

A.N. MATVEEV

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Electricidad
y
magnetismo

А. Н. Матвеев

Электричество и магнетизм

«Высшая школа»

A. N. Matveev

Electricidad y magnetismo



Editorial Mir Moscú

Traducido del ruso por
la licenciada en ciencias físicas C. Fernández

Impreso en la URSS

На испанском языке



LIBRERÍA CIENTÍFICA
Jr. Ica 441 Lima 1 ☎ 428-0448

ISBN 5-03-000614-1

© Издательство «Высшая школа», 1983
© traducción revisada y ampliada al español, editorial Mir, 1988

Índice

Prefacio	12
Introducción	14
Capítulo 1. Cargas, campos, fuerzas	16
§ 1. Portadores microscópicos de cargas eléctricas	16
Clasificación. Electrón. Protón. Neutrón. ¿Qué significa la distribución continua de una carga elemental eléctrica? Spin y momento magnético	
§ 2. Cuerpos con carga. Electrización	20
Trabajo de salida termoelectrónico. Espectro energético de los electrones. Energía de Fermi. Diferencia de potencial de contacto. Electrización	
§ 3. Carga elemental y su invariación	28
Experimentos de Millikan. Método de medida de la carga por resonancia. Ausencia de carga fraccionaria. Igualdad de las cargas elementales positivas y negativas. Invariación de la carga	
§ 4. Corriente eléctrica	33
Movimiento de las cargas. Distribución continua de las cargas. Densidad volumétrica de las cargas. Concentración de cargas. Densidad superficial de las cargas. Densidad de corriente. Intensidad de corriente a través de una superficie	
§ 5. Principio de conservación de la carga	37
Dos aspectos del concepto de conservación de la carga. Formulación integral del principio de conservación de la carga. Divergencia. Fórmula de Gauss—Ostrogradski. Enunciación diferencial del principio de conservación de la carga	
§ 6. Ley de Coulomb	45
Verificaciones experimentales de la ley de Coulomb. Método de Cavendish. Verificación de la ley para distancias grandes. Verificación de la ley para las distancias pequeñas. Interpretación de campo de la ley de Coulomb. Campo eléctrico. Sobre los límites de aplicación de la concepción clásica de campo	
§ 7. Principio de superposición	53
Principio de superposición para la interacción de las cargas puntuales. Enunciación con relación al campo del principio de superposición. Cargas de prueba. Límites de aplicación del principio de superposición	
§ 8. Campo magnético	56
Necesidad de la aparición de un campo magnético durante el movimiento de las cargas. Interacción entre una carga puntual y un hilo infinito recto con carga. Naturaleza relativista del campo magnético. Fuerzas de interacción de los conductores paralelos con corriente. Unidad de intensidad de corriente. Campo magnético	
§ 9. Fuerza de Lorentz. Fuerza de Ampère	62
Transformación de las fuerzas. Fuerza de Lorentz. Inducción del campo magnético.	

Fuerza de Ampère. Paso de las corrientes volumétricas a las lineales. Campo magnético de una corriente rectilínea

§ 10. Ley de Biot—Savart

Interacción de los elementos de corriente. Sobre la verificación experimental de la ley de interacción. Interpretación de la interacción respecto al campo. Ley de Biot y Savart. Fuerza de interacción de las corrientes rectilíneas

§ 11. Transformación de los campos

Invariación de la expresión para la fuerza en el campo electromagnético. Transformación de los campos. Aplicación de las fórmulas (11.15). Campo de una carga puntual que se mueve uniforme y rectilíneamente

Problemas

Capítulo 2. Campo eléctrico constante

§ 12. Campo eléctrico constante

Carga inmóvil. Esencia del modelo. Límites de aplicación del modelo

§ 13. Forma diferencial de la ley de Coulomb

Teorema de Gauss. Medición de la carga. Base física de la validez del teorema de Gauss. Enunciación diferencial de la ley de Coulomb. Ecuación de Maxwell para la div E. Líneas de fuerza. Fuentes y sumideros del vector E. Invariación de la carga

§ 14. Carácter potencial de un campo electrostático

Trabajo en un campo eléctrico. Carácter potencial del campo coulombiano. Rotor del vector. Fórmula de Stokes. Enunciación diferencial del carácter potencial del campo. Gradiente. Potencial escalar. Multiformalidad del potencial escalar. Normalización. Expresión del trabajo por medio del potencial. Potencial del campo de una carga puntual. Potencial del campo de un sistema de cargas puntuales. Potencial del campo para una distribución continua de las cargas. Potencial del campo de las cargas superficiales. Infinitud del potencial del campo de una carga puntual. Carácter finito del potencial, siendo continua la distribución de la carga con densidad finita. Continuidad del potencial. Teorema de Earnshaw

§ 15. Campo electrostático en el vacío

Planteamiento del problema. Aplicación directa de la ley de Coulomb. Cálculo del potencial. Uso del teorema de Gauss. Ecuaciones de Laplace y Poisson. Cilindro circular infinito, cargado uniformemente

§ 16. Campo electrostático en presencia de conductores

Forma diferencial de la ley de Ohm. Clasificación de los materiales según su conductividad. Ausencia de campo eléctrico dentro del conductor. Ausencia de cargas volumétricas en el conductor. Inducción electrostática. Campo en las proximidades de la superficie del conductor. Mecanismo de formación del campo cerca de la superficie del conductor. Dependencia entre la densidad superficial de las cargas y la curvatura de la superficie. Fuga de la carga de una punta. Electroscopios y electrómetros. Pantalla metálica. Potencial de un conductor. Capacidad de un conductor aislado. Sistema de conductores. Condensadores. Esfera conductora en un campo homogéneo. Campo de un dipolo. Método de representaciones

§ 17. Campo electrostático en presencia de dieléctricos

Momento dipolar de la distribución continua de las cargas. Polarización de los dieléctricos. Cuadro molecular de la polarización. Dependencia entre la polarización dieléctrica y la intensidad del campo eléctrico. Influencia de la polarización sobre el campo eléctrico. Densidades superficial y volumétrica de las cargas ligadas. Desplazamiento eléctrico. Teorema electrostático de Gauss en presencia de dieléctricos. Condiciones de frontera. Condiciones de frontera para la componente normal del vector D. Condiciones de frontera para la componente tangencial del vector E. Refracción de las líneas de fuerza en la superficie de separación de los dieléctricos. Signos de las cargas ligadas en la superficie de separación de los dieléctricos. Método de representaciones. Esfera dieléctrica en un campo homogéneo

67

74

81

81

82

88

99

106

137

§ 18. Energía del campo electrostático	156
Energía de interacción de las cargas discretas. Energía de interacción durante la distribución continua de las cargas. Energía intrínseca. Densidad de la energía del campo. Energía del campo de las cargas superficiales. Energía de los conductores con carga. Energía del dipolo en un campo exterior. Energía de un cuerpo dieléctrico en un campo exterior	
§ 19. Fuerzas en el campo eléctrico	164
Naturaleza de las fuerzas. Fuerza que actúa sobre una carga puntual. Fuerza que actúa sobre una carga continuamente distribuida. Fuerza que actúa sobre el dipolo. Momento de fuerzas que actúa sobre el dipolo. Fuerzas volumétricas que actúan sobre un dieléctrico. Fuerzas que actúan sobre un conductor. Fuerzas superficiales que actúan sobre un dieléctrico. Fuerzas volumétricas que actúan sobre un dieléctrico comprimido. Cálculo de las fuerzas partiendo de la expresión para la energía	
Problemas	
Capítulo 3. Dieléctricos	181
§ 20. Campo local	181
Diferencia entre el campo local y el exterior. Cálculo de la intensidad del campo local	
§ 21. Dieléctricos neutros	184
Susceptibilidad dieléctrica molecular. Gases enrarecidos. Gases densos.	
§ 22. Dieléctricos polares	187
Dependencia entre la polarización y la temperatura. Campo de saturación. Gases rarificados. Interpretación cuántica de la polarización de los dieléctricos gaseosos polares. Gases densos. Líquidos polares. Cristales iónicos	
§ 23. Sustancias ferroeléctricas	192
Definición. Ciclo de histéresis. Punto (temperatura) de Curie. Mecanismo molecular de la polarización espontánea. Dominios dieléctricos. Sustancias antiferroeléctricas.	
§ 24. Sustancias piezoeléctricas	197
Propiedades de las sustancias piezoeléctricas. Efectos piezoeléctricos transversal y longitudinal. Mecanismo del efecto piezoeléctrico. Efecto piezoeléctrico inverso. Sustancias piroeléctricas	
Problemas	
Capítulo 4. Corriente eléctrica continua	201
§ 25. Campo eléctrico en presencia de corrientes continuas	201
Campo dentro del conductor. Cuestión sobre las fuentes del campo. Campo fuera del conductor. Cargas superficiales. Cargas volumétricas. Mecanismo de realización de la corriente continua. Variación del potencial a lo largo de un conductor con corriente	
§ 26. Fem exteriores	206
Esencia de las fem exteriores. Fem exterior mecánica. Pilas eléctricas (elementos galvánicos). Pila de Volta. Zona de acción de las fem exteriores. Principio de conservación de la energía. Polarización de la pila. Métodos de despolarización. Acumuladores	
§ 27. Forma diferencial de la ley de Joule—Lenz. Trabajo que efectúa la corriente al pasar y potencia desarrollada	212
Trabajo que se efectúa al pasar la corriente. Potencia. Forma diferencial de la ley de Joule—Lenz. Fuente de energía para el trabajo de la corriente eléctrica. Deducción de la ley de Ohm, partiendo del cuadro electrónico de la electroconductibilidad. Deducción de la ley de Joule—Lenz partiendo de la teoría electrónica de la electroconductibilidad. Defectos de la teoría clásica de la electroconductibilidad. Rasgos principales de la representación cuántica de la electroconductibilidad.	
§ 28. Circuitos lineales. Leyes de Kirchhoff	217
Circuito cerrado aislado. Circuitos derivados. Leyes de Kirchhoff.	

§ 29. Corrientes en un medio continuo Planteamiento del problema. Deducción de la fórmula. Condiciones de aplicación de (29.6). Electrodo coaxiales. Medio heterogéneo.	220
§ 30. Puesta a tierra de las líneas de transmisión Planteamiento del problema. Cálculo de la resistencia. Verificación experimental. Tensión de paso Problemas	224
Capítulo 5. Electroconductibilidad	229
§ 31. Electroconductibilidad de los metales Demostración de que en los metales no existe transferencia de la substancia por la corriente eléctrica. Ensayos de Tolman y Stewart. Sobre la teoría de las bandas. Dependencia entre la resistencia y temperatura. Efecto Hall. Magnetorresistencia. Movilidad de los electrones. Superconductividad. Temperatura crítica. Campo crítico. Efecto Meissner. Corriente superficial. Superconductores de primero y segundo género. Explicación de la superconductividad	229
§ 32. Electroconductibilidad de los líquidos Disociación. Cálculo de la electroconductibilidad. Dependencia entre la electroconductibilidad y la concentración. Dependencia entre la electroconductibilidad y la temperatura. Electrólitos	237
§ 33. Electroconductibilidad de los gases Corrientes automantenida y no automantenida. Corriente no automantenida. Densidad de la corriente de saturación. Característica de la corriente. Corriente automantenida. Acción de la carga espacial. Movilidad de las cargas. Comparación de las deducciones de (33.18) con el experimento	240
§ 34. Corriente eléctrica en el vacío Emisión termoiónica. Características de la nube electrónica. Densidad de la corriente de saturación. Ley de Child—Langmuir Problemas	244
Capítulo 6. Campo magnético estacionario	252
§ 35. Ley de la corriente total Planteamiento del problema. Forma integral de la ley de la corriente total. Forma diferencial de la ley de la corriente total. Verificación experimental de la ley de la corriente total. Deducción de la forma diferencial diferenciando directamente la fórmula de Biot—Savart	252
§ 36. Ecuaciones de Maxwell para un campo magnético estacionario Ecuación para $\text{div } \mathbf{B}$. Ecuaciones de Maxwell. Tipo de problemas a resolver	257
§ 37. Potencial vectorial Posibilidad de introducir el potencial vectorial. Multiformalidad del potencial vectorial. Calibración del potencial. Ecuación para el potencial vectorial. Ley de Biot—Savart. Campo de la corriente elemental	260
§ 38. Campo magnético en presencia de magnéticos Definición. Mecanismos de la imanación. Imanación. Potencial vectorial en presencia de magnéticos. Densidad volumétrica de los flujos moleculares. Flujos moleculares superficiales. Cilindro homogéneamente imantado. Intensidad del campo magnético. Ecuación para la intensidad. Dependencia entre la imanación y la intensidad. Campo en el magnético. Imanes permanentes. Condiciones de frontera para los vectores de campo. Condición de frontera para la componente normal del vector \mathbf{B} . Condición de frontera para la componente tangencial del vector \mathbf{H} . Refracción de las líneas de fuerza magnética. Medición de la inducción del campo magnético. Campos de un solenoide infinito y de un cilindro infinitamente largo y homogéneamente imantado. Medición de la permeabilidad magnética, inducción e intensidad del	266

campo dentro de un magnético. Esfera de magnético en un campo homogéneo. Blindaje magnético

§ 39. Fuerzas en un campo magnético

Fuerzas que actúan sobre la corriente. Fuerza de Lorentz. Fuerza y momentos de fuerza que actúan sobre el momento magnético. Fuerzas volumétricas que actúan sobre los magnéticos incompresibles

Problemas

Capítulo 7. Magnéticos

§ 40. Sustancias diamagnéticas

Precesión de Larmor. Diamagnetismo. Susceptibilidad diamagnética. Independencia de la susceptibilidad con respecto a la temperatura

§ 41. Sustancias paramagnéticas

Mecanismo de la imanación. Dependencia entre la susceptibilidad paramagnética y la temperatura. Momentos magnéticos de los átomos libres. Momentos magnéticos de las moléculas. Magnetismo determinado por los electrones libres. Resonancia paramagnética

§ 42. Sustancias ferromagnéticas

Definición. Curva de imanación y ciclo de histéresis. Curva de la permeabilidad magnética. Clasificación de los materiales ferromagnéticos. Interacción de los electrones. Teoría elemental del ferromagnetismo. Ley de Curie-Weiss. Anisotropía de la imanación. Dominios. Fronteras. Remagnetización. Antiferromagnetismo. Ferrimagnetismo. Resonancia ferromagnética

§ 43. Efectos giromagnéticos

Relación entre los momentos magnéticos y mecánicos. Experimento de Einstein-Haas. Efecto Barnett

Problemas

Capítulo 8. Inducción electromagnética y corrientes alternas casiestacionarias

§ 44. Inducción de las corrientes en conductores en movimiento

Aparición de fem en un conductor en movimiento. Generalización para un caso aleatorio. Generadores de corriente alterna. Principio de conservación de la energía

§ 45. Ley de la inducción electromagnética de Faraday

Definición. Esencia física del fenómeno. Conductor en movimiento en un campo magnético aleatorio. Aplicación de la inducción electromagnética a los generadores de corriente alterna

§ 46. Forma diferencial de la ley de la inducción electromagnética

Enunciación. Carácter no potencial del campo eléctrico inducido. Potenciales vectorial y escalar en un campo electromagnético alternativo. Multiformalidad de los potenciales, transformación de calibración.

§ 47. Energía del campo magnético

Energía del campo magnético de un circuito aislado con corriente. Energía del campo magnético de varios circuitos con corriente. Energía del campo magnético en presencia de magnéticos. Densidad de la energía del campo magnético. Inductancia. Campo de un solenoide. Energía del magnético en un campo magnético exterior. Cálculo de las fuerzas, partiendo de la expresión para la energía. Fuerzas volumétricas que actúan sobre los magnéticos comprimibles. Energía del momento magnético en un campo exterior

§ 48. Circuitos de la corriente alterna casiestacionaria

Definición. Autoinducción. Conexión y desconexión de la fem continua en un circuito con resistencia e inductancia. Obtención de impulsos rectangulares de corriente. Capacidad en el circuito. Conexión y desconexión de la fem continua en un circuito con capacidad y resistencia. Circuito con capacidad, inductancia, resistencia y fuente

de fem exteriores. Corriente alterna. Diagramas vectoriales. Reglas de Kirchhoff. Acoplamiento en serie y en paralelo de las impedancias. Métodos de corrientes de contorno	
§ 49. Trabajo y potencia de la corriente alterna	349
Potencia instantánea. Potencia media. Valores efectivos de la intensidad de la corriente y de la tensión. Factor de potencia. Motores eléctricos. Motores sincrónicos. Motores asíncrónicos. Creación de un campo magnético giratorio. Adaptación de la carga al generador. Corrientes de Foucault	
§ 50. Resonancias en el circuito de corriente alterna	359
Resonancia en serie. Resonancia en paralelo. Circuito oscilante.	
§ 51. Circuitos con inducción mutua	364
Papel de la inducción mutua. Ecuaciones para el sistema de conductores, teniendo en cuenta la autoinducción e inducción mutua. Caso de dos circuitos. Transformador. Diagrama vectorial de la marcha en vacío del transformador. Diagrama vectorial del transformador cargado. Autotransformador. Transformador como elemento del circuito. Transformador real.	
§ 52. Corriente trifásica	370
Definición. Obtención de la corriente trifásica. Conexión en estrella de los devanados del generador. Conexión en delta de los devanados del generador. Conexión de las cargas. Obtención de un campo magnético en rotación	
§ 53. Efecto pelicular	374
Esencia del fenómeno. Cuadro físico de la aparición. Teoría elemental. Grosor de la capa pelicular. Dependencia entre la resistencia óhmica del conductor y la frecuencia. Dependencia entre la inductancia del conductor y la frecuencia. Temple de los metales con corrientes de alta frecuencia. Efecto pelicular anómalo	
§ 54. Cuadripolos	379
Definición. Ecuaciones. Teorema de la reciprocidad. Resistencia del cuadripolo. Cuadripolos elementales. Resistencias de entrada y de salida. Relación de transferencia	
§ 55. Filtros	383
Definición. Filtro de paso bajo. Filtro de paso alto. Cadena de filtros. Filtro de banda.	
§ 56. Betatrón	386
Destinación. Principio de funcionamiento. Condición de betatrón. Estabilidad radial. Estabilidad vertical. Oscilaciones de betatrón. Límite de energías que se logran en el betatrón. Problemas	
Capítulo 9. Ondas electromagnéticas	393
§ 57. Corriente de desplazamiento	393
Esencia del proceso. ¿Por qué la velocidad de variación del vector de desplazamiento se denomina densidad de corriente? Ecuación de Maxwell con corriente de desplazamiento. Naturaleza relativista de la corriente de desplazamiento	
§ 58. Sistema de ecuaciones de Maxwell	398
Sistema de ecuaciones de Maxwell. Sentido físico de las ecuaciones. Condiciones de aplicación de las ecuaciones. Completitud y compatibilidad del sistema de ecuaciones	
§ 59. Principio de conservación de la energía del campo electromagnético. Flujo de energía	401
Enunciación. Flujo de energía	
§ 60. Movimiento de la energía electromagnética a lo largo de las líneas de transporte	403
Mecanismo de compensación de las pérdidas de energía en calor de Joule. Movimiento de la energía a lo largo del cable. Línea de transporte de la corriente alterna. Ecuaciones para la intensidad de la corriente y la tensión. Impedancia característica y constante de propagación. Resistencia característica. Velocidad de propagación. Reflexión	

§ 61. Emisión de las ondas electromagnéticas Ecuación para el potencial vectorial. Elección de la función de calibración. Ecuación para el potencial escalar. Solución de la ecuación de onda. Potenciales de avance y retardados. Dipolo hertziano. Potencial escalar. Potencia vectorial. Campos eléctrico y magnético. Campo del oscilador en la zona de onda. Potencia emitida por el dipolo. Emisión de un cuadro con corriente. Emisión de un electrón en movimiento acelerado. Fuerza de deceleración por radiación	410
§ 62. Propagación de las ondas electromagnéticas en los dieléctricos Ondas planas. Ecuaciones para los vectores del campo de la onda. Vectores de onda. Velocidad de fase (de propagación). Longitud de onda. Propiedades de las ondas. Densidad del flujo de energía	424
§ 63. Propagación de las ondas electromagnéticas en medios conductores Constante dieléctrica compleja. Profundidad de penetración. Causa física de la absorción. Interpretación del efecto pelicular. Velocidad de fase y longitud de onda en un medio conductor. Relación entre las fases de las oscilaciones de los vectores del campo. Relación entre las amplitudes de los vectores del campo	428
§ 64. Invariancia de la onda plana Transformación de los campos. Invariantes de las transformaciones del campo electromagnético. Análisis de los invariantes del campo	432
§ 65. Presión de las ondas electromagnéticas. Impulso del fotón Mecanismo de surgimiento de la presión. Presión. Impulso del tren de ondas electromagnéticas. Densidad volumétrica del impulso de las ondas electromagnéticas. Impulso del fotón	434
§ 66. Guías de ondas y resonadores Sección del circuito. Sección del conductor. Bobina de inductancia. Condensador. Radiación. Guías de ondas. Guía de ondas rectangular. Frecuencia límite. Velocidad de fase. Longitud de onda en el guía de ondas. Aplicación del método de representaciones al análisis. Carácter discreto de las direcciones de propagación de las ondas planas que provienen del sistema de radiadores. Longitud de onda de corte. Longitud de onda y velocidad de fase en el guía de ondas. Velocidad de grupo. Relación entre las velocidades de fase y de grupo. Campo magnético. Clasificación de las ondas en el guía de ondas. Resonadores. Problemas	437
Capítulo 10. Fluctuaciones y ruidos	449
§ 67. Fluctuaciones en un contorno con corriente. Ruido de resistencia Teorema de la equipartición de la energía respecto al grado de libertad. Aplicación del teorema de equipartición de energía respecto a un galvanómetro de espejo. Fluctuaciones en el circuito oscilante. Distribución de las fluctuaciones respecto a las frecuencias. Ruido de resistencia. Generador equivalente de ruido. Potencia del ruido del generador. Sensibilidad máxima. Temperatura equivalente de ruido del receptor. Coeficiente de ruido. Relación señal/ruido	449
§ 68. Ruido de agitación térmica y ruido de corriente Fuente del ruido de agitación térmica. Distribución del ruido según las frecuencias. Ruido de corriente. Métodos de reducción del ruido	457
Apéndices	461
Índice alfabético de materias	463

Prefacio

El presente curso refleja el nivel actual de la ciencia y la enseñanza, asimismo tiene en cuenta las variaciones en el programa de la física general.

Al exponer la teoría de la electricidad y el magnetismo, es posible basarse desde el comienzo en la naturaleza relativista del campo magnético y representar los campos magnético y eléctrico en su relación mutua y unidad, dado que las ideas principales de la teoría de la relatividad se conocen del curso de la mecánica. Por esta razón, la exposición del material en dicho libro no comienza por la electrostática, sino por el análisis de los conceptos principales, relacionados con las cargas, fuerzas, y con el campo electromagnético. Además, ciertos conocimientos sobre las leyes de los fenómenos electromagnéticos que posee el estudiante del curso de física de la escuela secundaria, se transforman en un conocimiento científico moderno, y la argumentación de la teoría se analiza a la luz del estado actual de los principios experimentales del electromagnetismo, considerando los límites de la posibilidad de aplicación de los conceptos a utilizar. Ello conduce a veces a la necesidad de rebasar los márgenes de la teoría del electromagnetismo en el sentido estricto de la palabra. Por ejemplo, la cuestión sobre la argumentación experimental de la ley de Coulomb para grandes distancias no puede exponerse sin mencionar su enlace con la masa en reposo nula de los fotones. Y a pesar de que este problema se expone total y estrictamente en la electrodinámica cuántica, es racional presentar sus principales rasgos generales en la teoría clásica del electromagnetismo. Ello creará en el estudiante una idea general sobre el problema y la relación del material en cuestión con el de los cursos superiores. La última circunstancia tiene un significado bastante considerable desde el punto de vista metodológico.

La tarea primordial del curso es la exposición de la argumentación experimental de la teoría del electromagnetismo y la enunciación de la teoría en forma local, o sea, en forma de relaciones entre las magnitudes físicas en un mismo punto espacial-temporal. En la mayoría de los casos estas relaciones poseen forma diferencial, pero lo esencial es su carácter local y no su forma diferencial. Por esta razón, la meta final del curso son las ecuaciones de Maxwell como resultado de la generalización y enunciación matemática de las regularidades establecidas de manera experimental. Por consiguiente, el método principal de exposición es inductivo. En cambio, ello no excluye, sino que supone

su combinación con el método deductivo de exposición conforme al principio del conocimiento científico de las regularidades físicas. Por eso las ecuaciones de Maxwell aparecen en el libro no sólo como consecuencia de la enunciación matemática de las uniformidades, establecidas durante el experimento, sino también como instrumento para investigar dichas regularidades.

La elección de hechos experimentales que pueden tomarse como argumentación experimental de la teoría, es multiforme. En el libro se expone la argumentación de la teoría del electromagnetismo sin la teoría de la relatividad y con ésta. La última argumentación es más preferible, ya que en ella la teoría de la relatividad aparece como teoría general de espacio-tiempo, sobre la cual deben basarse cualesquiera teorías físicas. Semejante argumentación se ha hecho posible en los márgenes del nuevo programa de la física general.

Como parte esencial de la teoría se plantea la cuestión de los límites de su aplicación y la esfera de empleo de los conceptos y modelos que se usan en la teoría. Estos problemas expuestos en el libro tienen un valor primordial. En particular, el análisis de la interacción de fuerza de las cargas ya en los márgenes de la teoría clásica, sin utilizar ningunas representaciones clásicas, muestra que la teoría clásica de la electricidad y el magnetismo no puede aplicarse al análisis de la interacción de partículas con carga aisladas.

A. Matvéev

Introducción

En la actualidad en la física se conocen cuatro tipos de interacción de los objetos materiales: gravitacional, fuerte, débil y electromagnética. Estas interacciones se manifiestan en diversas escalas espaciales y se caracterizan por su intensidad.

La interacción gravitacional se nota sólo entre los cuerpos de escalas astronómicas. Las interacciones fuertes aparecen sólo entre partículas determinadas, al acercarse a distancias bastante pequeñas (10^{-16} m). La débil se efectúa durante la transformación mutua de ciertas clases de partículas. Alejando las partículas una de la otra, dicha interacción se hace insignificante. Solamente las interacciones electromagnéticas se manifiestan en las escalas espaciales, en las que transcurre nuestra vida cotidiana. Prácticamente todas las «fuerzas» que determinan los fenómenos físicos en nuestro medio ambiente diario, a excepción de la fuerza de gravedad, son a fin de cuenta, fuerzas electromagnéticas. Está claro que todas las relaciones y fenómenos multiformes, determinados por la interacción electromagnética, no pueden describirse mediante las leyes de la electrodinámica, ya que en cada nivel del fenómeno existen sus rasgos específicos y regularidades que no se reducen a las regularidades de otro nivel. Sin embargo, las interacciones electromagnéticas en todos los niveles son, en cierto sentido, una relación elemental, con cuya ayuda se forma toda la cadena de enlaces. Esto define el significado de los fenómenos electromagnéticos.

La teoría de los fenómenos electromagnéticos tiene una importancia extraordinariamente grande. Es la primera teoría invariante desde el punto de vista relativista. Desempeñó un papel decisivo en la aparición y argumentación de la teoría de la relatividad y fue aquel «polígono», en el que se sometieron a prueba muchas de las nuevas ideas. La electrodinámica cuántica es la teoría cuántica, que está elaborada mejor que todas y cuyas predicciones concuerdan muy bien con el experimento, pese a que hasta hoy día aún tiene contradicciones internas y no está acabada. Es muy esencial la importancia del electromagnetismo desde el punto de vista de la filosofía general y de la concepción del mundo. Por ejemplo, en los márgenes de los fenómenos electromagnéticos se manifiestan de manera precisa las peculiaridades de la forma de campo de la existencia de la materia, se observan bien las transformaciones mutuas de sus diversas formas y modificaciones mutuas de distintas formas de energía.

