123  
 Electrómetro de cuerdas 122  
 Electromotor 498, 509  
 Electrón 15, 127  
 Electrón positivo 127  
 Electrón-voltio 195  
 Electrones libres de los conductores 156  
 Electroscopio 12  
 Electrostática 9  
 Electrostricción 85, 112  
 Elemento termoeléctrico 206  
 Emisión secundaria 220  
 Emisión termoiónica 222  
 Energía de ionización 280  
 Energía de los iones en un electrólito 234  
 Energía de un circuito de corriente continua 178  
 Energía de un conductor cargado 72  
 Energía de un sistema de cargas 69  
 Energía del campo electrostático 74  
 Energía del campo magnético 473  
 Energía del condensador 72, 82  
 Energía del dipolo 74  
 Equivalente electroquímico 229  
 Equivalente químico 229  
 Espacio obscuro de Faraday 290  
 Espectrógrafo de masas 437  
 Estricción magnética 361  
 Excitación de ondas electromagnéticas 551  
 Excitación magnética 298  
 Excitación magnética de un conductor rectilíneo o infinito con corriente 309  
 Excitación magnética de una corriente que fluye por un conductor cilíndrico 338  
 Excitación magnética en el centro de una corriente circular 309  
 Excitación magnética en el eje de un solenoide 312  
 Excitación magnética en el eje de un toroide 337  
 Excitación magnética en el eje de una corriente circular 310  
 Experimento de Eijenvald 417  
 Experimento de Einstein y Haas-Barnett 346  
 Experimento de Frank y Hertz 283  
 Experimento de Stern y Gerlach 347  
 Experimento de Stuart y Tolman 459  
 Experimento de Trouton y Noble 131, 421  
 Extracorrente de cierre 464, 468  
 Extracorrente de ruptura 464, 468

- Faraday (F) 230  
 Faradio 67  
 Fenómeno secundario 227  
 Fenómeno termoelectrónico 203  
 Ferritos 364  
 Ferromagnetismo 355, 361  
 Fluctuación de la intensidad de la corriente 273  
 Flujo del vector de inducción 99  
 Flujo del vector de inducción magnética 371  
 Flujo del vector de inducción magnética a través de una superficie cerrada 372  
 Flujo eléctrico 30, 303  
 Fluxómetro 458  
 Foco del haz de electrones 444  
 Fok V. 249, 555  
 Fórmula de Boguslávski-Langmuir 247, 270  
 Fórmula de Lorentz 410  
 Frecuencia de resonancia 515  
 Frenkel Y. 364  
 Fuerza coercitiva 359  
 Fuerza de Lorentz 410  
 Fuerza electromotriz 175  
 Fuerza electromotriz de autoinducción 465  
 Fuerza electromotriz de inducción 450, 460  
 Fuerza electromotriz de polarización 242  
 Fuerza electromotriz eficaz 489  
 Fuerza magnetomotriz 393  
 Fuerza termoelectrónica 203  
 Fuerzas que actúan sobre la corriente en un campo magnético 319  
  
 Galvanómetro 402  
 Galvanómetro balístico 457  
 Galvanómetro de cuerda 406  
 Galvanómetro de espejo 406  
 Galvanómetro de tangentes 402  
 Galvanómetro térmico 150  
 Galvanoplastia 248  
 Generador de corriente alterna 499  
 Generador de corriente continua 500  
 Gradiente de la excitación magnética 332  
 Gradiente del potencial 53  
 Grado de disociación 232  
  
 Henrio 466  
 Hidratación de iones 228  
  
 Hipótesis de Maxwell 525  
 Histéresis 111, 359  
  
 Imán permanente 365  
 Imanación remanente 359  
 Impedancia 486  
 Impureza aceptadora 212  
 Impureza donadora 212  
 Inducción electromagnética 447  
 Inducción electrostática (véase vector de desplazamiento eléctrico)  
 Inducción magnética 343  
 Inducción mutua 471  
 Intensidad de la corriente 133  
 Intensidad del campo electrostático 22, 51  
 Intensidad del campo electrostático de dos planos infinitos 38  
 Intensidad del campo electrostático de un cilindro 41  
 Intensidad del campo electrostático de un plano infinito 36  
 Intensidad del campo electrostático de una carga puntual 23  
 Intensidad del campo electrostático de una esfera uniformemente cargada 40, 88  
 Intensidad del campo electrostático de una superficie esférica cargada 39  
 Intensidad del campo electrostático del dipolo 24  
 Intensidad del campo electrostático en las proximidades de un conductor  $C_0$   
 Intensidad del campo electrostático en un dieléctrico 87  
 Intensidad máxima de la corriente 486, 493  
 Ioffe 214, 346, 418  
 Ion 16  
 Ionización 280  
 Ionosfera 556  
 Isótopo 436  
  
