

## *Propagación de la luz en medios en movimiento*

§ 296. Experimentos con cuerpos en movimiento. El estudio de la propagación de la luz en los medios en movimiento jugó un papel de extraordinaria importancia en el desarrollo de nuestros conocimientos sobre la naturaleza de los fenómenos físicos y, como después se esclareció, sobre la naturaleza del espacio y del tiempo. La teoría ondulatoria de la luz, como indicamos en el § 250, condujo a la hipótesis del éter como medio que llenaba todo el espacio universal y calaba todos los cuerpos. Al principio se supuso que al éter se le podían aplicar las leyes de la mecánica clásica, y que, al ser un medio mecánico, podía servir de sistema de referencia, es decir, que podría determinarse el movimiento de los cuerpos con relación al éter. El hecho de que el desarrollo de la teoría electromagnética de la luz diera lugar a la sustitución de la idea del éter como medio mecánico por conceptos electromagnéticos más generales no influyó en el criterio que admitía la posibilidad de determinar el movimiento de los cuerpos con respecto al éter (véase el t. II, § 216). Como se suponía que el éter era un medio que llenaba todo el espacio universal, el movimiento con respecto a él se consideraba como movimiento «absoluto». En adelante se entenderá por movimiento «absoluto» al que tiene lugar con relación a este inmóvil hipotético.

La hipótesis de la existencia del éter planteó la realización de una serie de experimentos encaminados a estudiar las propiedades del éter y el carácter de su interacción con los cuerpos ordinarios. Ante todo se planteó el problema de si los cuerpos transparentes, al moverse, arrastraban o no al éter que había en ellos. La respuesta a este problema debía darla el experimento llevado a cabo por Fizeau en 1851. Este experimento se realizó de acuerdo con el esquema siguiente (fig. 189): el rayo de luz  $S$  incide sobre la lámina semiplateada  $A$  y se desdobla originando los rayos  $AB$  y  $AC$ . Los espejos  $B$ ,  $C$  y  $D$ , colocados formando ángulos de  $45^\circ$  con los rayos que sobre ellos caen, hacen que estos últimos giren  $90^\circ$ . De esta forma, los rayos desdoblados en  $A$  recorrerán la instalación, uno en el sentido de las agujas del reloj y otro en el inverso. Al llegar de nuevo al espejo semitransparente  $A$ , estos rayos vuelven a unirse, lo que permite observar una figura de interferencia. En el camino a recorrer por los rayos se intercalan unos tubos  $L_1$  y  $L_2$  por los que circula agua a la velocidad  $u$  en las direcciones que se indican en la figura. Uno de los rayos, al pasar a lo largo de los tubos, va siempre siguiendo

la corriente, mientras que el otro va en contra. Si el éter que hay en el agua es arrastrado por ella, ambos rayos, después de pasar por la instalación y unirse en el punto  $O$ , tendrán cierta diferencia de fase, debida a la diferencia entre los tiempos que emplean en recorrer el camino. Esta diferencia de fase determina el carácter de la interferencia en  $O$ . La diferencia entre los tiempos que tardan los rayos en recorrer la instalación puede deberse únicamente al movimiento del agua, puesto que por lo demás sus caminos son iguales. Llamemos  $v$  a la velocidad de la luz en el agua en reposo. Esta velocidad  $v$ , desde el punto de vista de la teoría del éter, es la velocidad de la luz en el

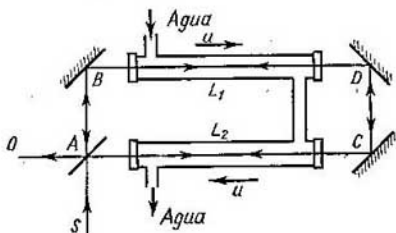


Fig. 189. Esquema del experimento de Fizeau, de arrastre del éter por el agua corriente.

éter que se encuentra en el agua en reposo. Supongamos que el éter es arrastrado por el agua en movimiento, pero no total, sino parcialmente, es decir, que su velocidad con respecto a la instalación es igual a  $\alpha u$ , donde  $\alpha$  es menor o igual que la unidad y debe ser hallada como resultado del experimento.

En estas condiciones la velocidad de luz en el agua, con relación a la instalación, para el rayo que se propaga contra la corriente será igual a  $v - \alpha u$ , mientras que para el rayo que lo hace a favor de la corriente será igual a  $v + \alpha u$ . De aquí hallamos que la diferencia entre los tiempos  $\Delta t$  que tardan ambos rayos en hacer su recorrido será

$$\Delta t = \frac{2l}{v - \alpha u} - \frac{2l}{v + \alpha u} = \frac{4l\alpha u}{v^2 - \alpha^2 u^2},$$

siendo  $l$  la longitud de cada uno de los tubos llenos de agua. La diferencia de fase entre los dos rayos  $\delta$  será igual a  $2\pi\nu\Delta t$ , donde  $\nu$  es la frecuencia de la luz. De esta forma resulta que la diferencia de fase  $\delta$  está relacionada con el coeficiente de arrastre  $\alpha$ .

Fizeau obtuvo las figuras de interferencia correspondientes al agua en reposo y en movimiento y midió el desplazamiento experimentado por las franjas de interferencia. Partiendo de este desplazamiento se pudo hallar la diferencia de fase y, por consiguiente, el

coeficiente de arrastre del éter. Los experimentos de Fizeau demostraron que el valor de  $\alpha$  viene expresado por la fórmula

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad (1)$$

donde  $n$  es el índice de refracción del agua\*).

Es decir, por medio de las interferencias quedó establecido que el éter hipotético era arrastrado parcialmente por el medio en movimiento y que el «coeficiente de arrastre»  $\alpha$  dependía del índice de refracción de dicho medio: toda sustancia cuyo índice de refracción sea igual a la unidad no deberá arrastrar al éter.

Los resultados de los experimentos de Fizeau dieron al parecer la posibilidad de hallar el movimiento «absoluto» de la Tierra. Efectivamente, como la atmósfera de aire tiene un índice de refracción  $n$  aproximadamente igual a la unidad, no deberá arrastrar al éter y, por consiguiente, el movimiento de la Tierra con respecto a las partes del éter más próximas a ella será su movimiento «absoluto» en el sentido que hemos dado antes a esta expresión. La idea del experimento para descubrir el movimiento «absoluto» de la Tierra consiste en lo siguiente: supongamos que la Tierra se mueve en el éter, en una dirección determinada con una velocidad  $v$ . Se trata de calcular el tiempo que tardará la luz, que se propaga en el éter con una velocidad  $c$ , en recorrer en la Tierra una distancia  $l$ . Si la luz avanza en la misma dirección en que se mueve la Tierra en el éter, este tiempo será igual a  $\frac{l}{c-v}$ , puesto que la velocidad de la luz con relación a la Tierra será igual a la diferencia entre la velocidad de la luz en el éter y la velocidad de éste con respecto a la Tierra. Es evidente que en el caso en que la luz avanza en dirección contraria al movimiento de la Tierra en el éter el tiempo necesario para recorrer el camino  $l$  será igual a  $\frac{l}{c+v}$ . Supongamos ahora que la luz recorre el camino  $l$  avanzando en dirección perpendicular al supuesto movimiento de la Tierra en el éter. En este caso durante el tiempo  $t$  que emplea la luz en recorrer, *con relación a la Tierra*, un camino  $l = ab$  (fig. 190), la Tierra recorrerá con respecto al éter un espacio  $aa' = vt$ . El camino recorrido por la luz *con relación al éter* vendrá representado por la recta  $ab'$  y el tiempo que tarda en recorrer este camino en el éter podrá determinarse por la correlación

$$t = \frac{\sqrt{l^2 + (vt)^2}}{c},$$

\* Fizeau realizó sus experimentos con el propósito de comprobar la fórmula (1) que había sido hallada anteriormente por Fresnel al elaborar la teoría del éter.

donde en el numerador figura el camino recorrido por el rayo en el éter y en el denominador su velocidad. Despejando  $t$  en esta expresión, obtenemos:

$$t = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2)$$

Como vemos, el tiempo necesario para recorrer un mismo camino en la Tierra debe depender de la dirección que tenga este camino con respecto a la del movimiento de la Tierra en el éter.

Este criterio sirvió de base al experimento llevado a cabo por Michelson en el año 1881 valiéndose de su interferómetro (§ 264).

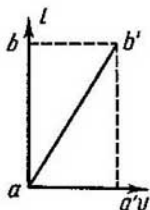


Fig. 190. Esquema para calcular el tiempo que tarda la luz que se propaga en dirección perpendicular al movimiento de la Tierra en recorrer la distancia  $l$ .

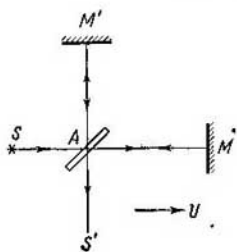


Fig. 191. Esquema del experimento de Michelson.

El esquema de este experimento se muestra en la fig. 191. Un rayo luminoso procedente de un foco  $S$  cae sobre la lámina semiplataada  $A$ , que forma un ángulo de  $45^\circ$  con la dirección del rayo incidente; esta lámina hace que el rayo se divida en dos cuyas direcciones son perpendiculares. Los rayos  $AM$  y  $AM'$ , después de reflejarse en los espejos  $M$  y  $M'$  vuelven a  $A$ , donde otra vez cada rayo se divide en dos partes. Parte de la luz vuelve a la fuente  $S$ , mientras que la restante se dirige a  $S'$ , donde se observa la interferencia. La figura de interferencia sirve para hallar la diferencia de marcha entre ambos rayos. Como los caminos  $AM$  y  $AM'$  son iguales geoméricamente, la diferencia de marcha sólo puede deberse a que los tiempos necesarios para recorrer los caminos  $AM = AM' = l$  sean distintos.

Supongamos que el interferómetro se coloca en la Tierra de tal forma que el «brazo»  $AM$  sea paralelo a la velocidad de la Tierra en el éter. Entonces, el rayo que recorre el camino  $AM$  en una y otra

dirección tardará en hacerlo un tiempo

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

El segundo rayo, que recorre en una y otra dirección el camino  $AM'$ , perpendicular a la dirección del movimiento de la Tierra en el éter, tardará, de acuerdo con la fórmula (2), un tiempo

$$t_2 = 2t = 2 \frac{l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

La diferencia entre estos tiempos será

$$t_2 - t_1 = \frac{2l}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right),$$

lo que, considerando pequeña la relación  $\frac{v}{c} = \beta$ , puede tomar la forma aproximada de

$$t_2 - t_1 \cong -\frac{l\beta^2}{c}.$$

Si se hace que todo el aparato gire  $90^\circ$ , de forma que la dirección  $AM$  coincida con la primitiva  $AM'$ , los rayos cambian su dirección con respecto a la del movimiento de la Tierra y la diferencia entre los tiempos cambia de signo. Por consiguiente, el giro del aparato da lugar a que la diferencia entre los tiempos varíe en la magnitud  $\frac{2l\beta^2}{c}$ . Si la variación de la diferencia entre los tiempos fuera igual a un período de la vibración luminosa, la figura de interferencia se desplazaría en una franja. Pero en nuestro caso, al girar el aparato, la figura deberá desplazarse solamente en una parte de franja igual al cociente de dividir la magnitud  $\frac{2l\beta^2}{c}$  por el período  $T$ , es decir, en la fracción:

$$x = \frac{2l\beta^2}{cT} = \frac{2l}{\lambda} \beta^2,$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda.

Midiendo el desplazamiento de las franjas de interferencia que origina el giro del aparato se puede determinar  $\beta$  y, por consiguiente, la velocidad de la Tierra en el éter.

Para valorar el efecto esperado, supongamos que la velocidad de la Tierra en el éter es igual a su velocidad de traslación por la órbita alrededor del Sol, es decir,  $v = 3 \cdot 10^6$  cm/s. En los últimos experimentos realizados por Michelson (1887) la longitud  $l$  era igual a 11 m y la observación se practicó con luz cuya longitud de onda era igual a  $5,9 \cdot 10^{-5}$  cm, por lo tanto, era de esperar que la

figura de interferencia se desplazase en un número de franjas:

$$x = \frac{2l\beta^2}{\lambda} = \frac{2 \cdot 1,1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}}{5,9 \cdot 10^{-8}} = 0,4.$$

La precisión del aparato permitía registrar desplazamientos de centésimas de franja.

*Pero los experimentos de Michelson no acusaron ningún desplazamiento apreciable.* Estos experimentos se repitieron en diferentes estaciones del año y en puntos geográficos diversos, no obstante sus resultados fueron siempre negativos.

De estos resultados se podía deducir que o el éter era arrastrado totalmente por la atmósfera terrestre, cosa que estaba en contradicción con los resultados del experimento de Fizeau, o que nuestro criterio del éter, como medio capaz de servir de referencia, era falso. La primera conclusión, es decir, la del arrastre total del éter, no sólo está en desacuerdo con el experimento de Fizeau, sino también con el fenómeno de la aberración de la luz. Como sabemos, esta aberración se explica perfectamente basándose en el teorema elemental de la suma de velocidades, suponiendo que la Tierra se mueve en el éter como en un medio en reposo (véase el § 254). Si la aberración de la luz se observa con un telescopio lleno de agua se obtienen resultados que confirman plenamente la teoría del acarreo parcial, es decir, los resultados del experimento de Fizeau. Por consiguiente, si tomásemos como base la hipótesis del éter nos encontramos ante la imposibilidad de explicar al mismo tiempo el experimento de Fizeau, el fenómeno de la aberración de la luz y el experimento de Michelson. Para poder comprender los resultados del experimento de Michelson el éter tendría que tener unas propiedades y para explicar el fenómeno de la aberración de la luz y los resultados del experimento de Fizeau otras, totalmente contrarias.

Los resultados negativos de los experimentos de Michelson provocaron una discusión científica amplia y aguda. Se hicieron intentos de explicar el experimento de Michelson sin renunciar a la teoría del éter. Por ejemplo, se propuso la hipótesis de que la velocidad de la luz en el éter depende de la velocidad que tenga la fuente luminosa y es igual a la suma de la velocidad de dicha fuente y de la que tiene la luz en el éter cuando aquélla está en reposo. Esta hipótesis explicaba el experimento de Michelson, pero no estaba de acuerdo ni con la existencia del efecto Doppler (t. I, § 113) ni con los resultados de las observaciones de focos externos (por ejemplo, de las estrellas dobles). Finalmente, hace pocos años (en 1956) las mediciones directas de la velocidad de la luz emitida por distintos bordes del disco solar, realizados por A. M. Bonch-Bruévich y A. P. Molchánov, demostraron que dicha velocidad no depende de la velocidad de la fuente (en este caso del Sol, que gira sobre su eje).

Pero con anterioridad a esto se había propuesto ya la hipótesis de que las dimensiones de los cuerpos en movimiento disminuyen. Según esta hipótesis todo cuerpo es más corto (en la dirección de avance) cuando se mueve con relación al éter que cuando está en reposo. La relación entre las dimensiones lineales del cuerpo en movimiento y estas mismas dimensiones cuando está en reposo se suponen iguales a

$$\frac{l'}{l} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2}.$$

donde  $v$  es la velocidad del cuerpo en el éter. Esta hipótesis, que explicaba el experimento de Michelson, jugó en su tiempo un gran papel en la teoría electrónica.

Además del experimento de Michelson se realizaron y analizaron otros experimentos con los cuales también se pretendió hallar el movimiento absoluto de la Tierra (véanse, por ejemplo, los experimentos de Trouton y Noble; t. II, § 246), pero todos ellos dieron resultados negativos.

El conjunto de todos estos experimentos demostró que *la hipótesis sobre la posibilidad de determinar el movimiento con relación al éter no corresponde a la realidad y que el éter, como medio, no puede servir de sistema de referencia*. La hipótesis sobre la existencia del éter resulta absurda, puesto que contradice los hechos observados directamente. Los experimentos de Michelson ponen de manifiesto que *la velocidad de la luz en el vacío es igual para todos los sistemas de referencia, independientemente del estado de movimiento en que se encuentren*. En consecuencia llegamos a dos postulados que formuló Einstein en el año 1905: 1) la velocidad «absoluta» de los sistemas no existe, y 2) la velocidad de la luz en el vacío, medida desde dos sistemas que se encuentren mutuamente en movimiento rectilíneo y uniforme tiene un mismo valor (siempre que sea común la unidad con que se mide). Estos dos postulados sirvieron de base a la teoría de la relatividad.

Hay que tener en cuenta que muchos filósofos burgueses interpretan la teoría de la relatividad desde las posiciones de la filosofía relativista idealista. Pero en realidad esta interpretación de la teoría de la relatividad carece de fundamento. La verdadera esencia de la teoría de la relatividad se reduce a explicar las propiedades objetivas del espacio y del tiempo y a establecer las leyes naturales que, existiendo objetivamente, determinan las fórmulas de transición entre los sistemas de referencia que se mueven, unos con respecto a otros, rectilínea y uniformemente.

§ 297. Teoría de la relatividad. La mecánica de Newton estaba supeditada al principio mecánico de la relatividad. Este principio era una consecuencia de las leyes de Newton, que relacionaban

la aceleración de un punto material con las fuerzas que sobre él actúan:

$$m\ddot{x} = f_x; \quad m\ddot{y} = f_y; \quad m\ddot{z} = f_z, \quad (1)$$

donde  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  y  $\ddot{z}$  son las componentes de la aceleración y  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_z$ , las componentes de las fuerzas a lo largo de los ejes de coordenadas.

Las ecuaciones de Newton son ciertas con respecto a cualquier sistema inercial, es decir, con relación a una cantidad innumerable de sistemas de coordenadas que se encuentran recíprocamente en movimiento rectilíneo y uniforme. Como quiera que las leyes de la mecánica (1) son iguales para todos los sistemas inerciales, ningún experimento mecánico realizado dentro de un sistema puede servir para determinar su movimiento rectilíneo y uniforme. Esta última afirmación puede considerarse como el enunciado del principio mecánico de la relatividad (t. I, § 19).

Pero este problema puede considerarse desde otro punto de vista. El paso de un sistema de coordenadas a otro que se mueva con respecto al primero implica una transformación de las coordenadas. Supongamos que un sistema  $XYZ$  está en reposo y que otro  $X'Y'Z'$ , cuyos ejes son paralelos a los del primero, se mueve con respecto a aquél, a lo largo del eje  $OX$ , con una velocidad constante  $v$  (fig. 192). En este caso, las coordenadas tomadas a lo largo de los ejes perpendiculares a la dirección del movimiento serán iguales para ambos sistemas, mientras que las coordenadas correspondientes a la dirección del movimiento estarán relacionadas entre sí por la correlación  $x' = x - vt$ . De esta forma tenemos la siguiente relación entre las coordenadas del punto en ambos sistemas:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (2)$$

Esta correlación entre las coordenadas se conoce con el nombre de *transformación de Galileo*. Como la velocidad  $v$  es constante, de la transformación (2) se deduce que  $\ddot{x}' = \ddot{x}$ ,  $\ddot{y}' = \ddot{y}$  y  $\ddot{z}' = \ddot{z}$ , es decir, que la aceleración del punto con respecto a ambos sistemas es la misma, de donde resulta que las ecuaciones de Newton (1) son iguales en los dos sistemas. La forma de las ecuaciones de Newton

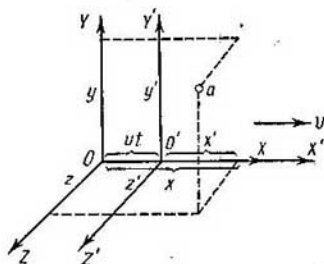


Fig. 192. Dos sistemas de coordenadas que se mueven, el uno con respecto al otro, con una velocidad  $v$ .



no varía al pasar de las coordenadas  $XYZ$  a las coordenadas  $X'Y'Z'$ , o, como se suele decir, *las ecuaciones de la mecánica de Newton son invariantes con respecto a la transformación de Galileo.*

De la transformación de Galileo se deduce el teorema de la suma de las velocidades. Efectivamente, tomando la derivada con respecto al tiempo de la primera ecuación (2), obtenemos:

$$\dot{x}' = \dot{x} - v \quad \text{o} \quad \dot{x} = \dot{x}' + v.$$

Es evidente que  $\dot{x}$  es la proyección de la velocidad sobre el eje  $OX$  (proyección de la velocidad «absoluta»),  $\dot{x}'$  es la proyección de la velocidad sobre el eje  $OX'$  (proyección de la velocidad relativa) y  $v$  es la velocidad de arrastre.

Por consiguiente, la igualdad  $\dot{x} = \dot{x}' + v$  significa que la componente de la velocidad del punto  $a$  a lo largo del eje  $OX$  en el sistema de coordenadas  $XYZ$  es igual a la suma de la proyección de la velocidad del punto  $a$  a lo largo del eje  $OX'$  en el sistema de coordenadas  $X'Y'Z'$  y de la velocidad de arrastre  $v$  del sistema de coordenadas  $X'Y'Z'$  (dirigida como hemos supuesto a lo largo del eje  $OX$ ) con respecto al sistema  $XYZ$ .

Los experimentos de Michelson demostraron que el movimiento «absoluto» de un sistema no puede determinarse ni por medios mecánicos ni basándose en los fenómenos ópticos. Además, tiene importancia señalar que en los intentos hechos para descubrir por procedimientos ópticos el movimiento de un sistema con relación al éter se partió de la suposición de que el teorema de la suma de velocidades era aplicable al campo de los fenómenos ópticos. El cálculo del experimento de Michelson se realizó de acuerdo con este teorema. Por esto, el resultado negativo de este experimento puede interpretarse como demostración de que dicho teorema no es aplicable a este campo y, por consiguiente, de que tampoco se puede aplicar la transformación de Galileo.

Lorentz, que utilizó el modelo del éter para elaborar la teoría electrónica, demostró que los resultados experimentales relativos a la imposibilidad de descubrir el movimiento con relación al éter concuerdan con las ecuaciones teóricas si se admite la hipótesis de que los cuerpos que están en movimiento respecto al éter se acortan y si en el sistema de coordenadas en movimiento se toma una medida de tiempo diferente de la del sistema en reposo. Este resultado fue expresado matemáticamente por Lorentz en forma de una transformación que relaciona las coordenadas y el tiempo de los dos sistemas que recíprocamente se encuentran en movimiento rectilíneo y uniforme. Las fórmulas de la transformación de Lorentz para dos sistemas que se mueven según indica la figura 192 tienen

la forma:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3)$$

Aquí  $\beta = \frac{v}{c}$  es la razón de la velocidad del sistema a la velocidad de la luz.

Cuando se trata de velocidades ordinarias las transformaciones de Lorentz se diferencian poco de las clásicas de Galileo, puesto que la diferencia entre ellas viene determinada por los miembros que contienen la magnitud  $\beta = \frac{v}{c}$ , que generalmente es pequeña; en el límite  $\beta \rightarrow 0$  y la transformación de Lorentz pasa a ser igual a la de Galileo.

Lorentz consideraba que sus transformaciones tenían un sentido formal, viendo el sentido físico directo en la hipótesis del acortamiento de la longitud de los cuerpos que se mueven con respecto al éter y en la necesidad de introducir en los sistemas de coordenadas en movimiento su «tiempo local». Pero el análisis de los datos experimentales nos lleva a la conclusión de que *las transformaciones de Lorentz no están ligadas a la hipótesis de la existencia del éter ni son un procedimiento matemático auxiliar, sino que representan la expresión de las propiedades objetivas principales del espacio y del tiempo* deducidas de los experimentos. Si esto es así, y la verdadera transformación de las coordenadas y del tiempo da las relaciones (3), quiere decir que la transformación de Galileo era solamente aproximada y aplicable a los casos en que la razón  $\frac{v}{c}$  es pequeña, como suele ocurrir en los experimentos mecánicos ordinarios.

La Física clásica utilizaba los conceptos metafísicos del espacio y el tiempo «absolutos». Newton formuló estos conceptos de la forma siguiente: «El tiempo es de por sí absoluto, verdadero y matemático, y por su naturaleza transcurre regularmente y sin tener relación con ningún otro objeto», y «El espacio absoluto, por su naturaleza e independencia de cualquier otro objeto, permanece siempre igual e inmóvil». Pero las cualidades objetivas del espacio y del tiempo son en realidad, otras, que podemos conocer únicamente a través de los datos experimentales.

Los postulados principales de la teoría de la relatividad se basan en la aplicación consecuente de las conclusiones que se sacan de los datos experimentales y son (véase el § 296): 1) todos los sistemas que se encuentran en movimiento uniforme y rectilíneo son equivalentes, es decir, ningún experimento realizado dentro de un sistema puede determinar su movimiento «absoluto»; 2) la velocidad de la luz, medida en cualquiera de los sistemas que se encuentran

en movimiento relativo uniforme y rectilíneo, es la misma, independientemente del movimiento que tenga su fuente. De estos postulados, como puede demostrarse (véase la letra pequeña) se deducen las fórmulas de la transformación de Lorentz. Por lo tanto, si se desecha la hipótesis de que el éter puede servir de sistema de referencia y se utilizan únicamente las deducciones indicadas de los datos experimentales, la transformación de Lorentz se obtiene sin necesidad de ninguna hipótesis física complementaria. Por el contrario, aplicando la transformación de Lorentz se puede descifrar cualquier fenómeno físico que se manifieste cuando los sistemas de referencia se mueven el uno con respecto al otro, incluyendo los fenómenos de la óptica de los cuerpos en movimiento. En todos estos casos se obtienen resultados que concuerdan perfectamente con los datos experimentales.

La teoría de la relatividad considera que toda ley física debe satisfacer la transformación de Lorentz. Esto quiere decir que toda ley de la naturaleza expresada matemáticamente en coordenadas de un sistema determinado debe conservar su forma al pasarse a las coordenadas de otro sistema según la fórmula (3), es decir, *debe ser invariante con respecto a la transformación de Lorentz*. Las ecuaciones de la mecánica de Newton, que eran invariantes con respecto a la transformación de Galileo, no lo son con relación a la transformación de Lorentz. Por esto, el desarrollo de las ideas de la teoría de la relatividad condujo a variar las ecuaciones de Newton en el sentido de establecer ecuaciones de la mecánica invariantes con respecto a la transformación de Lorentz, las cuales toman la forma de las ecuaciones de Newton en el caso límite, es decir, cuando la razón  $\beta = \frac{v}{c}$  es infinitamente pequeña. La comprobación de los resultados obtenidos con las nuevas ecuaciones de la mecánica demostró prácticamente la veracidad de las mismas. En cuanto se refiere a las ecuaciones de la electrodinámica (ecuaciones de Maxwell), resultaron ser invariantes con respecto a las transformaciones de Lorentz. De esta forma quedó establecido que las leyes de la Física clásica satisfacen las exigencias de la teoría de la relatividad en el campo del electromagnetismo y, por consiguiente, en el de la óptica, mientras que en el campo de la mecánica (de Newton) solamente son ciertas para velocidades  $v \ll c$  y tienen que ser modificadas para adaptarlas al caso general. Queremos llamar la atención sobre el hecho de que para la velocidad  $v > c$  la transformación de Lorentz deja de tener sentido. Esto corresponde al hecho de que los cuerpos no pueden moverse a velocidades mayores que la de la luz.

Para deducir la transformación de Lorentz estudiemos el caso de dos sistemas de coordenadas: uno  $XYZ$  (convencionalmente inmóvil) y otro  $X'Y'Z'$  (convencionalmente móvil) (fig. 193), que se encuentran en movimiento de traslación relativo. Los ejes de ambos sistemas los tomamos paralelos entre sí,

la velocidad relativa constante  $v$  del sistema  $X'Y'Z'$  con respecto al sistema  $XYZ$  la dirigimos a lo largo del eje  $OX$  y suponemos que en el momento inicial ( $t = 0$ ,  $t' = 0$ ) los orígenes de ambos sistemas coinciden. En estas condiciones es fácil demostrar que las coordenadas  $y$  y  $z$  se transforman según las correlaciones:

$$y' = y, \quad z' = z,$$

y no nos detendremos en ellas. Pero veamos cómo se transforma la coordenada  $x$  en el tiempo  $t$ . Tomemos un punto que corresponda al origen de coordenadas del sistema móvil; su coordenada  $x'$ , será evidentemente igual a cero:

$$x' = 0. \quad (4)$$

La coordenada de este mismo punto  $x$  (en el sistema inmóvil) en el momento  $t$  (contado en el sistema inmóvil) será  $x = vt$ . Esta igualdad podemos escribirla en la forma:

$$x - vt = 0. \quad (5)$$

Comparando las igualdades (4) y (5) vemos que en un mismo punto del espacio se hacen iguales a cero las magnitudes  $x'$  (en el sistema  $X'Y'Z'$ ) y  $x - vt$  (en el sistema  $XYZ$ ), por lo tanto, podemos suponer que  $x'$  y  $x - vt$  se diferenciarán entre sí en cualquier momento en un factor constante  $\alpha$ :

$$x' = \alpha (x - vt). \quad (6)$$

Veamos ahora lo que ocurre con un punto que corresponda al origen de coordenadas del sistema inmóvil; su coordenada  $x$  en este sistema será igual a cero:

$$x = 0. \quad (7)$$

En el sistema móvil este mismo punto tendrá en el momento  $t'$  (contado en el sistema móvil) la coordenada  $x' = -vt'$ , de donde, para este punto se cumplirá la igualdad:

$$x' + vt' = 0.$$

Comparando esta última igualdad con la (7), que caracteriza a este mismo punto en el otro sistema, podemos suponer como en el caso anterior que

$$x = \alpha (x' + vt'). \quad (8)$$

El hecho de que los coeficientes de proporcionalidad  $\alpha$  de ambas fórmulas (6) y (8) deben ser iguales es fácil de demostrar basándose en el postulado experimental de la equivalencia de los dos sistemas, es decir, de la imposibilidad de establecer cuál de dichos sistemas se encuentra en movimiento absoluto.

Para hallar la ley de la transformación hay que determinar el coeficiente  $\alpha$ . Para ello podemos valernos del hecho experimental según el cual la velocidad de una señal luminosa dé un mismo valor  $c$  al ser medida en ambos sistemas. Emitamos una señal luminosa en la dirección del eje  $OX$  ( $O'X'$ ) en el instante en que los orígenes de ambos sistemas de coordenadas coinciden (este momento lo consideramos inicial en ambos sistemas:  $t = t' = 0$ ). En otros momentos tomados arbitrariamente  $t$  ( $t'$ ) las señales llegarán, en ambos sistemas, hasta puntos cuyas coordenadas vendrán determinadas respectivamente por las igualdades:

$$x = ct, \quad x' = ct'. \quad (9)$$

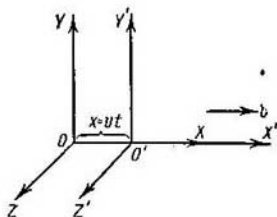


Fig. 193. Esquema para deducir las fórmulas de la transformación de Lorentz.

Multiplicando las ecuaciones (6) y (8) tenemos:

$$xx' = \alpha^2 (x - vt)(x' + vt').$$

Poniendo en esta igualdad en lugar de  $x$  y  $x'$  sus valores por medio de  $ct$  y  $ct'$ , según (9), hallamos que:

$$c^2 = \alpha^2 (c^2 - v^2).$$

Resolviendo esta ecuación con respecto a  $\alpha$ , tenemos (cuando delante de la raíz va el signo positivo):

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Este valor de  $\alpha$  nos permite escribir la transformación de las coordenadas (6) y (8) de la forma:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

De aquí puede hallarse fácilmente la transformación del tiempo. De la segunda igualdad tenemos:

$$x \sqrt{1 - \beta^2} = x' + vt'.$$

Poniendo aquí el valor de  $x'$  de la primera igualdad, hallamos:

$$x \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} + vt'.$$

Resolviendo esta igualdad con respecto a  $t'$ , obtenemos:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Operando análogamente, obtenemos:

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Reuniendo todas las correlaciones obtenidas podemos escribir las expresiones de las coordenadas y del tiempo en el sistema móvil por medio de las coordenadas y el tiempo en el inmóvil:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & y' &= y, & z' &= z, \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

y las expresiones de las coordenadas y del tiempo en el sistema inmóvil por medio de las coordenadas y el tiempo en el móvil:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & y &= y', & z &= z', \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

Las fórmulas (10) y (10a) expresan la transformación de las coordenadas y del tiempo al pasar de un sistema de referencia a otro. Como puede verse, las fórmulas (10) coinciden con la transformación de Lorentz (3).

Volvemos a recordar que los sistemas,  $X'Y'Z'$  y  $XYZ$ , son equivalentes y, por consiguiente, la transformación (10) puede obtenerse de la (10a) cambiando el signo de la velocidad relativa.

§ 298. Consecuencias de la transformación de la teoría de la relatividad. Estudiemos ahora las consecuencias más importantes de la transformación de Lorentz.

a) Longitud de los cuerpos en sistemas distintos. La transformación de Lorentz demuestra que un mismo cuerpo tiene unas dimensiones lineales en el sistema respecto al cual se encuentra en reposo y otras distintas en el sistema que se encuentra en movimiento con relación a él. Supongamos que en el sistema  $XYZ$  se halla en reposo una barra orientada en dirección  $OX$  cuya longitud en este sistema es  $l$  (igual a la diferencia entre las coordenadas de sus extremos):

$$l = x_2 - x_1.$$

¿Cuál será la longitud de esta barra en un sistema de coordenadas móvil ( $X'Y'Z'$ ) que se mueva respecto a ella con una velocidad  $v$  en el sentido de su longitud?

Para hallar la longitud  $l'$  hay que expresarla como la diferencia entre las coordenadas de los extremos de la barra  $x'_2$  y  $x'_1$  en el sistema móvil. En estas condiciones, al aplicar la transformación de Lorentz hay que tomar las coordenadas  $x'_2$  y  $x'_1$  en un mismo instante, determinado en el sistema móvil. De esta forma, al relacionar  $x'_2$  y  $x'_1$  con  $x_2$  y  $x_1$ , según las fórmulas (3) del § 297, hay que medir el tiempo en el sistema  $X'Y'Z'$ , suponiendo que este tiempo sea constante, tendremos:

$$x'_2 = x_2 \sqrt{1 - \beta^2} - vt', \quad x'_1 = x_1 \sqrt{1 - \beta^2} - vt',$$

de donde se deduce que

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{o} \quad l' = l \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Es decir, la barra es más corta en el sistema de coordenadas que se mueve con respecto a ella que en el sistema en que ella misma se encuentra en reposo:

$$l' < l.$$

Si consideramos que la barra está en reposo en el sistema  $X'Y'Z'$ , su longitud en él será  $l' = x'_2 - x'_1$  y en el sistema  $XYZ$ ,  $l = x_2 - x_1$ ; en este caso la medición habría que hacerla en un mismo instante  $t$  del sistema  $XYZ$ . Aplicando las transformaciones de Lorentz (3) del § 297, expresaremos  $x_2$  y  $x_1$  por medio de  $x'_2$  y  $x'_1$  y tendremos:

$$x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{o} \quad l = l' \sqrt{1 - \beta^2},$$

es decir, la barra es otra vez más larga en el sistema en que ella misma se encuentra en reposo.

En las direcciones de los ejes  $OY$  y  $OZ$  las dimensiones del cuerpo son iguales en ambos sistemas.

Esta deducción de la teoría de la relatividad sustituye a la hipótesis de la contracción de las dimensiones de los cuerpos que se hallan en movimiento con respecto al éter. Según la teoría de la relatividad la barra tiene la longitud máxima en aquel sistema *con respecto al cual se halla en reposo*.

b) **Duración de los sucesos en sistemas distintos.** La duración de los sucesos también es distinta en diferentes sistemas de coordenadas. Supongamos que en un punto  $A$  de coordenada  $x$  en el sistema de coordenadas  $XYZ$  (fig. 194) ocurre un suceso cuya duración

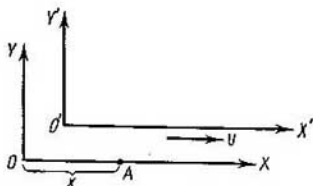


Fig. 194. Esquema para determinar la duración de los sucesos en distintos sistemas de coordenadas.

es igual a  $\tau = t_2 - t_1$ , donde  $t_2$  y  $t_1$  son los instantes en que comienza y termina dicho suceso, tomados en el sistema de coordenadas  $XYZ$ .

¿Cuál será la duración  $\tau' = t'_2 - t'_1$  de este suceso en el sistema de coordenadas  $X'Y'Z'$ ?

Los instantes  $t_1$  y  $t_2$  tomados en el sistema de coordenadas  $XYZ$  corresponden a los instantes  $t'_1$  y  $t'_2$  tomados en el sistema  $X'Y'Z'$  para el punto  $A$ , es decir, para un mismo valor de la coordenada  $x$ . Por consiguiente debemos aplicar la fórmula de transformación (3) del § 297, que relaciona  $t'$  con  $t$  para un mismo valor de  $x$ . De esta forma tenemos:

$$\sqrt{1-\beta^2} \cdot t_1 = t_1 - \frac{xv}{c^2}; \quad \sqrt{1-\beta^2} \cdot t'_2 = t_2 - \frac{xv}{c^2},$$

de donde se deduce que

$$\sqrt{1-\beta^2} (t'_2 - t'_1) = t_2 - t_1 \quad \text{o} \quad \tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Es decir, el intervalo  $\tau'$  será mayor que  $\tau$ .

Podemos plantearnos el problema inverso. Supongamos que en el sistema  $X'Y'Z'$  ( $x'$  constante) la duración de un suceso  $\tau' = t'_2 - t'_1$ . ¿Cuál será la duración de este mismo suceso en el sistema  $XYZ$ ?

Para responder aplicaremos la transformación (3) del § 297, en la que  $x'$  suponemos constante. En estas condiciones obtenemos:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{o} \quad \tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Ahora el intervalo  $\tau$  es mayor que el  $\tau'$ . De aquí podemos sacar la siguiente conclusión: *la duración de un suceso que tiene lugar en un punto determinado A es menor cuando se relaciona con el sistema de coordenadas con respecto al cual dicho punto se encuentra en reposo.*

Según la fórmula matemática de la transformación (3) del § 297 la diferencia de duración de los sucesos, determinada con relación a dos sistemas, será tanto mayor cuanto mayor sea la velocidad relativa entre estos sistemas.

c) Teorema de la suma de velocidades. En la mecánica de Newton el teorema de la suma de velocidades, como ya indicamos, está relacionado con la transformación de Galileo. Generalmente este teorema se formula así: la velocidad «absoluta»  $u$  de un punto es igual a la suma geométrica de sus velocidades relativa ( $u'$ ) y de arrastre ( $v$ ):

$$u = u' + v.$$

Se entiende por velocidad «absoluta» (que no debe confundirse con la velocidad «absoluta» hipotética con respecto al éter) la velocidad del punto con relación a aquel sistema de referencia que por las condiciones del problema se toma como inmóvil. Designemos este sistema por medio de  $XYZ$ . Por consiguiente, la velocidad «absoluta» se mide en el sistema  $XYZ$ . La velocidad relativa  $u'$  será la velocidad del punto medida en el sistema  $X'Y'Z'$  y la de arrastre será la velocidad del sistema  $X'Y'Z'$  respecto al sistema  $XYZ$ . De acuerdo con la transformación de Lorentz la relación entre las velocidades antedichas es otra que la admitida por la mecánica newtoniana. Para determinar esta relación dividamos miembro a miembro la primera ecuación (3), del § 297, por la última y obtendremos:

$$\frac{x}{t} = \frac{x' + vt'}{t' + \frac{x'v}{c^2}} = \frac{\frac{x'}{t'} + v}{1 + \frac{x'}{t'} \frac{v}{c^2}}.$$

Teniendo en cuenta que  $x/t$  es la proyección de la velocidad «absoluta» sobre el eje  $OX$  (o mejor dicho, su valor medio), que  $x'/t'$  es la proyección de la velocidad relativa sobre el eje  $O'X'$  y que  $v$  es la velo-



cidad de arrastre, podemos escribir la última expresión de la forma:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x \frac{v}{c^2}}. \quad (1)$$

Para las demás proyecciones de las velocidades obtenemos de forma análoga:

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + u'_x \frac{v}{c^2}}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + u'_x \frac{v}{c^2}}. \quad (1a)$$

Aplicando las ecuaciones (3) del § 297 se puede obtener por este mismo procedimiento

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x \frac{v}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - u_x \frac{v}{c^2}}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - u_x \frac{v}{c^2}}.$$

Estas fórmulas (deducidas partiendo de la suposición de que el movimiento relativo de los sistemas tiene lugar a lo largo del eje  $OX$ ) sustituyen a las fórmulas ordinarias del teorema clásico de la suma de velocidades. Como vemos, las expresiones (1) y (1a), para las proyecciones «transversal» y «longitudinal» de la velocidad, son diferentes. Los resultados de los cálculos hechos con estas fórmulas se diferencian mucho de los que proporcionan las clásicas cuando se trata de velocidades del orden de la velocidad de la luz. Veamos, por ejemplo, el caso de un rayo de luz que en el sistema  $X'Y'Z'$  marcha con una velocidad  $c$  en la dirección  $O'X'$  y determinemos su velocidad en el sistema  $XYZ$ . Por la fórmula (1), suponiendo  $u'_x = c$ , obtenemos que la magnitud buscada será:

$$u_x = \frac{c + v}{1 + c \frac{v}{c^2}} = c.$$

Es decir, la velocidad en el sistema  $XYZ$  será igual a  $c$ , mientras que la fórmula clásica nos daría, naturalmente,  $c + v$ . Lógicamente este resultado era de esperar, puesto que para deducir la fórmula de Lorentz se partió del hecho de que la velocidad de la luz es independiente del movimiento del sistema.

El carácter de límite de la velocidad de la luz, que hemos señalado anteriormente, se aprecia claramente si en la fórmula de la suma de velocidades se toman  $u'_x$  y  $v$  iguales a  $c$ , en cuyo caso obtendremos también que el valor de  $u_x$  es igual a  $c$ .

§ 299. La óptica de los cuerpos en movimiento y la teoría de la relatividad. Como indicamos con anterioridad, la falta de solidez de la teoría del éter se puso de manifiesto cuando se intentó interpretar los experimentos de Fizeau y Michelson y el fenómeno de la

aberración de la luz desde un mismo punto de vista. Como es natural se plantea la pregunta: ¿cómo interpreta estos fenómenos la teoría de la relatividad?

El experimento de Michelson no necesita ponerse a discusión, puesto que fue precisamente el que sirvió de base para establecer los postulados principales de la teoría de la relatividad.

Los resultados del experimento de Fizeau se obtienen, sin necesidad de admitir el arrastre parcial del éter, como consecuencia del teorema de la suma de velocidades. Examinemos este experimento desde este punto de vista. Llamando  $n$  al índice de refracción del agua, obtenemos que la velocidad relativa de la luz en dicho medio  $u'_x$  será:

$$u'_x = \frac{c}{n}.$$

La corriente de agua viene determinada por la velocidad de arrastre  $v$ . La figura de interferencia dependerá de la velocidad de la luz  $u_x$  con respecto a la instalación (aparato). Considerando que  $v/c$  es una magnitud pequeña y despreciando los miembros que contienen  $v/c$  en grado segundo y mayores, por el teorema de la suma de velocidades (1) del § 298, obtenemos:

$$u_x = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{c}{n} \frac{v}{c^2}} \cong \left( \frac{c}{n} + v \right) \left( 1 - \frac{v}{nc} \right)$$

y prescindiendo luego del miembro que contiene  $v/c$ , tendremos:

$$u_x = \frac{c}{n} + v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (1)$$

Este resultado coincide con el del teorema ordinario de la suma de velocidades cuando se supone que el coeficiente de arrastre del éter es igual a  $\left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$ , es decir, este resultado está en concordancia con el del experimento de Fizeau. De esta forma los experimentos de Michelson y de Fizeau se interpretan desde el mismo punto de vista.

Examinemos ahora el fenómeno de la aberración de la luz. Para esto consideraremos que el sistema  $XYZ$  se refiere a la estrella que se observa y que el sistema  $X'Y'Z'$  se refiere a la Tierra, en la cual se halla instalado el telescopio (fig. 195). Supongamos que el rayo luminoso de la estrella lleva la dirección del eje  $OZ$ . Determinemos el ángulo que forma este rayo con el eje  $O'Z'$  (en la Tierra). Los ejes  $OX$  y  $O'X'$  de ambos sistemas los suponemos dirigidos paralela-

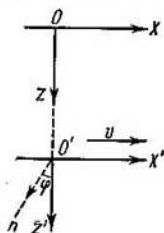


Fig. 195. Esquema para explicar el fenómeno de la aberración de la luz.

mente a la velocidad de la Tierra  $v$ . La ecuación del rayo de luz que avanza en el plano  $XOZ$ , en dirección  $OZ$ , tiene la forma:

$$s = a \cos 2\pi\nu \left( t - \frac{z}{c} \right), \quad (2)$$

donde  $a$  es la amplitud y  $\nu$ , la frecuencia de las vibraciones. En el sistema  $O'X'Z'$  este mismo rayo no se propagará a lo largo del eje  $O'Z'$ , sino siguiendo la dirección del vector  $\mathbf{n}$  que se encuentra en el plano  $O'X'Z'$ . La ecuación de este rayo se puede escribir de la forma:

$$s = a \cos 2\pi\nu' \left( t' - \frac{x'\alpha + z'\gamma}{c} \right), \quad (3)$$

donde  $\alpha$  y  $\gamma$  son los cosenos de los ángulos que forma el rayo con los ejes  $O'X'$  y  $O'Z'$ , y  $t'$  es el tiempo tomado en el sistema  $X'Y'Z'$ .

Para determinar la dirección del rayo en el sistema relacionado con la Tierra, transformamos las coordenadas y el tiempo de la ecuación (2), aplicando las fórmulas de Lorentz, y hallamos la fase de las vibraciones en el sistema  $X'Y'Z'$ .

Aplicando la transformación (3) del § 297, obtenemos

$$s = a \cos 2\pi\nu \left( t - \frac{z}{c} \right) = a \cos 2\pi\nu \left( \frac{t' + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{z'}{c} \right)$$

o

$$s = a \cos 2\pi \frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( t' + \frac{x' \frac{v}{c} - z' \sqrt{1-\beta^2}}{c} \right).$$

Comparando esta expresión con la fórmula (3), vemos que

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \alpha = -\frac{v}{c} \text{ y } \gamma = \sqrt{1-\beta^2}. \quad (4)$$

Por las fórmulas (4) podemos apreciar que en el sistema de coordenadas referido a la Tierra la luz de la estrella forma con el eje  $O'Z'$  un ángulo  $\varphi$  cuyo coseno es igual a  $\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$ ; por consiguiente, el tubo del telescopio que se encuentra en la Tierra deberá inclinarse un ángulo igual a éste con respecto a la vertical. El seno del ángulo  $\varphi$  será igual a  $\beta = \frac{v}{c}$ . Y como la velocidad de la Tierra por su órbita es igual a  $3 \cdot 10^6$  cm/s y la de la luz  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/s, tendremos que  $\beta = 10^{-4}$ ; para estos valores de  $\beta$  el seno y la tangente son prácticamente iguales y, por consiguiente, obtenemos la coincidencia con las condiciones clásicas para la aberración de la luz, es decir, la tangente del ángulo de inclinación del eje del telescopio es igual a  $v/c$ . Para esta explicación del fenómeno de la aberración hemos

tomado un caso particular, pero el problema se puede generalizar para el caso en que la dirección del rayo se toma arbitrariamente\*).

El papel que desempeña la transformación de Lorentz en la interpretación del efecto Doppler es muy importante. Este efecto consiste en la variación que experimenta la frecuencia de la luz cuando se percibe en un sistema que se encuentra en movimiento con respecto a su fuente. El efecto Doppler ordinario, referido a las ondas que se propagan en un medio elástico, se reduce a lo siguiente (t. I, § 113). Cuando la fuente de ondas se mueve en el medio en que se propagan las vibraciones, la frecuencia  $\nu'$ , percibida por cualquier aparato registrador, será diferente de la frecuencia  $\nu$  que emite la fuente. La frecuencia  $\nu'$  se relaciona con la  $\nu$  por medio de la fórmula:

$$\nu' = \nu \frac{V - v_1}{V - v_2}, \quad (5)$$

siendo  $V$  la velocidad de propagación de las vibraciones en el medio y  $v_1$  y  $v_2$  las proyecciones de las velocidades respectivas del aparato registrador y de la fuente sobre la recta que los une entre sí;  $v_1$  y  $v_2$  se consideran positivas cuando sus direcciones coinciden con la de propagación de la luz. La fórmula (5) muestra que la variación de la frecuencia no sólo depende de la velocidad relativa  $v = v_1 - v_2$ , sino también de las mismas velocidades  $v_1$  y  $v_2$  con respecto al medio en que se propagan las vibraciones. Por consiguiente, la medición de la frecuencia puede servir para determinar la velocidad de la fuente (o del aparato registrador) en el medio.

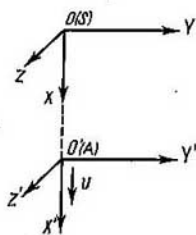
Mientras se admitió que la luz se propagaba en el éter se podía pensar que la variación de la frecuencia debida al efecto Doppler serviría para hallar el movimiento con relación al éter, es decir, el movimiento «absoluto». Pero una vez establecida la imposibilidad de descubrir el movimiento «absoluto» se hizo necesario revisar la teoría del efecto Doppler para las ondas luminosas y ponerla de acuerdo con las exigencias de la teoría de la relatividad.

La variación de la frecuencia, cuando la fuente y el sistema en que se manifiesta la acción de las ondas luminosas tienen movimiento relativo, puede hallarse fácilmente aplicando la transformación de Lorentz. Supongamos que el sistema de coordenadas  $XYZ$  sirve de referencia a la fuente  $S$ , mientras que la medición de la frecuencia se realiza en el sistema  $X'Y'Z'$ ; la velocidad relativa de estos dos sistemas sigue la dirección del eje  $O'X'$ .

Si la luz de la fuente  $S$  (fig. 196) se propaga a lo largo del eje  $OX$ , la fase de las vibraciones en el sistema  $XYZ$  es igual a  $2\pi\nu \left( t - \frac{x}{c} \right)$ ,

\*) Hablando estrictamente el fenómeno de la aberración tendría que explicarse partiendo del carácter real (no inercial) del movimiento de la Tierra alrededor del Sol, y no sustituyendo este movimiento por el uniforme y rectilíneo.

donde  $\nu$  es la frecuencia de la luz que emite la fuente; en otras palabras,  $\nu$  es el número de vibraciones que se perciben en el sistema  $XYZ$  en la unidad de tiempo (contadas en este sistema). Transformemos la fase  $2\pi\nu(t - \frac{x}{c})$  a las coordenadas y al tiempo del sistema  $X'Y'Z'$ . De acuerdo con la fórmula (3) del § 297, hallamos:



$$2\pi\nu \left( t - \frac{x}{c} \right) = 2\pi\nu \left( \frac{t' + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x' + vt'}{c \sqrt{1-\beta^2}} \right). \quad (6)$$

Fig. 196. Esquema para deducir la expresión del efecto Doppler.

Pero la magnitud  $\nu$  no representa el número de vibraciones por unidad de tiempo (es decir, la frecuencia de la luz) en el sistema  $X'Y'Z'$ , puesto que en este sistema las escalas de las longitudes y del tiempo son otras. La frecuencia  $\nu'$ , que se percibe en el sistema  $X'Y'Z'$  se puede hallar reduciendo el segundo término de la expresión (6) a la forma  $2\pi\nu' \left( t' - \frac{x'}{c} \right)$ . De la igualdad

$$2\pi\nu' \left( t' - \frac{x'}{c} \right) = 2\pi\nu \left( \frac{t' + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x' + vt'}{c \sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

obtenemos

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (7)$$

La expresión (7) puede representarse también de la forma:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}, \quad (7a)$$

o aproximadamente

$$\nu' \cong \nu \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v}{c} \right) \cong \nu \left( 1 - \frac{v}{c} \right).$$

Con esta misma aproximación la fórmula clásica (5) da:

$$\nu' \cong \nu \left( 1 - \frac{v_1 - v_2}{V} \right) = \nu \left( 1 - \frac{v}{V} \right).$$

Como puede verse, con la aproximación indicada la fórmula de la teoría de la relatividad coincide con la clásica.

Pero entre la fórmula exacta (7a) y la fórmula clásica (5) existe una diferencia esencial, que consiste en que mientras en la fórmula clásica (5) entran separadamente la velocidad del aparato registrador  $v_1$  y la de la fuente  $v_2$ , en la fórmula (7a) *solamente entra la velocidad relativa  $v$  del aparato registrador con respecto a la fuente*. Por lo tanto resulta que el efecto Doppler, lo mismo que los demás fenómenos físicos, no sirve para descubrir el movimiento «absoluto» de ningún sistema.

La segunda deducción importante de la teoría de la relatividad es el llamado *efecto transversal Doppler*, es decir, la variación de la frecuencia de la luz en el sistema  $X'Y'Z'$  cuando se propaga en dirección perpendicular a la velocidad  $v$ .

Si la transformación de Lorentz se aplica al caso de ondas que se propagan en una dirección cualquiera, en lugar de la fórmula (7) obtenemos:

$$v' = v \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (8)$$

donde  $\varphi$  es el ángulo que forma la dirección en que se propaga la luz con la dirección de la velocidad  $v$  (medido en el sistema  $XYZ$ ). Cuando la luz se propaga en dirección perpendicular a la velocidad ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ), la fórmula (8) da:

$$v' = \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cong v \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \right) \quad (8a)$$

[compárese con la fórmula (4)]. Si el ángulo  $\varphi$  se mide en el sistema  $X'Y'Z'$ , en las fórmulas (8) y (8a) hay que cambiar de sitio respectivamente  $v$  y  $v'$ .

El efecto transversal es mucho menor que el longitudinal, puesto que depende únicamente de  $\beta^2$ .

Los primeros experimentos para descubrir directamente el efecto óptico Doppler fueron realizados por A. A. Bielopolski (en el año 1900). El esquema de este experimento es el siguiente: Cuando la luz se refleja en un espejo móvil la imagen del objeto se mueve. Sea un espejo (fig. 197, a) que se mueve en la dirección de la normal con una velocidad  $v$ , y un rayo que incide sobre él formando un ángulo  $\varphi$  con dicha normal. En estas condiciones la proyección de la velocidad de la imagen  $S'$ , sobre la dirección del rayo visual  $S'AP$  será igual, como puede calcularse fácilmente, a  $2v \cos \varphi$ . Si el rayo  $SA$  sufre  $n$  reflexiones en dos espejos que se mueven el uno al encuentro del otro (fig. 197, b), cada una de estas reflexiones producirá una velocidad  $2v \cos \varphi$ , y la luz que va en la dirección  $A'P$  será equivalente a la de un foco que tenga en la dirección  $A'P$  una velocidad igual

a  $2v \cos \varphi$ . De esta forma el movimiento de los espejos puede suplir al del foco. Si el movimiento relativo de los espejos es como el que se indica en la fig. 197, b, será equivalente al de aproximación del foco al punto  $P$ . La frecuencia que se observe en este caso deberá

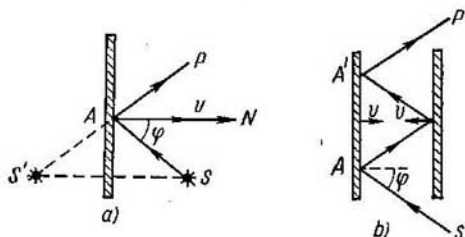


Fig. 197. Translación de la imagen al moverse los espejos.

ser mayor que la del foco, es decir, la raya espectral deberá desplazarse hacia el lado de las longitudes de onda menores. Si los espejos se mueven en direcciones opuestas (separándose) la raya se desplazará hacia el lado de las longitudes de onda mayores. A. A. Bielopolski tomó dos tambores giratorios, de ejes paralelos, provistos

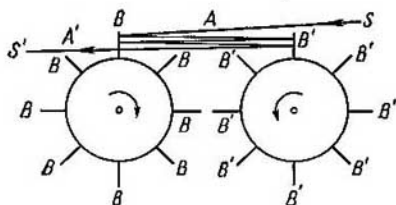


Fig. 198. Esquema del experimento de A. A. Bielopolski.

de unos espejos  $B$  y  $B'$  colocados como se muestra en la fig. 198. El rayo de luz  $SA$ , después de incidir sobre el espejo  $B$  sufría una serie de reflexiones sucesivas en los espejos  $B$  y  $B'$  y siguiendo la dirección  $A'S'$  iba a parar a un espectroscopio. Cuando los tambores se hacían girar como indica la figura, los espejos  $B$  y  $B'$  se movían aproximándose entre sí. Cuando se hacían girar en sentidos contrarios a los anteriores, los espejos se alejaban el uno del otro. Con estos experimentos A. A. Bielopolski consiguió descubrir el desplazamiento de Doppler y demostrar que el signo de éste corresponde al de la veloci-

dad, como prevé la teoría. Posteriormente este experimento fue repetido con mayor precisión por B. B. Golitsin.

El efecto Doppler tiene mucha importancia en las observaciones astronómicas. Por ejemplo, por el desplazamiento de las rayas en los espectros de los cuerpos celestes se deduce la velocidad radial de estos cuerpos con respecto a la Tierra. El hecho de la existencia de estrellas dobles se descubre por el desdoblamiento espectral de las rayas, producido por la diferencia entre las velocidades radiales de ambas estrellas. La observación de las rayas de Fraunhofer de distintos bordes del disco solar permite establecer el movimiento de la superficie del Sol. Este tipo de investigaciones se llevan a cabo constantemente sobre los espectros de los astros y desempeñan un papel de primera importancia en el estudio de sus movimientos.

No obstante, los experimentos mencionados no son suficientemente exactos para poder esclarecer qué fórmulas son las que concuerdan mejor con la realidad: las obtenidas basándose en la teoría de la relatividad o las de la teoría clásica. La diferencia esencial entre los resultados de ambas teorías consiste en que la de la relatividad da el «efecto transversal», que no existía en la antigua teoría. La observación experimental de este efecto es muy difícil debido a su pequeñez. A pesar de todo, Ives, en el año 1938, descubrió el efecto transversal observando la luz emitida por los rayos canales del hidrógeno, que tienen una velocidad del orden de  $10^8$  cm/s. Con esto quedó confirmada la fórmula del efecto Doppler correspondiente a la teoría de la relatividad.

§ 300. Mecánica de la teoría de la relatividad. Los razonamientos expuestos anteriormente demuestran que la transformación de Galileo, con relación a la cual son invariantes las leyes de la mecánica de Newton, no es más que una expresión límite de la transformación de Lorentz cuando la razón  $v/c$  tiende a cero. Por esto podemos pensar que también las ecuaciones de la mecánica de Newton son ecuaciones límites de otras más generales, invariantes con respecto a la transformación de Lorentz, como lo exige la teoría de la relatividad.

La forma de las ecuaciones de la mecánica de la teoría de la relatividad puede hallarse introduciendo en las ecuaciones de Newton las modificaciones necesarias para hacerlas invariantes con relación a la transformación de Lorentz.

Escribamos la ecuación de la mecánica de Newton en forma vectorial:

$$\frac{d}{dt}(mv) = f. \quad (1)$$

En la mecánica newtoniana la masa  $m$  se considera magnitud constante, independiente del estado de movimiento. Como puede demos-



trarse, esta suposición es incompatible con las exigencias de invariabilidad de la ecuación con respecto a la transformación de Lorentz. La exigencia de que tanto en la mecánica de la teoría de la relatividad como en la mecánica de Newton todo sistema de cuerpos aislado debe cumplir, en cualquier sistema de referencia, la ley de la conservación de la cantidad de movimiento y las leyes de la transformación de las velocidades al pasar de un sistema de referencia a otro, nos lleva a la conclusión de que la masa del cuerpo debe tener diferentes valores en distintos sistemas de referencia que se encuentren en movimiento relativo. En este caso la ley de la transformación de las masas resulta ser la siguiente:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (2)$$

Aquí  $m_0$  es el valor de la masa medido en el sistema de referencia en que ésta se halla en reposo;  $m$  es el valor de esta misma masa medido en el sistema de referencia que se mueve con relación al primero con una velocidad constante  $v$ . Las ecuaciones de la mecánica serán invariantes respecto a la transformación de Lorentz siempre que en la fórmula (1) se entienda por masa  $m$  una magnitud que puede variar según la ley (2). De esta forma, las ecuaciones de la mecánica de la teoría de la relatividad toman la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} \right) = \mathbf{f}. \quad (3)$$

Es evidente que estas ecuaciones, al diferenciarse de las de Newton, deberán conducir a otras consecuencias que las ecuaciones de la mecánica clásica. La comprobación de estas consecuencias en la práctica sirve al mismo tiempo para comprobar las propias ecuaciones.