En el libro se exponen dos caminos para motivar la teoría. Al argumentar sin la teoría de la relatividad a título de principios experimentales de la teoría

de la electricidad y el magnetismo, se tomaron la invariación de la carga elemental, la ley de Coulomb, el principio de superposición para el campo eléctrico, la ley de Biot—Savart, el principio de superposición para el campo magnético, la fuerza de Lorentz, la ley de inducción electromagnética de Faraday, las corrientes de desplazamiento de Maxwell, el principio de conservación de la carga y el principio de conservación de la energía. Al argumentar con la teoría de la relatividad, la ley de Biot—Savart, el principio de superposición para el campo magnético y la fuerza de Lorentz ya no desempeñan el papel de hechos experimentales independientes en la enunciación de la teoría. El segundo camino en demostrar la teoría de la electricidad y el magnetismo no se expone en forma de vía principal, sino como complementaria, elegida con el fin de simplificar lo máximo posible la cuestión matemática del asunto. Este camino incluye en sí las siguientes etapas.

La naturaleza relativista del campo magnético se muestra en el § 8, donde se deduce la fórmula de interacción para las corrientes directas que pasan por conductores paralelos infinitamente largos y se obtiene la fuerza de Lorentz, partiendo de la interacción eléctrica de las cargas. La interpretación respecto al campo de estos resultados permite hallar la inducción del campo magnético de la corriente que pasa por un conductor rectilíneo infinitamente largo. Ahora el principio de superposición para el campo magnético es consecuencia del principio de superposición para el campo eléctrico. En el § 35 se efectúa el paso a la inducción del campo magnético de corrientes arbitrarias y la deducción de las ecuaciones correspondientes. En el mismo se utiliza de manera esencial la independencia entre las correlaciones locales y los valores de las magnitudes físicas en otros puntos. Luego en el § 37 se deduce la ley de Biot—Savart y de esta manera se finaliza el análisis del enlace, que existe en los márgenes de las representaciones relativistas sobre el espacio y tiempo, entre la invariación de una carga eléctrica elemental, la ley de Coulomb, el principio de superposición para el campo eléctrico y la ley de Biot—Savart, fuerza de Lorentz y el principio de superposición para el campo magnético.

Cargas, campos, fuerzas

La carga es la fuente y el objeto de acción del campo electromagnético.

El campo es el portador material de las interacciones electromagnéticas de las cargas, es la forma de la materia.

La fuerza es la medida cuantitativa de la intensidad de interacción de las cargas.

Las cargas, los campos y las fuerzas existen en una relación indisoluble con el espacio, tiempo y el movimiento de la materia.

Su relación mutua no puede ser comprendida sin tener en cuenta el enlace con el espacio, tiempo y movimiento.

§ 1. Portadores microscópicos de cargas eléctricas

Se describen las propiedades de los portadores microscópicos principales de las cargas eléctricas. Se examina la distribución de la carga eléctrica en el protón y neutrón y se analiza su sentido físico.

Clasificación. Por portadores microscópicos de las cargas se comprenden las partículas y los iones con carga, tanto positiva, como negativa. Según el valor numérico, la carga puede superar sólo un número entero de veces a la elemental:

$$|e| = 1,6021892(46) \cdot 10^{-19} \text{ C.} \quad (1.1)$$

Hasta hoy día no se han descubierto portadores microscópicos con carga fraccionaria, a pesar de los considerables esfuerzos experimentales (véase el § 3).

Se conocen unas 200 partículas y una enorme cantidad de iones, átomos y moléculas. La mayor parte de las partículas, después de aparecer, existen un tiempo corto, al terminar el cual se desintegran en otras partículas, o sea, *las partículas poseen un tiempo finito de vida*. En la mayoría de los casos éste es sumamente pequeño: ínfimas partes de segundo. *Existe sólo una pequeña cantidad de partículas cargadas con tiempo infinito de vida. Estas son el electrón, el protón y sus antipartículas*. Los núcleos de los átomos constan de protones, mientras que la capa electrónica de los átomos contiene electrones. Precisamente son éstas las partículas que determinan casi todos los fenómenos que se estudian en el curso de electricidad y magnetismo. Además de los protones, los núcleos constan de neutrones, que son eléctricamente neutros y su tiempo de vida en la composición de los núcleos es ilimitado. En cambio, fuera de los núcleos ellos viven, en término medio, unos 17 minutos, desintegrándose en protones, electrones y antineutrino.

La carga de los iones se determina por el hecho de que en la capa electrónica del correspondiente átomo o molécula falta un electrón o varios (iones positivos) o, por el contrario, sobran (iones negativos). Por eso la cuestión sobre los iones como portadores microscópicos de cargas se reduce a la cuestión sobre las cargas de los electrones y protones.

Electrón. El electrón es el portador material de la carga negativa elemental. *Por lo general, se considera que el electrón es una partícula puntiforme sin estructura, o sea, toda la carga eléctrica del electrón está concentrada en un punto. Semejante representación es intrínsecamente contradictoria, ya que la energía del campo eléctrico, creado por la carga puntual, es infinita y, por lo tanto, también debe ser infinita la masa inerte de la carga puntual, lo que contradice al experimento, puesto que la masa del electrón es igual a $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. Sin embargo hay que conformarse con esta paradoja por no haber otro punto de vista más satisfactorio y menos contradictorio respecto a la estructura (o ausencia de ésta) del electrón.* La dificultad en comprender la masa en reposo infinita se supera con éxito, calculando distintos efectos haciendo uso de la **renormalización de la masa**, cuya esencia consiste en lo siguiente. Sea que se necesite calcular cierto efecto, con la particularidad de que en el cálculo participa la masa en reposo infinita. La magnitud que se obtiene como consecuencia de este cálculo, es infinita y, por consiguiente, carece de sentido físico. Para obtener un resultado físicamente razonable, se lleva a cabo otro cálculo más en el que están todos los factores, a excepción de los del fenómeno en cuestión. En el último cálculo participa también la masa en reposo infinita, por lo que dicho cálculo conduce a un resultado infinito. La sustracción del primer resultado infinito del segundo conduce a la reducción mutua de las magnitudes infinitas, relacionadas con la masa en reposo, mientras que la magnitud remanente resulta ser finita y caracteriza el fenómeno en cuestión. Así se logra librarse de la masa en reposo infinita y obtener resultados físicamente razonables, confirmados por el experimento. Este procedimiento se utiliza, por ejemplo, al calcular la energía del campo eléctrico (véase el § 18).

Protón. El portador de la carga elemental positiva es el protón. Este, a diferencia del electrón, no se considera partícula puntiforme: la distribución de la carga eléctrica dentro del protón está bien estudiada experimentalmente. El método de análisis es semejante al que empleó Rutherford a principios de este siglo al investigar la estructura de los átomos, como consecuencia de lo cual fue descubierta la existencia del núcleo. Se analiza la colisión de los electrones con el protón. Si nos imaginamos el protón como una distribución esféricamente simétrica de la carga en un volumen finito, la trayectoria del electrón, que no atraviesa dicho volumen, no depende de la ley de distribución de la carga, es exactamente la misma como si toda la carga del protón estuviese concentrada en su centro. *Las trayectorias de los electrones, que pasan a través del volumen del protón, dependen del tipo concreto de distribución de la carga en él, y pueden ser calculadas.* Por esta razón, al realizar una cantidad suficiente de observaciones respecto a los resultados de las colisiones entre los electrones y protones, puede deducirse la distribución de la carga dentro del protón. Ya que se trata de zonas sumamente pequeñas del espacio, para los experimentos se tuvo que hacer uso

de electrones de energías muy altas. Esta necesidad está dictada por la teoría cuántica. Según las relaciones de De Broglie, las partículas materiales poseen propiedades ondulatorias, con la particularidad de que la longitud de onda de la partícula es inversamente proporcional al impulso. Para «palpar» cierta pieza espacial, es indispensable, por lo visto, utilizar partículas, cuyas longitudes de onda sean inferiores a las correspondientes dimensiones espaciales de la pieza, lo que corresponde a impulsos suficientemente grandes. Por esta razón, la investigación de la estructura electromagnética del protón se hizo posible sólo después de confeccionar aceleradores electrónicos de energías de varios miles de millones de electrón-voltios. La fig. 1, *a* representa el resultado de estos experimentos. Por el eje de ordenadas no se traza la densidad ρ de la carga a la distancia r respecto al centro del protón, sino que la magnitud $4\pi r^2 \rho$ que representa la densidad de la carga, sumaria según todas las direcciones, a la distancia r del centro, ya que $4\pi r^2 \rho(r) dr$ es la carga total en la capa esférica de grosor dr . En la figura se ve que *prácticamente toda la carga del protón está concentrada en una esfera de radio $\approx 10^{-15}$ m. Después del primer máximo la magnitud $4\pi r^2 \rho(r)$ no decrece monótonamente, sino que existe un máximo más.*

Neutrón. Semejantes experimentos fueron realizados también respecto a la dispersión de los electrones en neutrones, que mostraron que el neutrón posee estructura electromagnética, y no es una partícula puntiforme, eléctricamente neutra. La fig. 2, *a* ilustra la distribución de la carga eléctrica dentro del neutrón.

Es obvio que *cerca del centro del neutrón se sitúa la carga positiva y más lejos de él, la carga negativa.* Las áreas, delimitadas por las curvas y el eje de abscisas, son iguales, por lo tanto, la carga positiva es igual a la negativa, y en total el neutrón resulta ser eléctricamente neutro. *Las dimensiones de las zonas del protón y el neutrón en las que se concentran las cargas eléctricas, son aproximadamente iguales.*

¿Qué significa la distribución continua de la carga elemental eléctrica? El área, limitada por la curva y el eje de abscisas (véase la fig. 1, *a*) es numéricamente igual a la carga del protón y el área sombreada, a la carga dentro del protón en una capa esférica de grosor dr a la distancia r respecto al centro del protón. Está claro que esa carga es sólo una parte pequeña de la carga total del protón, o sea, una parte pequeña de la carga elemental. Sin embargo, *en la naturaleza no se logró encontrar objetos físicos, cuya carga fuese igual a cierta parte fraccionaria de la carga elemental.* Se pregunta: ¿qué sentido tiene la afirmación de que en el volumen $4\pi r^2 dr$ se halla una parte pequeña de la carga elemental?

En la actualidad se supone que el protón consta de dos quarks puntuales con una carga $+\frac{2}{3} |e|/3$ y uno con carga $-|e|/3$ (véase la fig. 1, *b*). Los quarks en el protón están en movimiento. Su tiempo relativo de estancia a diversas distancias respecto al centro del protón puede representarse eficazmente en forma de extensión de la carga por el volumen del protón, como muestra la fig. 1, *a*. El neutrón consta de dos quarks con carga $-|e|/3$ y un quark con carga $+\frac{2}{3} |e|/3$ (fig. 2, *b*). La distribución de la carga en él (fig. 2, *b*) se explica de la misma manera.

A pesar de todos los grandes esfuerzos experimentales, los quarks en estado libre no han sido detectados. Hoy día se considera que no se les puede descubrir, en principio, en estado libre, ya que para ello es necesario gastar una energía

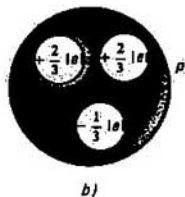
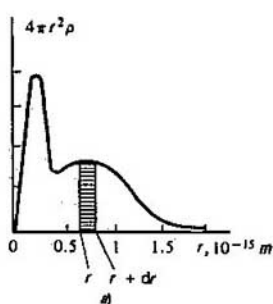


Fig. 1
Estructura electromagnética del protón. Casi toda la carga del protón está concentrada dentro de una esfera de radio r_0

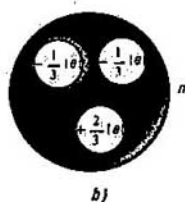
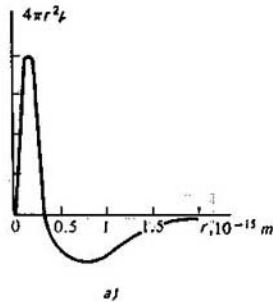


Fig. 2
Estructura electromagnética del neutrón. En las proximidades del centro del neutrón se ubica la carga positiva, más lejos del centro, la negativa. Las cargas positiva y negativa se compensan mutuamente, por lo que en total el neutrón es eléctricamente neutro

infinita, pero, no obstante, dentro del protón ellos existen. Semejante suposición permite explicar muchos fenómenos y por eso los físicos la toman como una hipótesis probable.

No existe una demostración experimental directa de la presencia de los quarks dentro del protón.

Spin y momento magnético. Las partículas, además de carga, pueden poseer un momento de impulso o spin. *El spin no se determina por la rotación de la partícula*, ya que para semejante explicación, siendo las proposiciones sobre las dimensiones de las partículas razonables, se tendría que admitir la existencia de velocidades lineales durante la rotación que superan a la velocidad de la luz,

lo que es imposible. Por esta razón, *el spin se considera como una propiedad de la partícula.*

La existencia del momento magnético en una partícula con carga está relacionada con el spin. Dicho momento tampoco puede explicarse por el movimiento de la carga y se considera como una propiedad inicial.

En la electrodinámica clásica el momento magnético puede sólo ser consecuencia del movimiento de las cargas por trayectorias cerradas. Por eso el momento magnético de spin de las partículas no puede describirse en los márgenes de la teoría clásica de la electricidad y el magnetismo. Sin embargo, el campo magnético, condicionado por los momentos magnéticos de spin, puede, si hay necesidad, explicarse desde el punto de vista fenomenológico. Por regla general, la intensidad de este campo es muy pequeña. Sólo habiendo imanes permanentes, alcanza valores grandes. La teoría clásica no está en condiciones de describir el mecanismo de aparición de este campo, mientras que el propio campo fuera de los imanes permanentes se explica totalmente por la teoría clásica (véase el § 38).

El electrón se considera una partícula puntiforme, a pesar de que eso provoca dificultades. Hasta el momento no se logró determinar experimentalmente la estructura electromagnética interior del electrón.

La distribución continua de la carga eléctrica elemental no está relacionada con su división en partes, sólo significa que se tiene en cuenta la ley de movimiento de esta carga en el espacio.

No existe carga alguna inferior a la elemental. ¿Cuál es el sentido de la idea sobre la distribución de la carga en el protón si su carga total es igual a la elemental?

¿Con qué dificultad principal está relacionada la representación del electrón como una partícula puntiforme? ¿Mediante cuál procedimiento artificial se supera dicha dificultad?

§ 2. Cuerpos con carga. Electrización

Se aclara la naturaleza física de los procesos que conducen a la electrización de los cuerpos al hacer contacto. Se comunican ciertas nociones sobre el espectro energético de los electrones en los sólidos.

Trabajo de salida termoelectrónico. Las fuerzas que retienen los átomos neutros en la molécula y las moléculas neutras en el sólido, se examinan en el curso de la física molecular. El mismo hecho de existencia de los sólidos testimonia sobre la existencia de fuerzas que retienen los electrones dentro del sólido. Para extraer de éste un electrón es necesario gastar cierto trabajo contra las fuerzas que retienen los electrones en el interior del sólido. Supongamos que un sólido junto con el espacio inmediato a él, está cerrado en una envoltura adiabática y se mantiene a una temperatura constante T . A causa del movimiento térmico y la distribución de los electrones conforme a las velocidades, en el interior del cuerpo se hallarán electrones, cuya energía cinética es suficiente para superar las fuerzas que los re-

tienen dentro del cuerpo, y para rebasar sus límites. Merced a ello en la superficie del cuerpo se forma un «gas» de electrones. En su movimiento, los electrones de este «gas» se aproximan a la superficie del sólido que los coge hacia dentro. El equilibrio termodinámico se logra cuando el número de electrones que abandonan el volumen del cuerpo es igual, en término medio, a la cantidad de electrones que ingresan en el volumen del cuerpo desde la capa del «gas» electrónico, inmediata a su superficie. En este caso la concentración de electrones en la superficie del cuerpo tiene un valor determinado n_0 . Este gas electrónico no es degenerado y su densidad puede representarse como la distribución de Boltzmann:

$$n_0 = A \exp [-\Phi/(kT)], \quad (2.1)$$

donde A depende sólo de T y Φ es el trabajo de salida termoiónico.

Según el sentido de la distribución de Boltzmann, el trabajo de salida termoiónico es en sí la diferencia de energías del electrón fuera del sólido y dentro de éste. En cambio, dentro del sólido los electrones poseen distintas energías. Por eso sólo analizando el espectro energético de los electrones, se pone evidente de qué energía se trata al determinar Φ .

Espectro energético de los electrones. Las leyes de movimiento de las micro-partículas se exponen en la mecánica cuántica, que permite calcular el espectro energético de los electrones si se conoce la ley de variación de su energía potencial. Estos cálculos se complican por la necesidad de tomar en consideración también la interacción de los electrones entre sí. La solución exacta de semejante género de problemas supera las posibilidades incluso de los ordenadores modernos y es poco probable que sean resueltos en el futuro. Pero tampoco hay necesidad de eso, ya que se logró elaborar los métodos de solución aproximada del problema que satisface bastante bien las demandas prácticas. Lo importante es testificar que el espectro existe y es discreto para los electrones, encerrados en una región finita del espacio. El espectro determina diversas propiedades del cuerpo, cuyo estudio experimental permite hacer deducciones sobre sus peculiaridades. Por lo tanto, el espectro energético puede examinarse tanto desde el punto de vista teórico, como experimental.

El espectro energético de los electrones en los sólidos se ha investigado con suficientes detalles y sus singularidades principales se reducen a lo siguiente. En un átomo aislado los niveles energéticos forman un conjunto discreto de energías.

La fig. 3 muestra el esquema ideal de niveles de un átomo hidrogenoide. En forma analítica la energía del electrón en el n -ésimo nivel se da mediante la fórmula

$$W_n = -A/n^2,$$

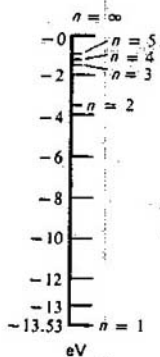


Fig. 3. Espectro energético del átomo de hidrógeno

donde A es una magnitud positiva que se expresa por medio de una carga elemental, la masa del núcleo y del electrón, asimismo por la constante de Planck. En el nivel $n = 1$ los electrones poseen energía mínima. La distancia entre los niveles es de varios electrón-voltios, con la particularidad de que estas distancias disminuyen al aumentar n .

Dado que los electrones se someten a la estadística de Fermi—Dirac, en cada estado cuántico puede encontrarse sólo un electrón. El estado cuántico no se caracteriza únicamente por la energía. En el átomo hidrogenoide se determina también por el momento de impulso (o impulso cinético) del electrón durante el movimiento orbital en el átomo, su orientación en el espacio y por la orientación del spin del electrón. Estas últimas características son también cuantificadas, o sea, poseen un conjunto discreto de valores numéricos. En total resulta que en cada nivel energético hay varios electrones y no uno. Como muestran los cálculos, en el nivel $n = 1$ pueden hallarse sólo dos electrones que se diferencian por la orientación del spin (existen sólo dos orientaciones del spin). El momento de impulso en este nivel puede ser únicamente nulo. En el siguiente nivel $n = 2$ el momento de impulso del electrón, además del valor nulo, puede tener otro valor más, diferente de cero. Siendo el momento de impulso nulo, no tiene sentido hablar sobre su orientación en el espacio, a diferencia de cuando el valor de dicho momento no es nulo. Para $n = 2$ tenemos tres orientaciones posibles. Así pues, en el nivel $n = 2$ hay en total cuatro estados cuánticos según el valor absoluto del momento cinético y sus orientaciones en el espacio. En cada uno de los estados el spin del electrón puede estar orientado de dos maneras, por lo tanto en el nivel energético $n = 2$ existen en total ocho diferentes estados cuánticos. Ello significa que en este nivel puede haber nada más que ocho electrones. Resulta que en los niveles posteriores pueden hallarse 18, 32, 50, etc. electrones. Puesto que el estado estable del átomo (estado fundamental) corresponde al estado con energía mínima, los niveles energéticos deben llenarse, comenzando desde el nivel $n = 1$. El siguiente nivel comienza a rellenarse sólo después que el nivel anterior esté totalmente ocupado por los electrones. El conjunto de electrones con cierto valor de n se denomina capa atómica. Las capas se acostumbra a designarlas con las letras K, L, M, N , etc. según el siguiente esquema:

	1	2	3	4	5
Denominación de la capa	K	L	M	N	O

Por ejemplo, en vez de decir «el electrón en el nivel $n = 2$ », se dice «el electrón de la capa L », etc.

La situación cambia si los átomos forman la red cristalina del sólido. La propia existencia de la red cristalina testimonia el hecho de que entre los átomos hay una interacción que determina precisamente la aparición de la red. Por consiguiente, los átomos ya no se pueden considerar aislados. Toda la red cristalina debe estudiarse como un sistema único y hay que hablar sobre los niveles energéticos de este sistema. Resulta que el espectro energético de la red cristalina está ligado con el espectro energético de los átomos aislados por medio de una relación sencilla, a saber: como consecuencia de la interacción entre los átomos, cada uno de los niveles energéticos $n = 1, 2, \dots$ se desintegran en una gran cantidad

de subniveles, situados muy cerca uno de otro, en los cuales pueden ubicarse todos los electrones que se encontraban inicialmente en el nivel correspondiente de los átomos aislados. Por ejemplo, la capa K de un átomo aislado está ocupada por dos electrones. Si los átomos se hallan en una red cristalina que consta de N_0 átomos, el nivel $n = 1$ se desintegra en N_0 subniveles, en cada uno de los cuales pueden hallarse dos electrones con diversa orientación de los spines, es decir, en total en la red cristalina se forman $2N_0$ diferentes estados cuánticos ocupados por $2N_0$ electrones, pertenecientes anteriormente a las capas K .

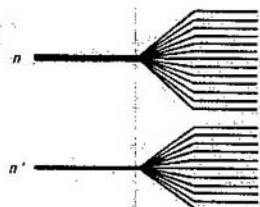


Fig. 4
Esquema de formación de las bandas de energía

El conjunto de niveles energéticos, situados a poca distancia y formados como consecuencia de la desintegración de cierto nivel energético de un átomo aislado, se denomina banda de energía o simplemente banda. Se habla sobre la banda K , banda L , etc. según su correspondencia a las capas K , L , . . . de los átomos aislados. El diagrama de formación de las bandas se muestra en la fig. 4. Como ya se había dicho, la distancia entre los diversos niveles dentro de las bandas es extremadamente pequeña, mientras que entre diferentes bandas ella permanece considerable e igual, según el orden de la magnitud, a la distancia entre los niveles energéticos de los átomos aislados. Los intervalos entre las bandas energéticas que no pueden ocuparse por los electrones, se denominan zonas prohibidas, ya que los electrones no pueden hallarse en ellas.

Así pues, el espectro energético de los electrones en el sólido consta de zonas prohibidas y permitidas. La distancia entre los niveles energéticos dentro de cada una de las zonas permitidas es excesivamente pequeña en comparación con la anchura de las zonas prohibidas. El esquema examinado de los niveles energéticos de un átomo aislado es idealizado. Si se tiene en cuenta con mayor plenitud la interacción de los electrones, resulta que la energía de los electrones en la capa no es la misma, sino que depende, por ejemplo, del momento de impulso (momento cinético). La energía del electrón con un valor de n más elevado puede ser no superior, sino inferior a la energía del electrón del nivel anterior. Como consecuencia, varía la sucesión del relleno de las capas por los electrones. Respectivamente cambia también la estructura de las bandas energéticas del cristal y su relleno por los electrones. En cambio, el carácter general del espectro del sólido no varía.

Energía de Fermi. El estado principal del sólido es el estado con energía mínima. Por esta razón, a la temperatura de 0 K, comenzando por nivel con energía mínima, todos los estados de los electrones deben rellenarse sucesivamente sin intervalos. En vista de que el número de electrones es finito, existe un nivel relleno finito con energía máxima, mientras que los siguientes niveles resultan estar libres. Así pues, a 0 K existe una frontera brusca entre los niveles libres y rellenos.

A temperatura, diferente de 0 K, esta frontera es borrosa ya que, como consecuencia del movimiento térmico, la energía de ciertos electrones resulta mayor

que la energía límite a $T = 0$ K, y la de otros electrones, inferior. De esta manera, algunos niveles de energía que a $T = 0$ K eran libres, ahora están rellenos y al contrario, los que estaban rellenos, resultan libres. *La anchura de la región de transición entre los niveles de energía que están totalmente rellenos y los que están completamente libres, tiene el orden kT .* La distribución energética de los electrones en este caso se caracteriza por la función de Fermi—Dirac:

$$f(E, T) = \{1 + \exp[(E - \mu)/(kT)]\}^{-1}, \quad (2.2)$$

donde E es la energía del electrón y μ , la energía de Fermi, que depende de la temperatura. La energía de Fermi se determina como la energía para la cual la función de Fermi—Dirac es igual a $\frac{1}{2}$.

Los conceptos de energía de Fermi son muy evidentes para los metales. *En este caso la energía de Fermi es la energía de los electrones en el nivel relleno a $T = 0$ K y más arriba del cual los niveles están libres.* Esta definición es exacta para $T = 0$ K y es suficientemente precisa para todas las temperaturas cuando la distribución de Fermi es poco «borrosa» (para la mayoría de los metales esta afirmación es válida plenamente hasta las temperaturas de fusión y superiores).

Para los dieléctricos la energía de Fermi corresponde a la mitad (está en el medio) de la zona prohibida (para $T = 0$ K) que se encuentra más arriba de la banda totalmente rellena, en este nivel el electrón no puede encontrarse, es decir, la energía de Fermi no corresponde a la energía de cierto electrón real en el dieléctrico. Pero ello, claro está, no disminuye su importancia para la descripción de las propiedades estadísticas de los electrones en los dieléctricos conforme a la fórmula (2.2).

Como muestra la teoría, el trabajo de salida termoiónico Φ que participa en (2.1), está ligado con la energía μ del nivel de Fermi mediante la relación

$$\Phi = E_0 - \mu, \quad (2.3)$$

donde E_0 es la energía del electrón en reposo fuera del conductor en el vacío. Así pues, Φ es igual al trabajo de desplazamiento del electrón desde el nivel de Fermi hasta fuera de los límites del sólido. Para los metales esta afirmación tiene un sentido real, mientras que para los dieléctricos es en cierto grado convencional, ya que en el nivel de Fermi no hay electrones reales. *En cambio en ambos casos es el trabajo de extracción del electrón del sólido, efectuado contra las fuerzas que retienen el electrón en el sólido.* La existencia del trabajo de salida se manifiesta, por ejemplo, en el efecto fotoeléctrico, cuando la energía del fotón que se absorbe en el metal, se transmite totalmente al electrón. El trabajo de salida puede determinarse según el límite fotoeléctrico de ondas largas. Por eso puede decirse que *los electrones dentro de un sólido se encuentran en un pozo de potencial de profundidad Φ .* La fig. 5 muestra el aspecto de los pozos de potencial para los metales (a) y dieléctricos (b) (los niveles de energía, ocupados por los electrones, están rayados). El intervalo entre los niveles E_c (energía de conductancia) y E_v (energía de valencia) es zona prohibida. Es necesario señalar que *el trabajo de salida para los dieléctricos depende fuertemente de la pureza de la composición.* Incluso pequeñas cantidades de impurezas pueden cambiar esencialmente el trabajo de

salida. Además, el trabajo de salida depende también de las más insignificantes contaminaciones de la superficie. Para los metales él posee un orden de varios electrón-voltios. Por ejemplo, el tungsteno tiene 4,53 eV, el molibdénio, 4,43 eV, el cobre 4,39 eV, etc.

Diferencia de potencial de contacto. Las fuerzas que retienen los electrones en el sólido son de origen eléctrico. Se determinan por la diferencia de potencial entre los puntos fuera del cuerpo y los puntos interiores o, con otras palabras, sobre un gas electrónico cerca de la superficie actúan fuerzas eléctricas que tienden

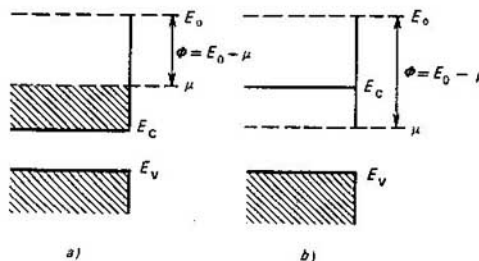


Fig. 5
Pozo de potencial para el electrón en el metal (a) y dieléctrico (b). El trabajo de salida termoiónico Φ es la diferencia entre la energía E_0 del electrón en reposo en el vacío y la energía del nivel μ de Fermi

a arrastrar a los electrones al interior del cuerpo. Estas fuerzas son tanto más considerables, cuanto mayor es el trabajo de salida Φ . Ellas actúan en una capa muy fina de dimensiones moleculares ($d \approx 10^{-10}$ m). Por esta razón la intensidad efectiva del campo eléctrico que condiciona la aparición de estas fuerzas, es bastante grande:

$$E_{ef} \sim \Phi / (|e| d) \sim 10^{10} \text{ V/m}, \quad (2.4)$$

donde se toma en consideración que el trabajo de salida es igual, según el orden de la magnitud, a varios electrón-voltios.