 Jacobi 11, 248, 501  
  
 Kapitsa P. 346  
 Kenotrón 505  
 Kubetski 221  
  
 Landáu L. 138  
 Lébedev A. 446  
 Lébedev P. 11, 551

- Lenin V. 11, 129, 430  
 Lente electrónica 441  
 Lenz H. 145, 450  
 Levitskaya 551  
 Ley de Ampere 320  
 Ley de Biot-Savart-Laplace 307  
 Ley de Coulomb 20, 93  
 Ley de Child-Langmuir 217, 270  
 Ley de Faraday de la fuerza electro-  
 motriz de inducción 452  
 Ley de Faraday, primera 228  
 Ley de Faraday, segunda 229  
 Ley de Kirchhoff, primera 183  
 Ley de Kirchhoff, segunda 184  
 Ley de Lenz-Joule 145  
 Ley de Ohm 134, 160, 164  
 Ley de Ohm para un circuito cerra-  
 do 175  
 Ley de Ohm para un circuito hetero-  
 géneo 181  
 Ley de Wiedemann-Franz 165  
 Leyes del circuito magnético 392  
 Líneas de flujo eléctrico 143  
 Líneas de fuerza del campo electro-  
 stático 27, 51  
 Líneas de fuerza del campo magnético  
 300, 309, 376  
 Líneas de inducción electrostática  
 97, 100  
 Líneas de inducción magnética 371  
 Lomonósov M. 13  
 Lukirski 249  
  
 Magnetismo remanente 359  
 Magnetización espontánea 363  
 Magnetón de Bohr 348  
 Mandelstam L. 556  
 Masa del electrón 126, 160, 430  
 Masa magnética 368  
 Maxwellio 564  
 Medición del potencial 120  
 Megohmio 135  
 Método de afluencia 252  
 Método de compensación 191  
 Método de deformación constante  
 253  
 Método de las parábolas 433  
 Microfaradio 67  
 Microscopio electrónico 444  
 Molécula polar (heteropolar) 83  
 Momento eléctrico de la molécula  
 108  
 Momento eléctrico del dipolo 25  
 Momento magnético 298, 329  
 Momento magnético de la molécula  
 344  
 Momento magnético del átomo 344  
 Momento magnético del cuadro 298  
 Momento magnético del electrón 344,  
 Momento magnético del imán 368  
 Motor con excitación en derivación  
 500  
 Motor con excitación en serie 500  
 Mott 214  
 Movilidad de los electrones 284  
 Movilidad de los iones 238, 255, 259,  
 264  
 Movimiento del electrón en un campo  
 eléctrico 429, 431  
 Movimiento del electrón en un campo  
 magnético, 441 427, 430  
  
 Oerstedio 560  
 Onda electromagnética 538  
 Onda planopolarizada 548  
 Óptica electrónica 442  
 Oscilaciones continuas 514, 519  
 Oscilaciones de resonancia 515  
 Oscilaciones forzadas 515  
 Oscilador de Hertz 540  
 Oscilógrafo de rayos catódicos 439  
  
 Pantalla magnética 377  
 Papalari N. 159, 556  
 Par termoelectrónico 204  
 Paso de la electricidad a través de  
 los gases 254  
 Perforación del dieléctrico 17, 249  
 Período de una descarga oscilante  
 511, 513  
 Permalcoación 360  
 Permeabilidad magnética 352, 353  
 Peso equivalente 229  
 Petrov V. 293  
 Pila 172, 200  
 Pila Daniell 172, 202, 245  
 Pila de Leclanché 173, 245  
 Pila polarizada 242  
 Pila patrón 192  
 Pila termoelectrónica 206  
 Plasma 292  
 Polarización de los electrodos 242  
 Polarización de un dieléctrico 17, 80  
 Polarización molecular 109  
 Polo magnético 368  
 Popov A. 551, 556  
 Positrón 15, 127  
 Potencia de la corriente alterna 488  
 Potencia de la corriente continua 178  
 Potencial 42