Como sabemos, en la mecánica clásica la ecuación del movimiento puede escribirse de la forma:  $\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{f}$ , donde  $\mathbf{p}$  es la cantidad de movimiento. Comparando esta ecuación con la (3) vemos que en la mecánica de la teoría de la relatividad el papel de la cantidad de movimiento lo desempeña la magnitud:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m \mathbf{v}. \quad (4)$$

La relación entre la fuerza y la aceleración, deducida de la fórmula (3), puede ser distinta y depende de cómo actúa la fuerza: en la dirección de la velocidad inicial o perpendicularmente a ella. En el primer caso la fuerza y la aceleración se llaman longitudinales ( $f_l$ ,  $w_l$ ), en el segundo, transversales ( $f_t$ ,  $w_t$ ). Para la fuerza longitudinal

se obtiene:

$$\frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} w_t = f_t$$

y para la transversal

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} w_t = f_t,$$

por esto se dice con frecuencia que  $\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  es la masa transversal

y que  $\frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}$  es la masa longitudinal. La última fórmula fue comprobada aplicándola al movimiento de los electrones en un campo eléctrico transversal, en los experimentos que estudiamos en el t. II, § 218, que confirmaron totalmente la validez de la fórmula.

Una consecuencia de extraordinaria importancia de la mecánica de la teoría de la relatividad es la relación entre la energía y la masa. Establezcamos esta relación basándonos en la fórmula (3). En la mecánica clásica la variación de la energía cinética de un punto material viene determinada por el trabajo realizado por las fuerzas aplicadas a dicho punto. Veamos lo que ocurre a este respecto según la fórmula (3). El trabajo elemental  $dA$  de la fuerza  $f$  es igual a producto escalar de la fuerza por la traslación  $dr$  del punto:

$$dA = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

Esta magnitud debe producir un incremento de la energía cinética del punto:

$$dA = dE_c.$$

Basándonos en la fórmula (3) tenemos:

$$dE_c = dA = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{r}.$$

Diferenciando, obtenemos

$$dE_c = \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{m_0 \mathbf{v}}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \right) \cdot d\mathbf{r},$$

o como  $d\mathbf{r}/dt$  es igual a la velocidad  $\mathbf{v}$ , tendremos

$$\frac{dv}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot d\mathbf{v} = v dv; \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = dv \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2 dv,$$

por consiguiente

$$dE_c = \frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv.$$

Por otra parte, por la fórmula (2), hallamos:

$$dm = \frac{m_0 v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv.$$

De la comparación de las dos últimas fórmulas obtenemos la siguiente relación entre  $dE_c$  y  $dm$ :

$$dE_c = c^2 dm. \quad (5)$$

La variación de la energía es proporcional a la variación de la masa, con la particularidad de que el coeficiente de proporcionalidad es el cuadrado de la velocidad de la luz. Este postulado lógicamente puede generalizarse considerando que *entre la energía  $E$  y la masa  $m$  existe una profunda relación mutua*, que puede expresarse con la correlación:

$$E = mc^2. \quad (5a)$$

La masa y la energía son características cualitativamente distintas de las propiedades de aquellas formas de la materia que estudia la Física. La masa caracteriza las propiedades inerciales de la materia (segunda ley de Newton) y las propiedades que se ponen de manifiesto en los fenómenos de la gravitación universal. La energía es una magnitud cuya variación determina el trabajo que realiza un sistema. Las correlaciones (5) y (5a) que se deducen de la teoría de la relatividad muestran que entre estas dos características existe una relación: la variación de una de ellas conduce a una variación equivalente de la otra. La variación de la masa de un sistema no sólo puede producirse como resultado de un intercambio de sustancia (átomos, moléculas) con los cuerpos externos, sino también a consecuencia de una transmisión de energía. Por ejemplo, si se le cede al sistema una cantidad de calor  $\Delta Q$ , que hace que su energía aumente en una magnitud  $\Delta E$ , de acuerdo con la correlación (5) aumentará al mismo tiempo su masa en una magnitud  $\Delta m = \Delta E/c^2$ . Otro ejemplo: si como resultado de la emisión de luz la energía de un sistema disminuye en  $\Delta E$ , paralelamente disminuye su masa en la magnitud  $\Delta m = \Delta E/c^2$ . Pero dentro de un sistema cerrado se conserva tanto su masa como su energía total.

\* Como el valor numérico de la velocidad de la luz  $c$  en el vacío es enorme, a una variación numérica determinada de la energía  $\Delta E$  le corresponde una variación muy pequeña de la masa  $\Delta m$ . Si la energía de un sistema  $E$  aumenta en  $1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$ , su masa se incrementa solamente en  $\Delta m \cong 1,1 \cdot 10^{-14} \text{ g}$ . Por esto, cuando se trata de variaciones ordinarias de la energía de los cuerpos, las variaciones que experimentan sus masas son tan pequeñas que es imposible apreciarlas directamente. No obstante, la Física moderna puede comprobar

la correlación entre la energía y la masa gracias a las enormes cantidades de energía que se liberan en las transformaciones nucleares (§ 368).

De la correlación entre la energía y la masa se deduce la fórmula que relaciona la energía con la cantidad de movimiento. Poniendo en (5a) en lugar de  $m$  su valor según (2), obtenemos:

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2; \quad (6)$$

elevando al cuadrado esta igualdad y haciendo las transformaciones algebraicas necesarias, hallamos:

$$m_0^2 c^4 = E^2 - E^2 \frac{v^2}{c^2},$$

o basándonos en (4)

$$m_0^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2. \quad (7)$$

Las consecuencias de la teoría de la relatividad que hemos examinado se deducen del principio según el cual todos los procesos físicos se desarrollan igualmente en todos los sistemas inerciales, es decir, en aquellos sistemas que se mueven rectilínea y uniformemente unos con respecto a los otros. En el caso de sistemas acelerados no ocurre lo mismo. En éstos (véase el t. I) surgen fuerzas de inercia. Estas fuerzas de inercia se manifiestan como complementarias con respecto a las fuerzas que actúan en los sistemas inerciales. De esta forma, la aceleración de los sistemas puede determinarse por la magnitud de las fuerzas de inercia.

Einstein intentó extender el concepto de la relatividad a los sistemas acelerados. Esta nueva teoría recibió el nombre de «teoría general de la relatividad», para diferenciarla de la «teoría especial de la relatividad» que estudia únicamente la relatividad del movimiento rectilíneo uniforme. Según la teoría general de la relatividad las fuerzas de inercia son equivalentes a las de gravitación. Observando las fuerzas de inercia en un sistema de referencia cualquiera, por ejemplo, las fuerzas que tienden a desviar el plano en que oscila un péndulo en la Tierra (experimento de Foucault), nos encontramos ante la imposibilidad de distinguir si estas fuerzas son de inercia, debidas a la aceleración del sistema de referencia, o fuerzas de gravitación, cuya procedencia se debe a un campo de gravitación complementario. Sin embargo, como demostró posteriormente V. A. Fok, esta equivalencia no es justa en los límites de grandes escalas espaciales y temporales. El sistema inercial de referencia, es decir, el relacionado con el conjunto de las estrellas fijas, es el privilegiado, y la aceleración en este sistema no tiene el carácter relativo que tiene la velocidad.

Pero localmente, el principio de la equivalencia de las fuerzas de inercia y de las fuerzas de gravitación, propuesto por Einstein, conserva su efectividad y permite crear una teoría de la gravitación cuyas deducciones son confirmadas perfectamente por los experimentos. Entre estas deducciones se encuentran: la desviación de los rayos luminosos por un campo gravitatorio y la dependencia que existe entre la frecuencia de las vibraciones luminosas y la fuerza de la gravedad. La primera de estas deducciones fue confirmada observando exactamente las posiciones que ocupaban las estrellas que se veían en las proximidades del disco solar durante un eclipse total. La posición aparente de estas estrellas resultó estar desplazada debido a la desviación que sufrieron sus rayos de luz al pasar cerca del Sol, donde el campo gravitatorio era muy intenso.

La segunda deducción de la teoría general de la relatividad consiste en que la frecuencia de la luz cuya fuente se encuentra en el campo de fuerzas de la gravedad es menor que la frecuencia de la luz cuya fuente está fuera de dicho campo. La raya espectral que emite un átomo que se encuentra en un campo de gravitación intenso está desviada hacia la parte roja del espectro. Esta desviación se observa en realidad en las rayas espectrales que omiten las estrellas pertenecientes al tipo de «enanas blancas». Estas estrellas se caracterizan por tener una densidad extraordinariamente grande, y el campo gravitatorio en su superficie es tan enorme que provoca un desplazamiento sensible de las líneas espectrales hacia el lado rojo. Ultimamente (en el año 1958) la influencia del campo gravitatorio sobre la frecuencia de la emisión se ha confirmado también al observar la emisión de rayos  $\gamma$  y de núcleos radiactivos (véase efecto Mössbauer, § 372).

La teoría de la relatividad, lo mismo que todos los grandes descubrimientos de la Física, ha exigido la revisión de muchas ideas establecidas y habituales, como los conceptos de que la longitud de los cuerpos es independiente de su movimiento, de que la masa es invariable, etc. Muchos filósofos idealistas intentaron, y continúan haciéndolo hasta nuestros días, aprovechar estos descubrimientos para fundamentar sus puntos de vista, para afirmar que «la materia desaparece», etc. La falsedad de estas afirmaciones fue puesta de manifiesto por V. I. Lenin en su libro «Materialismo y Empirio-criticismo»: Creemos oportuno volver a recordar aquí la cita de Lenin a que hicimos referencia en la introducción al presente curso (t. I, § 1): «La materia desaparece»: esto quiere decir que desaparecen los límites dentro de los cuales conocíamos la materia hasta ahora, y que nuestro conocimiento se profundiza; desaparecen propiedades de la materia que anteriormente nos parecían absolutas, inmutables, primarias (impenetrabilidad, inercia, masa, etc.) y que hoy se revelan como relativas, inherentes solamente a ciertos estados de la materia. Porque la única «propiedad» de la materia con cuya admisión está ligado el materialismo filosófico, es la propiedad *de ser*

una realidad objetiva, es decir, de existir fuera de nuestra conciencia».\*)

Otra tendencia errónea relacionada con la teoría de la relatividad es la que pretendió justificar el relativismo filosófico, es decir, el sistema filosófico idealista que afirma que todos nuestros conocimientos son relativos, que dependen de un punto de vista arbitrario, etc. Pero en realidad esta conclusión no puede deducirse de ninguna manera de los postulados físicos de la teoría de la relatividad. El hecho de que un mismo suceso se manifieste de diferente forma con relación a distintos sistemas de referencia, o de que entre sistemas que se mueven uno con respecto a otro rectilínea y uniformemente no exista ningún privilegio, no quiere decir, ni mucho menos, que ya es imposible describir objetivamente los fenómenos de la naturaleza. La teoría de la relatividad da las fórmulas de transición de unos sistemas de referencia en movimiento a otros (las fórmulas de la transformación de Lorentz) y permite establecer unívocamente cómo un suceso dado se manifiesta en cualquiera de los sistemas en movimiento. Por lo tanto, se ponen de manifiesto las cualidades objetivas de las correlaciones espacio-tiempo y las cualidades objetivas de la materia en movimiento.

---

\*) V. I. Lenin, «Materialismo y empiriocriticismo», Ediciones en lenguas extranjeras, Moscú, 1948, pág. 297 o Editorial Política, La Habana, 1963, pág. 251.

## *Flujo luminoso y termodinámica de la radiación*

§ 301. **Sensibilidad relativa. Flujo luminoso.** La cantidad de energía que transportan las ondas luminosas en la unidad de tiempo a través de una superficie se llama *flujo de energía radiante o flujo radiante*. El flujo de energía radiante tiene una potencia y puede medirse por la cantidad de calor que recibe el cuerpo que absorbe por completo dicho flujo.

La luz sólo en casos excepcionales está formada por ondas de longitudes aproximadamente iguales y se percibe por el ojo como luz espectralmente «pura» (monocromática). En la mayoría de los casos se trata de conjuntos de ondas de longitudes muy diversas correspondientes tanto a la zona de los rayos visibles como a la de los invisibles. En la luz blanca que se obtiene por la incandescencia de cuerpos sólidos o líquidos existen ondas de todas las longitudes posibles. Para dar una característica energética de este tipo de luz es preciso indicar cómo *está distribuida la energía entre las distintas longitudes de onda*. Separemos de un flujo radiante, cuya potencia total sea  $E$ , un intervalo de longitudes de onda que abarque desde una determinada longitud  $\lambda_1$  hasta otra, también determinada,  $\lambda_2$ . Si el intervalo que se toma entre las longitudes de onda  $\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda$  es muy pequeño, la potencia  $\Delta E_{\lambda, \lambda+\Delta\lambda}$ , correspondiente a este intervalo, puede considerarse proporcional a  $\Delta\lambda$ :

$$\Delta E_{\lambda, \lambda+\Delta\lambda} = e_{\lambda} \cdot \Delta\lambda. \quad (1)$$

En el límite podemos suponer que  $\Delta\lambda$  es infinitamente pequeño y escribir la correlación (1) de la forma:

$$dE_{\lambda, \lambda+d\lambda} = e_{\lambda} \cdot d\lambda. \quad (1a)$$

La magnitud  $e_{\lambda}$  es igual a la potencia referida a un intervalo unidad de longitudes de onda próximo a la longitud  $\lambda$  dada y se llama *función de distribución de la energía entre las longitudes de onda*. Esta magnitud es función de la longitud de onda, cuyo tipo depende de la naturaleza del cuerpo radiante y de las condiciones en que se produce la radiación. En la fig. 199 se representa  $e_{\lambda}$  en función de  $\lambda$  para un caso particular. La potencia correspondiente al intervalo de longitudes de onda que comprende desde  $\lambda$  hasta  $\lambda + d\lambda$ , está representada por la superficie de la columna rayada. La potencia correspondiente al intervalo finito comprendido entre las longitudes de onda  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$

puede expresarse por medio de la integral:

$$E_{\lambda_1, \lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e_{\lambda} d\lambda. \quad (2)$$

La potencia  $E_{\lambda_1, \lambda_2}$  estará representada gráficamente por la superficie  $ABCD$ .

El flujo total, referido a todas las longitudes de onda, puede obtenerse extendiendo la integral de la expresión (2) a todo el campo

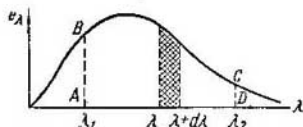


Fig. 199. Distribución de la potencia de la radiación entre las longitudes de onda.

de longitudes de onda, desde  $\lambda_1 = 0$  hasta  $\lambda_2 = \infty$ :

$$E = \int_0^{\infty} e_{\lambda} d\lambda \quad (2a)$$

Esta característica del flujo radiante es completa desde el punto de vista energético, pero no nos dice nada de la intensidad de la sensación subjetiva que produce dicho flujo. La intensidad de la sensación depende del grado de sensibilidad que tiene el ojo humano para percibir la luz de diferentes longitudes de onda. Un flujo compuesto por rayos infrarrojos o ultravioletas no provoca ninguna sensación visual aunque la energía que transporte sea bastante grande. Por el contrario, si el flujo está formado por los rayos que mejor percibe el ojo, aunque su potencia sea pequeña, producirán una sensación visual intensa. El ojo humano tampoco tiene la misma sensibilidad para los rayos visibles de distintos colores. Así, por ejemplo, para que los rayos rojos produzcan la misma sensación de intensidad que los verdes su potencia tendrá que ser mucho mayor que la de éstos. Por esta razón, para introducir una magnitud que caracterice el poder que tiene un flujo radiante para producir sensaciones visuales es necesario estudiar la sensibilidad que tiene el ojo para con las ondas luminosas de diferente longitud. Pero como la sensibilidad del ojo varía mucho de unas personas a otras, hay que tomar la sensibilidad «media». Esta sensibilidad «media» se obtiene como resultado del reconocimiento de un número elevado de personas, después de eliminar aquellas que presentan defectos visuales evidentes. La magnitud que caracteriza la sensibilidad «media» relativa del



ojo humano para con las ondas de diferentes longitudes se llama *sensibilidad relativa, eficacia luminosa monocromática o factor de luminosidad relativa\**). La construcción de la curva de la sensibilidad relativa presenta dificultades, ya que desde el punto de vista subjetivo no es fácil establecer cuando es igual el «brillo» de rayos de distintos colores, por ejemplo, de los rayos rojos y azules (para más detalles véase el § 305).

En la actualidad, para construir las curvas de sensibilidad relativa se emplea el método de «paso a paso», que consiste en equilibrar la iluminación subjetiva de dos haces cuyas longitudes de onda se diferencian poco entre sí.

Supongamos que dos campos contiguos, por ejemplo, dos partes adyacentes de un vidrio esmerilado están iluminadas por sendos haces de este tipo. Como las longitudes de onda se diferencian poco entre sí, los campos parecerán casi del mismo color, lo que permite con suficiente exactitud determinar el momento en que es igual el brillo subjetivo de ambos campos. Supongamos que el primer flujo está formado por ondas correspondientes a un intervalo estrecho  $d\lambda$ , próximo a una determinada longitud de onda  $\lambda_1$ , y que el segundo flujo consta de ondas correspondientes a un intervalo  $d\lambda$ , próximo a la longitud de onda  $\lambda_2$ , que a su vez se diferencia poco de  $\lambda_1$ . Las potencias de estos dos flujos serán  $dE_{\lambda_1} = e_{\lambda_1} d\lambda$  y  $dE_{\lambda_2} = e_{\lambda_2} d\lambda$ . Si el ojo tuviera la misma sensibilidad para con los flujos de ambas longitudes de onda, los dos campos parecerían igualmente brillantes cuando las potencias de dichos flujos fueran iguales:  $dE_{\lambda_1} = dE_{\lambda_2}$ . Pero en realidad para igualar el brillo subjetivo de ambos campos hay que tomar potencias distintas de los flujos  $dE_{\lambda_1}$  y  $dE_{\lambda_2}$ : se necesitará menos potencia de aquel flujo a cuyas longitudes de onda sea más sensible el ojo.

Por esto, para caracterizar el ojo por la sensibilidad relativa  $V_\lambda$  suponemos que el valor numérico de la eficacia luminosa monocromática  $V_\lambda$  de las longitudes de onda  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , próximas entre sí, es inversamente proporcional a las potencias  $dE_{\lambda_1}$  y  $dE_{\lambda_2}$  que producen iguales sensaciones de brillo:

$$\frac{V_{\lambda_1}}{V_{\lambda_2}} = \frac{dE_{\lambda_2}}{dE_{\lambda_1}} \quad (3)$$

Pasando sucesivamente de una zona espectral contigua a otra, por este procedimiento se pueden establecer los valores de la sensibilidad relativa  $V_\lambda$  dentro de los límites de todo el espectro visible. El ojo humano posee una sensibilidad máxima para con los rayos verdes de longitud de onda igual a 0,555  $\mu$ . El valor de la eficacia

\*) Sensibilidad relativa, cuando se refiere a la propiedad del ojo, y eficacia luminosa o factor de luminosidad, cuando denota características de la radiación. (N. del T.)

luminosa de esta longitud de onda se toma igual a la unidad. Todas las demás longitudes de onda tendrán  $V_\lambda < 1$ ; fuera de los límites del espectro visible  $V_\lambda = 0$ .

En la tabla VII se dan los valores de la eficacia luminosa  $V_\lambda$  para algunas longitudes de onda\*); la variación gráfica de  $V_\lambda$  ( $\Phi(\lambda)$ ) en función de la longitud de onda se muestra en la fig. 200 (curva 1):

Tabla VII

Valores de la eficacia luminosa

| $\lambda$ , en $\mu$ | $V_\lambda$ | $\lambda$ , en $\mu$ | $V_\lambda$ |
|----------------------|-------------|----------------------|-------------|
| 0,400                | 0,0004      | 0,560                | 0,995       |
| 0,450                | 0,038       | 0,590                | 0,757       |
| 0,500                | 0,323       | 0,650                | 0,107       |
| 0,550                | 0,995       | 0,700                | 0,0041      |
| 0,555                | 1,000       | 0,760                | 0,00006     |

De la tabla VII se deduce que para producir la misma sensación, la potencia de los rayos rojos con longitud de onda de  $0,650 \mu$  deberá

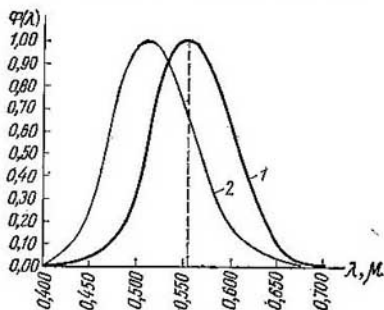


Fig. 200. Sensibilidad relativa de la visión diurna (1) y de la visión nocturna (2).

ser casi 10 veces mayor que la potencia de los rayos verdes con longitud de onda de  $0,555 \mu$ .

Una vez estudiada la sensibilidad relativa o eficacia luminosa podemos introducir una nueva magnitud que caracterice a la luz

\*) Más adelante (§ 305) veremos que la variación de la función  $V_\lambda$  depende del valor absoluto de las potencias. Los valores de  $V_\lambda$  que se dan en la tabla VII se refieren a iluminación diurna media.

teniendo en cuenta su aptitud para producir sensaciones visuales. Esta magnitud se llama *flujo luminoso* y es igual al producto del *flujo radiante* (*flujo de energía radiante*) por la *eficacia luminosa*. Para un flujo monocromático referido a un intervalo estrecho de longitudes de onda  $d\lambda$  próximo a la onda  $\lambda$ , el flujo luminoso

$$dF_\lambda = V_\lambda \cdot dE_\lambda = V_\lambda \cdot e_\lambda d\lambda. \quad (4)$$

El flujo luminoso total será igual a

$$F = \int_0^\infty V_\lambda e_\lambda d\lambda. \quad (4a)$$

La integral se toma entre los límites desde 0 hasta  $\infty$ , puesto que para todas las longitudes de onda que se encuentran fuera del espectro visible  $V_\lambda = 0$ . El flujo luminoso  $F$  permite juzgar sobre la intensidad de la sensación visual subjetiva que puede producir una luz de potencia y composición espectral dadas.

§ 302. **Intensidad luminosa, luminosidad e iluminación.** Estudiemos el caso de una fuente luminosa puntual  $S$  (fig. 201) que emite

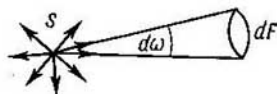


Fig. 201. Flujo luminoso dentro de los límites de un ángulo sólido infinitamente estrecho  $d\omega$ .

rayos en todas las direcciones. Tomemos en una dirección cualquiera un ángulo sólido infinitamente estrecho  $d\omega$ . Supongamos que dentro de los límites de este ángulo sólido se propaga un flujo luminoso  $dF$ . La magnitud

$$I = \frac{dF}{d\omega} \quad (1)$$

se llama *intensidad luminosa* de la fuente en la dirección dada. De la correlación (1) se deduce que *la intensidad de la luz es numéricamente igual al flujo luminoso correspondiente al ángulo sólido unidad*. Si la fuente es uniforme, es decir, si su intensidad luminosa es igual en todas las direcciones, en la correlación (1) el ángulo sólido infinitamente estrecho  $d\omega$  puede sustituirse por el ángulo sólido finito  $\Omega$ , y entonces

$$I = \frac{F}{\Omega}.$$

De esta última igualdad, cuando la fuente es uniforme, tenemos que

$$F = I \cdot \Omega. \quad (2)$$

Suponiendo que en la igualdad (2) el ángulo sólido  $\Omega$  es igual a  $4\pi$ , obtenemos el flujo total  $F$  que emite en todas las direcciones la fuente uniforme cuya intensidad luminosa es  $I$ :

$$F = 4\pi I. \quad (2a)$$

Si la fuente no es uniforme la intensidad de la luz será diferente en las distintas direcciones. Tomando coordenadas polares obtenemos que la intensidad de la luz será función de los ángulos polares:  $I = I(i, \varphi)$ .

Una fuente no uniforme puede caracterizarse gráficamente si tomando un punto determinado  $O$  como origen de coordenadas trazamos en todas las direcciones radios vectores cuyas longitudes sean

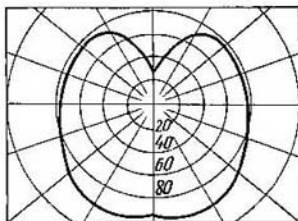


Fig. 202. Diagrama vectorial de la intensidad de la luz de una lámpara eléctrica.

proporcionales a la intensidad de la luz  $I(i, \varphi)$  en cada dirección. La envolvente de los extremos de estos radios vectores dará el diagrama de la intensidad luminosa en las distintas direcciones. En la fig. 202 se da un diagrama vectorial de este tipo característico de una lámpara eléctrica ordinaria.

En las fuentes no uniformes puede tomarse en consideración la intensidad luminosa esférica media  $I_0$ , determinada por la correlación:

$$I_0 = \frac{F}{4\pi} \quad (3)$$

donde  $F$  es el flujo luminoso total emitido por la fuente en todas las direcciones.

De la comparación de las igualdades (3) y (2a) se deduce que, si la fuente luminosa es uniforme, su intensidad esférica media coincide con la intensidad luminosa real  $I$ .

Supongamos ahora que tenemos una fuente de luz de dimensiones finitas, por ejemplo, un cuerpo sólido incandescente. Tomemos en

él una superficie elemental  $dS$ , y llamemos  $dF$  (fig. 203) al flujo luminoso total que emite esta superficie  $dS$  en todas las direcciones (dentro de los límites de un ángulo sólido igual a  $2\pi$ ).

La magnitud

$$R = \frac{dF}{dS} \quad (4)$$

se llama *luminosidad o emitancia luminosa* de la superficie  $dS$ . La luminosidad es numéricamente igual al flujo luminoso total emitido por la unidad de superficie del cuerpo luminoso.

El flujo luminoso procedente de un cuerpo no sólo puede deberse a que éste sea por sí mismo fuente de vibraciones luminosas (cuerpos

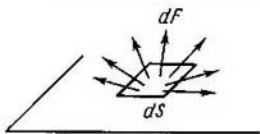


Fig. 203. Flujo luminoso total de la superficie  $dS$ .

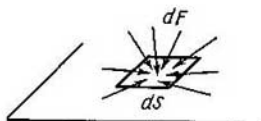


Fig. 204. La iluminación (iluminancia) de la superficie  $dS$  está determinada por el flujo luminoso total  $dF$  que incide sobre ella.

incandescentes, fosforescentes, etc.), sino también a que en él se refleje o difunda la luz que emiten otras fuentes. Por esto, para resolver muchos problemas importa conocer qué cantidad de flujo luminoso incide sobre una u otra parte del cuerpo iluminado. Para esto se introduce la magnitud llamada *iluminación o iluminancia* que es igual a

$$E = \frac{dF}{dS}, \quad (5)$$

donde  $dF$  es el flujo luminoso total que incide sobre la superficie  $dS$  (fig. 204). La iluminación es numéricamente igual al flujo luminoso total que incide sobre la unidad de superficie del cuerpo iluminado.

La comparación de las fórmulas (4) y (5) pone de manifiesto que la luminosidad  $R$  y la iluminación  $E$  vienen expresadas por la misma razón  $dF/dS$ . La diferencia entre ellas consiste en que en la expresión de la luminosidad se entiende por  $dF$  el flujo luminoso emitido por la superficie  $dS$ , mientras que en la expresión de la iluminación  $dF$  es el flujo que incide sobre la superficie  $dS$ .

Es evidente que la luminosidad de un cuerpo que por sí mismo es fuente de vibraciones luminosas, en general, no está relacionada con su iluminación. Por el contrario, la luminosidad de un cuerpo cuya emisión de luz se debe a los rayos luminosos que difunde o refleja está determinada por su iluminación. Cuanto mayor sea la ilu-

minación  $E$  tanto mayor será la luminosidad  $R$  de estos cuerpos:

$$R = kE; \quad (6)$$

la magnitud  $k$  se llama *coeficiente de difusión (reflexión)*. Para todos los cuerpos reales  $k < 1$ .

La mayoría de los cuerpos difunden la luz selectivamente, es decir, para ellos  $k$  es diferente para distintas longitudes de onda. Estos cuerpos nos parecen «coloreados»: si sobre ellos incide luz blanca, la composición de la luz difusa se diferencia de la de aquélla y produce cierta sensación de colorido. Se llaman blancos aquellos cuerpos cuyo coeficiente  $k$  se aproxima mucho a la unidad y es constante para todas las longitudes de onda comprendidas entre los límites del espectro visible. Son negros los cuerpos que para todas

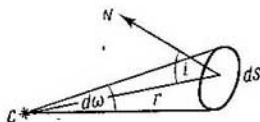


Fig. 205. Esquema para calcular la iluminación que produce la fuente puntual  $C$ .

las longitudes de onda tienen igual  $k$ , siendo éste mucho menor que la unidad. Para las superficies cubiertas de una capa de magnesia o de nieve recién caída el coeficiente  $k$  puede alcanzar valores de 0,9 y mayores. Para las superficies negras deslustradas  $k \cong 0,01$ .

Los cuerpos que tienen diferentes coeficientes de difusión  $k$  presentan distinta luminosidad con una misma iluminación. Por ejemplo, si tomamos una hoja de papel blanco, cuyo coeficiente  $k = 0,8$ , y una parte de ella la dejamos blanca mientras la otra la teñimos de negro, de manera que tenga un valor de  $k = 0,02$ , al someterla a una iluminación uniforme la luminosidad de la parte ennegrecida será 40 veces menor que la de la parte blanca.

Para terminar el presente párrafo veamos qué iluminación produce una fuente luminosa puntual de intensidad  $I$  sobre una superficie que se encuentra a una distancia  $r$ . Sea  $C$  la fuente luminosa puntual (fig. 205) y  $dS$  la superficie iluminada por ella. Supongamos que el radio vector  $r$ , trazado desde el foco luminoso  $C$  al centro de la superficie  $dS$ , forma con la normal a ésta un ángulo  $i$ . Llamemos  $d\omega$  al ángulo sólido bajo el cual se ve la superficie  $dS$  desde el punto en que se encuentra la fuente  $C$ . En estas condiciones el flujo procedente de  $C$  que incide sobre la superficie  $dS$ , según (1), será:

$$dF = I d\omega.$$

Pero el ángulo sólido

$$d\omega = \frac{dS}{r^2} \cos i,$$

de donde obtenemos que

$$dF = dS \frac{I}{r^2} \cos i.$$

Para obtener la iluminación  $E$  no hay más que dividir la magnitud del flujo  $dF$  por la de la superficie  $dS$ :

$$E = \frac{dF}{dS} = \frac{I}{r^2} \cos i. \quad (7)$$

Por la fórmula (7) vemos que la iluminación producida por una fuente puntual es directamente proporcional a su intensidad  $I$  e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que hay desde la fuente hasta la superficie iluminada. La iluminación depende

además del ángulo  $i$  que forman los rayos con la superficie: cuanto más inclinados inciden los rayos menor es la iluminación que producen.

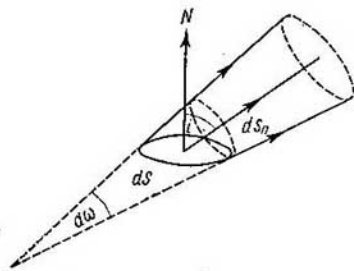


Fig. 206. Esquema para hallar la luminancia.

§ 303. Luminancia (brillo fotométrico). Como dijimos en el párrafo anterior, la luminosidad está determinada por el flujo luminoso que emite una superficie luminosa en todas las direcciones. Estudiemos ahora el caso del flujo luminoso  $dF$  emitido por un elemento de superficie  $dS$  (fig. 206), en una dirección

que forma un ángulo  $i$  con la normal, dentro de los límites de un ángulo sólido infinitamente pequeño  $d\omega$ . Este flujo es proporcional al ángulo sólido  $d\omega$  y depende de la magnitud de la superficie  $dS$ , del ángulo  $i$  y de la intensidad luminosa de la superficie. Lambert lanzó la hipótesis de que la magnitud del flujo  $dF$  viene determinada por las dimensiones visibles de la superficie  $dS$ , es decir, por las dimensiones de su proyección  $dS_n$  sobre un plano perpendicular a la dirección en que se propaga el flujo. Esta hipótesis se basa en el hecho de que si una esfera luminosa uniforme, por ejemplo, el Sol, se mira a través de niebla o de un vidrio ahumado, nos parece un disco plano de igual brillantez. Como  $dS_n = dS \cos i$ , suponemos que

$$dF = B \cos i dS d\omega. \quad (1)$$

La magnitud  $B$  depende de las propiedades de la superficie luminosa y se llama *luminancia* o *brillo fotométrico*. Si la hipótesis de que el flujo  $dF$  es proporcional a las dimensiones visibles de la superficie  $dS$  es justa, la luminancia  $B$  deberá ser una magnitud constante, independiente del ángulo  $i$ , para la superficie luminosa dada. En el caso contrario el valor de  $dF$  en función de  $i$  no dependerá solamente del factor  $\cos i$  de la fórmula (1), sino también de la luminancia  $B$  que representará de por sí una determinada función de  $i$ . La experiencia demuestra que para muchos cuerpos luminosos de por sí (por ejemplo, para los cuerpos sólidos incandescentes que tienen la superficie rugosa) el flujo  $dF$  es proporcional al  $\cos i$  con un grado de aproximación suficiente y que la luminancia  $B$  es constante. De estos cuerpos se dice que cumplen la *ley de Lambert*; también se conocen con el nombre de *radiadores de coseno*.

En general hay que considerar la luminancia  $B$  en función del ángulo  $i$ , con la particularidad de que esta dependencia tiene un carácter determinado en cada caso. Cuando la luminosidad de las superficies se debe a la dispersión de la luz, la luminancia no suele ser constante. Únicamente cuando se trata de superficies mate, como son, por ejemplo, la de la porcelana sin esmaltar, la del papel de dibujo y la de la nieve recién caída,  $B$  hasta un grado de aproximación suficiente, no depende del ángulo  $i$ . La superficie que dispersa la luz cumpliendo exactamente la correlación (1) se llama difusor perfecto. Para la mayoría de las superficies reales  $B$  no sólo depende de las propiedades de la propia superficie, sino también de la dirección de la luz incidente. En todos aquellos casos en que la superficie «brilla» más o menos, la luminancia  $B$  es mayor en las direcciones próximas a la de la reflexión especular que en las demás (compárese con lo dicho en el § 251).

La fórmula (1) da el flujo  $dF$  que emite el elemento  $dS$  de la superficie luminosa dentro de los límites del ángulo sólido infinitamente pequeño  $d\omega$ . Para obtener el flujo  $dF$  emitido por el elemento de superficie  $dS$  comprendido entre los límites del ángulo sólido finito  $\Omega$  no hay más que integrar la expresión (1):

$$dF = dS \int_{\Omega} B \cos i \, d\omega. \quad (2)$$

Si la luminancia  $B$  de la superficie dada es constante se puede sacar del signo integral, y entonces:

$$dF = B \, dS \int_{\Omega} \cos i \, d\omega. \quad (2a)$$

Establezcamos la relación que existe entre la luminancia de una superficie y su luminosidad. Para esto vamos a examinar el flujo  $dF$  que emite la superficie  $dS$  en todas las direcciones. Tomemos un



sistema de coordenadas polares cuyo eje  $OZ$  (fig. 207) sea perpendicular a la superficie  $dS$ . En coordenadas polares el ángulo sólido  $d\omega = \sin i \, di \, d\varphi$ . Por lo tanto, el flujo  $dF$ , procedente de la superficie  $dS$ , comprendido dentro de los límites del ángulo sólido infinitamente pequeño  $d\omega$ , se expresará de la forma siguiente:

$$dF = B \cos i \sin i \, di \, d\varphi \, dS. \quad (3)$$

Para obtener el flujo total  $dF$  emitido en todas las direcciones hay que integrar la expresión (3) según el ángulo  $\varphi$  desde 0 hasta  $2\pi$ , y según el ángulo  $i$  desde 0 hasta  $\pi/2$ :

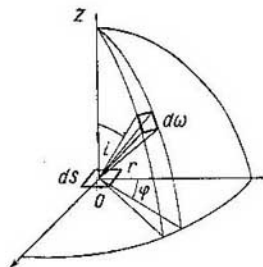


Fig. 207. Esquema para calcular el flujo luminoso total procedente de una superficie de luminancia dada.

$$\begin{aligned} dF &= B \, dS \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{i=0}^{\pi/2} \cos i \sin i \, di \, d\varphi = \\ &= 2\pi B \, dS \int_0^{\pi/2} \cos i \sin i \, di. \end{aligned}$$

Y como

$$\int_0^{\pi/2} \sin i \cos i \, di = \frac{1}{2},$$

tendremos que

$$dF = \pi B \, dS. \quad (3a)$$

De acuerdo con lo dicho en el § 302, la luminosidad de esta misma superficie  $R$  es igual a  $dF/dS$ , de donde

$$R = \frac{dF}{dS} = \pi B$$

o

$$B = \frac{1}{\pi} R. \quad (4)$$

Esta correlación sólo es justa si el radiador cumple la ley de Lambert (radiador de coseno), puesto que únicamente en este caso la luminancia  $B$  será constante y podrá ser sacada del signo integral en la expresión (2). De esta forma la luminancia de la superficie de un radiador que cumple la ley de Lambert es  $\pi$  veces menor que su luminosidad.

Si la luz que da una superficie se debe a la difusión de la radiación que incide sobre ella, según lo expuesto en el § 302, su luminosidad  $R$  se determina partiendo de su iluminación  $E$  por medio de la expresión

$$R = kE,$$

donde  $k$  es el coeficiente de difusión.

Aprovechando la correlación (4) podemos sustituir la luminosidad  $R$  por la luminancia  $B$  y entonces obtenemos

$$B = \frac{k}{\pi} E. \quad (5)$$

Por la fórmula (5) vemos que la luminancia de una superficie cuya luminosidad proviene de la luz que difunde es proporcional a su iluminación y al coeficiente de difusión.

Establezcamos ahora la relación que existe entre la luminosidad y la intensidad de la luz. Para esto escribiremos la expresión (1) de la forma:

$$B = \frac{dF}{dS \cos i d\omega}, \quad (6)$$

pero por la igualdad (1) del §.302

$$\frac{dF}{d\omega} = I,$$

donde  $I$  es la intensidad de la luz, de donde obtenemos que

$$B = \frac{I}{dS \cos i}. \quad (6a)$$

De esta expresión se deduce lo siguiente: *La luminancia de una superficie es igual a la intensidad luminosa que emite en dirección normal ( $i = 0$ ) por unidad de superficie.*

Finalmente estudiaremos el caso de la iluminación producida por un elemento de superficie  $dS$ , de luminancia  $B$ , sobre otro elemento de superficie  $dS'$  que se encuentra a una distancia  $r$  de él. Supongamos que la dirección  $r$  forma

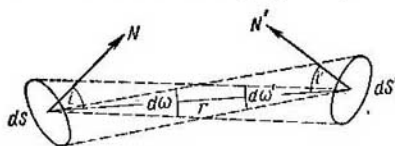


Fig. 208. Esquema para el cálculo de la iluminación que produce una superficie de luminancia dada.

con las respectivas normales a los elementos de superficie  $dS$  y  $dS'$  (fig. 208) los ángulos  $i$  e  $i'$ . Sobre la superficie  $dS'$  incide el flujo luminoso que emite el elemento  $dS$  dentro de los límites del ángulo sólido  $d\omega$ , bajo el cual se ve la superficie elemental  $dS'$  desde el punto en que se encuentra la superficie  $dS$ . Según (1), este flujo será

$$dF = B dS \cos i d\omega,$$

pero  $d\omega = \frac{dS' \cos i'}{r^2}$ , de donde se deduce que

$$dF = B \frac{dS dS' \cos i \cos i'}{r^2}. \quad (7)$$

Esta expresión puede transformarse teniendo en cuenta que  $\frac{dS \cos i}{r^2}$  es el ángulo sólido  $d\omega'$  bajo el cual se ve la superficie elemental  $dS$  desde el sitio en que se halla la  $dS'$ . De donde obtenemos que

$$dF = B dS' d\omega' \cos i'.$$

Y la iluminación de la superficie  $dS'$  que buscamos será:

$$E' = \frac{dF}{dS'} = B d\omega' \cos i'. \quad (8)$$

Es decir, la iluminación que produce una superficie luminosa elemental es proporcional a su luminancia y al ángulo sólido bajo el cual se ve esta superficie elemental desde el punto cuya iluminación se determina.

Comparando este resultado con la fórmula (7) del § 302, vemos que la iluminación producida por una superficie luminosa es proporcional a su luminancia, mientras que la iluminación que produce una fuente luminosa puntual es proporcional a su intensidad luminosa.

#### § 304. Unidades de medición de las magnitudes fotométricas.

La parte de la Física que se ocupa de las mediciones luminosas y de las características cuantitativas de los fenómenos luminosos se llama *fotometría*.

Como unidad fotométrica fundamental se toma la unidad de intensidad luminosa. Esta unidad ha tenido en distintas épocas diferentes determinaciones. Al principio se tomó como unidad la intensidad luminosa que emitía en una dirección determinada una bujía de cera. Esta bujía estaba sujeta a normas en las cuales se indicaba el material y el diámetro de la bujía y la longitud del pabilo. Después la llama de la bujía fue sustituida por una lámpara de diseño especial, en la cual ardía amilacetato puro. Más tarde, en lugar de la lámpara de mecha, se tomó la eléctrica.

En el año 1948 se introdujo un nuevo patrón lumínico que se puede reproducir. Este patrón tiene la forma de cuerpo negro (véase el § 308) radiante a la temperatura de solidificación del platino (2 046, 6° K). En la URSS se hizo un patrón de este tipo en el laboratorio fotométrico del Instituto Central de investigación científica de metrología, bajo la dirección del profesor P. M. Tijodéiev. Como unidad de intensidad luminosa se toma la *candela* (cd) igual a 1/60 de la intensidad luminosa emitida en dirección normal por 1 cm<sup>2</sup> del patrón antedicho. En 1960 esta unidad fue adoptada como unidad de intensidad luminosa del sistema internacional de unidades con el nombre de «candela» o «bujía».

Las unidades de medición de las demás magnitudes fotométricas se establecen sobre la base de sus relaciones normales con la intensidad luminosa.

La unidad de flujo luminoso se estableció basándose en la correlación (1) del § 302:

$$dF = I d\omega.$$

Como unidad del flujo luminoso se toma el *lumen* (lm), que es igual al flujo emitido dentro de los límites de un ángulo sólido unidad (1 estereorradián) por un foco puntual uniforme que tenga la intensidad de 1 cd.

El lumen puede determinarse directamente por medio del patrón de intensidad luminosa. En este caso puede definirse de la forma siguiente: el lumen es igual al flujo luminoso que emite el cuerpo negro a la temperatura de solidificación del platino por un área de  $5,305 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2$ .

El flujo total que emite un foco uniforme cuya intensidad luminosa es de 1 cd, según la fórmula (2a) del § 302, es igual a

$$F = 4\pi I = 4\pi \text{ lm} \cong 12,566 \text{ lm}.$$

La unidad de iluminación se toma fundándose en la correlación (5) del § 302:

$$E = \frac{dF}{dS}.$$

En el sistema internacional de unidades se toma como unidad de iluminación el *lux* (lx), que es igual a la iluminación que produce un flujo de 1 lm uniformemente distribuido sobre una superficie de  $1 \text{ m}^2$ . Además de lux se emplea otra unidad de iluminación, el *fotio* (ph), que es igual a la iluminación que produce el flujo de 1 lm uniformemente distribuido sobre la superficie de  $1 \text{ cm}^2$ . Es evidente que entre el lux y el fotio existe la correlación:

$$1 \text{ lm} = 10^{-4} \text{ ph}. \quad (1)$$

La luminosidad determinada por la correlación  $R = dF/dS$  también se mide en lux.

Para establecer la unidad de luminancia se parte de la correlación (6a) del § 303:

$$B = \frac{I}{dS \cdot \cos i}.$$

Basándose en esta correlación, en el sistema internacional de unidades se toma como unidad de luminancia el *nit* que es igual a la luminancia de una superficie plana uniformemente luminosa que en dirección perpendicular a sí misma ( $i = 0$ ) emite luz con intensidad de 1 cd por  $1 \text{ m}^2$ . Esta unidad se designa también por  $\text{cd}/\text{m}^2$ . Además del nit se utiliza también otra unidad de luminancia llamada *stilb* (abreviado sb) que es la luminancia de una superficie plana uniformemente luminosa que en dirección perpendicular a sí misma emite luz con intensidad de 1 cd por  $1 \text{ cm}^2$ . Es natural que entre el nit y el stilb existe la relación:

$$1 \text{ nit} = 10^{-4} \text{ sb}.$$

Para medir la luminancia (brillo) de las superficies difusoras se emplea a veces otra unidad llamada *apostilb* que es igual a la luminancia de una superficie perfectamente difusora cuya iluminación es igual a 1 lux. Se entiende por perfectamente difusora la superficie que para todas las longitudes de onda y en todas las direcciones tiene un coeficiente de difusión  $k = 1$ .

Según la fórmula (5) del § 303, la luminancia de una superficie difusora es igual a

$$B = \frac{k}{\pi} E,$$

siendo  $E$  la iluminación. Si medimos  $E$  en fotios y  $B$  en stilb, y tenemos en cuenta que  $\frac{1}{\pi} \cong 0,318$ , obtenemos:

$$B \text{ (stilb)} = 0,318kE \text{ (fotios)}.$$

De aquí se deduce que la luminancia de una superficie perfectamente difusora ( $k = 1$ ) sobre la que el flujo incidente produce una iluminación de 1 lux =  $= 10^{-4}$  ph es igual a

$$B = 0,318 \cdot 10^{-4} \text{ sb} = 3,18 \cdot 10^{-5} \text{ sb}.$$

Junto a las unidades fotométricas de intensidad luminosa, iluminación, luminosidad y luminancia, que acabamos de estudiar, pueden señalarse las magnitudes energéticas análogas a ellas que se obtienen partiendo de las mismas correlaciones aunque sustituyendo el flujo luminoso por el flujo radiante  $E$ . Estas magnitudes pueden medirse en unidades absolutas, por ejemplo, la irradiancia («iluminación energética») se mide en  $\text{erg/s} \cdot \text{cm}^2$  o  $\text{W/cm}^2$ . En la tabla VIII se da una relación de las magnitudes fotométricas y energéticas principales con sus correspondientes unidades de medición.

Tabla VIII

| Magnitud                            | Unidad de medición |  |
|-------------------------------------|--------------------|--|
|                                     | fotométrica        | energética   |
| Flujo luminoso $F$                  | lumen              | $\frac{\text{erg}}{\text{s}}$ ; W  |
| Función de distribución $e_\lambda$ | —                  | $\frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{cm}}$ ; $\frac{\text{W}}{\text{cm}}$                                     |
| Intensidad de la luz $I$            | candela, bujía     | $\frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{sr}}$ ; $\frac{\text{W}}{\text{sr}}$                                     |
| Iluminación $E$                     | lux, fotio         | $\frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{cm}^2}$ ; $\frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$                                 |
| Luminosidad $R$                     | lux, fotio         | $\frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{cm}^2}$ ; $\frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$                                 |
| Luminancia $B$                      | nit, stilb         | $\frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{sr} \cdot \text{cm}^2}$ ; $\frac{\text{W}}{\text{sr} \cdot \text{cm}^2}$ |

En la tabla IX se dan los valores aproximados de la iluminación y de la luminancia para una serie de casos frecuentes.

A un flujo luminoso de 1 lm pueden corresponderle potencias diferentes según cual sea la composición espectral de la luz. Pero si por

Tabla IX

| Iluminación                                 | Lux                 | Luminancia   | Stilb               |
|---|---------------------|--|---------------------|
| Bajo los rayos directos del Sol (en verano) | $10^5$              | De la superficie del Sol a través de la atmósfera                        | $1,47 \cdot 10^6$   |
| En sitio abierto, de día, pero sin Sol      | $\sim 10^3$         | Del cráter de un arco eléctrico  | $1,5 \cdot 10^4$    |
| De día en una habitación                    | $\sim 10^2$         | Del filamento de wolframio de una lámpara de incandescencia llena de gas | $4,5 \cdot 10^2$    |
| Necesaria para leer                         | 3·10                | Del cielo despejado a $75^\circ$ del Sol                                 | $1,5 \cdot 10^{-1}$ |
| Necesaria para trabajos de precisión        | $10^2$              | De la superficie de la Luna a través de la atmósfera                     | $2,5 \cdot 10^{-1}$ |
| Con Luna llena                              | $2,5 \cdot 10^{-2}$ | De una superficie blanca bajo los rayos directos del Sol                 | 3                   |
| De estrellas de 8ª magnitud                 | $1,4 \cdot 10^{-9}$ | De una superficie blanca con iluminación de 30 lux                       | $10^{-3}$           |

convenio se trata de una luz cuya composición espectral está perfectamente establecida, al flujo de un lumen le corresponderá una potencia determinada y, por lo tanto, será posible relacionar entre sí las unidades fotométricas y energéticas. Generalmente se toma la luz correspondiente a un estrecho intervalo de longitudes de onda próximas a  $\lambda = 0,555 \mu$ , es decir, al intervalo en que la sensibilidad del ojo humano es máxima. En esta zona, a un flujo de 1 lm le corresponde una potencia de 0,00155 W:

$$1 \text{ lm } (\lambda = 0,555 \mu) = 0,00155 \text{ W.} \quad (2)$$

A un flujo de 1 lm cuya composición espectral sea otra cualquiera le corresponderá una potencia mayor. Por esto la magnitud 0,00155 W/lm se llama *equivalente mecánico mínimo de la luz*. De la [relación (2) se deduce:

$$1 \text{ W } (\lambda = 0,555 \mu) = 650 \text{ lm.} \quad (3)$$

Para la luz monocromática de cualquier otra longitud de onda se cumple la correlación

$$1W(\lambda) = 650 \cdot V_\lambda \text{ lm.} \quad (3a)$$

donde  $V_\lambda$  es el valor de la eficacia luminosa monocromática para esta longitud de onda.

Examinemos el siguiente ejemplo:

A una altura  $h = 4$  m sobre un plano se encuentra una fuente luminosa puntual uniforme de  $I = 100$  cd. Hallar la iluminación del plano en un punto  $C$  que se encuentra a la distancia  $x$  de la base del segmento  $h$  (fig. 209).

Solución. Por la fórmula (7) del § 302 la iluminación  $E$  en el punto  $C$  es

$$E = \frac{I \cos i}{r^2}, \quad (4)$$

siendo  $r$  la distancia desde la fuente luminosa hasta el punto  $C$ . Pero por el dibujo vemos que

$$r = \sqrt{h^2 + x^2}, \quad \cos i = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}},$$

Fig. 209. Esquema para calcular la iluminación que produce la fuente puntual  $I$ .

de donde, poniendo estos valores en (4), tendremos:

$$E = \frac{Ih}{(h^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

Expresando  $I$  en bujías internacionales o candelas y  $h$  y  $x$  en metros obtendremos  $E$  en lux. Debajo mismo de la fuente luminosa ( $x = 0$ )

$$E = \frac{100}{16} \text{ lx} = 6,2 \text{ lx}$$

Si  $x \gg h$ , en la fórmula (5) se puede despreciar  $h$  en comparación con  $x$ , y entonces:

$$E \cong \frac{Ih}{x^3}.$$

De este ejemplo se deduce que a una distancia de varios metros de una fuente luminosa puntual cuya intensidad sea de 100 cd la iluminación será mucho menor que la necesaria para poder leer (30 lx). Sin embargo todos sabemos que en una habitación alumbrada por una lámpara de 100 bujías se puede leer perfectamente a distancias de varios metros de ella. Esto se explica por el hecho de que dentro de los locales la luz sufre múltiples reflexiones en el techo, en las paredes y en el suelo, lo que da lugar a un aumento de la iluminación total (véase el § 306).

§ 305. Percepción de la luz. La medición de las magnitudes fotométricas se realiza por medio de observaciones visuales (fotometría visual) o por medio de aparatos perceptores (fotometría objetiva). Por esto empezaremos por estudiar el ojo como aparato perceptor de la luz y luego nos ocuparemos de los aparatos objetivos que también sirven para este fin.

La sensación visual subjetiva se produce como resultado de la excitación del nervio óptico provocada por la iluminación de la retina. En la fig. 210 puede verse el corte longitudinal del ojo humano, donde *A* es la córnea, transparente, *L* es el cristalino, *i* es el iris, *R*, la retina, y *O*, el nervio óptico. El espacio comprendido entre la córnea y el cristalino está lleno de un líquido llamado *humor acuoso*, y entre el cristalino y la retina se encuentra el *humor vítreo*. El iris tiene un orificio

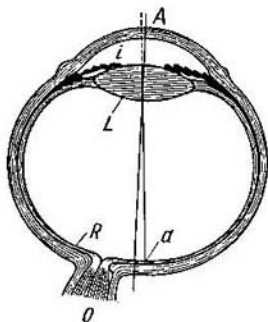


Fig. 210. Corte longitudinal del ojo humano.

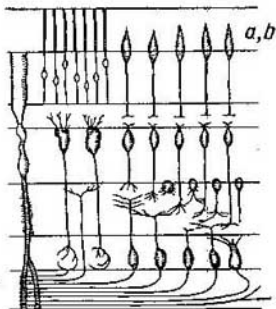


Fig. 211. Corte de la retina del ojo.

llamado pupila. Las dimensiones de la pupila pueden variar y regular de esta forma la magnitud del flujo luminoso que llega al interior del ojo.

La retina, cuya estructura es muy complicada, es una especie de ramificación de las fibras del nervio óptico. El sistema óptico del ojo, que estudiaremos más adelante (§ 325), produce sobre la retina una imagen real de los objetos que se encuentran fuera del ojo. La intensidad de la sensación viene determinada por la *iluminación* que produce sobre la retina el flujo luminoso que llega al ojo. En la fig. 211 se reproduce un corte esquemático de la retina. Los elementos sensibles a la luz son los llamados *conos* y *bastoncillos* (*a*, *b*). El número de conos que tiene el ojo humano alcanza 7 millones y el de bastoncillos más de 100 millones. La parte periférica de la retina sólo tiene bastoncillos. Los conos se encuentran principalmente en la parte central de la retina. Casi al lado del nervio óptico se encuentra la *mancha amarilla* con la *fóvea central* (*a* en la fig. 210). En la zona de la fóvea central no hay más que conos. El punto por el cual el nervio óptico entra en el ojo no percibe la luz (*punto ciego*).

El papel de los bastones en la sensación visual es distinto del que desempeñan los conos. Los bastoncillos son mucho más sensibles que



los conos pero no permiten distinguir los colores. La sensación de los colores se debe exclusivamente a la excitación de los conos. Además, las partes de la retina que contienen conos pueden distinguir mucho más detalles que las zonas que solamente tienen bastoncillos. A esto se debe que el hombre tenga dos tipos de visión: uno, determinado por la excitación de los conos, que actúa cuando la iluminación es bastante intensa y que permite distinguir los colores y percibir gran número de detalles. Este tipo de visión se llama *foveal* o *diurna*. El otro tipo está relacionado con la excitación de los bastoncillos y se llama *visión nocturna*. Como quiera que los bastoncillos están situados principalmente en la periferia de la retina, este tipo de visión se llama también *periférica*. Por lo general actúan simultáneamente, en mayor o menor grado, ambas visiones, pero cuando la iluminación es muy pequeña trabaja exclusivamente la visión nocturna.

Al pasar de un sitio intensamente iluminado a otro que lo esté débilmente los bastones no alcanzan al instante su máxima sensibilidad, por lo que la transición de una a otra visión se realiza relativamente despacio. Es bien conocido el hecho de que cuando de día se entra de la calle a un local mal alumbrado no se ve nada al principio. Después, a medida que el ojo «se acostumbra» se van distinguiendo los objetos. El proceso que hace que empiece a actuar la visión nocturna se llama *adaptación*. Para que el ojo se adapte por completo tiene que permanecer en la oscuridad 30-40 min. La sensibilidad del ojo totalmente adaptado es muy grande: el ojo es capaz de reaccionar en presencia de flujos de energía luminosa del orden de  $4 \cdot 10^{-10}$  erg/s. Para los rayos verdes esto corresponde a una iluminación de la pupila del orden de  $5 \cdot 10^{-10}$  lx. El flujo luminoso mínimo capaz de producir sensación visual se llama *umbral de visibilidad*. Evidentemente sólo tiene sentido hablar del umbral de visibilidad del ojo adaptado. Con la visión diurna el ojo puede percibir flujos de hasta 200 erg/s. Cuando la potencia luminosa es muy grande se produce una sensación dolorosa y hasta pueden ocurrir aficciones en la retina. Estas últimas pueden originarse también cuando se pasa demasiado rápidamente de la percepción de un flujo débil a la de otro muy intenso, aunque este último no supere el límite que, en general, el ojo puede soportar sin sentir dolor.

La luminancia (brillo) subjetiva de objetos visibles bajo un ángulo de vista finito, como veremos más adelante (§ 326), depende de su luminancia fotométrica.

Con la visión nocturna las luces de diferentes longitudes de onda producen una misma sensación de color gris azulado. Pero la sensibilidad de la visión nocturna no es la misma para las diferentes longitudes de onda. La visión nocturna se puede caracterizar por una sensibilidad relativa diferente de la sensibilidad relativa de la visión diurna. La sensibilidad relativa de la visión nocturna es la representada por la curva 2 de la fig. 200. En comparación con el

máximo de la curva 1, que representa la sensibilidad relativa de la visión diurna, el de la curva 2 está desplazado hacia la zona de las ondas más cortas; este máximo se encuentra cerca de los 0,510  $\mu$ .

El conocimiento de estas peculiaridades del ojo humano tiene gran importancia cuando éste se emplea en calidad de aparato receptor en las mediciones fotométricas.

El paso de la visión diurna a la nocturna y las particularidades características de esta última se pueden demostrar con relativa facilidad. Para esto, en un local oscuro y con un mismo aparato se proyectan sobre una pantalla dos semicírculos contiguos de diferentes colores, por ejemplo, uno rojo y otro azul. Los colores de estos semicírculos deben elegirse de forma que parezca que tienen el mismo brillo. Después hay que ir disminuyendo paulatinamente el flujo luminoso que sirve para proyectar ambas imágenes. Esto se puede conseguir colocando delante del objetivo del proyector, pero antes de que los haces se dividan, dos nicoles. Haciendo girar poco a poco estos nicoles desde la posición en que son «paralelos» a la que son «cruzados» las potencias de los flujos que producen las imágenes roja y azul se van debilitando igual número de veces. Sin embargo, cuando la iluminación es muy débil, el semicírculo azul parecerá más brillante que el rojo. Y si se siguen debilitando los flujos, el semicírculo rojo desaparecerá antes que el azul, con la particularidad de que este último perderá su color y parecerá grisáceo. Este experimento demuestra claramente cómo desaparece la sensación del color cuando trabaja exclusivamente la visión nocturna y cómo ésta es más sensible a los rayos azules que a los rojos.

Entre los aparatos receptores objetivos señalaremos los basados en los siguientes efectos: fotoeléctrico, termoelectrico, fotográfico y térmico.

Los aparatos basados en el efecto fotoeléctrico (§ 332) se llaman *células fotoeléctricas*. Hay células fotoeléctricas de vacío (tubos fotoeléctricos) y sólidas. Bajo la acción de la luz incidente, en el circuito en que está incluida la célula se produce corriente eléctrica. La intensidad de la corriente producida viene determinada por el *flujo luminoso* que cae sobre la célula fotoeléctrica. En las células fotoeléctricas de vacío existe una proporción directa entre la intensidad de la corriente de saturación y la potencia de la luz (de longitud de onda dada).

Las células fotoeléctricas sólidas suelen ser de dos tipos. Al primero pertenecen las *células fotoconductoras*, llamadas también *fotorresistivas* (selenio, sulfuros de talio, etc.). Cuando estas células son iluminadas disminuye su resistencia óhmica. La lámina de la sustancia fotoconductoras se conecta en serie con un generador de fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$ . En la oscuridad por el circuito circula la llamada corriente oscura  $i_0$ ; cuando hay luz a la corriente anterior se suma la corriente fotoeléctrica  $i_f$ , que es proporcional a la raíz cuadrada del flujo luminoso  $\mathcal{F}$ . Por lo tanto, la corriente total

$$i = i_0 + i_f = (\sigma_0 + \beta \sqrt{\mathcal{F}}) \mathcal{E},$$

donde  $\sigma_0$  es la conductividad oscura de la célula fotoeléctrica sólida. El segundo tipo de célula fotoeléctrica sólida es la *fotovoltaica o de barrera*. Al iluminarse la célula fotovoltaica se produce corriente en el circuito, de que ésta forma parte, sin necesidad de ninguna fuerza electromotriz complementaria  $\mathcal{E}$ . De ejemplo de célula fotovoltaica puede servir la de cobre-óxido cuproso, formada por una capa delgada de óxido cuproso  $\text{Cu}_2\text{O}$  que recubre a una placa de cobre (véase el § 335). Las células fotoeléctricas tienen una marcada selectividad, es decir, no tienen la misma sensibilidad para luces de diferentes longitudes de onda. La curva de sensibilidad depende de la naturaleza de la capa sensible y varía mucho para diferentes capas. La sensibilidad de todas las células fotoeléctricas es limitada por la parte de las grandes longitudes de onda. Las células fotoeléctricas de vacío con superficies de cesio puro son sensibles hasta  $\lambda = 0,63 \mu$ ; las que tienen cátodo de plata y óxido de cesio lo son hasta  $\lambda = 1,2 \mu$ ; las sólidas de sulfuro de talio (talofidos), hasta  $\lambda = 1,4 \mu$  y las de seleniuro y telururo de plomo, hasta  $\lambda = 5,5 \mu$ .