Acerquemos las superficies de los dos cuerpos a tal grado, que en el intervalo entre ellas las capas del gas electrónico que se encuentra en la superficie de los cuerpos, se recubran. Merced a ello los cuerpos comienzan a intercambiarse de electrones. Dado que las fuerzas que arrastran el electrón al interior del cuerpo, son mayores en el cuerpo con mayor trabajo de salida, después de acercarse las superficies empieza la transición de los electrones del cuerpo con menor trabajo de salida al cuerpo con mayor trabajo de salida, como resultado de lo cual, el primer cuerpo adquirirá carga positiva, y el segundo, carga negativa. El campo eléctrico, que surge entre las superficies de los cuerpos, obstaculiza el movimiento de los electrones, debido al cual él surgió. La intensidad de este campo alcanza un valor determinado. La transición posterior de los electrones

de un cuerpo a otro cesa, estableciéndose un estado de equilibrio. Las superficies resultan tener cargas de signo opuesto, pero de igual valor absoluto. Entre las superficies, lo mismo que entre las armaduras de un condensador, se establece cierta diferencia de potencial, llamada de contacto.

La diferencia de potencial de contacto puede hallarse, basándose en las siguientes consideraciones. Puesto que entre los cuerpos se establece un equilibrio electrónico, las energías de Fermi que poseen los cuerpos, deben ser iguales, como consecuencia de lo cual los puntos superiores de los pozos de poten-

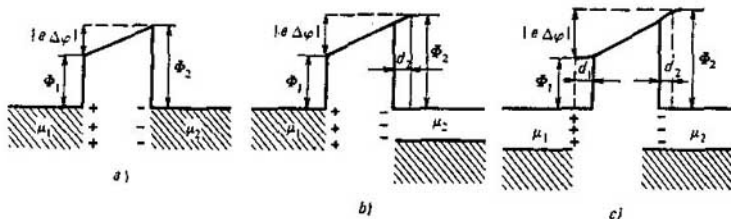


Fig. 6
Formación de la diferencia de potencial de contacto en el espacio entre las superficies metal — metal (a), metal — dieléctrico (b) y dieléctrico — dieléctrico (c)

cial se desplazan mutuamente. Por lo tanto, entre ellos, o sea, entre las superficies de los cuerpos, surgen diferencia de potencial e intensidad del campo eléctrico.

La fig. 6 muestra los diagramas de formación de la diferencia de potencial de contacto entre dos metales (fig. 6, a), entre un metal y un dieléctrico (fig. 6, b) y entre dos dieléctricos (fig. 6, c). La diferencia en la formación de la diferencia de potencial de contacto entre los metales y entre un metal y un dieléctrico consiste en que el campo eléctrico no penetra al interior del metal, mientras que en el dieléctrico se introduce a una pequeña profundidad (en la fig. 6, b, c la profundidad de penetración se designa por d_1 y d_2). Por esta razón, la caída de potencial en los dieléctricos sucede no sólo entre las superficies, sino que también parcialmente en una capa fina dentro del dieléctrico, próxima a su superficie. Sin embargo, el grosor de esta capa es, por lo general, pequeña en comparación con la distancia entre las superficies y con gran precisión puede menospreciarse dicha circunstancia.

Como se ve (véase la fig. 6), la diferencia entre las energías de los puntos superiores de los pozos de potencial es igual a $\Phi_2 - \Phi_1$, por eso la diferencia de potencial de contacto entre las superficies de los cuerpos que se hallan en equilibrio electrónico, se prefija por la fórmula

$$|\Delta\varphi| = |\Phi_2 - \Phi_1| / |e|. \quad (2.5)$$

Observemos que el potencial disminuye en dirección de los cuerpos con carga positiva hacia los que poseen carga negativa. Por ello la variación del potencial

es opuesta al cambio de la energía potencial del electrón, es decir, el potencial disminuye del primer cuerpo al segundo.

Electrificación: Si las superficies planas de los cuerpos, entre las cuales hay una diferencia de potencial de contacto, se alejan mutuamente, conservando el paralelismo estricto entre sí, las cargas que se encuentran en estas superficies permanecen en los cuerpos y éstos resultan tener cargas de signos contrarios. Pero es prácticamente imposible separar las superficies de modo estrictamente paralelo, ya que sus distintas partes se alejan con diferente velocidad. *El resultado de la separación de las superficies es distinto en principio para los conductores y los dieléctricos.*

Al alejar las superficies planas de los conductores, las cargas que se encuentran en ellas, pueden desplazarse a lo largo de la superficie. Si unas partes de la superficie se separan antes que las otras, en ellas, lo mismo que en un condensador, para la misma diferencia de potencial, la densidad de carga disminuye. Como consecuencia, entre los cuerpos se efectúa el intercambio de cargas para restablecer el equilibrio electrónico, con la particularidad de que éste transcurre mediante el intercambio de electrones a través de la nube electrónica en la parte dada de la superficie y a causa del movimiento de las cargas a lo largo de la superficie en las otras partes. Aquellas partes de la superficie de los conductores que están separadas lo suficiente lejos y han perdido el contacto electrónico a través de la nube electrónica cerca de la superficie, resultan exentas de carga. La carga se conserva sólo en aquellas partes de la superficie que aún se encuentran en contacto electrónico. Por fin, llega un momento cuando el contacto electrónico se conserva en un área insignificante que posee una carga muy pequeña. Por ello, *al alejar definitivamente los conductores, en éstos no queda carga alguna.*

El resultado de la separación de los dieléctricos es distinto. Sus cargas no pueden desplazarse a lo largo de la superficie y el propio potencial puede ser distinto a lo largo de la superficie. Al alejar las partes de la superficie, la diferencia de potencial entre ellas no permanece constante, sino que aumenta de la misma manera como crece la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador, cuando la carga de la armadura es constante y aumenta sólo la distancia entre las armaduras. La densidad de las cargas en las superficies no varía esencialmente. Después de perder el contacto electrónico a través de la nube electrónica cerca de la superficie, en las partes de la superficie las cargas eléctricas se conservan. *Como consecuencia de la separación total de las superficies de los dieléctricos, ellas resultan ser portadoras de cargas de signos contrarios, pero de igual valor absoluto.* Este proceso se denomina **electrificación.**

Para lograr un acercamiento más estrecho de las superficies de los dieléctricos y formar la diferencia de potencial de contacto, por lo general los cuerpos se frotan uno contra otro y se habla de la electrificación por frotamiento. Pero el frotamiento en este caso no tiene nada que ver con la electrificación. Sería más correcto hablar sobre la electrificación mediante el contacto de los cuerpos. Es que la terminología fue establecida mucho antes de aclararse la naturaleza física del fenómeno.

El trabajo de salida de los dieléctricos depende de la pureza de la composición y del estado de la superficie.

Al tener los cuerpos contacto, transcurre el paso de los electrones del cuerpo con menor trabajo de salida al que posee mayor trabajo de salida.

Dentro de cada una de las bandas permitidas la distancia entre los niveles energéticos es extremadamente pequeña en comparación con la anchura de las bandas prohibidas. En los dieléctricos la energía de Fermi no corresponde a la energía de cualquier electrón real en el dieléctrico.

El trabajo de salida termoiónico es igual al trabajo que se gasta el desplazar el electrón desde el nivel de Fermi hasta salir fuera del sólido.

¿Cuál es la relación entre los niveles energéticos de un átomo aislado y las bandas de energía del sólido? ¿Merced a qué factores se forman las bandas de energía?

¿Cuál es la interpretación evidente de la energía de Fermi en los metales?

¿Por qué dicha interpretación no vale para los dieléctricos?

¿De qué manera pueden determinarse los signos de las cargas de los cuerpos en contacto?

¿Por qué no se puede electrizar los metales, poniéndolos en contacto?

§ 3. Carga elemental y su invariación

Se describen los experimentos que demuestran la existencia de carga eléctrica elemental y la ausencia de cargas, fraccionarias respecto a la elemental. Se discuten los testimonios experimentales sobre la identidad de los valores absolutos de las cargas elementales positivas y negativas y sobre la invariación de la carga.

Experimentos de Millikan. La idea sobre el carácter discreto de la carga eléctrica fue enunciada en forma explícita por B. Franklin ya en 1752, pero era más especulativa. En principio, el carácter discreto de las cargas, como resultado experimental, se desprende de las leyes de la electrólisis, descubiertas por M. Faraday (1791—1867) en el año 1834. Sin embargo, semejante deducción de las leyes de la electrólisis fue hecha sólo en 1881 por H. L. Helmholtz (1821—1894) y G. Stoney (1826—1911). Poco tiempo después de eso, en 1895, H. Lorentz (1853—1928) creó la teoría del electromagnetismo, basada en la representación de las cargas elementales que existen realmente (electrones). El valor numérico de la carga elemental fue calculado teóricamente, fundamentándose en las leyes de la electrólisis, ya que el significado de la constante de Avogadro se conocía. La medición experimental directa de la carga elemental fue realizada por R. A. Millikan (1868—1953) en 1909.

El esquema de los experimentos de Millikan se da en la fig. 7. Las pequeñas partículas esféricas se mueven en un líquido viscoso en presencia de un campo eléctrico homogéneo E . Sobre la partícula actúan la fuerza sustentadora, dirigida contra la fuerza de gravedad (la densidad de la partícula es mayor que la del líquido), y la fuerza de rozamiento viscoso f_{roz} con dirección contraria a la velocidad.

La fuerza de rozamiento viscoso es, conforme a la fórmula de Stokes, proporcional a la velocidad. Siendo la velocidad de la partícula constante, la suma de las fuerzas que actúan sobre ella es nula.

Todas las fuerzas, a excepción de la que actúa sobre la partícula por parte del campo eléctrico, pueden medirse experimentalmente al moverse la partícula en un medio sin campo eléctrico. Al estudiar luego el movimiento de la partícula en el campo eléctrico, hallamos la fuerza qE . Esto permite calcular la carga q de la partícula, ya que la intensidad E del campo es conocida.

Puede también variarse la intensidad del campo eléctrico E , logrando que la partícula se halle en reposo. En este caso la fuerza de rozamiento también está ausente y las demás fuerzas son conocidas. Por esta razón, conociendo E , puede determinarse q .

Con el tiempo la carga de la partícula varía, lo que se refleja en el movimiento de la partícula. Después de determinar las cargas q_1 y q_2 de la partícula durante diversos lapsos, puede hallarse el cambio de la carga

$$\Delta q = q_2 - q_1. \quad (3.1)$$

Ejecutando una gran cantidad de mediciones de las cargas, Millikan encontró que Δq es siempre un valor entero, múltiplo a una misma magnitud $|e|$:

$$\Delta q = n |e|, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.2)$$

$$|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \quad (3.2a)$$

Método de medida de la carga por resonancia. En lo sucesivo los métodos de medida directa de la carga elemental fueron perfeccionados. En la actualidad la precisión de las mediciones es tal, que permite detectar las décimas de la carga elemental. El más eficaz de ellos es el método de resonancia, cuyo esquema se da en la fig. 8. Una bola que posee una masa suficientemente pequeña m , está sujeta a una barra elástica muy fina. Bajo la influencia de las fuerzas de elasticidad, que surgen al curvarse la barra, la bola oscila cerca de la posición de equilibrio con una frecuencia propia (natural) ω_0 que puede medirse experimentalmente. Si en la bola existe cierta carga q , bajo el efecto de un campo eléctrico alternativo de frecuencia ω , la bola realiza oscilaciones forzadas, cuyas amplitudes dependen de la relación entre las frecuencias ω y ω_0 . La amplitud máxima de las oscilaciones se alcanza estando en resonancia ($\omega \approx \omega_0$). La amplitud de las oscilaciones de la bola estando en resonancia, es igual a

$$A_{res} = qE_0Q/(m\omega_0^2), \quad (3.3)$$

donde Q es el factor de calidad del sistema, E_0 , la amplitud de la intensidad del campo eléctrico. Estimemos las posibilidades del método. Supongamos que

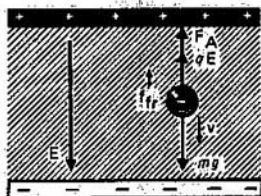


Fig. 7
Esquema de los ensayos de Millikan

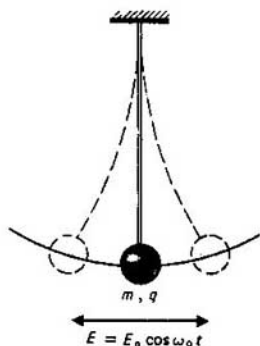


Fig. 8
Esquema del método de medida por resonancia de la carga elemental

$m = 1 \text{ mg} = 10^{-6} \text{ kg}$; $E_0 \approx 10^5 \text{ V/m}$;
 $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $\omega_0 = 10^{-1} \text{ s}^{-1}$; $Q \approx 100$,
entonces

$$A_{\text{res}} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5 \cdot 10^2}{10^{-6} \cdot 10^{-2}} \text{ m} \approx 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 160 \text{ } \mu\text{m}. \quad (3.4)$$

La magnitud $160 \text{ } \mu\text{m}$ es muy grande y es fácil medir una parte pequeña de ella. Por lo tanto, aplicando este procedimiento, pueden medirse cargas mucho más pequeñas que $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Este método se ha perfeccionado hasta tal punto que hoy día permite, en principio, detectar y medir una carga igual a décimas partes de la elemental, de existir ésta.

Al variar la carga de la bola en Δq , la amplitud de las oscilaciones de resonancia cambia a salto:

$$\Delta A_{\text{res}} = \Delta q E_0 Q / (m \omega_0^2). \quad (3.5)$$

Las mediciones permitieron establecer con gran precisión que la carga de la bola varía siempre en un número entero de cargas elementales y que no existe carga inferior a la elemental.

Ausencia de carga fraccionaria. Se llevaron a cabo búsquedas intensas de las cargas fraccionarias. Ello fue iniciado por la predicción de la existencia de los quarks. Se supone que los quarks son partículas de las que constan la mayoría de las partículas elementales pesadas (los protones, etc.). Se pronosticó que la carga eléctrica de los quarks debe ser $1/3$ y $2/3$ de la carga elemental (con los signos correspondientes). La búsqueda de los quarks se efectuó por muchos científicos, aplicando diferentes métodos, incluyendo el de resonancia. Todos ellos dieron un resultado negativo. Así, pues, *en la actualidad se ha establecido por vía experimental y con gran precisión que en estado libre no existen cargas fraccionarias.*

Hemos hecho resaltar las palabras «en estado libre», ya que las pruebas estaban dirigidas precisamente a buscar quarks libres. *En cambio, de aquí no se desprende el hecho de que en estado combinado dentro de las partículas elementales los quarks estén ausentes.* Sin embargo, aún no se conoce una verificación experimental directa de esta afirmación.

Igualdad de las cargas elementales negativas y positivas. En los experimentos, descritos más arriba, se medía tanto la carga elemental negativa, como la positiva. Los resultados de estos experimentos han demostrado su igualdad con la misma precisión con que se mide el valor de las cargas. Esta exactitud no es muy elevada. Por ejemplo, puede decirse que las cargas elementales negativa y positiva por su valor absoluto se diferencian no más de una décima de su valor, es decir,

$$\frac{||e_+| - |e_-||}{|e_+|} \leq \frac{1}{10}. \quad (3.6)$$

Esta precisión es totalmente insatisfactoria, puesto que la teoría supone una igualdad completa de los valores absolutos de las cargas elementales positivas y negativas.

Una estimación mucho más precisa puede obtenerse sin medir directamente el valor de la carga elemental. Como se sabe, los átomos poseen una misma cantidad de protones y electrones. Los cuerpos también contienen la misma cantidad de protones y electrones. Por eso la estimación de la igualdad de las cargas del protón y electrón puede llevarse a cabo por los resultados de la medición de la neutralidad de los cuerpos. Pero esto puede hacerse con una precisión extremada, dado que incluso una pequeña perturbación de ella conduce a la aparición de enormes fuerzas de interacción eléctrica entre los cuerpos, que es fácil de observar. Supongamos, por ejemplo, que dos bolas de hierro con una masa de 1 g, que se hallan a la distancia de 1 m no son neutras a causa de que las cargas del protón se diferencian de la carga del electrón en una millonésima de la carga. Estimemos cuál será la fuerza de repulsión que surge entre las bolas. Cada gramo de $^{56}_{26}\text{Fe}$ contiene $6 \cdot 10^{23} \cdot 26/56$ de cargas de cada signo. Por lo tanto, al infringir la neutralidad sólo en 10^{-6} , aparece una carga

$$q = [1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 26/56] \text{ C} = 4,46 \cdot 10^{-2} \text{ C} \quad (3.7)$$

en cada bola.

La fuerza de repulsión entre las bolas es igual a

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = (4,46 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ N} = 1,8 \cdot 10^7 \text{ N} = 18 \text{ MN}. \quad (3.8)$$

Ello significa que entre las bolas surge una fuerza de repulsión que equivale a la fuerza que ejerce sobre los rieles un tren cuya masa es casi de 2 mil toneladas. Y eso ocurre diferenciándose las cargas del protón y electrón nada más que en 10^{-6} de la carga en 2 gramos de hierro. Es obvio que es fácil medir las fuerzas entre las bolas de hierro en una cantidad enorme de veces inferiores a (3.8). Si en el experimento no aparecen semejantes fuerzas eso significa el aumento correspondiente de la precisión con la que la carga del electrón es igual, por el valor absoluto, a la carga del protón. *En la actualidad se ha establecido experimentalmente que la carga elemental negativa del electrón es igual, por su valor absoluto, a la carga positiva del protón con una precisión relativa de 10^{-21} , o sea,*

$$\frac{||e_+| - |e_-||}{|e_{\pm}|} \leq 10^{-21}. \quad (3.9)$$

La demostración expuesta respecto a la igualdad de los valores absolutos de las cargas elementales negativa y positiva puede parecer insuficientemente estricto. Podemos imaginarnos un cuerpo que consta de átomos o moléculas en los que las cargas elementales no tienen igual valor absoluto, a pesar de que la

cantidad de ellas en cada átomo o molécula es la misma. En este caso los átomos o moléculas deben poseer cierta carga, permaneciendo, en cambio, el cuerpo en total neutro, si a la par con estos átomos y moléculas éste posee, en cantidad necesaria, electrones libres o iones positivos (en dependencia del signo del carga de los átomos o las moléculas). Sin embargo, haciendo esa suposición, chocamos con complicaciones a las que es difícil someterse. Por ejemplo, habrá que renunciar a la idea de una estructura homogénea de los cuerpos y considerar que su estructura depende de sus dimensiones, etc. A pesar de todo, es deseable tener una demostración más directa de que los valores absolutos de las cargas elementales negativa y positiva en los átomos son iguales. Tal demostración fue obtenida.

La neutralidad de los átomos aislados se verificó mediante experimentos: se investigó la desviación del haz de átomos neutros en los campos electrostáticos. Por la desviación puede juzgarse sobre la carga del átomo y deducir la igualdad de las cargas de los electrones y protones en el átomo. Las pruebas con los haces de cesio ($Z = 55$) y potasio ($Z = 19$) mostraron que los valores absolutos de las cargas del electrón y protón son iguales con una precisión relativa de $3,5 \cdot 10^{-10}$.

Invariación de la carga. El hecho de que el átomo sea neutro demuestra también la independencia entre el valor numérico de la carga elemental y la velocidad. Merced a la diferencia de las masas de los electrones y protones se puede sacar la conclusión de que los electrones en los átomos se mueven con mayor velocidad que los protones. *Si la carga dependiese de la velocidad*, no podría observarse la neutralidad de los átomos. Por ejemplo, los electrones en el átomo de helio se mueven aproximadamente con una velocidad dos veces mayor que en la molécula de hidrógeno, mientras que la neutralidad del átomo de helio y de la molécula de hidrógeno se ha demostrado con gran precisión. Podemos sacar la conclusión de que con la misma exactitud la carga no depende de la velocidad hasta las velocidades de los electrones en el átomo de helio. La velocidad de los electrones en el átomo de helio es aproximadamente igual a $0,02 c$. En los átomos más pesados, cuya neutralidad está demostrada, los electrones se mueven en las capas internas con velocidades, iguales, más o menos, a la mitad de la velocidad de la luz. De esta manera, se ha demostrado experimentalmente que la carga elemental es invariante hasta $0,5 c$. No existen razones para suponer que no sea invariante a velocidades más altas. Por eso *la invariación de la carga eléctrica se toma como una de las argumentaciones experimentales de la teoría de la electricidad.*

La búsqueda de los quarks permitió con gran precisión demostrar que en la naturaleza no hay cargas fraccionarias. La ausencia de quarks en estado libre no confirma su inexistencia en estado combinado dentro de las partículas elementales.

¿En qué consiste el principio del método de resonancia de medición de la carga elemental? ¿Cuál es la precisión para hoy día de este método? Cítense estimaciones numéricas.

§ 4. Corriente eléctrica

Se discuten los conceptos principales y las magnitudes que caracterizan la distribución y el movimiento de las cargas eléctricas.

Movimiento de las cargas. El movimiento de los electrones y protones determina el movimiento de sus cargas. Por eso puede hablarse simplemente del movimiento de las cargas, sin mencionar cada vez su portador. Ello no sólo es cómodo, sino que da comunidad a los razonamientos, ya que muchos fenómenos dependen sólo de las cargas, su movimiento, etc., sin depender de las propiedades de los portadores de estas cargas, por ejemplo, de la masa de los portadores de las cargas. Si tiene importancia no solamente la carga sino que también las propiedades del portador de la carga, por ejemplo la masa de este portador, es necesario tomar en consideración no sólo la carga, sino que también otras características del portador.

En la teoría de la electricidad la carga elemental se considera puntual, incluyendo la carga del protón. La posición de la carga, su velocidad y aceleración tienen el mismo sentido que en el caso de los puntos materiales.

Distribución continua de las cargas. La carga elemental es muy pequeña. Por esta razón, en la mayoría de los fenómenos macroscópicos que se estudian en la electricidad, participa una cantidad enorme de cargas eléctricas y su carácter discreto no se manifiesta. Por ejemplo, cada una de las armaduras de un condensador plano con una capacidad de $10 \mu\text{F}$ contiene unas $7 \cdot 10^{16}$ cargas elementales para una diferencia de potencial de 100 V. Siendo la corriente de 1 A, a través de la sección transversal del conductor pasan aproximadamente $6 \cdot 10^{18}$ cargas elementales por segundo. Por ello, en la mayoría de los casos puede considerarse que la carga como si estuviese distribuida continuamente en el espacio, por lo que se menosprecia su carácter discreto.

Densidad volumétrica de las cargas. Se llama densidad volumétrica de distribución continua de las cargas a la relación entre la carga y el volumen:

$$\rho = \frac{1}{\Delta V_f} \sum_{\Delta V_f} e_i = \frac{\Delta Q}{\Delta V_f} \quad (4.1)$$

donde e_i son las cargas elementales en el volumen ΔV_f (teniendo en cuenta su signo); ΔQ es la carga total incluida en ΔV_f . El volumen ΔV_f es pequeño, pero no infinitamente pequeño en el sentido matemático. Aquí suponemos que ΔV_f es infinitamente pequeño en el sentido físico, o sea, considerándolo muy pequeño y, por lo tanto, pudiendo caracterizar su posición en el espacio con la suficiente exactitud mediante cualquier punto de coordenadas, situado dentro del mencionado volumen, es decir, en el primer miembro de (4.1) ρ puede tomarse en calidad de argumento de la coordenada (x, y, z) para cualquier punto dentro de ΔV_f y escribir $\rho(x, y, z)$. Pero en el volumen ΔV_f debe haber una

cantidad grande de cargas elementales para que una pequeña variación de éste no conduzca a un cambio esencial de la densidad ρ , calculada por la fórmula (4.1). Por consiguiente, ΔV , depende de condiciones concretas. *En algunos casos el volumen pequeño ΔV puede satisfacer las condiciones necesarias y considerarse como volumen físico infinitamente pequeño, mientras que en otros casos no se le puede considerar como tal. Por fin, pueden existir condiciones cuando en general no haya ningún volumen ΔV que pueda denominarse volumen físico infinitamente pequeño. Entonces es imposible utilizar la representación sobre la distribución continua de la carga y determinar ρ por la fórmula (4.1) a título de densidad volumétrica.* Sin embargo, en la mayoría de los casos, examinados en la teoría clásica de la electricidad, se considera válida la distribución continua de la carga.

Al determinar la densidad volumétrica ρ por la fórmula (4.1), ella puede ser considerada como una función matemática simple, y la carga, difuminada continuamente por el volumen. Entonces de (4.1) se desprende que la carga total, consistente en el volumen V , es igual a

$$Q = \int_V \rho dV, \quad (4.2)$$

donde dV es la diferencial del volumen.

Concentración de cargas. La relación entre la cantidad de cargas y el volumen que ocupan:

$$n_{\pm} = \frac{\Delta n_{\pm}}{\Delta V_f}, \quad (4.3)$$

donde Δn_{\pm} es el número de cargas de signo correspondiente en el volumen ΔV_f , se denomina *concentración de cargas* de signo determinado. Entonces [véase (4.1)]

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\Delta V_f} \sum_{\Delta V_f} e_i^{(+)} + \frac{1}{\Delta V_f} \sum_{\Delta V_f} e_i^{(-)} = \frac{e^{(+)} \Delta n_{(+)}}{\Delta V_f} + \frac{e^{(-)} \Delta n_{(-)}}{\Delta V_f} = \\ &= e^{(+)} n_{(+)} + e^{(-)} n_{(-)} = \rho^{(+)} + \rho^{(-)}, \quad (4.4) \end{aligned}$$

donde $e^{(\pm)}$ es una carga puntual elemental con signo correspondiente, $\rho^{(\pm)} = e^{(\pm)} n_{(\pm)}$, la densidad volumétrica de las cargas. El volumen físico infinitamente pequeño debe contener muchas cargas para que la definición de concentración tenga sentido.

Densidad superficial de las cargas. A veces la carga está distribuida en una capa muy fina en las inmediaciones de cierta superficie. *Si nos interesa la acción de la carga a distancias, mucho mayores que el grosor de la capa, y no los procesos que transcurren en esta capa, entonces puede suponerse que toda la carga está concentrada en la superficie o, con otras palabras, esta capa muy fina puede considerarse superficie.* La densidad superficial de la carga se determina valiéndose de la fórmula

$$\sigma = \frac{1}{\Delta S_f} \sum_{\Delta S_f} e_i = \frac{\Delta Q}{\Delta S_f}, \quad (4.5)$$

donde ΔS , es un área infinitamente pequeña en el sentido físico, ΔQ , la carga que corresponde al área ΔS , de la superficie en una capa fina cerca de ella.

En σ como argumento pueden ponerse las coordenadas de los puntos superficiales y considerarla a título de función de estas coordenadas. La argumentación y el sentido de ello son los mismos que para la densidad volumétrica ρ en (4.1). Por esta razón, la carga total en la superficie S es igual a

$$Q = \int_S \sigma \, dS, \quad (4.6)$$

donde dS es la diferencial del área de la superficie.

Densidad de corriente. Las cargas en el volumen ΔV_f se mueven con distintas velocidades que se diferencian no sólo por el módulo, sino también por la dirección. El movimiento de la carga conduce al traslado de la carga en dirección de la velocidad. Por eso, como resultado de diferentes movimientos de las cargas, que se hallan en el volumen ΔV_f , se forma cierto traslado medio de la carga, incluida en este volumen. La intensidad de dicho traslado se caracteriza por la densidad de corriente, definida por la fórmula

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\Delta V_f} \sum_{\Delta V_f} e_i \mathbf{v}_i, \quad (4.7)$$

donde \mathbf{v}_i es la velocidad de la carga e_i .