- Potencial de descomposición 244  
 Potencial de ionización 280, 281  
 Potencial de un sistema de cargas puntuales 44  
 Potencial de una carga puntual 45  
 Potencial del campo eléctrico 42, 49  
 Protección electrostática 59  
 Puente de Wheatstone 186  
 Punto de Curio 362
- Radar 556  
 Radiolocalización 556  
 Reacción secundaria 227  
 Recombinación 232, 254  
 Recorrido libre del electrón 275  
 Recorrido libre medio 276  
 Rectificador de germanio 504  
 Rectificador de mercurio 505  
 Rectificador de selenio 505  
 Rectificador seco 209  
 Registro de ondas electromagnéticas 551  
 Regla de la mano izquierda 321  
 Regla de Lenz 450  
 Regla del sacacorchos 300, 321  
 Relación entre el potencial y la carga volumétrica 56  
 Rendimiento de los acumuladores 247  
 Reóstato 154  
 Reóstato de arranque 501  
 Resistencia 134, 154  
 Resistencia aparente 486  
 Resistencia de un circuito magnético 393  
 Resistencia en derivación 150  
 Resistencia específica 135  
 Resistencia exterior 173  
 Resistencia inductiva 486  
 Resistencia interior (interna) 173  
 Resistividad 135  
 Resonancia 493, 516  
 Richman G. 13  
 Rotación del vector de excitación magnética 533  
 Rotación del vector de intensidad del campo eléctrico 535  
 Rosing B. 362  
 Ruido de Schottky 274
- Sal de Rochelle (sal de Seignette) 111  
 Saturación magnética 358  
 Schottky 214  
 Schúkartev S. 249  
 Sección eficaz de las moléculas 278  
 Semiconductor 16, 139
- Serie de Volta 193  
 Shálnikov A. 138  
 Sistema absoluto (físico) de unidades 314, 563  
 Sistema estático de imanes (o de agujas imantadas) 403  
 Sistema electromagnético internacional de unidades 314, 317, 562  
 Sistema electrostático internacional de unidades 314, 561  
 Sistema internacional de unidades 565  
 Slaviánov N. 11, 293  
 Solenoide 301  
 Solvato 237  
 Spin 348  
 Stoliétov A. 358  
 Superconductibilidad 137, 147  
 Superficies equipotenciales 49  
 Susceptibilidad eléctrica 81  
 Susceptibilidad magnética 352
- Temperatura de Curio 361  
 Teorema de Ostrogradski—Gauss 32  
 Teorema de Ostrogradski—Gauss para el flujo de inducción electrostática 103  
 Teorema de Ostrogradski—Gauss para el flujo de inducción magnética 372  
 Teoría de la conductibilidad eléctrica 160, 167  
 Teoría de la relatividad 422  
 Teorías de las bandas de conducción 211  
 Teoría electrónica de la conductibilidad 160  
 Termoelemento 206  
 Termoelemento al vacío 206  
 Termo-pila 206  
 Tesla 564  
 Toroide 337  
 Trabajo de giro de un cuadro 391  
 Trabajo de las fuerzas del campo electrostático 47  
 Trabajo de rotación de un disco 391  
 Trabajo de salida 195  
 Trabajo de desplazamiento de un contorno 386  
 Trabajo invertido en la histéresis 477  
 Trabajo realizado al desplazar una carga por una trayectoria cerrada 45  
 Transformador 501  
 Trapeznikova O. 249  
 Tubo catódico 215  
 Tubo de tres electrodos 519

- Unidad electromagnética absoluta de autoinducción 465  
 Unidad electromagnética absoluta de cantidad de electricidad 318  
 Unidad electromagnética absoluta de excitación magnética 318  
 Unidad electromagnética absoluta de flujo de inducción 256  
 Unidad electromagnética absoluta de fuerza electromotriz 453  
 Unidad electromagnética absoluta (CGSM) de inducción magnética 343  
 Unidad electromagnética absoluta de intensidad de corriente 315  
 Unidad electrostática absoluta de capacidad eléctrica 67  
 Unidad electrostática absoluta de carga 20  
 Unidad electrostática absoluta de diferencia de potencial 46  
 Unidad electrostática absoluta de excitación magnética 318, 561  
 Unidad electrostática absoluta de inducción magnética 562  
 Unidad electrostática absoluta de intensidad de corriente 133  
 Unidad electrostática absoluta de resistencia 134  
 Unidad electrostática absoluta de intensidad del campo eléctrico 22  
 Unidad práctica de capacidad eléctrica 66  
 Unidad práctica de carga 20  
 Unidad práctica de diferencia de potencial 46  
 Unidad práctica de excitación magnética 314, 561  
 Unidad práctica de inducción magnética 563  
 Unidad práctica de intensidad de corriente 133  
 Unidad práctica de resistencia 135  
 Unidad práctica del coeficiente de inducción mutua 471  
*Usaguin I.* 501  
 Valencia 229  
 Valor eficaz de la intensidad de la corriente 489  
 Válvula amplificadora 553  
 Válvula de tres electrodos 519  
 Vatímetro 407  
 Vector de desplazamiento eléctrico 97  
 Vector de imanación 357  
 Vector de polarización 84  
 Vector de Umov-Poynting 549  
 Velocidad de las ondas electromagnéticas 545, 549  
 Velocidad de los electrones 268  
*Vértsner V.* 446  
 Voltímetro 152  
 Voltímetro electrostático 150  
 Voltio 47  
*Vnl B.* 141  
*Yáblochkov (Jablochkov) P.* 11, 293, 501

### *Estimados lectores:*

La editorial MIR publica literatura técnico — científica y de ficción, en la que figuran los mejores libros soviéticos de divulgación científica y de texto, traducidos al español.