Las células fotoeléctricas de vacío carecen prácticamente de inercia y por esto pueden utilizarse para registrar impulsos sumamente cortos o para estudiar las variaciones que experimentan los flujos luminosos con el tiempo.

La sensibilidad de estas células fotoeléctricas es bastante grande y alcanza  $100 \mu \text{ A}$  por  $\text{lm}$ . Pero la sensibilidad de las células fotoeléctricas sólidas es aún mayor y alcanza  $500 \mu \text{ A/lm}$ . El umbral de sensibilidad de los talofidos llega a  $3 \cdot 10^{-8} - 6 \cdot 10^{-9} \text{ W}$ .

La sensibilidad de los aparatos fotoeléctricos se aumenta en la actualidad utilizando esquemas de amplificación por medio de lámparas electrónicas. Para intensificar la corriente fotoeléctrica también se emplea el principio propuesto por G. A. Kubetski, basado en el fenómeno de la emisión electrónica secundaria

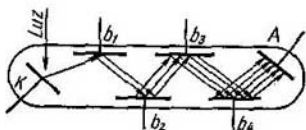


Fig 212. Multiplicador fotoeléctrico.

(t. II, § 173). En la fig. 212 se reproduce el esquema de un multiplicador fotoeléctrico (MFE), cuya construcción se basa en dicho principio, donde  $K$  es el cátodo fotosensible, del que bajo la acción de la luz incidente se desprenden fotoelectrones. Estos electrones, influidos por el campo eléctrico que se aplica, se aceleran hacia el electrodo  $b_1$ . Gracias a la emisión electrónica secundaria, del electrodo  $b_1$  se desprenden más electrones que inciden sobre él. Estos últimos electrones vuelven a acelerarse en dirección al electrodo  $b_2$ , del cual se desprenden aún más electrones, y así sucesivamente. En resumidas cuentas, al ánodo  $A$

llega un número de electrones mucho mayor que el que se desprendió del cátodo  $K$  por la acción de la luz incidente, y en el circuito en que está conectado el MFE surge una corriente cuya intensidad es suficiente para poder ser medida con facilidad. La sensibilidad de los MFE modernos alcanza varios amperios por lumen.

Los aparatos termoelectricos fueron descritos en el t. II, § 170. En ellos la corriente eléctrica se produce como resultado del calentamiento de la soldadura y es proporcional a la potencia de la radiación dentro de unos límites amplios. Estos aparatos tienen la ventaja de que si las soldaduras están bien ennegrecidas no presentan selectividad y, en principio, pueden servir para medir flujos de cualquiera longitud de onda. Pero se diferencian de las células fotoeléctricas por tener bastante inercia.

Las placas fotográficas también se utilizan mucho para registrar y medir flujos luminosos. El ennegrecimiento de las placas fotográficas depende de la iluminación. Un mismo flujo puede producir ennegrecimientos bastante distintos según sea la superficie en que se distribuye. Las placas fotográficas son de acción integrante, puesto que al aumentar el tiempo de iluminación aumenta el ennegrecimiento. Esta propiedad hace posible descubrir con placas fotográficas flujos de potencia extraordinariamente pequeña, siempre que puedan actuar sobre ellas durante bastante tiempo. Los métodos fotográficos modernos se utilizan para registrar flujos luminosos cuyas longitudes de onda pueden oscilar desde las más cortas hasta aproximadamente  $1,2 \mu$ .

Los métodos térmicos se basan en los fenómenos secundarios que tienen lugar como resultado del calentamiento producido por la absorción del flujo luminoso. Recientemente estos métodos han sido perfeccionados eficazmente por los físicos soviéticos.

V. I. Veinguérov ha elaborado un procedimiento para registrar la radiación por medio de la dilatación térmica de los cuerpos. Para ello, sobre una película muy fina de cuarzo fundido se extiende una capa de bismuto metálico ennegrecido. Esta doble película se suspende en el vacío. Cuando sobre ella incide una radiación se calienta un poco y, debido a la gran diferencia que existe entre los coeficientes de dilatación del cuarzo fundido y del bismuto, se dobla. Esta dobladura puede observarse directamente al microscopio o por la desviación que produce en un rayo que se refleja en el extremo de la película.

Otro procedimiento térmico se funda en la variación de la resistencia óhmica de una laminilla metálica cuando se calienta por absorción de la luz. Este procedimiento, con el nombre de bolométrico, se utilizó en el siglo pasado para registrar los rayos infrarrojos, pero después cayó en olvido por poco sensible. Pero últimamente B. P. Kóziriev lo ha perfeccionado hasta tal punto que sus cualidades no desmerecen ahora de las de los otros procedimientos. El apa-

rato que se emplea consiste en una cinta finísima de papel de oro ennegrecido que se suspende en el vacío. La variación de la resistencia óhmica de esta cinta se mide por el procedimiento del puente de Wheatstone (t. II, § 167), amplificando posteriormente la corriente. Como la masa de la cinta es muy pequeña, la inercia del aparato es insignificante.

Las radiaciones infrarrojas se pueden registrar también por medio de aparatos basados en el *efecto óptico-acústico*. Este efecto consiste en lo siguiente: sobre un recipiente cerrado que contiene gas incide una radiación que es interrumpida (por un disco giratorio, por ejemplo) con frecuencia acústica. Si el gas absorbe la radiación, su presión aumentará periódicamente (debido al calentamiento) con la misma frecuencia con que se interrumpe la luz y en él se producirán vibraciones acústicas. M. L. Veinguérov construyó un aparato óptico-acústico en el que las vibraciones del gas se comunican con una membrana microfónica y después se perciben por medio de un teléfono. S. M. Luchin propuso, para evitar la selectividad, que la radiación fuera absorbida por una lámina recubierta de negro de humo. El calentamiento de esta lámina se transmite al gas y produce en él las vibraciones acústicas. En este principio se basa el *indicador neumático de Goley* que consiste en una cámara pequeña provista de un canal minúsculo que contiene gas. Este canal está cerrado por un lado con una película ennegrecida y por el otro con la membrana del indicador. Las vibraciones de la membrana se registran por procedimiento interferencial. El umbral de sensibilidad del indicador neumático alcanza a  $10^{-10}$  W.

En la actualidad también se emplean para registrar las radiaciones infrarrojas los llamados *termistores*. Estos son cuerpos cuya resistencia óhmica varía mucho cuando se calientan aunque sea muy débilmente. En calidad de termistores se utilizan el  $\text{Ag}_2\text{S}$ , el  $\text{PbSe}$ , el  $\text{UO}_2$  y algunos otros compuestos. El umbral de sensibilidad de los termistores llega a  $10^{-9}$  W.

§ 306. *Medición de las magnitudes fotométricas.* El ojo humano, lo mismo que los demás órganos sensoriales es incapaz de apreciar cuantitativamente una excitación, es decir, basándose en la intensidad de la sensación subjetiva no puede determinar cuántas veces es mayor un flujo luminoso que otro. Pero el ojo puede en cambio establecer con un alto grado de exactitud cuando dos campos contiguos *están igualmente iluminados*, siempre que lo estén por luz de un mismo color. Por esto todos los métodos de fotometría visual se reducen a conseguir el equilibrio de las iluminaciones que ve el ojo. En su forma más elemental este principio es el que se utiliza en el fotómetro de prisma triangular (fig. 213). Un prisma triangular blanco  $ABC$  se encuentra dentro de un tubo ennegrecido. Sus dos caras simétricas  $AB$  y  $AC$  se iluminan simultáneamente con dos

fuentes luminosas  $S_1$  y  $S_2$ . Observando con el ojo  $O$  estas dos caras es fácil determinar las condiciones que hacen que sus iluminaciones sean iguales.

Este fotómetro permite comparar la intensidad de la luz de fuentes distintas. Si las fuentes tienen dimensiones pequeñas y se encuentran situadas a bastante distancia del prisma se pueden considerar puntuales.

En este caso, según la fórmula (7) del § 302, la iluminación de las caras  $AB$  y  $AC$  será:

$$E_1 = \frac{I_1}{r_1^2} \cos i, \quad E_2 = \frac{I_2}{r_2^2} \cos i, \quad (1)$$

donde  $I_1$  e  $I_2$  son las intensidades de la luz correspondientes respectivamente a las fuentes  $S_1$  y  $S_2$ ;  $r_1$  y  $r_2$  son las distancias a que estas fuentes se encuentran del prisma, e  $i$  es el ángulo de incidencia de

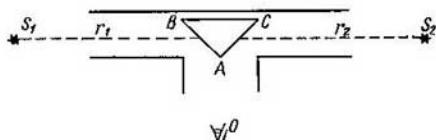


Fig. 213. Fotómetro de prisma triangular.

los rayos sobre las caras del prisma (cuando las fuentes luminosas están situadas simétricamente sus rayos inciden sobre las caras  $AB$  y  $AC$  formando ángulos iguales). Variando una de las distancias, por ejemplo, la  $r_2$ , se pueden equilibrar las iluminaciones:  $E_1 = E_2$  y entonces, de la correlación (1), obtenemos:

$$\frac{I_1}{I_2} = \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2.$$

De esta forma la relación que existe entre las intensidades de la luz de dos fuentes se puede medir por la relación que hay entre las distancias  $r_1$  y  $r_2$ . Si se conoce la intensidad de la luz de una de las fuentes, la intensidad de la otra puede considerarse medida.

La correlación (1) se cumple a condición de que la luz que incide sobre las caras  $AB$  y  $AC$  del prisma llegue directamente de las fuentes  $S_1$  y  $S_2$  y de que no exista luz reflejada o difundida por objetos circundantes. Por esta razón, al realizar la medición fotométrica deben colocarse superficies ennegrecidas tanto detrás como a los lados de los focos luminosos.

En los fotómetros visuales más exactos el prisma  $ABC$  se sustituye por el llamado *cubo de Lummer y Brodhum* (fig. 214). Este cubo está formado por dos prismas rectangulares de vidrio  $A$  y  $B$ ,

uno de los cuales (el *A*) sólo tiene plana la parte central de la cara correspondiente a la hipotenusa; los bordes de esta cara se rebajan. Los prismas están unidos entre sí de tal forma que en el sitio de contacto se comportan como un cuerpo transparente homogéneo (es decir, se encuentran en «contacto óptico»). Supongamos que sobre el cubo inciden los flujos luminosos 1 y 2.

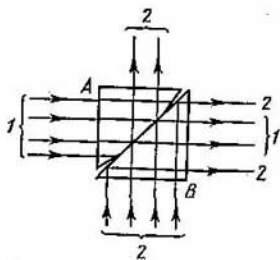


Fig. 214. Cubo de Lummer — Brodhum.

El flujo 1 llega a través del cubo hasta el sitio de contacto y sale por la derecha. En aquellos sitios en que el prisma *A* está rebajado los rayos del flujo 1 se desvían hacia los lados. El flujo 2 atraviesa el cubo pasando por el sitio de contacto y sale hacia arriba. En los demás sitios sufre la reflexión total y sale hacia la derecha. De esta forma por la derecha salen rayos de los dos flujos, lo que permite observar simultáneamente dos campos iluminados. El esquema general de un

fotómetro con cubo de Lummer-Brodhum está representado en la fig. 215, donde  $S_1$  y  $S_2$  son las fuentes luminosas que se miden;  $E$  es una pantalla blanca, exactamente igual por ambos lados;  $E'$  y  $E''$  son

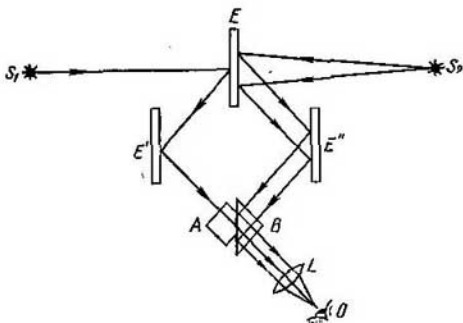


Fig. 215. Esquema de un fotómetro con cubo de Lummer — Brodhum.

otras dos pantallas blancas; *AB* es el cubo de Lummer-Brodhum; *L* una lupa, y *O* el ojo del observador. Cuando se realiza la observación el centro del cubo está iluminado por los rayos que llegan de la fuente  $S_1$ , mientras que su parte externa lo está por los de la fuente  $S_2$ . De esta forma el campo iluminado por una de las fuentes

rodea al iluminado por la otra. Cuando las iluminaciones no son iguales el límite entre los dos campos se destaca mucho, pero cuando son iguales este límite desaparece.

El equilibrio entre las iluminaciones no sólo puede conseguirse variando la distancia hasta las fuentes, sino también por medio de una serie de dispositivos. De estos los que más se emplean son las cuñas absorbentes y los sistemas polarizadores.

Para debilitar los haces luminosos también se utilizan rejillas (en las cuales la relación entre la superficie que ocupan los claros y la que ocupan los alambritos puede ser mayor o menor) y discos giratorios con ranuras de dimensiones determinadas. Estos últimos,

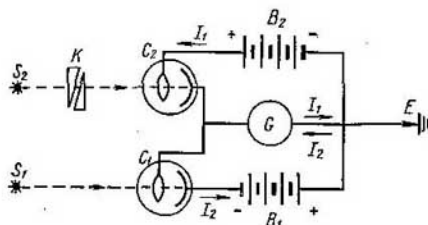


Fig. 216. Esquema de un fotómetro fotoeléctrico diferencial.

en vez de debilitar el flujo, lo que hacen en realidad es disminuir el tiempo en que éste actúa, cosa que no es totalmente equivalente.

Los métodos de fotometría visual que hemos estudiado hasta ahora no sirven para comparar flujos de colores diferentes (*fotometría heterocromática*), ya que visualmente es imposible equilibrar dos campos cuando están iluminados por flujos cuyos colores se diferencian mucho entre sí.

En la fotometría objetiva se siguen métodos en los cuales se utilizan algunos de los aparatos perceptores de luz que mencionamos en el párrafo anterior. Hay aparatos que únicamente se pueden emplear para establecer la igualdad de dos flujos. Este método se llama *diferencial* y con él no es necesario que exista proporcionalidad entre el flujo de energía luminosa que llega al aparato y las indicaciones de éste. Un esquema simple de fotómetro diferencial con dos células fotoeléctricas es el que se muestra en la fig. 216, donde \$S\_1\$ y \$S\_2\$ son las fuentes luminosas que se comparan; \$C\_1\$ y \$C\_2\$ son dos células fotoeléctricas iguales; \$B\_1\$ y \$B\_2\$ unas baterías, y \$G\$, un galvanómetro. El punto \$E\$ del circuito se pone en comunicación con tierra. Cuando se iluminan las células fotoeléctricas pasan por ellas las corrientes \$I\_1\$ e \$I\_2\$ en las direcciones que señalan las flechas. Como puede verse, a través del galvanómetro pasa una corriente igual a la diferencia



$I_1 - I_2$ . Supongamos que la fuente  $S_2$  produce más intensidad que la  $S_1$ , en este caso los flujos que inciden sobre ambas células se pueden igualar intercalando una cuña óptica  $K$  en el camino que sigue el haz luminoso de la fuente  $S_2$ , con lo cual la diferencia de corrientes  $I_1 - I_2$  se anulará y la aguja del galvanómetro dejará de inclinarse. Si para conseguir esto hay que debilitar  $k$  veces el flujo  $F_2$  procedente de  $S_2$ , tendremos que

$$\frac{1}{k} F_2 = F_1,$$

donde  $F_1$  es el flujo procedente de la fuente  $S_1$ . De aquí podemos obtener la relación que existe entre los flujos de ambas fuentes:

$$\frac{F_2}{F_1} = k.$$

En este esquema el galvanómetro se utiliza únicamente para fijar cuando es igual a cero la diferencia entre las corrientes  $I_1 - I_2$ . El órgano medidor en este caso es la cuña. Pero la radiotecnica moderna permite crear instrumentos en los cuales por medio de un aparato indicador o registrador se puede medir directamente la relación  $I_1/I_2$ . Generalmente lo que se mide es el  $\lg I_1/I_2$  («esquemas logarítmicos»).

En las células fotoeléctricas de vacío y en los pares termoelectrónicos la intensidad del campo eléctrico es proporcional al flujo luminoso que incide sobre ellos, por consiguiente, pueden utilizarse para medir directamente dicho flujo. El par termoelectrónico y los aparatos térmicos de M. L. Veinguérov y B. P. Kóziriev, si están bien ennegrecidos, pueden servir también para comparar las potencias de flujos de diferentes longitudes de onda, es decir, para resolver problemas de fotometría heterocromática.

Para aumentar las corrientes que se producen en las células fotoeléctricas y en los pares termoelectrónicos bajo la influencia de la iluminación se utilizan esquemas amplificadores de radiotécnica. El empleo de estos esquemas permite elevar mucho la sensibilidad de los métodos objetivos de registro y medición de los flujos luminosos.

Las células fotoeléctricas, debido a su selectividad, no pueden utilizarse directamente para resolver problemas de fotometría heterocromática. No obstante, empleando una fuente cuya distribución espectral de energía sea conocida, se puede determinar con ellas la relación entre las potencias de dos flujos luminosos de distinta longitud de onda. Para esto cada flujo se compara separadamente con la zona correspondiente del espectro de la fuente cuya distribución de energía se conoce y, después, se halla la relación que existe entre los flujos que se estudian. Como fuente con distribución espectral de energía conocida se toma una cuyas propiedades se aproximen lo más posible a las del cuerpo negro (véase el § 308).

En la práctica se presenta frecuentemente el problema de medir la iluminación de un sitio determinado, por ejemplo, de un lugar de trabajo. Los aparatos que sirven para medir la iluminación y van graduados en lux se llaman *luxímetros*. En los luxímetros más simples la iluminación que se mide se compara con la producida por una lámpara normalizada. Ultimamente se ha extendido mucho el empleo de luxímetros formados por una célula fotoeléctrica sólida unida a un galvanómetro. La escala del galvanómetro se gradúa en lux. Estos luxímetros no son ni muy exactos ni muy constantes, pero sirven perfectamente para resolver la mayoría de los problemas prácticos, y además son muy cómodos.

En luminotecnia uno de los problemas de gran importancia es la determinación de la intensidad esférica media de las fuentes luminosas.

Pero cuando la fuente luminosa no es uniforme, que es lo más ordinario en la práctica (por ejemplo, las lámparas eléctricas), la determinación de la intensidad esférica media de la luz presenta bastantes dificultades. Para esto habría que realizar numerosas mediciones de la intensidad luminosa en distintas direcciones y después hallar la media de los datos obtenidos. Estas dificultades se evitan por medio de la llamada *esfera integradora* (*esfotómetro de esfera*), que no es más que una esfera hueca recubierta interiormente de un material blanco perfectamente difusor. La fuente que se mide se coloca dentro de esta esfera (fig. 217). Como resultado de las múltiples reflexiones que experimenta la luz, dentro de la esfera se crea una iluminación que viene determinada por la intensidad esférica media de la luz que emite dicha fuente. Para medir esta iluminación se practica un orificio en la pared de la esfera, que se cierra con un vidrio esmerilado *a*. Una lámina opaca *A* protege el vidrio esmerilado de la acción directa de los rayos de la fuente *S*.

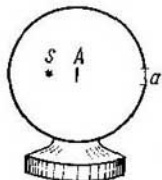


Fig. 217. Esfera integradora.

Los cálculos demuestran que la iluminación en la superficie interior de la esfera es igual a

$$E = E_0 + \frac{kI_0}{(1-k)r^2}, \quad (4)$$

donde  $I_0$  es la intensidad esférica media de la fuente luminosa,  $k$  es el coeficiente de difusión de la luz por las paredes,  $r$  es el radio de la esfera y  $E_0$  la iluminación directa que produce la fuente.

En la esfera integradora (fig. 217) el vidrio esmerilado *a* está protegido por la lámina *A* de la iluminación directa, por esto, para él  $E_0 = 0$  y

$$E = \frac{kI_0}{(1-k)r^2}$$

es decir, la iluminación viene determinada por la intensidad esférica media  $I_0$ . Como puede verse, en este caso  $E$  no depende del sitio en que esté colocada la fuente dentro de la esfera. Conociendo  $k$  y  $r$  basta medir la iluminación  $E$  para poder hallar la intensidad esférica media de la luz  $I_0$ .

La expresión (4) puede interesarnos en otro sentido: esta expresión demuestra que la iluminación que se obtiene como resultado de la difusión múltiple de la luz en las paredes internas de la esfera, cuando  $k_2$  tiene un valor próximo

a la unidad, puede superar considerablemente a la iluminación que producen los rayos directos (compárese con lo dicho en el § 304). Como ejemplo, examinemos el caso en que en el centro de una esfera se encuentra una fuente puntual de intensidad  $I$ .

En este caso tendremos que  $E_0 = \frac{I}{r^2}$ , y la iluminación total  $E$  será igual a:

$$E = \frac{I}{r^2} + \frac{kI}{(1-k)r^2} = \frac{1}{1-k} \frac{I}{r^2},$$

es decir, será  $\frac{1}{1-k}$  veces mayor que la iluminación directa  $E_0$ . Si  $k = 0,9$  tendremos que  $\frac{1}{1-k} = 10$ , es decir, la iluminación total será 10 veces mayor que la que obtendríamos de esta misma fuente si la superficie interior de la esfera estuviera ennegrecida.

§ 307. *Radiación de temperatura.* Como indicamos en el § 275, la emisión y la absorción se producen como resultado de las vibraciones de las partículas cargadas que hay dentro de los átomos y de las moléculas. Por esta razón solamente puede darse una explicación completa de los fenómenos de la emisión y absorción de la luz basándose en las leyes de la interacción que existe entre las partículas cargadas y la radiación. Más adelante (en el § 331) veremos que estas leyes rebasan los límites de la electrodinámica clásica y tienen carácter cuántico. No obstante, toda una serie de fenómenos relativos a la emisión y absorción de la luz pueden estudiarse sin tocar sus mecanismos, es decir, examinándolos únicamente desde el punto de vista energético (termodinámico). La parte de la Física que se ocupa de este género de estudios se llama *termodinámica de las radiaciones*.

Toda radiación va acompañada de una pérdida de energía del cuerpo que la produce. Por lo tanto, la radiación puede producirse a costa de una disminución de la energía del propio cuerpo o a costa de la energía que este último recibe del exterior.

Pongamos algunos *ejemplos*:

1. Se produce un proceso de *fotoluminiscencia* (§ 331): el cuerpo absorbe previamente luz y luego él mismo se ilumina. Durante la absorción de la luz ocurren variaciones en el cuerpo que dan lugar a que éste adquiera cierta energía, llamada energía excitatriz (activización). La radiación posterior se realiza a costa de esta energía excitatriz.

2. Un cuerpo emite luz como resultado de reacciones químicas (*quimiluminiscencia*), por ejemplo, la porcelana brilla al oxidarse lentamente con el oxígeno del aire. En este caso la energía radiante se produce a costa de la que se libera durante el proceso químico.

3. Un gas enrarecido emite luz cuando a través de él pasa una corriente eléctrica. La energía que el gas cede para la radiación se compensa con la que sus átomos o moléculas reciben al chocar con los electrones.

4. Un cuerpo calentado hasta cierta temperatura emite luz.

Si un cuerpo recibe de otros circundantes una cantidad de energía, sea por absorción de radiaciones o por absorción de calor, capaz de compensar exactamente la pérdida de energía que él experimenta por su propia radiación, se dice que este proceso de radiación se realiza *equilibradamente*. En estas condiciones el estado del cuerpo radiante puede caracterizarse por tener una temperatura constante  $T$  determinada. Recordemos (t. I, § 66) que el concepto de temperatura sólo es aplicable en el caso en que existe equilibrio estadístico. Por esta razón la radiación equilibrada que hemos indicado se llama de temperatura.

En el caso en que la cantidad de calor o de energía que el cuerpo recibe del exterior es insuficiente para compensar por completo la energía radiante, parte de esta última se produce a costa de la reserva de energía interna del cuerpo. Claro está que en este caso se altera la distribución equilibrada de las partículas y, por consiguiente, la radiación deja de ser equilibrada. Pero si esta radiación se realiza tan despacio que la distribución de la energía interna del cuerpo tiene tiempo de igualarse y de continuar estando equilibrada, la radiación también tendrá carácter equilibrado. En este caso la temperatura del cuerpo disminuirá, pero en cada momento dado el estado del cuerpo podrá considerarse como equilibrado y se le podrá atribuir una temperatura determinada.

Dicho esto, pasemos a estudiar la *emitancia de radiación o energética*  $R_e$  de un cuerpo definiéndola, de acuerdo con lo dicho en el § 302, como una magnitud numéricamente igual al flujo radiante  $dE$  emitido por la unidad de superficie del cuerpo luminoso\*):

$$R_e = \frac{dE}{dS}. \quad (1)$$

Aquí se entiende por  $dE$  el *flujo radiante integral*, es decir, el flujo referido a todas las longitudes de onda que emite el cuerpo. Por la fórmula (1) tenemos que:

$$dE = R_e \cdot dS. \quad (2)$$

Lo mismo que en el párrafo § 301 introdujimos la función  $e_\lambda$ , que caracteriza la distribución de la energía del flujo por longitudes de onda, ahora podemos introducir para la emitancia de radiación  $R_e$  la función de distribución entre las longitudes de onda  $r_\lambda$ . Entonces para el flujo radiante  $dE_\lambda$ , referido al intervalo de longitudes de onda  $\lambda, \lambda + d\lambda$ , emitido por el área  $dS$  de la superficie del cuerpo, obte-

---

\*) La diferencia entre la luminosidad o emitancia luminosa  $R$  y la emitancia de radiación o energética  $R_e$  se debe a que el flujo luminoso y el flujo radiante correspondientes a un intervalo de longitudes de onda  $d\lambda$  se diferencian entre sí en el factor  $V$  (sensibilidad relativa o eficacia luminosa monocromática, véase el § 301).

nemos

$$dE_\lambda = r_\lambda d\lambda dS. \quad (3)$$

La magnitud  $r_\lambda$  representa la emitancia de radiación o energética referida a un intervalo unidad de longitudes de onda, próximo a la longitud de onda  $\lambda$  dada, y se llama *emisividad* o *poder emisoro espectral del cuerpo*.

Es evidente que la *emitancia de radiación integral*  $R_e$  referida a todas las longitudes de onda vendrá expresada por la integral:

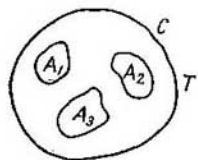
$$R_e = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda. \quad (4)$$

Examinemos ahora la absorción de la luz. Supongamos que sobre un cuerpo cae un flujo radiante  $dE_\lambda$  correspondiente a un pequeño intervalo de longitudes de onda  $d\lambda$ , próximo a la longitud  $\lambda$ . Parte de este flujo se difunde y se refleja en el cuerpo (y si el cuerpo es transparente pasa a través de él) y otra parte es absorbida. Llamemos  $dE'_\lambda$  al flujo absorbido, correspondiente al intervalo de longitudes de onda  $d\lambda$ . La magnitud

$$a_\lambda = \frac{dE'_\lambda}{dE_\lambda} \quad (5)$$

indica la fracción de flujo incidente absorbida en las proximidades de la longitud de onda  $\lambda$  dada y se llama *absortividad* o *poder absorbente* o *factor de absorción* del cuerpo. Prácticamente todos los cuerpos presentan selectividad, es decir, no absorben por igual los flujos de distintas longitudes de onda. Para ellos  $a_\lambda$  es función de la longitud de onda  $\lambda$ . Si un cuerpo cualquiera absorbe totalmente el flujo luminoso en un intervalo determinado de longitudes de onda, para este intervalo  $a_\lambda = 1$ . Para todos demás casos, en que el flujo no es absorbido totalmente,  $dE'_\lambda < dE_\lambda$  y, de acuerdo con (5),  $a_\lambda < 1$ .

Fig. 218. Cuerpos dentro de una envoltura a temperatura constante  $T$ .



La experiencia demuestra que entre el poder emisoro espectral  $r_\lambda$  y el poder absorbente  $a_\lambda$  del cuerpo existe cierta relación. Supon-

gamos que varios cuerpos  $A_1, A_2, A_3$  (fig. 218) se encuentran dentro de una envoltura  $C$ , que se mantiene a una temperatura determinada  $T$ , y que en esta envoltura se ha hecho el vacío, es decir, que los cuerpos antedichos solamente pueden intercambiar energía entre sí o con la envoltura mediante emisión y absorción de la luz. La experiencia demuestra que en semejante sistema de cuerpos al cabo de algún tiempo se establece el equilibrio térmico, es decir, que todos los cuer-

pos acaban teniendo una misma temperatura  $T$ , igual a la de la envoltura. No obstante, el cuerpo cuya emitancia de radiación  $R_e$  es mayor cede más energía por unidad de tiempo y de superficie que el cuerpo cuya emitancia es menor. De aquí se deduce que este cuerpo únicamente podrá encontrarse a una temperatura constante  $T$ , igual a la de los demás cuerpos, en el caso en que también sea más absorbente. De esta forma, de la posibilidad del establecimiento del equilibrio termodinámico entre cuerpos que sólo pueden intercambiar energía por medio de la emisión y de la absorción de la luz se deduce la necesidad de que exista proporcionalidad entre los poderes emisivo y absorbente de los cuerpos. Kirchhoff demostró que esta proporcionalidad debe cumplirse separadamente para cada intervalo de longitudes de onda. Si los cuerpos  $A_1, A_2, A_3, \dots$  se caracterizan respectivamente por los poderes emisivos y absorbentes  $r_{\lambda 1}, r_{\lambda 2}, r_{\lambda 3}, \dots; a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2}, a_{\lambda 3}, \dots$ , tendremos:

$$\frac{r_{\lambda 1}}{a_{\lambda 1}} = \frac{r_{\lambda 2}}{a_{\lambda 2}} = \frac{r_{\lambda 3}}{a_{\lambda 3}} = \dots = f(\lambda, T). \quad (6)$$

La correlación (6) expresa la ley de Kirchhoff que dice: *la relación entre el poder emisivo (emisividad) y el poder de absorción (absortividad)  $\frac{r_{\lambda}}{a_{\lambda}}$  de un cuerpo no depende de su naturaleza, sino que es igual para todos los cuerpos y función exclusiva  $f(\lambda, T)$  de las longitudes de onda  $\lambda$  y de las temperaturas  $T$ .*

La relación que existe entre el poder emisivo y el de absorción puede demostrarse fácilmente. En calidad de radiador se toma un recipiente  $A$  en forma de paralelepípedo, una de cuyas caras  $S_1$  (fig. 219) está hecha de metal bien pulimentado, mientras que otra  $S_2$  está ennegrecida. Esta vasija se llena de agua caliente y como resultado de esto se convierte en un radiador de rayos infrarrojos suficientemente potente. La superficie  $S_1$  refleja una gran parte de los rayos que sobre ella inciden y, por consiguiente, es poco absorbente. La superficie  $S_2$ , por el contrario, absorbe mucho. Por la ley de Kirchhoff, la superficie  $S_1$  deberá emitir menos que la  $S_2$ . Tomemos como receptor de la radiación un recipiente cerrado  $B$ , unido a un manómetro. Una de las paredes de este recipiente está ennegrecida. Si esta superficie ennegrecida se coloca enfrente de la superficie ennegrecida  $S_2$  del recipiente  $A$  (este caso es el que representa la fig. 219), el recipiente  $B$  empieza a calentarse sensiblemente, a costa de la radiación absorbida, y el aire que hay dentro de él se dilata, cosa que puede

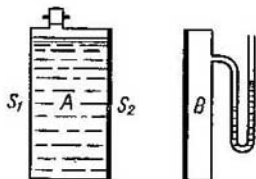


Fig. 219. Demostración de que el poder emisivo de una superficie pulimentada es diferente del de otra ennegrecida del mismo cuerpo.

observarse por las indicaciones del manómetro. Si el recipiente  $A$  se vuelve, de forma que enfrente de la superficie ennegrecida del receptor se encuentre la superficie pulimentada  $S_1$ , la dilatación del aire será mucho menor. Esto demuestra que la superficie pulimentada  $S_1$ , a una misma temperatura, emite menos radiación que la superficie ennegrecida  $S_2$ .

§ 308. **Cuerpo negro (radiador ideal).** Supongamos que se puede hacer un cuerpo que a cualquier temperatura absorba totalmente la luz cualquiera que sea su composición. El poder absorbente de este cuerpo  $a_\lambda$ , independiente de la temperatura, será igual a la unidad para todas las longitudes de onda:  $a_\lambda = 1$ . Este cuerpo se llama *cuerpo negro* o *radiador ideal*. Según la ley de Kirchhoff expresada por la fórmula (6) del § 307, la razón del poder emisor  $r_\lambda$  al poder absorbente  $a_\lambda$  es igual para todos los cuerpos y función exclusiva de las longitudes de onda y de las temperaturas:

$$\frac{r_\lambda}{a_\lambda} = f(\lambda, T).$$

Para el cuerpo negro  $a_\lambda = 1$ , por consiguiente, su poder emisor  $r_\lambda$  vendrá expresado directamente por medio de  $f(\lambda, T)$ :

$$r_\lambda = f(\lambda, T). \quad (1)$$

Como por definición el poder emisor  $r_\lambda$  es la función de distribución de la emitancia de radiación entre las longitudes de onda, de la correlación (1) obtenemos: *todos los cuerpos negros, a la misma temperatura, tienen la misma distribución de energía radiante entre las longitudes de onda; la emitancia de radiación de todos los cuerpos negros experimenta la misma variación al variar la temperatura.*

En la naturaleza no existen cuerpos cuyas cualidades coincidan con las del cuerpo negro. Los cuerpos cubiertos de una capa de negro de humo o de negro de platino tienen un poder de absorción  $a_\lambda$  próximo a la unidad únicamente en un intervalo limitado de longitudes de onda; en la zona infrarroja lejana sus poderes de absorción son considerablemente menores que la unidad. Pero artificialmente podemos aproximarnos cuanto sea necesario al cuerpo negro. Tomemos, por ejemplo, un recipiente casi cerrado  $A$  que únicamente tenga un pequeño orificio  $C$  (fig. 220). Cualquier rayo de luz que entre en el recipiente por el orificio  $C$  solamente podrá salir de él después de experimentar multitud de reflexiones. Supongamos que cada vez que el rayo incide sobre la superficie interna del recipiente  $A$  se refleja una fracción  $k$  del flujo radiante. Al cabo de  $n$  incidencias se reflejará una fracción que puede representarse por la magnitud  $k^n$ . Como  $k$  siempre es menor que la unidad, siempre que  $n$  sea suficientemente grande la magnitud  $k^n$  será muy pequeña. De esta forma, solamente una parte insignificante de los rayos que incidan en el orificio  $C$

volverá a salir, y el factor de absorción del orificio  $C$  resultará próximo a la unidad para todas las longitudes de onda.

Un ejemplo sencillo de esta deducción nos lo ofrecen las ventanas abiertas de las casas vistas desde la calle. Como las dimensiones de éstas son generalmente pequeñas en comparación con las de las habitaciones, incluso cuando las paredes reflejan bien, la luz que vuelve a salir por las ventanas a la calle sólo representa una parte pequeña del flujo luminoso que entra por ellas. Por esto las ventanas parecen negras, independientemente del color que tengan las paredes interiores. De la misma forma la debilitación de los rayos por reflexiones múltiples hace que una superficie rugosa de un cuerpo cualquiera

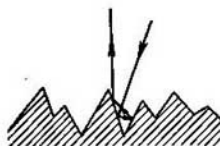
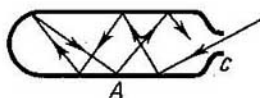


Fig. 220. Modelo de cuerpo negro. Fig. 221. Reflexión de la luz en una superficie rugosa.

parezca más oscura que otra superficie pulimentada de este mismo cuerpo. Un rayo al incidir sobre una superficie rugosa, en la mayoría de los casos, tiene que reflejarse varias veces antes de salir en sentido contrario (fig. 221).

Por la ley de Kirchhoff la emitancia de radiación de una superficie para la que  $a_\lambda$  se aproxima a la unidad, es aproximadamente igual a la emitancia de radiación del cuerpo negro. Por lo tanto, si las paredes del recipiente  $A$  (fig. 220) se hallan a una temperatura determinada  $T$ , la radiación que sale por el orificio  $C$  será con bastante aproximación igual a la radiación de un cuerpo negro que se encuentre a la misma temperatura.

En la práctica el modelo del cuerpo negro se hace generalmente en forma de tubo largo y estrecho de material termorresistente. Dentro del tubo, para evitar las reflexiones simples cuando la luz incide oblicuamente, se ponen tabiques con orificios. El tubo se coloca dentro de un horno eléctrico que sirve para calentar sus paredes hasta la temperatura  $T$  que se desee. La radiación que sale por el extremo del tubo tiene unas cualidades muy parecidas a la que emite el cuerpo negro. Con un modelo de cuerpo negro de este tipo se puede estudiar la emitancia de radiación hasta temperaturas del orden de  $3\ 000^\circ\text{K}$ .

En la fig. 222 se reproduce el esquema de un experimento para estudiar la distribución de la emitancia de radiación del cuerpo negro entre las longitudes de onda:  $A$  es el tubo que se calienta que sirve de cuerpo negro;  $L_1$  es una lente que concentra el haz luminoso pro-



cedente de  $A$  sobre la rendija  $S_1$  del tubo  $B_1$ . Este tubo  $B_1$  proporciona un flujo de rayos paralelos que van a incidir sobre el prisma  $P$ . El prisma  $P^*$ ) desvía los haces de distintas longitudes de onda formando ángulos diferentes (véase el § 281). Cuando el tubo  $B_2$  toma un ángulo de giro determinado, por la rendija  $S_2$  sale el flujo correspondiente al intervalo de longitudes de onda que abarca desde una determinada

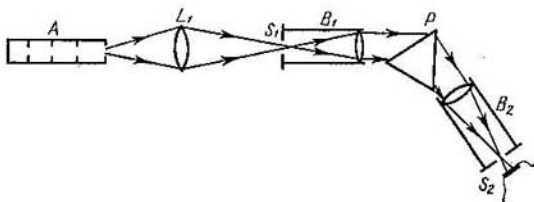


Fig. 222. Esquema del experimento para determinar la emitancia de radiación del cuerpo negro.

$\lambda_1$  hasta  $\lambda_1 + \Delta\lambda_1$ . Este flujo incide a su vez sobre el par termoelectrico ennegrecido que mide la potencia del flujo radiante  $\Delta E_{\lambda_1}$ . Si el tubo  $B_2$  toma otro ángulo de giro, el par termoelectrico medirá la potencia del flujo  $\Delta E_{\lambda_2}$ , correspondiente a otro intervalo de longitudes de onda  $\lambda_2$ ,  $\lambda_2 + \Delta\lambda_2$ . Según la fórmula (3) del § 307 la razón  $\Delta E_{\lambda_1}/\Delta E_{\lambda_2}$  entre estos flujos depende del poder emisor  $r_\lambda$ :

$$\frac{\Delta E_{\lambda_1}}{\Delta E_{\lambda_2}} = \frac{r_{\lambda_1}}{r_{\lambda_2}} \frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2},$$

de donde

$$\frac{r_{\lambda_1}}{r_{\lambda_2}} = \frac{\Delta E_{\lambda_1}}{\Delta E_{\lambda_2}} \frac{\Delta\lambda_2}{\Delta\lambda_1}. \quad (2)$$

De esta forma pueden obtenerse los valores relativos de los poderes emisivos  $r_\lambda$  del cuerpo negro a la temperatura dada  $T$  para diferentes longitudes de onda  $\lambda$ . La dificultad de la medición está en que es imposible evitar la selectividad del aparato receptor (par termoelectrico) y las alteraciones que produce la parte óptica del aparato. A pesar de todo en la actualidad está bien estudiada la distribución de la emitancia de radiación del cuerpo negro entre las longitudes de onda. A una temperatura dada  $T$  la variación del poder emisor  $r_\lambda$  en función de la longitud de onda  $\lambda$  tiene el aspecto que se representa

\*) En lugar de un prisma es preferible utilizar una red de difracción que permita medir la longitud de onda por el ángulo de giro (§ 270), pero esto no altera en absoluto el esquema teórico del artificio.

en la fig. 223. Las diferentes curvas de la fig. 223 corresponden a distintas temperaturas. Como puede verse, el poder emisivo del cuerpo negro  $r_\lambda$  aumenta rápidamente con la temperatura. Cada una de estas curvas tiene un máximo, el cual se desplaza hacia el lado de las longitudes de onda más cortas y se hace más agudo a medida que aumenta la temperatura. El aspecto de estas curvas se explica por el hecho generalmente conocido de que la emitancia de radiación de los cuerpos y, por consiguiente, su luminancia, aumenta rápidamente con la temperatura, al mismo tiempo que varía el color de la luz que emiten.

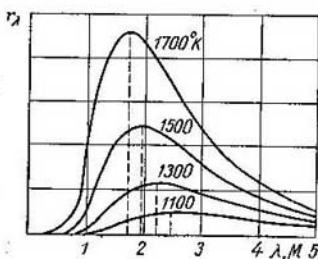


Fig. 223. Curvas de distribución de la emitancia de radiación del cuerpo negro entre las longitudes de onda.

A baja temperatura el máximo del poder emisivo se encuentra en la zona de las longitudes de onda grandes y el cuerpo emite principalmente rayos infrarrojos. En este caso la parte de la potencia que corresponde a los rayos visibles es tan pequeña que el ojo no percibe la luz. Esta es la composición de la radiación que tiene la luz cuando las temperaturas de los cuerpos son del orden de varias centenas de grados. Cerca de los  $600^\circ\text{C}$  la potencia correspondiente a la parte de las ondas más largas del espectro visible se hace suficiente para poder producir la sensación visual, y el cuerpo empieza a emitir luz de color rojo oscuro. Si la temperatura sigue aumentando el máximo se desplaza cada vez más hacia el lado de las longitudes de onda más cortas, la parte de la potencia que corresponde a los rayos visibles aumenta y la luz que emite el cuerpo va siendo cada vez más blanca.

El cuerpo negro es un radiador que cumple la ley de Lambert (radiador de coseno) (§ 303). Por esto entre la emitancia de radiación  $R_e$  y la radiancia o «luminancia energética»  $B_e$  del cuerpo negro existe una correlación simple:

$$B_e = \frac{1}{\pi} R_e.$$

Junto con la emitancia de radiación referida al intervalo unidad de longitudes de onda  $r_\lambda$  (poder emisivo espectral) se puede someter a consideración la

radiancia referida a un intervalo unidad de longitudes de onda  $b_\lambda$ . La magnitud  $b_\lambda$  estará relacionada con el poder emisivo del cuerpo negro  $r_\lambda$  por la relación

$$b_\lambda = \frac{1}{\pi} r_\lambda$$

De aquí se deduce que la distribución de la radiancia del cuerpo negro, entre las longitudes de onda coincide con la distribución de su emitancia de radiación.

§ 309. Leyes de la radiación del cuerpo negro. De lo expuesto en los párrafos anteriores se deduce que el carácter de la radiación del cuerpo negro viene determinado unívocamente por su temperatura  $T$ . El poder emisivo del cuerpo negro  $r_\lambda$  es una función definida de la longitud de onda y de la temperatura:  $r_\lambda = f(\lambda, T)$ . Los razonamientos puramente termodinámicos no permiten hallar la forma de esta función. Pero como resultado de los estudios termodinámicos se puede llegar a establecer una serie de leyes generales que debe cumplir la radiación del cuerpo negro. La primera de estas leyes se refiere a la emitancia de radiación integral: *la emitancia integral (es decir, la cantidad total de energía radiante emitida por el cuerpo) del cuerpo negro  $R_e$  aumenta proporcionalmente a la cuarta potencia de su temperatura absoluta:*

$$R_e = \sigma T^4 \quad (1)$$

Esta ley se conoce con el nombre de *ley de Stefan-Boltzmann*. Como la emitancia integral está relacionada con el poder emisivo  $r_\lambda$  por la correlación (4) del § 307, la ley de Stefan-Boltzmann puede escribirse también de la forma:

$$\int_0^\infty r_\lambda d\lambda = \sigma T^4 \quad (1a)$$

Las mediciones dan para la constante  $\sigma$  los valores siguientes:

$$\sigma = 5,71 \cdot 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{grad}^4} = 5,71 \cdot 10^{-12} \frac{W}{\text{cm}^2 \cdot \text{grad}^4}$$

En los diagramas de la fig. 223 la emitancia integral  $R_e$  viene representada por el área de la superficie comprendida entre la correspondiente curva de distribución del poder emisivo y el eje de abscisas.

La segunda ley establece la situación de los máximos de las curvas de distribución de la fig. 223. Según esta ley, llamada *ley de desplazamiento de Wien*, la longitud de onda máxima  $\lambda_{\text{máx}}$  correspondiente al máximo del poder emisivo  $r_\lambda$  es inversamente proporcional a la temperatura absoluta:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{C'}{T} \quad (2)$$

donde  $C'$  es una constante determinada.

Cuanto más elevada es la temperatura del cuerpo negro tanto más corta es la longitud de onda que corresponde al máximo del poder emisor  $r_\lambda$ . Las mediciones dan para la constante  $C'$  el valor numérico siguiente:

$$C' = 2\,886 \mu \cdot \text{grad.}$$

De la ley de Wien se deduce que la longitud de onda  $\lambda_{\text{máx}}$  correspondiente al máximo de radiación expresada en micras, es igual a

$$\lambda_{\text{máx}} (\mu) = \frac{2\,886}{T}, \quad (2a)$$

donde  $T$  se toma por la escala de temperaturas absolutas. De la correlación (2a) se infiere que a las temperaturas que prácticamente se pueden conseguir la longitud de onda en que se produce el poder emisor máximo del cuerpo negro se encuentra en la zona infrarroja. A  $3\,000^\circ \text{K}$  el poder emisor máximo está aún fuera de los límites del espectro visible, cerca de  $\lambda = 0,96 \mu$ . Solamente a la temperatura de  $5\,000^\circ \text{K}$  el máximo entra en la zona amarillo-verde del espectro ( $\lambda_{\text{máx}} = 0,577 \mu$ ). A temperaturas mayores de  $7\,200^\circ \text{K}$  el máximo alcanza la zona ultravioleta.

La tercera ley dice que *el poder emisor máximo del cuerpo negro  $r_{\lambda_{\text{máx}}}$  aumenta proporcionalmente a la quinta potencia de la temperatura absoluta:*

$$r_{\lambda_{\text{máx}}} = C'' T^5. \quad (3)$$

Las mediciones dan para la constante  $C''$  el valor numérico siguiente:

$$C'' = 1,301 \cdot 10^{-15} \frac{W}{\text{cm}^2 \cdot \mu \cdot \text{grad}^5}.$$

En la tabla X se dan los valores de  $\lambda_{\text{máx}}$ , de las emitancias integrales de radiación y luminosa y de la luminancia del cuerpo negro a diferentes temperaturas.

Tabla X

| $T^\circ, \text{K}$ | $\lambda_{\text{máx}} \mu$ | $R_g, W/\text{cm}^2$ | $R, \text{lm}/\text{cm}^2$ | $B, \text{sb}$     |
|---------------------|----------------------------|----------------------|----------------------------|--------------------|
| 1 200               | 2,405                      | 11,84                | 0,0452                     | 0,0144             |
| 1 600               | 1,804                      | 37,41                | 6,55                       | 2,08               |
| 2 000               | 1,443                      | 91,34                | 139,1                      | 44,2               |
| 3 000               | 0,962                      | 462,4                | 888,1                      | 2824               |
| 4 000               | 0,721                      | 1 461                | $7,351 \cdot 10^4$         | $2,338 \cdot 10^4$ |
| 5 000               | 0,577                      | 3 568                | $2,842 \cdot 10^5$         | $8,402 \cdot 10^4$ |
| 6 000               | 0,481                      | 7 399                | $6,230 \cdot 10^5$         | $1,981 \cdot 10^5$ |
| 8 000               | 0,361                      | 23 384               | $1,830 \cdot 10^6$         | $5,819 \cdot 10^5$ |
| 10 000              | 0,289                      | 57 090               | $3,503 \cdot 10^6$         | $1,114 \cdot 10^7$ |

Como puede verse en la tabla X, la emitancia de radiación del cuerpo negro aumenta extraordinariamente de prisa con la temperatura y cuando ésta es muy alta alcanza valores muy grandes. A  $6\,000^\circ\text{K}$  cada centímetro cuadrado de cuerpo negro emite un flujo cuya potencia es de  $7\,399\text{ W}$ , es decir, de más de 10 «caballos de fuerza».

§ 310. Distribución de la emitancia del cuerpo negro entre las longitudes de onda. El primer intento de hallar analíticamente la forma de la función  $r_\lambda = f(\lambda, T)$  que responda a las curvas experimentales se debe al físico moscovita V. A. Mijelsón. Pero la forma de la función encontrada no cumplía las leyes termodinámicas (1), (2) y (3) del § 309.

Rayleigh y Jeans hicieron a finales del siglo pasado otro intento para determinar la forma de la función  $f(\lambda, T)$  basándose en las exigencias de la Física estadística sobre la distribución de la energía por grados de libertad. Supongamos un recipiente cerrado cuyas paredes son idealmente reflectoras y que dentro de él existe una radiación electromagnética. Como resultado de las reflexiones en las paredes dentro del cuerpo se forma un sistema infinitamente numeroso de ondas estacionarias. Si la radiación es la de equilibrio correspondiente a la temperatura  $T$ , por la ley de la equipartición de la energía entre los grados de libertad, a cada una de las vibraciones deberá corresponderle una misma energía, proporcional a  $T$ . Como las vibraciones electromagnéticas tienen dos tipos de energía, eléctrica y magnética, a cada una de las vibraciones propias le corresponderá una energía  $2 \frac{1}{2} kT = kT$ , donde  $k$  es la constante de Boltzmann (lo mismo que a cada grado de libertad vibratoria de las partículas de un sólido le toca la energía  $kT$ , correspondiente a la existencia de las energías cinética y potencial de las vibraciones). El número de vibraciones propias que se establece dentro del recipiente que estudiamos, cuyo volumen es  $V$ , será igual al número de vibraciones propias que es capaz de realizar un medio continuo que tenga el mismo volumen  $V$ . Este número de vibraciones propias fue calculado por Rayleigh y Jeans y como resultado fue obtenida la expresión de la densidad de la energía radiante, dentro del recipiente, correspondiente a un intervalo de longitudes de onda  $d\lambda$ :

$$u_\lambda d\lambda = 8\pi kT \lambda^{-4} d\lambda. \quad (1)$$

La fórmula (1) se llama fórmula de Rayleigh—Jeans. En la escala de frecuencias  $\nu$  esta fórmula toma el aspecto:

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu. \quad (1a)$$

Puede verse fácilmente que la fórmula de Rayleigh—Jeans conduce a un resultado absurdo: la densidad integral de la energía resulta

igual a infinito. Efectivamente, para la densidad integral de la energía radiante  $U$  obtenemos:

$$U = \int_0^{\infty} u_{\nu} d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu = \infty.$$

Esto quiere decir que el equilibrio entre los cuerpos y la radiación solamente podría producirse cuando la densidad de la radiación fuera infinitamente grande, cosa que se contradice bruscamente con todas las observaciones. La curva de la distribución de la emitancia de radiación del cuerpo negro entre las longitudes de onda, según la fórmula de Rayleigh-Jeans, da un aumento rápido y monótono a medida que disminuyen las longitudes de onda. Pero en realidad la distribución de dicha emitancia en el espectro tiene forma de campana (fig. 223). Por fin, en el año 1900, Planck consiguió hallar la forma de la función  $f(\lambda, T)$  que responde a los datos experimentales y de la que pueden deducirse directamente, como casos particulares, las leyes termodinámicas (1), (2) y (3) del § 309.

Según Planck:

$$r_{\lambda, T} = f(\lambda, T) = 2\pi hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{e^{hc/kT\lambda} - 1}, \quad (2)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz,  $k$  es la constante de Boltzmann y  $h$  una nueva constante igual a

$$h = 6,624 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}.$$

Esta nueva constante se conoce con el nombre de *constante de Planck*. En la fig. 224 la curva 1 corresponde a la fórmula de Planck para la temperatura  $T = 1\,600^\circ \text{K}$ ; los puntos representan los datos experimentales obtenidos a esa misma temperatura; la curva 2 representa la variación de la función de distribución que proporciona la fórmula de Rayleigh-Jeans. De esta forma, el experimento no deja lugar a dudas sobre el hecho de que la realidad está de acuerdo con la fórmula (2) y no con la de Rayleigh-Jeans. Pero para deducir la fórmula (2) Planck tuvo que partir de una suposición completamente extraña a las ideas clásicas, es decir, sentó la hipótesis de que la luz es emitida en forma de «paquetes» de energía (cuantos)  $\epsilon = h\nu$ , donde  $\nu$  es la frecuencia de la radiación y  $h$  es la constante de Planck.

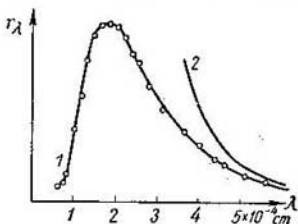


Fig. 224. Comparación de dos datos experimentales con los obtenidos por las fórmulas de Planck (1) y de Rayleigh - Jeans (2).

Más adelante (cap. XXIX y XXX) volveremos a ocuparnos de esta hipótesis que ha sido confirmada por multitud de experimentos y que tiene una importancia extraordinaria para desarrollar nuestros conocimientos sobre la naturaleza de la luz y de los procesos endoatómicos.

Si la distribución de la energía entre las zonas del espectro del cuerpo negro se representa en la escala de frecuencias, en lugar de  $r_{\lambda, T}$  hay que tomar la emitancia luminosa  $r_{\nu, T}$  referida a un intervalo unidad de frecuencias. Entonces

$$dR = r_{\lambda, T} d\lambda = r_{\nu, T} d\nu. \quad (3)$$

Y como quiera que  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $|d\lambda| = \frac{c}{\nu^2} d\nu$ , y poniendo este valor en (3) obtenemos:

$$r_{\nu, T} = r_{\lambda, T} \frac{|d\lambda|}{d\nu} = r_{\lambda, T} \frac{c}{\nu^2}.$$

Aplicando estas correlaciones entre  $r_{\nu, T}$  y  $r_{\lambda, T}$  hallamos la siguiente expresión de la fórmula de Planck (2) en la escala de frecuencias:

$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (4)$$

Cuando esta fórmula se aplica a la zona de grandes frecuencias, donde  $h\nu \gg kT$ , se puede despreciar la unidad del denominador de la fórmula (4) y entonces, aproximadamente, se obtiene:

$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \quad (5)$$

De la misma forma, cuando  $\lambda T \ll hc/k$ , de la fórmula (2) podemos obtener aproximadamente:

$$r_{\lambda, T} = C_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}, \quad (5a)$$

donde, para simplificar, los factores constantes  $2\pi hc^2$  y  $hc/k$  se representan respectivamente por  $C_1$  y  $C_2$ ; estos factores tienen los siguientes valores numéricos:  $C_1 = 3,70 \cdot 10^{-5}$  erg·cm<sup>2</sup>/s y  $C_2 = 1,433$  cm·grad.

Las fórmulas (5) y (5a) sirven para representar de manera aproximada la parte de la curva del poder emisorio del cuerpo negro que se encuentra, después del máximo, por la parte de las longitudes de onda más pequeñas.

La fórmula de Planck no sólo puede aplicarse a la emitancia de radiación del cuerpo negro, sino también a la densidad de la radiación equilibrada. Veamos, por ejemplo, el caso de un recipiente cerrado, cuyas paredes sean negras, que se encuentre a una temperatura  $T$ . Cuando se establece el equilibrio térmico

el espacio interior de la vasija estará lleno de una radiación de densidad determinada cuya energía estará distribuida entre las frecuencias de forma también determinada. Los cálculos dan, que para una radiación equilibrada de este tipo la densidad de la energía luminosa  $u_\nu d\nu$ , correspondiente, a un intervalo de frecuencias comprendido entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$ , es igual a

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu; \quad (6)$$

siendo  $T$  la temperatura de las paredes del recipiente que se encuentra en equilibrio térmico con la radiación que lo llena. Como puede verse, la densidad de la energía  $u_\nu d\nu$  de la radiación equilibrada se encuentra distribuida entre las frecuencias según una curva igual a la de la emitancia de radiación del cuerpo negro. Por esta razón este tipo de radiación se llama «radiación negra». Como quiera que para la radiación negra el valor de la densidad de la energía y su distribución entre las frecuencias se determina unívocamente por la temperatura  $T$ , esta temperatura  $T$  puede llamarse convencionalmente *temperatura de radiación*. El concepto de temperatura de radiación fue propuesto en el año 1893 por B. B. Golitsin.

Para que dentro de una cavidad cerrada se produzca radiación negra no hace falta que las paredes sean también negras. Como, de acuerdo con la ley de Kirchhoff, la relación entre el poder emisor y el poder absorbente es igual para cualquier cuerpo que para el cuerpo negro, la composición de la radiación equilibrada dentro de una cavidad cerrada será la misma cualquiera que sea la naturaleza de las paredes. Lo único que importa es que el poder absorbente sea diferente de cero para todas las frecuencias. Si en un recipiente cerrado, en cuyo interior existe radiación negra equilibrada, se hace un orificio, de él saldrá un haz con la misma distribución de energía que la que había dentro del recipiente. Un recipiente casi cerrado de este tipo es precisamente el que se toma como modelo de cuerpo negro. En relación con el haz luminoso que emiten estas fuentes se puede conservar el criterio antedicho de temperatura de radiación.

Es evidente que el concepto de temperatura de radiación puede aplicarse exclusivamente a los haces cuya distribución de energía cumple la fórmula (6) (es decir, la *distribución de Planck*). Si el haz luminoso que emite un cuerpo negro pasa a través de cualquier sustancia absorbente que varíe su distribución de energía, el concepto de temperatura de radiación ya no puede aplicarse. De la misma manera, si el haz luminoso es emitido por cualquier cuerpo que no sea negro, en condiciones en que *no existe equilibrio*, la distribución de la energía será diferente de la que se obtiene por la fórmula (6), y, por lo tanto, a este haz no se le podrá aplicar el concepto de temperatura de radiación.

§ 311. Fuentes de luz. Las principales fuentes luminosas modernas son cuerpos sólidos incandescentes. Como estas fuentes no son cuerpos negros y su radiación tiene lugar sin que exista equilibrio térmico, hay que determinar qué composición tiene su luz.

Por la ley de Kirchhoff, para los radiadores reales (cuerpos no negros) el poder emisor  $r'_\lambda$ , referido al intervalo unidad de longitudes de onda, es igual:

$$r'_\lambda = a_\lambda r_\lambda, \quad (1)$$

donde  $a_\lambda$  es el poder absorbente del cuerpo que se estudia y  $r_\lambda$  es el poder emisor del cuerpo negro a la misma temperatura y referido al mismo intervalo de longitudes de onda.



Para todos los radiadores reales  $a_\lambda < 1$  y, por consiguiente, a una misma temperatura el poder emisor de los radiadores reales es menor que el del cuerpo negro. El cuerpo negro es aquel que, a la temperatura dada, posee el poder emisor máximo posible.

Si para un cuerpo cualquiera  $a_\lambda$  es menor que la unidad pero constante para todas las longitudes de onda  $\lambda$ , este cuerpo se llama gris. En la naturaleza no existen cuerpos cuyas propiedades coincidan con las de los cuerpos grises, pero dentro de una zona limitada

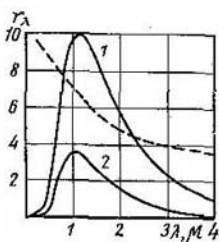


Fig. 225. Comparación de la distribución de la emitancia de radiación del cuerpo negro (1) con la del wolframio (2); la curva de trazo punteado representa el poder absorbente del wolframio.

de longitudes de onda pueden tener cualidades aproximadas a las de estos últimos. Prácticamente puede considerarse «gris» la llama de los hidrocarburos, por ejemplo, la del acetileno. La distribución de la energía radiante de los cuerpos grises coincide con la distribución espectral de la del cuerpo negro tomada a la misma temperatura, con la única diferencia de que la potencia de la radiación por unidad de superficie es menor. Pero para todos los cuerpos reales, es decir, que ni son negros ni grises, el poder absorbente  $a_\lambda$  depende de la longitud de onda y de la temperatura y también del estado de polarización de los rayos y de sus ángulos de incidencia. La curva de la distribución espectral de la energía de estos cuerpos se diferencia de la de Planck. En la fig. 225 la curva 1 representa la distribución entre las longitudes de onda de la emitancia de radiación del cuerpo negro a la temperatura  $T = 2400^\circ \text{K}$ , la curva 2, la distribución de la emitancia de radiación del wolframio a la misma temperatura. Como puede verse, el poder absorbente del wolframio es mayor para las longitudes de onda cortas y menor para las largas. Por lo tanto, la emitancia de radiación del wolframio para las ondas cortas se diferencia menos de la del cuerpo negro que su emitancia para las ondas largas. Esta es la causa de que la luz que emite el wolframio sea diferente de la que emite el cuerpo negro: a una misma temperatura la radiación del wolframio es relativamente menos roja que la del cuerpo negro. En cuanto a su luminancia se refiere, ésta es menor que la del cuerpo negro en todas las longitudes de onda. Los cuerpos reales tienen  $a_\lambda < 1$  para todas las longitudes de onda, por esto, su emitancia integral también es menor que la del cuerpo negro. Si la cantidad total de energía radiante emitida por el cuerpo negro viene dada por la ley de Ste-

fan-Boltzmann:

$$R_e = \sigma T^4,$$

donde

$$\sigma = 5,71 \cdot 10^{-6} \text{ erg/s} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{grad}^4,$$

la de los cuerpos no negros es:

$$R'_e = k\sigma T^4,$$

donde el valor del coeficiente  $k$  depende de la naturaleza del cuerpo, del estado en que se encuentra su superficie, de su temperatura, etc. En la tabla XI se dan los valores numéricos del coeficiente  $k$  para una serie de cuerpos a la temperatura de  $1\,500^\circ \text{K}$ .