Al partir la suma en (4.7) en sumas por cargas negativas y positivas, obtenemos

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\Delta V_f} \sum_i e_i^{(+)} \mathbf{v}_i^{(+)} + \frac{1}{\Delta V_f} \sum_i e_i^{(-)} \mathbf{v}_i^{(-)} = \frac{e^{(+)}}{\Delta V_f} \sum_i \mathbf{v}_i^{(+)} + \frac{e^{(-)}}{\Delta V_f} \sum_i \mathbf{v}_i^{(-)} \quad (4.8)$$

La fórmula (4.8) será aún más evidente si las magnitudes que la componen se expresan mediante las velocidades y concentraciones medias de las cargas:

$$\sum_i \mathbf{v}_i^{(+)} = \Delta n^{(+)} \frac{1}{\Delta n^{(+)}} \sum_i \mathbf{v}_i^{(+)} = \Delta n^{(+)} \langle \mathbf{v}^{(+)} \rangle \langle \mathbf{v}^{(+)} \rangle = \frac{1}{\Delta n^{(+)}} \sum_i \mathbf{v}_i^{(+)},$$

donde

$$\mathbf{v}_i^{(+)} \sum_i \frac{1}{\Delta n^{(+)}} = \langle \mathbf{v}^{(+)} \rangle$$

ya que $\Delta n^{(+)}$ es la cantidad de cargas, cuya suma de las velocidades está bajo el signo de sumación \sum . De la misma manera se transforma la suma según las velocidades de las cargas negativas. Teniendo lo dicho en cuenta, la fórmula (4.8) adquiere el aspecto:

$$\mathbf{j} = e^{(+)} \frac{\Delta n^{(+)}}{\Delta V_f} \langle \mathbf{v}^{(+)} \rangle + e^{(-)} \frac{\Delta n^{(-)}}{\Delta V_f} \langle \mathbf{v}^{(-)} \rangle = e^{(+)} n^{(+)} \langle \mathbf{v}^{(+)} \rangle + e^{(-)} n^{(-)} \langle \mathbf{v}^{(-)} \rangle = \\ = \rho^{(+)} \langle \mathbf{v}^{(+)} \rangle + \rho^{(-)} \langle \mathbf{v}^{(-)} \rangle, \quad (4.9)$$

donde se han tomado en consideración las relaciones (4.3) y (4.4). De esta manera, las cargas positivas y negativas crean cada una su densidad de corriente:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^{(+)} &= \rho^{(+)} \langle \mathbf{v}^{(+)} \rangle, & \mathbf{j}^{(-)} &= \rho^{(-)} \langle \mathbf{v}^{(-)} \rangle, \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}^{(+)} + \mathbf{j}^{(-)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

La dirección de la densidad de corriente para las cargas positivas coincide con la de su velocidad media y la dirección de \mathbf{j} para las cargas negativas es contraria a ella.

Por lo general, para simplificar la escritura, las fórmulas (4.10) se representan así

$$\boxed{\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}}, \quad (4.11)$$

donde ρ y \mathbf{v} son la densidad volumétrica y la velocidad de las cargas de signo correspondiente. Si la corriente se crea por las cargas de los dos signos, en el segundo miembro se supone la suma de dos términos, referentes a las cargas negativas y positivas. En cambio, en la mayoría de los casos, examinados en la teoría de la electricidad, la corriente se determina sólo por el movimiento de las cargas negativas de los electrones, por lo que el segundo miembro de (4.11) contiene solamente el producto de la densidad volumétrica negativa de la carga de los electrones por su velocidad media. *El traslado de la carga negativa en dirección contraria a la velocidad equivale al traslado de una carga positiva en dirección de la velocidad.* En distintos razonamientos es más cómodo imaginarse que la corriente se determina por el movimiento de las cargas positivas, ya que su desplazamiento espacial coincide con la dirección de la densidad de corriente.

Intensidad de corriente a través de una superficie. Un elemento infinitamente pequeño de la superficie se caracteriza por el vector $d\mathbf{S}$, cuyo módulo es igual al área del elemento de superficie y está dirigido por la normal a la superficie, que se considera positiva.

Calculemos la carga que durante el tiempo dt atraviesa un elemento de la superficie dS (fig. 9). El desplazamiento de la carga en dicho tiempo es $\mathbf{v} dt$. Por consiguiente, la carga que atraviesa dS es igual a la densidad volumétrica de la carga, multiplicada por el volumen de un cilindro oblicuo (fig. 9). El área de la base y la altura del cilindro oblicuo son dS y $h = v \Delta t \cos \theta$. Por eso la carga que atraviesa dS es igual a

$$dq = \rho v dt dS \cos \theta = dt j \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.12)$$

donde $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = j dS \cos(\mathbf{j}, d\mathbf{S})$. Se llama **intensidad de corriente a través de la superficie** la relación entre la carga, que atraviesa la superficie, y el tiempo. Por esta razón, la intensidad infinitamente pequeña de corriente dI que pasa por el elemento de la superficie dS [vépse (4.12)], es igual a

$$dI = dQ/dt = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.13)$$

La intensidad de corriente que pasa por una superficie finita S (fig. 10), es igual a la integral de los elementos de la intensidad de corriente de (4.13) respecto a la superficie dada:

$$J = \int_S dI \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.14)$$

Si por el conductor pasa corriente eléctrica continua, la fórmula (4.14) se reduce a la definición de la intensidad de corriente como la cantidad de electricidad que atraviesa la sección transversal del conductor en un segundo.

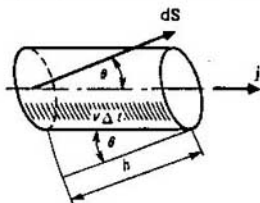


Fig. 9
Cálculo de la intensidad de la corriente eléctrica a través del elemento de la superficie

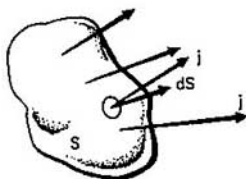


Fig. 10
Corriente eléctrica a través de la superficie

En la mayoría de los fenómenos macroscópicos que se estudian en la electricidad, participa una cantidad enorme de cargas eléctricas sin manifestar de ninguna manera su carácter discreto.

Cierto volumen pequeño concreto puede considerarse en unos casos como un volumen físico infinitamente pequeño, mientras que en otros casos no se le puede considerar así. Existen condiciones cuando en general no hay ningún volumen que se pueda considerar como un volumen físico infinitamente pequeño. Entonces es imposible pasar al cuadro de la distribución continua de las cargas en el volumen.

§ 5. Principio de conservación de la carga

Se examinan dos aspectos del concepto de conservación de la carga. Se ofrecen las enunciaciones diferencial e integral del principio de conservación de la carga.

Los aspectos del concepto de conservación de la carga. En el concepto de «conservación de la carga» entran dos grupos de hechos totalmente diferentes: 1) *el electrón y el protón son partículas materiales con tiempo infinito de vida y sus cargas eléctricas elementales son invariantes y no dependen de la velocidad.* Por lo tanto, sus cargas existen sin variación alguna tanto tiempo cuanto existen los

protones y electrones, independientemente de cómo se mueven, es decir, para cualesquiera movimientos la carga se conserva. En este aspecto el principio de conservación de la carga resulta simplemente la consecuencia de que los portadores de carga no se aniquilan como objetos físicos y de la invariación de la carga; 2) además de los protones y electrones, existe una gran cantidad de otras partículas elementales cargadas. Todas ellas se engendran, originan otras partículas y se aniquilan en diversos procesos de autotransformaciones. Todo el enorme material experimental demuestra que sea cual sea el proceso de autotransformación de las partículas, la carga sumaria de las partículas antes de la autotransformación es igual a la carga sumaria de ellas después de dicho proceso. Por ejemplo, durante la desintegración β antes de emitir un electrón, el núcleo posee cierta carga positiva Ze^{+} . Después de emitir el electrón, la carga positiva del núcleo aumenta en una carga positiva elemental y se hace igual a $(Z + 1)e^{+}$. En cambio, sumando la carga negativa del electrón emitido, el sistema «núcleo + electrón» posee la misma carga $(Z + 1)e^{+} - |e^{-}| = Ze^{+}$. Puede citarse también otro ejemplo de la creación del par electrón—positrón por rayos (fotones) gamma. La partícula inicial (el fotón gamma) es neutra. Ella se transforma en un par de partículas, cuya carga sumaria es nula, lo que está demostrado con gran precisión al medir la carga positiva del positrón. Se investigó una inmensa cantidad de autotransformaciones de las partículas elementales y en todos los procesos se observó la igualdad de la carga sumaria antes del proceso y después de éste o, con otras palabras, se observa el principio de conservación de la carga. Merced a ello, la carga adquiere en cierto sentido una existencia, independiente de los portadores y el principio de su conservación puede enunciarse de la siguiente manera: la carga se conserva durante todos los procesos y movimientos, relacionados con los portadores de las cargas.

Sin embargo, a pesar de su independencia relativa, la carga no puede existir independientemente de los portadores de la carga o fuera del espacio y tiempo. Esto significa que la carga no es una substancia independiente, ajena a la materia, sino que expresa una de las propiedades de la materia. Uno de los problemas más difíciles de la física moderna es la aclaración de la naturaleza de dicha relación. Aún no está claro el por qué existe sólo una carga elemental y por qué es igual a $|e|$ y no a otro valor cualquiera.

Formulación integral del principio de conservación de la carga. Partiendo del principio de conservación de la carga como un hecho experimental, expresémoslo en forma de cierta afirmación de que la variación de la carga en un volumen V puede ocurrir sólo como consecuencia de que la carga confluya o fluya por una superficie cerrada S que limita el volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.1)$$

El primer miembro de (5.1) determina la velocidad del cambio de la carga en el volumen, y el segundo miembro, la intensidad de corriente por la superficie que limita el volumen. El signo menos significa que si la carga positiva dentro del volumen disminuye, la densidad de corriente está dirigida desde el volumen V .

Recordemos que se considera normal positiva de las superficies cerradas la normal exterior. Por consiguiente, el vector dS en (5.1) está orientado por la normal exterior a la superficie (fig. 11).

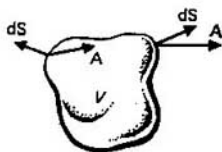


Fig. 11
En las superficies cerradas la normal exterior es la positiva

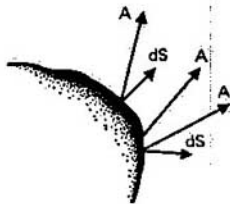


Fig. 12
Flujo del vector A a través de la superficie

Divergencia. El concepto matemático de divergencia desempeña un papel importante para describir los procesos, relacionados con la creación, aniquilación y conservación de las magnitudes físicas.

Sea un vector $A(x, y, z)$ determinado en todos los puntos del espacio. Examinemos cierta superficie S (fig. 12). La integral

$$\Phi_A = \int_S A \cdot dS \quad (5.2)$$

se denomina **flujo del vector A por la superficie S** . La causa de este nombre consiste en lo siguiente: supongamos que haya una hoguera, cuyo humo tiene una densidad ρ y una velocidad v en distintos puntos del espacio. Elijamos la magnitud ρv a título de vector A . Entonces la integral (5.2), tomando en consideración la fig. 10, define la masa del humo que atraviesa la superficie S en un segundo. Semejante aplicación para la carga eléctrica ya se utilizó en la igualdad (4.14). Por analogía con (5.1), llegamos a la conclusión de que el flujo del vector A por una superficie cerrada caracteriza la intensidad de la creación o aniquilación de A dentro del volumen, limitado por la superficie. Así, el flujo del vector ρv a través de la superficie cerrada caracteriza la intensidad de creación de humo dentro del volumen, limitado por una superficie cerrada. Semejante interpretación tiene la igualdad (5.1) para las cargas eléctricas. Puede decirse que la integral (5.2) caracteriza la potencia sumaria de las fuentes del vector A dentro del volumen.

La divergencia caracteriza la potencia de las fuentes y se determina por la fórmula

$$\operatorname{div} A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} A \cdot dS}{\Delta V}, \quad (5.3)$$

donde ΔS es una superficie cerrada infinitamente pequeña que delimita un volumen infinitamente pequeño ΔV .

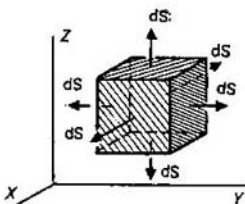


Fig. 13
El flujo del vector a través de la superficie de un cubo se reduce a la suma de los flujos a través de sus caras

Hallemos la expresión para $\text{div } \mathbf{A}$ en coordenadas cartesianas. Para ello calculemos el flujo del vector \mathbf{A} a través de la superficie de un cubo (fig. 13), cuyos lados son Δx , Δy , Δz y su centro posee las coordenadas (x, y, z) . Las coordenadas de los centros de las caras son $(x + \Delta x/2, y, z)$, $(x - \Delta x/2, y, z)$, $(x, y + \Delta y/2, z)$, $(x, y - \Delta y/2, z)$, $(x, y, z + \Delta z/2)$, $(x, y, z - \Delta z/2)$. La expresión subintegral de (5.3) en coordenadas tiene el siguiente aspecto:

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A_x dS_x + A_y dS_y + A_z dS_z, \quad (5.4)$$

donde

$$dS_x = \pm dy dz; \quad dS_y = \pm dz dx; \quad dS_z = \pm dx dy, \quad (5.5)$$

con la particularidad de que el signo de estas magnitudes se determina por la orientación de la normal exterior a la cara respecto a la dirección positiva del eje correspondiente. Por ejemplo, dS_y por la cara derecha $(x, y + \Delta y, z)$ posee un valor positivo, mientras que por la cara izquierda, negativo. La integral por la superficie del cubo se reduce a la suma de las integrales por sus caras.

Calculemos, por ejemplo, la integral por las caras perpendiculares al eje Y . En estas caras $dS_x = 0$, $dS_y = \pm dz dx$, $dS_z = 0$ y, por lo tanto, la suma en el segundo miembro de (5.4) se reduce a un sumando $A_y dS_y$. Designando las áreas de las superficies de las caras ΔS_{y1} (la izquierda) y ΔS_{y2} (la derecha), escribimos:

$$\begin{aligned} I_y &= \oint_{\Delta S_{y1} + \Delta S_{y2}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta S_{y1}} A_y dS_y + \int_{\Delta S_{y2}} A_y dS_y = \\ &= \int_{\Delta S_{y1}} A_y(x, y - \Delta y/2, z) dx dz + \int_{\Delta S_{y2}} A_y(x, y + \Delta y/2, z) dx dz. \end{aligned} \quad (5.6)$$

El signo menos de la primera integral en el segundo miembro de (5.6) toma en consideración que la normal exterior a la cara izquierda ΔS_{y1} está orientada hacia los valores negativos de y . Para los cálculos posteriores representemos A_y en forma de la serie de Taylor respecto a Δy :

$$\begin{aligned} A_y(x, y + \Delta y/2, z) &= A(x, y, z) + (\Delta y/2) \partial A_y(x, y, z) / \partial y + O[(\Delta y)^2], \\ A_y(x, y - \Delta y/2, z) &= A(x, y, z) - (\Delta y/2) \partial A_y(x, y, z) / \partial y + O[(\Delta y)^2], \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde $O[(\Delta y)^2]$ son los términos del orden superior de pequeñez con respecto a Δy . Sustituyendo (5.7) en (5.6), hallamos

$$I_y = \Delta y \int_{\Delta S_y} \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} dx dz + O[(\Delta y)^2], \quad (5.8)$$

donde se tuvo en cuenta que las áreas de las superficies ΔS_{y1} y ΔS_{y2} son iguales y poseen las mismas coordenadas por los ejes X, Z .

La integral en (5.8) puede calcularse, desarrollando el integrando en serie, considerando que x y z son las variables de la integración y no las coordenadas del centro de las caras. Si por x y z se toman las coordenadas del centro de las caras, las variables se sustituyen fácilmente por las fórmulas:

$$x \rightarrow x + \xi, \quad z \rightarrow z + \eta, \quad dx dz \rightarrow d\xi d\eta, \quad (5.9)$$

$$\int_{\Delta S_y} \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} dx dz = \int_{\Delta S_y} \frac{\partial A_y(x + \xi, y, z + \eta)}{\partial y} d\xi d\eta, \quad (5.10)$$

donde x, z en el segundo miembro de (5.10) son las coordenadas del centro de las caras, es decir, son constantes al calcular (5.10). La expresión $\partial A_y / \partial y$ puede desarrollarse en serie respecto a ξ, η :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_y(x + \xi, y, z + \eta)}{\partial y} &= \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \\ + \xi \frac{\partial^2 A_y(x, y, z)}{\partial x \partial y} &= \eta \frac{\partial^2 A_y(x, y, z)}{\partial z \partial y} + 0(\xi^2, \eta^2), \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde ξ y η varían al integrar desde 0 hasta $\pm \Delta x/2$ y $\pm \Delta z/2$ y poseen, por lo tanto, el mismo orden de pequeñez que Δx y Δz . Sustituimos (5.11) en (5.10):

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S_y} \frac{\partial A_y(x + \xi, y, z + \eta)}{\partial y} d\xi d\eta &= \frac{\partial A_y}{\partial y} \int_{\Delta S_y} d\xi d\eta + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} \int_{\Delta S_y} \xi d\xi d\eta + \\ + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} \int_{\Delta S_y} \eta d\xi d\eta + \dots &= \frac{\partial A_y}{y} \Delta x \Delta y \Delta z + 0[(\Delta x)^2, (\Delta z)^2]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Entonces para (5.8) obtenemos

$$I_y = \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + 0[(\Delta x \Delta y \Delta z)^2]. \quad (5.13)$$

De la misma manera calculemos los flujos que atraviesan los otros pares de caras:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z + 0[(\Delta x \Delta y \Delta z)^2]. \quad (5.14)$$

Poniendo (5.14) en (5.3) y teniendo en cuenta que el volumen del cubo es igual a $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, hallamos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + 0[(\Delta x \Delta y \Delta z)^2] / (\Delta x \Delta y \Delta z) \right\} = \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

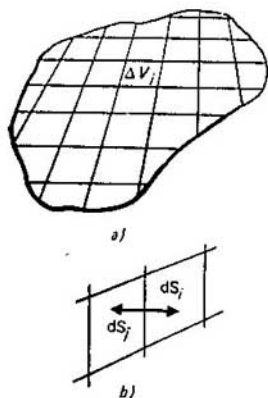


Fig. 14
Para la deducción de la fórmula
de Gauss — Ostrogradski

ya que el sumando, dependiente de $(\Delta x \Delta y \Delta z)$, se reduce a cero durante el paso al límite. La fórmula

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (5.16)$$

permite calcular la divergencia en coordenadas cartesianas.

Fórmula de Gauss—Ostrogradski. Esta fórmula relaciona la potencia de las fuentes con los flujos de vectores que engendran y desempeña un papel importante en la teoría de la electricidad. Dividamos el volumen V , delimitado por la superficie S (fig. 14, a), en una gran cantidad de pequeños volúmenes ΔV_i , cuyas superficies son ΔS_i .

La fórmula (5.3) puede representarse como

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_i \Delta V_i \approx \oint_{\Delta S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (5.17)$$

donde $(\operatorname{div} \mathbf{A})_i$ significa $\operatorname{div} \mathbf{A}$ en el i -ésimo volumen. En (5.17) se ha puesto el signo de igualdad aproximada puesto que a pesar de ser ΔV_i pequeño, es finito. Al disminuir ilimitadamente ΔV_i , la relación (5.17) se hace exacta. Sumemos ambos miembros de (5.17) respecto a todas las células del volumen V :

$$\sum_i (\operatorname{div} \mathbf{A})_i \Delta V_i \approx \sum_i \oint_{\Delta S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.18)$$

La suma del segundo miembro puede transformarse de la siguiente manera. Las células adyacentes poseen una superficie común de contacto. Todas las células interiores se encuentran en contacto por toda su superficie con las células adyacentes. Por eso en la suma del segundo miembro de (5.18) la integral por cada superficie dentro del volumen V participa dos veces como la integral de las partes en contacto de las células adyacentes (fig. 14, b; dS_i es opuesto a dS_j). Dado que la dirección de las normales en cada uno de los pares de esas integrales es opuesta, mientras que el vector \mathbf{A} tiene un mismo módulo, los valores absolutos de dichas integrales son iguales, pero tienen signos contrarios. Por consiguiente, la suma de esas integrales es nula, por lo tanto, en el segundo miembro de (5.18) todas las integrales por la superficie de contacto de las células dentro del volumen V se anulan, quedando sólo la suma de las integrales por aquellas partes de las células en el límite del volumen V que no están en contacto con otras células. La suma de las áreas de estas superficies exteriores de las células, yacentes en el límite del volumen V , es el área de la superficie S que acota el

volumen V . Por lo tanto,

$$\sum_i \oint_{\Delta S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (5.19)$$

con la particularidad de que esta igualdad es exacta y válida para cualquier partición del volumen V en células ΔV_i .

El primer miembro de (5.18) para $\Delta V_i \rightarrow 0$ puede expresarse en forma de una integral:

$$\lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{\Delta V_i} (\operatorname{div} \mathbf{A})_i \Delta V_i = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV. \quad (5.20)$$

Sustituyendo (5.19) en (5.18) y pasando al límite, obtenemos la fórmula

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}, \quad (5.21)$$

que recibe el nombre de **fórmula de Gauss—Ostrogradski**. *Ella vincula la integral por el volumen respecto a la divergencia del vector con el flujo de este vector a través de la superficie cerrada que limita el volumen.* En las matemáticas se indican las condiciones de aplicación de esta fórmula, que aquí no se citan, ya que en la mayoría de las situaciones físicamente reales ellas se cumplen automáticamente.

Enunciación diferencial del principio de conservación de la carga. En la fórmula (5.1) el volumen V y la superficie S no varían con el tiempo. Por lo tanto, la derivada con relación al tiempo en el primer miembro de (5.1) puede introducirse bajo el signo de integral. Por otra parte, aplicando la fórmula de Gauss—Ostrogradski, el segundo miembro de la igualdad puede transformarse en la integral respecto al volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV. \quad (5.22)$$

Trasladando todos los términos de (5.1) al primer miembro y tomando en consideración (5.22), obtenemos

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} \right) dV = 0. \quad (5.23)$$

Esta igualdad es válida para cualquier volumen. Es obvio que el integrando es idénticamente igual a cero. La demostración se lleva a cabo por reducción al absurdo. Si en cierto punto el integrando no es nulo, a título de V puede tomarse un volumen pequeño en las proximidades de este punto, en cuyos límites el integrando conserva el signo. La integral respecto a esa zona no es nula, lo que está en contradicción con la igualdad inicial (5.23). Por esta razón, el in-

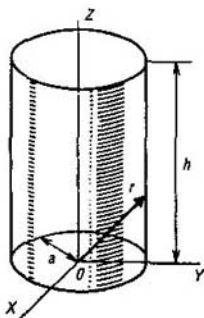


Fig. 15
Para el cálculo del flujo del radio vector a través de la superficie de un cilindro recto

tegrando es igual a cero en todos los puntos. Entonces

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (5.24)$$

La igualdad (5.24) es la expresión del principio de conservación de la carga en forma diferencial y se denomina también ecuación de continuidad.

¿Qué demandas debe satisfacer un volumen físico infinitamente pequeño?

¿Para qué condiciones puede hacerse uso del concepto de distribución continua de las cargas? ¿Es posible siempre determinar la densidad volumétrica de la carga? Cítese ejemplos. ¿Para qué condiciones puede emplearse la representación de las cargas superficiales?

¿Qué relación existe entre la dirección del vector de densidad de corriente y la dirección del vector de velocidad de la carga?

La carga se conserva para todos los movimientos y autotransformaciones de los portadores de carga.

La divergencia caracteriza la potencia de las fuentes. La fórmula de Gauss—Ostrogradski enlaza la potencia sumaria de las fuentes en el volumen con el flujo del vector, engendrado por las fuentes, que atraviesa la superficie que limita el volumen.

La carga no es una substancia independiente de la materia, sino que es una de las propiedades de ella.

¿Cuáles son los dos grupos de diferentes hechos que se describen por el concepto de conservación de la carga?

¿Cuál es el sentido físico de la igualdad, expresada por el teorema de Gauss—Ostrogradski?

¿Qué condición debe cumplirse para que de la igualdad a cero de la integral se desprenda la igualdad a cero del integrando?

Ejemplo 5.1. Calcular el flujo del radio vector a través de la superficie de un cilindro circular recto (fig. 15). Realícese el cálculo directamente y aplicando la fórmula de Gauss—Ostrogradski.

Coloquemos el origen de coordenadas en el centro de la base del cilindro y dirijamos el eje Z a lo largo del eje del cilindro (véase la fig. 15). Entonces,

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{inf}}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{sup}}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{lat}}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S},$$

donde S_{inf} , S_{sup} y S_{lat} son las áreas de las bases inferior y superior del cilindro y de la superficie lateral, respectivamente. Tenemos:

$$\int_{S_{\text{inf}}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \int_{S_{\text{sup}}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = h\pi a^2,$$

ya que para los puntos en la superficie de las bases inferior y superior $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = r \cdot dS \cos(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{S}}) = 0$, $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = r \cdot dS \cos(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{S}}) = h \cdot dS$. Por fin, para la integral con respecto a la superficie

lateral $\int_{S_{\text{lat}}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = a \cdot 2\pi ah$, puesto que para los puntos en la superficie lateral $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = a \, dS$.

Por consiguiente,

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 3\pi a^2 h. \quad (5.25)$$

Según el teorema de Gauss—Ostrogradski,

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} + \int_V \operatorname{div} \mathbf{r} \, dV = 3\pi a^2 h, \quad (5.26)$$

onde $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$, $V = \pi a^2 h$ (el volumen de un cilindro circular recto).

§ 6. Ley de Coulomb

Se examina la precisión de las verificaciones experimentales de la ley de Coulomb.

Verificaciones experimentales de la ley de Coulomb. La ley de Coulomb para la fuerza F de interacción de dos cargas puntuales q_1 y q_2 que se encuentran a la distancia r , tiene la forma

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (6.1)$$

donde $\epsilon_0 = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)$ F/m. Fue establecida por Ch.A. de Coulomb (1736—1806) en 1785 midiendo directamente las fuerzas de interacción entre los cuerpos con carga, cuyas dimensiones eran mucho más pequeñas que la distancia entre ellos. La precisión de las pruebas no era grande. Sólo por razones generales, basadas en la analogía con las fuerzas de la gravedad, existía la seguridad de que dicha ley era absolutamente correcta.

La ley de Coulomb (6.1) entra en el número de hechos experimentales principales en los que se fundamenta la teoría de la electricidad. Las tareas más importantes, cuya solución atrajo los esfuerzos considerables de los experimentadores, son la verificación de su validez y determinación de los límites de su aplicación.

Midiendo directamente las fuerzas de interacción, es difícil verificar la ley (6.1) con gran precisión, ya que los experimentadores carecen de cargas puntuales en reposo. Por esta razón, por lo general, se comparan las consecuencias de la ley de Coulomb y los resultados de los experimentadores y, basándose en esta comparación, se deducen los límites de su aplicación y precisión.

La primera verificación de la ley se realizó en 1772 por H. Cavendish (1731—1810), 13 años antes de ser descubierta ésta por Coulomb. Pero como Cavendish no publicó su trabajo, perdió la prioridad del descubrimiento. Al original con la descripción de sus experimentos se encontró en los archivos sólo hacia el final de los años 60 del siglo XIX. El método de Cavendish tenía gran

empleo y en los últimos años permitió comprobar la ley de Coulomb con gran precisión.

La tarea de la verificación experimental se enuncia de la siguiente manera. La ley de interacción se representa así

$$F = \text{const}/r^{2+\alpha}. \quad (6.2)$$

Se requiere hallar el orden de infinitud de α . Cuanto menos es $|\alpha|$, tanto más se aproxima la ley de interacción a la de Coulomb. Por eso, el resultado de la prueba se expresa como una restricción a la de Coulomb. Por eso, el resultado de la prueba se expresa como una restricción a α : $|\alpha| \leq \delta$. La tarea del experimento consiste en definir el valor de δ .

Método de Cavendish. Las cargas libres en un conductor homogéneo se sitúan en su superficie. A primera vista parece ser consecuencia de la repulsión

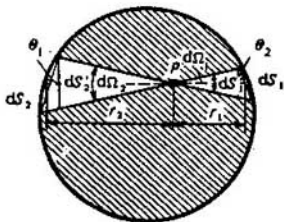


Fig. 16
Para la teoría del método de Cavendish

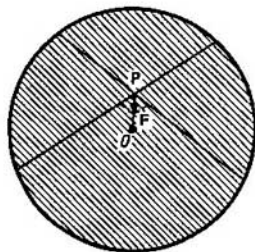


Fig. 17
Aparición de la fuerza por parte de la capa esférica en los puntos dentro de la esfera

de las cargas del mismo signo, a causa de la cual las cargas tienden a separarse a las máximas distancias, dirigiéndose hacia la superficie del conductor. En cambio, eso es incorrecto. *Semejante situación surge debido a que la fuerza de interacción de las cargas puntuales disminuye inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas, y no conforme a otra ley.*

De la teoría de la gravedad se sabe que una capa homogénea esférica de una substancia en cierta cavidad, rodeada por esta capa, no crea ninguna fuerza. De aquí se desprende que si las cargas eléctricas puntuales actúan recíprocamente por la ley de los cuadrados inversos de las distancias, la capa esférica de las cargas no crea ninguna fuerza en esta cavidad.