#### **PERELMAN Y. Física Recreativa, Libro I**

¿Puede cogerse con la mano una bala disparada? ¿Por qué no se puede conseguir el «movimiento continuo»? ¿Cómo se produce el espejismo?

Este libro da respuesta a éstas y muchas otras preguntas interesantes.

«Física Recreativa» es el mejor libro del gran divulgador soviético Yakov Perelmán, autor también de «Astronomía Recreativa», «Algebra Recreativa», «Matemáticas Recreativas», «Mecánica Recreativa» y muchos otros libros. La «Física Recreativa» ha sido editada 17 veces en ruso y traducida a varios idiomas. Su éxito se debe al extraordinario talento del autor, que ha sabido describir y explicar de forma viva y amena hechos y fenómenos ordinarios, con los cuales nos tropezamos cada día, aunque con frecuencia no nos damos cuenta de su profundo sentido físico.

#### **PERELMAN Y. Física Recreativa, Libro II**

Este segundo libro de «Física Recreativa» no es continuación del primero. Se trata de una obra independiente que abarca un círculo de fenómenos aún mayor. El lector encontrará en ella un gran número de proyectos de máquinas para conseguir el «movimiento continuo», ilusiones ópticas muy interesantes y tendrá ocasión de recordar cómo el héroe de Mark Twain hirvió su barómetro para hallar la altura del lugar.

Los sencillos experimentos que se describen en este libro ayudan a profundizar en la esencia de procesos físicos que, aunque parecen ordinarios exteriormente, proporcionan un rico material para reflexionar.

Es un libro cuya comprensión está al alcance de todos los lectores.



## **KISELEV A., KRASNOV M., MAKARENKO G. Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias**

Los autores de este libro son Mijail Krasnov, Grigori Makarenko, candidatos a doctores en ciencias físico-matemáticas y docentes del Instituto Energético de Moscú, y Alejandro Kiselev, colaborador científico superior del Instituto Unificado de investigaciones nucleares de la ciudad de Dubno.

En este libro se han recopilado cerca de 1 000 problemas y ejercicios del curso de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Se ha incluido también el método de isoclinas para las ecuaciones de I y II orden, problemas para hallar las trayectorias ortogonales, dependencia e independencia lineales de los sistemas de funciones. Además, contiene problemas para hallar la estabilidad de las soluciones, el método del parámetro pequeño, el método para resolver ecuaciones y los sistemas.

Cada párrafo empieza con una breve introducción teórica. Después se exponen las determinaciones y métodos principales de solución de los problemas. Todos los problemas van acompañados de su resultado; para algunos de ellos hay indicaciones de cómo resolverlos.

En esta obra se ha incluido también cierta cantidad de problemas muy complejos.

Es un libro de texto para los estudiantes de los centros de enseñanza superior. Ha aparecido dos veces editado en ruso.

## **KUROSCH A. Curso de álgebra superior**

Este curso de álgebra superior para los estudiantes de las facultades de matemáticas de las universidades, elaborado por Alejandro Kurosch, doctor en ciencias físico-matemáticas de la Universidad Estatal de Moscú, contiene los fundamentos de la álgebra lineal y de la álgebra de polinomios. Se analizan los sistemas arbitrarios de las ecuaciones de primer grado, se describe la teoría de los espacios multidimensionales vectoriales y euclídeos. Se examinan las ecuaciones con una incógnita de grado arbitrario, así como las bases correspondientes de la teoría de los campos, anillos y grupos.

El material del libro está expuesto a un alto nivel científico. Este libro goza de gran popularidad entre los pedagogos y profesores, así como entre los estudiantes de las universidades y centros de enseñanza superior politécnica de la URSS.

Esta obra ha aparecido ocho veces editada en ruso y se ha traducido a muchos otros idiomas.

*Rogamos dirijan sus pedidos de literatura a las firmas que en su país se dedican a la venta de libros y que tienen relaciones comerciales con VO «Mezhdunarodnaya Kniga» (Moscú).*