Como puede verse en la tabla XI, el valor de  $k$  para todos los metales es mucho menor que la unidad. En particular es pequeño para la plata, que como se sabe tiene un gran poder de reflexión (reflectividad) y, por consiguiente, absorbe solamente una pequeña fracción de la luz que sobre ella incide. A la temperatura de  $1\,500^\circ \text{K}$  la plata emite por unidad de superficie 25 veces menos luz que el cuerpo negro.

Tabla XI

| Sustancia       | $k$ a $T = 1\,500^\circ \text{K}$ |
|-----------------|-----------------------------------|
| Wolframio       | 0,15                              |
| Platino         | 0,15                              |
| Molibdono       | 0,12                              |
| Hierro          | 0,11                              |
| Plata           | 0,04                              |
| Carbón          | 0,52                              |
| Oxido de níquel | 0,84                              |
| Oxido de hierro | 0,89                              |

El valor de los coeficientes  $k$  depende en alto grado del estado en que se encuentran las superficies de los cuerpos. Como ya indicamos, las superficies rugosas y deslustradas absorben más intensamente que las pulimentadas y lisas de los mismos cuerpos. El valor de  $k$  depende también mucho de la temperatura de los cuerpos. Según los datos de la tabla XI, a  $T = 1\,500^\circ \text{K}$  para el wolframio  $k = 0,15$ ; para este mismo cuerpo  $k = 0,34$  cuando  $T = 3\,500^\circ \text{K}$ .

El hecho de que la luminosidad depende del poder absorbente es fácil de demostrar. Si la superficie blanca y esmaltada de un objeto de porcelana se recubre parcialmente de hollín y después se calienta, el sitio cubierto de hollín brillará más que las partes contiguas blancas.

De lo expuesto se deduce que la fuente térmica de luz más ventajosa es un cuerpo cuyas propiedades se aproximen lo más posible a las del cuerpo negro calentado hasta una temperatura de cerca de  $6\,000^{\circ}\text{K}$ . A esta temperatura el máximo de luminosidad se encuentra dentro de la zona visible del espectro y el cuerpo negro tiene una eficacia luminosa de  $84\text{ lm/W}$ .

En el § 304 vimos que cuando se trata de luz monocromática de longitud de onda  $\lambda = 0,555\ \mu$  (zona de sensibilidad máxima del ojo humano) a  $1\text{ W}$  le corresponden  $650\text{ lm}$ . Si llamamos rendimiento de la fuente a la relación entre su eficacia luminosa y la máxima eficacia luminosa posible, tendremos que el cuerpo negro a  $T = 6\,000^{\circ}\text{K}$  tiene un rendimiento

$$\kappa = \frac{84}{650} = 0,129 \cong 13\%.$$

A temperaturas más bajas o más altas el rendimiento del radiador de cuerpo negro será menor. Como la temperatura de fusión de la mayoría de los cuerpos sólidos no sobrepasa de  $3\,000^{\circ}\text{K}$ , el rendimiento que se puede conseguir en realidad de las fuentes luminosas es mucho menor que el 13%.

La fuente luminosa técnica que más se emplea es la lámpara eléctrica de incandescencia. Esta lámpara está formada por un filamento de carbón o metálico que se encuentra dentro de un globo de vidrio en el cual se ha hecho el vacío. Este filamento se pone incandescente cuando por él pasa la corriente eléctrica. Las primeras lámparas eléctricas aptas para fines prácticos fueron hechas por el inventor ruso A. N. Lodiguin en el año 1873. Este mismo año A. N. Lodiguin hizo el experimento de alumbrar las calles de Petersburgo con lámparas eléctricas de incandescencia.

En las primeras lámparas de Lodiguin la corriente ponía incandescente una barrita de carbón. Posteriormente, en el año 1890, Lodiguin consiguió la patente para las lámparas eléctricas con filamento de wolframio, molibdeno y otros materiales de punto de fusión elevado. Estas lámparas se extendieron mucho. En las lámparas de incandescencia modernas se utiliza un filamento de wolframio arrollado en hélice muy fina, para aumentar así su calentamiento. Estas lámparas se suelen llenar de un gas inerte (argón o criptón) a una presión de cerca de  $1/2\text{ atm}$ , con lo cual se disminuye la evaporación (sublimación) del filamento y se aumenta la duración de la lámpara en servicio. Las características numéricas de las lámparas de incandescencia se dan en la tabla XII.

Otra fuente de luz de uso corriente es el arco eléctrico producido entre dos electrodos de carbón, que también fue descubierto por un inventor ruso, V. V. Petrov (t. II, § 190), y empleado para el alumbrado público por P. N. Yablochkov. En el arco eléctrico la luz es emitida principalmente por el cráter que se forma en el electrodo

de carbón positivo. La temperatura de este electrodo alcanza  $4\ 000^{\circ}\text{K}$ . Además del cráter emiten luz el otro electrodo y los vapores incandescentes que se forman entre los dos electrodos. Para aumentar la eficacia luminosa se incluyen sales de diferentes metales en los carbones, con lo cual aumenta considerablemente el brillo de los vapores entre los electrodos. A pesar de esto la eficacia luminosa no supera  $25\ \text{lm/W}$ .

Tabla XII

| Fuente de luz                                       | $T^{\circ}\text{K}$ | Eficacia luminosa $\text{lm/W}$ | $B, \text{sb}$ | $\times\%$ |
|---|---------------------|---------------------------------|----------------|------------|
| Lámpara de incandescencia con filamento de carbón   | 2 095               | 2,5                             | 50             | 0,4        |
| Lámpara de 50 W con filamento de W, llena de gas    | 2 800               | 10,0                            | 450            | 1,6        |
| Lámpara de 1 000 W con filamento de W, llena de gas | 3 000               | 20                              | 1 000          | 3,0        |
| Arco eléctrico                                      | 4 000               | 25                              | 15 000         | 4,0        |
| Lámpara de luminiscencia                            | —                   | 40                              | 1,5            | 6,0        |
| Lámpara de vapor de mercurio de alta presión        | —                   | 60                              | 15 000         | 9,0        |

Se pueden obtener altos rendimientos aprovechando la luz que producen las descargas eléctricas a través de vapores a bajas presiones. En este caso el proceso tiene carácter desequilibrado y no cumple las leyes termodinámicas que hemos estudiado antes. Aquí es posible transformar casi totalmente la energía eléctrica aplicada en energía de luz visible, es decir, se pueden obtener rendimientos próximos al 100%. En las lámparas que contienen vapor de sodio se consigue obtener en la práctica un rendimiento del 70%. Pero las lámparas de este tipo dan una luz fuertemente coloreada y muy desagradable a la vista. Como «blanca» se percibe la luz del Sol, cuya composición se aproxima a la emitida por el cuerpo negro a  $T = 5\ 600^{\circ}\text{K}$ . Las lámparas eléctricas de incandescencia ( $T \cong 3\ 000^{\circ}\text{K}$ ) dan una luz mucho más amarilla, pero esta diferencia de color, en comparación con la «blanca», es relativamente poco sensible. En cambio las fuentes de luz más o menos monocromática, como son las lámparas de descarga que hemos indicado, son prácticamente inaceptables debido a su coloración. Para corregir la coloración de estas lámparas S. I. Vavílov propuso emplear sustancias luminiscentes (véase el § 360). Las lámparas fluorescentes modernas que funcionan por este principio están formadas por un tubo de descarga que contiene una mezcla de argón y vapor de mercurio a baja presión.

Al pasar la corriente eléctrica el vapor de mercurio emite rayas espectrales intensas que se encuentran en la zona ultravioleta del espectro. Sobre la superficie interna del tubo de descarga se extiende una capa delgada de polvo luminiscente bajo la influencia de la radiación ultravioleta. La composición de los polvos se elige de forma que la luz que producen tenga unas características parecidas a las de la luz blanca.

El rendimiento de las lámparas fluorescentes es aproximadamente tres veces mayor que el de las lámparas de incandescencia ordinarias. Su brillo es menor que el de los filamentos de las lámparas de incandescencia, cosa que es una ventaja de las lámparas fluorescentes, puesto que cuando se mira un objeto que brilla mucho el ojo sufre una sensación dolorosa (deslumbramiento). Por esta razón las lámparas de incandescencia cuyos filamentos son de gran luminosidad se suelen alojar en globos mateados; pero esto disminuye aún más su rendimiento. Las lámparas fluorescentes, por el contrario, gracias a su menor brillo pueden utilizarse sin difusores, aunque el flujo luminoso que de ellas se obtiene puede ser considerable debido a la gran superficie luminosa que presentan.

Otro tipo de lámparas de descarga es aquel en que esta última se produce a través de vapor de mercurio a alta presión.

En este caso los procesos se aproximan a los equilibrados correspondientes a temperaturas muy altas. El rendimiento de estas lámparas es alto, pero la luz que dan tiene color verdoso, lo que no impide que últimamente se empleen mucho para el alumbrado de calles y carreteras por la economía que representan. La coloración de la luz de estas lámparas se corrige hasta cierto punto empleando luminóforos.

§ 312. *Pirometría óptica.* La temperatura del cuerpo negro puede determinarse por el carácter de su radiación basándose en cualquiera de las leyes de la radiación que hemos estudiado anteriormente. Los procedimientos para determinar las temperaturas fundados en estas leyes se llaman métodos de *pirometría óptica*. Como quiera que en las expresiones de las leyes de la radiación del cuerpo negro entra la temperatura en la escala absoluta, la pirometría óptica nos proporciona un procedimiento para hallar las temperaturas absolutas. En el t. I, § 44 indicamos la dificultad de principio con que se tropieza al medir las temperaturas en la escala absoluta, por tener que utilizar un cuerpo termométrico cuyas cualidades térmicas no pueden conocerse previamente. El método termodinámico, basado en el segundo principio de la Termodinámica (t. I, § 73), desde el punto de vista de los principios, permite medir las temperaturas independientemente de la naturaleza del cuerpo termométrico, pero la realización práctica de este procedimiento presenta enormes dificultades. Por el contrario, el cuerpo negro, como dijimos en el § 308,

puede reproducirse con toda la aproximación que sea necesaria, lo que hace de la pirometría óptica un procedimiento práctico útil para medir las temperaturas en la escala absoluta. Además, este método óptico tiene la ventaja de que puede emplearse para medir temperaturas muy altas. Por esto los puntos fundamentales de la escala termométrica moderna para la zona de altas temperaturas han sido establecidos por procedimiento óptico.

Los métodos de la pirometría óptica sirven también para resolver muchos problemas prácticos. No son raros los casos prácticos en que el objeto que se observa tiene propiedades que lo asemejan al cuerpo negro. Objetos de este tipo son, por ejemplo, los hornos industriales. Si la medición se realiza abriendo una pequeña ventana en el horno, éste resulta ser una buena aproximación al cuerpo negro. Cuando por el método óptico se mide la temperatura de cuerpos no negros, que emiten en condiciones en que no existe equilibrio, hay que tener en cuenta sus propiedades. Si estas propiedades se conocen, la pirometría óptica resulta muy cómoda por su relativa sencillez y seguridad. Teniendo en cuenta en cual de las leyes de la radiación se funda la medición de la temperatura, los métodos de la pirometría óptica tienen algunas peculiaridades específicas. Por esto, estudiemos estos métodos por separado.

1. Método basado en la ley de la distribución de la luminancia entre las longitudes de onda. En el § 309 vimos que la curva de la distribución de la luminancia del cuerpo negro entre las longitudes de onda se determina exclusivamente por un parámetro: su temperatura. Por lo tanto, la forma de la curva puede servir para determinar directamente la temperatura  $T$ . Bastará, por ejemplo, hallar la longitud de onda  $\lambda_{\text{máx}}$  a que corresponde el máximo de la distribución, ya que por la fórmula de Wien (2a) del § 309:

$$T = \frac{2886}{\lambda_{\text{máx}}}, \quad (1)$$

donde la longitud de onda  $\lambda_{\text{máx}}$  deberá expresarse en micras. Por este método se determina la temperatura del Sol. La radiación máxima del Sol, teniendo en cuenta la corrección de absorción en la atmósfera terrestre, se aproxima a la longitud de onda  $\lambda_{\text{máx}} = 0,47 \mu$ . De aquí, considerando el Sol como cuerpo negro, obtenemos que sus capas externas tienen una temperatura  $T = 6\,150^\circ \text{K}$ .

Para los cuerpos no negros la fórmula (1) no da la temperatura real  $T$ . La temperatura de estos cuerpos obtenida por la fórmula (1) se llama *temperatura del color*.

Si la curva de distribución de la luminancia del cuerpo que se observa no se diferencia mucho de la curva de Planck, la temperatura del color  $T_c$  indica aquella temperatura del cuerpo negro cuya radiación se aproxima más, por el color, a la radiación del cuerpo que se observa. El concepto de temperatura del color pierde su sen-

tido cuando se trata de cuerpos que tienen gran selectividad de radiación.

2. Método del brillo. Por la fórmula de Planck la temperatura  $T$  puede hallarse también midiendo la luminancia (brillo) para una longitud de onda  $\lambda$ , siempre que  $b_\lambda$  se exprese en unidades absolutas.

Como quiera que la medición de la luminosidad en unidades absolutas presenta dificultades, el procedimiento se reduce a comparar el brillo del cuerpo que se observa con el de otro perfectamente determinado. Para esto se utiliza un aparato que se llama pirómetro

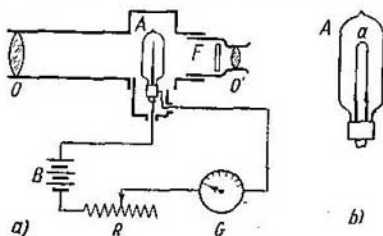


Fig. 226. Pirómetro de filamento que desaparece.

de filamento que desaparece. El esquema de este aparato se muestra en la fig. 226. Su elemento fundamental es un anteojo con un objetivo  $O$  y un ocular  $O'$ . En el plano focal del objetivo  $O$  se obtiene la imagen de la superficie del cuerpo que se observa. Como veremos más adelante (§ 323), el brillo de esta imagen es proporcional al del objeto. En el plano focal del objetivo  $O$  se coloca una lámpara eléctrica  $A$  cuyo globo es de vidrio homogéneo y transparente. El filamento incandescente de esta lámpara  $a$  (fig. 226,  $b$ ) suele tener la forma de semicircunferencia. Por el ocular  $O'$  se ven al mismo tiempo la imagen de la superficie del cuerpo que se analiza y el filamento metálico de la lámpara. Unos filtros de color  $F$ , situados cerca del ocular  $O'$ , permiten aislar una zona estrecha del espectro. Generalmente se prefiere la parte roja del espectro próxima a la longitud de onda  $\lambda = 0,66 \mu$ . El filamento de la lámpara se alimenta con la corriente de una batería  $B$ . Variando la intensidad de la corriente con el reóstato  $R$  se puede conseguir que el filamento se caliente más o menos intensamente. Si el brillo del filamento es mayor que el de la imagen de la superficie del cuerpo, aquél se destaca sobre el fondo de ésta en forma de franja más clara; si, por el contrario, su brillo es menor, la franja resultará más oscura que el fondo. Cuando el filamento y la superficie brillan con la misma intensidad el filamento deja de verse sobre el fondo de la imagen de la superficie. De esta forma se puede establecer con un grado de exactitud consi-

derable el equilibrio entre el brillo del filamento y el de la imagen de la superficie del cuerpo que se observa. Este aparato puede graduarse por un cuerpo negro, estableciendo qué intensidades de la corriente de calentamiento  $I$  corresponden a la desaparición del filamento a diferentes temperaturas de dicho cuerpo negro. Una vez hecho esto, las indicaciones del instrumento de medición  $G$ , correspondientes a los momentos en que el filamento desaparece, pueden servir para determinar directamente cuál será la temperatura del cuerpo negro que en el intervalo de longitudes de onda dado produce un brillo  $b_\lambda$  igual que el  $b'_\lambda$ , del cuerpo que se observa. Si el cuerpo que se observa es negro, la temperatura medida de esta forma será la suya verdadera. Si los cuerpos no son negros, las temperaturas determinadas por este procedimiento se llaman *temperaturas de brillo* y se diferencian algo de las temperaturas reales del cuerpo.

3. Método de radiación. Este método se basa en la medición de la radiancia integral del cuerpo (es decir, la energía total por

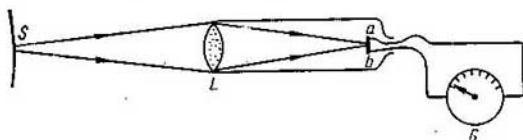


Fig. 227. Pirómetro de radiación.

unidad de superficie y de tiempo emitida por el cuerpo). La radiancia integral  $B_e = \frac{1}{\pi} R_e$ , donde  $R_e$  es la emitancia integral de radiación (cantidad total de energía radiante emitida por el cuerpo), que cumple la ley de Stefan-Boltzmann (1) del § 309:

$$B_e = \frac{\sigma}{\pi} T^4. \quad (2)$$

De la fórmula (2) se deduce que la temperatura del cuerpo  $T$  puede hallarse midiendo su radiancia integral  $B_e$ .

Para determinar la radiancia  $B_e$  se utilizan unos aparatos llamados *pirómetros de radiación*.

En la fig. 227 se reproduce el esquema de un pirómetro de radiación:  $L$  es una lente;  $ab$  es un par termoelectrico; y  $G$ , un galvanómetro, para medir la intensidad de la corriente que se produce en el par termoelectrico. El pirómetro se enfoca a la superficie  $S$  del cuerpo incandescente, de forma que la imagen de ésta que produce la lente  $L$  coincida con el sitio en que se encuentra el par  $ab$ . Como ya dijimos, la radiancia  $B'_e$  de la imagen que produce la lente es proporcional a la de la fuente. El calentamiento del par termoelectrico



es proporcional a su vez a la radiancia de la imagen  $B'_e$  (siempre que las dimensiones de la imagen sean mayores que las del par termoelectrónico). En fin de cuentas, las indicaciones del galvanómetro serán proporcionales a la radiancia  $B_e$  del cuerpo negro que se observa y, por consiguiente, según (2), serán proporcionales a su temperatura elevada a la cuarta potencia. Si el pirómetro se gradúa previamente, partiendo de temperaturas conocidas, después puede utilizarse para medir directamente cualquier temperatura.

Si el cuerpo cuya temperatura se mide no es negro el pirómetro de radiación no da su temperatura real  $T$ . La temperatura que se mide en este caso se conoce con el nombre de *temperatura de radiación*  $T_r$ , y es igual a la del cuerpo negro cuya radiancia integral coincide con la del cuerpo que se observa.

Para los cuerpos que no son negros, de acuerdo con lo dicho en el § 311:

$$B_e = \frac{k\sigma}{\pi} T^4, \quad (2a)$$

siendo  $k$  un coeficiente cuyo valor, para algunos cuerpos, se da en la tabla XI.

Como la temperatura de radiación del cuerpo se determina por la relación:

$$B_e = \frac{\sigma}{\pi} T_r^4, \quad (3)$$

comparando las fórmulas (2a) y (3) obtenemos la siguiente relación entre la temperatura real del cuerpo y su temperatura de radiación:

$$T = \frac{1}{\sqrt[4]{k}} T_r.$$

Y como, según los datos de la tabla XI,  $k < 1$  para todos los cuerpos, la temperatura real de todos los cuerpos no negros será mayor que su temperatura de radiación. Por ejemplo, para el hierro  $k = 0,11$ , de donde  $\frac{1}{\sqrt[4]{k}} k = 1,74$  y, por consiguiente,  $T = 1,74T_r$ , es decir, la temperatura real es más de vez y media mayor que la de radiación. La dificultad que existe para determinar la temperatura real por medio de la de radiación estriba en que el valor de los coeficientes  $k$  no es constante, sino que depende también de la temperatura.

## *Optica geométrica aplicada*

§ 313. **Introducción.** La estructura de un gran número de instrumentos ópticos se basa en la hipótesis de que los rayos luminosos se propagan en línea recta en los medios homogéneos y experimentan la reflexión y la refracción en las superficies que separan estos medios. La parte de la Física que estudia la teoría de estos instrumentos se llama *Optica geométrica*. La Optica geométrica se basa en dos leyes: la ley de la reflexión y la ley de la refracción de la luz (§ 251). Pero como veremos más adelante estas dos leyes son insuficientes para explicar la totalidad de las cualidades de los instrumentos ópticos. En primer lugar, porque hay que tener en cuenta las correlaciones fotométricas para poder explicar la luminancia y la iluminación de las imágenes. En segundo lugar, porque es necesario tomar en consideración los fenómenos de la interferencia y de la difracción de la luz que determinan los límites dentro de los cuales puede admitirse que la luz se propaga en línea recta. No obstante, a pesar de la gran importancia que tienen estos fenómenos, la teoría inicial de los instrumentos ópticos puede basarse exclusivamente en las leyes de la Optica geométrica.

Los instrumentos que se fundan en los principios de la Optica geométrica pueden servir para distintos fines: para complementar al ojo cuando se observan objetos, para dar una imagen real de los objetos, para variar la iluminación, etc. En todos estos casos el papel que desempeñan los instrumentos se reduce a variar los ángulos sólidos dentro de los cuales se propagan los rayos que salen del objeto. Por esto cobra importancia el estudio de las propiedades generales de los haces de rayos.

Supongámonos un haz de rayos formado por líneas rectas normales a una porción de superficie esférica. Este haz puede ser convergente (fig. 228, *a*), y entonces todos sus rayos se cortan en un punto  $F$ , o divergente (fig. 228, *b*), en cuyo caso las prolongaciones de sus rayos (representadas por líneas punteadas en la fig. 228, *b*) se encuentran en un punto  $F'$ . El punto  $F$  (o en el caso correspondiente el  $F'$ ) se llama foco del haz. *Todo haz cuyo foco sea un punto se llama homocéntrico*. Como la superficie de onda es ortogonal a los rayos, a todo haz homocéntrico le corresponde un frente de onda esférico. Un caso particular de haz homocéntrico es el haz de rayos paralelos, al cual le corresponden un foco situado en el infinito y una superficie de onda plana.

Examinemos ahora un área elemental de una superficie curva cualquiera  $ABCD$  (fig. 229).

Cada sección de este área elemental tendrá su propia curvatura. Como sabemos por la Geometría, en cualquier superficie curva las

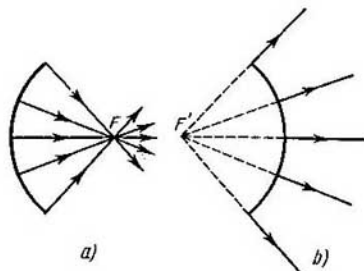


Fig. 228. Haces homocéntricos: *a*, convergente; *b*, divergente.

secciones que contienen los radios de curvatura máximo y mínimo son perpendiculares entre sí (véase el t. I, § 81). Tomemos un punto cualquiera  $O$  de nuestra superficie elemental y hagamos pasar por

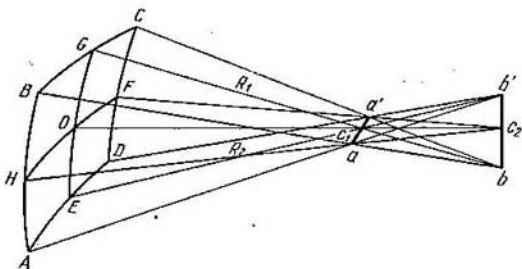


Fig. 229. Haz astigmático.

él dos cortes perpendiculares entre sí  $EOG$  y  $HOF$ , de los cuales suponemos que el primero corresponde al radio de curvatura mínimo  $R_1$  y el segundo al radio de curvatura máximo  $R_2$ . Las perpendiculares a los puntos  $E$ ,  $O$  y  $G$  se cortarán en el centro de curvatura  $C_1$ , que se encuentra a una distancia  $R_1$  de la superficie; las perpendiculares a los puntos  $H$ ,  $O$  y  $F$  se cortarán en el centro de curvatura  $C_2$ , que se encuentra a la distancia  $R_2$  de la superficie. Tomemos ahora

los cortes  $AHB$  y  $CFD$ , próximos y paralelos al corte  $EOG$ . Estos cortes tendrán también el radio de curvatura  $R_1$  y sus normales se cortarán respectivamente en los puntos  $a$  y  $a'$ , los cuales formarán una línea recta con el punto  $C_1$ . De la misma forma las normales a los cortes  $AED$  y  $BGC$ , paralelos al corte  $HOF$ , se cortarán en los puntos  $b$  y  $b'$  que formarán una línea recta con el punto  $C_2$ . Las rectas  $aa'$  y  $bb'$  serán perpendiculares entre sí. Todos los demás rayos perpendiculares a la superficie  $ABCD$  se cortarán en puntos situados en una de las dos rectas  $aa'$  y  $bb'$ . Como resultado tenemos: que *todos los rayos correspondientes a un área elemental de una superficie curva cualquiera se cortan en puntos que se encuentran en dos segmentos rectilíneos perpendiculares entre sí  $aa'$  y  $bb'$* . Un haz de rayos de este tipo se llama *astigmático*. Los segmentos  $aa'$  y  $bb'$  se denominan *líneas focales* y la distancia entre ellos, *diferencia astigmática*. Los haces de rayos astigmáticos no dan focos puntuales en ninguna parte. Cuanto menor es la diferencia astigmática tanto más próximas entre sí se hallan las líneas focales y tanto más corta es cada una de ellas. En el límite estas líneas pueden confundirse en un punto, y entonces el haz astigmático se convierte en haz homocéntrico.

Es evidente que desde cada objeto puntual sale un haz homocéntrico (concéntrico). Para que un sistema óptico pueda dar una imagen puntual de un objeto de este tipo los rayos que salen de él deberán cortarse en un punto. Esto quiere decir que el sistema óptico debe variar exclusivamente los ángulos sólidos entre cuyos límites se encuentran comprendidos los haces homocéntricos, sin que éstos dejen de ser homocéntricos. Debido al fenómeno de la difracción no existen haces homocéntricos propiamente dichos, pero si nos limitamos a aplicar las leyes de la geometría óptica resulta que son posibles aquellos casos en que los haces homocéntricos después de reflejarse y de refractarse continúan siendo homocéntricos. Sin embargo, como veremos más adelante, estos casos no son frecuentes.

Por esto, cuando se construyen instrumentos ópticos generalmente no se consigue evitar por completo el astigmatismo, sino que únicamente se plantea el problema de reducirlo al mínimo:

La variación de los ángulos dentro de cuyos límites se propagan los haces se consigue en los instrumentos ópticos por medio de la reflexión y de la refracción en las superficies planas o curvas que separan cuerpos de propiedades ópticas distintas. Esta variación de los ángulos podría conseguirse en principio haciendo que los rayos se propagasen a través de sustancias ópticamente heterogéneas (§ 283), pero la fabricación de sustancias cuyas heterogeneidades estén repartidas de una forma dada es un problema difícil de resolver desde el punto de vista técnico y por eso este procedimiento no se utiliza hasta ahora. En calidad de superficies refractoras se emplean casi exclusivamente superficies planas o esféricas, y que la fabricación de superficies de otras formas también es bastante difícil. El material

transparente que sirve para hacer los instrumentos ópticos es por lo general el vidrio, que para este fin debe tener cualidades muy homogéneas. Finalmente, las superficies de los instrumentos ópticos no deben discrepar de las formas geométricas dadas en magnitudes mayores de una fracción de longitud de onda luminosa, es decir, en una magnitud del orden de  $10^{-5}$  cm. Todas estas circunstancias hacen de la técnica óptica una de las más difíciles y delicadas. Pero al mismo tiempo la importancia práctica de los instrumentos ópticos es muy grande: la técnica de laboratorio, casi toda la técnica de mediciones de precisión, muchos métodos de comprobación de la calidad de los artículos industriales, la fotografía y toda una serie de aparatos que emplea la técnica de la defensa nacional se basan en la utilización de sistemas ópticos.

Las primeras etapas del desarrollo de la óptica aplicada datan en Rusia de mediados del siglo XVIII, época en que M. V. Lomonósov organizó un taller en el que se hacían diversos tipos de instrumentos ópticos diseñados por él: telescopios, microscopios y aparatos ópticos de navegación. En este taller se construyó un anteojo original de gran luminosidad apto para la observación con iluminación escasa. M. V. Lomonósov designó este instrumento con el nombre de anteojo «videonocturno». El célebre inventor ruso I. P. Kulibin fabricaba instrumentos ópticos de medición para las expediciones de la Academia de Ciencias, entre ellos figuraban teodolitos, astrolabios, etc. En el año 1779 Kulibin construyó el primer proyector de reflexión, para el que hizo un gran espejo cóncavo formado por multitud de espejos pequeños dispuestos sobre una superficie cóncava. Según testimonio de sus contemporáneos este espejo «cuando delante de él se colocaba una bujía producía un efecto sorprendente, multiplicando quinientas o más veces la luz en comparación con la que daba la vela...»

La óptica aplicada recibió en la URSS un impulso extraordinario después de la Gran Revolución de Octubre. Se organizó la producción en gran escala de vidrio óptico de multitud de clases y alta calidad. La técnica óptica soviética siguiendo un camino autónomo ha dado gran número de nuevas creaciones que satisfacen totalmente la demanda de aparatos ópticos del país.

§ 314. Reflexión y refracción en una superficie plana. En el § 251 estudiamos la reflexión en una superficie plana. Vimos entonces que un espejo plano da una imagen puntual virtual del punto objeto. Esto quiere decir que un haz homocéntrico después de reflejarse en un espejo plano sigue siendo homocéntrico, con la particularidad, fácil de comprobar, de que el ángulo sólido que forman los rayos del haz al divergir tampoco varía. Lo único que cambia es la dirección de dichos rayos. No ocurre lo mismo cuando la refracción tiene lugar en una superficie plana que separa dos sustancias cuyos índices de

refracción son distintos: en este caso el haz homocéntrico se convierte en astigmático.

Supongamos que la superficie plana que separa dos sustancias transparentes homogéneas coincide con el plano  $YOZ$  (fig. 230; el eje  $OY$  es perpendicular al plano del dibujo). Llamemos  $n_1$  y  $n_2$  a los respectivos índices de refracción de las sustancias, siendo  $n_2 < n_1$ , y supongamos que el foco puntual luminoso  $S$  se encuentra en el eje  $OX$  y que un rayo procedente de él incide sobre el punto  $M$  de la superficie de separación. Tracemos la normal  $MN$  en el punto de incidencia y llamemos  $i_1$  y  $i_2$  a los ángulos de incidencia y de refracción respectivamente. Por la ley de la refracción

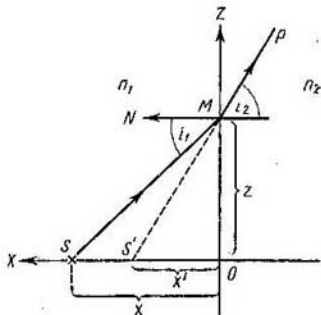


Fig. 230. Refracción de la luz en un plano de separación de dos medios.

$$n_1 \operatorname{sen} i_1 = n_2 \operatorname{sen} i_2. \quad (1)$$

La prolongación del rayo refractado  $MP$  corta al eje  $OX$  en el punto  $S'$ . Llamemos  $x$  y  $x'$  a las coordenadas de los puntos  $S$  y  $S'$  respectivamente y  $z$  a la coordenada del punto  $M$ . De acuerdo con los triángulos  $SMO$  y  $S'MO$  tenemos:

$$\operatorname{sen} i_1 = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} i_2 = \frac{z}{\sqrt{x'^2 + z^2}}.$$

Poniendo estos valores de  $\operatorname{sen} i_1$  y  $\operatorname{sen} i_2$  en (1) y resolviendo la igualdad que se obtiene con respecto a  $x'$ , hallamos:

$$x' = \frac{n_2}{n_1} \sqrt{x^2 + \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\right) z^2}. \quad (2)$$

Por la fórmula (2) vemos que cuando se da la posición de la fuente luminosa  $S$  (es decir, se da  $x$ ) la posición del punto  $S'$  depende del sitio en que se encuentra el punto  $M$ , es decir, de la dirección del rayo  $SM$ . Diferentes rayos se refractan de formas distintas al pasar de una sustancia a otra, y sus prolongaciones cortan al eje  $OX$  en distintos puntos. Veamos lo que ocurre con dos rayos  $SM_1$  y  $SM_2$  (fig. 231) cuyos ángulos de incidencia se diferencian entre sí en un ángulo infinitamente pequeño  $di_1$ . Estos rayos después de refractarse originarán los  $M_1P_1$  y  $M_2P_2$ , cuyas prolongaciones cortarán al eje  $OX$  en los puntos  $S''$  y  $S'$  respectivamente; estos rayos se cortarán entre sí en el punto  $S_1$ . Es evidente que todos los demás rayos que salen de la fuente puntual  $S$  y que se encuentran comprendidos entre los

rayos  $SM_1$  y  $SM_2$  después de refractarse darán rayos cuyas prolongaciones también se cortarán en el punto  $S_1$  y cortarán al eje  $OX$  entre los puntos  $S'$  y  $S''$ . Si queremos tomar un haz de rayos espacial que

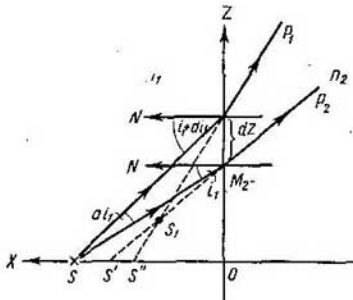


Fig. 231. Astigmatismo de un haz al refractarse en el plano de separación de dos medios.

refractado  $d\omega_2$  será un haz astigmático y que la línea  $S'S''$  será una de sus líneas focales. Para hallar la segunda línea focal tendremos en cuenta que las prolongaciones de los rayos del haz refractado que se encuentran en el plano  $XOZ$  se cortan en el punto  $S_1$ . Si hacemos que la figura gire un ángulo  $d\varphi$  alrededor del eje  $OX$ , el punto  $S_1$  describirá un arco pequeño, el cual, si el ángulo  $d\varphi$  es infinitamente pequeño, podrá considerarse como un segmento rectilíneo perpendicular al plano de la figura. Las prolongaciones de todos los rayos del haz  $d\omega_2$  cortarán este segmento. De esta forma, el segmento considerado, perpendicular al plano  $XOZ$ , es la segunda línea focal del haz refractado. La línea focal  $S'S''$ , que se halla en el plano del dibujo, se llama *sagital*, y la línea focal  $S_1$ , perpendicular al plano del dibujo, se llama *meridiana*.

Al variar el ángulo de incidencia varía la posición de las dos líneas focales. En la fig. 232 la línea punteada representará el lugar geométrico de los puntos  $S_1$ . Esta línea se llama *cáustica*. Las líneas focales sagitales se sitúan a lo largo del eje  $OX$ , empezando

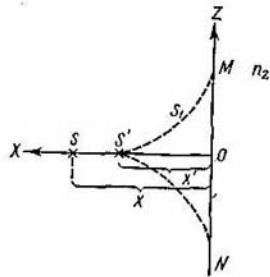


Fig. 232. Cáustica.

en el punto  $S'$  y terminando en el punto  $O$ . Cuando se trata de un haz infinitamente estrecho que parte de un punto luminoso  $S$  e incide normalmente sobre la superficie de separación ( $i_1 = 0$ ), ambas líneas focales se confunden en un punto  $S'$ ; en este caso el haz refractado sigue siendo homocéntrico. La coordenada  $x'$  del punto  $S'$  puede hallarse suponiendo  $z = 0$  en la fórmula (2):

$$x' = \frac{n_2}{n_1} x. \quad (2a)$$

A medida que varía el ángulo de incidencia la línea focal meridiana de los haces infinitamente estrechos se desplaza a lo largo de una de las ramas de la cáustica  $S'M$  o  $S'N$ , dependiendo del signo que tenga el ángulo de incidencia  $i_1$ . Al mismo tiempo la línea focal sagital se desplaza desde el punto  $S'$  hasta el punto  $O$  a lo largo del eje  $OX$ . Las posiciones extremas de las líneas focales, correspondientes a los puntos  $M$  y  $O$  (o  $N$  y  $O$ ), responden a la condición de que el ángulo de incidencia tiende a su valor máximo, a partir del cual aparece la reflexión total.

De lo expuesto se deduce que cuanto más oblicuamente incide el haz sobre la superficie de separación tanto mayor es el astigmatismo del haz refractado.

Si se miran, por ejemplo, objetos que están debajo del agua en dirección próxima a la normal, con respecto a la superficie del agua, sus imágenes conservan la nitidez, puesto que el astigmatismo es pequeño en este caso; pero si estos mismos objetos se observan bajo ángulos oblicuos sus imágenes dejarán de ser nítidas debido al astigmatismo.

§ 315. Refracción en una superficie esférica. Supongamos que dos sustancias transparentes homogéneas, con índices de refracción  $n$  y  $n'$  respectivamente, están separadas por una superficie esférica cuyo radio de curvatura es  $r$ .

Tracemos el *eje óptico principal*, entendiéndolo por él la recta que pasa por la fuente luminosa puntual  $P$  y por el centro de curvatura de la superficie  $C$  (fig. 233). Convencionalmente emplearemos la siguiente regla para los signos: las longitudes las mediremos a partir del vértice de la superficie refractora  $O$  y las consideraremos positivas cuando están dirigidas en el sentido de la propagación de la luz; los ángulos los mediremos a partir de la dirección del eje óptico principal (o de la normal a la superficie esférica) y los consideraremos positivos cuando se desarrollen en el sentido de las agujas del reloj. En el dibujo indicaremos siempre los valores positivos de las longitudes y de los ángulos. Por ejemplo, si una longitud determinada, que designaremos con la letra  $s$ , es negativa, en el segmento correspondiente del dibujo pondremos  $-s$ . Dicho esto, determinemos la dirección de los rayos que parten del objeto puntual  $P$  y los ángulos  $u$



que estos rayos forman con el eje óptico principal  $PC$ . Tendremos en cuenta exclusivamente aquellos rayos que forman con el eje óptico ángulos tan pequeños que sus senos y tangentes pueden sustituirse por los propios ángulos y sus cosenos pueden ser considerados iguales a la unidad. Estos rayos reciben el nombre de *paraxiales*.

Veamos lo que ocurre con un rayo procedente del objeto  $P$  que incide sobre el límite de separación en el punto  $M$  y que después de refractarse corta al eje óptico principal en el punto  $P'$ . De acuerdo con la regla para los signos el ángulo  $u$ , cuya dirección se señala en

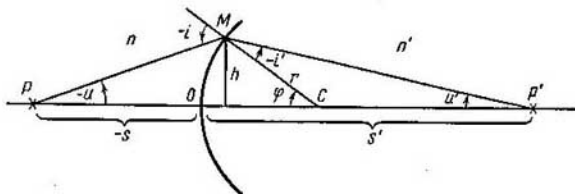


Fig. 233. Refracción de la luz en una superficie esférica.

la fig. 233 con una flecha, es negativo. Positiva será la magnitud  $-u$ . Los ángulos de incidencia  $i$  y de refracción  $i'$  también son negativos. Sus magnitudes positivas serán  $-i$  y  $-i'$ . Según la ley de la refracción:

$$n \operatorname{sen}(-i) = n' \operatorname{sen}(-i').$$

Considerando que el rayo es paraxial, sustituimos los senos por los ángulos, y entonces

$$n(-i) = n'(-i'). \quad (1)$$

Pero por el triángulo  $PMC$  tenemos que  $-i = \varphi - u$ , y por el triángulo  $CMP'$ ,  $-i' = \varphi - u'$ , donde  $-u$  y  $u'$  son los ángulos positivos que forman los rayos  $PM$  y  $MP'$  con el eje óptico principal, y  $\varphi$  es el ángulo positivo entre este mismo eje y el radio  $CM$ . Poniendo estos valores de los ángulos  $-i$  y  $-i'$  en (1), hallamos:

$$n(\varphi - u) = n'(\varphi - u'). \quad (2)$$

Llamando  $-s$  y  $s'$  a las distancias positivas que hay respectivamente desde el vértice de la superficie de refracción  $O$  hasta los puntos  $P$  y  $P'$ , y  $h$  a la longitud de la perpendicular bajada desde el punto  $M$  al eje  $PC$ , obtenemos, dentro de la aproximación admitida, que:

$$-u = \frac{h}{-s}, \quad u' = \frac{h}{s'}.$$

Y para el ángulo  $\varphi$  tenemos

$$\varphi = \frac{h}{r}.$$

Poniendo estos valores de  $-u$ ,  $u'$  y  $\varphi$  en (2), hallamos:

$$n \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = n' \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right) \quad (3)$$

o

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}. \quad (4)$$

La magnitud que se encuentra en la parte derecha de la expresión (4) depende exclusivamente de los índices de refracción de las sustancias que intervienen y del radio de curvatura de la superficie que las separa. Por consiguiente, para unas sustancias y una superficie de separación determinadas esta magnitud será constante. La magnitud antedicha se llama *poder óptico* de la superficie refractora y se denomina con la letra  $\Phi$ :

$$\Phi = \frac{n' - n}{r}. \quad (5)$$

Si introducimos el poder óptico en la expresión (4), obtenemos:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \Phi. \quad (4a)$$

Para una posición dada del objeto  $P$  (determinada por el segmento  $s$ ) por la fórmula (4a) obtenemos un valor determinado del segmento  $s'$ , independiente del valor del ángulo  $u$ . Esto quiere decir, que cuando los ángulos  $u$  son pequeños todos los rayos que salen del objeto puntual  $P$ , después de la refracción, se cortan en el punto  $P'$ . Si los rayos son paraxiales, todo haz homocéntrico, dentro de la aproximación admitida, después de refractarse en una superficie esférica seguirá siendo homocéntrico;  $P'$  será en este caso el punto imagen del punto objeto.

De los razonamientos anteriores queda claro que si se coloca una fuente luminosa en el punto  $P'$ , el punto  $P$  será su imagen. Dos puntos  $P$  y  $P'$  que cumplan la condición de que si uno de ellos es el objeto el otro será la imagen y viceversa se llaman puntos *conjugados*.

Los rayos que forman ángulos  $u$  considerables con el eje óptico principal, después de refractarse en la superficie esférica no se cortan en un punto  $P'$ , es decir, el haz después de refractado deja de ser homocéntrico y la imagen del objeto puntual deja de ser un punto. Pero limitándonos por ahora al estudio de los rayos paraxiales, hallemos el punto en que converge, después de refractarse en la superficie esférica, un haz de rayos paralelos. Para esto supongamos

que  $-s = \infty$ , entonces, de acuerdo con la fórmula (4):

$$s' = \frac{n'}{n' - n} r. \quad (6)$$

El punto en que se cortan los rayos de un haz paralelo después de refractarse en una superficie esférica se llama *foco principal imagen*  $F'$  de la superficie esférica, y la distancia que hay desde el vértice de la superficie refractora  $O$  hasta el foco principal imagen se llama *distancia focal imagen*  $f'$ . Por la fórmula (6), obtenemos:

$$f' = \frac{n'}{n' - n} r. \quad (7)$$

Se llama *foco principal objeto*  $F$  de una superficie refractora el punto que satisface la condición de que si en él se coloca una fuente luminosa puntual  $P$ , los rayos que partan de ella, después de refractados, formen un haz de rayos paralelos. La distancia desde el vértice  $O$  de la superficie refractora hasta el foco principal objeto se llama *distancia focal objeto*  $f$ . Para hallar  $f$  suponemos que en la fórmula (4)  $s' = \infty$ , y entonces

$$f = -\frac{n}{n' - n} r. \quad (8)$$

Comparando las fórmulas (7) y (8) hallamos la correlación que existe entre la distancia focal imagen y la distancia focal objeto:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}. \quad (9)$$

Por la fórmula (9) puede verse que las dos distancias focales son proporcionales a los índices de refracción de las sustancias en que se encuentran los focos. El signo menos del segundo miembro de la igualdad (9) indica que las distancias focales tienen signos distintos, es decir, que los focos objeto e imagen se encuentran a distintos lados de la superficie refractora.

Introduzcamos en la fórmula (4a) las distancias focales. Para esto dividamos previamente los dos miembros de esta fórmula por  $\frac{n' - n}{r}$ , con lo que obtendremos:

$$\frac{1}{s'} \cdot \frac{n'}{n' - n} r - \frac{1}{s} \cdot \frac{n}{n' - n} r = 1,$$

o, basándonos en las correlaciones (7) y (8):

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1. \quad (4b)$$

A la fórmula (4b) se le puede dar otra forma. Para esto mediremos los segmentos que determinan las posiciones de los puntos  $P$  y  $P'$ , no a partir del vértice  $O$  de la superficie refractora, sino desde uno

de los focos objeto  $F$  e imagen  $F'$  respectivamente. Llamando a estos segmentos  $x$  y  $x'$ , (fig. 234), tendremos:

$$-s = -f - x \quad \text{y} \quad s' = f' + x'.$$

Poniendo estos valores de  $s$  y  $s'$  en (4b), hallamos:

$$\frac{f'}{f' + x'} + \frac{f}{f + x} = 1$$

o

$$f'(f + x) + f(f' + x') = (f' + x')(f + x).$$

Abriendo los paréntesis y simplificando los términos semejantes,

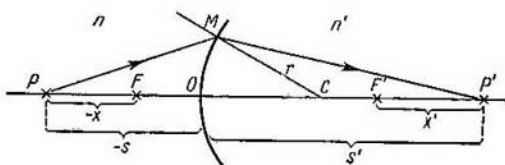


Fig. 234. Determinación de las posiciones del objeto  $P$  y de su imagen  $P'$  por medio de los segmentos  $x$  y  $x'$  tomados a partir de los focos principales.

llegamos a la expresión siguiente:

$$xx' = ff'. \quad (4c)$$

Esta forma simétrica de la expresión se llama fórmula de Newton.

Las fórmulas (4), (4a), (4b) y (4c) son equivalentes entre sí: cada una de ellas permite hallar por la posición de un punto objeto la posición de su punto imagen.

Finalmente establezcamos la correlación que existe entre las distancias focales  $f$  y  $f'$  y el poder óptico  $\Phi$  de la superficie refractora.

Por las fórmulas (5), (7) y (8) hallamos:

$$\Phi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}. \quad (10)$$

Los resultados obtenidos para una superficie esférica refractora pueden extenderse al caso de un espejo esférico. Supongamos para esto que  $i$  es el ángulo de incidencia e  $i'$  el ángulo de reflexión. Conservando la regla convencional de los signos que hemos establecido, la ley de la reflexión tendrá la forma:

$$i = -i'.$$

Esta ley se obtiene formalmente de la de refracción (1) si el índice de refracción  $n'$  se toma igual a  $-n$ . De aquí que las fórmulas obtenidas para una superficie refringente esférica pasen a ser las del espejo

esférico si en ellas se toma  $n' = -n$ . De esta forma, de la fórmula (4), obtenemos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r},$$

expresión que permite hallar la posición que ocuparía la imagen producida por un espejo esférico si se conoce la que ocupa el objeto.

Para las distancias focales objeto e imagen de los espejos tenemos que  $f = f' = \frac{r}{2}$ . Los espejos cóncavos tienen  $r > 0$  y el foco  $F$  se encuentra delante del espejo, entre su vértice y su centro de curvatura. Los espejos convexos tienen  $r < 0$  y el foco  $F$  se encuentra detrás del espejo.

§ 316. Aumento de una superficie esférica refringente. Hasta ahora hemos estudiado el punto objeto (objeto puntual) y su punto imagen producido por una superficie esférica refringente (refractora).

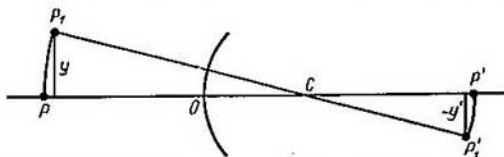


Fig. 235. Los puntos que se encuentran en el arco  $PP_1$  tienen sus imágenes en puntos que se hallan en el arco  $P'P'_1$ .

Veamos ahora qué imagen producirá un segmento rectilíneo perpendicular al eje óptico. Para esto fijémonos en la fig. 235, donde  $P$  es un punto objeto y  $P'$  su imagen. Hagamos girar al eje  $PC$ , alrededor del centro de curvatura  $C$  de la superficie refringente, un ángulo pequeño. En estas condiciones el punto  $P$  ocupará la posición  $P_1$  y su imagen la posición  $P'_1$ . Todos los puntos del arco  $PP_1$  tendrán sus imágenes en los puntos correspondientes del arco  $P'P'_1$ . Si los arcos  $PP_1$  y  $P'P'_1$  son pequeños podemos sustituirlos por los segmentos rectilíneos  $y$  y  $y'$ , perpendiculares al eje  $POP'$ . Por consiguiente, obtendremos que la imagen del segmento pequeño  $y$ , perpendicular al eje óptico, será el segmento  $y'$ , también perpendicular al eje óptico. De aquí se deduce que la imagen de una superficie plana  $\Delta S$ , normal al eje óptico, también será una superficie plana  $\Delta S'$  perpendicular al eje óptico. Esta deducción es cierta cuando se trata de pequeñas superficies  $\Delta S$ . Pero si las dimensiones de la superficie  $\Delta S$  son considerables su imagen ya no puede considerarse plana: esta imagen representará una parte de superficie curva de forma determinada.

Cada uno de los puntos de la imagen es el punto de intersección de todos los rayos que parten de su punto conjugado del objeto. Para

hallar este punto basta determinar el de intersección de dos rayos cualesquiera. Examinemos, por ejemplo, el caso de un objeto en forma de segmento  $PP_1$  (fig. 236) perpendicular al eje óptico. Para hallar la imagen del punto  $P_1$  utilizaremos los dos rayos siguientes, cuyas direcciones después de refractarse en la superficie esférica conocemos: 1) el rayo  $P_1M$ , paralelo al eje óptico, que después de la refracción pasa por el foco imagen  $F'$ , y 2) el rayo  $P_1FN$ , que pasa por el foco objeto  $F$ , que después de refractarse saldrá en dirección paralela

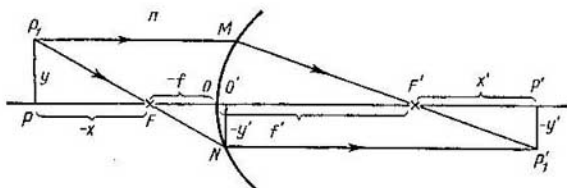


Fig. 236. Construcción de la imagen.

al eje óptico. El punto de intersección de estos rayos  $P_1'$  será la imagen del punto  $P_1$ . La imagen del segmento  $PP_1$  será el segmento  $P_1'P'$ , perpendicular al eje óptico.

Llamemos  $y$  a la longitud del objeto y  $y'$  a la de su imagen. La razón de las dimensiones lineales de la imagen a las dimensiones lineales del objeto se llama *aumento lateral*  $\beta$ :

$$\beta = \frac{y'}{y}. \quad (1)$$

Establezcamos convencionalmente que los segmentos perpendiculares al eje óptico serán positivos cuando estén dirigidos hacia arriba y negativos cuando lo estén hacia abajo. En el caso representado en la fig. 236 la longitud del objeto es positiva, mientras que la de su imagen es negativa. Bajemos desde el punto  $N$  una perpendicular al eje óptico; la longitud de esta perpendicular  $NO'$  será igual a  $-y'$ .

Según los triángulos  $PP_1F$  y  $NO'F$  tenemos:

$$\frac{-y'}{y} = \frac{-f}{-x},$$

de donde el aumento lateral

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x}. \quad (2)$$

Utilizando la fórmula de Newton (4c) del § 315:  $xx' = ff'$ , obtenemos que  $\frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}$ , después de lo cual a la expresión (2) puede dársele tam-

bién la forma

$$\beta = -\frac{x'}{f'}. \quad (2a)$$

La expresión del aumento lateral  $\beta$  aún se puede transformar. Para ello tracemos los rayos  $P_1O$  y  $OP_1'$ , donde el punto  $O$  es el vértice de la superficie refractora. Como el eje óptico es normal a dicha

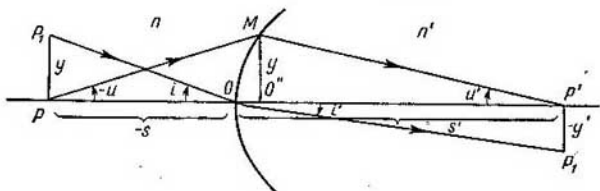


Fig. 237. Construcción de la imagen.

superficie, el  $\angle P_1OP$  será el ángulo de incidencia  $i$ , y el  $\angle P_1OP'$  será el ángulo de refracción  $i'$ . Y según la fig. 237 tendremos que

$$y = -s \cdot i \quad \text{y} \quad -y' = s' \cdot i',$$

de donde obtenemos:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \cdot \frac{i'}{i},$$

Por la ley de la refracción, dentro de la aproximación admitida, tenemos que  $ni = n'i'$ , es decir,

$$\frac{i'}{i} = \frac{n}{n'}.$$

Poniendo este valor de la relación  $i'/i$  en la expresión de  $\beta$ , hallamos que

$$\beta = \frac{n}{n'} \cdot \frac{s'}{s}. \quad (3)$$

Tracemos ahora los rayos  $PM$  y  $MP'$  y bajemos desde el punto  $M$  la perpendicular  $MO''$  al eje óptico. Entonces  $MO'' = y$ , y según los triángulos  $PMO''$  y  $P'MO''$  tenemos que

$$\frac{-u}{u'} = \frac{O''P'}{O''P}.$$

Pero aproximadamente  $O''P = -s$  y  $O''P' = s$ , de donde se deduce que

$$\frac{s'}{s} = \frac{u}{u'}.$$

Poniendo este valor de  $s'/s$  en (3) obtenemos otra expresión del aumento lateral:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{u}{u'}. \quad (3a)$$

De la correlación (3a) obtenemos:

$$y'n'u' = ynu. \quad (4)$$

El producto  $ynu$  recibe el nombre de *invariante de Lagrange—Helmholtz*.

El ángulo  $-u$  es el ángulo bajo el cual se ve el objeto  $y$  desde la distancia  $-s$ , y el  $u'$  es el ángulo bajo el cual se ve este mismo objeto desde la distancia  $s'$ . Se llama *aumento angular*  $\gamma$  la magnitud

$$\gamma = \frac{\text{tg } u'}{\text{tg } u}. \quad (5)$$

Dentro de la aproximación que hemos convenido se pueden sustituir las tangentes por los propios ángulos, y entonces obtenemos que

$$\gamma = \frac{u'}{u}. \quad (5a)$$

Hallemos ahora qué relación existe entre los aumentos laterales y angulares. Por las fórmulas (3a) y (5a) tenemos:

$$\beta = \frac{n}{n'} \frac{1}{\gamma}. \quad (6)$$

Como para un par de sustancias dado  $n/n'$  es una magnitud constante, el aumento lateral es inversamente proporcional al angular.

Examinemos también el llamado *aumento longitudinal*. Supongamos que el objeto se traslada a lo largo del eje óptico un espacio  $dx$ , en este caso su imagen se trasladará un espacio  $dx'$ . Se llama aumento longitudinal  $\alpha$  la razón

$$\alpha = \frac{dx'}{dx}. \quad (7)$$

Por la fórmula de Newton (4c) del § 315 tenemos que

$$xx' = ff'.$$

La derivación de esta función nos da:

$$x dx' + x' dx = 0,$$

como resultado de lo cual, para el aumento longitudinal, obtenemos

$$\alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x}. \quad (8)$$

Hallemos la relación que existe entre los tres aumentos: lateral  $\beta$ , angular  $\gamma$  y longitudinal  $\alpha$ . Para esto utilizaremos las correlaciones (2) y (2a), según las cuales

$$\beta^2 = \frac{x'}{x} \frac{f}{f'},$$



pero por la fórmula (9) del § 315 tenemos que  $\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$ , de donde hallamos que

$$\beta^2 = -\frac{x'}{x} \frac{n}{n'}$$

De las expresiones (8) y (9) obtenemos:

$$\alpha = \frac{n'}{n} \beta^2.$$

Y finalmente advertimos que, por (6),  $\frac{n'}{n} \beta = \frac{1}{\gamma}$ ; lo que nos da la relación buscada entre  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ :

$$\alpha = \frac{\beta}{\gamma}.$$

§ 317. Lentes delgadas. Se llama lente óptica un cuerpo de sustancia transparente homogénea limitado por superficies de las cuales una, por lo menos, tiene radio de curvatura diferente de cero. Por lo general las superficies que sirven de límites a las lentes son

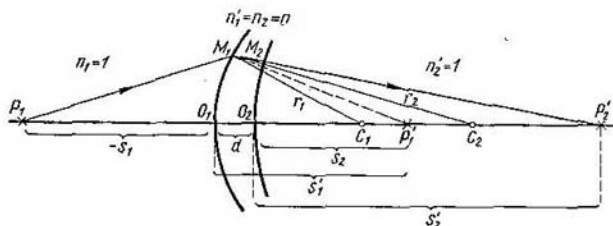


Fig. 238. Refracción de los rayos en una lente delgada.

esféricas. Nosotros nos ocuparemos exclusivamente de este tipo de lentes. Las lentes que se utilizan para la luz visible se hacen de vidrio; las que se emplean para los rayos ultravioletas son de cuarzo. Para los rayos infrarrojos se suelen utilizar lentes de cuarzo, de sal gema, de KCl etc.

En los §§ 315 y 316 estudiamos la refracción de la luz en una superficie esférica. La refracción de la luz en una lente se puede considerar como su refracción sucesiva en dos superficies esféricas. Supongamos que  $O_1$  y  $O_2$  representan dos superficies esféricas, cuyos respectivos radios son  $r_1$  y  $r_2$ , que se encuentran separadas entre sí por una distancia  $d$  (fig. 238). Llamaremos eje óptico principal de este sistema de superficies a la recta que pasa por los centros  $C_1$  y  $C_2$ . Supongamos que entre las dos superficies se encuentra una sustancia cuyo índice de refracción es  $n$  y que fuera de ellas está el aire, cuyo índice de refracción consideraremos igual a la unidad. Señalando las magnitudes

correspondientes a la primera superficie con el subíndice 1 y las relativas a la segunda con el subíndice 2, y conservando para todo lo demás las designaciones adoptadas en los §§ 315 y 316, tendremos:

$$n_1 = n_2' = 1, \quad n_1' = n_2 = n. \quad (1)$$

Sea  $P_1$  un objeto puntual situado en el eje óptico principal del sistema a una distancia  $-s_1$  de la primera superficie refringente. Si únicamente existiera esta superficie refractora la imagen se formaría en el punto  $P_1'$ , a una distancia  $s_1'$  de  $O_1$ . Esta imagen debe considerarse como objeto para la segunda superficie refractora. Dicho objeto se encuentra a la distancia  $s_2$  del vértice  $O_2$  de la segunda superficie refractora y su imagen se obtiene en un punto  $P_2'$  que se encuentra a una distancia  $s_2'$  del punto  $O_2$ . Pero  $P_2'$  será al mismo tiempo la imagen del objeto  $P_1$  producida por el conjunto de ambas superficies refringentes.

Para hallar el sitio en que debe encontrarse el punto  $P_2'$  aplicaremos la fórmula (4) del § 315 a cada una de las superficies refringentes. Si se cumplen las correlaciones (1) obtenemos:

$$\frac{n}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{n-1}{r_1}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{s_2'} - \frac{n}{s_2} = \frac{1-n}{r_2}. \quad (3)$$

En la fig. 238 vemos que entre  $s_2$  y  $s_1'$  tiene lugar la correlación:

$$s_2 = s_1' - d.$$

Estudiaremos el caso de una *lente delgada*, es decir, de una lente en la cual la distancia  $d$  entre las superficies refringentes es pequeña con respecto a las distancias que la separan del objeto y de la imagen. En este caso  $s_2 = s_1'$  y, según (2), obtenemos:

$$\frac{n}{s_2} = \frac{n}{s_1'} = \frac{1}{s_1} + \frac{n-1}{r_1}.$$

Poniendo este valor de  $n/s_2$  en (3), tendremos:

$$\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_1} - \frac{n-1}{r_1} = \frac{1-n}{r_2}. \quad (4)$$

Al estudiar las lentes delgadas llamaremos  $s$  y  $s'$  a las distancias respectivas hasta el objeto y hasta la imagen. En estas condiciones, y de acuerdo con (4), tendremos:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (5)$$

Para una lente dada pueden conocerse los radios de curvatura de sus superficies  $r_1$  y  $r_2$  y el índice de refracción  $n$  de la sustancia de que está hecha. Por esta razón en el segundo miembro de la igual-

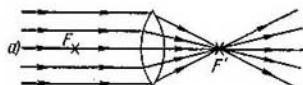
dad (5) tendremos la magnitud constante

$$\Phi = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (6)$$

que se llama *potencia óptica de la lente*. Como puede verse, la potencia óptica de una lente delgada es igual a la suma de las potencias de sus dos superficies refractoras  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ .

La fórmula (5) relaciona la posición del objeto con la de la imagen producida por la lente delgada.

Repitiendo los razonamientos que al tratar de una sola superficie refringente explicamos en el § 315 hallamos el valor de las distancias focales de las lentes delgadas



a)

$$f' = -f = \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{(n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}.$$

(7)

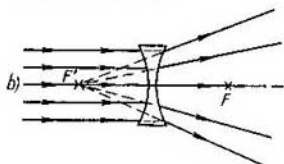


Fig. 239. Lentes: a, convergente; b, divergente.

en su foco imagen (fig. 239, a). Si  $\Phi$  es negativa tendremos una lente *divergente (negativa)* y todo haz de rayos paralelos que incida sobre ella formará un haz divergente después de refractado; las

El índice  $n$  es siempre mayor que la unidad, por consiguiente, el signo de la potencia óptica  $\Phi$  depende del signo que tenga la magnitud  $\left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ . Si  $\Phi$  es positiva tendremos una *lente convergente (positiva)*; todo haz de rayos paralelos que incida sobre esta lente después de refractado convergerá

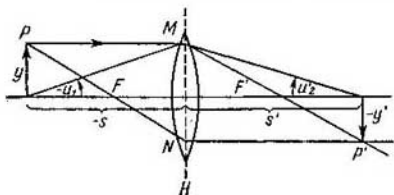


Fig. 240. Construcción de la imagen que produce una lente delgada.

prolongaciones de los rayos de este haz se cortarán en el foco imagen de la lente (fig. 239, b).

La imagen que produce una lente delgada puede construirse, lo mismo que en el caso de una sola superficie refringente, conociendo la marcha de los dos rayos siguientes (fig. 240): 1) del rayo  $PM$ ,

paralelo al eje óptico, que después de refractarse en la lente pasa por su foco imagen  $F'$ , y 2) del rayo  $PN$ , que pasa por el foco objeto  $F$ , el cual después de refractado seguirá en dirección paralela al eje óptico.

La posición del objeto  $y$  y de la imagen  $y'$  viene determinada respectivamente por los segmentos  $s$  y  $s'$ , tomados a partir del centro de la lente (o de uno de sus vértices). Estos segmentos están relacionados entre sí por la correlación:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \Phi,$$

siendo  $\Phi$  la potencia óptica de la lente.

Como demostraremos en el § 318 la ecuación de Lagrange—Helmholtz también es válida para las lentes. Esto da la posibilidad de relacionar el aumento lateral que produce la lente con las dimensiones de los segmentos  $s$  y  $s'$ . Por la invariante de Lagrange—Helmholtz, tenemos:

$$y' n'_2 u'_2 = y n_1 u_1.$$

Si la lente se encuentra en el aire  $n'_2 = n_1 = 1$  y de la invariante de Lagrange — Helmholtz se deduce que

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{u_1}{u'_2}.$$

Pero en la fig. 240 vemos que  $\frac{u_1}{u'_2} = \frac{s'}{s}$ , de donde obtenemos el aumento lateral

$$\beta = \frac{s'}{s}. \quad (8)$$

**§ 318. Sistema de superficies centradas. Planos principales.** Examinemos el caso de un sistema de superficies esféricas de radios arbitrarios que separan entre sí sustancias cuyos índices de refracción sean distintos. Un sistema de este tipo se llama *centrado* cuando los centros de curvatura de todas las superficies se encuentran en una misma recta.

Nos limitaremos, como anteriormente, a considerar los rayos paraxiales. La refracción de un haz luminoso en un sistema podemos estudiarla analizando sucesivamente sus refracciones en cada una de las superficies esféricas. En este caso la imagen producida por cada superficie antecedente servirá de objeto a la superficie consecuente. Como al refractarse en cada una de las superficies todo haz homocéntrico sigue siéndolo, dentro de los límites admitidos, también lo será después de pasar por todo el sistema. De esto se deduce que cuando el objeto es un punto el sistema produce con los rayos paraxiales una imagen también puntual.

Puede demostrarse que para los sistemas también es válida la invariante de Lagrange—Helmholtz [fórmula (4) del § 316]. Efectivamente, tomemos por separado las dos primeras superficies refringentes de nuestro sistema  $A_1B_1$  y  $A_2B_2$  (fig. 241). Llamemos  $n_1$  al

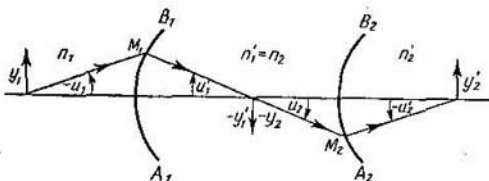


Fig. 241. Sistema de superficies refringentes centradas.

índice de refracción de la sustancia que se encuentra a la izquierda de la superficie  $A_1B_1$  y  $n'_1$  al de la sustancia que se encuentra a su derecha. Análogamente llamemos  $n_2$  y  $n'_2$  respectivamente a los índices de refracción respectivos de las sustancias separadas por la superficie  $A_2B_2$ . Como entre estas dos superficies hay una misma sustancia, tendremos:

$$n'_1 = n_2. \quad (1)$$

Veamos lo que ocurre con el rayo  $M_1M_2$  que después de sufrir la refracción en la superficie  $A_1B_1$  incide sobre la  $A_2B_2$ . Llamemos  $u'_1$  y  $u_2$  a los ángulos que este rayo forma con el eje óptico. Como puede verse en la fig. 241:

$$u'_1 = u_2. \quad (2)$$

Finalmente llamemos  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y'_1$  e  $y'_2$  a las longitudes de los objetos y de sus respectivas imágenes correspondientes a las superficies  $A_1B_1$  y  $A_2B_2$ . Como la imagen que produce la superficie  $A_1B_1$  sirve de objeto a la superficie  $A_2B_2$ , tendremos que

$$y'_1 = y_2. \quad (3)$$

Ahora podemos escribir la invariante de Lagrange-Helmholtz con respecto a cada una de las superficies  $A_1B_1$  y  $A_2B_2$ :

$$n_1 y_1 u_1 = n'_1 y'_1 u'_1,$$

$$n_2 y_2 u_2 = n'_2 y'_2 u'_2.$$

Partiendo de estas dos igualdades y aplicando las correlaciones (1), (2) y (3), obtenemos:

$$n_1 y_1 u_1 = n'_1 y'_1 u'_1 = n_2 y_2 u_2 = n'_2 y'_2 u'_2.$$

Un sistema de igualdades semejante puede escribirse para los demás pares de superficies contiguas sucesivas hasta llegar a la última,

a la cual llamaremos superficie  $k$ ; como resultado obtendremos:

$$n_1 y_1 u_1 = n'_1 y'_1 u'_1 = n_2 y_2 u_2 = \dots = n'_h y'_h u'_h. \quad (4)$$

Prescindiendo de todos los miembros intermedios de esta igualdad, hallamos:

$$n_1 y_1 u_1 = n'_h y'_h u'_h. \quad (4a)$$

En esta expresión  $y_1$  representa las dimensiones del objeto que se encuentra delante del sistema, o  $y'_h$  las dimensiones de la imagen que se forma después de pasar la luz por todo el sistema. De esta forma, la igualdad (4a) es la invariante de Lagrange—Helmholtz correspondiente al sistema en su conjunto.

Todas las demás correlaciones válidas para el sistema pueden establecerse estudiando también la refracción sucesiva de los rayos en

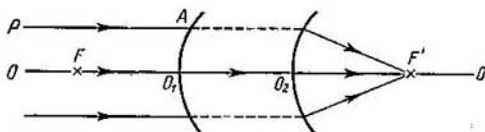


Fig. 242. Focos principales de un sistema centrado.

cada una de las superficies. No obstante, algunas propiedades generales del sistema se pueden establecer sin necesidad de un estudio tan detallado.

Sea por ejemplo un sistema compuesto por una serie de superficies esféricas contradas (fig. 242). La recta  $OO'$ , que pasa por los centros de curvatura de todas las superficies, es el eje óptico del sistema. Examinemos lo que ocurre con el rayo  $PA$  que incide sobre el sistema paralelamente al eje óptico  $OO'$ . Después de atravesar el sistema, este rayo (o su prolongación) cortará al eje óptico en un determinado punto  $F'$ . El rayo que pasa a lo largo del eje óptico atraviesa el sistema sin sufrir refracción, puesto que incide en las superficies refringentes normalmente. Por consiguiente, los dos rayos  $PA$  y  $OO'$  después de pasar por el sistema se cortarán en el punto  $F'$ . Y como los rayos paraxiales homocéntricos siguen siendo homocéntricos después de atravesar el sistema, todos los rayos paralelos al eje óptico se cortarán en un mismo punto  $F'$  después de refractarse. Razonando análogamente podemos determinar la existencia de un punto  $F$  que tenga la propiedad de que los rayos que partan de él formen un haz de rayos paralelos al eje óptico después de refractarse en el sistema. Los puntos  $F$  y  $F'$  son los focos principales del sistema. De esta forma el sistema de superficies refringentes centradas tiene dos focos principales, lo mismo que si fuera una sola superficie.

Volvamos a examinar el caso del rayo  $PA$  paralelo al eje óptico  $OO'$  (fig. 243), suponiendo que pasa a una distancia arbitraria  $h$  de dicho eje. Después de refractarse dará lugar al rayo  $B'F'$ , que pasará por el foco imagen  $F'$  del sistema. Cualquier rayo que pase por el foco objeto  $F$  del sistema producirá un rayo paralelo al eje óptico después de refractarse. La distancia que hay entre este rayo y el eje óptico  $OO'$  depende de la inclinación que tenga el rayo  $FB$ . Puede hacerse que esta inclinación del rayo  $FB$  sea tal que el rayo  $A'P'$  que le corresponda pase a una distancia  $h$  del eje. Los rayos  $PA$  y  $FB$  (o sus prolongaciones) se cortarán en un punto  $M$  determinado, mientras que los rayos  $A'P'$  y  $B'F'$  se cortarán en el punto  $M'$ . La posición

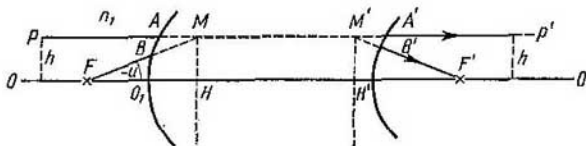


Fig. 243. Planos principales  $MH$  y  $M'H'$  de un sistema.

de los puntos  $M$  y  $M'$  viene determinada por la propia marcha de los rayos antes de incidir sobre el sistema y después de salir de él. Para hallar estos puntos no es necesario conocer la marcha de los rayos dentro del sistema, por esto en la fig. 243 no se da esta marcha: las líneas punteadas representan exclusivamente las prolongaciones de los rayos que van fuera del sistema.

Los puntos  $M$  y  $M'$  se encuentran a igual distancia  $h$  del eje óptico. Hagamos pasar por estos puntos  $M$  y  $M'$  sendos planos perpendiculares al eje  $OO'$ ; estos planos reciben el nombre de *planos principales del sistema*. Los puntos  $H$  y  $H'$  de intersección de los planos principales con el eje óptico se llaman *puntos principales del sistema*. Como los puntos  $M$  y  $M'$  son los de intersección de un mismo par de rayos (o de sus prolongaciones), son puntos conjugados del sistema. De aquí se deduce la siguiente definición de los planos principales: *los planos principales de un sistema son dos planos conjugados cuyos correspondientes puntos conjugados se encuentran a la misma distancia  $h$  del eje óptico*.

Conociendo la posición de los planos y focos principales de un sistema se puede hallar la situación de la imagen que dicho sistema produce partiendo de una posición dada del objeto. Efectivamente, supongamos que el sistema viene dado por sus planos principales  $H$  y  $H'$  y por sus focos principales  $F$  y  $F'$  (fig. 244). Las distancias que determinan las posiciones del objeto, de su imagen y de los focos principales las tomaremos respectivamente a partir del plano principal

objeto y del plano principal imagen. En la fig. 244 la posición del punto objeto viene determinada por el segmento  $MP = -s$ . El rayo  $PM$ , paralelo al eje óptico, después de experimentar la refracción en el sistema pasa por el foco principal imagen  $F'$ . De acuerdo con la propiedad, indicada anteriormente, de los planos principales este rayo (o su prolongación) cortará al plano principal imagen en el punto  $M'$ , que se encontrará a la misma distancia  $h = H'M'$  del eje óptico que el punto  $M$ . En calidad de segundo rayo procedente

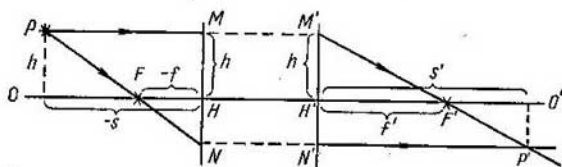


Fig. 244. Construcción de la imagen que produce un sistema dado por sus planos principales  $MH$  y  $M'H'$  y por sus focos principales  $F$  y  $F'$ .

del objeto tomaremos el que pasa por el foco principal objeto  $F$ . Este rayo (o su prolongación) se encontrará con el plano principal objeto en el punto  $N$  y con el plano principal imagen en el punto  $N'$ , ambos a la misma distancia del eje óptico. Después de refractarse en el sistema el rayo  $PN$  seguirá la dirección  $N'P'$ , paralela al eje óptico. El punto de intersección de los rayos  $M'P'$  y  $N'P'$  determinará la posición de la imagen  $P'$ .

De acuerdo con los triángulos  $NPM$  y  $NPH$  tenemos:

$$\frac{HF}{MP} = \frac{NH}{NM},$$

pero  $MP = -s$  y  $HF = -f$ , siendo  $f$  la distancia focal objeto del sistema, por lo que como resultado obtenemos:

$$\frac{f}{s} = \frac{NH}{NM}. \quad (5)$$

Análogamente, de acuerdo con los triángulos  $M'P'N'$  y  $M'H'F'$  tenemos:

$$\frac{f'}{s'} = \frac{M'H'}{M'N'}. \quad (6)$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (5) y (6), hallamos:

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = \frac{M'H'}{M'N'} + \frac{NH}{NM}. \quad (7)$$

Pero por la propiedad de los planos principales que indicamos antes

$$M'N' = NM \quad \text{y} \quad NH = M'N' - M'H',$$



teniendo en cuenta estas correlaciones, la igualdad (7) toma la forma:

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = \frac{M'H' + NH}{M'N'} = \frac{M'N'}{M'N'}$$

En definitiva

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1. \quad (8)$$

La igualdad (8) da la posibilidad de hallar la posición de la imagen cuando se da la del objeto (es decir,  $s$ ) y se conocen las distancias focales principales del sistema y las posiciones que ocupan sus planos principales. La igualdad (8) coincide con la (4b) del § 315 deducida

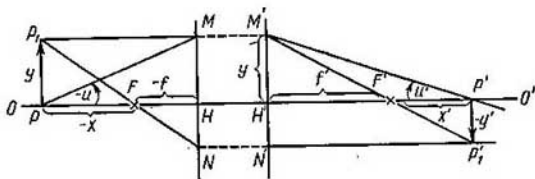


Fig. 245. Esquema para deducir el aumento lateral que produce un sistema.

para una sola superficie refringente. Análogamente puede demostrarse que para los sistemas se conservan las demás correlaciones deducidas en los §§ 315 y 316 para una sola superficie refringente, siempre que todas aquellas distancias que cuando se trata de una sola superficie refringente se toman desde su vértice, se tomen en el sistema a partir de sus planos principales. Demostremos, por ejemplo, que la expresión que se obtiene para el aumento lateral  $\beta$  de un sistema coincide con la expresión (2a) del § 316. Llamemos  $x$  y  $x'$  a las distancias desde el objeto y su imagen hasta los focos principales objeto e imagen respectivamente. Sea  $y$  la longitud del objeto (fig. 245) e  $y'$  la de la imagen. En estas condiciones según los triángulos  $P'P'F'$  y  $H'M'F'$  tenemos:

$$\frac{-y'}{M'H'} = \frac{x'}{f'}$$

Por la propiedad fundamental de los planos principales  $M'H' = y$ , de donde el aumento lateral  $\beta$  será

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f'} \quad (9)$$

Análogamente y de acuerdo con los triángulos  $PP_1F$  y  $HNF$  hallamos la segunda expresión de  $\beta$ :

$$\beta = -\frac{f}{x} \quad (9a)$$

De la comparación de las igualdades (9) y (9a) se deduce que la fórmula de Newton

$$xx' = ff'$$

es válida para el sistema.

Estudiemos el caso en que el objeto se encuentra en el plano principal objeto. En este caso  $x = -f$  y por la fórmula de Newton obtenemos que  $x' = -f'$ , es decir, la imagen se encontrará en el plano principal imagen, y de acuerdo con la fórmula (9) tenemos que  $\beta = +1$ . De esta forma podemos dar una nueva definición de los planos principales: *los planos principales son aquellos planos conjugados del sistema a los que corresponde un aumento lateral igual a +1*.

Las distancias focales de una superficie refringente se toman desde su vértice. De aquí, y teniendo en cuenta las condiciones que determinan la posición de los planos principales ( $x = -f$  y  $x' = -f'$ ), se deduce: *que cuando se trata de una sola superficie refringente ambos planos principales coinciden entre sí y con el plano tangente a la superficie refringente en su vértice*.

§ 319. Posiciones de los focos y de los planos principales de un sistema. Un sistema centrado puede considerarse dado si se conocen los radios de curvatura de las superficies refringentes, la distancia que hay entre estas últimas y los índices de refracción de todas las sustancias limitadas por ellas. Los planos principales de cada una

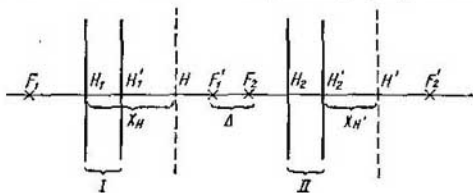


Fig. 246. Posiciones de los planos y focos principales de un sistema centrado.

de las superficies refractoras, de acuerdo con lo expuesto en el párrafo anterior, coinciden con el plano tangente que pasa por el vértice de dicha superficie. Las distancias focales principales de las distintas superficies refringentes pueden calcularse por las fórmulas (7) y (8) del § 315. Con estos datos se pueden hallar las posiciones de los planos y de los focos principales de todo el sistema.

Sean dos sistemas centrados I y II (fig. 246) dados cada uno por sus planos principales y por sus distancias focales principales  $f_1, f_1'$  y  $f_2, f_2'$ . La disposición mutua de estos dos sistemas la determinamos por la distancia  $\Delta$  que hay entre el foco principal imagen  $F_1'$  del sistema I y el foco principal objeto  $F_2$  del sistema II. Examinando

sucesivamente el paso del rayo por ambos sistemas se pueden hallar las distancias focales principales  $f$  y  $f_1$  del sistema conjunto que forman y la posición de sus planos principales (véase la letra pequeña). Para las distancias focales principales obtenemos:

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}, \quad f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta}. \quad (1)$$

La posición del plano principal objeto  $H$  de todo el sistema viene determinada por el segmento  $X_H$ , tomado a partir del plano principal objeto del sistema  $I$  (fig. 246):

$$X_H = f_1 \frac{\Delta + f_1 - f_2}{\Delta}. \quad (2)$$

Análogamente la posición del plano principal imagen de todo el sistema vendrá determinada por el segmento

$$X_{H'} = f_2' \frac{\Delta + f_1' - f_2'}{\Delta}, \quad (3)$$

tomado a partir del plano principal imagen del sistema  $II$ .

Cuando tanto los planos como los focos principales de las distintas superficies refringentes son conocidos, aplicando sucesivamente las fórmulas (1), (2) y (3) podemos hallar los planos y focos principales de cualquier sistema centrado complejo.

Estudiemos varios casos particulares.

1. Caso de una lente gruesa. Supongamos que una lente gruesa está limitada por dos superficies esféricas  $AB$  y  $A'B'$  (fig. 247) cuyos

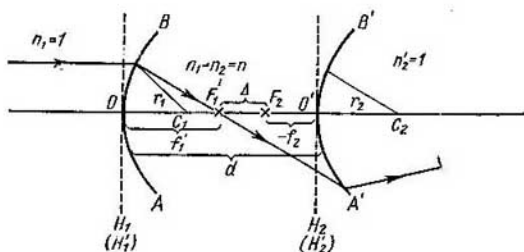


Fig. 247. Determinación de los focos y planos principales de una lente gruesa.

radios de curvatura son respectivamente  $r_1$  y  $r_2$ , que se encuentran separados entre sí por una distancia  $d$ . El índice de refracción de la sustancia comprendida entre las superficies  $AB$  y  $A'B'$  lo designaremos con la letra  $n$ . Supongamos que la lente se encuentra en el aire, cuyo índice de refracción consideraremos que es igual a la unidad. Los planos principales de la superficie primera y segunda

coinciden con los planos tangentes a las superficies refringentes en los puntos  $O$  y  $O'$  (en la fig. 247 se representan con líneas punteadas).

Comparemos entre sí las distancias focales objeto e imagen de la lente. Aplicando la fórmula (9) del § 315, para las superficies esféricas primera y segunda tendremos:

$$\frac{f'_1}{f_1} = -\frac{n'_1}{n_1} = -n \quad \text{y} \quad \frac{f'_2}{f_2} = -\frac{n'_2}{n_2} = -\frac{1}{n},$$

de donde se deduce que

$$\frac{f'_1 f'_2}{f_1 f_2} = \frac{n'_1 n'_2}{n_1 n_2} = \frac{n}{n} = 1.$$

Basándonos en esta igualdad y en la fórmula (1) llegamos a la conclusión de que las distancias focales objeto e imagen de la lente (rodeada de un medio homogéneo) son iguales en magnitud y tienen signo diferente:\*)

$$f = -f'.$$

De acuerdo con la definición de potencia de una superficie refringente [fórmula (10) del § 315) por potencia de una lente (o de un sistema centrado de lentes) que se encuentra en un medio homogéneo de índice de refracción  $n_0$  se entenderá la magnitud

$$\Phi = \frac{n_0}{f'} = -\frac{n_0}{f}.$$

En nuestro caso  $n_0 = n_1 = n'_2 = 1$  y

$$\Phi = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}.$$

Hallemos, pues, la potencia  $\Phi$  de la lente. Por la fórmula (1)

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}.$$

Pero por la fig. 247

$$\Delta = d - f'_1 + f_2, \quad (4)$$

de donde para la potencia de la lente hallamos que

$$\Phi = \frac{1}{f'} = -\frac{\Delta}{f'_1 f'_2} = \frac{d - f'_1 + f_2}{f'_1 f'_2}$$

o

$$\Phi = -\frac{f_2}{f'_1 f'_2} + \frac{1}{f'_2} - \frac{d}{f'_1 f'_2}.$$

\*) La igualdad  $f = -f'$ , donde  $f$  y  $f'$  son las distancias focales principales, no sólo se cumple cuando se trata de una lente, sino también en el caso de cualquier sistema centrado de lentes que se encuentre en un medio homogéneo. Para convencerse de esto no hay más que aplicar las fórmulas (6) y (6a) y tener en cuenta que para cualquier lente cuyo número de orden sea  $k$  tendrá lugar la igualdad  $f_k = -f'_k$ .

Por lo expuesto

$$\frac{f_2}{f'_2} = -\frac{n_2}{n_1} = -n.$$

Poniendo este valor de  $f_2/f'_2$  en la expresión de  $\Phi$ , obtenemos

$$\Phi = \frac{n}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f'_2},$$

pero  $\frac{n}{f_1} = \Phi_1$  y  $\frac{1}{f_2} = \Phi_2$  donde  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son las potencias respectivas de la primera y de la segunda superficie refringente de la lente. Utilizando estas correlaciones obtenemos en definitiva la potencia  $\Phi$  de la lente gruesa:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2. \quad (5)$$

Para determinar la posición del plano principal objeto de la lente gruesa utilizaremos la fórmula (2). Poniendo en ella en lugar de  $\Delta$  su valor según (4) obtenemos:

$$X_H = f_1 \frac{d}{\Delta},$$

o escrito de otra forma

$$X_H = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \frac{d}{f_2}.$$

La magnitud  $f_1 f_2 / \Delta$ , por la fórmula (1), es igual a la distancia focal objeto de la lente, de donde obtenemos que

$$X_H = f \frac{d}{f_2}.$$

Teniendo en cuenta que  $f = -\frac{1}{\Phi}$ , siendo  $\Phi$  la potencia de la lente, y que  $\frac{1}{f_2} = -\frac{\Phi_2}{n}$ , obtenemos para  $X_H$  la siguiente expresión definitiva:

$$X_H = \frac{d}{n} \frac{\Phi_2}{\Phi}. \quad (6)$$

La magnitud  $X_H$  representa la distancia desde el vértice  $O$  de la lente hasta su plano principal objeto.

De manera análoga hallamos la posición del plano principal imagen de la lente. Por la fórmula (3) tenemos:

$$X_{H'} = f'_2 \frac{d}{\Delta} \quad \text{o} \quad X_{H'} = \frac{f'_1 f'_2}{\Delta} \frac{d}{f'_1}.$$

Aplicando la fórmula (1) podemos escribir esta expresión de la forma

$$X_{H'} = -f' \frac{d}{f'_2}.$$

Teniendo en cuenta que  $f_1' = \frac{1}{\Phi}$  y  $f_1 = \frac{n}{\Phi}$ , obtenemos la siguiente expresión definitiva de  $X_{H'}$ :

$$X_{H'} = -\frac{d}{n} \frac{\Phi_1}{\Phi}. \quad (6a)$$

La magnitud  $X_{H'}$  es la distancia desde el vértice  $O'$  hasta el plano principal imagen.

En la fig. 248 se da la posición de los planos principales  $H$  y  $H'$  de una lente biconvexa gruesa calculada por las fórmulas (6) y (6a).

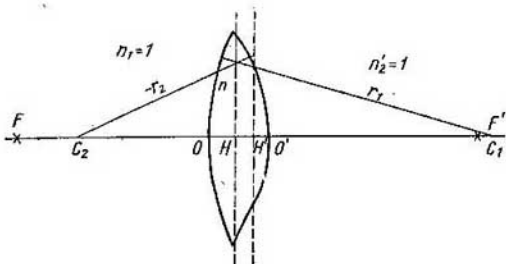


Fig. 248. Posiciones de los planos principales de una lente biconvexa gruesa.

Como puede verse ambos planos se encuentran dentro de la lente y, si los radios de curvatura  $r_1$  y  $r_2$  no son iguales, a distintas distancias con respecto a sus respectivas superficies. Las dos distancias focales

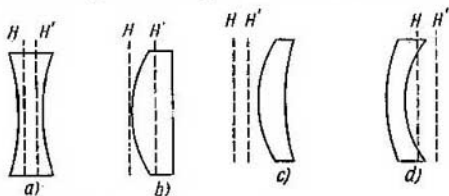


Fig. 249. Posiciones de los planos principales de las lentes: a, biconcava; b, planoconvexa; c, menisco convergente; d, menisco divergente.

y  $f'$  son iguales numéricamente pero, como hay que tomarlas a partir de los planos principales correspondientes, resulta que el foco objeto no se encuentra a la misma distancia del vértice  $O$  de la lente que el foco imagen de su vértice  $O'$ .

De forma análoga se puede hallar la posición de los planos y focos principales de cualquier clase de lentes gruesas. En la fig. 249 se

representan los siguientes casos : a) lente bicóncava, b) lente planoconvexa, c) menisco convergente (positivo) y d) menisco divergente (negativo).

Cuando se trata de lentes delgadas la distancia entre sus superficies se puede considerar aproximadamente igual a cero, y entonces la fórmula (5) nos da:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

es decir, obtenemos el mismo resultado que hallamos anteriormente (§ 317), la potencia de una lente delgada es igual a la suma de las potencias de los dioptrios que la forman.

La potencia de las lentes se mide en *dioptrías*, tomándose como una dioptría la potencia de una lente cuya distancia focal es igual a 1 m.

2. Caso de dos lentes delgadas situadas entre sí a una distancia finita. Tomemos dos lentes delgadas cuyas potencias sean  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  y que estén situadas a una distancia  $d$  una de otra (fig. 250). Basándonos

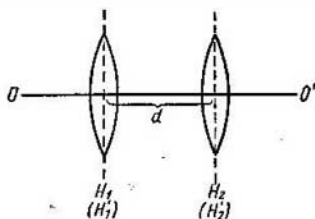


Fig. 250. Dos lentes delgadas.

en lo expuesto anteriormente podemos considerar cada una de estas lentes como una superficie refringente de la misma potencia que ella tiene. Suponiendo que las lentes se encuentran en el aire (cuyo índice de refracción es igual a la unidad), por la fórmula (5) obtenemos que la potencia  $\Phi$  del sistema formado por ambas lentes delgadas será:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2. \quad (7)$$

Por las fórmulas (6) y (6a) hallamos la magnitudes  $X_H$  y  $X_{H'}$ , que determinan las posiciones de los planos principales del sistema:

$$X_H = d \frac{\Phi_2}{\Phi}, \quad X_{H'} = -d \frac{\Phi_1}{\Phi}. \quad (8)$$

La magnitud  $X_H$  deberá ser tomada a partir de la primera lente y la  $X_{H'}$  a partir de la segunda.

Como ejemplo examinemos el caso del llamado ocular de Huygens, que consta de dos lentes convergentes delgadas (fig. 251) de las cuales una tiene

la distancia focal igual a  $a$  y la otra la tiene tres veces mayor:

$$f_2 = a, \quad f_1 = 3a.$$

La distancia  $d$  entre las lentes es igual a  $2a$ .

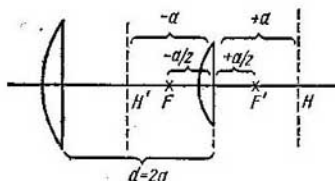


Fig. 251. Ocular de Huygens.

Determinemos la posición de los planos y de los focos principales de este sistema.

Las potencias de ambas lentes serán:

$$\Phi_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{3a}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{a}.$$

La potencia del conjunto del sistema, según (7), será:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2 = \frac{1}{3a} + \frac{1}{a} - \frac{2a}{3a^2} = \frac{2}{3a}.$$

De aquí obtenemos que las distancias focales del sistema serán:

$$f' = -f = \frac{1}{\Phi} = \frac{3}{2}a.$$

Las posiciones de los planos principales del sistema las hallamos por las fórmulas (8):

$$X_H = d \frac{\Phi_2}{\Phi} = 2a \frac{3a}{2a} = 3a,$$

$$X_{H'} = -d \frac{\Phi_1}{\Phi} = -2a \frac{3a}{2 \cdot 3a} = -a.$$

Por estas expresiones vemos que el plano principal objeto  $H$  estará fuera del sistema, a la derecha de la segunda lente y a una distancia  $a$  de ella; el plano principal imagen  $H'$  se encontrará entre las dos lentes. Los focos principales, como puede verse claramente, están situados simétricamente con respecto a la segunda lente, es decir, a iguales distancias de ella  $+a/2$  y  $-a/2$ .

§320. Sistema telescópico. Se llama telescópico un sistema centrado formado a su vez por dos sistemas  $I$  y  $II$  (fig. 252) situados de tal manera que el foco principal imagen  $F'_1$  del  $I$  coincide con el foco principal objeto  $F_2$  del  $II$ . En este caso  $\Delta = 0$ , y por las fórmulas deducidas en el § 319 se obtiene que los focos y los planos principales del sistema telescópico se encuentran en el infinito y que su



potencia  $\Phi$  es igual a cero. Un haz de rayos paralelos que incide sobre un sistema telescópico saldrá de él en forma de haz paralelo.

Para construir la imagen que produce un sistema telescópico no sirve el procedimiento que indicamos en el § 318. Para esto hay que

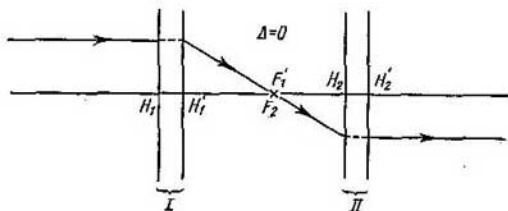


Fig. 252. Sistema telescópico.

proceder de la forma siguiente. Supongamos que el sistema telescópico (fig. 253) viene dado por las posiciones de los planos principales

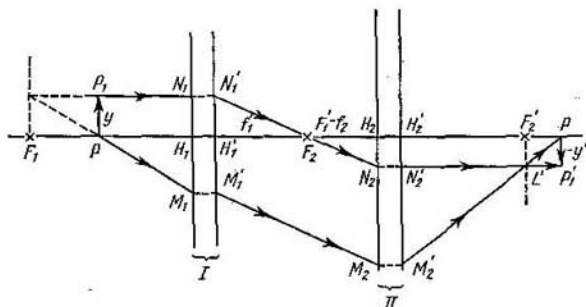


Fig. 253. Construcción de la imagen que produce un sistema telescópico.

$H_1$ ,  $H_1'$ , y  $H_2$ ,  $H_2'$  y de los focos  $F_1$ ,  $F_1'$  y  $F_2$ ,  $F_2'$  de los sistemas I y II que lo integran.

Estudiemos el caso en que el objeto  $y$  se encuentra entre el sistema I y su foco objeto  $F_1$ .

Hagamos pasar por el foco principal objeto  $F_1$  del sistema I un plano perpendicular al eje óptico. Este plano lo denominaremos plano focal principal del sistema I (en la fig. 253 se representa por una línea de puntos). Todo punto objeto situado en cualquier lugar de este plano focal después de refractarse en el sistema I dará

un haz de rayos paralelos que formará un ángulo determinado con el eje óptico.

Veamos lo que ocurre con dos rayos que parten del objeto  $y$ , eligiéndolos de manera que sus direcciones puedan ser halladas después de experimentar la refracción en el sistema telescópico. Como uno de estos rayos podemos tomar el  $P_1N_1$ , paralelo al eje óptico. Después de refractarse en el sistema  $I$  este rayo pasará por su foco principal imagen  $F'_1$  e irá a parar a un punto  $N_2$  del plano principal objeto  $H_2$  del sistema  $II$ . Como quiera que el foco imagen  $F'_1$  del sistema  $I$  es al mismo tiempo foco objeto del sistema  $II$ , el rayo  $N'_1F'_1W_2$  después de refractarse en este último sistema saldrá paralelo al eje óptico.

Como segundo rayo podemos elegir el  $PM_1$ , trazado en una dirección tal que su prolongación corte a la prolongación del rayo  $P_1N_1$  en un punto  $L$  que se encuentre en el plano focal principal  $F_1$ . En estas condiciones el rayo  $LPM_1$  después de refractarse en el sistema  $I$  producirá el rayo  $M'_1M_2$  paralelo al  $N'_1N_2$ . Esta circunstancia nos da la posibilidad de hallar la dirección del rayo que resulta del  $M'_1M_2$  después de experimentar la refracción en el sistema  $II$ . Efectivamente, como los rayos  $M'_1M_2$  y  $N'_1N_2$  son paralelos entre sí, después de la refracción en el sistema  $II$  deberán cortarse en el punto  $L'$  del plano focal principal  $F'_2$ . De esta forma hallamos la dirección del rayo  $M'_2L'$  producido por el  $PM_1$  después de refractarse en el conjunto del sistema telescópico. Este rayo  $M'_2L'$  cortará al eje óptico en el punto  $P'$ , que será la imagen del punto  $P$ . La imagen del segundo punto del objeto que examinamos, es decir, la del punto  $P_1$ , es fácil de encontrar razonando que deberá encontrarse en la intersección del rayo  $N'_2L'$  con la recta  $y'$ , trazada por el punto  $P'$  perpendicularmente al eje óptico. El punto  $P'_1$  de intersección de las dos rectas antedichas será la imagen del  $P_1$ . La imagen del objeto  $y$  en su conjunto será el segmento  $-y'$ .

Por la fig. 253 es fácil determinar el aumento lateral  $\beta$  que produce el sistema telescópico. Teniendo en cuenta que, por la construcción,  $y = H'_1N'_1$  y que  $-y' = H_2N_2$ , obtenemos:

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{H_2N_2}{H'_1N'_1}.$$

Además, por los triángulos  $H'_1N'_1F'_1$  y  $H_2N_2F_2$ , tenemos que

$$\frac{H_2N_2}{H'_1N'_1} = -\frac{f_2}{f'_1},$$

siendo  $f'_1$  y  $f_2$  respectivamente la distancia focal imagen del sistema  $I$  y la distancia focal objeto del sistema  $II$ . Como resultado tenemos que el aumento lateral del sistema telescópico será:

$$\beta = \frac{f_2}{f'};$$

y si el sistema se encuentra en el aire,  $f_2 = -f'_2$  y

$$\beta = -\frac{f'_2}{f_1}, \quad (1)$$

donde  $f'_2$  es la distancia focal imagen del sistema II. Por la fórmula (1) vemos que el aumento lateral del sistema telescópico viene determinado exclusivamente por la relación que existe entre las distancias focales principales de los sistemas que lo componen y no depende de la posición del objeto. Cualquiera que sea el lugar en que se encuentren el objeto y su imagen el aumento lateral de un sistema telescópico dado tiene siempre un mismo valor.

El aumento angular  $\gamma$  del sistema telescópico puede hallarse, basándose en la fórmula (6) del § 316, según la cual

$$\gamma = \frac{n}{n'} \frac{1}{\beta}. \quad (2)$$

Si nuestro sistema telescópico se encuentra en el aire,  $n = n' \cong 1$ , y por las fórmulas (2) y (1):

$$\gamma = -\frac{f_1}{f'_2}, \quad (3)$$

es decir, el aumento angular del sistema telescópico es numéricamente tanto mayor cuanto mayor sea la distancia focal principal del primer sistema y menor la distancia focal principal del segundo sistema.

§ 321. Defectos de los sistemas ópticos y procedimientos para corregirlos. Hasta ahora nos hemos limitado a estudiar los rayos paraxiales, es decir, aquellos que forman ángulos  $u$  pequeños con el eje óptico. En estos casos un objeto puntual produce con suficiente aproximación una imagen también puntual. Pero los valores pequeños de los ángulos  $u$  obligan a operar exclusivamente con haces luminosos comprendidos dentro de los límites de ángulos sólidos estrechos. La estrechez de los haces luminosos, como veremos en el § 324, conduce a su vez a que la iluminación dentro de los límites de la imagen sea pequeña. Por esto, desde el punto de vista práctico interesa emplear ángulos sólidos relativamente anchos, es decir, renunciar a la limitación que impone la condición de que sean paraxiales. Pero como consecuencia de esta renuncia el haz de rayos homocéntrico dejará de serlo después de sufrir la refracción en el sistema y la imagen de un objeto de dimensiones finitas tendrá una serie de defectos. Estudiemos sucintamente estos defectos y las posibilidades de corregirlos.

Tomemos una lente de potencia positiva. Valiéndonos de una pantalla opaca  $AB$  (fig. 254, *a*) con un orificio redondo (*diafragma* circular) aislemos un haz de rayos paraxiales procedentes de la fuente puntual  $P$ . Supongamos que los rayos de este haz se cortan en el punto  $P'$  situado a una distancia  $s'$  de la lente. Sustituyamos ahora el dia-

fragma circular por otro en forma anular  $CD$ ,  $EG$  (fig. 254, *b*). Este diafragma anular dejará pasar el haz de rayos marginales procedentes también de la fuente puntual  $P$ , comprendido entre los conos  $DPE$  y  $CPG$ . Los rayos marginales sufren una refracción relativamente mayor y, aunque la fuente  $P$  permanezca en el mismo sitio, su imagen

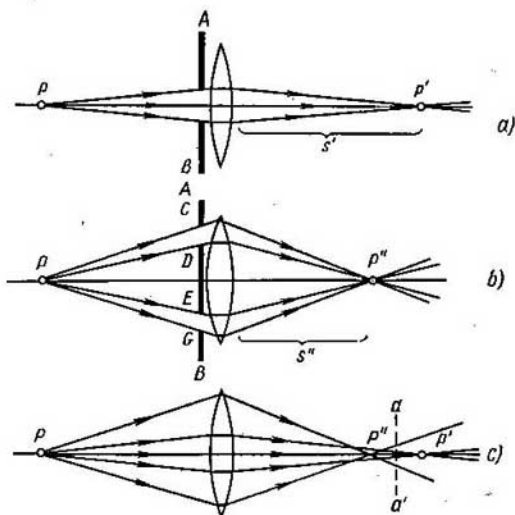


Fig. 254. Origen de la aberración esférica:

El foco de los rayos paraxiales (*a*) está más lejos que el foco de los rayos marginales (*b*).

$P''$  se encontrará ahora a una distancia  $s''$  menor que  $s'$ . La distancia  $\delta s = s'' - s'$  se llama *aberración esférica axial*. La existencia de la aberración esférica axial hace que la imagen carezca de nitidez. Efectivamente, si sobre la lente representada en la fig. 254, *c* incide un haz de rayos ancho, los rayos que forman ángulos  $u$  distintos con el eje óptico lo cortarán en diferentes puntos después de refractados. La sección del haz refractado por cualquier plano  $aa'$  toma la forma de un círculo de dimensiones finitas. Estas dimensiones serán mínimas en un punto medio determinado situado entre los focos  $P''$  y  $P'$  de los rayos marginales y paraxiales.

En las lentes convergentes la aberración esférica axial  $\delta s = s'' - s'$  es negativa.

En las lentes de potencia negativa (divergentes) los rayos marginales se refractan relativamente menos que los paraxiales, es decir, el foco de los rayos marginales se encuentra más lejos que el de los

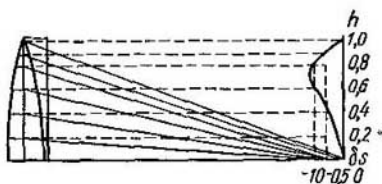


Fig. 255. Lente compuesta corregida de la aberración esférica.

rayos paraxiales, y la aberración esférica axial  $\delta s = s'' - s'$  es positiva. Esta circunstancia da la posibilidad de corregir la aberración esférica de los sistemas combinando lentes convergentes y divergentes, cuyas aberraciones tienen signos distintos.

En la fig. 255 se representa un sistema formado por dos lentes (solamente se ve la mitad superior), una de las cuales es convergente

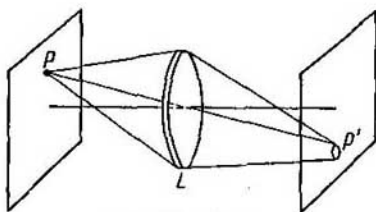


Fig. 256. Coma.

y la otra divergente. Las potencias de estas lentes se han elegido de tal manera que la lente compuesta que forman tiene potencia positiva. En la parte derecha de la fig. 255 se da la gráfica de la aberración esférica axial  $\delta s$  de la lente compuesta que examinamos para los rayos que pasan por ella a diferentes distancias  $h$  del eje óptico. La aberración axial ha sido compensada totalmente para los rayos marginales; para los rayos intermedios sigue existiendo una pequeña aberración residual.

La aberración axial puede estar totalmente corregida para los haces procedentes de un punto objeto situado en el eje óptico del sistema pero seguir existiendo para los objetos puntuales que se encuentran fuera de dicho eje. En este caso la sección del haz no axial por un plano perpendicular al eje óptico (fig. 256) toma la forma de man-

cha alargada parecida a un cometa. Por esta razón la aberración que afecta a los haces que no proceden de puntos situados sobre el eje recibe el nombre de *coma*, del griego κόμα que significa cabellera o cometa («estrella con cola»).

La aberración de coma no existe en aquellos sistemas corregidos de aberración esférica en que se cumple la llamada *condición de los senos* (o de Abbe). Esta condición se reduce a lo siguiente:

$$ny \operatorname{sen} u = n'y' \operatorname{sen} u' \quad (1)$$

(véase la letra pequeña al final del párrafo).

Los haces refractados por un sistema óptico suelen tener además de las aberraciones antedichas la que se llama *astigmatismo* (§ 313).

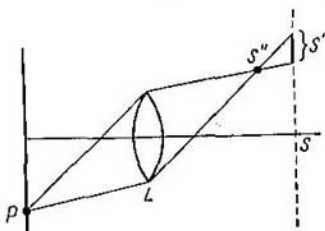


Fig. 257. Astigmatismo de los haces no axiales.

El astigmatismo puede existir incluso cuando se trata de haces estrechos, si es que éstos no proceden de puntos situados en el eje óptico. Estos haces astigmáticos producen dos líneas focales (fig. 257), una  $S'$ , que se encuentra en el plano del dibujo (línea focal de las secciones sagitales o focal sagital), y otra  $S''$ , perpendicular al plano del dibujo (línea focal de las secciones meridianas, focal meridional o focal tangencial). La distancia entre las dos líneas focales  $S'$  y  $S''$  es la diferencia astigmática. Cuando existe astigmatismo la imagen de un objeto puntual tiene la forma de una raya corta o de un círculo poco nítido (entre las dos focales).

El astigmatismo se manifiesta claramente cuando la imagen que se obtiene sobre una pantalla perpendicular al eje óptico es la de un objeto formado por líneas radiales y por una serie de circunferencias concéntricas centradas sobre el eje y situadas en un plano perpendicular a él. Si la pantalla se coloca en el plano de los focos de las secciones meridianas (focales  $S''$ ) el objeto toma el aspecto representado en la fig. 258, *a*. Las circunferencias darán imágenes nítidas, ya que las líneas focales al superponerse unas a otras no las deforman, pero las imágenes de los radios no son claras, siendo su nitidez tanto menor cuanto mayores son las distancias que separan del centro a los puntos de los radios. Si la pantalla se coloca en el plano de los focos

de las secciones sagitales (focales  $S'$ ) se obtiene la figura representada en la fig. 258, *b*. En este caso las imágenes de los radios son nítidas,

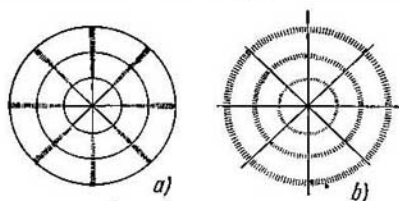


Fig. 258. Deformaciones de las imágenes debidas al astigmatismo: *a*, en el foco de las secciones meridianas; *b*, en el foco de las secciones sagitales.

mientras que las de las circunferencias no lo son, con la particularidad de que cuanto más lejos del centro se encuentran estas últimas menor es su nitidez.

El astigmatismo de un sistema puede corregirse eligiendo convenientemente los radios de curvatura y la potencia de las superficies

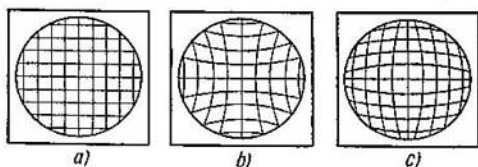


Fig. 259. Distorsión.

refringentes. Los sistemas corregidos de astigmatismo se llaman *anastigmáticos*.

Además de los tres defectos indicados (aberración esférica, coma y astigmatismo) existen otros, como la *curvatura de campo* de la imagen y la *distorsión*. La curvatura de campo consiste en que a un objeto plano perpendicular al eje del sistema le corresponde una imagen en forma de superficie curva. La *distorsión* es una deformación producida por la desigualdad del aumento lateral dentro de los límites del conjunto del campo de la imagen. Como resultado de la distorsión se altera la semejanza geométrica entre el objeto y su imagen. Si el objeto es una red de mallas cuadradas situada en un plano perpendicular al eje óptico (fig. 259, *a*), su imagen tendrá la forma de red de líneas curvas. Cuando el aumento crece al alejarse del eje, la imagen tiene la forma representada en la fig. 259, *b* (distorsión en corsé), mientras que si el aumento disminuye al

alejarse del eje la imagen tendrá el aspecto representado en la fig. 259, *c* (distorsión en barril). En la mayoría de los instrumentos de observación visual la distorsión no tiene gran importancia, pero cuando la imagen se utiliza para mediciones de precisión (mediciones geodésicas, fotografía aérea, etc.) se necesitan sistemas corregidos de distorsión.

Según el principio de Fermat (§ 253) todo rayo luminoso que se propaga entre dos puntos cumple la condición de que la longitud del camino óptico que recorre es extrema. Entre dos puntos solamente pueden pasar varios rayos si las longitudes de sus caminos ópticos son iguales. Por esto si una lente produce una imagen puntual  $P'$  de un objeto puntual  $P$  (fig. 260) quiere decir que los caminos

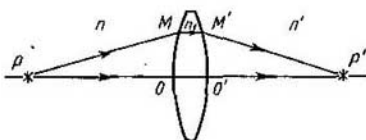


Fig. 260. Igualdad de los caminos ópticos de los rayos que parten de un punto objeto y que convergen en un punto imagen.

ópticos de todos los rayos que salen del objeto  $P$  y que convergen en la imagen  $P'$  son iguales. Recordemos que se llama camino óptico el producto del camino geométrico por el índice de refracción del medio en que se propaga el rayo. Supongamos que el índice de refracción del material de que está hecha la lente es  $n_1$  y que a la derecha y a la izquierda de ella se encuentran dos medios cuyos índices de refracción respectivos son  $n$  y  $n'$ . En estas condiciones la longitud óptica del rayo  $POO'P'$  será:

$$L_1 = n \cdot PO + n_1 \cdot OO' + n' \cdot O'P'.$$

De la misma forma obtendremos que el camino óptico del rayo  $PMM'P'$  será:

$$L_2 = n \cdot PM + n_1 \cdot MM' + n' \cdot M'P'.$$

La igualdad de los dos caminos ópticos tomará la forma

$$n \cdot PO + n_1 \cdot OO' + n' \cdot O'P' = n \cdot PM + n_1 \cdot MM' + n' \cdot M'P'; \quad (2)$$

esta igualdad puede cumplirse puesto que los tres índices de refracción  $n$ ,  $n_1$  y  $n'$  no son iguales entre sí. De esta forma, a pesar de que las longitudes geométricas de los rayos sean distintas, sus longitudes (caminos) ópticos pueden resultar iguales.

La igualdad de los caminos ópticos de los rayos significa que las vibraciones luminosas que se propagan a lo largo de todos los rayos convergen en la imagen  $P'$  en concordancia de fase.

Efectivamente, desde el punto objeto  $P$  todas las vibraciones salen en una misma fase. Queda por determinar cuáles serán las variaciones que experimentan las fases al propagarse las vibraciones desde el punto  $P$  hasta el  $P'$ . En la sustancia homogénea de la parte cuya longitud geométrica es  $l_i$  la fase de las vibraciones variará en una magnitud  $\Delta_i = 2\pi \frac{l_i}{\lambda_i}$ , donde  $\lambda_i$  es la longitud de onda en dicha sustancia. Por lo tanto, cuando el rayo recorre el camino  $POO'P'$  la fase



varía en la magnitud

$$\Delta_1 = 2\pi \left( \frac{PO}{\lambda} + \frac{OO'}{\lambda_1} + \frac{O'P'}{\lambda'} \right), \quad (3)$$

siendo  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda'$  las longitudes de onda correspondientes a las sustancias dentro de cuyos límites se encuentran los segmentos  $PO$ ,  $OO'$  y  $O'P'$ . Llamando  $\lambda_0$  a la longitud de onda en el vacío, tendremos:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_1} \quad \text{y} \quad \lambda' = \frac{\lambda_0}{n'}.$$

Poniendo estos valores de  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda'$  en (3), obtenemos:

$$\Delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n \cdot PO + n_1 \cdot OO' + n' \cdot O'P').$$

De la misma forma hallamos que cuando el rayo recorre el camino  $PMM'P'$  la fase variará en la magnitud  $\Delta_2$ :

$$\Delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n \cdot PM + n_1 \cdot MM' + n' \cdot M'P').$$

Comparando las expresiones obtenidas para  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  con la igualdad (2), hallamos que

$$\Delta_1 = \Delta_2.$$

Esta igualdad indica que la variación de fase que tiene lugar a lo largo de cualquier rayo que vaya desde el punto  $P$  hasta el  $P'$  es la misma. Por consiguiente, todos los rayos convergen en el punto  $P'$  en la misma fase.

En el caso en que el objeto tiene dimensiones finitas la imagen será nítida si los caminos ópticos de los rayos entre cada par de puntos conjugados del

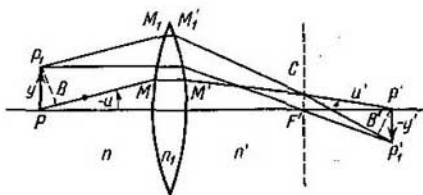


Fig. 261. Esquema para deducir la condición de los senos.

objeto y de su imagen son iguales. Examinemos otra vez el caso de una lente, hecha de material cuyo índice de refracción sea  $n_1$ , que se encuentre entre dos medios cuyos respectivos índices de refracción sean  $n$  y  $n'$  (fig. 261). Tomemos dos puntos  $P$  y  $P_1$  del objeto y supongamos que sus imágenes son los puntos  $P'$  y  $P'_1$ . Admitamos que los puntos  $P$  y  $P_1$  están cerca el uno del otro y que los puntos  $P'$  y  $P'_1$  también lo están. Veamos lo que ocurre con los rayos  $PMM'P'$  y  $P_1M_1M'_1P'_1$  cuyos segmentos  $PM$  y  $P_1M_1$  son paralelos entre sí. Estos dos rayos se cortan en el punto  $C$  del plano focal imagen  $F'$ . Tracemos desde los puntos  $P_1$  y  $P'$  las rectas  $P_1B$  y  $P'B'$ ; perpendiculares respectivamente a los segmentos  $PM$  y  $M'_1P'_1$ . Si por los puntos  $P_1$  y  $B$  pasara una onda plana (cuyos puntos vibran en concordancia de fase) los rayos normales a la superficie de esta onda llegarían al foco  $C$  también en concordancia de fase. De esto se deduce que los caminos ópticos de los segmentos  $P_1M_1M'_1C$  y  $BMM'C$  son iguales. Por

consiguiente, los caminos ópticos de los rayos  $PMM'P'$  y  $P_1M_1M'_1P'_1$  serán iguales entre sí cuando sean iguales los caminos ópticos de los segmentos  $PB$  y  $B'P'_1$ , es decir, cuando se cumpla la igualdad:

$$n \cdot PB = n' \cdot B'P'_1. \quad (4)$$

Por la fig. 261 tenemos:  $PB = y \operatorname{sen}(-u) = -y \operatorname{sen} u$ , siendo  $y$  la distancia entre los puntos  $P$  y  $P_1$  y  $u$  el ángulo que forma el rayo  $PM$  con el eje óptico. Si la distancia  $y'$  entre los puntos  $P'$  y  $P'_1$  es pequeña, tendremos que aproximadamente  $B'P'_1 = -y' \operatorname{sen} u'$ , donde  $u'$  es el ángulo que forma el rayo  $M'P'$  con el eje óptico. Poniendo estos valores de  $PB$  y  $B'P'_1$  en (4), hallamos:

$$ny \operatorname{sen} u = n'y' \operatorname{sen} u', \quad (5)$$

expresión que representa la condición de los senos que indicamos en el texto fundamental del presente párrafo. En el caso en que los rayos sean paraxiales los ángulos  $u$  y  $u'$  serán pequeños y, aproximadamente,  $\operatorname{sen} u \cong u$  y  $\operatorname{sen} u' \cong u'$ ; en este caso la condición de los senos (5) toma la forma de la invariante de Lagrange-Helmholtz:

$$nyu = n'y'u'.$$

La condición de los senos, en general, se puede aplicar únicamente a un par de planos conjugados del sistema. Este par de planos conjugados se llama *aplanático*.

§ 322. Aberración cromática. Hasta ahora hemos supuesto que los índices de refracción de los cuerpos transparentes que forman los sistemas ópticos eran constantes. Esto es cierto únicamente cuando dichos sistemas se iluminan con luz monocromática. Cuando

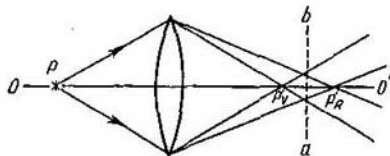


Fig. 262. Origen de la aberración cromática.

la luz tiene una composición compleja hay que tener en cuenta la variación que experimentan los índices de refracción en función de las longitudes de onda. Como ya indicamos en el § 279, en los cuerpos transparentes tiene lugar un aumento monótono de los índices de refracción a medida que disminuyen las longitudes de onda. Por esto una lente ordinaria, por ejemplo, tiene más potencia óptica para los rayos azules que para los rojos. Como resultado de esto, si la fuente emite luz blanca su imagen no será nítida y tendrá los bordes coloreados. Este fenómeno recibe el nombre de *aberración cromática*.

Supongamos que por medio de una lente convergente (fig. 262) se obtiene la imagen de una fuente puntual  $P$  de luz blanca. En este

caso la imagen del punto con la luz de los rayos violetas  $P'_V$  será la que se encuentra más próxima a la lente, mientras que la imagen que producen los rayos rojos  $P'_R$  será la más alejada de ella. Entre estas dos imágenes se encontrarán las originadas por los rayos de los demás colores. Coloquemos un plano  $ab$  perpendicular al eje óptico  $OO'$  en cualquier lugar situado entre los puntos  $P'_V$  y  $P'_R$ . En este plano veremos un círculo coloreado borroso en lugar de una imagen puntual. Si tomamos el plano que pasa por el foco de los rayos violetas  $P'_V$ , que corta los conos formados por todos los demás rayos (cuyos vértices se encuentran a su derecha), obtendremos un círculo que tendrá por márgenes una franja roja y cuyo centro será de color lila. Si el plano se hace pasar cerca del punto  $P'_R$ , el círculo tendrá por márgenes una franja violeta y su centro será de color rojizo.

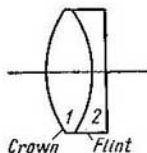


Fig. 263. Lente compuesta corregida de cromatismo.

La aberración cromática puede eliminarse combinando lentes convergentes y divergentes hechas con vidrios de diferentes clases cuyas dispersiones relativas sean distintas (véase la deducción más adelante en este mismo párrafo). La dispersión relativa del llamado vidrio *crown* es menor que la del llamado *flint*. En un sistema compuesto por una lente convergente de vidrio *crown* (fig. 263) y de una lente divergente de vidrio *flint* se puede compensar la aberración cromática y al mismo tiempo conseguir que la potencia conjunta de ambas lentes siga siendo positiva. Las lentes de este tipo se llaman *acromáticas*.

Demostremos que es posible construir lentes acromáticas. Para simplificar consideremos que ambas lentes componentes son infinitamente delgadas. Supongamos que los índices de refracción de la primera lente (*crown*) son:  $n_{R1}$ , para los rayos rojos, y  $n_{V1}$ , para los rayos violetas. Designemos por medio de  $\bar{n}_1$  el índice de refracción para una determinada zona intermedia del espectro (por ejemplo, para la amarillo-verde) y llamemos  $r_1$  y  $r_2$  a los radios de curvatura de las superficies refringentes de las lentes. En estas condiciones, de acuerdo con lo dicho en el § 319, las potencias  $\Phi_{R1}$  y  $\Phi_{V1}$  de la primera lente para los rayos rojos y violetas y su potencia  $\Phi_1$  para la zona central del espectro serán respectivamente iguales a:

$$\Phi_{R1} = (n_{R1} - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

$$\Phi_{V1} = (n_{V1} - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \text{y} \quad \Phi_1 = (\bar{n}_1 - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

De estas igualdades se deduce que:

$$\Phi_{R1} = \frac{n_{R1} - 1}{\bar{n}_1 - 1} \Phi_1 \quad \text{y} \quad \Phi_{V1} = \frac{n_{V1} - 1}{\bar{n}_1 - 1} \Phi_1. \quad (1)$$

Do la misma forma podemos obtener las potencias de la segunda lente (flint) correspondientes a los rayos rojos y violetas:

$$\Phi_{R2} = \frac{n_{R2} - 1}{n_2 - 1} \Phi_2 \quad \text{y} \quad \Phi_{V2} = \frac{n_{V2} - 1}{n_2 - 1} \Phi_2, \quad (2)$$

donde  $\Phi_2$  es la potencia óptica de esta misma lente para la zona central del espectro.