Supongamos que la carga está distribuida uniformemente por la superficie de la esfera con una densidad superficial σ (fig. 16). Dentro de la esfera en el punto P las cargas que se encuentran en los elementos de la superficie dS_1 y dS_2 , crean fuerzas, dirigidas opuestamente, $dF_1 = \sigma dS_1 / (4\pi\epsilon_0 r_1^2)$ y $dF_2 = \sigma dS_2 / (4\pi\epsilon_0 r_2^2)$. Partiendo de las propiedades de las tangentes hacia los extremos de la cuerda se deduce que los ángulos θ_1 y θ_2 entre las perpendiculares res-

pecto a la cuerda y los elementos de la superficie dS_1 y dS_2 son iguales. Entonces $dS_1 = dS'_1/\cos \theta$ y $dS_2 = dS'_2/\cos \theta$. Por consiguiente, $dF_1 = \sigma dS'_1 / (4\pi\epsilon_0 r_1^2 \cos \theta)$, $dF_2 = \sigma dS'_2 / (4\pi\epsilon_0 r_2^2 \cos \theta)$, donde $dS'_1/r_1^2 = d\Omega_1$ y $dS'_2/r_2^2 = d\Omega_2$ son ángulos sólidos, bajo los cuales dS_1 y dS_2 se ven desde el punto P (son iguales por su construcción). Así pues, las fuerzas dF_1 y dF_2 , de igual módulo, están orientadas en sentido opuesto, como consecuencia de que sus cargas en dS_1 y dS_2 tienen el mismo signo. Como resultado sucede la compensación mutua de las fuerzas, pertenecientes a todos los pares de elementos superficiales, situados en sentido opuesto, y la fuerza total que actúa sobre la carga de prueba en el punto P , es nula.

Si a la esfera conductora se le comunica carga, ésta se distribuye uniformemente por la superficie de la esfera debido a la simetría esférica. La ausencia de cargas en el volumen se demuestra de la siguiente manera. Sea que dentro de la esfera hayan ciertas cargas. Merced a la simetría esférica, su distribución debe ser esféricamente simétrica. Examinemos cierta capa esférica de cargas. Las cargas que se encuentran fuera de la cavidad, limitada por la capa esférica, no ejercen ninguna fuerza sobre las cargas de la capa. Sobre ellas actúan sólo las fuerzas de repulsión por parte de las cargas que se hallan dentro de la cavidad, limitada por la capa esférica. Pero ello significa que la capa esférica de cargas empezará a moverse desde el centro a la periferia. De esta manera, en el caso de distribución uniforme, no existen cargas dentro de la esfera conductora.

Otro caso es si la ley de interacción se diferencia de la de Coulomb. En este caso en el punto P , por parte de las cargas σdS_1 y σdS_2 , situadas en los elementos superficiales dS_1 y dS_2 , actúan las fuerzas:

$$\begin{aligned} dF_1 &= \text{const} \frac{dS_1 \sigma}{r_1^{2+\alpha}} = \frac{\text{const} \cdot \sigma}{\cos \theta} d\Omega_1 \frac{1}{r_1^\alpha}, \\ dF_2 &= \text{const} \frac{dS_2 \sigma}{r_2^{2+\alpha}} = \frac{\text{const} \cdot \sigma}{\cos \theta} d\Omega_2 \frac{1}{r_2^\alpha}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

cuya resultante es

$$\Delta F = A \left(\frac{1}{r_2^\alpha} - \frac{1}{r_1^\alpha} \right) \quad (6.4)$$

no es nula. En la fórmula (6.4) A significa los mismos factores antes de $1/r_1^\alpha$ y $1/r_2^\alpha$ en (6.3).

La existencia de la fuerza ΔF conduce a que sea posible la distribución uniforme de las cargas por todo el volumen de la esfera conductora, ya que sobre la carga dentro de la esfera actúan fuerzas no sólo por parte de las capas esféricas interiores, sino también de las exteriores, con la particularidad de que el carácter de su acción depende del signo de α .

Examinemos el caso cuando $\alpha > 0$. La fuerza que ejerce la carga ($\sigma > 0$), situada respecto al punto P (fig. 16) en el elemento superficial más alejado, es interior a la que existe por parte de la carga que posee el elemento superficial más próximo. Por lo tanto, la fuerza está dirigida hacia el elemento superficial más alejado. Sumando todos los pares posibles de elementos superficiales, llegamos a la conclusión de que la resultante F está orientada hacia el centro O (fig. 17). Por consiguiente, dentro de la esfera de radio OP puede crearse una

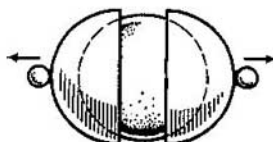


Fig. 18
Método de Cavendish para verificar la ley de Coulomb

distribución de la carga tal, que la fuerza en el punto P , originada por esta distribución, compense la fuerza por parte de las cargas en las capas esféricas exteriores. Debido a ello, la capa de cargas en la esfera de radio OP puede hallarse en equilibrio. Es necesario elegir la distribución de la densidad de las cargas según el radio, para que en cada punto dentro de la esfera la fuerza sea nula. Semejante distribución será de equilibrio. Así pues, para $\alpha > 0$ en la esfera conductora con carga éstas existen no sólo en la superficie como para $\alpha = 0$, sino también en el volumen. Una deducción semejante se hace para $\alpha < 0$. Puede efectuarse un cálculo matemático más detallado y hallar la carga en el volumen como función de α . El método de Cavendish consiste en la medición de la carga en el volumen de la esfera y el posterior cálculo del valor de α .

A la esfera conductora (fig. 18) se le acerca una envoltura esférica conductora separable que consta de dos semiesferas. Al colocarla encima de la esfera, el sistema adquiere carga eléctrica. Luego la envoltura se quita de la esfera mediante unas manecillas aislantes y se investiga la carga que quedó en ella.

Si es válida la ley de Coulomb, toda la carga debe estar en la envoltura y eliminarse con ella. La carga que queda en la esfera es igual a cero.

Si existe cierta desviación de dicha ley, parte de la carga se concentra en el volumen de la esfera y parte de ella está en la envoltura. Después de quitar la envoltura, en la esfera queda cierta carga. Determinándola, puede estimarse α . Claro que en los ensayos no puede medirse directamente la carga, sino los potenciales, lo que no cambia el quid de la cuestión.

Cavendish obtuvo que $|\alpha| \leq 0,02$. Aproximadamente, cien años más tarde Maxwell realizó las mismas pruebas, obteniendo $|\alpha| \leq 5 \cdot 10^{-5}$. En 1971 el método de Cavendish fue perfeccionado. El experimento se llevaba a cabo no en el régimen estático, sino que con ayuda de potenciales que varían con el tiempo. El dispositivo consta de dos esferas conductoras concéntricas. A la exterior se le suministraba una tensión alterna de ± 10 kV respecto a la Tierra. En caso de desviarse de la ley de Coulomb, el potencial de la esfera interior debe variar respecto a la Tierra. Los investigadores podían detectar una diferencia de potencial inferior a 1 pV. Ellos no encontraron oscilaciones del potencial en la esfera interior, lo que permitió tomar $|\alpha| \leq |2,6 \pm 3,1| \cdot 10^{-16}$.

Estos ensayos han confirmado, con una precisión extremadamente grande indicada, la ley de Coulomb para las distancias desde varios milímetros hasta decenas de centímetros.

Verificación de la ley para distancias grandes. Resulta difícil ya aplicar el método de Cavendish para verificar la ley de Coulomb para distancias, iguales a varios metros y más. Para esas distancias se utilizan métodos indirectos, cuya argumentación yace fuera de los márgenes de la teoría clásica de la electricidad. Se hace uso de las representaciones cuánticas sobre la interacción de las partículas, teniendo en cuenta sus propiedades ondulatorias. Cada interac-

ción se determina por un tipo concreto de partículas. La ley de interacción depende de las propiedades de las partículas que determinan la interacción y en primer lugar, de su masa. Si la masa en reposo de las partículas responsables de la interacción, es nula, la fuerza de interacción es inversamente proporcional al cuadrado de las distancias y el potencial de interacción es inversamente proporcional a la distancia. Pero si las partículas que ejercen la interacción, poseen una masa en reposo diferente de cero, el potencial varía según la ley $\sim (1/r) \exp(-\mu r)$, donde μ depende de la masa en reposo de las partículas. Siendo la masa en reposo nula, μ es igual a cero y el potencial varía inversamente proporcional a la distancia como debe ser para la ley de Coulomb y la ley de la gravitación de Newton. Según las representaciones actuales, las interacciones electromagnéticas están determinadas por los fotones. Por esta razón, la cuestión sobre la validez de la ley de Coulomb se reduce a la cuestión sobre la igualdad a cero de la masa en reposo de los fotones.

Todas las partículas, además de propiedades corpusculares, poseen propiedades ondulatorias. La energía ϵ_{fot} de los fotones está relacionada con la frecuencia y la masa mediante las relaciones: $\epsilon_{\text{fot}} = \hbar\omega$ y $\epsilon_{\text{fot}} = m_{\gamma}c^2$, donde $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ J·s es la constante de Planck y m_{γ} , la masa del fotón. Esta última es mayor que la masa en reposo si es que el fotón la tiene. Por eso, hallando el límite superior de m_{γ} , encontramos la restricción para la masa en reposo del fotón. Al demostrar de modo experimental la existencia de ondas electromagnéticas de una longitud suficientemente grande, puede afirmarse que el valor de m_{γ} es bastante pequeño. Si se lograra demostrar la existencia de ondas electromagnéticas de una longitud infinita de onda, se podría afirmar que la masa en reposo del fotón es nula y, por lo tanto, es válida absolutamente la ley de Coulomb.

Las ondas electromagnéticas más largas, que se logra observar en la actualidad, se forman como ondas estacionarias en el espacio entre la superficie terrestre y la ionosfera. Se denominan **resonancias de Schumann**. La resonancia mínima de Schumann corresponde a la frecuencia $\nu_0 = 8$ Hz. Basándose en esto y teniendo en cuenta la distancia entre la superficie de la Tierra y la ionosfera, asimismo las condiciones de formación de las ondas estacionarias, para la masa del fotón obtenemos $m_{\gamma} < 10^{-48}$ kg. Dicha estimación muestra que la ley de Coulomb se cumple con una precisión extremadamente grande, ya que la desigualdad $|\alpha| \leq 10^{-16}$ equivale a $m_{\gamma} \leq 10^{-50}$ kg.

Se han llevado a cabo experimentos relacionados con la investigación del campo magnético mediante los satélites en el espacio circun terrestre. Estas pruebas permitieron determinar la precisión con que se cumple la ley de Coulomb a grandes distancias. Se ha establecido que la ley de Coulomb se cumple con una precisión muy elevada hasta las distancias del orden de 10^7 m. No hay duda alguna de que también a mayores distancias se cumple la ley de Coulomb, a pesar de que no se llevaron a cabo verificaciones experimentales directas.

Verificación de la ley para distancias pequeñas. La ley de Coulomb a pequeñas distancias se comprueba en los experimentos de la interacción de las partículas elementales. Ya los ensayos de Rutherford permitieron sacar la conclusión de que la ley de Coulomb es válida con gran precisión hasta las distancias de

hasta 10^{-15} m. *Los experimentos posteriores de la dispersión elástica de los electrones para las energías de varios miles de millones de electrón-voltios mostraron que la ley de Coulomb se cumple hasta las distancias de 10^{-17} m.*

Para interpretar dichos experimentos se utiliza la electrodinámica cuántica.

Interpretación de campo de la ley de Coulomb. Antes de aparecer los trabajos de Faraday, la ley de Coulomb se interpretaba partiendo de la acción a distancia, o sea, se consideraba que un cuerpo actúa sobre otro sin intermediarios. Por esta razón, ese concepto tenía el nombre de acción a distancia. En la primera mitad del siglo XIX surgió otro punto de vista del mecanismo de interacción, conforme al cual la interacción entre los cuerpos se efectúa sólo mediante una «transmisión de fuerzas» continua a través del espacio entre los cuerpos. Semejante idea recibió el nombre de concepto de acción a corta distancia. Dicho concepto fue introducido en la ciencia por M. Faraday (1791—1867) en varios trabajos, publicados en el período de 1831 a 1855. *A la par con la idea sobre la acción a corta distancia, en la ciencia apareció el concepto de campo como intermediario que efectúa la interacción.* Primero las funciones de intermediario se le atribuyeron al medio que ocupa todo el espacio, recibiendo el nombre de éter. El estado del éter se caracterizaba por determinadas propiedades mecánicas, tales como la elasticidad, tensión, el movimiento de unas partes del medio con relación a otras, etc. Según esta interpretación, la fuerza que actúa sobre el cuerpo, es consecuencia de la interacción del cuerpo con el medio en el punto donde se encuentra el cuerpo. Así pues, *el mecanismo de interacción se enuncia como relaciones locales.* En 1861—1862 Maxwell (1831—1879) intentó enunciar este cuadro mecánico de transmisión de las interacciones desde el punto de vista matemático. El quiso representar las fuerzas de interacción electromagnética como fuerzas mecánicas, determinadas por las tensiones y presiones en el éter. Luego pasó a la enunciación fenomenológica de la interacción, caracterizando el estado del medio con ayuda de los vectores E , D , H , B , a los que, sin embargo, no se les da ninguna interpretación mecánica. Hay que señalar que Maxwell no excluía la posibilidad de la interpretación mecánica de las ecuaciones fenomenológicas. En 1864 el científico formuló las ecuaciones del campo electromagnético (las ecuaciones de Maxwell). Posteriormente se aclaró que no se podía aplicar al éter propiedades mecánicas y hablar sobre el movimiento con relación al éter. *Se esfumó la esperanza de la interpretación mecánica de las interacciones electromagnéticas. Sin embargo, la idea de la formulación local de la interacción y la necesidad de que exista en el espacio un campo que efectúe dicha interacción, se conservaron. El campo se convierte en una esencia primordial y se caracteriza por magnitudes que no pueden interpretarse en los márgenes de las representaciones mecánicas.* Esta afirmación en una forma más precisa fue enunciada en 1889 por Hertz (1857—1894) que descubrió experimentalmente las ondas electromagnéticas y formuló las ecuaciones de Maxwell para el vacío en la forma actual. Está claro que el campo existe en el espacio y el tiempo a la par con la materia en forma de átomos, moléculas, etc.

Por lo tanto, el campo es también una forma de la materia que posee características, propias para cada materia, a saber: impulso, energía, etc.

Campo eléctrico. Designemos: F_{12} , la fuerza que ejerce la carga q_1 sobre la carga q_2 ; F_{21} , la fuerza por parte de la carga q_2 sobre la carga q_1 ; r_{12} y r_{21} , los vectores, trazados desde el punto de estancia de la primera carga hacia el punto donde está la segunda carga y viceversa. Conforme con ello, escribamos la ley de Coulomb en la forma:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \frac{r_{12}}{r_{12}} q_2, \quad (a)$$

$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{21}^2} \frac{r_{21}}{r_{21}} q_1. \quad (b) \quad (6.5)$$

Estas dos fórmulas son diferentes por su contenido físico y determinan las fuerzas que actúan sobre la segunda carga y la primera en el punto de su estancia, es decir, describen las fuerzas en distintos puntos espaciales. Pero *el mecanismo de aparición de estas fuerzas es igual. Las cargas q_1 y q_2 crean un campo eléctrico en el espacio que los rodea, el cual se caracteriza por la intensidad E . La intensidad del campo es un concepto local y tiene un significado determinado en cada punto del espacio. Se llama intensidad del campo eléctrico en un punto la magnitud, igual a la relación entre la fuerza con que el campo actúa sobre una carga positiva, colocada en el punto dado del campo, y la carga. En cambio, de aquí no se desprende que para medir la intensidad del campo es suficiente colocar una carga positiva en cierto punto del espacio y medir la fuerza que actúa sobre ella.*

En muchos casos la introducción de la carga en el punto dado va acompañada de una intensa variación de la intensidad del campo eléctrico en el punto y el resultado de la medición suele ser alterado (véase el § 7).

Teniendo en cuenta lo dicho, las fórmulas (6.5) pueden representarse como

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \frac{r_{12}}{r_{12}}, \quad (a) \quad F_{12} = F_2 = q_2 E_2, \quad (b) \quad (6.6)$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{21}^2} \frac{r_{21}}{r_{21}}, \quad (a) \quad F_{21} = F_1 = q_1 E_1, \quad (b) \quad (6.7)$$

La fórmula (6.6a) describe la intensidad del campo eléctrico, formado por la carga puntual q_1 , mientras que la fórmula (6.6b) caracteriza la fuerza con la que el campo de intensidad E_2 actúa sobre la carga que se encuentra en un punto del campo. El mismo sentido tienen las fórmulas (6.7).

Así pues, la acción de una carga sobre la otra se divide en dos etapas:

1. La carga puntual q crea en el espacio que lo rodea un campo eléctrico, cuya intensidad

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{r}{r}, \quad (6.8)$$

donde r es el radio vector, trazado desde el punto de estancia de la carga hasta el punto donde se determina la intensidad (fig. 19).

2. La carga puntual q que se halla en el punto del campo con intensidad E , se somete por parte de este campo a la acción de la fuerza

$$F = qE.$$

(6.9)

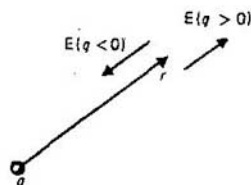


Fig. 19
Interpretación de la ley de Coulomb respecto al campo

La enunciación de la segunda etapa de interacción, expresada por la fórmula (6.9), es local: la intensidad E , la carga q y la fuerza F se determinan en un mismo punto. La formulación de la primera etapa de interacción, expresada por la fórmula (6.8), no es local: la intensidad E en el primer miembro de (6.8) depende no sólo del punto donde se define, sino también del punto de estancia de la fuente del campo. Con otras palabras, (6.8) es la relación entre las magnitudes que se refieren a diversos puntos del espacio, es decir, tiene carácter no local. La enunciación local se da en el § 13.

Sobre los límites de aplicación de la concepción clásica de campo. Antes se supuso que la intensidad E varía continuamente y lo suficiente suave en el espacio y el tiempo. En cambio, en los márgenes de las representaciones cuánticas la fuerza de interacción entre los cuerpos con carga surge como consecuencia del intercambio de fotones. De aquí se desprende el carácter discreto de la interacción. Pero eso significa que la intensidad E no puede interpretarse como una magnitud continua que varía suavemente en el espacio y el tiempo. Se pregunta: ¿para qué condiciones puede considerarse continua a pesar de todo? Está claro que eso puede realizarse sólo a condición de que la acción de cuantos aislados es pequeña en comparación con la acción total, o sea, cuando los fenómenos en cuestión dependen de la acción simultánea de una cantidad inmensa de cuantos. Semejante situación se encuentra con mucha frecuencia. Por ejemplo, una bombilla de 200 W de potencia a la distancia de 2 m da un flujo de fotones de luz visible aproximadamente igual a 10^{15} fotones/($\text{cm}^2 \cdot \text{s}$). El área de la pupila del ojo es mucho menor que un cm^2 , sin embargo, la cantidad de fotones que llega al ojo en el transcurso de 1 s es muy grande. Por esta razón, el flujo de fotones se percibe como continuo. En cambio, disminuyendo la intensidad luminosa, puede lograrse una posición en la que al ojo llegue sólo una cantidad pequeña de fotones por segundo. En condiciones especiales el ojo puede percibir fotones aislados en forma de relámpagos separados. En este caso ya es imposible utilizar el concepto de flujo continuo de luz. Las estaciones de radio de la gama de ondas ultracortas en la URSS funcionan en frecuencias de 60 . . . 70 MHz. A la distancia de 10 km semejante estación de 200 W de potencia emite un flujo de unos $4 \cdot 10^{14}$ cuantos/($\text{cm}^2 \cdot \text{s}$), lo que corresponde a la densidad de 10^4 cuantos/ cm^3 . Por lo tanto, en un volumen igual al cubo de la longitud de onda ($\approx 64 \text{ m}^3$) se encuentran más de 10^{11} cuantos de emisión. En estas condiciones es también difícil fijar el campo de un cuanto aislado. En aquellos casos cuando la acción de los cuantos aislados no se manifiesta, puede utilizarse la descripción clásica. Ello es posible si la cantidad de cuantos es grande, mientras que el impulso de un cuanto es pequeño en comparación con el impulso del sistema material. Por ejemplo, la radiación de un átomo aislado no se puede examinar desde el punto de vista clásico, puesto que la cantidad de fotones antes de la radiación era nula y después de ella, existe sólo un fotón.

Si se cumple estrictamente la ley de Coulomb, la carga de la esfera conductora se distribuye por su superficie. Al desviarse de la ley de Coulomb, la carga existe también en el volumen de la esfera.

La representación de la interacción continua clásica es válida sólo a condición de que la acción de cuantos (fotones) aislados es pequeña en comparación con la acción total, es decir, cuando el fenómeno en cuestión depende de la participación simultánea de una inmensa cantidad de cuantos y cuando la acción de cuantos aislados no se manifiesta.

La definición de la intensidad del campo eléctrico no está ligada con la pequeñez de las cargas de prueba.

¿En qué ley física se funda el método de Cavendish para verificar la ley de Coulomb? ¿Cuál es la precisión de la verificación de la ley de Coulomb usando el método de Cavendish, pero con procedimientos modernos? ¿Para qué distancias son válidas estas pruebas?

¿En qué consiste el método de verificación de la ley de Coulomb para distancias grandes? ¿Para qué distancias existen resultados directos de la verificación? ¿Cuáles son?

¿En qué se basa la verificación de la validez de la ley de Coulomb para distancias muy pequeñas? ¿Cuáles son los resultados de la prueba?

¿En qué se diferencian los conceptos de campo electromagnético y de éter?

§ 7. Principio de superposición

Se analiza el contenido físico del principio de superposición y se discuten los límites de su aplicación.

Principio de superposición para la interacción de las cargas puntuales. Las fuerzas de interacción de dos cargas aisladas puntuales se definen mediante la ley de Coulomb (6.1). ¿Cambia esta fuerza si en las proximidades de dos cargas en interacción existe otra carga puntual más? Para que el interrogatorio tenga un sentido unívoco es necesario precisar lo que se comprende por fuerzas de interacción de dos cargas en presencia de una tercera (se supone que todas las cargas son inmóviles).

Si por fuerzas de interacción se comprende la fuerza dirigida a lo largo de la línea que une las cargas en interacción, estas fuerzas dependen de la tercera carga y, además, no satisfacen la demanda de la igualdad de la acción y reacción. La dificultad consiste en que la fuerza que actúa sobre la carga, puede medirse, pero no está claro cómo diferenciar la aportación de distintas cargas en dicha fuerza. Sin embargo, la tercera carga puntual no se diferencia en nada de las dos cargas en cuestión y todas las tres son equitativas. Por esta razón, puede cambiarse el planteamiento de la pregunta. Existen tres cargas en interacción. Las fuerzas que actúan sobre cada una de las cargas son magnitudes que se miden experimentalmente. La ley de adición de las fuerzas según la regla del paralelogramo se conoce. Se pregunta: ¿es la fuerza a medir, que actúa sobre cada una de las cargas, igual a la suma de las fuerzas que ejercen las otras dos cargas si estas fuerzas se calculan conforme a la ley de Coulomb (6.1)? Señalemos que aquí se trata de la medición experimental de la fuerza y el cálculo matemático de las fuerzas según la ley (6.1) y su adición, aplicando la regla del paralelogramo. Semejante planteamiento tiene un sentido bien determinado y su res-

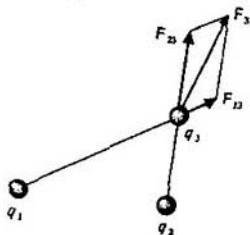


Fig. 20
Principio de superposición

puesta puede obtenerse del experimento. Las investigaciones mostraron que *la fuerza a medir es siempre igual a la suma de las fuerzas calculadas por la ley de Coulomb, que ejercen dos cargas*. Ese resultado experimental se expresa en forma de las siguientes afirmaciones:

a) *la fuerza de interacción de dos cargas puntuales no varía, en presencia de otras cargas;*

b) *la fuerza que actúa sobre una carga puntual por parte de dos cargas puntuales es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre ella por parte de cada una de las cargas puntuales en ausencia de la otra.*

Esta afirmación se denomina **principio de superposición** y refleja un hecho experimental que forma uno de los cimientos de la teoría de la electricidad. Este es tan importante en la teoría de la electricidad como, por ejemplo, la ley de Coulomb. La generalización para el caso de muchas partículas es evidente.

Enunciación con relación al campo del principio de superposición. Examinemos la fuerza F_3 , que actúa sobre la carga puntual q_3 , habiendo otras dos cargas q_1 y q_2 (fig. 20). Designemos por F_{13} y F_{23} las fuerzas que actúan sobre la carga q_3 por parte de las cargas q_1 y q_2 cuando no existen las cargas q_2 y q_1 . El principio de superposición afirma que

$$F_3 = F_{13} + F_{23}. \quad (7.1)$$

Designemos por E_{13} y E_{23} las intensidades del campo eléctrico, creado por las cargas q_1 y q_2 en el punto con carga q_3 en ausencia de la carga q_2 o q_1 , respectivamente. Por la fórmula (6.9) tenemos:

$$F_{13} = q_3 E_{13}, \quad F_{23} = q_3 E_{23}. \quad (7.2)$$

Escribamos la expresión (7.1) de nuevo:

$$F_3 = q_3 E_{13} + q_3 E_{23}. \quad (7.3)$$

La fuerza en el campo eléctrico surge como consecuencia de la acción del campo sobre la carga. Por lo tanto, la fuerza F_3 en (7.3) testimonia la presencia de un campo eléctrico en el punto donde se halla la carga q_3 . Este campo posee una intensidad E_3 que determina la mencionada fuerza [véase (6.9)], o sea,

$$F_3 = q_3 E_3. \quad (7.4)$$

Sustituyendo (7.4) en (7.3) y reduciendo la expresión obtenida por el factor común q_3 , hallamos

$$E_3 = E_{13} + E_{23}. \quad (7.5)$$

La igualdad (7.5) es la enunciación respecto al campo del principio de superposición: *la intensidad del campo de dos cargas puntuales es igual a la suma*

de las intensidades que crea cada una de las cargas en ausencia de la otra. Dicha enunciación es local, ya que todas las magnitudes se refieren a un punto del espacio.

La generalización para el caso de muchas cargas es evidente:

$$E = \sum E_i \quad (7.6)$$

es decir, la intensidad del campo de cualquier número de cargas puntuales es igual a la suma de intensidades de los campos, creados por cada una de las cargas puntuales en ausencia de las demás.

Cargas de prueba. De la definición de la intensidad del campo eléctrico se deduce que su medición se reduce a la medición de la fuerza que actúa sobre la carga puntual. Esta carga puntual, con cuya ayuda se determina la intensidad, se denomina carga de prueba. Surge la pregunta sobre el valor de la carga de prueba. Si se supone que todas las cargas puntuales, cuya intensidad sumaria del campo se calcula, están fijas en los puntos del espacio, la carga de prueba puede ser cualquiera. Pero sin embargo, si las cargas puntuales no están fijas en el espacio, la carga de prueba, actuando sobre estas cargas, puede desplazarlas a otros puntos del espacio. En este caso se hallará no la intensidad que había en el punto de estancia de la carga de prueba para la posición inicial de todas las cargas, sino otra intensidad que surge como consecuencia del desplazamiento de las cargas a una nueva posición, influenciadas por la carga de prueba. Para evitar eso hay que disminuir la influencia de la carga de prueba sobre las cargas que crean el campo a investigar. Por esta razón, la carga de prueba debe ser suficientemente pequeña. En cambio, es necesario señalar que esta demanda no tiene relación alguna con el principio de superposición, solo asegura la observación de las condiciones para las cuales la intensidad del campo a investigar no varía esencialmente al medirla.