Las potencias correspondientes a los rayos rojos y violetas de la lente compuesta, formada por el conjunto de las lentes primera y segunda, serán respectivamente iguales a

$$\Phi_R = \Phi_{R1} + \Phi_{R2} \quad \text{y} \quad \Phi_V = \Phi_{V1} + \Phi_{V2}.$$

La lente compuesta carecerá de cromatismo si sus potencias ópticas correspondientes a los rayos rojos y violetas son iguales, es decir, si  $\Phi_R = \Phi_V$ . Por consiguiente, la condición de acromatismo vendrá expresada por la siguiente igualdad:

$$\Phi_{R1} + \Phi_{R2} = \Phi_{V1} + \Phi_{V2} \quad \text{o} \quad \Phi_{V1} - \Phi_{R1} = -(\Phi_{V2} - \Phi_{R2}).$$

Poniendo aquí en lugar de las potencias ópticas sus expresiones según (1) y (2), obtenemos:

$$\frac{n_{V1} - n_{R1}}{n_1 - 1} \Phi_1 = - \frac{n_{V2} - n_{R2}}{n_2 - 1} \Phi_2.$$

Las magnitudes  $\frac{n_{V1} - n_{R1}}{n_1 - 1}$  y  $\frac{n_{V2} - n_{R2}}{n_2 - 1}$  se llaman dispersiones relativas y pueden designarse por medio de  $v_1$  y  $v_2$  respectivamente. Entonces la condición de acromatismo del sistema toma la forma definitiva siguiente:

$$v_1 \Phi_1 + v_2 \Phi_2 = 0. \quad (3)$$

La potencia óptica  $\Phi$  del sistema para la zona media del espectro será:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2. \quad (4)$$

Por las igualdades (3) y (4) hallamos los siguientes valores de las potencias ópticas de las lentes primera y segunda

$$\Phi_1 = \frac{v_2}{v_2 - v_1} \Phi \quad \text{y} \quad \Phi_2 = - \frac{v_1}{v_2 - v_1} \Phi. \quad (5)$$

La dispersión relativa del vidrio flint  $v_2$  es mayor que la del crown. Por lo tanto la diferencia  $v_2 - v_1$  será positiva, y de acuerdo con (5) tendremos: primero, que las potencias de las lentes primera y segunda tienen signos diferentes; segundo, que el valor absoluto de la potencia  $|\Phi_1|$  es mayor que el de la potencia  $|\Phi_2|$ . De esto, y de acuerdo con (4), se deduce que si la primera lente se toma convergente ( $\Phi_1 > 0$ ) la potencia de la lente compuesta será positiva, con la particularidad de que los focos de esta lente correspondientes a los rayos rojos y violetas coincidirán, es decir, que la lente compuesta estará corregida de cromatismo.

Aunque coincidan los focos de los rayos rojos y violetas puede ocurrir que exista cierta discrepancia entre los focos de los rayos de otros colores, por ejemplo, verdes y rojos. Esto da lugar a la existencia de un cromatismo residual insignificante. Construyendo sistemas más complicados que el que acabamos de estudiar se puede conseguir que coincidan los focos de los rayos de tres colores diferentes, lo que prácticamente conduce a la compensación total del cromatismo (sistema apocromático).

§ 323. Flujo luminoso que pasa por un sistema óptico. Desde el punto de vista práctico tiene gran importancia la luminancia de la imagen que se obtiene con un sistema óptico. Para esclarecer esta cuestión empezaremos por estudiar el caso de una lente delgada  $AB$  (fig. 264) sumergida en una sustancia homogénea, por ejemplo, el de una lente de este tipo que se encuentra en el aire. Supongamos que el objeto es una superficie rectangular pequeña  $\Delta S$  situada perpendicularmente al eje óptico de la lente. La imagen

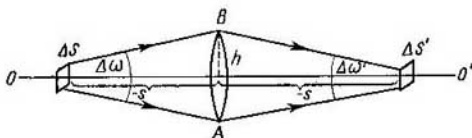


Fig. 264. Esquema para el cálculo del flujo luminoso que pasa a través de una lente.

será una superficie rectangular  $\Delta S'$  también perpendicular al eje óptico. Cada uno de los lados de la imagen estará aumentado  $\beta$  veces, siendo  $\beta$  el aumento lateral. Por esto la razón entre la superficie de la imagen y la del objeto será igual al cuadrado del aumento lateral:

$$\frac{\Delta S'}{\Delta S} = \beta^2. \quad (1)$$

Sea  $B$  la luminancia del objeto. En este caso sobre la lente incidirá el flujo luminoso  $\Delta F$  emitido por la superficie  $\Delta S$  dentro de los límites del ángulo sólido  $\Delta\omega$  bajo el cual se ve la lente  $AB$  desde el sitio en que se encuentra la superficie  $\Delta S$ . Limitándonos al caso de los rayos paraxiales podemos considerar pequeño el ángulo sólido  $\Delta\omega$  y entonces, de acuerdo con la fórmula (1) del § 303, el flujo luminoso  $\Delta F$  podrá representarse de la forma

$$\Delta F = B \cos i \Delta\omega \Delta S.$$

En esta fórmula  $i$  es el ángulo que forma el eje del haz con la normal a la superficie  $\Delta S$ . Como la superficie  $\Delta S$  es por las condiciones del problema perpendicular al eje óptico de la lente  $AB$ ,  $\cos i = 1$  y, por consiguiente

$$\Delta F = B \Delta\omega \Delta S. \quad (2)$$

Al pasar por la lente el flujo  $\Delta F$  disminuye debido a que una parte de sus rayos se refleja y otra es absorbida por el material de la lente. El flujo que sale de la lente  $AB$  después de pasar por

ella será:

$$\Delta F' = k\Delta F,$$

donde  $k < 1$ .

Poniendo en lugar de  $\Delta F$  su valor según (2) obtenemos el siguiente valor del flujo  $\Delta F'$  después de pasar por la lente:

$$\Delta F' = kB\Delta\omega\Delta S. \quad (3)$$

El flujo  $\Delta F'$  pasa en su totalidad por la superficie  $\Delta S'$ , limitada por las dimensiones de la imagen, y está comprendido dentro del ángulo sólido  $\Delta\omega'$ , bajo el cual se ve la lente  $AB$  desde el sitio en que se encuentra la imagen  $\Delta S'$ . De esta forma a la derecha de la imagen se propagará el flujo luminoso  $\Delta F'$  que sale de la superficie  $\Delta S'$  comprendido entre los límites del ángulo sólido  $\Delta\omega'$ . Por lo tanto, la luminancia  $B'$  de la superficie  $\Delta S'$ , de acuerdo con lo dicho en el § 303, será:

$$B' = \frac{\Delta F'}{\cos i' \Delta\omega' \Delta S'}. \quad (4)$$

Como la superficie  $\Delta S'$  es perpendicular al eje del haz,  $\cos i' = 1$  y, de acuerdo con (4), tendremos:

$$\Delta F' = B' \Delta\omega' \Delta S'.$$

Poniendo este valor de  $\Delta F'$  en (3), hallamos:

$$B' \Delta\omega' \Delta S' = kB\Delta\omega\Delta S,$$

de donde obtenemos que la luminancia de la imagen será

$$B' = kB \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega'} \frac{\Delta S}{\Delta S'}. \quad (5)$$

Como los ángulos sólidos  $\Delta\omega$  y  $\Delta\omega'$  son pequeños, aproximadamente tenemos que

$$\Delta\omega = \frac{\pi h^2}{s^2} \quad \text{y} \quad \Delta\omega' = \frac{\pi h^2}{s'^2},$$

donde  $h$  es el radio de la circunferencia que limita la lente, y  $s$  y  $s'$  son las distancias desde la lente al objeto y a la imagen respectivamente. De aquí obtenemos que

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega'} = \frac{s'^2}{s^2},$$

pero como  $s'/s$  es igual al aumento lateral  $\beta$  que produce la lente, obtenemos:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega'} = \beta^2.$$

Esta correlación conjuntamente con la (4) da:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega'} \frac{\Delta S}{\Delta S'} = \beta^2 \frac{1}{\beta^2} = 1,$$

después de lo cual la fórmula (5) toma el aspecto

$$B' = kB. \quad (6)$$

Como quiera que el coeficiente  $k$  depende exclusivamente de las pérdidas de luz que tienen lugar en la lente, en definitiva tenemos: que si por ambos lados de la lente se encuentran medios que tienen un mismo índice de refracción la luminancia  $B'$  de la imagen viene determinada únicamente por la luminancia del objeto y por las pérdidas que se producen al pasar la luz por la lente. La luminancia de la imagen no depende de las dimensiones de la lente, ni de su potencia óptica, ni del aumento que produce. Como el coeficiente  $k$  es siempre menor que la unidad, la luminancia de la imagen siempre es menor que la del objeto. La luminancia de la imagen solamente puede aproximarse a la del objeto disminuyendo las pérdidas de luz en la lente. Generalmente se utilizan materiales (vidrios) tan transparentes en la zona visible que las pérdidas de luz se producen principalmente por reflexión en las superficies de la lente. Si el índice de reflexión es  $r$ , a través de la primera superficie (dioptrio) de la lente pasará una parte igual a  $(1 - r)$  del flujo que sobre ella incide, y a través de ambas superficies pasará una parte igual a  $(1 - r)^2$ . Por consiguiente, si despreciamos la absorción de la luz por el material de la lente,  $k = (1 - r)^2$ .

La luminancia de la imagen puede aumentarse solamente si se hace que sean diferentes los índices de refracción de las sustancias que se encuentran a ambos lados de la lente. Si en la parte de espacio en que está el objeto el índice de refracción es igual a  $n$  y en la parte en que se encuentra la imagen es igual a  $n'$ , la igualdad (6) deberá ser sustituida por la igualdad

$$B' = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 kB. \quad (6a)$$

Todo sistema óptico puede suponerse compuesto por lentes aisladas, por lo tanto las deducciones sacadas conservan su valor con respecto a cualquier sistema óptico. Si el objeto y la imagen producida por el sistema se encuentran en sustancias cuyos índices de refracción son iguales, la luminancia de la imagen será menor que la del objeto cualquiera que sea la estructura del sistema. Para los sistemas compuestos de  $p$  superficies refringentes el coeficiente  $k$ , despreciando las pérdidas por absorción, será igual a  $(1 - r)^p$ . Cuando  $p$  es grande las pérdidas de luz resultan muy considerables.\*

\* Un procedimiento para disminuir las pérdidas por reflexiones puede verse en el § 277.

Cuando se trata de un sistema compuesto hay que tener en cuenta que el flujo luminoso  $\Delta F$  puede debilitarse también a causa de las limitaciones debidas a las monturas de algunas de las lentes o de los diafragmas (véase el § 324).

Para valorar el efecto de muchos instrumentos ópticos importa conocer no la luminancia de la imagen, sino la iluminación o iluminancia  $E'$  que se produce dentro de los límites de dicha imagen. Si  $\Delta F'$  es el flujo que sale de la lente y da origen a la imagen, la iluminación

$$E' = \frac{\Delta F'}{\Delta S'}.$$

Poniendo en lugar de  $\Delta F'$  su valor según (3), obtenemos:

$$E' = kB\Delta\omega \frac{\Delta S}{\Delta S'}.$$

Teniendo en cuenta que según (1)  $\frac{\Delta S}{\Delta S'} = \frac{1}{\beta^2}$ , podemos escribir la expresión anterior de la forma

$$E' = kB \frac{\Delta\omega}{\beta^2}. \quad (7)$$

Por la fórmula (7) vemos que la iluminación dentro de los límites de la imagen viene determinada por la luminancia del objeto  $B$  y depende del ángulo sólido  $\Delta\omega$ , bajo el cual se ve la lente desde el sitio en que se encuentra el objeto, y del aumento lateral  $\beta$ .

La iluminación  $E'$  puede tomar otra forma si se aplica la correlación

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega'} = \frac{s'^2}{s^2},$$

de la que se deduce que

$$\Delta\omega = \Delta\omega' \frac{s'^2}{s^2} = \Delta\omega' \beta^2.$$

Poniendo esta expresión de  $\Delta\omega$  en (7), obtenemos:

$$E' = kB\Delta\omega'. \quad (8)$$

De aquí se deduce que la iluminación dentro de los límites de la imagen viene determinada por el ángulo sólido  $\Delta\omega'$  que forman los rayos que salen de la lente y convergen en la imagen.

Cuando el objeto y la imagen se encuentran en medios diferentes, cuyos índices de refracción son respectivamente  $n$  y  $n'$ , la expresión (8) deberá sustituirse por la fórmula:

$$E' = kB \left( \frac{n'}{n} \right)^2 \Delta\omega'. \quad (8a)$$



§ 324. **Pupilas de entrada y de salida.** Cuando se trata de sistemas compuestos el haz luminoso que entra en dicho sistema por la abertura de la primera lente puede verse limitado por las monturas de las otras lentes o por cualquier diafragma. Imaginémosnos, por ejemplo, un sistema compuesto por dos lentes infinitamente delgadas, cuyos diámetros  $D$  son iguales, que se encuentran separadas entre sí por una distancia  $d$  (fig. 265). Si una fuente puntual  $P$  se encuentra entre la primera lente y su foco objeto  $F_1$ , solamente una parte de los rayos que deja pasar esta primera lente atravesarán la segunda. Por lo tanto, a través del sistema pasará el flujo emitido por la fuente dentro de los límites del ángulo sólido  $\Delta\omega$ , que es

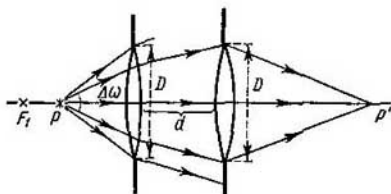


Fig. 265. Haz de luz que pasa por dos lentes.

menor que el ángulo sólido bajo el cual se ve la primera lente desde el sitio en que se encuentra el objeto  $P$ . Si la fuente  $P$  se encontrara más allá del foco objeto  $F_1$ , el haz que saldría de la primera lente sería convergente y la segunda lente no quedaría cubierta completamente por la luz. El ángulo sólido  $\Delta\omega'$  que formarían los rayos al salir de la segunda lente sería menor que el ángulo sólido bajo el cual se venía esta lente desde el sitio en que se encontrara la imagen.

Los diafragmas se incluyen en los sistemas para disminuir las aberraciones o para aumentar la nitidez de las imágenes que producen en un mismo plano objetos que se encuentran a diferentes distancias de dicho sistema. Cuando existen diafragmas por regla general son éstos y no las monturas de las lentes los que limitan los haces.

La montura o diafragma que limita los haces de rayos que pasan a través del sistema se llama *diafragma real* o *de abertura*. Antes de exponer el procedimiento para hallar el diafragma real estudiaremos un sistema elemental formado por una lente infinitamente delgada  $L$  y por un diafragma  $AB$  (fig. 266). Supongamos que la distancia que hay entre el diafragma y la lente es menor que la distancia focal imagen  $f'$  de esta última. Consideremos que el diámetro  $D_1$  del diafragma es menor que el  $D$  de la lente. Si una fuente

luminosa puntual se encuentra en el foco objeto  $F$  de la lente los rayos  $FM$  y  $FN$ , como puede verse en la figura, serán los que limitan el haz de rayos emitidos por el punto  $F$  que pasan por el diafragma. En la prolongación de los rayos  $FM$  y  $FN$  se encuentra la imagen virtual  $A'B'$  del diafragma  $AB$  producida por la lente  $L$ . De esta forma el ángulo sólido  $\Delta\omega$  dentro de cuyos límites se encuentran los rayos procedentes del punto  $F$  que pasan por el sistema es igual al ángulo sólido bajo el cual se ve la imagen del diafragma  $A'B'$  desde el sitio en que está la fuente. En este caso el ángulo

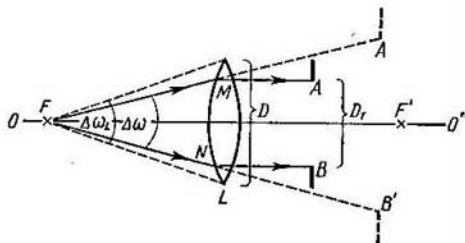


Fig. 266. Diafragma real.

$\Delta\omega$  es menor que el  $\Delta\omega_L$  bajo el cual se ve la montura de la lente  $L$  desde el sitio en que está la fuente. Por consiguiente el diafragma  $AB$  es un diafragma real o de apertura. Pero si el diámetro  $D_r$  del diafragma fuera mayor que el  $D$  de la lente el ángulo  $\Delta\omega_L$  resultaría menor que el  $\Delta\omega$  y el diafragma real sería la montura de la lente  $L$ .

De lo expuesto se deduce el procedimiento para hallar el diafragma real de cualquier sistema. Este procedimiento consiste en obtener las imágenes de todas las monturas y diafragmas producidas por los elementos del sistema que preceden al diafragma o la montura dada (tomados en la dirección que siguen los rayos procedentes de la fuente). Entre estas imágenes hay que incluir la montura de la primera lente del sistema. El diafragma real será aquel cuya imagen se vea bajo el menor ángulo sólido  $\Delta\omega$ , desde el punto en que está el objeto. La imagen del diafragma real que producen los elementos del sistema anteriores a él recibe el nombre de *pupila de entrada*.

De la misma forma puede introducirse el concepto de *pupila de salida* construyendo la imagen del diafragma real que producen los elementos del sistema posteriores a él.

El ángulo que forman los rayos trazados desde el objeto (situado en el eje del sistema) a los extremos del diámetro de la pupila de entrada se llama *ángulo de apertura de entrada*. Por analogía, el

ángulo que forman los rayos trazados desde el sitio en que se encuentra la imagen del objeto a los extremos del diámetro de la pupila de salida se llama *ángulo de apertura de salida*.

El ángulo sólido bajo el cual se ve la pupila de entrada desde el sitio en que se encuentra el objeto es el ángulo  $\Delta\omega$  dentro de cuyos límites queda comprendido el haz luminoso emitido por el objeto y que pasa por el sistema. De la misma forma el ángulo sólido bajo el cual se ve la pupila de salida desde el sitio en que se produce la imagen es el ángulo sólido  $\Delta\omega'$  que limita el haz luminoso que sale del sistema y converge en la imagen. Estos ángulos sólidos  $\Delta\omega$  y  $\Delta\omega'$  son precisamente los que deben entrar en las fórmulas (7) y (8) del § 323, que determinan la iluminación dentro de los límites de la imagen.

Cuando se trata de una sola lente infinitamente delgada las pupilas de entrada y salida coinciden con la montura de la lente.

Como ejemplo examinemos el ocular de Huygens cuyo esquema se dio a conocer en el § 319. Supongamos que entre las lentes  $L_1$  y  $L_2$  que forman el ocular

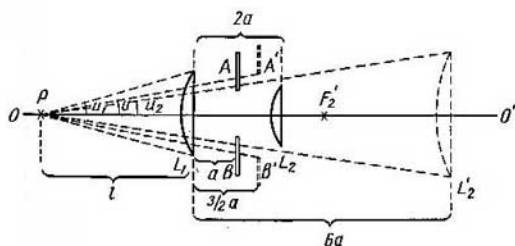


Fig. 267. Pupila de entrada del ocular de Huygens.

se encuentra un diafragma circular  $AB$  (fig. 267). Hallemos las pupilas de entrada y de salida y el ángulo de apertura de salida para el foco imagen de la segunda lente del ocular.

Recordemos que el ocular de Huygens consta de dos lentes cuyas distancias focales  $f_1$  y  $f_2$  cumplen la correlación  $f_1 = 3f_2 = 3a$ ; la distancia entre las lentes  $d = 2a$ . Las lentes del sistema se consideran infinitamente delgadas.

Determinemos las posiciones de las imágenes del diafragma  $AB$  y de la montura de la lente  $L_2$  que produce la lente  $L_1$ . La potencia de la lente  $L_1$  es

$$\Phi_1 = \frac{1}{3a}.$$

Llamando  $s$  y  $s'$  a las posiciones del objeto y de su imagen respectivamente con relación a la lente  $L_1$ , obtendremos (véase el § 319):

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + \Phi_1,$$

de donde hallamos que

$$s' = \frac{s}{1 + \Phi_1 s} \quad (1)$$

De acuerdo con las condiciones, la distancia entre el diafragma  $AB$  y la primera lente es igual a  $a$ , por lo tanto  $s = -a$ , y, por (1), tenemos:

$$s' = \frac{-a}{1 - \frac{a}{3a}} = -\frac{3}{2}a;$$

en estas condiciones el aumento lateral  $\beta$  será:

$$\beta = \frac{s'}{s} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}.$$

De esta forma la imagen del diafragma  $AB$  producida por la lente  $L_1$  se encuentra entre las lentes y a la distancia de  $\frac{3}{2}a$  de la primera. Llamando  $D$

al diámetro del diafragma, el diámetro de su imagen será  $D' = \frac{3}{2}D$ .

La montura de la lente  $L_2$  se encuentra a la distancia  $2a$  de la primera lente, por lo tanto, para ella  $s = -2a$  y, por (1), obtenemos:

$$s' = \frac{-2a}{1 - \frac{2a}{3a}} = -6a;$$

en este caso el aumento lateral  $\beta = 3$ . Por consiguiente la imagen de la montura de la segunda lente se encuentra a la derecha de la primera lente, a una distancia de ella igual a  $6a$ , y tiene un diámetro  $D_2 = 3D_1$ , siendo  $D_1$  el diámetro de dicha lente.

Tomemos un punto  $P$  situado a la izquierda del sistema y a una distancia  $l$  de su primera lente. Para hallar la pupila de entrada hay que comparar entre sí los ángulos  $2u_1$ ,  $2u$  y  $2u_2$  bajo los cuales se ven respectivamente desde el punto  $P$  la montura de la primera lente (cuyo diámetro llamaremos  $D_1$ ), la imagen del diafragma  $AB$  y la de la montura de la lente  $L_2$ , producidas ambas por la lente  $L_1$ .

La pupila de entrada puede ser la montura de la lente  $L_1$  o la imagen del diafragma o de la lente  $L_2$ , según cuál de los ángulos  $u_1$ ,  $u$  o  $u_2$  sea el menor. Si el punto  $P$ , con respecto al cual se determina la pupila de entrada, se encuentra a una distancia  $l$  de la primera lente mucho mayor que la que hay entre las dos lentes, como puede verse en la fig. 267, tienen lugar las siguientes igualdades:

$$\operatorname{tg} u_1 = \frac{1}{2} \frac{D_1}{l}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{1}{2} \frac{3D}{2l}, \quad \operatorname{tg} u_2 = \frac{1}{2} \frac{3D_2}{l}. \quad (2)$$

De las correlaciones (2) se deduce que si los diámetros de las lentes  $L_1$  y  $L_2$  satisfacen las desigualdades

$$D_1 > \frac{3}{2}D, \quad D_2 > \frac{1}{2}D,$$

la pupila de entrada será la imagen del diafragma producida por la primera lente. En este caso el diafragma real o de abertura será el diafragma  $AB$ .

La pupila de salida la hallaremos suponiendo que el diafragma  $AB$  es el real. Este diafragma se encuentra en el plano focal objeto de la lente  $L_2$ , de donde obtenemos que la pupila de salida se encuentra en el infinito. Esta pupila

se ve desde el foco imagen  $F'_2$  de la lente  $L_2$  (fig. 268) bajo el mismo ángulo  $u'$  que forman los rayos que salen de los márgenes del diafragma  $AB$  paralelamente al eje óptico al converger en el foco imagen  $F'_2$  de la lente  $L_2$ . Por con-

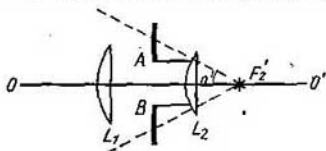


Fig. 268. Pupila de salida del ocular de Huygens.

siguiente el ángulo de apertura  $2u'$  que buscábamos vendrá determinado por la igualdad

$$\operatorname{tg} u' = \frac{D/2}{a} = \frac{D}{2a}.$$

§ 325. Sistema óptico del ojo. La estructura general del ojo humano fue expuesta en el § 305. Estudiemos ahora el sistema óptico del ojo, que sirve para formar en la retina la imagen real de los objetos que se observan. El sistema refringente del ojo está formado por la superficie convexa de la córnea (§ 305), el cristalino, el humor acuoso y el humor vítreo que llena el ojo. En el ojo la imagen se forma en una sustancia (humor vítreo) diferente de aquella en que se encuentra el objeto que se observa (aire). Por esta razón las distancias focales objeto e imagen del ojo son diferentes. El cristalino es un cuerpo no homogéneo cuya parte exterior tiene un índice de refracción igual a 1,38, mientras que la interior tiene un índice igual a 1,41. La potencia óptica del cristalino se puede variar modificando la curvatura de sus superficies mediante la acción de los músculos ciliares. Con la variación de la potencia óptica del cristalino se consigue enfocar nítidamente sobre la retina las imágenes de los objetos que se encuentran a distintas distancias del ojo. Este proceso se llama *acomodación*.

La pupila de entrada del ojo casi coincide con su pupila real. Mediante el iris puede variarse el diámetro de la pupila, con lo cual se regula la magnitud del flujo luminoso que entra en el ojo: cuando la iluminación es pequeña la pupila se dilata y cuando es grande se contrae.

El sistema óptico del ojo suele presentar discrepancias individuales considerables de unas a otras personas. Para dar una característica general puede utilizarse un modelo simplificado intermedio (llamado *ojo reducido*) cuyas constantes son las siguientes:

|   |           |
|---|-----------|
| poder refractor   | 58,64D    |
| situación del plano principal objeto<br>(a partir del vértice de la córnea) | +1,348 mm |

|   |           |
|---|-----------|
| situación del plano principal imagen<br>(a partir del vértice de la córnea) | +1,602 mm |
| distancia focal objeto  | -17,1 mm  |
| distancia focal imagen  | +22,8 mm  |

Las posiciones que ocupan los planos principales ( $H$  y  $H'$ ) y los focos principales ( $F$  y  $F'$ ) se muestran en la fig. 269).

Los puntos límites entre los cuales es posible la acomodación se llaman *punto remoto* o *alejado* y *punto próximo*. Para el ojo normal el punto remoto se encuentra en el infinito y el punto próximo a una

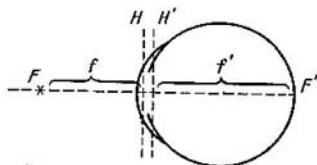


Fig. 269. Planos y focos principales del ojo.

distancia aproximada de 20 cm. Las personas jóvenes pueden acomodar el ojo para ver objetos a distancias más cortas (10-15 cm). A medida que aumenta la edad disminuye la facultad de acomodar el ojo sobre objetos próximos.

Los casos en que el sistema óptico del ojo presenta los defectos llamados *miopía* e *hipermetropía* son frecuentes. El *ojo miope* tiene más potencia óptica que el normal y su punto remoto no se encuentra en el infinito, sino a una distancia finita del ojo (cuando la *miopía* es fuerte, a una distancia de 1,5-1 m o todavía menor). Para el *ojo hipermetrope* el punto próximo se encuentra a una distancia mayor de 20 cm, mientras que el punto remoto se halla detrás del ojo; esto significa que el ojo hipermetrope es capaz de enfocar sobre la retina, no sólo los haces de rayos paralelos, sino también los de rayos convergentes. El ojo hipermetrope tiene menos potencia óptica que el normal.

El sistema óptico del ojo tiene una serie de defectos, como son: aberración esférica, coma y una considerable aberración cromática. Pero estos defectos influyen poco en el carácter de la percepción subjetiva de los objetos que se observan como resultado de las peculiaridades fisiológicas del proceso de visión.

Como indicamos en el § 305, el ojo distingue gran cantidad de detalles cuando la imagen del objeto incide sobre la mancha amarilla de la retina, sobre todo si cae en la fovea central. La mancha amarilla tiene dimensiones pequeñas y sobre ella inciden las imágenes de los objetos que se ven bajo un ángulo no mayor de 6-7°. Pero el campo total que percibe el ojo tiene unas dimensio-

nes angulares de cerca de  $130^\circ$  en dirección vertical y de  $160^\circ$  en dirección horizontal. La agudeza visual o poder separador del ojo normal dentro de los límites de la mancha amarilla es igual aproximadamente a  $1'$ . Esto significa que el ojo puede distinguir separadamente dos puntos luminosos entre los cuales exista una distancia angular de  $1'$ ; son frecuentes los casos de mayor agudeza visual, que llega a alcanzar  $30''$  y hasta  $10''$ . A medida que nos alejamos del centro de la mancha amarilla el poder separador disminuye rápidamente: a un ángulo de  $60^\circ$ , con respecto a la dirección de la fóvea central; la agudeza visual es igual aproximadamente al 0,02 de la que se observa dentro de los límites de la mancha amarilla. Con la visión nocturna la agudeza visual es considerablemente menor (hasta 10 veces) que con la diurna.

Con la iluminación diurna el ojo distingue el mayor número de detalles cuando el objeto se halla de él a una distancia algo mayor que la del punto próximo. Generalmente esta distancia se toma igual a 25 cm y se llama *distancia de visión perfecta*.

La sensación visual no alcanza su intensidad máxima inmediatamente después que la luz comienza a actuar sobre la retina ni desaparece inmediatamente después de cesar la acción de la luz. La sensación visual persiste cerca de  $1/10$  de s después de que la luz deja de incidir en el ojo. A esto se debe que las fuentes de luz intermitente cuya frecuencia es mayor de 10 destellos por segundo parezca que brillan continuamente.

Consecuencia de las peculiaridades fisiológicas del ojo es que manteniendo a éste fijo podamos percibir un campo anchuroso con poca cantidad de detalles y una zona pequeña del mismo (correspondiente a la mancha amarilla) con gran abundancia de ellos. El proceso de la visión se reduce a «observar» sucesivamente los objetos, lo cual tiene gran importancia fisiológica, puesto que permite en cada instante fijar la atención sobre un número limitado de objetos, al mismo tiempo que se recibe una orientación menos detallada del medio circundante. El proceso general de la visión es un acto muy complejo en el que desempeñan un papel determinado la memoria, las percepciones de otros órganos, etc. En muchos casos la relación geométrica que existe entre las imágenes de los objetos que se perciben no corresponde a su relación geométrica real. Estos casos se conocen con el nombre de «ilusiones ópticas». En la fig. 270 pueden verse dos líneas horizontales de trazo grueso de cuyos extremos salen formando ángulos diferentes unas líneas más delgadas. La recta de trazo grueso superior parece más larga que la inferior. No obstante las dos rectas de trazo grueso tienen la misma longitud, cosa que puede comprobarse fácilmente marcando sus longitudes sobre una tira de papel.

La mancha amarilla está situada un poco a un lado del punto de intersección del eje óptico del ojo con la retina. Por esto, al fijar el

ojo sobre un objeto cualquiera dirigimos hacia él, no el eje óptico, sino la recta que pasa por el punto nodal del ojo y por el centro de la mancha amarilla. Esta recta se llama *línea de visión directa*. En el

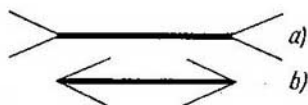


Fig. 270. Ejemplo de «ilusión óptica»: la recta *b* parece más corta que la *a*.

proceso de la visión desempeña un papel muy importante la observación de los objetos con ambos ojos. Al mirar a cualquier objeto *P* (fig. 271) hacemos girar los ojos de forma que las dos líneas de visión directa pasen por dicho objeto. Al ocurrir esto todos los demás objetos, situados más cerca o más lejos que el *P*, se representan dobles. Debido a la *visión binocular* podemos apreciar la distancia que hay desde los objetos hasta el ojo. Esta apreciación, que no tiene nada de arbitraria, se realiza por medio del ángulo en que se giran los ojos. Sean, por ejemplo, las líneas de visión directa  $O_1A_1$  y  $O_2A_2$  (fig. 271) las que corresponden a la observación de un objeto muy lejano. En este caso las dos líneas serán prácticamente paralelas entre sí. Pero si se observa un objeto *P* situado a una distancia finita *l* sobre la recta  $O_1A_1$  el ojo derecho tiene que girar un poco. El ángulo  $\varepsilon$  que forman las rectas  $O_2A_2$  y  $O_2P$  se llama *ángulo de paralaje*. Este ángulo  $\varepsilon$  se relaciona con la distancia *l* por medio de la correlación:

$$l = \frac{b}{\varepsilon}, \quad (1)$$

donde *b* es la distancia entre los puntos nodales de los ojos. La visión binocular que permite apreciar las distancias por medio del ángulo de paralaje  $\varepsilon$  se llama *visión estereoscópica*. La visión estereoscópica tiene lugar cuando los ángulos de paralaje  $\varepsilon$  superan un determinado valor mínimo  $\varepsilon_{\text{mín}}$ . Generalmente  $\varepsilon_{\text{mín}} = 1'$ , pero para muchas personas  $\varepsilon_{\text{mín}}$  tiene un valor más pequeño y a veces alcanza incluso hasta  $10''$ . El ángulo de paralaje de  $1'$  corresponde a una distancia  $l \cong 220$  m. Por lo tanto el efecto estereoscópico se observa únicamente en objetos que se encuentran a distancias no mayores de 220-250 m del ojo. El juicio que nos formamos de la

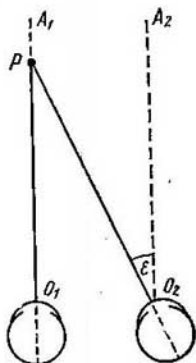


Fig. 271. Visión binocular.



distancia a que se encuentran los objetos más lejanos se basa en una serie de observaciones indirectas, como las dimensiones angulares visuales de los objetos conocidos, la cantidad de detalles que se distinguen, etc.

Para convencerse del papel que desempeña la visión estereoscópica cuando se observan objetos próximos basta realizar el siguiente experimento: cójase un lápiz con cada mano y hágase que coincidan sus puntas. Esto es fácil de conseguir cuando se mira con los dos ojos, pero si se mira con uno sólo es difícil.

§ 326. **Luminancia subjetiva.** La sensación subjetiva de *luminancia* (brillo) viene determinada por la *iluminancia* (iluminación) que percibe la retina dentro de los límites de la imagen. Supongamos que el objeto que se observa tiene dimensiones finitas. En este caso, según la fórmula (8a) del § 323, la iluminación  $E'$  dentro de los límites de la imagen del objeto será:

$$E' = kB \left( \frac{n'}{n} \right)^2 \Delta\omega', \quad (1)$$

siendo  $\Delta\omega'$  el ángulo que forman los rayos al converger desde la pupila del ojo hasta la retina,  $n$  y  $n'$  los índices de refracción del aire y del humor vítreo respectivamente y  $B$  la luminancia (brillo) fotométrica del objeto.

Llamando  $d$  al diámetro de la pupila y sabiendo que la distancia desde ésta hasta la retina es aproximadamente igual a la distancia focal imagen  $f'$  del ojo, tendremos aproximadamente que el ángulo sólido

$$\Delta\omega' = \frac{\pi \cdot d^2}{4f'^2}.$$

Poniendo este valor de  $\Delta\omega'$  en (1), hallamos que

$$E' = \frac{k\pi}{4} \left( \frac{n'}{n} \right)^2 \left( \frac{d}{f'} \right)^2 B. \quad (2)$$

Para un ojo determinado y unas condiciones dadas la magnitud  $\frac{d}{f'}$  será constante, por consiguiente, por la fórmula (2) tenemos que la *luminancia subjetiva de los objetos que se observan viene determinada por su luminancia fotométrica*. La luminancia subjetiva no depende de las dimensiones del objeto ni de la distancia que hay desde él al ojo, siempre que la imagen que se forma en la retina tenga dimensiones finitas. Dos hojas de papel igualmente iluminadas, por ejemplo, parecerán tener la misma luminancia aún en el caso en que una de ellas esté cerca del ojo y la otra lejos.

La intensidad de la sensación visual, como las de todas las demás sensaciones, no está en simple relación con la potencia del excitador. Como en el caso de la intensidad de la sensación acús-

tica (véase el t. 1), la intensidad de la sensación visual puede considerarse directamente proporcional al logaritmo de la potencia del excitador. Por lo tanto, de acuerdo con la fórmula (2), al aumentar la luminancia fotométrica  $B$  al doble, por ejemplo, la luminancia subjetiva aumenta mucho menos. Cuando las variaciones de la luminancia de los objetos son muy grandes hay que tener en cuenta que el diámetro  $d$  de la pupila depende de la magnitud del flujo luminoso que sobre ella incide.

Todo lo expuesto se refiere a los casos en que el objeto se observa bajo un ángulo visual finito. Pero cuando el objeto está tan alejado que los rayos que desde él llegan al ojo se pueden considerar paralelos, las correlaciones que obtenemos son otras. En este caso la imagen que se forma en la retina no es semejante geoméricamente al objeto, sino que es un círculo determinado exclusivamente por los fenómenos de difracción que tienen lugar en el ojo. Las dimensiones de este círculo (véase el § 269) dependen únicamente de la estructura del ojo. Resultado de esto es que la iluminación dentro de los límites del círculo de difracción viene determinada por la magnitud del flujo luminoso  $\Delta F$  que incide sobre el ojo. Si miramos una fuente luminosa tan alejada que puede considerarse puntual, el flujo  $\Delta F = I\Delta\omega$ , siendo  $I$  la intensidad luminosa y  $\Delta\omega$  el ángulo bajo el cual se vería la pupila desde el sitio en que se encuentra la fuente. Si la distancia desde el ojo a dicha fuente es igual a  $r$ , tendremos que  $\Delta\omega = \frac{\pi d^2}{4r^2}$ , y el flujo luminoso  $\Delta F$  que incide sobre la pupila será:

$$\Delta F = \frac{\pi d^2}{4} \frac{I}{r^2}. \quad (3)$$

La luminancia subjetiva estará determinada en este caso por la magnitud del flujo  $\Delta F$ , es decir, de acuerdo con la fórmula (3), la luminancia subjetiva de una fuente puntual está determinada por su intensidad luminosa y depende también de la distancia que hay desde dicha fuente al ojo.

§ 327. Instrumentos ópticos visuales. Los instrumentos ópticos visuales sirven de complemento al ojo y en la mayoría de los casos tienen por objeto aumentar su agudeza o poder separador.

Estudiemos algunos de los instrumentos ópticos más simples.

*Lupa o microscopio simple.* La lupa más simple es una lente convergente que se utiliza para ver agrandados los objetos pequeños. La lente  $L$  (fig. 272) se coloca delante del ojo de manera que el objeto que se observa  $PP'$  se encuentre cerca de su plano focal principal  $F$  por la parte más próxima a la lente. En estas condiciones se produce una imagen  $P_1P'_1$  virtual, derecha y aumentada que se encuentra a una distancia bastante grande y que el ojo puede observar sin acomodación. Considerando que la lente es delgada

podemos suponer que los rayos  $PO$  y  $P'O$  trazados desde los extremos del objeto al centro de la lente  $O$  pasarán a través de ella sin experimentar la refracción. Por lo tanto, las dimensiones angulares de la imagen  $P_1P'_1$  vienen determinadas por el ángulo  $2u$  que es

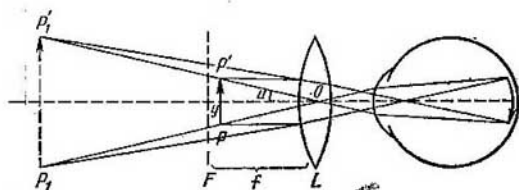


Fig. 272. Efecto que produce una lupa.

igual al ángulo bajo el cual se ve el objeto  $PP'$  desde el centro  $O$  de la lente. Llamando  $f$  a la distancia focal objeto de la lente e  $y$  a las dimensiones del objeto, obtenemos:

$$2u = \frac{y}{f}. \quad (1)$$

Para valorar la acción de la lupa, comparemos la distancia angular  $2u$  con la  $2u_0$ , bajo la cual se observa el objeto a simple vista. Esta última distancia angular es igual a  $2u_0 = \frac{y}{l}$ , siendo  $l$  la distancia que separa al objeto del ojo. Como por regla general la lupa se utiliza para observar objetos que pueden situarse a distancias arbitrarias del ojo, la distancia  $l$  se elige de forma que sea igual a la distancia de visión perfecta  $l_0$ , entonces

$$2u_0 = \frac{y}{l_0}. \quad (2)$$

De las igualdades (1) y (2) hallamos que la lupa permite aumentar las dimensiones angulares del objeto que se observa un número de veces

$$\gamma = \frac{u}{u_0} = \frac{l_0}{f}. \quad (3)$$

Si la lente de la lupa no estropea la imagen, el poder separador o de resolución aumenta el mismo número de veces.

La magnitud  $\gamma$  se llama aumento angular de la lupa. Si  $l_0$  y  $f$  se expresan en centímetros, como  $l_0 = 25$  cm, para  $\gamma$  obtendremos:

$$\gamma = \frac{25}{f \text{ (cm)}}. \quad (3a)$$

Para corregir las aberraciones las lupas suelen estar formadas por dos lentes situadas a cierta distancia una de otra. Estas lupas dan aumentos de hasta 10-20 veces.

**Anteojo astronómico.** Los anteojos y los telescopios sirven para observar objetos muy alejados. El sistema óptico de los anteojos en su forma más simple está constituido por dos lentes  $L_1$  y  $L_2$  (fig. 273) dispuestas de tal forma que el foco imagen de la lente  $L_1$  coincide con el foco objeto de la lente  $L_2$  (sistema telescópico).

La lente  $L_1$  se llama objetivo y la  $L_2$ , ocular. Si el objeto está suficientemente alejado, su imagen  $P'P'_1$ , producida por la lente

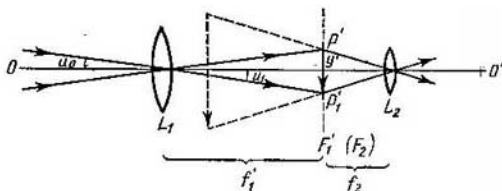


Fig. 273. Esquema de un anteojo astronómico.

$L_1$ , se obtiene en el plano focal principal de esta lente y sus dimensiones angulares serán iguales a  $2u_1 = \frac{y'}{f'_1}$ , donde  $y'$  son sus dimensiones lineales y  $f'_1$  es la distancia focal imagen del objetivo. El ocular juega el papel de lupa y, por consiguiente, la imagen que produce es percibida por el ojo bajo el ángulo

$$2u_2 = \frac{y'}{f_2},$$

siendo  $f_2$  la distancia focal objeto del ocular.

Como la longitud del anteojo es pequeña en comparación con la distancia hasta el objeto, este último se percibe a simple vista bajo un ángulo  $2u_0 = 2u_1$ . De aquí se deduce que el aumento angular del anteojo será:

$$\gamma = \frac{2u_2}{2u_1} = \frac{2u_2}{2u_0} = \frac{f'_1}{f_2}. \quad (4)$$

De esta forma el aumento angular del anteojo es tanto mayor cuanto mayor sea la distancia focal de su objetivo y cuanto menor sea la distancia focal de su ocular.

Los anteojos contruidos según el esquema indicado producen una imagen invertida del objeto que se observa. Cuando el anteojo se utiliza para observar objetos astronómicos (anteojo astronómico o telescopio) esta inversión de la imagen no tiene importancia. Pero cuando se emplea para observaciones en la Tierra (anteojo

terrestre) se le suele añadir un sistema que vuelve a invertir la imagen de forma que se vea derecha.

En la práctica las lentes simples no sirven para objetivos y oculares debido a sus grandes aberraciones geométricas y cromáticas. Por esto el objetivo se hace de dos lentes pegadas, una convergente y otra divergente, o en forma de sistemas más complejos que permiten corregir la imagen. El ocular se hace en forma de sistema compuesto formado generalmente por dos lentes.

Cuando con el anteojo se miran objetos bajo un ángulo de vista finito, su luminancia, según lo dicho en el § 323, no puede ser mayor que la luminancia fotométrica real. Las inevitables pérdidas de luz, que tienen lugar como resultado de las reflexiones y absorpciones, son causa de que los anteojos disminuyan siempre un poco la luminancia. Para que las pérdidas de luz sean menores hay que evitar que en los anteojos existan superficies reflectoras innecesarias y procurar que el flujo luminoso que sale del ocular llene por completo la pupila del observador, puesto que únicamente así se puede conseguir la máxima iluminación de la retina que puede producir un objeto de luminancia determinada.

A pesar de que el anteojo no pueda aumentar la luminancia de los objetos que se observan, cuando esto se hace con luz nocturna «se ve mejor» con el anteojo que a simple vista. Esto se explica por el hecho de que con la visión nocturna, como ya indicamos en el § 305, el poder separador del ojo es mucho menor que cuando se trata de iluminaciones diurnas. Pero como el anteojo produce un gran aumento, todos los detalles del objeto resultan visibles bajo un gran ángulo y el ojo puede distinguirlos.

El problema de la construcción de un anteojo que hiciera posible ver los objetos de noche fue planteado por M. Lomonósov, que construyó un anteojo al que llamó «videonoturno». Este anteojo era de gran aumento, estaba construido de forma que el flujo luminoso llenaba por completo la pupila del ojo y, efectivamente, con él se veía de noche mejor que a simple vista.

Al observar las estrellas con un telescopio nos encontramos con el caso de objetos de los que prácticamente llega al objetivo del telescopio un haz de luz paralelo.

En este caso el objetivo del telescopio produce en su plano focal únicamente una figura de difracción igual a la que, como vimos en el § 269, produce un orificio circular. Esta figura se observa después con el ocular. El orificio redondo que limita al haz de rayos paralelos que se difracta es la montura del objetivo del telescopio. Pero como al producirse la difracción por el orificio circular una gran parte de la luz va a parar a la mancha brillante central, resulta que la «imagen» de la estrella que se ve con el telescopio no es otra cosa que esta mancha central de la figura de difracción. El radio angular  $\vartheta$  de la mancha central, según lo dicho en el § 269, es una magnitud del orden de  $\vartheta \cong 1,22 \frac{\lambda}{D}$ , donde  $D$  es el

diámetro del orificio (en este caso el de la armadura del objetivo). El radio lineal de esta misma mancha (círculo) central  $r = \theta f'_i = \cong 1,22\lambda \frac{f'_i}{D}$ , siendo  $f'_i$  la distancia focal imagen del objetivo. Como las magnitudes  $f'_i$  y  $D$  son constantes para cada telescopio, quiere decir que todas las estrellas producen círculos del mismo tamaño. Por consiguiente, la luminancia de estos círculos será proporcional al flujo luminoso  $\Delta F$  que desde la estrella llega al objetivo del telescopio. Si  $E$  es la iluminación que produce una estrella sobre la superficie de la Tierra, tendremos que  $\Delta F = E \frac{\pi D^2}{4}$ ; a esta magnitud son proporcionales la luminancia del círculo de difracción y la luminancia subjetiva de la estrella que se observa por el telescopio. Si esta misma estrella se observa a simple vista, según lo expuesto en el § 326, tendremos que su luminancia subjetiva será proporcional al flujo  $\Delta F'$  que incide sobre la pupila del ojo e igual a  $\Delta F' = E \frac{\pi d^2}{4}$ , donde  $d$  es el diámetro de la pupila. La relación entre los flujos indicados es la medida del aumento que experimenta la luminancia de la estrella cuando se observa con el telescopio:

$$\frac{\Delta F}{\Delta F'} = \left(\frac{D}{d}\right)^2.$$

Cuando el diámetro del objetivo del telescopio es grande la relación  $\left(\frac{D}{d}\right)^2$  también lo es y la estrella resulta mucho más brillante al observarla con el telescopio que a simple vista. La luminancia subjetiva del cielo no varía prácticamente aunque se mire con el telescopio.

El poder separador del telescopio será estudiado más adelante (§ 329).

Además de los anteojos astronómicos y de los telescopios formados por sistemas de lentes se pueden construir sistemas de espejos reflectores. El primer telescopio reflector fue construido por Newton. El esquema del telescopio de Newton se representa en la fig. 274. El haz de rayos procedente del objeto incide sobre el espejo cóncavo  $AB$ , se refleja en él, sufre un giro al incidir sobre el espejo plano  $ab$  y converge en el plano focal  $F'$  del espejo cóncavo. La imagen obtenida en el plano focal  $F'$  se observa por medio del ocular  $O$ .

El espejo refleja por igual los rayos de todas las longitudes de onda y no produce aberración cromática. En este sentido el telescopio de Newton tenía una gran ventaja con respecto a los telescopios de lentes de aquella época, ya que entonces aún no sabían construir lentes acromáticas y los telescopios tenían gran aberración cromática.

En la actualidad los mayores telescopios también se hacen con espejos reflectores, debido a las dificultades que presenta la fabricación de lentes grandes de buena calidad. Los telescopios de lentes («refractores») más modernos tienen objetivos de cerca de 1 m de diámetro; los mayores telescopios de espejos («reflectores») tienen espejos de hasta 5 m de diámetro.

En la actualidad también se emplean sistemas combinados de lentes y espejos.

Sistemas de este tipo con lentes convexo-cóncavas han sido propuestos y realizados por el técnico óptico soviético D. D. Maksútov. El esquema de uno de los telescopios de Maksútov se representa en la fig. 275, donde  $L$  es una lente convexo-cóncava y  $AB$  es un espejo cóncavo. Los rayos del objeto que se observa inciden sobre la lente  $L$ , después de lo cual se reflejan en el espejo  $AB$

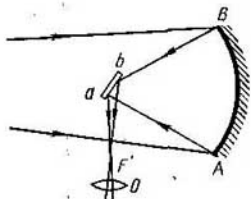


Fig. 274. Esquema del telescopio reflector de Newton.

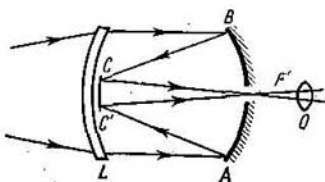


Fig. 275. Esquema del telescopio de Maksútov.

y vuelven a incidir sobre la lente  $L$ . La parte central de la superficie cóncava de esta lente  $CC'$  está aluminada (recubierta de aluminio) y forma un espejo cóncavo en el que los rayos se reflejan otra vez. En el centro del espejo  $AB$  se practica un pequeño orificio a través del cual los rayos salen del telescopio.

Detrás del foco  $F'$  en que convergen los rayos se encuentra el ocular  $O$ . La doble reflexión de los rayos permite hacer más corto el telescopio. La lente convexo-cóncava tiene propiedades acromáticas y además da la posibilidad de corregir la aberración esférica del espejo. El instrumento construido según el esquema de la fig. 275 proporciona una imagen derecha y puede utilizarse para observar objetos tanto celestes como terrestres.

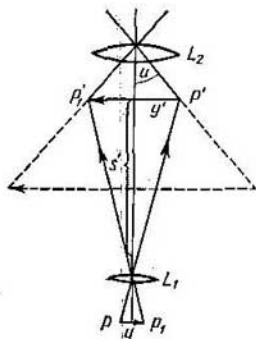


Fig. 276. Esquema óptico del microscopio.

*Microscopio compuesto.* Para conseguir grandes aumentos se emplea el microscopio compuesto o simplemente microscopio, cuyo esquema óptico puede verse en la fig. 276, donde  $L_1$  es un objetivo de pequeña distancia focal y  $L_2$  es el ocular.

El objeto  $PP_1$  que se observa se coloca delante del objetivo  $L_1$  a una distancia ligeramente mayor que la focal principal objeto. El objetivo da una imagen real, invertida y aumentada  $P'P_1'$  del objeto, situada a una distancia  $s'$  de aquél. El aumento lateral del objetivo  $\beta \cong \frac{s'}{f_1}$ , donde  $f_1$  es su distancia focal principal objeto. Supongamos que las dimensiones lineales del objeto son iguales a  $y$ , entonces las

dimensiones lineales de la imagen serán:

$$y' = y \frac{s'}{f_1}. \quad (5)$$

El ocular  $L_2$  hace las veces de lupa. Por esto la imagen  $y'$  que se observa a través del ocular se ve bajo el ángulo

$$2u = \frac{y'}{f_2},$$

donde  $f_2$  es la distancia focal objeto del ocular. Poniendo aquí en lugar de  $y'$  su valor según (5), obtenemos el valor del ángulo bajo el cual se ve el objeto  $PP_1$  cuando se observa al microscopio:

$$2u = y \frac{s'}{f_1 f_2}. \quad (6)$$

A simple vista este mismo objeto se vería bajo un ángulo

$$2u_0 = \frac{y}{l_0},$$

donde  $l_0$  es la distancia a que se ve el objeto. Para el aumento angular  $\gamma$  del microscopio, hallamos:

$$\gamma = \frac{2u}{2u_0} = \frac{l_0 s'}{f_1 f_2}. \quad (7)$$

Si suponemos que  $l_0$  es igual a la distancia de visión perfecta y que todas las demás magnitudes que entran en la fórmula (7) se toman en centímetros, tendremos que

$$\gamma = \frac{25s'}{f_1 f_2}. \quad (7a)$$

La distancia  $s'$  es practicamente igual a la distancia  $d$  que hay entre el objetivo  $L_1$  y el plano focal principal del ocular  $L_2$  (en las apreciaciones aproximadas del aumento del microscopio se puede considerar que  $d$  es igual a la longitud del tubo del mismo). Los aumentos de los microscopios alcanzan hasta 2 000.

Sobre el poder separador del microscopio hablaremos en el § 329. Para conseguir un gran poder separador el objetivo del microscopio debe recoger un haz, lo más ancho posible, de rayos procedentes del objeto. Para que en estas condiciones no se deforme la imagen a causa de las aberraciones, el objetivo debe hacerse en forma de sistema compuesto de una serie de lentes (los objetivos complejos llegan a tener hasta 10-12 lentes). Los objetos que se observan al microscopio son por lo general preparaciones más o menos transparentes que se colocan entre dos vidrios (portaobjetos y cubreobjetos o simplemente porta y cubre). Estas preparaciones se miran al trasluz y para su iluminación se utilizan unos sistemas especiales llamados condensadores.



Los objetivos y oculares del microscopio se hacen generalmente intercambiables, con lo que se consigue obtener diferentes aumentos.

**Gafas.** Los defectos ópticos del ojo, como la miopía o la hipermetropía, se corrigen por medio de gafas o lentes oftalmológicas. El ojo miope tiene una potencia óptica demasiado grande y para corregirlo se utiliza una lente divergente. El ojo hipermetrope, por el contrario, tiene una potencia óptica demasiado pequeña y para corregirlo hay que utilizar una lente convergente.

Supongamos que hay que corregir un ojo hipermetrope cuyo punto remoto  $P_R$  se encuentra detrás de la retina (fig. 277). Para que este ojo pueda observar

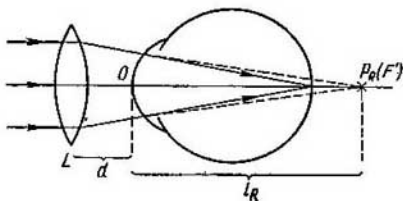


Fig. 277. Corrección de un ojo hipermetrope con una lente oftalmológica.

tranquilamente objetos infinitamente alejados hay que elegir una lente oftalmológica  $L$  que concentre el haz de rayos paralelos en el punto remoto del ojo  $P_R$ . Por consiguiente, el foco imagen de la lente  $F'$  debe coincidir con el punto remoto del ojo  $P_R$ . De aquí podemos deducir que la distancia focal imagen  $f'$  de la lente oftalmológica deberá ser igual a

$$f' = d + l_R,$$

donde  $d$  es la distancia desde la lente  $L$  hasta el vértice del ojo y  $l_R$  es la distancia desde dicho vértice hasta el punto remoto. La potencia óptica de la lente será igual a

$$\Phi = \frac{1}{f'} = \frac{1}{d + l_R}.$$

Si  $d$  y  $l_R$  se expresan en metros, la potencia óptica de la lente se obtiene en dioptrías.

**Gemelos y telémetros.** Los anteojos terrestres se unen con frecuencia formando pareja para poder observar el objeto simultáneamente con los dos ojos. Los anteojos así unidos se llaman *gemelos*.

En los gemelos, además de los anteojos con sistemas ópticos compuestos por dos lentes convergentes, se emplean anteojos que tienen por ocular una lente divergente. El primer anteojo de este tipo fue hecho por Galileo y se llama anteojo de Galileo. La lente divergente  $L_2$  se encuentra entre el objetivo  $L_1$  y su plano focal principal  $F'_1$  (fig. 278), a una distancia de este último igual a su propia distancia focal  $f'_2$ . De esta forma los focos del objetivo y del ocular coinciden y las dos lentes del anteojo de Galileo forman un sistema telescópico. El ocular da una imagen virtual del objeto que se observa. El aumento angular del anteojo de Galileo es igual a  $f_1/f'_2$ .

Los gemelos de poco aumento se hacen con dos anteojos de Galileo. Los de gran aumento (de campaña) se hacen con dos anteojos provistos de oculares

convergentes. El esquema de unos gemelos prismáticos de campaña puede verse en la fig. 279. En este caso el sistema inversor está formado por dos prismas de reflexión total  $a$  y  $b$ . Estos prismas, además de invertir la imagen, permiten

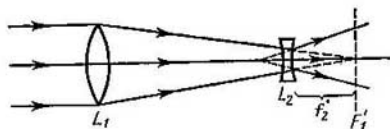


Fig. 278. Anteojo de Galileo.

acortar la longitud de los anteojos y aumentar la distancia entre los centros de los objetivos con respecto a la que hay entre las pupilas de los ojos. Este aumento contribuye a acrocentrar el efecto estereoscópico.

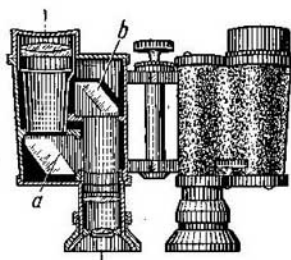


Fig. 279. Gemelos prismáticos de campaña.

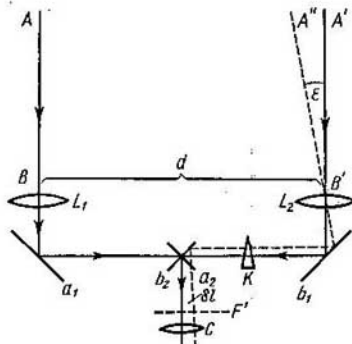


Fig. 280. Esquema de un telémetro monocular.

Los anteojos de gran efecto estereoscópico pueden utilizarse para medir la distancia que hay hasta el objeto que se observa. Cuando los anteojos se emplean para dicho fin se llaman *telémetros*.

El esquema de un telémetro monocular se muestra en la fig. 280. Los objetivos  $L_1$  y  $L_2$  se hallan separados entre sí por una gran distancia  $d$  (de hasta varios metros). Esta magnitud  $d$  se llama base del telémetro. Por medio de los espejos  $a_1$ ,  $a_2$  y  $b_1$ ,  $b_2$ , los rayos procedentes del objeto se hacen llegar al ocular  $C$ , a través del cual se observan las imágenes producidas por los objetivos  $L_1$  y  $L_2$ . Si el objeto se encuentra infinitamente lejos, los rayos  $AB$  y  $A'B'$ , que desde él llegan a los objetivos, son paralelos y ambas imágenes coinciden. Pero si el objeto se encuentra a una distancia finita, entre los rayos existirá un ángulo de paralaje  $\epsilon$  y las imágenes estarán desplazadas entre sí. Supongamos para simplificar que el objeto se encuentra sobre el eje del objetivo izquierdo. En este

caso el rayo  $A'B'$ , procedente del objeto, que incide sobre el objetivo derecho formará con el rayo  $A'B$  un ángulo  $\varepsilon$ . La imagen producida por el objetivo derecho en el plano focal estará desplazada una magnitud  $\delta l = \varepsilon f'$  con respecto a la producida por el izquierdo, siendo  $f'$  la distancia focal imagen del objetivo. Por otra parte, el ángulo  $\varepsilon$  está relacionado con la distancia  $l$ , que hay hasta el objeto que se observa, por la igualdad  $\varepsilon = \frac{d}{l}$ .

De las correlaciones anteriores se obtiene que

$$l = \frac{d \cdot f'}{\delta l}$$

La magnitud  $d \cdot f'$  es constante para cada telémetro; por lo tanto, la distancia  $l$  que hay hasta el objeto se puede hallar midiendo el desplazamiento  $\delta l$  de ambas imágenes. Por regla general la magnitud  $\delta l$  se mide haciendo coincidir las dos imágenes. Para conseguir esto, en una de las ramas o brazos del telémetro se intercala una cuña  $K$ . Cuanto mayor sea el desplazamiento  $\delta l$  tanto mayor será el ángulo que hay que inclinar la cuña. Por consiguiente, midiendo el ángulo de inclinación de la cuña se puede hallar  $\delta l$  y con esto determinar la distancia  $l$  hasta el objeto.

§ 328. Aparatos proyectores e iluminadores. El aparato proyector más simple es la cámara fotográfica, cuyo objetivo  $L$  (fig. 281) produce en el plano  $AB$  una imagen real del objeto fotografiado.

En este plano  $AB$  se encuentra la placa o película fotosensible. El objetivo fotográfico suele ser un sistema compuesto de cuatro o más lentes, corregido de cromatismo, aberración esférica y otros defectos. La nitidez de la imagen que se forma sobre la placa fotográfica se consigue desplazando el objetivo o alguna de sus partes. El objetivo tiene por lo general un diafragma de apertura variable (diafragma de iris) el cual da la posibilidad de mejorar la «profundidad»

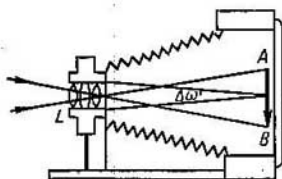


Fig. 281. Esquema óptico de una cámara fotográfica.

de foco, es decir, de enfocar con suficiente nitidez objetos que se encuentran a distintas distancias del objetivo, y al mismo tiempo sirve para regular la magnitud del flujo luminoso que entra en la cámara.

La intensidad del proceso fotoquímico que tiene lugar en la capa sensible de la placa, como dijimos en el § 305, viene determinada por la iluminación que se produce en el plano en que se encuentra dicha placa.

Según la fórmula (8) del § 323, esta iluminación  $E'$  es igual a

$$E' = kB\Delta\omega', \quad (1)$$

donde  $B$  es la luminancia del objeto,  $k$  es una magnitud que determina la pérdida de luz que se produce al pasar ésta por el objetivo

y  $\Delta\omega'$  es el ángulo sólido bajo el cual se ve el objeto desde el sitio en que se encuentra la imagen. Si el objeto que se fotografía está suficientemente lejos, la imagen se forma a una distancia del objetivo próxima a su distancia focal  $f'$ , y en este caso tendremos que el ángulo  $\Delta\omega'$  será aproximadamente igual a

$$\Delta\omega' = \frac{\pi d^2}{4f'^2},$$

donde  $d$  es el diámetro del objetivo (cuando el diafragma está abierto por completo). Poniendo esta expresión en (1), hallamos que

$$E' = \frac{k\pi}{4} \left(\frac{d}{f'}\right)^2 B. \quad (2)$$

Por la fórmula (2) vemos que la iluminación en la placa fotográfica es proporcional al cuadrado de la razón del diámetro del objetivo a su distancia focal. Esta razón  $d/f'$  suele llamarse *luminosidad del objetivo o abertura relativa*. La mayoría de los aparatos fotográficos modernos tienen una luminosidad de  $1 : 4,5 \sim 1 : 2,5$ . No obstante se pueden fabricar objetivos con abertura relativa mayor que la unidad (por ejemplo,  $1 : 0,9$ ), pero tienen el inconveniente de que para que den una imagen de buena calidad hay que hacerlos con muchas lentes, lo que conduce a un aumento de la pérdida de luz por reflexión, es decir, a una disminución del coeficiente  $k$ . Como resultado de esto puede ocurrir que un objetivo con abertura relativa grande produzca menos iluminación que otro cuya abertura relativa sea menor, pero que tenga una estructura más simple.

Hablando estrictamente, en la fórmula (1) debe entenderse por  $\Delta\omega'$  el ángulo sólido bajo el cual se ve la pupila de salida (§ 324) desde el sitio en que se encuentra la placa fotográfica. El diafragma real del objetivo fotográfico es generalmente el diafragma de iris que se halla entre sus lentes. Cuando la abertura del diafragma es la máxima posible, el ángulo  $\Delta\omega'$ , bajo el cual se ve la imagen de aquél producida por la parte siguiente del objetivo, se aproxima al ángulo bajo el cual se ve la lente posterior de dicho objetivo. Por esto se puede considerar con un grado de aproximación suficiente que cuando el diafragma está abierto por completo la iluminación viene determinada por la razón  $(d/f')^2$ , donde  $d$  es el diámetro del objetivo, como se indicó en el texto fundamental. Al disminuir la abertura del diafragma la iluminación  $E'$  disminuye.

*Linterna de proyección o proyector.* Este aparato sirve para obtener sobre una pantalla la imagen ampliada de fotografías transparentes (diapositivas). En la fig. 282 se ve el esquema óptico de una linterna de proyección o proyector:  $S$  es un foco luminoso,  $M_1N_1$  y  $M_2N_2$  son dos lentes plano-convexas que constituyen el sistema de iluminación (condensador),  $PP_1$  es la diapositiva y  $L$  el objetivo proyector. El condensador tiene por objeto aumentar la iluminación (y por consiguiente la luminancia  $B$ ) de la diapositiva.

El objetivo proyector produce sobre la pantalla una imagen ampliada, real e inversa de la diapositiva  $PP_1$ . La iluminación  $E'$  que hay en la pantalla puede determinarse por medio de la fórmula (7) del § 323:

$$E' = kB \frac{\Delta\omega}{\beta^2}, \quad (3)$$

donde  $\beta$  es el aumento lateral y  $\Delta\omega$  el ángulo sólido bajo el cual se ve el objetivo proyector  $L$  desde el sitio en que se encuentra la

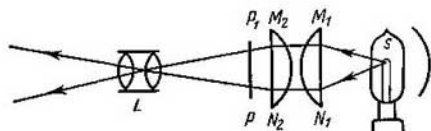


Fig. 282. Esquema óptico de una linterna de proyección.

diapositiva  $PP_1$ . Como los proyectores suelen proporcionar un gran aumento, la diapositiva  $PP_1$  se sitúa cerca del plano focal objeto del objetivo  $L$ . Por esto el valor aproximado del ángulo  $\Delta\omega$  será:

$$\Delta\omega = \frac{\pi d^2}{4f^2},$$

siendo  $d$  el diámetro del objetivo y  $f$  su distancia focal objeto. Poniendo este valor de  $\Delta\omega$  en (3), hallamos:

$$E' = \frac{\pi k}{4} \left(\frac{d}{f}\right)^2 \frac{1}{\beta^2} B. \quad (4)$$

Por la fórmula (4) puede verse que la iluminación que existe sobre la pantalla vuelve a estar determinada por la luminosidad (apertura relativa  $d/f$ ) del objetivo y además es inversamente proporcional al cuadrado del aumento lateral  $\beta$ . Cuanto mayor sea el tamaño de la imagen que se desea obtener sobre la pantalla tanto mayor será la luminancia  $B$  que debe comunicársele al objeto, es decir, tanto mayor será la intensidad del foco luminoso  $S$  que debe ponerse en el proyector.

Por este mismo esquema se construye el sistema proyector de cine. Como en este caso los aumentos son aún mayores, los aparatos proyectores de cine se proveen de fuentes de luz muy potentes, en su mayoría de arcos eléctricos.

En las salas de conferencias y en las aulas de los centros de enseñanza se suele practicar la proyección de objetos opacos (con *epidiascopios* o *epidiáscopos*), como, por ejemplo, grabados de libros.

En este caso para conseguir sobre la pantalla la iluminación necesaria hay que crear una iluminación potente en el sitio en que se halla el objeto que se quiere proyectar, para que su luminancia  $B$  sea suficiente. Esto se consigue por medio de un arco eléctrico o de varias lámparas de incandescencia. Además, los epidiascopios se proveen de un objetivo  $L$  lo más luminoso posible.

Los sistemas ópticos varían los ángulos sólidos dentro de cuyos límites se propagan los flujos luminosos y por lo tanto pueden variar la iluminación. En este hecho se funda la construcción de diversos sistemas de iluminación y entre ellos los *proyectores* que sirven para iluminar objetos lejanos. Examinemos, por ejemplo, un esquema sencillo de proyector compuesto por una fuente puntual  $S$ , de intensidad luminosa  $I$ , y de una lente  $L$  (fig. 283).

Supongamos que la lente  $L$  se ve desde el sitio en que se encuentra la fuente bajo un ángulo sólido  $\omega$ , en este caso el flujo que incide sobre la lente será igual a  $I\omega$ , y el que pasa a través de ella será:

$$F' = kI\omega, \quad (5)$$

donde  $k$  es una magnitud que indica la pérdida de luz que se produce al pasar ésta por la lente. Si la fuente  $S$  se encuentra entre la lente  $L$  y su foco objeto, se obtendrá una imagen virtual  $S'$ . El haz luminoso que sale de la lente estará comprendido entre los límites del ángulo sólido  $\omega'$ , bajo el cual se ve la lente desde el sitio en que se encuentra la imagen  $S'$ . La intensidad luminosa de este haz

$$I' = \frac{F'}{\omega'},$$

poniendo aquí en lugar de  $F'$  su valor según (5), obtenemos:

$$I' = kI \frac{\omega}{\omega'}. \quad (6)$$

Como quiera que las pérdidas de luz en una sola lente son pequeñas y, por consiguiente,  $k$  se aproxima a la unidad, de la fórmula (6) se deduce que la intensidad de la luz aumenta en el haz en la proporción  $\omega/\omega'$ , con respecto a la intensidad luminosa de la propia fuente. La magnitud  $\omega/\omega'$  puede hacerse grande y, por lo tanto, por medio de una lente se puede aumentar considerablemente la intensidad de la luz en el haz.

Colocando la fuente puntual de luz  $S$  en el plano focal principal obtendremos su imagen  $S'$  en el infinito y como resultado de esto el ángulo  $\omega'$  debe hacerse igual a cero. De acuerdo con esto la intensidad de la luz del haz que sale de la lente deberá hacerse igual a infinito. Pero en realidad toda fuente luminosa tiene extensión (además de que, debido a la difracción, no es posible conseguir un haz de rayos rigurosamente paralelos), por esta razón el ángulo  $\omega'$  es siempre distinto de cero y la intensidad de la luz no puede alcanzar un valor infinito.

En los proyectores modernos en lugar de lentes se utilizan espejos cóncavos, pero el principio en que se basa su funcionamiento coincide con el que acabamos de exponer.

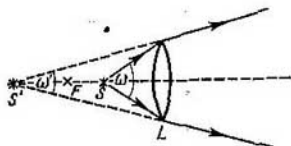
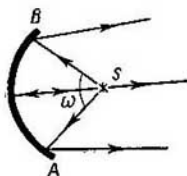


Fig. 283. Aumento de la intensidad  $I$  de la luz por medio de una lente.

Examinemos ahora el caso particular en que una fuente  $S$  de intensidad luminosa  $I = 1\,000$  cd está colocada delante de un espejo cóncavo  $AB$  (fig. 284) de forma que este último se ve desde el sitio en que está la fuente bajo un ángulo sólido  $\omega = \pi$ . Supongamos que el haz de rayos reflejados por el espejo queda comprendido entre los límites de un cono cuyo ángulo de abertura  $\alpha = 6^\circ$ . Determinemos la intensidad de la luz  $I'$  en el haz considerando que el coeficiente de reflexión  $k$  del espejo es igual a 0,8. Para hallar la intensidad de la luz  $I'$  por la fórmula (6) hay que determinar previamente el ángulo sólido  $\omega'$ . Este ángulo (véase el § 302) será:



$$\omega' = 4\pi \sin^2 \frac{\alpha}{4} \approx \pi \frac{\alpha^2}{4},$$

donde  $\alpha$  debe expresarse en radianes. Poniendo este valor de  $\omega'$  en (6), obtenemos:

$$I' = kI \frac{4\omega}{\pi\alpha^2}.$$

Poniendo aquí  $\omega = \pi$ ,  $\alpha = 6^\circ \approx 0,1$  rad y  $k = 0,8$  hallamos:

$$I' = 0,8I \frac{4}{0,1^2} = 320I.$$

Fig. 284. Esquema de un proyector de espejo (reflector).

Por consiguiente, gracias al espejo cóncavo, la intensidad de la luz en el haz aumenta 320 veces, es decir, cuando  $I = 1\,000$  cd obtenemos que  $I' = 320\,000$  cd.

En los proyectores modernos se consiguen haces con ángulos de divergencia de cerca de  $2^\circ$ , cuya intensidad luminosa es de centenares de millones de bujías (candelas).

§ 329. Poder separador de los instrumentos ópticos. Hasta ahora hemos considerado que los instrumentos ópticos pueden dar la imagen puntual de un punto objeto y que los defectos como la aberración esférica, el astigmatismo, etc., pueden corregirse en principio. No obstante, en el § 327 tuvimos ya que indicar que en el caso del telescopio las estrellas producen una figura de difracción en el plano focal del objetivo. En realidad el fenómeno de la difracción tiene lugar en todos los sistemas ópticos y cada punto del objeto se representa en el plano focal por un círculo de difracción. Esta circunstancia limita el número de detalles que pueden resolverse o distinguirse en la imagen y marca el límite de las ampliaciones que tienen sentido práctico.

En el telescopio es donde la difracción presenta un carácter más simple, razón por la cual empezaremos por ocuparnos de este instrumento. Cuando con el telescopio se observa una estrella, como ya dijimos, sobre el objetivo incide un haz de rayos paralelos y en su plano focal se forma una figura de difracción, que estudiamos en el § 269 y que está representada en la fig. 88. Cerca del 84% de todo el flujo luminoso corresponde a la mancha brillante central de esta figura de difracción y únicamente cerca de un 16% corresponde a los anillos que la rodean. Por esto, en adelante podemos prestar atención a dichos anillos. Cuando se observan dos estre-

llas muy próximas las figuras de difracción que producen se superponen con frecuencia y resulta una mancha brillante más o menos alargada cuya luminosidad no es homogénea. Podemos preguntarnos, ¿con qué caso esta mancha puede percibirse todavía como la imagen de dos estrellas y cuándo será imposible asegurar que está formada por dos estrellas y no por una sola?

Aquí, lo mismo que en el caso de la separación de dos líneas espectrales (§ 271), podemos guiarnos por el criterio de Rayleigh, es decir, considerar que dos figuras de difracción se pueden resolver si en la curva que representa la suma de sus intensidades la caída en

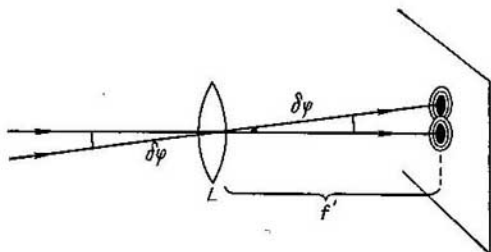


Fig. 285. Distancia angular  $\delta\varphi$  entre dos objetos puntuales que apenas se pueden resolver.

el mínimo alcanza un 20%, cosa que el ojo puede percibir por contraste como un espacio oscuro entre dos máximos.

En dos figuras de difracción superpuestas debidas a sendos orificios circulares la caída alcanzará el 20% en el caso en que *el máximo de una de las curvas coincida con el primer mínimo de la otra curva*. La distancia angular entre el máximo principal de la figura de difracción producida por un orificio circular (§ 269) y su primer anillo oscuro es igual a  $\delta\varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D}$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda y  $D$  el diámetro del orificio. En nuestro caso el orificio es la montura del objetivo y, por lo tanto,  $D$  coincide con el diámetro del objetivo del telescopio. Las distancias angulares dentro de los límites de las figuras de difracción se determinan por los ángulos comprendidos entre las rectas trazadas desde el centro del objetivo  $L$  (fig. 285) a los puntos correspondientes de las figuras de difracción. De aquí obtenemos que el criterio de Rayleigh referido a la separación de dos estrellas se cumplirá si la distancia angular entre ellas es

$$\delta\varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (1)$$



Por la fórmula (1) vemos que *cuanto mayor sea el diámetro del objetivo del telescopio tanto más próximas podrán hallarse las estrellas que permite separar.*

El aumento del ocular del telescopio debe elegirse de tal forma que las manchas de difracción separadas por el objetivo sean separadas también por el ojo, es decir, que se observen bajo un ángulo de cerca de  $1'$ . Cuando las estrellas se fotografían la distancia lineal  $\delta y'$  entre los centros de sus figuras de difracción deberá ser mayor que las dimensiones de los granos de la emulsión de la placa fotográfica, cosa que corresponde a distancias del orden de 0,01 mm. Si  $f'$  es la distancia focal imagen del objetivo del telescopio, la distancia lineal  $\delta y'$  entre las imágenes de las estrellas que apenas se pueden separar será

$$\delta y' = f' \cdot \delta \varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D} f'. \quad (2)$$

Con los métodos microfotométricos modernos se puede descubrir el mínimo de una iluminación del orden de un 10 y hasta de un 5% y, por consiguiente, resolver estrellas más próximas, que las que satisfacen el criterio de Rayleigh.

Las condiciones de separación (1) y (2), que hemos deducido para el telescopio, son aplicables a los anteojos terrestres, cuando sirven para observar objetos muy distantes, y a las cámaras fotográficas, cuando se fotografían objetos lejanos. Si el objeto está cerca del objetivo, el haz que partiendo de él incide sobre este último no puede considerarse formado por rayos paralelos. En este caso el cálculo del papel que desempeña la difracción al formarse las imágenes es más complicado. Un caso de este tipo, en que el objeto que se observa se halla cerca del objetivo, es el que tenemos en el microscopio. Por esto, el cálculo exacto de la influencia de la difracción en el microscopio es un problema difícil de resolver en el que nos detendremos más adelante (§ 330). Aquí nos limitaremos a hacer un simple cálculo del poder separador del microscopio, partiendo para ello de la suposición de que cada punto del objeto es una fuente de luz independiente, que produce en el plano focal del objetivo un círculo de difracción cuyas dimensiones angulares son aproximadamente iguales a las que estudiamos en el caso de la difracción de un haz de rayos paralelos. En estas condiciones podemos considerar que dos puntos contiguos del objeto resultarán separados cuando los centros de sus imágenes se encuentren entre sí a la distancia lineal  $\delta y'$  expresada por la fórmula (2), donde en lugar de  $f'$  habrá que poner la distancia  $s'$  que haya desde el objetivo hasta el punto en que se encuentra la imagen (fig. 286):

$$\delta y' = 1,22 \frac{\lambda}{D} s'. \quad (3)$$

La distancia entre dos puntos del objeto que apenas se pueden resolver la designaremos por medio de  $\delta y$ .

Los objetivos de los microscopios siempre se calculan de forma que se cumpla la condición de los senos (§ 321) con relación a sus puntos conjugados; por esto tenemos que

$$n \operatorname{sen} u \cdot \delta y = n' \operatorname{sen} u' \cdot \delta y', \quad (4)$$

donde  $n$  y  $n'$  son respectivamente los índices de refracción de las sustancias que hay delante del objetivo del microscopio y detrás de él.

En los microscopios la imagen siempre se forma en el aire, por lo tanto  $n' \cong 1$ ; pero la preparación puede hallarse en una sustancia distinta del aire (véase más adelante lo referente a la inmersión), por esto, para generalizar, no consideraremos que  $n$  sea igual a la unidad. Además, por la fig. 286, tenemos:

$$\operatorname{sen} u' \cong \frac{D/2}{s'}.$$

Poniendo los valores indicados de  $n'$  y  $\operatorname{sen} u'$  en (4), hallamos que

$$\delta y' = \frac{2s'}{D} \cdot n \operatorname{sen} u \cdot \delta y.$$

Comparando esta expresión de  $\delta y'$  con la (3), obtenemos:

$$\frac{2s'}{D} \cdot n \operatorname{sen} u \cdot \delta y = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot s',$$

de donde hallamos que la distancia entre dos puntos que apenas se pueden resolver será:

$$\delta y = 0,61 \frac{\lambda}{n \operatorname{sen} u}. \quad (5)$$

La magnitud  $A = n \operatorname{sen} u$  se llama *apertura numérica* del objetivo del microscopio. Si el objeto se halla en el aire,  $n = 1$ , y entonces, de acuerdo con la fórmula (5), se deduce que el microscopio permite resolver objetos que se encuentran entre sí a una distancia  $\delta y = 0,61 \frac{\lambda}{\operatorname{sen} u}$ . Para los objetivos de los microscopios el ángulo  $u$  es aproximadamente igual a  $\pi/2$  y, por consiguiente,  $\operatorname{sen} u \cong 1$ , de donde obtenemos que el microscopio permite resolver objetos que se encuentran entre sí a distancias del orden de  $\frac{1}{2}\lambda$ . Cuando las observaciones son visuales la longitud de onda  $\lambda$  se refiere a la zona visible del espectro, es decir, representa una magnitud del orden de  $5 \cdot 10^{-5}$  cm, por consiguiente, el microscopio da la posibilidad de resolver objetos que se encuentren a una distancia del orden de  $3 \cdot 10^{-5}$  cm.

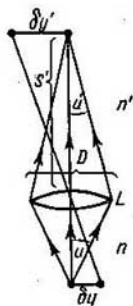


Fig. 286. Esquema para deducir el poder separador del microscopio.

Por la fórmula (5) vemos que el poder separador del microscopio puede aumentar si el objeto se sumerge en una sustancia cuyo índice de refracción  $n > 1$ . Esto se consigue de la siguiente forma: la preparación que ha de observarse al microscopio, y que generalmente es una sección delgada, se pega entre dos vidrios planos (portaobjetos y cubreobjetos), con la particularidad de que la sustancia para pegar se elige de manera que su índice de refracción sea igual al de los vidrios (generalmente  $n = 1,5$ ). Para que en estas condiciones la reflexión total en la superficie de separación entre el cubreobjetos y el aire no limite el valor del ángulo de apertura  $u$  (fig. 287, a), entre el cubreobjetos y la primera lente del objetivo se interpone una gota de aceite transparente que tiene el mismo índice de refracción  $n$ . Entonces, como puede verse en la fig. 287, b, el ángulo  $u$  puede hacerse aproximadamente igual a  $\pi/2$ . Este procedimiento se conoce con

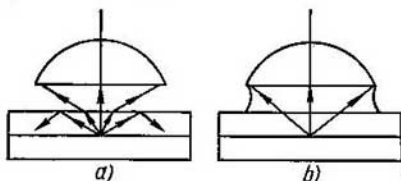


Fig. 287. Efecto que produce la inmersión.

el nombre de *inmersión*. Por medio de la inmersión con  $n = 1,5$  la apertura numérica del microscopio puede hacerse llegar hasta 1,4 y su poder separador se puede aumentar aproximadamente 1,5 veces, en comparación con el que se consigue cuando el espacio que hay entre la preparación y el objetivo está ocupado por el aire.

Para que los detalles resueltos por el objetivo del microscopio puedan percibirse separadamente por el ojo, el aumento del ocular deberá elegirse de forma que dichos detalles se vean bajo un ángulo de cerca de  $1'$ .

El ocular no puede añadir detalles que no hayan sido resueltos por el objetivo del microscopio. Pero como quiera que la definición del poder separador por el criterio de Rayleigh tiene carácter aproximado, el número de detalles que el ojo puede distinguir al microscopio y su grado de fidelidad aumenta en realidad cuando se toma un ocular cuyo aumento es algo mayor que el antes indicado.

Cuando se trata de fotografiar objetos al microscopio el poder separador puede elevarse pasando a utilizar rayos ultravioletas con longitud de onda menor que la de los rayos visibles.

Un microscopio ultravioleta permite (siendo  $\lambda \cong 2,5 \cdot 10^{-5}$  cm) resolver detalles dos veces más pequeños que los que se consiguen separar con el microscopio ordinario.

§ 330. Fenómenos de difracción en el microscopio. En el § 329, al estudiar el poder separador del microscopio, consideramos que cada punto del objeto

era una fuente de luz independiente. Las vibraciones procedentes de puntos diferentes no son coherentes. Cada punto del objeto origina en el plano focal del objetivo su círculo de difracción. En los sitios en que estos círculos de difracción se superponen parcialmente los rayos no interfieren entre sí y sus iluminaciones simplemente se suman. Estos razonamientos nos permitieron determinar el poder separador del microscopio examinando la curva que representa la suma de la distribución de las iluminaciones de dos círculos de difracción contiguos. No obstante, los objetos que se observan al microscopio no tienen luminosidad propia en la mayoría de los casos, sino que reciben la iluminación de una fuente luminosa externa. Por esta razón, las vibraciones que parten de los distintos puntos del objeto son, en cierta medida, coherentes. Serán totalmente coherentes las vibraciones que parten de distintos puntos del objeto cuando éste sea iluminado por un haz paralelo de rayos coherentes, es decir, por un haz obtenido por medio de una lente en cuyo plano focal se encuentre una fuente luminosa puntual.

Pero la iluminación del objeto se consigue generalmente dirigiendo sobre él la imagen de una fuente luminosa, de dimensiones finitas, por medio de un condensador. En este caso es de esperar que los rayos que parten de los distintos puntos del objeto tampoco sean coherentes, puesto que cada punto del objeto será iluminado por un sitio diferente de la fuente. Pero esta deducción sólo es justa para aquellos puntos del objeto que no están demasiado próximos entre sí. Los puntos del objeto que están próximos pueden ser iluminados por rayos procedentes de un mismo punto de la fuente luminosa, ya que el sistema condensador tiene de por sí un poder separador finito (al mismo tiempo que aberraciones) y la imagen que cada punto de la fuente producirá después de atravesar dicho sistema será un círculo de dimensiones también finitas. Esta es la causa de que el objeto, por lo general, resulte iluminado por luz compuesta, coherente y no coherente.

Como quiera que la distribución de la iluminación producida por los rayos de luz no coherente (que no interfieren entre sí) es diferente de la que producen los rayos coherentes (que interfieren entre sí), cabe suponer que el poder separador del microscopio depende del procedimiento de iluminación que se emplee. Abbe desarrolló la teoría del poder separador del microscopio para el caso límite en que la luz es totalmente coherente.

Para facilitar el cálculo de la interferencia de los rayos procedentes de los distintos puntos del objeto iluminado con luz coherente, Abbe eligió como objeto una red de difracción transparente. Supongamos que la red  $AB$ , cuya constante es  $b$ , se ilumina con un haz paralelo  $OO'$  de rayos coherentes (fig. 288). La imagen de la red que produce el objetivo del microscopio  $L$  se forma en el plano  $A'B'$ . En el plano focal principal  $F$  del objetivo  $L$  lo que se obtiene es la imagen de los espectros de distintos órdenes que produce la red. Por la fórmula (7) del § 270 el espectro de orden  $k$  es originado por los rayos que se difractan formando un ángulo  $\varphi$  determinado por la correlación:

$$b \operatorname{sen} \varphi = k\lambda. \quad (1)$$

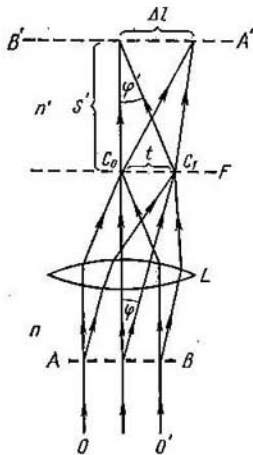


Fig. 288. Formación de la imagen de una red de difracción en el microscopio.

Cuando se trata de un sistema de inmersión (§ 329) la red está sumergida en un líquido cuyo índice de refracción  $n$ , debiendo entenderse por  $\lambda$  la longitud de onda en este líquido. Si lo que se entiende por  $\lambda$  es la longitud de onda en el vacío (prácticamente en el aire), como generalmente se hace, hay que dividir por  $n$  la parte derecha de la igualdad (1), y entonces obtenemos:

$$b \operatorname{sen} \varphi = k \frac{\lambda}{n}. \quad (1a)$$

Cuando  $k = 0$  se obtiene una franja central brillante. Los rayos procedentes de esta franja central y de los diferentes espectros interfieren en el plano  $A'B'$  dando lugar a la formación de la imagen de la red  $AB$ . Si una parte de los espectros está cerrada (tapada), la imagen de la red se deforma. Supongamos, por ejemplo, que se tapan todos los espectros y que solamente se deja la franja central brillante  $C_0$ . Esta franja produce en el plano  $A'B'$  una iluminación uniforme. De esta forma, si se deja abierta únicamente la franja central brillante, en el ocular enfocado al plano  $A'B'$  veremos un campo iluminado uniformemente, pero no la imagen de la red.

Supongamos ahora que está abierta la franja central  $C_0$  y uno de los espectros, por ejemplo, el  $C_1$ , correspondiente a  $k = 1$ . Para simplificar consideremos que la red se ilumina con luz monocromática. En este caso el espectro  $C_1$  se reduce a un máximo y en el plano focal principal del objetivo  $F$  se encontrarán dos fuentes de luz coherentes, la franja central  $C_0$  y el máximo  $C_1$ , situadas a una distancia  $t$  una de otra. Los rayos procedentes de estas fuentes, interfiriendo entre sí en el plano  $A'B'$ , originan una serie de franjas de interferencia paralelas. La distancia entre dos franjas brillantes contiguas, según el cálculo que expresamos en el § 256, es igual:

$$\Delta l = \frac{\lambda}{t} s',$$

donde  $s'$  es la distancia que hay desde el plano focal principal  $F$  hasta el plano  $A'B'$ . Por la fig. 288 tenemos que  $\frac{t}{s'} \cong \operatorname{sen} \varphi'$ , de donde obtenemos que

$$\Delta l = \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \varphi'}. \quad (2)$$

Los trazos transparentes de la red se encuentran entre sí a una distancia  $b$ ; llamando  $\Delta y'$  a la dimensión de su imagen obtenida en el plano  $A'B'$  de acuerdo con las reglas de la óptica geométrica, por la correlación de los senos (§ 329), tenemos:

$$nb \operatorname{sen} \varphi = n' \Delta y' \operatorname{sen} \varphi'.$$

Suponiendo que el índice de refracción del medio en que se forma la imagen es  $n' = 1$  (el aire), de la última igualdad obtenemos:

$$\Delta y' = \frac{nb \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi'}.$$

Como quiera que limitamos el haz que sale del objetivo del microscopio de forma que solamente pudieran pasar la franja central brillante y uno de los espectros, el valor del  $\operatorname{sen} \varphi$  vendrá determinado por la igualdad (1a), en la cual hay que considerar  $k = 1$ , entonces  $nb \operatorname{sen} \varphi = \lambda$  y

$$\Delta y' = \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \varphi'}.$$

Comparando esta expresión con la (2), obtenemos: que las franjas de interferencia que se forman en el plano  $A'B'$  se encuentran entre sí a una distancia  $\Delta l$ , igual

a la distancia  $\Delta y'$  a que deben encontrarse las imágenes de las franjas brillantes de la red. En el plano  $A'B'$  se produce una especie de «imagen» de la red, la cual se diferencia de la imagen geométrica correcta en que la transición desde los máximos, correspondientes a las franjas brillantes de la red, hasta los mínimos, correspondientes a sus franjas oscuras, no es brusca, sino paulatina. Se puede demostrar con todo rigor que si se deja pasar un mayor número de espectros, como resultado de las interferencias de los rayos procedentes de ellos, la transición entre los máximos y los mínimos en el plano  $A'B'$  se hará más brusca, es decir, la «imagen» se parecerá más al objeto.

De los razonamientos expuestos podemos deducir que los trazos de la red estarán resueltos en la figura de interferencia que se forma en el plano  $A'B'$

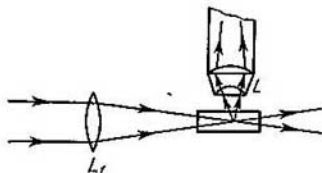


Fig. 289. Esquema para la observación de partículas ultramicroscópicas.

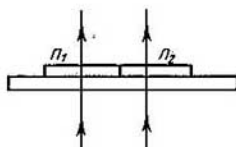


Fig. 290. Paso de los rayos a través de partes del objeto cuyos índices de refracción son diferentes.

siempre que se deje pasar el máximo central y, por lo menos, uno de los espectros, es decir, siempre que el ángulo  $\varphi$  cumpla la condición:

$$\text{sen } \varphi \geq \frac{\lambda}{nb}.$$

En otras palabras, el microscopio puede resolver los trazos de la red si éstos se encuentran entre sí a una distancia

$$b \geq \frac{\lambda}{n \text{ sen } \varphi}.$$

En el § 329 vimos que dos puntos luminosos pueden ser resueltos por el microscopio si la distancia entre ellos no es menor de  $0,61 \frac{\lambda}{n \text{ sen } \varphi}$ . De esta forma resulta que el poder separador del microscopio, cuando el objeto se ilumina con luz coherente, es el mismo aproximadamente que cuando se observa un objeto cuyos puntos aislados emiten rayos no coherentes.

De la teoría de Abbe se deduce que la «imagen» puede resultar no semejante geoméricamente al objeto si de forma artificial se tapa una parte de los espectros que se obtienen en el plano focal principal  $F$  del objetivo. Por ejemplo, si se dejan pasar solamente el máximo central y los espectros de órdenes pares ( $k = \pm 2, \pm 4, \dots$ ), las franjas brillantes se encontrarán en la «imagen» a una distancia entre sí  $\Delta l' = \frac{1}{2} \Delta y'$ , es decir, la «imagen» dará dos veces más trazos que los que en realidad existen en la red que se observa. Estas deducciones han sido confirmadas por las observaciones llevadas a cabo colocando diafragmas de distinta forma en el plano focal principal  $F$ .

El desarrollo ulterior de la teoría del microscopio se debe a los físicos soviéticos L. I. Mandelshtam y D. S. Rozhdiéstvenski. El primero desarrolló concretamente la teoría relativa a los objetos con luminancia propia y demostró tanto teórica como experimentalmente que una serie de deducciones de Abbe, entre ellas la de la posibilidad de que se duplique el número de trazos de la red, conservan su validez cuando se trata de objetos con luminancia propia. D. S. Rozhdiéstvenski investigó el caso más general, es decir, el caso en que la luz es coherente parcialmente, y puso de manifiesto el papel tan importante que desempeñan los fenómenos de la interferencia entre los haces luminosos que pasan a través de las distintas partes del objeto. En la mayoría de los casos los objetos que se observan al microscopio son más o menos transparentes. Los rayos que pasan a través de las distintas partes del objeto adquieren cierta diferencia de marcha e interfieren entre sí. En los bordes del objeto se producen franjas de interferencia que deforman aún más la imagen.

Las deducciones que sacamos tanto de este párrafo como del § 329 demuestran que cuando el poder separador del microscopio se aproxima al límite comienza a desaparecer la semejanza geométrica entre el objeto y su imagen. En estas condiciones, cuando la observación se hace visualmente, los microscopios permiten resolver, sin recurrir a la inmersión, objetos cuyas dimensiones sean del orden de  $0,3\mu$ , y recurriendo a ella, objetos del orden de  $0,2\mu$ . Cuando la observación se hace por medio de la fotografía con rayos ultravioletas pueden separarse objetos con dimensiones del orden de  $0,1\mu$ .

Si no se exige la semejanza geométrica entre el objeto que se observa y su imagen, el microscopio da la posibilidad de descubrir partículas con dimensiones mucho menores que una décima de micra. Esto se consigue con un procedimiento de observación basado en la difusión de la luz por las partículas pequeñas. El esquema de este procedimiento es el que se representa en la fig. 289. Un haz luminoso se concentra por medio de la lente  $L_1$  sobre una cubeta en la que se encuentran en estado de suspensión pequeñas partículas. Estas partículas se conocen generalmente con el nombre de *ultramicroscópicas*. La luz difundida independientemente por una de las partículas ultramicroscópicas incide sobre el objetivo del microscopio  $L$  y produce en su plano focal un círculo de difracción. La existencia de este círculo pone de manifiesto la presencia de partículas y sus movimientos. El conjunto de las partículas que se observan tiene el aspecto de estrellitas brillantes sobre fondo negro (iluminación con campo oscuro). Este procedimiento «ultramicroscópico» permite descubrir la existencia de partículas de hasta  $0,005\mu$  de diámetro.

Otro procedimiento que se utiliza en la microscopía moderna es el que sirve para observar objetos que no absorben la luz, sino que únicamente producen en los haces luminosos ciertas diferencias de marcha. La mayoría de los objetos biológicos que se suelen observar al microscopio son transparentes y hay que teñirlos previamente de tal forma que los diferentes tejidos tomen distintas coloraciones. La elección de estos tintes suele ser difícil. Pero los tejidos sin teñir tampoco son ópticamente homogéneos, puesto que tienen diferentes índices de refracción de la luz. Por esto, entre las ondas que pasan a través de la parte del objeto cuyo índice de refracción es  $n_1$  (fig. 290) y las que pasan a través de la parte con índice de refracción  $n_2$  surge una diferencia de fase determinada. Esta diferencia de fase no se pone de manifiesto directamente. Pero en el año 1935 Zernike indicó que introduciendo en los rayos que producen la franja central brillante  $C_0$  (véase la fig. 288) una diferencia de fase adicional de  $\pi/2$  se puede conseguir que estos rayos interfieran con los que se difractan en las heterogeneidades del objeto que se observa y de esta forma descubrir la estructura de éste sin necesidad de teñirlo. Este procedimiento se llama de *observación en contraste de fase*.

*Fotones*

§ 331. Teoría clásica de la radiación del electrón y límites dentro de los cuales puede aplicarse. En los capítulos anteriores de nuestro curso hemos visto que un gran número de fenómenos ópticos son explicables si se admite que dentro de los átomos y de las moléculas existen electrones que vibran e irradian luz cuya frecuencia  $\nu$  es la misma que la de sus propias vibraciones. Esta hipótesis se confirma por las deducciones de la electrodinámica clásica, de las cuales resulta que todo electrón que se mueva con una aceleración  $\ddot{x}$  emitirá ondas electromagnéticas cuya potencia será igual a

$$W = \frac{2e^2\ddot{x}^2}{3c^3}. \quad (1)$$

Cuando el electrón realiza un movimiento vibratorio armónico de amplitud  $a$  y frecuencia  $\nu$ , en torno a él se produce una onda electromagnética esférica de la misma frecuencia  $\nu$ .

La potencia de la radiación del electrón (media con respecto al tiempo) es igual en este caso, y de acuerdo con la fórmula (1), a la magnitud

$$\overline{W} = \frac{16\pi^4 e^2 \nu^4 a^2}{3c^3}. \quad (2)$$

Si el movimiento que realiza el electrón no es una vibración armónica pura, este movimiento puede desarrollarse en serie de Fourier en sus componentes armónicas. A cada una de las componentes de amplitud  $a_i$  le corresponderá una potencia de emisión  $\overline{W}_i$  que vendrá determinada por la igualdad (2).

De hecho el electrón nunca realiza vibraciones armónicas puras, puesto que al irradiar pierde energía. Por esta razón la amplitud de sus vibraciones se amortigua siempre que no se le comunique constantemente energía de cualquier fuente externa. Un electrón de este tipo, que realiza vibraciones amortiguadas, emite una radiación cuya amplitud  $a_i$  se diferencia sensiblemente de cero en un intervalo de frecuencias finito (compárese con lo expuesto en el t. I, § 104). En otras palabras, el electrón que realiza vibraciones amortiguadas no emite una luz rigurosamente monocromática, sino una raya espectral de anchura finita. La anchura  $\delta\nu$  de esta raya,



llamada «natural», viene determinada por la magnitud

$$\delta\nu = \frac{\gamma}{2\pi}, \text{ donde } \gamma = \frac{8\pi^2 e^2 v^2}{3c^3 m}. \quad (3)$$

Por la fórmula (3) puede verse que la anchura natural depende únicamente de la carga  $e$ , de la masa del electrón  $m$ , de la velocidad de la luz  $c$  y de la frecuencia de la emisión  $\nu$ . Para frecuencias del orden de  $10^{15} \text{ seg}^{-1}$  (luz visible) esta anchura es igual a  $\delta\nu \cong \cong 4 \cdot 10^7 \text{ seg}^{-1}$ , es decir, muy pequeña relativamente. Por esto podemos considerar con grado de aproximación suficiente que el electrón que dentro de un átomo o de una molécula tenga una frecuencia propia  $\nu$  de vibraciones armónicas irradiará, de acuerdo con la electrodinámica clásica, una luz de esta misma frecuencia  $\nu$ .

El desarrollo en integral de Fourier da para el movimiento no periódico del electrón en el caso general una amplitud  $a_i$  diferente de cero para todas las frecuencias  $\nu_i$ . De esto se deduce que, en este caso, la radiación se caracterizará por tener ondas de todas las longitudes posibles, es decir, por ser *continua* y no de rayas.

Un ejemplo de radiación continua del electrón puede ser la llamada *radiación de frenado* o de enfrenamiento, que surge cuando se detiene el electrón. Aplicando la fórmula (1) obtenemos que el electrón que experimenta el frenado irradia durante el tiempo  $dt$  una energía

$$W \cdot dt = \frac{2e^2 \ddot{x}^2}{3c^3} dt.$$

Suponiendo que  $\Delta t$  sea el tiempo durante el cual se frena por completo el electrón, es decir, el tiempo durante el cual varía su velocidad desde el valor primitivo  $v$  hasta cero, y que el frenado se produce con una aceleración constante  $\ddot{x} = w_0$ , obtendremos que la cantidad total de energía  $E$  irradiada durante el tiempo  $\Delta t$  será:

$$E = \int_0^{\Delta t} \frac{2e^2 w_0^2}{3c^3} dt = \frac{2e^2 w_0^2}{3c^3} \Delta t.$$

Y como quiera que cuando la aceleración es constante tiene lugar la correlación  $w_0 = \frac{v}{\Delta t}$ , la última fórmula da que

$$E = \frac{2e^2 v^2}{3c^3 \Delta t}. \quad (4)$$

Por la fórmula (4) vemos que la radiación de energía será tanto mayor cuanto mayor sea la velocidad inicial  $v$  del electrón y menor el tiempo  $\Delta t$  de frenado. Esto significa que solamente puede esperarse una radiación sensible de energía cuando se frene bruscamente un electrón rápido. Estas condiciones se cumplen cuando se

bombardea un anticátodo sólido con electrones rápidos, como ocurre en los tubos de rayos X.

El hecho de que el tiempo  $\Delta t$  de frenado sea muy pequeño da lugar a que las ondas emitidas sean cortas. De esta forma se explica el origen de los rayos X.

El desarrollo del movimiento retardado de un electrón en integral de Fourier muestra que el espectro que en estas condiciones irradia dicho electrón es continuo y que tiene un máximo de energía que se encontrará en una región de longitudes de onda tanto más cortas cuanto mayor sea la velocidad inicial de los electrones. La experiencia confirma esta conclusión. En la fig. 291 pueden verse las curvas de distribución de la energía en un espectro continuo de rayos X obtenido al chocar el haz de electrones con un anticátodo de wolframio. Estas curvas corresponden a distintas diferencias de potencial de aceleración  $V - V_0$ , las cuales se variaron desde 20 hasta 50 kV.

Como otro ejemplo de radiación del electrón mencionaremos la que tiene lugar en los llamados betatrones y sincrotrones (§ 377). En estos aparatos el electrón, al moverse impulsado circularmente por un campo eléctrico rotacional alcanza, velocidades muy grandes, próximas a la velocidad de la luz. En el año 1944 los físicos soviéticos I. Pomeranchuk y D. Ivanenko predijeron que los electrones que se mueven circularmente en el betatrón o sincrotrón debían radiar. Poco tiempo después esta radiación fue observada en un sincrotrón que aceleraba los electrones hasta una energía de  $7 \cdot 10^7$  eV. La órbita del haz de electrones tenía un diámetro de 29,3 cm. La irradiación, que fue observada visualmente, tenía el aspecto de una manchita brillante de luz blanca cuando se miraba por el tubo de vacío, en el plano de la órbita, al encuentro del electrón.

Los ejemplos citados demuestran que es posible aplicar la electrodinámica clásica a los cálculos de la radiación del electrón cuando éste tiene movimiento acelerado. Irradian únicamente los electrones que se mueven con aceleración; los electrones cuyo movimiento es uniforme no deben irradiar. Esta conclusión solamente es verdadera mientras la velocidad  $v$  del electrón que se mueve es menor que la velocidad de fase de la luz. La luz se propaga en el

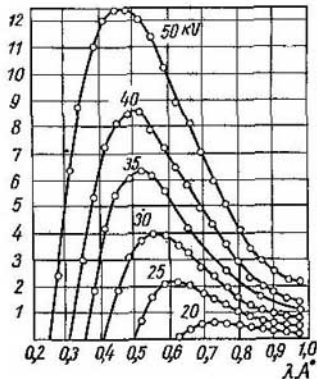


Fig. 291. Distribución de la energía en el espectro continuo de los rayos X.

vacío con la máxima velocidad posible  $c$  y, por consiguiente, la velocidad  $v$  del electrón no puede ser mayor que  $c$ . Pero cuando el electrón se mueve en una sustancia transparente cualquiera la cosa varía. En las sustancias transparentes la velocidad de fase de la luz es igual a  $c/n$ , siendo  $n$  el índice de refracción de la sustancia. Los cuerpos sólidos y líquidos tienen índices de refracción  $n$  considerablemente mayores que la unidad y, por lo tanto, la velocidad del electrón puede superar el valor  $c/n$ . La luminosidad del electrón cuando se mueve con una velocidad «ultraluminosa» fue descubierta en el año 1934 por P. A. Cherenkov al observar el paso a través de un líquido de electrones muy rápidos producidos por los rayos  $\gamma$  y de elementos radiactivos. La teoría de este fenómeno fue elaborada por I. M. Frank y I. E. Tamm.

La luminosidad descubierta por P. A. Cherenkov se encuentra distribuida dentro de los límites de un cono cuyo ángulo de abertura  $\theta$  puede determinarse por la correlación

$$\cos \theta = \frac{c}{vn}, \quad (5)$$

donde  $\theta$  es el ángulo medido a partir de la dirección en que se mueve el electrón. La fórmula (5) da para  $\theta$  valores menores de  $\pi/2$ , por consiguiente, la luminosidad puede observarse únicamente en la misma dirección en que el electrón se mueve. En el sentido contrario no existe irradiación luminosa.

Esta correlación está en perfecto acuerdo con los experimentos.

Así, por ejemplo, para el benceno se observó un valor de  $\theta = 38^{\circ}30'$ , siendo el calculado por la fórmula (5) igual a  $38^{\circ}40'$ .

Todos los ejemplos expuestos demuestran la coincidencia de las deducciones de la electrodinámica clásica con los datos experimentales. No obstante, a medida que la Física se ha ido desarrollando se han ido acumulando hechos que están en desacuerdo tanto con la teoría clásica de la radiación como con las hipótesis sobre la naturaleza ondulatoria de la luz en general. La primera disconformidad evidente de las deducciones de la teoría clásica de la radiación con los datos experimentales se puso de manifiesto al estudiar la distribución de la energía según las longitudes de onda en el espectro del cuerpo negro. Como dijimos en los §§ 309 y 310, partiendo de los principios termodinámicos generales se puede demostrar que la distribución de la energía en el espectro del cuerpo negro es una función universal que depende exclusivamente de la longitud de onda y de la temperatura absoluta. Sin embargo la forma justa de esta función solamente pudo ser establecida por Planck después de sentar un criterio extraño totalmente a las concepciones clásicas, es decir, después de postular que la luz es emitida en forma de porciones aisladas (cuantos)  $\varepsilon = h\nu$ , siendo  $\nu$  la frecuencia de la radiación y  $h$  la constante de Planck, que es igual a  $6,624 \cdot 10^{-27}$  erg seg.

Otro ejemplo que demuestra que la teoría clásica de la radiación no sirve es el caso de la radiación de frenamiento de los rayos X. Ya hemos indicado que el desarrollo del movimiento retardado en serie de Fourier explica el carácter continuo de su radiación, con la particularidad de que en este desarrollo pueden existir frecuencias tan grandes como se desee, de donde se deduce que el espectro continuo de los rayos X no debe estar limitado por el lado de las ondas cortas, aunque su intensidad en la región de estas ondas pueda ser pequeña. Pero la experiencia demuestra que las curvas de la distribución de la energía en el espectro continuo de los rayos X tiene un límite por el lado de las longitudes de onda cortas (fig. 291). La situación de este límite depende de la velocidad de los electrones que chocan con el anticátodo, pero no del material de que está hecho este último. Cuanto mayor es la velocidad de los electrones tanto más corta es la longitud de onda  $\lambda_0$  a que corresponde el límite del espectro. Numerosas mediciones han demostrado que la longitud de onda  $\lambda_0$  a que corresponde el límite del espectro es inversamente proporcional a la diferencia de potencial (voltaje)  $V_1 - V_2$  que acelera a los electrones:

$$\lambda_0 = \frac{K}{V_1 - V_2}. \quad (6)$$

Si en la fórmula (6) la longitud de onda  $\lambda_0$  se mide en angstrom y la diferencia de potencial  $V_1 - V_2$  en voltios, el coeficiente de proporcionalidad  $K$  tendrá el valor  $K = 12\,350$ .

La existencia del límite de las ondas cortas en el espectro continuo de los rayos X se explica directamente por la hipótesis de Plank sobre la radiación de la energía en porciones  $\varepsilon = h\nu$ . Efectivamente, si la radiación se debe a la energía de los electrones que se frenan, la energía radiada por el electrón no puede ser mayor que su energía inicial:

$$\varepsilon = h\nu \leq E_c, \quad (7)$$

donde  $E_c$  es la energía cinética del electrón que choca con el anticátodo. Como el electrón que pasa entre dos puntos cuya diferencia de potencial es  $V_1 - V_2$  tiene una energía  $E_c = e(V_1 - V_2)$ , donde  $e$  es su carga, tendremos que de acuerdo con (7)

$$h\nu \leq e(V_1 - V_2).$$

De aquí obtenemos que la frecuencia máxima  $\nu_0$  a que puede radiar el electrón retardado será:

$$\nu_0 = \frac{e}{h} (V_1 - V_2).$$

Pasando de las frecuencias  $\nu$  a las longitudes de onda, hallamos que la longitud de onda correspondiente al límite del espectro con-

tinuo de los rayos X viene determinado por la igualdad

$$\lambda_0 = \frac{hc}{e} \frac{1}{V_1 - V_2} = \frac{K}{V_1 - V_2},$$

que coincide con la fórmula empírica (6). Aplicando los valores numéricos conocidos de  $h$ ,  $c$  y  $e$ , hallamos que  $K = \frac{hc}{e} = 4,13 \cdot 10^{-7}$ . Si este valor lo traducimos al sistema de unidades en que  $\lambda_0$  se expresa en angstrom y  $V_1 - V_2$  en voltios, tendremos que  $K = 12\,340$ , lo que coincide bien con el valor obtenido por medición directa del límite de las ondas cortas en el espectro continuo de los rayos X.

§ 332. Efecto fotoeléctrico. En el párrafo anterior hemos estudiado fenómenos que demuestran que la luz es radiada en porciones (cuantos)  $\varepsilon = h\nu$ . La absorción de la luz se realiza en las mismas porciones que su radiación. Esto se deduce con especial claridad del efecto fotoeléctrico, que se reduce a que por la acción de la luz se pueden arrancar electrones de los cuerpos.

La influencia que ejerce la luz en el desarrollo de los procesos eléctricos fue descrita la primera vez por Hertz, que observó que las descargas eléctricas entre dos esferas de zinc se producen con mucha más facilidad si una de ellas se ilumina con luz ultravioleta. Estudios posteriores más detenidos sobre la influencia que ejerce la

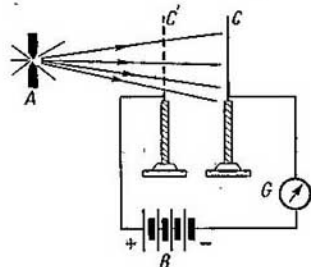


Fig. 292. Esquema del experimento de A. G. Stoliétov.

luz en los cuerpos cargados eléctricamente fueron realizados durante el período 1888-1890 por el profesor de la Universidad de Moscú A. G. Stoliétov, simultáneamente este efecto fue estudiado también por el físico inglés Hallwachs.

El esquema del experimento de Stoliétov puede verse en la fig. 292, donde  $CC'$  es un condensador formado por una lámina de zinc pulimentada  $C$  y por una rejilla metálica  $C'$ . Entre la lámina y la rejilla se creaba una diferencia de potencial por medio de la batería  $B$ . La corriente que se producía al variar la carga de la lámina  $C$  se podía medir con el galvanómetro  $G$ . La lámina  $C$  se iluminaba con la luz procedente del arco eléctrico  $A$ . Stoliétov estableció que la lámina  $C$ , cargada negativamente, perdía su carga bajo la acción de la luz. Este fenómeno, llamado por Stoliétov «actinoeléctrico», se conoce en la actualidad con el nombre de efecto

fotoeléctrico. Más adelante Stoliétov estableció las siguientes regularidades fundamentales que rigen el efecto fotoeléctrico: 1) el cuerpo pierde su carga únicamente cuando ésta es negativa; cuando es positiva no se produce descarga por efecto de la luz; 2) el efecto fotoeléctrico se produce principalmente por los rayos ultravioletas; 3) el efecto de descarga producido por los rayos es proporcional a sus energías; 4) este efecto se observa incluso cuando la iluminación dura muy poco tiempo, con la particularidad de que entre el momento en que se ilumina el cuerpo y el comienzo de la descarga no transcurre un tiempo apreciable.

Stoliétov estudió después el efecto fotoeléctrico colocando en el vacío la lámina que se iluminaba. Este mismo procedimiento fue utilizado por otros investigadores. El esquema del artificio de que se valió se muestra en la fig. 293. La lámina  $K$  se iluminaba con una radiación ultravioleta que entraba por la ventanilla de cuarzo  $O$ . La diferencia de potencial  $V_1 - V_2$  que se creaba entre la lámina  $K$  y el segundo electrodo  $A$  se medía con el voltímetro  $V$ . Al iluminarse la lámina  $K$ , entre ésta y la  $A$  se producía una corriente que podía medirse con el galvanómetro  $G$ . Como en el recipiente existía un buen vacío, la corriente podía producirse exclusivamente gracias a las partículas cargadas que se desprendían de la lámina iluminada. Como quiera que el fenómeno se observaba lo mismo en láminas  $K$  hechas de cualquier metal, era natural suponer que las partículas arrancadas por la luz fueran electrones.

La demostración directa de que la luz hace que se desprendan electrones de los cuerpos se debe a A. F. Ioffe, que utilizó para ello el método de la partícula suspendida entre las dos placas de un condensador (t. II, § 151). El esquema del experimento de Ioffe se muestra en la fig. 294. Dentro de un recipiente de vidrio  $C$  se encontraban dos electrodos  $E$  y  $D$  entre los cuales tenía lugar la descarga eléctrica, produciéndose una pulverización del metal de que estaban hechos los electrodos. A través de la llave de paso  $F$  las partículas podían hacerse llegar al espacio comprendido entre las placas  $a$  y  $b$  de un condensador. Este condensador se encontraba dentro de una caja  $B$  que lo protegía de las influencias externas. La caja  $B$  tenía dos ventanillas, una de cuarzo  $e$ , que servía para iluminar las partículas con rayos ultravioletas, y otra  $f$ , a través

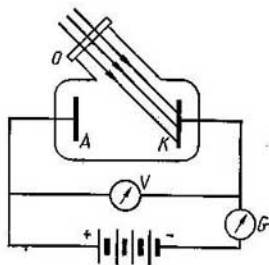


Fig. 293. Esquema del experimento para estudiar el efecto fotoeléctrico en el vacío.

de la cual se observaban dichas partículas al microscopio. La partícula, cargada por su rozamiento con el aire, se equilibraba dentro del condensador por medio de la correspondiente diferencia de potencial entre las placas *a* y *b*. Cuando la partícula se iluminaba con un flujo débil de rayos ultravioletas su carga cambiaba de tiempo

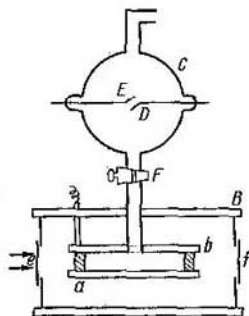


Fig. 294. Esquema del experimento de A. F. Ioffe.

en tiempo *y*, como resultado de esto, salía de su posición de equilibrio y comenzaba a moverse en dirección a la placa negativa del condensador. Esta circunstancia era señal de que la partícula había perdido su carga negativa. Aplicando una nueva diferencia de potencial entre las placas *a* y *b* del condensador se conseguía volver a equilibrar la partícula. Por el valor de las potencias equilibradoras se calculaba la variación experimentada por la carga de la partícula, la cual resultó ser igual a la carga *e* del electrón.

Volviendo al esquema del experimento representado en la fig. 293, estudiemos el procedimiento para medir el número de electrones que se desprenden de la lámina iluminada y la velocidad de los mismos. La intensidad *I* de la corriente que surge entre los electrodos *K* y *A*, cuando la composición y la potencia de la radiación permanecen constantes, depende de la diferencia de potencial  $V = V_1 - V_2$  que existe entre los electrodos. La variación de *I* en función de *V*, para el caso en que la lámina se ilumina con luz monocromática, se muestra en la fig. 294. Esta curva recibe el nombre de *característica de voltios-amperios*. En el caso que estudiamos esta característica se distingue por las dos peculiaridades siguientes: a) porque al aumentar la diferencia de potencial aceleradora *V* la corriente *I* llega a la saturación, y b) porque existe un valor de la diferencia de potencial *retardadora* (potencial o voltaje retardador)  $V_R$  llegando al cual cesa la corriente *I*.

Es evidente que la corriente de saturación  $I_s$  (t. II, § 172) se consigue cuando todos los electrones arrancados de la lámina *K* por la luz llegan al electrodo *A*. De acuerdo con los resultados de las observaciones de Stoliétov (tercera regularidad), la corriente de saturación es directamente proporcional a la potencia del flujo luminoso *W* que incide sobre la lámina. Como quiera que la corriente de saturación  $I_s = en$ , donde *n* es el número de electrones arrancados en la unidad de tiempo, tendremos que el número de electrones arrancados en la unidad de tiempo será directamente proporcional a la potencia de la radiación incidente.

La existencia de la corriente  $I$  cuando el potencial es retardador (la parte  $ab$  de la curva de la fig. 295) indica que los electrones que arranca del cuerpo la luz tienen una determinada velocidad inicial. Estos electrones dejan de llegar al electrodo  $A$  cuando el trabajo del campo eléctrico retardador  $eV_R$  se hace igual a su energía cinética inicial:

$$eV_R = \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

Tiene gran interés la variación de la velocidad  $v$  de los fotoelectrones en función de la frecuencia  $\nu$  de la luz. Los experimentos proporcionan directamente la variación que experimenta el potencial retardador  $V_R$  en función de  $\nu$ ; la relación que existe entre la velocidad  $v$  y la frecuencia  $\nu$  se puede hallar partiendo de la correlación (1) entre  $v$  y  $V_R$ . Numerosas mediciones han demostrado que  $V_R$  es una función lineal de la frecuencia  $\nu$ :

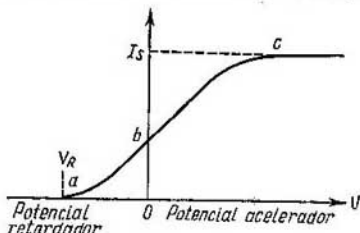


Fig. 295. Característica de voltios-amperios.

$$V_R = k\nu - V_0, \quad (2)$$

donde  $k$  y  $V_0$  son constantes y  $k$  no depende de la clase de material. En la fig. 296 se reproducen los datos obtenidos por Millikan

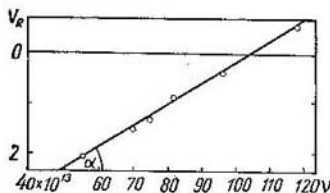


Fig. 296. Datos experimentales que demuestran que el potencial retardador es función lineal de la frecuencia.

midiendo los potenciales retardadores aplicados a los electrones arrancados de la superficie del sodio por luz de distintas frecuencias. La frecuencia de la luz  $\nu$  se toma sobre el eje de abscisas y el potencial retardador  $V_R$  sobre el eje de ordenadas. Los puntos obtenidos experimentalmente se encuentran exactamente en línea recta.

Como el potencial retardador  $V_R$  está relacionado unívocamente con la velocidad de los electrones por la correlación (1),

de la fórmula (2) tenemos que la velocidad de los electrones arrancados al cuerpo por el efecto fotoeléctrico será tanto mayor cuanto mayor sea la frecuencia  $\nu$  de la luz absorbida.

La correlación (2) se puede escribir de otra forma si en lugar de  $V_R$  ponemos su valor por medio de  $\frac{mv^2}{2}$  según (1); en este caso



tendremos que

$$\frac{mv^2}{2} = ekv - eV_0. \quad (3)$$

De la igualdad (3) se deduce que la energía cinética inicial de los fotoelectrones aumenta linealmente con la frecuencia  $\nu$  de la luz.

De las correlaciones (2) y (1) podemos sacar otra conclusión: para que los electrones puedan ser arrancados del cuerpo por la luz la frecuencia  $\nu$  deberá satisfacer la desigualdad  $\nu \geq \frac{V_0}{k}$ . La magnitud  $\nu_0 = \frac{V_0}{k}$  se llama *frecuencia umbral* o *umbral fotoeléctrico*. Solamente aquella luz cuya longitud de onda es menor que  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{ck}{V_0}$  puede producir efecto fotoeléctrico.  $\lambda_0$  tiene valores diferentes para cuerpos distintos, con la particularidad de que para la mayoría de los cuerpos (véase la tabla XIII)  $\lambda_0$  corresponde a la región ultravioleta; los metales alcalinos son los únicos para los cuales  $\lambda_0$  cae en la región visible del espectro. Con esto se confirma la deducción hecha por Stoliétov de que el efecto fotoeléctrico se produce principalmente bajo la acción de los rayos ultravioletas. El valor de  $\lambda_0$  depende mucho del grado de lisura de la superficie del cuerpo y de los gases absorbidos. Los datos de la tabla XIII se refieren a metales desgasificados.

Tabla XIII

## Umbral fotoeléctrico rojo

| Metal            | Cs    | Na    | Zn    | Ag    | Pt    |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\lambda_0$ en Å | 6 600 | 5 000 | 3 720 | 2 600 | 1 962 |

Finalmente, los experimentos han confirmado magníficamente la afirmación de Stoliétov de que entre el momento en que se ilumina el cuerpo y el comienzo del efecto fotoeléctrico no transcurre un tiempo apreciable. Stoliétov determinó este hecho con una precisión de hasta una milésima de segundo. Los experimentos llevados a cabo últimamente indican que el tiempo que transcurre desde el comienzo de la iluminación hasta la aparición de la corriente fotoeléctrica no es mayor de  $10^{-9}$  s.