Límites de aplicación del principio de superposición. Como testimonio experimental de la validez del principio de superposición sirve la concordancia entre las deducciones obtenidas mediante dicho principio y los resultados de los ensayos. Se ha establecido que el principio de superposición se observa incluso hasta intensidades muy elevadas de los campos. Toda la práctica ingenieril confirma bien su validez para las intensidades de los campos de varios millones de voltios por metro (electrotécnica, aceleradores, descargas de alta tensión, etc.). En los átomos y núcleos existen intensidades de campo mucho mayores. En las orbitales de los electrones en los átomos son iguales a $E \approx 10^{11} \dots 10^{17}$ V/m. Las diferencias de los niveles energéticos de los átomos, calculadas conforme al principio de superposición, se confirman experimentalmente con un grado elevado de exactitud (el error relativo es no más de 10^{-6}). Esto significa que a intensidades de los campos interatómicos, el principio de superposición se observa también con gran precisión. En la superficie de los núcleos pesados las intensidades alcanzan valores enormes ($E \approx 10^{22}$ V/m). Los datos experimentales testimonian que para estas inmensas intensidades se cumple también el principio de superposición. Sin embargo, en este caso se ponen al descubierto otros

efectos, a saber: para la intensidad de unos 10^{20} V/m surge la polarización del vacío como consecuencia de la aparición de los pares electrón-positrón. Ello conduce a una no linealidad cuántica de interacción.

La fuerza de interacción de dos cargas puntuales no varía en presencia de otras cargas, mientras que la fuerza de interacción de los cuerpos cargados, en general, cambia en presencia de otros cuerpos con carga.

La carga de prueba se supone ser suficientemente pequeña. Pero esta demanda no tiene nada que ver con el principio de superposición que permanece siendo válido para cualesquiera valores de la carga de prueba.

¿Por qué la fuerza de interacción de dos cuerpos cargados cambia, en general, en presencia de un tercer cuerpo con carga?

¿Infringe esto el principio de superposición?

¿Qué hechos experimentales permiten juzgar sobre la validez del principio de superposición incluso hasta intensidades muy elevadas del campo eléctrico?

§ 8. Campo magnético

Se analiza la naturaleza relativista del campo magnético. Aplicando las transformaciones relativistas, de la ley de Coulomb se deduce la ley de interacción de conductores paralelos.

Necesidad de la aparición de un campo magnético durante el movimiento de las cargas. La interacción de las cargas inmóviles puntuales se describe totalmente por la ley de Coulomb. En cambio, *la ley de Coulomb resulta ser insuficiente para analizar la interacción de las cargas en movimiento*, con la particularidad de que semejante deducción se desprende no de las peculiaridades concretas de la interacción de Coulomb, sino que se determina por las propiedades relativistas del espacio y el tiempo y las ecuaciones relativistas del movimiento.

Esta afirmación se deduce, en principio, de las siguientes consideraciones. La ecuación relativista del movimiento

$$dp/dt = F \quad (8.1)$$

es invariante y tiene la misma forma en todos los sistemas inerciales de coordenadas, en particular, en el sistema de coordenadas K' que se mueve de modo uniforme y rectilíneo respecto a K :

$$dp'/dt' = F'. \quad (8.2)$$

Las letras con tildes señalan las magnitudes, referentes a K' . Los primeros miembros de estas ecuaciones están compuestos de magnitudes puramente mecánicas, cuyo comportamiento al pasar de un sistema de coordenadas a otro, se conoce. Por lo tanto, mediante cierta fórmula pueden relacionarse los primeros miembros de las ecuaciones (8.1) y (8.2). Pero entonces resultan enlazadas entre sí las fuerzas que se encuentran en el segundo miembro de estas ecuaciones. La exigencia de una invariación relativista de la ecuación de movimiento de-

termina la existencia de semejante enlace. Dado que en los primeros miembros de las ecuaciones (8.1) y (8.2) participan las velocidades, sacamos la conclusión de que la fuerza de interacción de las cargas en movimiento depende de la velocidad y no se reduce a la fuerza de Coulomb. De esta manera se demuestra que la interacción de las cargas en movimiento se efectúa no sólo por la fuerza coulombiana, sino que también por una fuerza de otra naturaleza, denominada magnética. La existencia de la fuerza magnética se aclara del siguiente ejemplo de interacción de las cargas.

Interacción entre una carga puntual y un hilo infinito recto con carga. Claro está que la interacción más sencilla de dos cargas puntuales que están en reposo en el sistema de coordenadas K' , es la de Coulomb. Sin embargo, en otro sistema de coordenadas K , que se mueve respecto a K' , estas cargas se mueven con las mismas velocidades y su interacción se complica, ya que debido al movimiento de las cargas, el campo eléctrico en cada punto del espacio es variable. Por eso es conveniente elegir una situación que sea lo suficiente sencilla tanto en el sistema de coordenadas K' , donde las cargas están en reposo, como también en el sistema de coordenadas K , en el que ellas se mueven. La interacción entre la carga puntual y un hilo recto infinito con carga resulta ser relativamente sencilla.

En el sistema de coordenadas K' el hilo está en reposo y se orienta a lo largo del eje X' (fig. 21). La carga puntual q está situada en el eje Y' a la distancia y'_0 del hilo. Designemos por S'_0 el área de la sección transversal del hilo, considerando sus dimensiones lineales muy pequeñas en comparación con la distancia hasta la carga puntual. Si la densidad volumétrica de la carga es ρ' , en el elemento de longitud dx' del hilo se encuentra una carga $dq' = \rho' S'_0 dx'$. Para mayor precisión suponemos que la carga del hilo y la puntual son positivas. Entonces las fuerzas que actúan sobre la carga puntual por parte de la carga en el elemento del hilo, están orientadas así como se muestra en la fig. 21. Según la ley de Coulomb

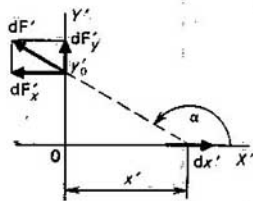


Fig. 21
Para el cálculo de la fuerza de interacción entre una carga puntual y un hilo cargado recto infinito

$$\begin{aligned} dF'_x &= \frac{q\rho' S'_0 dx'}{4\pi\epsilon_0 (y_0'^2 + x'^2)} \cos \alpha, \\ dF'_y &= \frac{q\rho' S'_0 dx'}{4\pi\epsilon_0 (y_0'^2 + x'^2)} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Tomando en consideración que $\cos \alpha = -x' / (y_0'^2 + x'^2)^{1/2}$, $\sin \alpha = y_0' / (y_0'^2 + x'^2)^{1/2}$, para las proyecciones de la fuerza obtenemos

$$\begin{aligned} F'_x &= -\frac{q\rho' S'_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x' dx'}{(y_0'^2 + x'^2)^{3/2}}, \\ F'_y &= \frac{q\rho' S'_0 y_0'}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(y_0'^2 + x'^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

La primera integral es nula, ya que en el integrando se encuentra una función impar, mientras que para calcular la segunda integral es necesario sustituir las variables: $x' = -y'_0 \cot \alpha$, $dx' = y'_0 d\alpha / \sin^2 \alpha$, $1 + \cot^2 \alpha = 1/\sin^2 \alpha$. Entonces

$$F'_x = 0, \quad F'_y = \frac{q\rho' S'_0}{4\pi\epsilon_0 y'_0} \int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha = \frac{q\rho' S'_0}{2\pi\epsilon_0 y'_0}. \quad (8.5)$$

Además, $F'_z = 0$. Tomando en consideración que en el momento dado la carga está en reposo y designando por m_0 la masa del portador de la carga, obtenemos para la aceleración de la carga en el sistema K' las siguientes expresiones:

$$a'_x = 0, \quad a'_y = F'_y/m_0 = q\rho' S'_0 / (2\pi\epsilon_0 y'_0 m_0), \quad a'_z = 0. \quad (8.6)$$

Examinemos ahora esta misma interacción en el sistema de coordenadas K que se mueve respecto al sistema K' con una velocidad v en dirección de los valores negativos del eje X' . Orientemos el eje X a lo largo del hilo de tal manera que su dirección positiva coincida con la dirección positiva del eje X' y consideremos que el mencionado sistema es inmóvil. En el sistema de coordenadas K el sistema K' , el hilo y la carga se mueven en dirección de los valores positivos del eje X con una velocidad v .

Calculemos la fuerza de repulsión coulombiana que ejerce el hilo en movimiento sobre la carga que se desplaza. Dado que la carga es invariante, la carga puntual q es invariable. Debido a la reducción de las escalas en movimiento, cada metro de longitud del hilo que se desplaza posee mayor cantidad de cargas que un metro de longitud del hilo inmóvil, o sea, la densidad de las cargas del hilo en movimiento es mayor que del inmóvil. En los cálculos anteriores la densidad de las cargas del hilo inmóvil se designó por ρ' . Por eso la densidad de las cargas en el hilo en movimiento en el sistema K es igual a

$$\rho = \rho' / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (8.7)$$

donde $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ tiene en cuenta la variación relativista de las escalas en movimiento. Todos los cálculos posteriores son totalmente análogos a los que se han hecho para el hilo en reposo. Dado que las longitudes permanecen constantes en dirección perpendicular a la velocidad v , el área de la sección transversal del hilo en movimiento y la distancia entre el hilo y la carga puntual quedan invariantes. Por esta razón, en lugar de (8.5) obtenemos:

$$f_x = 0, \quad f_y = q\rho S_0 / (2\pi\epsilon_0 y_0), \quad f_z = 0, \quad (8.8)$$

con la particularidad de que aquí la fuerza coulombiana se denota por una letra minúscula para diferenciarla de la fuerza total que actúa sobre la carga y no se reduce a la fuerza de Coulomb. Sustituyendo (8.7) en la segunda ecuación de (8.8), hallamos

$$f_y = q\rho' S'_0 / (2\pi\epsilon_0 y'_0) \sqrt{1 - v^2/c^2} = q\rho' S'_0 / (2\pi\epsilon_0 y'_0) \sqrt{1 - v^2/c^2} = F'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (8.9)$$

donde $S_0 = S'_0$, $y_0 = y'_0$ y se toma en consideración la fórmula (8.5).

Hallemos la fuerza total que actúa sobre la carga puntual en el sistema de coordenadas K . Debido a la simetría, la fuerza está dirigida a lo largo del eje Y y relacionada con el impulso mediante la ecuación del movimiento:

$$F_y = dp_y/dt. \quad (8.10)$$

En el sistema de coordenadas K' este enlace tiene el aspecto

$$F'_y = dp'_y/dt'. \quad (8.11)$$

Según las fórmulas de transformación de la teoría de la relatividad

$$p'_y = p_y, \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2} \quad (\beta = v/c), \quad (8.12)$$

donde u'_x es la componente de la velocidad de la partícula en el sistema de coordenadas K' , con la particularidad de que en el caso dado $u'_x = 0$. Teniendo en cuenta (8.12), de la ecuación (8.10) hallamos

$$F_y = dp_y/dt = (dp'_y/dt')(dt'/dt) = F'_y \sqrt{1-\beta^2}. \quad (8.13)$$

La comparación de (8.13) con (8.9) muestra que

$$F_y = (1 - \beta^2) f_y, \quad (8.14)$$

es decir, la fuerza coulombiana de repulsión f_y es mayor que la fuerza F_y que ejerce el hilo en movimiento sobre la carga que se desplaza. Por lo tanto, además de la fuerza coulombiana de repulsión, sobre la carga actúa otra fuerza más, diferente de la mencionada, que en este caso es la fuerza de atracción. Esta surge como consecuencia del movimiento de las cargas y se denomina fuerza magnética. Esta forma de interacción respecto al campo para la fuerza magnética se enuncia de la misma manera que la interpretación de la interacción eléctrica, respecto al campo: la carga en movimiento crea un campo magnético en el espacio que la rodea; el campo magnético ejerce una fuerza sobre la carga en movimiento.

Naturaleza relativista del campo magnético. Examinando (8.14) se ve que la fuerza magnética es igual a

$$F_{ym} = F_y - f_y = -v^2 f_y / c^2. \quad (8.15)$$

El signo menos significa que la fuerza está orientada hacia el hilo cargado, o sea, es una fuerza de atracción. Como se desprende de (8.15), esta fuerza se describe por una magnitud de segundo orden de pequeñez respecto a v/c con relación a la interacción de Coulomb. Por lo tanto, la interacción magnética es comparable por su magnitud con la eléctrica sólo cuando las partículas con carga poseen velocidades suficientemente grandes. No obstante, es notoria también para las pequeñas velocidades de las cargas si la interacción eléctrica coulombiana no se manifiesta por ciertas causas. Semejante situación tiene lugar, por ejemplo, habiendo corriente eléctrica en el conductor. En este caso, el campo eléctrico de las cargas en movimiento se neutraliza por el campo eléctrico de las cargas del conductor que poseen signo contrario, es decir, el campo se apantalla. En definitiva, queda sólo la fuerza magnética, infinitamente pequeña en compa-

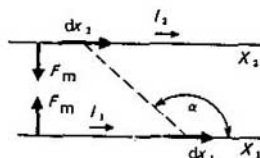


Fig. 22
Interacción de dos corrientes paralelas

ración con la fuerza coulombiana si ella no estuviese apantallada. Por ejemplo, para las velocidades típicas de deriva de los electrones en un conductor metálico (véase el § 31), la fuerza magnética es más de 10^{20} veces inferior a la de Coulomb, sin embargo, es lo suficientemente grande y se manifiesta como cierta interacción de los conductores con la corriente. Por esta razón, *el efecto puramente relativista de la aparición del campo magnético se revela para cualesquiera velocidades, no sólo para las muy grandes.*

Fuerzas de interacción de los conductores paralelos con corriente. Imaginemos que las cargas se mueven en un hilo cilíndrico fino que en total es eléctricamente neutro. Entonces las fuerzas coulombianas por parte de las cargas en movimiento, que forman la corriente eléctrica, se apantallan por las cargas de signos contrarios del hilo, de esta manera, fuera del hilo actúa sólo la fuerza magnética (8.15). Por lo tanto, alrededor del conductor con corriente se manifiesta sólo la acción de la fuerza magnética sobre las cargas en movimiento que forman la corriente eléctrica. Así, surge una interacción magnética de las corrientes. Ello ocurre como resultado del análisis relativista de la interacción de las cargas en movimiento. En cambio, la interacción magnética de las corrientes fue descubierta mucho antes de crearse la teoría de la relatividad.

Supongamos que las cargas en movimiento forman una corriente lineal, que pasa por un conductor, paralela a la corriente inicial, que fluye a lo largo del eje X y situada a la distancia r de él (fig. 22). Las magnitudes, referentes a la corriente inicial, las designaremos por los índices 1 y las pertenecientes a la corriente lineal, por los índices 2. La corriente I_1 ejerce una fuerza magnética de atracción F_{mag} (8.15) sobre cada carga de la corriente I_2 . Dicha fuerza puede representarse, teniendo en cuenta (8.8), como

$$F_{my} = -\frac{v^2}{c^2} \frac{q\rho_1 S_{01}}{2\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} qv \frac{\rho_1 v S_{01}}{r} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} qv \frac{I_1}{r}, \quad (8.16)$$

donde $\rho_1 v S_{01} = I_1$ [véase (4.11) y (4.14)], $r = y_0$ [véase (8.8)].

Designemos la concentración lineal de las cargas en el segundo conductor por n_2 . En el elemento de longitud dx_2 , se encuentran $n_2 dx_2$ cargas sobre las cuales actúa una fuerza magnética

$$dF_m = F_{my} n_2 dx_2. \quad (8.17)$$

Sustituyendo la expresión (8.16) en (8.17), obtenemos

$$dF_m = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I_1 q v n_2 dx_2}{r}, \quad (8.18)$$

donde $q v n_2 = I_2$. Además, en la teoría del magnetismo en lugar de la constante ϵ_0 se acostumbra utilizar $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$, que es la constante magnética. Enton-

cés [véase (8.18)]

$$dF_m = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} dx_2. \quad (8.19)$$

Ella caracteriza la interacción de las corrientes rectilíneas en conductores paralelos infinitos. Es necesario señalar que la condición para aplicar (8.19) es la pequeñez de las dimensiones transversales de los conductores en comparación con la distancia entre ellos (conductores finos y corrientes lineales).

Unidad de la intensidad de corriente. De la fórmula (8.19) se ve que a la longitud l_2 del conductor le corresponde la fuerza

$$F_{m1} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} l_2. \quad (8.20)$$

El signo menos indica que para las mismas direcciones de I_1 e I_2 entre los conductores actúa la fuerza de atracción. Pero si las orientaciones de las corrientes I_1 e I_2 son distintas, surge la fuerza de repulsión.

A base de (8.20) se da la definición de unidad de intensidad de corriente: *amperio es la intensidad de la corriente continua que, manteniéndose en dos conductores rectilíneos paralelos de longitud infinita y de sección circular ínfima, situados a la distancia de 1 m uno de otro en el vacío, provoca entre estos conductores a aparición de una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ N por un metro de longitud.* Suponiendo en (8.20) $I_1 = I_2 = 1$ A, $r = 1$ m, $l_2 = 1$ m, $F_{m1} = -2 \cdot 10^{-7}$ N, hallamos

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2. \quad (8.21)$$

Como ya se señaló [véase (8.19)],

$$\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2, \quad (8.22)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Esta relación refleja el enlace profundo que existe entre los campos magnético y eléctrico y se caracteriza por la constante física fundamental c , igual a la velocidad de la luz. La naturaleza de este enlace se aclarará al estudiar las ondas electromagnéticas (véase el capítulo 9).

Campo magnético. Por analogía completa con la interpretación respecto al campo de la interacción coulombiana (véase el § 6), el proceso de aparición de la fuerza (8.18) puede formularse de nuevo en dos etapas: la generación del campo magnético por la corriente I_1 en el espacio que rodea esta corriente y la acción del campo magnético sobre la carga en movimiento o la corriente. En cambio las leyes de aparición del campo magnético y de la acción de la fuerza resultan ser más complicadas que en la ley de Coulomb, ya que dependen de la orientación mutua de la corriente y la velocidad de la carga. Además, la corriente I_1 , que fluye por un conductor infinitamente largo, no vale para el papel de objeto elemental, la interacción de la carga puntual con el cual puede considerarse como acción elemental. Por esta razón, es necesario volver a analizar la acción de las fuerzas sobre las cargas puntuales en movimiento o sobre los elementos de la corriente.

La ley de Coulomb es insuficiente para describir la interacción de las cargas en movimiento. Esta deducción no se desprende de las peculiaridades concretas de la interacción cou-

lombiana, sino que se determina por las propiedades relativistas del espacio y el tiempo, asimismo por la ecuación relativista del movimiento.

La interacción magnética es comparable con la eléctrica sólo a velocidades bastante grandes de las partículas cargadas. No obstante, puede manifestarse a velocidades muy pequeñas si por causa alguna falta la interacción coulombiana.

§ 9. Fuerza de Lorentz. Fuerza de Ampère

Se estudian las propiedades relativistas de las fuerzas de Lorentz y Ampère.

Transformación de las fuerzas. En el § 8, en un ejemplo particular, se mostró de qué manera, partiendo de la suposición sobre la invariación relativista de la ecuación del movimiento, puede obtenerse la ley de transformación de la fuerza al pasar de un sistema de coordenadas a otro. Generalicemos este método para un caso más común.

Como siempre, el sistema de coordenadas K' se mueve respecto al sistema K en dirección de los valores positivos del eje X con una velocidad v . Examinemos el movimiento de un punto material bajo la acción de las fuerzas prefijadas. Sean las proyecciones de la fuerza en el sistema de coordenadas K' iguales a (F'_x, F'_y, F'_z) y en K , (F_x, F_y, F_z) . En el caso general las correspondientes proyecciones de estas fuerzas en diferentes sistemas de coordenadas no son iguales entre sí. Sin embargo, entre ellas existen unas relaciones bien determinadas que aseguran la invariación de las ecuaciones del movimiento, o sea, un mismo aspecto de éstas en distintos sistemas de coordenadas:

$$dp_x/dt = F_x, \quad dp_y/dt = F_y, \quad dp_z/dt = F_z, \quad (9.1)$$

$$dp'_x/dt' = F'_x, \quad dp'_y/dt' = F'_y, \quad dp'_z/dt' = F'_z. \quad (9.2)$$

Los primeros miembros de estas ecuaciones se transforman con ayuda de las fórmulas de la teoría de la relatividad para el impulso y las transformaciones de Lorentz:

$$p_x = \frac{p'_x + (E'/c^2)v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad (9.3)$$

donde $E' = m'c^2$ es la energía total del punto material, $\beta = v/c$. Las fórmulas (9.1) se reducen a la forma:

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt'} \left[\frac{p'_x + (E'/c^2)v}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] \frac{dt'}{dt} = F'_x + \frac{vu'_y/c^2}{1+vu'_x/c^2} F'_y + \frac{vu'_z/c^2}{1+vu'_x/c^2} F'_z, \quad (9.4)$$

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp'_y}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2} F'_y, \quad (9.5)$$

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = \frac{dp'_z}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2} F'_z, \quad (9.6)$$

donde (u'_x, u'_y, u'_z) son las velocidades en el sistema K' ; F'_x, F'_y, F'_z aparecieron en los segundos miembros de (9.4)–(9.6) como resultado de la utilización de las ecuaciones del movimiento (9.2). Para calcular (9.4) se tomó en consideración la fórmula

$$\frac{dE'}{dt'} = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}', \quad (9.7)$$

que expresa el principio de conservación de la energía en el sistema de coordenadas K' . Aplicando las fórmulas de adición de las velocidades

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2}. \quad (9.8)$$

Reduzquemos la expresión (9.4) a la forma

$$F_x = F'_x + \frac{vu_y/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_y + \frac{vu_z/c^2}{1-\beta^2} E'_z. \quad (9.9)$$

Para simplificar (9.5) y (9.6) es necesario tener una relación importante que se obtiene de las fórmulas para las transformaciones de las velocidades. Escribamos las transformaciones directas e inversas, por ejemplo, para la proyección y de la velocidad:

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1-\beta^2}}{1+vu_x/c^2}.$$

Al multiplicar término a término los primeros y segundos miembros de estas igualdades y reducir las igualdades obtenidas por el factor común $u_y u'_y$, hallamos

$$\left(1 + \frac{vu_x}{c^2}\right) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) = 1 - \beta^2. \quad (9.10)$$

Tomando en consideración (9.10), transformemos las fórmulas (9.5) y (9.6):

$$F_y = \frac{1 - vu_x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_y, \quad (9.11)$$

$$F_z = \frac{1 - vu_x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_z. \quad (9.12)$$

De esta manera, aplicando las fórmulas (9.9), (9.11) y (9.12), la fuerza en el sistema de coordenadas K se expresa mediante la fuerza en el sistema K' . Haciendo uso del principio de la relatividad, no es difícil escribir las fórmulas de transformación inversas.

Al deducir estas fórmulas, no se ha hecho ninguna clase de suposiciones acerca de las propiedades de las fuerzas iniciales: ellas pueden depender de las coordenadas, del tiempo y de la velocidad. Además, no se supuso que en alguno de los sistemas de coordenadas la partícula se encuentra en reposo, ya que no se puso restricción alguna a la velocidad de las partículas. Las fórmulas obtenidas muestran que *en la teoría relativista es indispensable la dependencia entre*

las fuerzas y la velocidad: incluso si en cierto sistema de coordenadas ésta está ausente (por ejemplo, F'_x, F'_y, F'_z), en otros sistemas de coordenadas dicha dependencia aparece obligatoriamente (en el caso dado F_x, F_y, F_z dependen de la velocidad u_x, u_y, u_z de la partícula).

Escribamos las fórmulas de transformación de las fuerzas en forma vectorial. Para eso introduzquemos las siguientes designaciones:

$$\Phi = (F'_x, F'_y/\sqrt{1-\beta^2}, F'_z/\sqrt{1-\beta^2}), \quad (9.13)$$

$$\mathbf{G} = [0, -(v/c^2)F'_z/\sqrt{1-\beta^2}, (v/c^2)F'_y/\sqrt{1-\beta^2}]. \quad (9.14)$$

No es difícil comprobar que con ayuda de (9.13) y (9.14) las fórmulas (9.9), (9.11) y (9.12) se escriben en forma de una igualdad vectorial

$$\mathbf{F} = \Phi + \mathbf{u} \times \mathbf{G}. \quad (9.15)$$

Dado que \mathbf{F} es un vector, todo el segundo miembro es vector. La igualdad es válida para \mathbf{u} arbitrarias. Por lo tanto, cada uno de los sumandos en el segundo miembro es vector. Puesto que $\mathbf{u} \times \mathbf{G}$ y \mathbf{u} son vectores, sacamos la conclusión de que \mathbf{G} también es vector. Así queda demostrado que las magnitudes Φ y \mathbf{G} , definidas por las igualdades (9.13) y (9.14), son vectores.

Fuerza de Lorentz. Supongamos que en el sistema de coordenadas K' existe sólo un campo eléctrico y, como consecuencia, la fuerza (F'_x, F'_y, F'_z) no depende de la velocidad \mathbf{u}' de la partícula. Entonces Φ [véase (9.13)] no depende de la velocidad \mathbf{u} de la partícula y es en sí una fuerza eléctrica en el sistema de coordenadas K .

De la misma manera deducimos que el vector \mathbf{G} tampoco depende de la velocidad \mathbf{u} de la partícula, sólo puede ser función de las coordenadas y el tiempo. Por eso, la dependencia entre la fuerza y la velocidad de la partícula está en el segundo sumando de (9.15):

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{u} \times \mathbf{G}. \quad (9.16)$$

Esto es precisamente la fuerza magnética, dirigida perpendicularmente a la velocidad de la partícula y al vector \mathbf{G} que representa el campo magnético que actúa sobre la partícula en movimiento.

Dado que Φ en la fórmula (9.15) representa la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga q , la intensidad

$$\mathbf{E} = \Phi/q. \quad (9.17)$$

De semejante manera, la inducción del campo magnético

$$\mathbf{B} = \mathbf{G}/q. \quad (9.18)$$

Teniendo en cuenta (9.17) y (9.18), la fórmula (9.15) para la fuerza que actúa sobre la carga puntual, se escribe en la forma

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}.} \quad (9.19)$$

Esta es la fuerza de Lorentz. El primer sumando del segundo miembro caracteriza la fuerza con la cual el campo eléctrico actúa sobre la carga puntual, y el segundo sumando, la fuerza que ejerce el campo magnético sobre dicha carga.

Inducción del campo magnético. Dado que la fuerza que ejerce el campo magnético sobre la carga en movimiento, se describe por el vector \mathbf{B} , es natural denominar este vector intensidad del campo magnético. Pero la denominación histórica de la intensidad del campo magnético le quedó a otro vector que se designa por \mathbf{H} . Este vector no es una característica respecto al campo del campo magnético, sólo tiene en cuenta las propiedades del medio material en que existe el campo. Por ejemplo, siendo \mathbf{H} dado, el vector \mathbf{B} y, por lo tanto, la fuerza que actúa sobre la carga en movimiento, pueden tener los más diversos valores (véase el § 38). El vector \mathbf{B} recibió el nombre de inducción del campo magnético.

Fuerza de Ampère. Supongamos que haya un conjunto de cargas puntuales, cuya concentración es igual a n . Entonces en el elemento de volumen dV hay $n dV$ cargas. Si todas ellas se mueven con una velocidad \mathbf{u} y sobre cada una de ellas actúa una fuerza magnética que se determina por el segundo sumando en (9.19), la fuerza que actúa sobre las cargas en el elemento de volumen dV es

$$dF_m = nq dV \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (9.20)$$

A continuación no se necesitará escribir el subíndice m que muestra que la fuerza es «magnética». La fuerza actúa sobre la carga de la misma manera, independientemente de su origen. Teniendo en cuenta que

$$nq = \rho, \quad nqu = \rho \mathbf{u} = \mathbf{j}, \quad (9.21)$$

donde ρ y \mathbf{j} son la densidad de las cargas y la densidad de la corriente [véase (4.4) y (4.11)], escribamos la fórmula (9.20) como

$$dF = \rho \mathbf{u} \times \mathbf{B} dV, \quad (9.22)$$

o bien

$$\boxed{dF = \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV}. \quad (9.23)$$

La relación (9.23) se denomina ley de Ampère y determina la fuerza que actúa sobre el elemento de la corriente eléctrica de densidad \mathbf{j} , incluido en el volumen dV .

Paso de las corrientes volumétricas a las lineales. La fórmula (9.23) puede presentarse en otra forma. Supongamos que la corriente eléctrica circula por un conductor fino, cuya área de la sección transversal es S_0 . Examinemos un elemento de longitud dl del conductor (fig. 23). El volumen de ese elemento es $dV = S_0 dl$. Por ser el área de la sección transversal del conductor pequeña, puede considerarse que la densidad \mathbf{j} de la corriente que atraviesa la sección

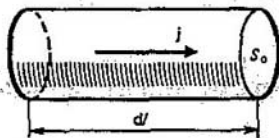


Fig. 23

Paso de las corrientes volumétricas a las lineales: $\mathbf{j} \cdot dV = \mathbf{j} \cdot S_0 \cdot dl = I \cdot dl$

del conductor es constante y, por lo tanto,

$$I = S_0 j. \quad (9.24)$$

Sea que la dirección de $d\mathbf{l}$ coincida con el vector de la densidad de corriente que fluye por esta sección del conductor. Entonces,

$$j dV = j S_0 dl = I dl. \quad (9.25)$$

En general, la corriente eléctrica en cada punto del espacio tiene diferente densidad y, por eso, se denomina **volumétrica**. La fuerza que actúa sobre semejante corriente en el elemento de volumen dV , se determina por la fórmula (9.23). Pero si la corriente pasa por conductores finos (en el límite, infinitamente fino en sentido físico), se denomina corriente **lineal**. En este caso se puede hablar sobre el elemento de corriente en la longitud dl del conductor. El paso de las fórmulas, deducidas para las corrientes volumétricas, a las de las corrientes lineales se da mediante la relación (9.25) que es conveniente representar como

$$j dV \rightleftharpoons I dl. \quad (9.26)$$

Las flechas indican que esta sustitución permite pasar tanto de las fórmulas para las corrientes volumétricas a las fórmulas para las corrientes lineales, como también viceversa.

En particular, la fórmula (9.23) para las corrientes lineales adquiere el aspecto

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (9.27)$$

La fórmula (9.27) refleja la idea principal de Ampère: reducir la interacción de los circuitos con corriente a la interacción de los elementos infinitamente pequeños de corrientes.

Campo magnético de la corriente rectilínea. Comparando las fórmulas (9.27) y (8.19), sacamos la conclusión de que *la corriente que fluye por un conductor rectilíneo ilimitado, crea un campo magnético, cuyas líneas de fuerza son circunferencias, concéntricas según la corriente y yacentes en los planos, perpendiculares a la corriente*. La inducción del campo magnético a la distancia r del centro del conductor con corriente se expresa mediante la fórmula

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}, \quad (9.28)$$

obtenida mediante la teoría de la relatividad partiendo de la ley de Coulomb y teniendo en cuenta el principio de superposición para la intensidad del campo eléctrico y la invariación de la carga. *Basándose en el principio de superposición para la intensidad del campo eléctrico, puede deducirse la validez también del principio de superposición para la inducción del campo magnético.*

Representemos el resultado de (9.28) en forma vectorial, haciendo coincidir el eje X del sistema cartesiano de coordenadas con la corriente rectilínea. Designando por $\mathbf{r} = i_x(x-x') + i_y y + i_z z$ el radio vector dirigido desde

el punto $(x', 0, 0)$ hacia el punto (x, y, z) y tomando en consideración el valor de la integral al calcular F'_y en (8.4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{(y_0'^2 + x'^2)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{[y_0'^2 + (x-x')^2]^{3/2}} = \frac{2}{y_0'^2}, \quad (9.29)$$

podemos presentar el resultado de (9.28) en forma de

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{i}_x \times \mathbf{r}}{r^3} dx', \quad (9.30)$$

donde se tuvo en cuenta que $|\mathbf{i}_x \times \mathbf{r}| = \sqrt{y^2 + z^2}$.

Las fórmulas de transformación de la fuerza se obtienen exigiendo que la ecuación relativista del movimiento sea invariante.

En la teoría relativista la dependencia entre las fuerzas y la velocidad es inevitable. Incluso si en cierto sistema de coordenadas la fuerza no depende de la velocidad, en otro sistema de coordenadas que se mueve respecto al primero, aparece la dependencia entre la fuerza y la velocidad.

Si las fórmulas de transformación de la fuerza se obtienen, exigiendo que la ecuación relativista del movimiento sea invariante, ¿no se podría de aquí sacar la conclusión de que la ley de la transformación de la fuerza es desde el punto de vista físico una afirmación sin contenido, simplemente una tautología (repetición inútil) de la exigencia de la invariación relativista?

¿Por qué directamente del aspecto de las fórmulas (9.13) y (9.14) no puede sacarse la conclusión de que Φ y \mathbf{G} son vectores?

§ 10. Ley de Biot y Savart

Se examinan la interpretación de campo de la interacción de las corrientes y la ley de Biot y Savart.

Interacción de los elementos de corriente. La ley de interacción de las corrientes fue descubierta experimentalmente mucho antes de crearse la teoría de la relatividad. Dicha ley es mucho más complicada que la ley de Coulomb que describe la interacción de las cargas puntuales inmóviles. Eso explica la participación activa de muchos científicos en su investigación. Contribuyeron esencialmente en el descubrimiento tales científicos eminentes como Biot (1774—1862), Savart (1791—1841), Ampère (1775—1836) y Laplace (1749—1827).

En 1820 H. Ch. Oersted (1777—1851) descubrió el efecto de la corriente eléctrica sobre una aguja imantada. En ese mismo año Biot y Savart enunciaron la ley para la fuerza dF que ejerce el elemento de corriente $I dl$ sobre el polo magnético, alejado a la distancia r del elemento de corriente:

$$dF \sim I dl \varphi(\alpha) f(r). \quad (10.1)$$

donde α es el ángulo que caracteriza la orientación mutua del elemento de corriente y del polo magnético. La función $\varphi(\alpha)$ fue descubierta experimentalmente poco tiempo después. La función $f(r)$ fue deducida teóricamente por Laplace en forma de

$$f(r) \sim 1/r^2. \quad (10.2)$$

De esta manera, los esfuerzos de Biot, Savart y Laplace dieron sus frutos: se halló la fórmula que describía la fuerza del efecto de la corriente sobre el polo magnético. En forma definitiva la ley de Biot—Savart—Laplace fue enunciada en 1826 como la fórmula para la fuerza que actúa sobre el polo magnético ya que aún no existía el concepto de intensidad del campo.

En 1820 Ampère descubrió la interacción de las corrientes: la atracción o repulsión de las corrientes paralelas. Demostró la equivalencia del solenoide y el imán permanente. Esto permitió plantear con precisión la tarea de la investigación: reducir todas las interacciones magnéticas a la interacción de los elementos de corriente y hallar la ley de su acción recíproca como la ley fundamental que desempeñe el mismo papel en el magnetismo como la ley de Coulomb en la electricidad. Por su enseñanza y afición Ampère era teórico y matemático. No obstante, al investigar la interacción de los elementos de corriente, efectuó trabajos experimentales muy minuciosos, construyendo varios dispositivos ingeniosos. Hasta hoy día se utiliza en las conferencias la máquina de Ampère para mostrar las fuerzas de interacción de los elementos de corriente y su dependencia de los ángulos. En definitiva, el científico descubrió la ley de interacción de los elementos de corriente. Desgraciadamente, ni en las publicaciones, ni en sus papeles no quedó la descripción de qué manera llegó al descubrimiento. Sin embargo, la fórmula de Ampère para la fuerza se diferencia de (10.3) por haber una diferencial total en el segundo miembro. Esta diferencia no tiene importancia si se calcula la fuerza de interacción de las corrientes cerradas, ya que la integral de la diferencial total respecto a un circuito cerrado es nula. Teniendo en cuenta que en los experimentos no se mide la fuerza de interacción de los elementos de corriente, sino la fuerza de interacción de corrientes cerradas, Ampère puede considerarse con toda razón el autor de la ley de la interacción magnética de las corrientes. La fórmula para la interacción de los elementos de corriente que se utiliza en la actualidad, fue obtenida en 1844 por H. G. Grassmann (1809—1877) y en las designaciones modernas tiene el siguiente aspecto

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 dl_2 \times (I_1 dl_1 \times r_{12})}{r_{12}^3}, \quad (10.3)$$

donde dF_{12} es la fuerza con que el elemento de corriente $I_1 dl_1$ actúa sobre el elemento de corriente $I_2 dl_2$; r_{12} , el radio vector, trazado desde el elemento de corriente $I_1 dl_1$ hacia $I_2 dl_2$ (fig. 24); la línea de rayas significa los circuitos cerrados, la interacción de los elementos de corriente en los cuales no se examina.

La fuerza dF_{21} con que el elemento de corriente $I_2 dl_2$ actúa sobre $I_1 dl_1$, se da, claro está, con la misma fórmula (10.3), pero sustituyendo el índice

2 por el 1:

$$dF_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \times (I_2 dl_2 \times r_{21})}{r_{21}^3} \quad (10.4)$$

En la figura 24 los versores n_{21} y n_{12} muestran la dirección de las fuerzas dF_{21} y dF_{12} , perpendiculares a los correspondientes elementos de corriente. En general, estas fuerzas no son colineales. Por lo tanto, la interacción de los elementos de corriente no satisface la tercera ley de Newton:

$$\boxed{dF_{21} + dF_{12} \neq 0.} \quad (10.5)$$

La fuerza que ejerce la corriente I_1 , que fluye por un circuito cerrado L_1 , sobre otro circuito cerrado L_2 con la corriente I_2 , es, basándose en (10.3), igual a

$$F_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{dl_2 \times (dl_1 \times r_{12})}{r_{12}^3} \quad (10.6)$$

Las intensidades de corrientes I_1 e I_2 se sacan del signo de la integral, puesto que son constantes en todos los puntos de los circuitos correspondientes L_1 y L_2 de integración. El mismo aspecto lo tiene la fórmula para la fuerza F_{21} que actúa sobre el circuito cerrado con la corriente I_1 . Para las fuerzas de interacción de los circuitos cerrados con corriente se cumple la tercera ley de Newton:

$$\boxed{F_{21} + F_{12} = 0.} \quad (10.7)$$

Sobre la verificación experimental de la ley de interacción. Hablando estrictamente, la ley de interacción de los elementos de corriente (10.3) no puede comprobarse por vía experimental, ya que no existen elementos de corriente aislados $I dl$, la fuerza de interacción entre los cuales podría medirse. Cada elemento de corriente es parte del circuito cerrado de corriente, por lo que puede verificarse experimentalmente sólo la ley de interacción de las corrientes cerradas (10.6). Sin embargo, de la validez de (10.6) no se desprende la de (10.4), porque a esta última se le puede añadir cualquier función que, al ser integrada por circuitos cerrados, después de sustituirla en (10.6) da cero.

La corriente eléctrica se determina por el movimiento de las cargas. Por eso la fórmula (10.4) expresa también la ley de la interacción magnética de las cargas en movimiento que es fácil obtener de ella y comprobar por vía experimental, ya que la fuerza de interacción entre las cargas en movimiento puede ser medida. Pero la verificación experimental más completa de esta fórmula es la concordancia entre la prueba y sus consecuencias que son muy numerosas.

Interpretación de la interacción respecto al campo. Por analogía total con la electrostática, la interacción de los elementos de corriente se representan en dos etapas: el elemento de corriente $I_1 dl_1$ en el punto donde se encuentra el

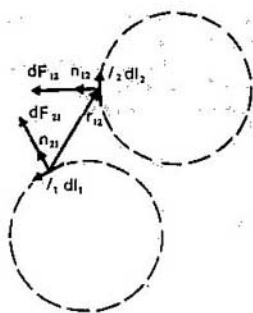


Fig. 24
Interacción de los elementos de corriente

elemento de corriente $I_2 dl_2$ crea un campo magnético, la interacción del elemento $I_2 dl_2$ con el cual conduce a la aparición de la fuerza dF_{12} . La acción del campo magnético con la inducción B sobre $I dl$ se describe mediante la fórmula (9.27). Teniéndola en cuenta, las dos etapas de interacción se definen así:

1) el elemento de corriente $I_1 dl_1$ crea en el punto en que se encuentra el elemento de corriente $I_2 dl_2$ un campo magnético, cuya inducción es

$$dB_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \times r_{12}}{r_{12}^3}; \quad (10.8)$$

2) sobre el elemento de corriente $I_2 dl_2$ que se halla en el punto con inducción magnética dB_{12} , actúa la fuerza

$$dF_{12} = I_2 dl_2 \times dB_{12}. \quad (10.9)$$

Ley de Biot y Savart. La relación (10.8), que explica la generación del campo magnético por la corriente, se denomina ley de Biot y Savart. Para la corriente cerrada I

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I dl \times r}{r^3}, \quad (10.10)$$

donde r es el radio vector, trazado desde el elemento de corriente $I dl$ hacia el punto en que se calcula la inducción B del campo magnético. La integración en (10.10) se efectúa por el circuito cerrado de corriente. Se supone que la corriente es lineal. El paso a las corrientes volumétricas se ejecuta conforme a la regla (9.26). Para las corrientes volumétricas la ley de Biot y Savart (10.10) toma el siguiente aspecto

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j \times r}{r^3} dV. \quad (10.11)$$

Aquí se integra por todas las zonas del espacio donde hay corrientes volumétricas que se caracterizan por la densidad de corriente j .

Fuerza de interacción de las corrientes rectilíneas. El elemento de corriente $I_1 dx_1$ (fig. 22) en el punto donde se encuentra el elemento $I_2 dx_2$ crea un campo con inducción dB_{12} , dirigida perpendicularmente al plano del dibujo hacia nosotros, y cuyo módulo es igual a

$$dB_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dx_1 \sin \alpha}{r_{12}^2}. \quad (10.12)$$

Por lo tanto, la inducción del campo magnético, creado por la corriente lineal I_1 que fluye por un conductor ilimitado en el punto donde se encuentra

el elemento de corriente $I_2 dx_2$ [véase (10.10)], se expresa por la fórmula

$$B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha dx_1}{r_{12}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1}{r}, \quad (10.13)$$

donde para calcular la integral se ha hecho uso de la misma sustitución que para obtener la fórmula (8.5). La fórmula (10.3) coincide con la (9.28).

La fórmula de Ampère conduce a la conclusión de que la fuerza dF_{12} en el campo magnético con inducción (10.13) actúa sobre el elemento de corriente $I_2 dl_2$ perpendicularmente al conductor con corriente I_2 y está orientada hacia la corriente I_1 , es decir, es una fuerza de atracción:

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1 I_2}{r} dz_2. \quad (10.14)$$

La fórmula (10.14) coincide con la (8.19).

La confirmación experimental de las fórmulas para el campo magnético, obtenidas mediante las transformaciones relativistas de las fórmulas para el campo eléctrico, sirve no sólo para demostrar la existencia del campo magnético, sino que atestigua su naturaleza relativista. Las fuerzas de interacción de los elementos de la corriente no satisfacen la tercera ley de Newton.

Las fuerzas de interacción de los circuitos cerrados con corriente satisfacen la tercera ley de Newton.

Dado que en forma aislada no existen elementos de corriente, ¿en qué sentido puede hablarse de la verificación experimental directa de la fórmula para la interacción de los elementos de corriente?

¿Qué puede deducirse del hecho de que las fuerzas de interacción de los elementos de corriente no satisfacen la tercera ley de Newton y de las corrientes cerradas, satisfacen?

Ejemplo 10.1. Determinar la inducción del campo magnético creado por una sección rectilínea finita del conductor de longitud l por el que circula la corriente I (fig. 25).

La intensidad del campo de cada elemento del conductor está dirigida perpendicularmente al plano del diseño y conforme a la ley (10.10) es igual a

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \times r}{r^2},$$

dado que $dl \times r$ es perpendicular al plano del diseño. Entonces,

$$|dl \times r| = dl \widehat{\text{sen}}(dl, r) = dl \text{sen } \beta = dyd,$$

por eso

$$B = \frac{\mu_0 I d}{4\pi} \int_{-(l-a)}^a \frac{dy}{(d^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \text{sen } \alpha_1 + (\text{sen } \alpha_2).$$

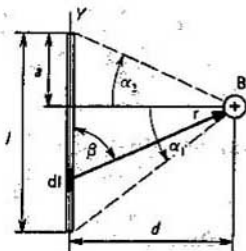


Fig. 25. Inducción magnética de una sección rectilínea de corriente de longitud finita

Aplicando esta fórmula, puede calcularse la inducción de cualquier circuito con corriente que consta de segmentos rectilíneos.

Ejemplo 10.2. Definir la inducción del campo magnético en el eje de la corriente circular I de radio r_0 (fig. 26).

Hacemos uso de la ley (10.11):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

donde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{h}$, $d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0 + d\mathbf{l} \times \mathbf{h}$. Al integrar, el módulo r no varía, por eso

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left(\oint_L d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0 + \oint_L d\mathbf{l} \times \mathbf{h} \right). \quad (10.15)$$

Dado que \mathbf{h} es un vector constante, hallamos

$$\oint_L d\mathbf{l} \times \mathbf{h} = \left(\oint_L d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{h} = 0,$$

ya que $\oint_L d\mathbf{l} = 0$. La otra integral que figura en (10.15), se calcula de la siguiente manera:

$$\oint_L d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0 = \oint_L n r_0 d\mathbf{l} = n r_0 \oint_L d\mathbf{l} = n r_0 2\pi r_0,$$

donde \mathbf{n} es el versor, perpendicular al plano en que fluye la corriente I .

Entonces

$$\mathbf{B}_h = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + h^2)^{3/2}} \mathbf{n}. \quad (10.16)$$

Ejemplo 10.3. Dos conductores circulares coaxiales del mismo radio situados en planos paralelos, la distancia d entre los cuales es igual al radio de los anillos, se denominan anillos de Helmholtz.

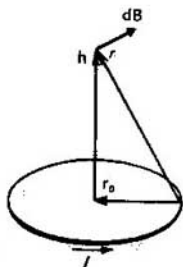


Fig. 26
Inducción magnética en el eje de una espiral con corriente

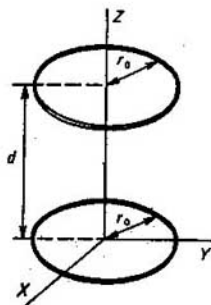


Fig. 27
Para el cálculo de la interacción de dos corrientes circulares

Demstrar que el campo magnético en el eje de los anillos de Helmholtz en la mitad de la distancia entre ellos es homogéneo con una gran precisión.

Coloquemos el origen del sistema cartesiano de coordenadas en el centro de uno de los anillos y el eje Z lo dirigimos a lo largo del eje de los anillos (fig. 27). La inducción del campo

en el eje de los anillos en el punto con la coordenada z , conforme a (10.16), es igual a

$$B_z = \frac{\mu_0 I r_0^2}{2} \left[\frac{1}{(z^2 + r_0^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(z-d)^2 + r_0^2]^{3/2}} \right], \quad (10.17)$$

donde I es la intensidad de corriente en el anillo.

La heterogeneidad de B_z se caracteriza en primera aproximación por la primera derivada:

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{3\mu_0 I r_0^3}{2} \left[\frac{-z}{(z^2 + r_0^2)^{5/2}} - \frac{z-d}{[(z-d)^2 + r_0^2]^{5/2}} \right]. \quad (10.18)$$

Para $z = d/2$ obtenemos $\partial B_z / \partial z = 0$, entonces

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \frac{3\mu_0 I r_0^3}{2} \left\{ \frac{5z^2}{(z^2 + r_0^2)^{7/2}} - \frac{1}{(z^2 + r_0^2)^{5/2}} + \frac{5(z-d)^2}{[(z-d)^2 + r_0^2]^{7/2}} - \frac{1}{[(z-d)^2 + r_0^2]^{5/2}} \right\}. \quad (10.19)$$

Para los anillos de Helmholtz $d = r_0$ y para $z = d/2$ ($\partial^2 B_z / \partial z^2 = 0$). Ello muestra que el campo en las proximidades del punto $z = d/2$ en el eje de los anillos de Helmholtz es realmente homogéneo con un grado elevado de precisión.

Ejemplo 10.4. Existe un solenoide circular recto de longitud L que consta de n espiras hechas de un conductor fino muy ajustadas. Hallar la inducción en el eje del solenoide si por sus espiras circula una corriente I .

Dado que las espiras están compactamente ajustadas la una a la otra, puede considerarse con suficiente exactitud que cada espira crea un campo en el eje del solenoide de acuerdo con la fórmula (10.16). La densidad del bobinado es igual a n/L . Puede tomarse que por la longitud dz del solenoide fluye una corriente $(In/L) dz$. Colocando el origen del sistema de coordenadas en el punto del eje del solenoide en la mitad de su longitud (fig. 28), hallamos, valiéndonos de la fórmula (10.16) que la inducción en el eje del solenoide en el punto z es

$$\begin{aligned} \beta_z &= \frac{\mu_0 n r_0^2 I}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{[(z-z')^2 + r_0^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2L} \left\{ \frac{-z+L/2}{[(z-L/2)^2 + r_0^2]^{3/2}} + \frac{z+L/2}{[(z+L/2)^2 + r_0^2]^{3/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Para un solenoide muy largo ($L \rightarrow \infty$) en los puntos $z \ll L/2$ de (10.20) obtenemos

$$\lim_{L \rightarrow \infty} B_z = \mu_0 n I / L. \quad (10.21)$$

El campo de un solenoide ilimitadamente largo no sólo es constante a lo largo del eje, sino que también es homogéneo por su sección [véase (8.38)].

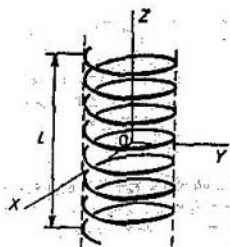


Fig. 28 Solenoide de longitud finita

§ 11. Transformación de los campos

Partiendo de que la ecuación de movimiento de la carga es invariante en el campo electromagnético, se deduce la ley de transformación de los campos.

Invariación de la expresión para la fuerza en el campo electromagnético. La expresión (9.19) para la fuerza de Lorentz que actúa sobre la carga puntual en el campo electromagnético, se obtiene de la exigencia de invariación de la ecuación relativista del movimiento. Por lo tanto, *esa expresión debe ser también invariante desde el punto de vista relativista, es decir, debe tener el mismo aspecto en todos los sistemas de coordenadas.* Así, pues, en los sistemas de coordenadas K y K' las expresiones para las fuerzas tiene la forma:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (11.1)$$

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}'). \quad (11.2)$$

Haciendo uso de la invariación relativista de la expresión para la fuerza, representada por las fórmulas (11.1) y (11.2), y teniendo en cuenta (9.9), (9.11) y (9.12), pueden obtenerse las relaciones entre los vectores de los campos magnéticos y eléctricos en distintos sistemas de coordenadas.

Un caso particular de la transformación de los vectores de los campos ya se examinó anteriormente, a saber: fue demostrado que si en el sistema de coordenadas K' hay sólo intensidad eléctrica, en el sistema K aparece también inducción magnética. Se podría mostrar de la misma manera que si en cierto sistema de coordenadas hay sólo inducción magnética, en el otro surge, en general, también intensidad del campo eléctrico. Estudiemos la relación entre los campos eléctrico y magnético para el caso general.

Transformación de los campos. Sustituamos F_y y F'_y en la fórmula (9.11) por sus expresiones de (11.1) y (11.2):

$$E_y + (u_x B_x - u_x B_x) = \frac{1 - vu_x/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} [E'_y + (u'_x B'_x - u'_x B'_x)]. \quad (11.3)$$

Excluyendo de (11.3) las magnitudes u'_x y u'_y mediante las fórmulas de adición de las velocidades

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2} \quad (11.4)$$

y agrupando todos los términos en el primer miembro de (11.3), hallamos

$$\left(E_y - \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{v B'_z}{1 - \beta^2} \right) + \left(-B_z + \frac{v E'_y}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{B'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \times \\ \times u_x + (B_x - B'_x) u_x = 0. \quad (11.5)$$

Esta igualdad es válida para los valores arbitrarios de u_x y u_z . Por lo tanto, las expresiones entre paréntesis de (11.5) por separado son iguales a cero. Igualándolas a cero, obtenemos las fórmulas de transformación para los vectores del campo:

$$E_y = \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (11.6)$$

$$B_x = B'_x, \quad (11.7)$$

$$B_z = \frac{B'_z + (v/c^2)E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (11.8)$$

De la misma manera, partiendo de (9.12), obtenemos las fórmulas de transformación para los otros componentes:

$$E_z = \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (11.9)$$

$$B_x = B'_x, \quad (11.10)$$

$$B_y = \frac{B'_y - (v/c^2)E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (11.11)$$

La deducción de la transformación para la proyección x de la fuerza es cómodo argumentarla, basándose en la fórmula (9.4) escrita en la forma

$$F_x = \frac{1}{1 + vu_x/c^2} \left[F'_x + \frac{v}{c^2} (\mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}') \right]. \quad (11.12)$$

Obrando de la misma manera que en los casos anteriores, reducimos la igualdad (11.12) a la forma

$$\left(1 + \frac{vu_x}{c^2} \right) [E_x + (u_y B_z - u_z B_y)] - E'_x + (u'_y B'_z - u'_z B'_y) = \frac{v}{c^2} (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{u}'), \quad (11.13)$$

donde $\mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}' = q\mathbf{E}' \cdot \mathbf{u}'$. Haciendo uso de las fórmulas (11.8) y (11.11), hallamos que

$$E_x = E'_x. \quad (11.14)$$

Así, pues, las fórmulas de transformación para los vectores del campo electromagnético tienen el aspecto:

$E_x = E'_x,$	$B_x = B'_x,$	(11.15)
$E_y = \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1-\beta^2}},$	$B_y = \frac{B'_y - (v/c^2)E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}},$	
$E_z = \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1-\beta^2}},$	$B_z = \frac{B'_z + (v/c^2)E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$	

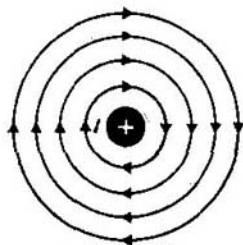


Fig. 29
Líneas de fuerza del campo magnético, formado por un hilo cargado que se mueve a lo largo de su longitud

Las fórmulas inversas de transformación de los vectores del campo se obtienen, conforme al principio de la relatividad, de las fórmulas (11.15) sustituyendo $v \rightarrow -v$ y las magnitudes con rasgo por las magnitudes sin éstos y viceversa.

Aplicación de las fórmulas (11.15). Las fórmulas (11.15) permiten hallar los vectores del campo electromagnético en cualquier sistema inercial de coordenadas si se conocen por lo menos en uno cualquiera de ellos.

A título de ejemplo estudiemos el campo de un hilo infinito cargado. El hilo es inmóvil y se encuentra en el sistema de coordenadas K' a lo largo del eje X' . Por lo tanto, en este sistema de coordenadas existe sólo un campo eléctrico, cuya intensidad se da por las fórmulas (8.5), teniendo en cuenta la definición de la intensidad. Por eso en lugar de (8.5) para la intensidad del campo eléctrico, obtenemos las expresiones:

$$E_x = 0, \quad E_y = \rho' S_0' / (2\pi\epsilon_0 y_0'), \quad E_z = 0. \quad (11.16)$$

El eje Y puede tener cualquier dirección, perpendicular al hilo. Basándose en la fórmula (11.16), sacamos la conclusión de que la intensidad del campo eléctrico de un hilo infinito cargado está orientada por las perpendiculares respecto al hilo y decrece inversamente proporcional al primer grado de la distancia del hilo. El campo magnético está ausente en el sistema de coordenadas K' , ya que las cargas son inmóviles.

En el sistema de coordenadas K el hilo se mueve a lo largo de su longitud en dirección de los valores positivos del eje X con una velocidad v . Basándose en (11.15), la intensidad del campo eléctrico es igual a

$$E_x = 0, \quad E_y = E_y' / \sqrt{1 - \beta^2} = \rho' S_0' (2\pi\epsilon_0 y_0' \sqrt{1 - \beta^2}), \quad E_z = 0, \quad (11.17)$$

lo que equivale a (8.8), dado que la intensidad es igual a la relación entre la fuerza y la carga.

Las fórmulas (11.15) muestran que a la par con el campo eléctrico, el hilo cargado en movimiento crea en el medio que lo rodea, un campo magnético, cuya inducción es

$$B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = \frac{(v/c)^2 E_y'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{vp' S_0'}{2\pi\epsilon_0 c^2 y_0' \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (11.18)$$

que, conforme a (8.9), equivale a la fórmula (8.15) sólo si se pasa de la fuerza f_y a la inducción del campo magnético de acuerdo con las fórmulas (9.18) y (9.16), es decir, si dividimos f_y en (8.15) por qv . Es obvio que las líneas magnéticas de fuerza son circunferencias concéntricas, yacentes en planos, perpendiculares al hilo (fig. 29): el centro de las circunferencias está en el hilo.