La intensidad del efecto fotoeléctrico depende de la longitud de onda de la luz incidente. Cuando la potencia de la radiación es la misma, la intensidad de la corriente de saturación  $I_s$  es diferente para distintas longitudes de onda  $\lambda$ . En la fig. 297 se muestra la curva de la sensibilidad de una capa de plata óxido de cesio. El umbral fotoeléctrico de esta capa se encuentra en la región infrarroja, cerca de  $\lambda_0 = 11\,000$  Å. Empezando por este valor, la curva de sensi-

bilidad se eleva rápidamente dando un máximo cerca de  $\lambda = 8\,000 \text{ \AA}$ ; el segundo máximo se encuentra cerca de  $\lambda = 3\,800 \text{ \AA}$ .

Los máximos de sensibilidad que se observan están particularmente bien definidos cuando la superficie se ilumina con luz plano polarizada en la que el vector campo eléctrico  $E$  vibra paralelamente al plano de incidencia. Este tipo de fenómeno se conoce con el nombre de efecto fotoeléctrico selectivo. El efecto fotoeléctrico selectivo no se produce si el vector campo eléctrico de la onda incidente vibra perpendicularmente al plano de incidencia.

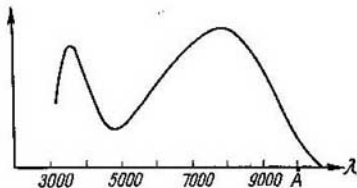


Fig. 297. Curva de la sensibilidad de la capa de plata óxido de cesio.

§ 333. Fórmula de Einstein y su comprobación experimental. Las leyes experimentales por que se rige el efecto fotoeléctrico están en contradicción con los postulados fundamentales de la teoría

ondulatoria de la luz. Una onda luminosa electromagnética al caer sobre un cuerpo que contenga electrones deberá provocar en ellos vibraciones forzadas de amplitud proporcional a las amplitudes de las propias ondas luminosas. Si las fuerzas que sujetan a los electrones dentro del cuerpo no son lo suficientemente grandes, los electrones pueden escaparse al exterior con una velocidad que deberá depender de la amplitud de la luz incidente. Como quiera que la amplitud de las ondas luminosas determina la potencia del flujo luminoso, la velocidad de los electrones desprendidos debería aumentar con la intensidad de la luz incidente. Pero en realidad esto no ocurre: al aumentar la potencia de la luz incidente lo que aumenta es el número de electrones que se desprenden; la velocidad de los electrones depende *exclusivamente* de la frecuencia de la luz, con la particularidad, como ya hemos visto, de que para todas las sustancias la energía de los electrones desprendidos aumenta linealmente con la frecuencia. Esta dependencia es imposible de explicar desde el punto de vista ondulatorio a no ser que se recurra a alguna hipótesis artificial.

Einstein demostró en el año 1905 que todas las regularidades fundamentales del efecto fotoeléctrico se explican directamente si se admite que la luz es absorbida en las mismas porciones (cuantos)  $\epsilon = h\nu$  en que, según las ideas propuestas por Planck, es emitida. Efectivamente, al arrancar un electrón de un cuerpo sólido la energía de la luz se gasta: 1) en el trabajo necesario para arrancar el electrón (que llamaremos  $A$ ) y 2) en comunicarle a dicho electrón una energía cinética  $\frac{mv^2}{2}$ . Si la porción de energía luminosa absorbida al desprenderse un electrón es igual a  $h\nu$ , de acuerdo con la

Ley de la conservación de la energía tendremos que

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} + A. \quad (1)$$

Esta igualdad se conoce con el nombre de fórmula de Einstein. Expresando la energía cinética del electrón  $\frac{mv^2}{2}$  por medio del trabajo del campo retardador  $eV_R$  [fórmula (1) del § 332], podemos escribir la correlación de Einstein (1) de la forma:

$$h\nu = eV_R + A. \quad (1a)$$

De esta última igualdad se deduce que

$$V_R = \frac{h}{e} \nu - \frac{A}{e}. \quad (2)$$

Esta correlación coincide con la igualdad experimental expresada por la fórmula (2) del § 332:

$$V_R = k\nu - V_0. \quad (3)$$

Por esta fórmula vemos que el hecho de que la energía cinética de los fotoelectrones sea función lineal de la frecuencia  $\nu$  se deduce directamente de la hipótesis según la cual la absorción de la luz se realiza en porciones (cuantos) de energía  $\varepsilon = h\nu$ .

Con la misma naturalidad se explica la proporcionalidad que existe entre la corriente de saturación  $I_S$  y la potencia de la luz que incide. Al aumentar la potencia total del flujo luminoso  $W$  aumenta también el número de porciones de energía  $\varepsilon = h\nu$  y por consiguiente, el número  $n$  de electrones arrancados en la unidad de tiempo. Como  $I_S$  es proporcional a  $n$ , está claro que la corriente de saturación  $I_S$  será proporcional a la potencia de la luz  $W$ .

La ley de Einstein (1) se puede someter a comprobación experimental. Comparando las fórmulas (2) y (3) obtenemos la dependencia siguiente entre la constante de Planck  $h$  y la constante empírica  $k$ :

$$h = ke, \quad (4)$$

donde  $e$  es la carga del electrón. Determinando  $k$  experimentalmente y aplicando el valor de la carga  $e$  del electrón que conocemos, podemos comprobar si efectivamente el producto de estas dos magnitudes coincide con la constante de Planck  $h$ . La veracidad de la correlación (4) se deducía ya de las primeras mediciones realizadas por Millikan, cuyos resultados se dan en la fig. 296. La constante  $k$  es igual a  $\operatorname{tg} \alpha$ , siendo  $\alpha$  el ángulo que forma la recta (3) con el eje de abscisas. El valor de  $k$  hallado de esta forma coincidió, dentro de los límites de los errores de observación, con la relación  $h/e$ .

La igualdad (4) ha sido comprobada con mayor exactitud por toda una serie de autores, entre los que figuran P. I. Lukirski y

S. S. Prilezháev, quienes en lugar de un condensador plano, como habían utilizado todos los experimentadores comenzando por Stoliétov, emplearon un condensador esférico.

El esquema del experimento de Lukirski y Prilezháev se muestra en la fig. 298. En él *S* es una esfera de vidrio recubierta interiormente de plata que hace las veces de electrodo externo *B* del condensador esférico. De electrodo interno sirve la esferita *K*, que se hace del metal que se investiga. Esta esferita se ilumina a través

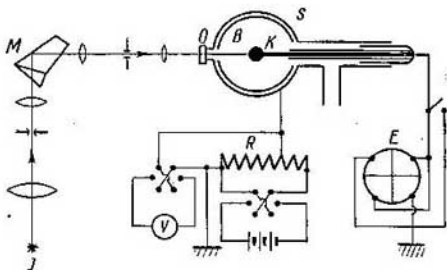


Fig. 298. Esquema del experimento de P. I. Lukirski y S. S. Prilezháev.

de la ventanilla de cuarzo *O*. Como fuente de luz se tomó un arco de mercurio *J* que producía un espectro de rayas. La luz procedente de esta fuente pasaba por el monocromador de cuarzo *M*, que servía para separar unas rayas espectrales determinadas. La esferita *K* se ponía en contacto con el electroómetro de cuadrantes *E*. Entre la esferita *K* y la esfera *B* se creaba una diferencia de potencial de distintas magnitudes y signos por medio del potenciómetro *R*; la diferencia de potencial se medía con el voltímetro *V*. Como el electrodo *B* rodeaba a la esferita *K*, todos los electrones que escapaban de ésta llegaban a la superficie del electrodo *B* aunque no existiera potencial acelerador. Como resultado, la corriente de saturación  $I_S$  se obtenía precisamente en el momento en que la diferencia de potencial *V* entre la esferita *K* y el electrodo *B* era igual a cero. Esta circunstancia permitía eliminar el papel desempeñado por el voltaje de contacto entre los electrodos, que dificultaba la medición del valor real del potencial retardador  $V_R$ . Otra ventaja del condensador esférico consiste en que con él la caída de la intensidad de la corriente al aumentar el campo retardador resulta más brusca, lo que permite hallar con mayor precisión el valor  $V = V_R$  con el que  $I = 0$ . En la fig. 299 pueden verse las características de voltios-amperios obtenidas para el níquel. Las curvas se refieren a los casos en que una esferita de níquel *K* se iluminaba con luz de tres

longitudes de onda  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  diferentes, de las cuales  $\lambda_1$  es la que tenía menor longitud. La corriente de saturación se alcanza en las tres curvas con una misma diferencia de potencial  $V = +0,8$  V. Esta magnitud representa el voltaje de contacto entre el electrodo de níquel  $K$  y el electrodo de plata  $B$ . Restando esta magnitud 0,8 V de todas las indicaciones del voltímetro se pueden obtener los valores efectivos de los potenciales retardadores.

Curvas análogas fueron obtenidas para el Al, Zn, Sn, Cd, Pb, Cu, Pt y Ag. Partiendo de los valores así medidos de los potenciales retardadores  $V_R$ , correspondientes a diferentes frecuencias de la

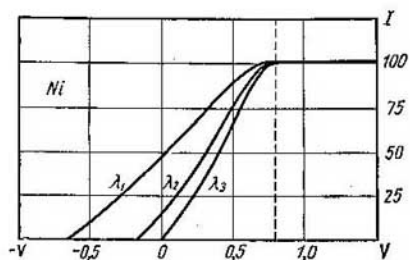


Fig. 299. Característica de voltios-amperios para el Ni.

luz, se hallaron los valores de la constante  $k$ , y basándose en la igualdad (4) fue calculada la constante de Planck  $h$ ; el error en esta determinación no excedió de un 0,2%. Dentro de los límites de esta exactitud los valores de  $h$  obtenidos coincidieron con los hallados por otros procedimientos.

Con la fórmula de Einstein (1a) se puede determinar también el trabajo  $A$  de salida de un electrón del metal. Los valores del trabajo de salida hallados por esta fórmula (2 ~ 6 eV) concuerdan bien con las magnitudes que se obtienen basándose en la emisión termoiónica (t. II, § 172).

El hecho de que en las características de voltios-amperios las curvas presentan una caída relativamente suave (fig. 299) al aumentar el potencial retardador se explica porque no todos los electrones se desprenden del metal con la misma velocidad, igual a la determinada por la fórmula de Einstein (1). Una gran parte de los electrones sale del cuerpo con menos velocidad. Esto se debe a que la luz no sólo arranca electrones que se encuentran en la misma superficie del cuerpo, sino también electrones que se hallan a cierta profundidad. En este último caso los electrones pierden parte de su energía antes de llegar a la superficie del cuerpo. Este punto de vista ha sido confirmado por las observaciones del efecto fotoeléctrico producido en capas delgadas. Si se toma un metal en forma de película muy delgada (cuyo espesor sea del orden de  $10^{-8}$  ~  $10^{-7}$  cm), los fotoelectrones que se producen tienen velocidades mucho más homogéneas.

§ 334. Propiedades corpusculares de la luz. En el párrafo anterior hemos hablado ya de la dificultad que surge cuando se intenta poner de acuerdo con la teoría ondulatoria de la luz la dependencia empírica que existe entre la velocidad de los fotoelectrones y la frecuencia  $\nu$ . Aún es más notoria la insuficiencia de las hipótesis ondulatorias para explicar la naturaleza de la luz si se presta atención al hecho de que no existe un tiempo de retraso sensible desde que comienza la iluminación del cuerpo hasta el momento en que aparecen los primeros electrones. Porque el tiempo necesario para que un átomo pueda acumular la energía  $\varepsilon = h\nu$ , que hace falta para que se desprenda un electrón, puede ser bastante grande cuando la iluminación es pequeña. Efectivamente, cuando la energía es transportada por las ondas está repartida (si la amplitud es constante) con igual densidad a lo largo de todo el frente de onda. Si en el camino a recorrer por una onda electromagnética se encuentra un oscilador tendremos que, según se demuestra en electrodinámica, la energía que este oscilador absorbe es igual a la cantidad de energía transportada a través de un elemento de superficie de área  $\Delta S = \lambda^2$ , donde  $\lambda$  es la longitud de la onda. Partiendo de estos razonamientos, calculemos durante cuánto tiempo deberá caer sobre un átomo una radiación de potencia dada para que éste pueda acumular la energía suficiente y después emitir un electrón con la energía  $h\nu$ . Supongamos que  $u$  representa la densidad del flujo de energía luminosa, es decir, la cantidad de energía transportada a través de la unidad de superficie en la unidad de tiempo. Entonces, de acuerdo con lo dicho, el átomo absorberá durante el tiempo  $t$  una energía igual a  $u\Delta St = u\lambda^2 t$ . Para que a costa de esta energía pueda ser emitido un fotoelectrón, aquélla tendrá que ser igual a  $\varepsilon = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$ , es decir, deberá cumplirse la igualdad:

$$u\lambda^2 t = h \frac{c}{\lambda},$$

de donde hallamos que

$$t = \frac{hc}{\lambda^3 u}. \quad (1)$$

Con luz violeta de longitud de onda  $\lambda = 4\,000 \text{ \AA}$  el efecto fotoeléctrico es fácil de observar cuando la densidad del flujo  $u = 10^{-6} \text{ erg/cm}^2 \cdot \text{s}$ . Poniendo estos valores de  $\lambda$  y de  $u$  en (1) y aplicando los valores conocidos de la constante de Planck  $h \cong 6,6 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$  y de la velocidad de la luz en el vacío  $c \cong 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$ , obtenemos que:

$$t = \frac{6,6 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{(4 \cdot 10^{-5})^3 \cdot 10^{-6}} \text{ s} = 3 \cdot 10^3 \text{ s} = 50 \text{ min.}$$

Por lo tanto, en este caso para que el átomo pudiera emitir un fotoelectrón tendría que acumular energía durante 50 min. Según esto

el proceso se desarrollaría de la forma siguiente: al principio, durante bastante tiempo no aparocerían fotoelectrones; después, un enorme número de átomos emitiría electrones al mismo tiempo. En realidad este proceso se desarrolla de otra forma: los primeros fotoelectrones surgen prácticamente sin ningún retraso, en cuanto comienza la iluminación, pero el número de electrones emitidos durante un tiempo determinado tiene una energía total igual a la cantidad total de energía luminosa que dio lugar al proceso fotoeléctrico. Para poder mantener la idea del transporte de la energía luminosa por un frente de onda continuo habría que idear hipótesis artificiales sobre la existencia de un mecanismo cualquiera de transmisión de la energía de unos electrones a otros o suponer que la energía de los electrones no se debe a la luz que incide sobre los átomos, sino a fuentes intraatómicas cualesquiera. En el último caso el papel desempeñado por la luz quedaría reducido a poner en acción cierto «mecanismo de disparo» dentro del átomo. Estas hipótesis son inaceptables, puesto que la energía de los fotoelectrones no depende en absoluto de la naturaleza de la sustancia en que se produce el efecto fotoeléctrico, sino que viene determinada totalmente por la frecuencia de la luz que incide sobre ella.

Resumiendo podemos decir que el efecto fotoeléctrico se presenta como si la energía luminosa fuera transportada por partículas aisladas. Si una de estas partículas «cae» en un átomo, le transmite toda su energía. Una hipótesis como ésta es precisamente la que propuso Einstein. Este supuso que la luz es un flujo de partículas independientes. Estas partículas de luz se llamaron primeramente *cuantos de luz* y ahora se conocen con el nombre de *fotones*. La energía de los fotones es  $\epsilon = h\nu$ . Por lo tanto, la energía de los fotones depende de la frecuencia de la luz y puede ser diferente. Tienen poca energía los fotones correspondientes a los rayos infrarrojos remotos (cuando  $\lambda$  es grande la frecuencia  $\nu$  es pequeña), tienen mucha los correspondientes a los rayos X. A esto se debe que las propiedades corpusculares de la luz que se manifiestan débilmente en las radiaciones de onda larga sean las más notables en los rayos de longitudes de onda muy cortas (en los rayos X, en los  $\gamma$  de los elementos radiactivos, etc.). Partiendo de la correlación  $\epsilon = h\nu$  es fácil calcular que a los rayos infrarrojos de longitud de onda  $\lambda = 10 \mu$  les corresponden unos fotones cuya energía  $\epsilon \cong 2 \cdot 10^{-13}$  erg, a los rayos visibles ( $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ) les corresponden fotones de energía  $\epsilon \cong 4 \cdot 10^{-12}$  erg y, finalmente, a los rayos X de longitud de onda igual a  $0,1 \text{ \AA}$ , fotones de energía relativamente muy grande  $\epsilon \cong 2 \cdot 10^{-7}$  erg.

Según la teoría de la relatividad, la energía de las partículas que tienen una masa en reposo diferente de cero deberá aumentar hasta el infinito cuando su velocidad se aproxima a la de la luz. Como la energía de los fotones que se mueven con la velocidad de la luz es finita, es de suponer que dichos fotones tengan un masa en

reposo igual a cero. Esta deducción no tiene nada de paradójico, puesto que no existe ningún sistema de referencia con respecto al cual pueda estar en reposo el fotón.

Aplicando la correlación entre la energía y la cantidad de movimiento podemos hallar la expresión de la cantidad de movimiento  $P_{\Phi}$  del fotón. Suponiendo que en la fórmula (7) del § 300  $m_0 = 0$ , obtenemos que  $p_{\Phi} = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c}$ .

En definitiva tenemos que el fotón se caracteriza por las dos magnitudes siguientes:

1) por la energía

$$E_{\Phi} = \varepsilon = h\nu;$$

2) por la cantidad de movimiento (momentum)

$$p_{\Phi} = \frac{h\nu}{c}.$$

El hecho de que los fotones tengan cantidad de movimiento se manifiesta directamente en la existencia de la presión luminosa.

En el § 260, cuando describíamos el experimento de P. N. Liébedev para medir la presión luminosa, indicamos que el flujo luminoso debía tener una cantidad de movimiento por unidad de volumen igual a  $k = \frac{w}{c}$ , donde  $w$  es la densidad volumétrica de la energía luminosa y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. Esta correlación se deduce directamente de las propiedades de los fotones que hemos indicado. Efectivamente, si el número de fotones correspondiente a la unidad de volumen es igual a  $n_0$ , su energía total  $w = n_0\varepsilon = n_0h\nu$  y su cantidad de movimiento total en el flujo luminoso será:

$$k = n_0 p_{\Phi} = n_0 \frac{h\nu}{c}.$$

Comparando las expresiones de  $w$  y  $k$  obtenemos que

$$k = \frac{w}{c}.$$

Las propiedades corpusculares de la luz fueron confirmadas por numerosos experimentos, muchos de los cuales realizados por físicos soviéticos. Los primeros experimentos de A. F. Ioffe para observar el efecto fotoeléctrico en las partículas (§ 332) pusieron de manifiesto con toda evidencia que no existe un tiempo determinado de acumulación de la energía por los átomos. Las emisiones aisladas de electrones por las partículas se sucedían unas a otras con intervalos de tiempo casuales. También estaba sujeta a oscilaciones casuales la duración del intervalo entre el comienzo de la iluminación y la emisión del primer electrón. Este fenómeno estaba de acuerdo con la suposición de que la partícula se encontraba casualmente con un fotón. La veracidad de la hipótesis sobre los fotones fue demostrada



con mayor claridad aún en experimentos posteriores de A. F. Ioffe y N. I. Dobronrávov realizados con partículas sometidas a los rayos X. Como ya indicamos, los fotones de los rayos X transportan una energía extraordinariamente grande y por esto su empleo en los experimentos es preferible al de los rayos de luz visible.

El esquema del experimento de Ioffe y Dobronrávov se muestra en la fig. 300. En una placa gruesa de ebonita se hizo una cavidad, de la que se extrajo el aire a través del tubo *R*. Esta cavidad hizo las veces de tubo de rayos X en miniatura. El cátodo de este tubo era el extremo de un alambre fino de aluminio *K*, el cual se iluminaba

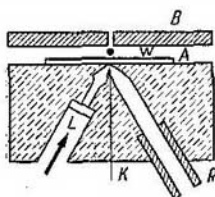


Fig. 300. Esquema del experimento de A. F. Ioffe y N. I. Dobronrávov.

con rayos ultravioletas a través de la ventanilla de cuarzo *L*; el anticátodo era una lámina delgada de aluminio *A*. Los fotoelectrones emitidos por el extremo del alambre *K* eran acelerados por el campo que se creaba entre el alambre *K* y la lámina *A*, cuya diferencia de potencial era de 12 000 V. Al chocar con la lámina *A* los electrones se frenaban y emitían rayos X. La absorción de la lámina era pequeña, es decir, los rayos pasaban prácticamente a través de ella. El flujo de radiación ultravioleta que recibía el alambre *K* era tan débil que solamente producía 1 000 fotoelectrones

por segundo. Estos electrones, al chocar con la lámina *A*, hacían surgir un número igual de impulsos roentgen por segundo.

La lámina de aluminio *A* formaba con otra lámina *B*, paralela a ella, un condensador plano en el cual se mantenía suspendida (a una distancia  $d \cong 0,02$  cm del anticátodo *A*) una partícula de bismuto *W*, cuyo radio tenía aproximadamente  $3 \cdot 10^{-5}$  cm.

La partícula salía a veces de su estado de equilibrio debido a la pérdida de un fotoelectrón bajo la influencia de los rayos X que incidían sobre ella. La pérdida del electrón ocurría, por término medio, una vez cada 30 min. Este resultado experimental está en perfecto acuerdo con la hipótesis corpuscular de la luz. En efecto, cada impulso de roentgen representa, desde el punto de vista corpuscular una partícula (fotón) que se escapa en una dirección cualquiera. Si la partícula *W* se ve bajo un ángulo sólido  $\Delta\omega$  desde el sitio en que surgen los fotones, del número total  $n$  de fotones escapados solamente llegará a ella un número  $n'$  igual a

$$n' = n \frac{\Delta\omega}{4\pi}.$$

Suponiendo que la observación dura un tiempo  $t$  y que el número de fotones que surgen en la unidad de tiempo es igual a  $n_0$ , tendremos:

$$n' = n_0 t \frac{\Delta\omega}{4\pi},$$

de donde resulta que el intervalo medio de tiempo  $\bar{\tau}$  entre dos impactos de los fotones en la partícula será igual a

$$\bar{\tau} = \frac{t}{n'} = \frac{4\pi}{n_0 \Delta\omega}. \quad (2)$$

El ángulo sólido  $\Delta\omega = \frac{\pi v^2}{d^2}$ , donde  $r$  es el radio de la partícula y  $d$  la distancia a que se encuentra del sitio en que surgen los fotones (es decir, de la lámina de aluminio  $A$ ). Poniendo este valor de  $\Delta\omega$  en (2), hallamos que

$$\bar{\tau} = \frac{4d^2}{n_0 r^2}.$$

En nuestro caso  $n_0 = 1\,000$ ,  $r = 3 \cdot 10^{-6}$  cm y  $d = 2 \cdot 10^{-2}$  cm, de donde

$$\bar{\tau} = \frac{16 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 10^{-10}} \text{ s} \cong 1,8 \cdot 10^2 \text{ s} = 30 \text{ min.}$$

Cuando se trata de un elemento pesado como el bismuto puede considerarse que cada fotón que incide sobre él es absorbido y da lugar a la formación de un fotoelectrón, de donde, de acuerdo totalmente con el experimento, resulta que, por término medio, debe surgir un electrón cada 30 min. La energía de cada fotoelectrón es igual a la de un fotón roentgen  $\varepsilon = h\nu$ .

Desde el punto de vista de la teoría ondulatoria los resultados de los experimentos de Ioffe y Dobronrávov son totalmente incomprensibles. Porque si la energía del fotón roentgen estuviera distribuida homogéneamente por un frente de onda esférico, la parte de esta energía que iría a caer sobre la partícula sería igual a  $\frac{\Delta\omega}{4\pi} \cong \cong 5 \cdot 10^{-7}$  y tendría que dividirse entre el gran número de electrones que entran en la composición de dicha partícula. De esta forma tendría que existir un tiempo de acumulación de energía enorme o todos los electrones, de una forma incomprensible, tendrían que ceder algunos veces su energía a un solo electrón.

Otros magníficos experimentos que confirman la teoría fotónica de la luz son los que se refieren a la observación de *las fluctuaciones de los flujos luminosos débiles*.

En el tomo I, § 76 vimos cómo la intermitancia de los procesos físicos conduce a la «pulsación» (fluctuación) de las magnitudes físicas. Así, el movimiento desordenado de los átomos determina las fluctuaciones de la presión que un gas ejerce sobre una partícula pequeña; la discrepancia casual del número medio de los electrones que llegan al ánodo da lugar a las fluctuaciones de las corrientes débiles en los tubos catódicos. Exactamente lo mismo la potencia de un flujo luminoso muy débil deberá presentar desviaciones intermitentes de su valor medio, debidas a que el flujo luminoso está formado por partículas luminosas independientes, es decir, por fotones.

Las fluctuaciones de los flujos luminosos débiles fueron descubiertas por método visual y estudiadas por S. I. Vavílov y un grupo de colaboradores suyos.

En el § 305 vimos que el ojo adaptado a la visión nocturna tiene un umbral constante de sensación visual, con la particularidad de que a este umbral le corresponde una potencia muy pequeña. En la región de la máxima sensibilidad del ojo esta potencia es del orden de  $4 \cdot 10^{-10}$  erg·s<sup>-1</sup>, lo que representa aproximadamente 100 fotones por segundo. Este es el número de fotones que inciden sobre la córnea del ojo. Debido a la reflexión y a la absorción que existe en el ojo, el número de fotones que llegan a la retina es aún menor. De esta forma al umbral de la sensación visual le corresponde un número relativamente pequeño de fotones, el cual deberá estar sujeto a fluctuaciones considerables. Si por término medio llegan al ojo 100 fotones por segundo y éste es el número que corresponde a su umbral de sensibilidad, es evidente que habrá algunos segundos en que este número será algo mayor que 100 (por ejemplo, 110) o algo menor (por ejemplo, 90). En este último caso el ojo no percibirá la luz. De aquí se deduce que cerca del umbral de la sensación visual deberá observarse una especie de «parpadeo», producido por las fluctuaciones del flujo luminoso. Este «parpadeo» fue efectivamente observado por Vavílov y sus discípulos.

De los experimentos se deduce con toda evidencia que la luz tiene propiedades corpusculares. Pero esto no significa un retorno a la antigua teoría de la «fluencia» (§ 250) ni una renuncia total de las hipótesis ondulatorias. Los fenómenos de la interferencia y de la difracción solamente se pueden explicar por medio de un proceso ondulatorio periódico. Como ya dijimos en el § 250, la luz tiene al mismo tiempo propiedades ondulatorias y corpusculares, lo que nos da un ejemplo magnífico de unidad dialéctica de contrarios.

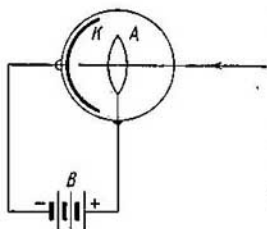


Fig. 301. Célula fotoeléctrica.

§ 335. Aplicaciones prácticas del efecto fotoeléctrico. En el § 305 indicamos la posibilidad de utilizar las células fotoeléctricas para registrar y medir los flujos luminosos. En la actualidad las células fotoeléctricas también se emplean mucho para otros fines, como son: la señalización luminosa, la televisión, el cine sonoro, etc. Un tipo muy simple de célula fotoeléctrica de vacío (tubo fotoeléctrico o fototubo) es el que se ve en la fig. 301. Consiste en una pequeña

ampolla de vidrio, en la que se ha practicado el vacío, una de cuyas mitades está recubierta interiormente con una capa sensible a la luz.

De acuerdo con la región del espectro a que se dedica la célula fotoeléctrica, la capa sensible se hace de distintas sustancias: de plata, potasio, cesio, antimonio de cesio, etc. Esta capa sirve de cátodo. El ánodo se suele hacer en forma de anillo *A*. Entre el cátodo y el ánodo se crea una diferencia de potencial por medio de una batería *B*. Mientras no existe iluminación no se produce corriente en el circuito de la célula fotoeléctrica. Pero cuando llega luz al fotocátodo *K*, en el circuito *KAB* surge una corriente. La sensibilidad de los tubos fotoeléctricos de vacío alcanza hasta 10-15  $\mu$  A/lm. Entre la intensidad de la corriente (corriente de saturación) y la potencia de la iluminación existe una proporcionalidad rigurosa.

A veces el tubo fotoeléctrico se llena de un gas inerte a poca presión. Esto produce un aumento de la sensibilidad de la célula, puesto que cuando la diferencia de potencial entre el cátodo y el ánodo es suficiente, cada fotoelectrón puede ionizar átomos de gas y, por consiguiente, crear electrones complementarios. La sensibilidad de los fototubos de gas alcanza hasta 100  $\mu$  A/lm.

En la actualidad, además del efecto fotoeléctrico externo que hemos descrito, se utiliza mucho el llamado *efecto fotoeléctrico interno*. Este efecto consiste en que por la acción de la luz se liberan electrones dentro de un cristal o de un semiconductor.

Como se dijo en el t. II, § 174, en los semiconductores los electrones están repartidos en dos bandas, de las cuales la superior es la conductora. La conductividad del semiconductor aumenta cuando el número de electrones que hay en la banda superior se incrementa a costa de los que pasan de la banda inferior. El efecto fotoeléctrico interno hace que los electrones de la banda inferior pasen a la superior como resultado de la absorción de la luz. Si  $\Delta W$  es la energía que hay que gastar para trasladar un electrón de la banda inferior a la banda superior conductora, el fenómeno del efecto fotoeléctrico interno empezará a producirse cuando la frecuencia de la luz  $\nu > \nu_0$ , donde  $\nu_0$  satisface la igualdad

$$\nu_0 = \frac{\Delta W}{h} .$$

Como resultado del efecto fotoeléctrico interno aumenta la conductividad de la sustancia, por esta razón las sustancias que ponen de manifiesto este efecto se llaman *fotorresistencias*. Muchos semiconductores son fotorresistencias típicas, entre ellos el selenio (véase el § 305). Las células fotoeléctricas de selenio tienen una sensibilidad bastante grande, que llega hasta varios centenares de microamperios por lumen.

Las propiedades de las fotorresistencias dependen mucho de la temperatura y de la existencia de impurezas y defectos en la red cristalina. La conductividad de las fotorresistencias no desaparece inmediatamente después de cesar la iluminación: se necesita cierto

tiempo para que los electrones sobrantes (a la temperatura dada) vuelvan a pasar de la banda de conductividad a la banda de valencia. En el caso, por ejemplo, de la blenda ( $\text{ZnS}$ ) la fotoconductividad desaparece al cabo de varias decenas de segundos después de cesar la iluminación.

Son extraordinariamente interesantes las *células fotoeléctricas sólidas con capa de barrera* (llamadas también *células fotovoltaicas* o *fotónicas*). Como ejemplo de ellas puede servir la célula de cobre-óxido de cobre («kuprox») cuyo esquema se muestra en la fig. 302.

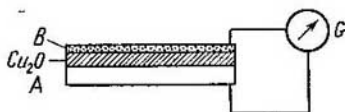


Fig. 302. Célula fotoeléctrica sólida de cobre-óxido de cobre.

Sobre la lámina de cobre *A*, que hace las veces de uno de los electrodos, se extiende una capa delgada de óxido cuproso  $\text{Cu}_2\text{O}$ . Esta capa se recubre a su vez con otra *B* de cualquier metal (por ejemplo, de oro) tan delgada, que sea transparente. Esta capa *B* sirve de segundo electrodo. Si los dos electrodos se unen formando un circuito eléctrico y se ilumina el  $\text{Cu}_2\text{O}$  a través del electrodo transparente, en el instrumento se produce una corriente eléctrica que va desde el cobre al óxido cuproso.

La acción de las células fotoeléctricas con capa de barrera se funda en la conductividad unilateral del contacto entre un semiconductor y un metal (véase el t. II, § 171). En el caso, por ejemplo, de un semiconductor fotónico los electrones que se liberan por el efecto fotoeléctrico interno en el contacto iluminado pasan sin dificultad del semiconductor al metal y, como consecuencia, el potencial entre ellos se iguala. Cuando el contacto no recibe iluminación esta igualación del potencial no se produce. De esta forma, cuando hay luz surge una fuerza electromotriz en el semiconductor. A esto se debe que las células fotoeléctricas con capa de barrera (fotovoltaicas) produzcan corriente en el circuito externo sin necesidad de conectar en él ninguna otra fuerza electromotriz complementaria. En el caso de la célula fotoeléctrica de cobre-óxido de cobre (kuprox) que se ve en la fig. 302, el efecto fotoeléctrico se produce en el límite entre el semiconductor y el metal transparente (célula de pared delantera). La capa limítrofe entre el metal y el óxido cuproso tiene propiedades rectificadoras, lo que hace que la corriente que se origina solamente pueda ir en una dirección.

En un principio análogo al efecto fotoeléctrico interno con capa de barrera se basan las «*baterías solares*» de silicio que se construyen

en la actualidad. Cuando sobre estas baterías incide la luz del sol se genera continuamente una corriente eléctrica; el rendimiento de estas baterías alcanza hasta un 6%. Las «baterías solares» de silicio se han utilizado en los satélites artificiales soviéticos («spútnik») y en los cohetes cósmicos.

§ 336. Difusión de los rayos X. Desde el punto de vista clásico los rayos X son ondas electromagnéticas capaces de provocar en los átomos vibraciones forzadas de los electrones. Por esto se podía esperar que la difusión de los rayos X estuviera sujeta a las mismas leyes que la difusión clásica de los rayos visibles. De estas leyes (§ 284) se deduce que: 1) con la difusión no varía la longitud de onda  $\lambda$ ; 2) la indicatriz de la difusión viene determinada por la correlación:

$$I = I_0 (1 + \cos^2 \varphi), \quad (1)$$

donde  $\varphi$  es el ángulo comprendido entre las direcciones de los rayos primarios y difundidos. La comprobación experimental demuestra que la correlación (1) sólo se cumple correctamente por los rayos X, cuyas longitudes de onda no son demasiado cortas; cuando sus longitudes de onda son cortas se observa una discrepancia con respecto a la correlación (1). También pudo llegarse a la conclusión (por la variación que experimenta el coeficiente de absorción) de que la longitud de onda de los rayos X (de onda corta) varía al producirse su difusión. Además, se observa una discrepancia sensible con respecto a la variación que podía esperarse del coeficiente  $k$  en función del número de electrones difundidos. El coeficiente de difusión  $k$  de los rayos X debería ser proporcional al número de electrones difusores  $n_e$  contenidos en la unidad de volumen de la sustancia. Como

$$n_e = Zn_0,$$

donde  $Z$  es el número de electrones que hay en un átomo y  $n_0$  es el número de átomos que hay en la unidad de volumen, tenemos que

$$k \cong Zn_0. \quad (2)$$

El número de átomos que hay en la unidad de volumen se expresa, mediante la densidad de la sustancia  $\rho$ , su peso atómico  $A$  y el número de Avogadro  $N$ , por la correlación siguiente:

$$n_0 = \frac{N\rho}{A}.$$

Poniendo este valor de  $n_0$  en (2), hallamos:

$$\frac{k}{\rho} \cong N \frac{Z}{A}. \quad (3)$$

Como quiera que para todos los átomos la relación  $Z/A$  es aproximadamente igual a  $1/2$  (véase el § 367), de la correlación (3) se deduce que  $k/\rho$  deberá ser aproximadamente constante para todas las sustancias y para todas las longitudes de onda. Esta última deducción no se cumple: la relación  $k/\rho$  aumenta considerablemente al aumentar la longitud de onda.

Estas discrepancias de la difusión de los rayos X con las regularidades que eran de esperar hicieron necesaria la continuación de las observaciones experimentales. En los años 1922—1923 A. Compton estudió valiéndose de un espectrógrafo de rayos X la composición espectral de los rayos X difusos. El esquema del experimento de

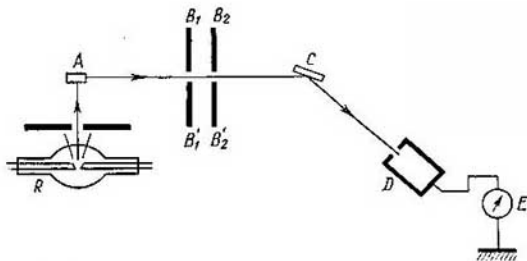


Fig. 303. Esquema del experimento de Compton.

Compton puede verse en la fig. 303, donde  $R$  es un tubo de rayos X,  $A$  un trozo de sustancia difusora,  $B_1B'_1$  y  $B_2B'_2$  un sistema de diafragmas que solamente dejan pasar un haz estrecho de rayos difusos. Este haz iba a caer después sobre el espectrógrafo de rayos X, al cual pertenecen el cristal  $C$  y la cámara de ionización  $D$ . Lo primero que se descubrió fue que en la radiación difusa existían rayos de longitud de onda  $\lambda$ , igual a la de los rayos primarios, y rayos de longitud de onda  $\lambda' > \lambda$ . De esta forma resultó que junto a la difusión clásica, en que no varía la longitud de onda, existe la difusión en que la longitud de onda está desplazada hacia el lado de las longitudes mayores. Este nuevo tipo de difusión recibió el nombre de *efecto Compton*.

Observaciones realizadas posteriormente pusieron de manifiesto que la difusión de Compton está sometida a las leyes siguientes: 1) esta difusión es intensa para las sustancias que tienen peso atómico pequeño y débil para las que tienen peso atómico grande, 2) al aumentar el ángulo de difusión aumenta la intensidad de la difusión de Compton (la intensidad de la difusión clásica disminuye al aumentar el ángulo de difusión), 3) el desplazamiento de la longitud de onda depende del ángulo de difusión, con la particularidad de que aumenta

al aumentar dicho ángulo, 4) a ángulos de difusión iguales les corresponde una misma magnitud del desplazamiento cualesquiera que sean las sustancias difusoras. Estas leyes se representan gráficamente en las fig. 304 y 305. En la fig. 304 se muestran los resultados obtenidos al observar la difusión de los rayos X en el grafito bajo diferentes ángulos. En la parte superior de la figura se representa el contorno de la llamada raya  $K_{\alpha}$  del molibdeno, cuya longitud de onda  $\lambda = 0,7126 \text{ \AA}$ ; con la luz de esta raya se iluminó un bloque dispersor de grafito. En la 304 b, c, d se muestra la composición espectral de los rayos difundidos por el grafito bajo ángulos de  $45^{\circ}$ ,  $90^{\circ}$  y  $135^{\circ}$ . Como resultado puede verse que al aumentar el ángulo aumenta la intensidad de la componente desplazada  $M$  y la magnitud del desplazamiento; la intensidad de la componente no desplazada  $P$  disminuye al aumentar el ángulo. En la fig. 305 se representa la composición espectral de los rayos por distintas sustancias bajo un mismo ángulo. En este caso sirvió de raya primaria la  $K_{\alpha}$  de la plata, cuya longitud de onda  $\lambda = 0,5627 \text{ \AA}$ . Para la sustancia más ligera (Be, de peso atómico 9) la raya  $P$ , cuya longitud de onda no varía, es muy débil, mientras que la raya  $M$ , desplazada hacia el lado de las longitudes de onda mayores, es intensa. Para el potasio (peso atómico 39) ambas rayas,  $P$  y  $M$ , se diferencian poco por sus intensidades, y para el cobre (peso atómico 63) la raya desplazada  $M$  es más débil que la raya de longitud de onda invariable  $P$ .

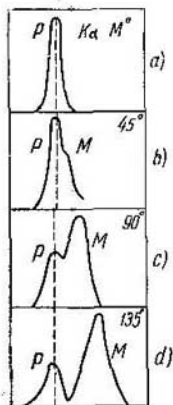


Fig. 304. Difusión de los rayos X en el grafito bajo ángulos distintos.

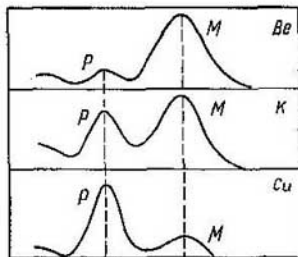


Fig. 305. Difusión de los rayos X en distintas sustancias.

a costa de electrones que están tan débilmente ligados a los átomos que esta ligazón puede despreciarse. Esta suposición también está de acuerdo con el hecho de que los elementos ligeros producen



un desplazamiento de las rayas relativamente mayor que los elementos pesados. En los átomos ligeros todos los electrones están unidos débilmente, mientras que en los átomos pesados sólo están débilmente ligados los electrones externos. Por esto, en el caso de los elementos pesados el número relativo de electrones que producen el efecto Compton es menor que cuando se trata de elementos ligeros.

El efecto Compton puede explicarse cuantitativamente y en completo acuerdo con los datos experimentales aceptando el punto de vista expuesto en el § 334, es decir, el que supone que la luz es un flujo de fotones o partículas que tienen una energía  $E_{\Phi} = h\nu$  y una cantidad de movimiento  $P_{\Phi} = \frac{h\nu}{c}$ . Cuando estas partículas (fotones) chocan con los electrones libres botan elásticamente en ellos, lo que da lugar a la aparición de rayos difusos. Como quiera que al chocar un fotón con un electrón una parte de la energía de aquél pasa a éste, la energía del fotón difuso  $E'_{\Phi}$  será menor que la que tenía antes:  $E'_{\Phi} < E_{\Phi}$ . La frecuencia  $\nu'$  del fotón difuso está relacionada con su energía por la correlación  $h\nu' = E'_{\Phi}$ , de donde, de acuerdo con la desigualdad  $E'_{\Phi} < E_{\Phi}$ , se deduce que  $\nu' < \nu$  o  $\lambda' > \lambda$ . De esta forma se obtiene directamente que la longitud de onda de los rayos difundidos durante el efecto Compton deberá ser mayor que la de los rayos primarios.

El cálculo realizado partiendo de la suposición de que el choque de un fotón con un electrón es elástico y cumple las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento (véase la letra pequeña), conduce al resultado siguiente:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\alpha \operatorname{sen}^2 \varphi/2, \quad (4)$$

donde  $\alpha = \frac{h}{m_0c}$  y  $\varphi$  es el ángulo de difusión.

Como  $\alpha$  se expresa únicamente por medio de constantes universales (la constante de Planck  $h$ , la masa en reposo  $m_0$  del electrón y la velocidad de la luz  $c$ ), se obtiene que, independientemente de la naturaleza de la sustancia difusora, la raya de la difusión de Compton estará desplazada con respecto a la primaria una magnitud igual (en angstrom) a:

$$\Delta\lambda = 0,0486 \operatorname{sen}^2 \varphi/2. \quad (4a)$$

El valor máximo del desplazamiento ( $0,0486 \text{ \AA}$ ) es el que alcanzan los rayos difundidos bajo un ángulo  $\varphi = \pi$ , es decir, en sentido contrario al haz de rayos primarios. Los datos experimentales confirman la fórmula (4a) con un alto grado de exactitud.

La hipótesis de que el efecto Compton se debe al choque elástico de un fotón con un electrón libre no sólo conduce al hecho de que debe aparecer un fotón de difusión con menor frecuencia. Al producirse el choque una parte de la energía del fotón se transmite al electrón y, por consiguiente, este último adquiere cierta cantidad

de movimiento. De esta forma, junto a los rayos difusos, que tienen desplazada la longitud de onda, aparecen electrones acelerados, llamados *electrones de retroceso*.

Si la energía del fotón primario es  $E_{\Phi} = h\nu$  y la del fotón difuso  $E'_{\Phi} = h\nu'$ , tendremos que, de acuerdo con la ley de la conservación de la energía, la energía  $E_e$  adquirida por el electrón vendrá expresada por la igualdad:

$$E_e = E_{\Phi} - E'_{\Phi} = h(\nu - \nu').$$

De aquí hallamos que la razón de la energía del electrón de retroceso  $E_e$  a la energía del fotón primario  $E_{\Phi} = h\nu$  será:

$$\frac{E_e}{h\nu} = \frac{\nu - \nu'}{\nu'} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda'} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}.$$

Poniendo aquí en lugar de  $\Delta\lambda$  su valor según (4), obtenemos

$$\frac{E_e}{h\nu} = \frac{2\alpha \sin^2 \varphi/2}{\lambda + 2\alpha \sin^2 \varphi/2}. \quad (5)$$

De la igualdad (5) se deduce que al variar el ángulo de difusión  $\varphi$  varía la energía de los electrones de retroceso y, por consiguiente, sus velocidades.

Aplicando la ley de la conservación de la cantidad de movimiento se puede hallar la expresión del ángulo  $\psi$  bajo el cual aparece el electrón de retroceso correspondiente al fotón difundido bajo el ángulo  $\varphi$  (véase la letra pequeña). En la fig. 306 se reproduce el diagrama polar de los fotones difusos  $h\nu'$  y de los electrones de retroceso  $E_e$ . Las cifras iguales junto a las flechas corresponden respectivamente a un fotón difuso y al electrón de retroceso que aparece al mismo tiempo que él. Como puede verse, el fotón de frecuencia  $\nu$  invariable «pasa hacia adelante»; a este fotón le corresponde  $E_e = 0$ , es decir, la carencia de electrón de retroceso.

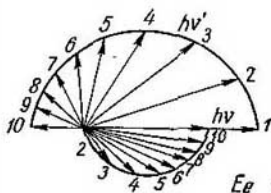


Fig. 306. Diagrama polar de los fotones difusos y de los electrones de retroceso.

Los electrones de retroceso más rápidos también «pasan hacia adelante»; a ellos les corresponden fotones difundidos hacia atrás, que son los que presentan la mayor variación de frecuencia.

Los experimentos confirman la existencia de los electrones de retroceso y su distribución según los ángulos y las energías de acuerdo con la teoría. D. V. Skobeltsín utilizó para estudiar los electrones de retroceso una cámara de Wilson (§ 370) situada en un campo magnético. El campo magnético desviaba los electrones de retroceso, los cuales dejaban huellas en forma de circunferencias por cuyos

radios se podía juzgar cuál era la velocidad de los electrones. Posteriormente el método de la cámara de Wilson fue tan perfeccionado que permitió comprobar el cumplimiento de las fórmulas teóricas en cada acto independiente de la difusión de un fotón en un electrón.

Al aumentar las longitudes de onda aumenta la frecuencia  $\nu$ , y, por consiguiente, la cantidad de movimiento de los fotones  $P_{\Phi} = \frac{h\nu}{c}$ .

Al mismo tiempo disminuye la fracción de cantidad de movimiento y de energía que se transmite al electrón. Por esto las variaciones sensibles de longitud de onda, lo mismo que las grandes velocidades de los electrones de retroceso, pueden observarse únicamente cuando la radiación que se difunde tiene una longitud de onda muy pequeña (rayos X de onda corta). En los rayos visibles no se observa la difusión de Compton.

Tiene importancia destacar que la coincidencia de los datos experimentales relativos al efecto Compton con los teóricos no sirve solamente de comprobación a la teoría fotónica sino que es además una demostración del cumplimiento de las leyes de la conservación de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento en los procesos elementales aislados. En los años veinte del siglo en curso, las dificultades surgidas para poder explicar desde el punto de vista clásico los fenómenos elementales de la acción mutua entre la luz y la sustancia motivaron que una serie de físicos burgueses lanzaron la hipótesis de que cuando se trata de la interacción entre las partículas elementales las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento se cumplen solamente de manera estadística, es decir, como promedio de un gran número de actos elementales de interacción, pero no en cada acto aislado. Los experimentos realizados para observar estos actos aislados de difusión de fotones en electrones desmintieron esta hipótesis y confirmaron el cumplimiento exacto de las leyes antedichas en cada uno de los actos elementales.

Para deducir la correlación (4) supongamos que la interacción entre el fotón y el electrón se desarrolla de acuerdo con las leyes del choque elástico y escribamos la expresión de las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento. Como quiera que la velocidad de los electrones de retroceso es muy grande, hay que aplicar las fórmulas de la mecánica de la forma en que se escriben en la teoría de la relatividad (§ 300). Para la energía cinética y para el vector cantidad de movimiento del electrón tendremos:

$$E_e = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m c^2, \quad (6)$$

$$P_e = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m v, \quad (7)$$

donde  $\beta = v/c$ ,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $v$  es la velocidad del electrón,  $m_0$  es la masa de reposo del electrón y  $m$  su masa a la velocidad  $v$ . Al elec-

trón en reposo hay que suponerle una energía igual a  $m_0c^2$ . Teniendo esto en cuenta, para la ley de la conservación de la energía tendremos:

$$h\nu = m_0c^2 = h\nu' + mc^2. \quad (8)$$

La cantidad de movimiento del electrón en reposo será, según (7), igual a cero. Por esto, para la ley de la conservación de la cantidad de movimiento en forma vectorial tendremos:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + m\mathbf{v}. \quad (9)$$

Para pasar de la correlación vectorial (9) a la algebraica partiremos del hecho de que el vector  $\mathbf{P}$  es la diagonal del paralelogramo cuyos lados son los vectores  $\mathbf{P}'$  y  $m\mathbf{v}$  (fig. 307). Los ángulos  $\varphi$  y  $\psi$  representan respectivamente los ángulos bajo los cuales tienen lugar la difusión del fotón y la aparición del electrón de retroceso. De acuerdo con la fig. 307 tenemos:

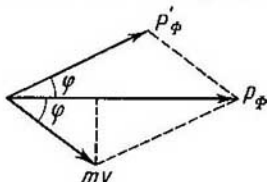


Fig. 307. Esquema para el cálculo de la frecuencia del fotón difuso.

$$(mv)^2 = P^2 + P'^2 - 2PP' \cos \varphi.$$

Poniendo aquí en lugar de  $P$  y  $P'$  sus valores  $\frac{h\nu}{c}$  y  $\frac{h\nu'}{c}$  y multiplicando los dos términos de la igualdad por  $c^2$ , hallamos:

$$m^2v^2c^2 = h^2\nu^2 - h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' \cos \varphi. \quad (10)$$

Por la ley de la conservación de la energía (8), tenemos:

$$m_0c^2 = h\nu - h\nu' + m_0c^2.$$

Elevando al cuadrado los dos términos de esta igualdad, obtenemos:

$$m^2c^4 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' + 2h(\nu - \nu')m_0c^2 + m_0^2c^4. \quad (11)$$

Restando de la igualdad (11) la igualdad (10), hallamos:

$$m^2c^4(1 - \beta^2) = -2h^2\nu\nu'(1 - \cos \varphi) + 2h(\nu - \nu')m_0c^2 + m_0^2c^4,$$

donde  $\beta = v/c$ . Aplicando la correlación entre la masa en reposo  $m_0$  y la masa  $m$ :

$$m\sqrt{1 - \beta^2} = m_0,$$

podemos escribir la última igualdad de la forma:

$$2h(\nu - \nu')m_0c^2 = 2h^2\nu\nu'(1 - \cos \varphi)$$

o

$$\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \varphi). \quad (12)$$

Sustituyendo en esta igualdad  $1 - \cos \varphi$  por  $2 \operatorname{sen}^2 \varphi/2$  y teniendo en cuenta que  $\frac{c}{\nu} = \lambda$  y  $\frac{c}{\nu'} = \lambda'$ , obtenemos:

$$\lambda' - \lambda = 2\alpha \operatorname{sen}^2 \varphi/2, \quad (13)$$

\*) Muchos autores presentan esta fórmula bajo el aspecto

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \varphi),$$

La constante  $\frac{h}{m_0c} = 0,02426 \text{ \AA}$  suele llamarse longitud de onda Compton. (N. del T.)

donde  $\alpha = \frac{h}{m_0c}$ . La igualdad (13) coincide con la fórmula (4) del texto fundamental.

Para determinar el ángulo  $\psi$  bajo el cual está dirigido el movimiento del electrón de retroceso volvamos a fijarnos en la fig. 307, de la que se deduce que

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{P'_{\Phi} \operatorname{sen} \varphi}{P_{\Phi} - P'_{\Phi} \cos \varphi}.$$

Poniendo en lugar de  $P_{\Phi}$  y  $P'_{\Phi}$ , sus valores respectivos  $\frac{h\nu}{c}$  y  $\frac{h\nu'}{c}$ , podemos escribir esta igualdad de la forma:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\nu' \operatorname{sen} \varphi}{\nu - \nu' \cos \varphi} = 2 \frac{\operatorname{sen} \varphi/2 \cos \varphi/2}{\nu/\nu' - \cos \varphi}. \quad (14)$$

Por otra parte, basándonos en la igualdad (12) tenemos:

$$\frac{\nu}{\nu'} - \cos \varphi = 1 - \cos \varphi + \frac{2\alpha\nu}{c} \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \left( 1 - \frac{\alpha\nu}{c} \right) \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Poniendo este valor de  $\frac{\nu}{\nu'} - \cos \varphi$  en (14), hallamos:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{\left( 1 + \frac{\alpha\nu}{c} \right) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}. \quad (15)$$

La correlación (15) permite hallar el valor del ángulo  $\psi$ , es decir, la dirección que sigue el electrón de retroceso siempre que se conozca la dirección del fotón difuso (dada por  $\varphi$ ). La energía del electrón de retroceso viene dada por la fórmula (5) del texto fundamental.

§ 337. **Fotoquímica.** Las reacciones químicas que se realizan bajo la influencia de la luz reciben el nombre de *fotoquímicas*. Un ejemplo de reacción fotoquímica es la descomposición del amoníaco  $\text{NH}_3$  por la acción de la luz en nitrógeno e hidrógeno, o la del bromuro de plata  $\text{AgBr}$  en plata y bromo. Bajo la acción de la luz se producen reacciones que dan lugar a la formación de moléculas más complejas, por ejemplo, las moléculas de  $\text{HCl}$  partiendo de moléculas de hidrógeno y de cloro. Esta última reacción se desarrolla de una forma tan tumultuosa que va acompañada de una explosión. Existen también procesos fotoquímicos que consisten en la polimerización de la sustancia, es decir, en la formación de moléculas poliatómicas a base de átomos de la sustancia original (moléculas del tipo  $X_n$ ). Es muy importante el papel que desempeñan las reacciones fotoquímicas en biología, por ejemplo, la descomposición del anhídrido carbónico por la acción de la luz en las partes verdes de la plantas, que fue estudiada por vez primera por K. A. Timiriázev.

Los procesos fotoquímicos se rigen por la siguiente ley cuantitativa: *la masa de sustancia que experimenta la reacción fotoquímica es proporcional a la cantidad de energía luminosa absorbida*. Llamando  $W$  a la potencia de la luz absorbida y  $t$  al tiempo que dura la ilu-

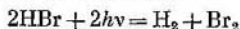
minación, esta ley puede escribirse de la forma:

$$m = kWt, \quad (1)$$

donde  $k$  es un coeficiente de proporcionalidad que depende de la naturaleza de la reacción fotoquímica que se desarrolla. Este coeficiente es numéricamente igual a la masa de sustancia que experimenta la reacción correspondiente a la cantidad de energía luminosa absorbida.

El proceso fotoquímico puede ir acompañado de reacciones secundarias debidas a la actividad química de los productos resultantes de la transformación fotoquímica. Pero la ley (1) se refiere exclusivamente al proceso fotoquímico primario.

El estudio de los procesos fotoquímicos primarios puso de manifiesto que estos procesos se desarrollan de acuerdo con la naturaleza fotónica de la luz: *a cada fotón absorbido  $h\nu$  le corresponde la transformación de una molécula*. Esta ley fue comprobada por vez primera en la reacción fotoquímica de descomposición del bromuro de hidrógeno HBr bajo la acción de una luz monocromática. Las mediciones realizadas demostraron que a cada porción  $h\nu$  de luz absorbida le correspondía una molécula descompuesta. De esta forma, la reacción se desarrolla de acuerdo con la ecuación:



Como para transformar una molécula se necesita realizar cierto trabajo  $A$  mínimo, la energía del fotón  $h\nu$  deberá cumplir la condición:

$$h\nu \geq A, \quad (2)$$

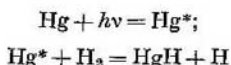
de donde se deduce que el proceso fotoquímico tiene un límite de ondas largas. Si la frecuencia de la luz

$$\nu < \nu_0 = \frac{A}{h},$$

la reacción fotoquímica no se produce. La frecuencia  $\nu_0$  tiene un valor determinado para cada reacción fotoquímica. La mayoría de las reacciones fotoquímicas se desarrollan exclusivamente bajo la acción de los rayos ultravioletas. La condición (2) es necesaria para que se pueda realizar la reacción fotoquímica, pero no es suficiente; para que esto ocurra es necesario además que la luz de la longitud de onda dada sea absorbida por la molécula. Si la sustancia de que se trata es transparente a la luz de la longitud de onda dada, esta luz no puede producir la transformación química.

No obstante, la experiencia demuestra que en algunos casos se consigue realizar la reacción fotoquímica en la región de frecuencias  $\nu$  para las cuales la sustancia es transparente, añadiendo para ello una segunda sustancia («sensibilizador») que absorbe la luz. Este

género de reacciones fotoquímicas se llaman *sensibilizadas*. El mecanismo de la reacción sensibilizada consiste en lo siguiente: la molécula del sensibilizador, al absorber un fotón, entra en un estado de excitación extraordinario en el que puede permanecer cierto tiempo. Si esta molécula excitada choca con otra de la sustancia original puede hacer que ocurra en ella la transformación. Como ejemplo citaremos el caso de la obtención del hidrógeno atómico, a partir de hidrógeno diatómico gaseoso  $H_2$  por la acción que produce la iluminación con la raya del mercurio cuya longitud de onda  $\lambda = 2\,537 \text{ \AA}$ . El hidrógeno molecular no absorbe la luz de esta longitud de onda. Pero si a este hidrógeno molecular se le añade una pequeña cantidad de vapor de mercurio, la luz de longitud de onda  $\lambda = 2\,537 \text{ \AA}$  produce átomos de mercurio excitados  $Hg^*$ . Estos últimos al chocar con las moléculas de  $H_2$  dan lugar a la formación de hidruro de mercurio o hidrógeno atómico. La reacción se desarrolla según el esquema:



La generación del hidrógeno atómico se comprueba añadiendo oxígeno, lo que da lugar a la formación de peróxido de hidrógeno  $H_2O_2$ , cuya presencia se puede descubrir fácilmente.

La fotografía se basa en el proceso fotoquímico. De todos es conocido que el proceso fotográfico moderno se realiza por medio de una emulsión sensible a la luz, la cual se extiende formando una capa delgada sobre un vidrio (placa fotográfica) o sobre una película de celuloide (película fotográfica). La emulsión está formada por cristales microscópicos de bromuro de plata que se encuentran en suspensión en la gelatina.

El proceso fotoquímico primario consiste en que por la acción de la luz en la red cristalina del bromuro de plata se genera un electrón libre (efecto fotoeléctrico interno). Este electrón se une a un ión de  $Ag^+$ , lo que da lugar a la formación de un átomo neutro de plata. Los átomos neutros de plata no pueden mantenerse en la red cristalina, por lo que se juntan originando granitos muy pequeños de plata coloidal. Pohl, junto con un grupo de colaboradores, demostró experimentalmente la formación de los granitos de metal en las redes iónicas de las sales halógenas de los metales alcalinos y de la plata por la acción de la luz. Cuando la iluminación dura mucho tiempo el número de granitos puede resultar tan considerable que la emulsión se ennegrece notablemente. Si la iluminación no dura más de lo ordinario el número de granitos de plata que se separan es pequeño y la absorción de la luz que produce no es considerable. Por esto, bajo la influencia de la acción fotoquímica primaria se genera únicamente la llamada imagen *latente* (*invisible*). La hipótesis sobre

la naturaleza de la imagen fotográfica latente que acabamos de exponer fue desarrollada por P. P. Kravets y confirmada por los trabajos experimentales realizados por M. V. Savostiánova.

La placa fotográfica en que como resultado de la acción de la luz se forma la imagen latente se somete después a un proceso químico secundario que se llama revelado. Bajo la acción de los reactivos químicos (reveladores) correspondientes se consigue reducir la plata metálica en aquellos lugares en que había «gérmenes» formados por partículas de plata. Como resultado la plata metálica se revela principalmente en aquellos sitios que fueron sometidos a la acción de la luz, con lo que se consigue el negativo. Después de finalizar el revelado se eliminan los restos del bromuro de plata no descompuesto por medio de una disolución de hiposulfito ( $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ ).

Un proceso fotoquímico es también el que sirve de base a la percepción visual. En el § 305 indicamos que la retina contiene dos tipos diferentes de elementos sensibles, llamados respectivamente bastoncillos y conos. Los primeros determinan la visión nocturna y los segundos la visión diurna ordinaria, capaz de distinguir los colores. El proceso mejor estudiado es el de la visión nocturna. Los extremos de los bastoncillos están impregnados en un pigmento especial llamado *púrpura visual* que puede descomponerse por la acción de la luz. Los productos de esta descomposición actúan químicamente sobre los bastoncillos, los cuales transmiten esta acción al cerebro en forma de excitación nerviosa. Cuando la acción de la luz es muy intensa la *púrpura visual* se descompone por completo y los bastoncillos dejan de percibir la luz. Al cesar la iluminación vuelve a generarse *púrpura visual* en el ojo y los bastoncillos recobran su sensibilidad luminosa (adaptación del ojo a las iluminaciones débiles).

La teoría de la visión diurna (en colores) aún no está suficientemente elaborada.