Al resolver tareas concretas, es necesario elegir un sistema de coordenadas, en el que el campo electromagnético sea el más sencillo, lo que simplifica la solución del problema. Pero *no hay que pensar que siempre existe un sistema de coordenadas, donde el campo se reduce o bien al campo eléctrico, o bien al magnético. Existen configuraciones del campo electromagnético, tales, que en cualquier sistema de coordenadas están presentes simultáneamente el campo eléctrico y el magnético.* El examen general de dicha cuestión se efectúa, analizando las invariaciones del campo electromagnético con relación a la transformación de Lorentz (véase el § 62).

Campo de una carga puntual que se mueve uniforme y rectilíneamente. Hagamos coincidir el origen del sistema cartesiano de coordenadas K' con la carga puntual q . En este sistema la intensidad del campo eléctrico se describe por la ley de Coulomb en ausencia del campo magnético:

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad \mathbf{B}' = 0, \quad (11.19)$$

donde $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. En el sistema de coordenadas K la carga q se mueve con una velocidad v en dirección de los valores positivos del eje X . Los ejes de coordenadas del sistema K' están orientados de tal manera que para el momento de tiempo $t' = t = 0$ ellos coinciden con los ejes correspondientes del sistema K . Sustituyendo (11.19) en (11.15) y utilizando las transformaciones de Lorentz, obtenemos

$$E_x = E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3} = \frac{q\gamma(x-vt)}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (11.20)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}. \quad (11.21)$$

Designando por x_q la coordenada de la carga q en el sistema K en el momento t en que se determina la intensidad del campo en el punto (x, y, z) , escribamos (11.20) de nuevo en la forma

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x-x_q)}{[\gamma^2(x-x_q)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (11.22)$$

ya que $x_q = vt$ es la ley del movimiento de la carga en el sistema K .

De la misma manera hallamos las otras dos componentes de la intensidad del campo eléctrico:

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{[\gamma^2(x-x_q)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (11.23)$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{[\gamma^2(x-x_q)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (11.24)$$

La inducción del campo magnético se determina valiéndose de las fórmulas (11.15). El resultado es más cómodo escribirlo en forma vectorial:

$$\mathbf{B} = (1/c^2) \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \quad (11.25)$$

donde E se define por las fórmulas (11.22)—(11.24). Se ve que las líneas de B forman circunferencias concéntricas con centro en el eje X , a lo largo del cual se mueve la carga q .

La configuración del campo de la carga que se mueve uniforme y rectilíneamente, no varía con el tiempo, sólo cambia la posición de esta configuración respecto al sistema de coordenadas inmóvil K , o sea, la configuración invariable del campo se mueve junto con la carga. Estudiémosla en el momento en que la carga se encuentra en el origen del sistema de coordenadas K , es decir, para $x_q = 0$. En este caso véase (11.22)—(11.24)

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma r}{(\gamma x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (11.26)$$

donde r es el radio vector, trazado desde el punto en que se encuentra la carga q hacia el punto donde se determina E . Así, pues, la intensidad está orientada a lo largo del radio vector, en cambio su valor depende de la dirección del radio vector. Designemos el ángulo entre las direcciones de la velocidad v de la carga y del radio vector por θ . Entonces $x = r \cos \theta$, $y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \theta$, $\gamma x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \gamma^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)$, $\beta = v/c$ y la fórmula (11.26) adquiere la forma

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}.$$

La diferencia entre los campos eléctricos de la carga en movimiento y de la carga inmóvil consiste en la fuerte dependencia de la intensidad del campo de la carga en movimiento respecto a la dirección. Por la línea de movimiento de la carga ($\theta = 0$; $\theta = \pi$) y perpendicularmente a ella ($\theta = \pm\pi/2$) la intensidad es igual a

$$E_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 - \beta^2), \quad (11.27)$$

$$E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (11.28)$$

respectivamente.

Para las velocidades relativistas ($\beta \approx 1$) la intensidad del campo de la carga en movimiento a una distancia prefijada de ella es pequeña, a lo largo de la línea de movimiento de la carga, y es grande en dirección perpendicular, es decir, el campo se concentra aparentemente en las inmediaciones del plano, que atraviesa la carga perpendicularmente a su velocidad.

Si en cierto sistema de coordenadas existe sólo el campo eléctrico, en otro sistema aparece también el campo magnético y viceversa. Eligiendo de la manera adecuada el sistema de referencia, puede lograrse obtener una configuración más sencilla de los campos eléctrico y magnético o eliminar uno de ellos. Sin embargo, no siempre existe semejante sistema de referencia, donde el campo se reduce bien al eléctrico, o bien al campo magnético.

Partiendo de las fórmulas de transformación de las magnitudes del sistema K' al sistema K , ¿qué procedimientos pueden aplicarse para recibir las fórmulas de transformación de las mismas magnitudes pasando del sistema K al sistema K' ? Basándose en el ejemplo de las fórmulas (11.15), compruébese que ambos procedimientos conducen al mismo resultado.

¿Es central el campo de una carga puntual que se mueve con gran velocidad? simétrico-central?

Problemas

- 1.1. Calcular $\text{div } \mathbf{r}$.
- 1.2. Calcular $\text{grad} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A})$, donde \mathbf{A} es un vector constante.
- 1.3. Calcular $\text{div} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es un vector constante.
- 1.4. Calcular $\text{div} (\mathbf{r}/r)$.
- 1.5. Calcular $\text{div} [\mathbf{A} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})]$, donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son vectores constantes.
- 1.6. ¿Cuál es la inducción del campo magnético en el centro de un circuito cuadrado, cuyo lado es a y por el que circula una corriente I ?
- 1.7. Un conductor está bobinado en espiral sobre un aislador cilíndrico de radio a y forma n espiras completas. El ángulo de elevación de la espiral es igual a α . Determinar la inducción magnética en el centro del aislador cilíndrico si por el arrollamiento circula una corriente I .
- 1.8. Dos cargas puntuales q y $-q$ están situadas en los puntos $(a, 0, 0)$ y $(-a, 0, 0)$, respectivamente. Hallar la intensidad del campo eléctrico en el punto (x, y, z) .

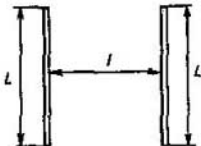


Fig. 30
Dos secciones del conductor de longitud finita

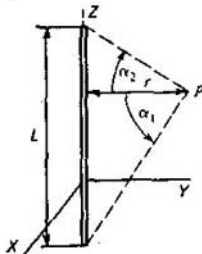


Fig. 31
Designación de los ángulos en el sistema de coordenadas elegido

- 1.9. La carga está distribuida con una densidad lineal τ en una longitud L a lo largo del radio vector que comienza en el punto en que se halla la carga puntual q . La distancia desde q hasta el punto, más próximo a ésta, de la carga lineal es igual a R . Hallar la fuerza que actúa sobre la carga lineal.
- 1.10. Dos cargas se distribuyen con la misma densidad lineal en una longitud L de modo paralelo y se encuentran a la distancia l (fig. 30). Hallar la fuerza de interacción entre ellas.
- 1.11. Un disco posee cierta carga superficial con una densidad $\sigma = \alpha r^2$, donde r es la distancia desde el centro del disco. El radio del disco es r_0 . Hallar la intensidad del campo en la perpendicular al plano del disco, trazada por su centro a la altura h .
- 1.12. Dos superficies uniformemente cargadas son paralelas al plano X, Y y atraviesan el eje Z en los puntos $z_1 = a_1$ y $z_2 = a_2 > a_1$. Las densidades superficiales de las cargas son iguales, pero de signo contrario ($\sigma_1 = -\sigma_2$). Hallar la intensidad del campo eléctrico en todos los puntos del espacio.
- 1.13. Hallar la intensidad de un campo eléctrico en el punto P , creado por un hilo cargado de longitud L (fig. 31). La densidad lineal de la carga es τ . El punto P yace en el plano Z, Y , lo que, sin embargo, no impone restricción alguna a la idea general de la solución, ya que el campo es axialmente simétrico.
- 1.14. Un cilindro ilimitadamente largo de sección circular está cargado uniformemente con una densidad superficial σ . En el eje del cilindro se coloca un hilo ilimitadamente

- largo con una carga uniforme de densidad lineal τ . ¿Para qué condición la intensidad del campo eléctrico fuera del cilindro será nula?
- 1.15. Dentro de una esfera de radio a se distribuye una carga, cuya densidad volumétrica es $\rho = \alpha \sqrt{r}$. Hallar la intensidad del campo eléctrico.
- 1.16. Un haz de sección circular que posee un radio de 1 mm y consta de protones, se acelera aplicándole una diferencia de potencial de 10 kV. Suponiendo que la densidad de los protones por la sección del haz es constante, hallar la densidad volumétrica de la carga eléctrica en el haz para la corriente de $5 \cdot 10^{-6}$ A.

Respuestas

- 1.1. $\frac{\mu_0 I n}{2a}$. 1.2. $\frac{1}{\sqrt{1 + n^2 n^2 \tan^2 \alpha}}$. 1.3. 0. 1.4. $2/r$. 1.5. $2(A \cdot B)$. 1.6. $2\sqrt{2} \mu_0 I / (\pi l)$. 1.7. $\frac{\mu_0 I n}{2a} \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 n^2 \tan^2 \alpha}}$. 1.8. $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(x-a) i_x + y i_y}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{(x+a) i_x + y i_y}{[(x+a)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}$.
- 1.9. $F = \frac{q\tau L}{4\pi\epsilon_0 R(R+L)}$. 1.10. $F = \frac{\tau^2}{2\pi\epsilon_0} \left[\left(1 + \frac{L^2}{r^2} \right)^{1/2} - 1 \right]$. 1.11. $E_h = \frac{\alpha h}{2\epsilon_0} \times \left[\frac{r_0^2 + 2h^2}{(r_0^2 + h^2)^{3/2}} - 2h \right]$. 1.12. $E_z = 0$ para $z < a_1$ y $z > a_2$; $E_z = \sigma_1/\epsilon_0$ para $a_1 < z < a_2$.
- 1.13. $E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} [(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) i_y - (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) i_z]$. 1.14. $\tau = -2\pi r \sigma$. 1.15. $E = \frac{2\alpha}{7\epsilon_0} \times \sqrt{r}$, $0 < r < a$; $E = \frac{2\alpha a^{7/2}}{7\epsilon_0} \frac{r}{r^3}$ para $r > a$. 1.16. $\rho = 1,15 \cdot 10^{-6}$ C/m³.

Campo eléctrico constante

Los campos eléctricos constantes en la naturaleza no existen, ya que no hay cargas elementales inmóviles. En cambio, si en un volumen físico infinitamente pequeño la suma de las cargas elementales de cada signo es aproximadamente constante y la velocidad media es próxima a cero, el campo que ellas originan a una distancia suficientemente grande del volumen es casi constante. Dicho campo se denomina campo eléctrico constante. En calidad de modelo de una carga que engendra semejante campo, puede servir una carga puntual inmóvil. El conjunto de cargas puntuales puede formar cargas lineal, superficial y volumétrica. Pasando al modelo de distribución continua de la carga, estos conjuntos se caracterizan por densidades lineal, superficial y volumétrica de la carga.

§ 12. Campo eléctrico constante

Se examina el modelo ideal de un campo eléctrico constante y los límites de su aplicación.

Carga inmóvil. En la electrostática se estudian los campos eléctricos de cargas inmóviles. Se supone que las cargas se mantienen en distintos puntos del espacio mediante fuerzas de origen no electrostático, cuya naturaleza no se precisa en los márgenes de la electrostática. Verbigracia, en la electrostática se investigan la distribución de las cargas en la superficie del conductor, el campo eléctrico que engendran, las fuerzas que actúan, pero no se examina el por qué estas cargas no abandonan la superficie del conductor. En los márgenes de la electrostática no se estudia la naturaleza de las fuerzas que mantienen las cargas en la superficie del conductor. Un sentido análogo tiene la expresión «la carga q se encuentra en el punto (x, y, z) en el vacío». Se supone que la carga q está aparentemente fija en el punto (x, y, z) del espacio, con la particularidad de que en las inmediaciones de la carga no hay ninguna partícula material (vacío). Está claro que semejante representación es una idealización.

Esencia del modelo. Como no existen cargas elementales inmóviles, *tampoco existen campos constantes*. Sin embargo, en la mayoría de los fenómenos que se estudian en la teoría clásica de la electricidad, se observa no el campo de una carga elemental aislada, sino la superposición de los campos de muchas cargas. La aportación del campo de una carga elemental aislada en la superposición de los campos es muy pequeña. A esto es necesario añadir que la intensidad del campo eléctrico se determina como el valor medio respecto a un volumen y a un intervalo de tiempo físicamente pequeños. *Las fluctuaciones*

del valor medio de la intensidad del campo son bastante pequeñas. Precisamente estos valores medios son el objeto de estudio en la teoría clásica de la electricidad y el magnetismo. Por eso, hablando en rigor, para la electrostática lo esencial es no la inmovilidad de las cargas, sino que la constancia con el tiempo del campo eléctrico. Con otras palabras, en el modelo de campos constantes no se idealiza la constancia del campo, sino la inmovilidad de las cargas que lo originan.

Límites de aplicación del modelo. Dado que el modelo se fundamenta en la existencia de campos con fluctuaciones muy pequeñas de los valores medios y no la existencia de cargas inmóviles, sus límites se determinan por las exigencias de pequeñez de aportación de las cargas elementales aisladas en el campo que se observa. De aquí, por ejemplo, se desprende que la electrodinámica no puede aplicarse al movimiento de electrones aislados en el átomo. Su movimiento en los átomos se describe mediante la teoría cuántica.

§ 13. Forma diferencial de la ley de Coulomb

Se analizan los factores que determinan la validez del teorema de Gauss. Se da la formulación diferencial de la ley de Coulomb y se discuten sus corolarios.

Teorema de Gauss. El teorema electrostático de Gauss determina la relación matemática entre el flujo de intensidad a través de una superficie cerrada y la carga que se encuentra en un volumen, limitado por esta superficie.

Sea que la carga puntual q se halla dentro del volumen V , acotado por la superficie cerrada S (fig. 32). Examinemos el flujo N de intensidad E a través de esta superficie:

$$N = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (13.1)$$

Recordemos que para las superficies cerradas a título de dirección positiva se elige siempre la dirección hacia la normal exterior. Ello significa que el elemento del área de superficie $d\mathbf{S}$ en (13.1) está orientado hacia la parte exterior del volumen (fig. 32). Según la ley de Coulomb

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (13.2)$$

Por lo tanto, la integral en (13.1) puede representarse así:

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{S} \right). \quad (13.3)$$

Tengamos en cuenta la relación

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{S} = \left| \frac{\mathbf{r}}{r} \right| dS \cos(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{S}}) = dS', \quad (13.4)$$

donde dS' es la proyección del área del elemento dS sobre el plano perpendicular al radio vector r . De la geometría se sabe que

$$d\Omega = dS'/r^2, \quad (13.5)$$

donde $d\Omega$ es el ángulo sólido, bajo el cual el elemento del área dS' se ve desde el punto de referencia de los radios vectores, que en este caso coincide con el lugar donde está la carga puntual q . Teniendo en cuenta (13.4) y (13.5), la expresión (13.3) adquiere la forma

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega. \quad (13.6)$$

El ángulo sólido total, bajo el cual se ve la superficie cerrada desde los puntos dentro del volumen que ésta limita, es igual a 4π , es decir,

$$\oint_S d\Omega = 4\pi, \quad (13.7)$$

y por eso de (13.6) obtenemos

$$N = q/\epsilon_0 \quad (13.8)$$

El flujo de E a través de la superficie cerrada se calcula de la misma manera (fig. 33) y se define por la fórmula (13.3) si la carga puntual se hallaba fue-

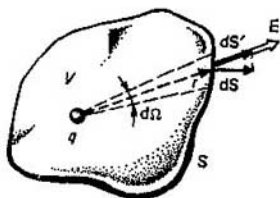


Fig. 32
Cálculo del flujo del vector de intensidad a través de una superficie cerrada cuando la carga puntual está dentro del volumen, limitado por la superficie

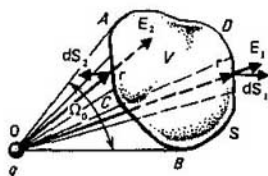


Fig. 33
Cálculo del flujo del vector de intensidad a través de una superficie cerrada cuando la carga puntual está fuera del volumen, limitado por la superficie

ra del volumen, limitado por la superficie. En cambio, ahora el integrando toma valores tanto positivos, como negativos: en los puntos de la superficie,

en que el ángulo (r, dS) es inferior a $\pi/2$, es positivo y cuando el ángulo es mayor, el integrando es negativo. Esto significa que en la superficie ADB el integrando es positivo y en la ACB , negativo. Por esta razón, los elementos del ángulo sólido de (13.5) son positivos en la superficie ADB y negativos, en la ACB . Designemos por Ω_0 el ángulo sólido en el vértice del cono, formado por

las tangentes trazadas desde el punto O a la superficie en cuestión (fig. 33). Entonces

$$\oint_S \frac{1}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{ADB} d\Omega - \oint_{ACB} d\Omega = \Omega_o - \Omega_o = 0, \quad (13.9) \right.$$

ya que las superficies ACB y ADB se ven desde el punto O bajo el mismo ángulo sólido Ω_o , pero en la integral están con signos contrarios. Cuando la carga puntual se encuentra fuera del volumen, el flujo de intensidad E a través de la superficie cerrada es nulo:

$$N = 0. \quad (13.10)$$

Uniendo los resultados de (13.8) y (13.10), podemos escribir definitivamente para (13.1):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} q/\epsilon_0, & \text{cuando } q \text{ se encuentra dentro del volumen limitado por } S; \\ 0, & \text{cuando } q \text{ se halla fuera del volumen, limitado por } S. \end{cases} \quad (13.11)$$

La confirmación que posee (13.11) es el contenido del teorema electrostático de Gauss para la carga puntual.

Su generalización para el sistema de cargas puntuales se lleva a cabo mediante el principio de superposición. Si hay cargas puntuales q_i , la intensidad E del campo en cada punto es la suma de las intensidades E_i de los campos, creados por cada una de las cargas puntuales:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i. \quad (13.12)$$

Por consiguiente,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}. \quad (13.13)$$

Al calcular cada una de las integrales que se encuentran bajo el signo de suma en el segundo miembro de (13.13), es necesario tomar en consideración (13.11): para la carga puntual dentro del volumen la integral correspondiente es igual a q_i/ϵ_0 , y para la carga fuera del volumen, es nula. Por esta razón, (13.13) toma la forma

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_V q_i = \frac{1}{\epsilon_0} Q, \quad (13.14)$$

donde V , perteneciente al signo de suma, significa que la suma se compone sólo de cargas que se encuentran dentro del volumen V . La carga total dentro del volumen V en (13.14) se denota por Q :

$$Q = \sum_V q_i. \quad (13.15)$$

Teniendo en cuenta la definición (4.1) para la densidad volumétrica ρ para la distribución continua de las cargas, la fórmula (13.14) se escribe inmediatamente así:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} Q, \quad (13.16)$$

donde

$$Q = \int_V \rho \, dV \quad (13.17)$$

es la carga total, incluida en el volumen limitado por la superficie cerrada S . La afirmación que encierra la fórmula (13.16) es el contenido del teorema electrostático de Gauss para la distribución continua de las cargas. Es obvio que la fórmula incluye en sí también las expresiones (13.14) y (13.11) como casos particulares.

Medición de la carga. El teorema de Gauss permite determinar la carga total que contiene el volumen dentro de sí, midiendo el flujo de intensidad a través de la superficie que limita el volumen. *Otras definiciones de la carga no dan resultados satisfactorios.* Por ejemplo, no se puede hallar esta carga, midiendo la fuerza que ella ejerce sobre una carga de prueba que está fuera de dicho volumen, ya que la fuerza depende no sólo de la carga total, sino también de su distribución por el volumen, que por cierto, es desconocida. Puede determinarse la carga, midiendo la fuerza que actúa sobre ella en un campo eléctrico exterior homogéneo que se conoce. En este caso es importante asegurar la homogeneidad del campo. Está claro que este procedimiento es aplicable sólo cuando el campo homogéneo exterior no varía esencialmente la distribución de las cargas dentro del volumen.

Base física de la validez del teorema de Gauss. Partiendo de la deducción del teorema de Gauss, se ve que su validez se determina por la posibilidad de reducir el integrando (13.3) mediante (13.4) y (13.5) a la diferencial del ángulo sólido $d\Omega$. Ello resulta posible sólo cuando $E(r)$ decrece inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la carga puntual. Para otra dependencia de $E(r)$, en la fórmula (13.6) bajo la integral debe haber además de la diferencial del ángulo sólido, cierta función respecto a r que no permite expresar el flujo de intensidad mediante la superficie en forma de función de la carga, lo que significa la inobservancia del teorema de Gauss. Por esta razón, *la base física del teorema de Gauss es la ley de Coulomb o, de otra manera, el teorema de Gauss es la formulación integral de la ley de Coulomb.*

Enunciación diferencial de la ley de Coulomb. Ecuación de Maxwell para $\text{div } \mathbf{E}$. Con ayuda de la fórmula matemática de Gauss—Ostrogradski (5.21) el flujo \mathbf{E} a través de una superficie cerrada puede transformarse en una integral de $\text{div } \mathbf{E}$ respecto al volumen:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{E} \, dV, \quad (13.18)$$

como consecuencia de lo cual la fórmula (13.16) adquiere el aspecto

$$\int (\text{div } \mathbf{E} - \rho/\epsilon_0) dV = 0. \quad (13.19)$$

La igualdad de la integral a cero se cumple para un volumen arbitrario V . Por lo tanto, el integrando es idénticamente igual a

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0. \quad (13.20)$$

La posibilidad de realizarse (13.20), lo mismo que el teorema de Gauss, se determina por la validez de la ley de Coulomb. Por consiguiente, (13.20) es la forma diferencial de la ley de Coulomb. El carácter lineal de la ecuación (13.20)

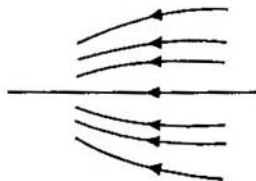


Fig. 34
Líneas de fuerza del campo, cuya intensidad aumenta de derecha a izquierda

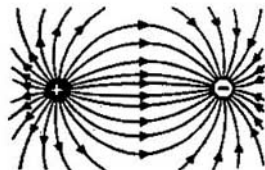


Fig. 35
Líneas de fuerza de dos cargas con signos contrarios

refleja la validez del principio de superposición para la intensidad del campo. En este caso se dedujo para las cargas inmóviles. Se considera que es válido para un movimiento arbitrario de las cargas.

Líneas de fuerza. Se llama línea de fuerza de un campo eléctrico a la línea, la tangente a la cual en cada punto coincide con la intensidad \mathbf{E} . Con ayuda de las líneas de fuerza es cómodo representar gráficamente el campo. Se ha acordado caracterizar la intensidad del campo por el número de líneas de fuerza que atraviesan 1 m^2 de área de la superficie, perpendicular a la dirección de las líneas de fuerza en el punto correspondiente: cuanto mayor es la densidad de las líneas, tanto mayor es la intensidad del campo. En la fig. 34 se muestra un campo eléctrico, cuya intensidad crece de derecha a izquierda.

Fuentes y sumideros del vector \mathbf{E} . Como se ve de la ecuación (13.20) las líneas de fuerza comienzan donde $\text{div } \mathbf{E} > 0$ y terminan donde $\text{div } \mathbf{E} < 0$; es decir, empiezan en las cargas positivas y terminan en las negativas. Se dice que las cargas positivas son las fuentes del vector \mathbf{E} y las negativas, los sumideros. Es obvio que semejante diferencia entre las cargas es puramente convencional: eso parte de la definición de la dirección de la intensidad del campo. Según su papel en la formación del campo eléctrico las cargas positivas y negativas son

totalmente equivalentes. La fig. 35 muestra las líneas de fuerza de dos cargas de signo contrario.

Invariación de la carga. Hallemos el flujo E a través de la superficie cerrada que rodea una carga puntual q que se mueve uniforme y rectilíneamente. La intensidad del campo para esta carga se determina por la fórmula (11.26). El flujo de intensidad es igual a

$$N = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E r^2 d\Omega = \oint E r^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (13.21)$$

donde en calidad de superficie de integración se toma una esfera con centro en el punto donde está la carga en movimiento en cierto momento de tiempo y se tiene en cuenta que \mathbf{E} y $d\mathbf{S}$ son colineales al radio vector \mathbf{r} ; θ y φ son los ángulos polar y axial, respectivamente, del sistema esférico de coordenadas, cuyo eje polar coincide con el eje X del sistema de coordenadas inmóvil. Sustituyendo (11.26) en (13.21), hallamos

$$N = \frac{q(1-\beta^2)}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad (13.22)$$

dónde la integración se lleva a cabo por el ángulo $d\varphi$ del que el integrando en (13.21) no depende. Ya que $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, $\sin \theta d\theta = -d \cos \theta$, entonces

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{(1-\beta^2 + \beta^2 x^2)^{3/2}} = \frac{2}{\beta^3} \left[\frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} \right]_0^1 = \frac{2}{1-\beta^2},$$

dónde $a^2 = (1-\beta^2)/\beta^2$. Entonces la relación (13.22) adquiere la forma

$$N = q/\epsilon_0, \quad (13.23)$$

que coincide con (13.8). Esto demuestra que el teorema de Gauss es también válido para la carga puntual que se mueve de modo uniforme y rectilíneo. Si la carga en el volumen se determina mediante el flujo E a través de la superficie cerrada que limita el volumen, la igualdad (13.23) expresa la invariación de la carga.

El teorema de Gauss expresa la relación entre el flujo de la intensidad del campo eléctrico a través de una superficie cerrada y la carga en el volumen, acotado por dicha superficie. La base física del teorema de Gauss es la ley de Coulomb o, con otras palabras, el teorema de Gauss es la forma integral de la ley de Coulomb.

Se llama línea de fuerza del campo eléctrico a la línea, la tangente a la cual en cada punto coincide con la intensidad del campo eléctrico.

Las cargas positivas son las fuentes de la intensidad del campo eléctrico, mientras que las negativas, los sumideros. Pero esta diferencia entre las cargas es puramente convencional. Su papel en la formación del campo eléctrico es absolutamente igual.

§ 14. Carácter potencial de un campo electrostático

Se examinan las formas diferencial e integral del carácter potencial del campo. Se introduce el potencial escalar y se estudian sus propiedades. Se calcula el potencial de las cargas distribuidas en una zona finita del espacio. Se demuestra el teorema de Earnshaw

Trabajo en un campo eléctrico. Puesto que la fuerza que actúa en el campo eléctrico sobre una carga puntual q es igual a $F = qE$, al desplazar la carga a dl , se efectúa un trabajo

$$dA = F \cdot dl = qE \cdot dl. \quad (14.1)$$

El trabajo específico que se gasta para desplazar la carga, se determina como la relación entre el trabajo y la carga:

$$dA' = dA/q = E \cdot dl. \quad (14.2)$$

Este trabajo se expresa en julios por Coulomb. Examinando (14.2) se ve que el trabajo que efectúa el campo se considera positivo, mientras que el que realizan las fuerzas exteriores respecto al campo, es negativo. Esto es la condición de los signos semejante a la que se utiliza en la termodinámica para el trabajo del sistema.

Al desplazar la carga del punto 1 al punto 2 por el trayecto L (fig. 36), el trabajo específico es

$$A' = \int_L^{(2)} E \cdot dl. \quad (14.3)$$

Carácter potencial del campo coulombiano. El campo de fuerzas se denomina potencial si el trabajo de desplazamiento en este campo depende sólo de los puntos inicial y final del camino y no depende de la trayectoria. Otra definición equivalente del carácter potencial es la exigencia que el trabajo de desplazamiento por cualquier circuito cerrado sea nulo.

Se sabe que la fuerza de gravedad de una masa puntual que decrece inversamente proporcional al cuadrado de las distancias, es de potencial, con la particularidad de que su carácter potencial se determina precisamente por esta dependencia de la distancia. Dado que la fuerza coulombiana de la carga puntual disminuye por la misma ley, ella es también de potencial. Toda la parte matemática de la teoría del potencial fue elaborada en los márgenes de la teoría de la gravedad. El concepto de potencial surgió en los trabajos de J. L. de Lagrange (1736–1813) en 1777, aunque no mencionó este nombre para la función que es el potencial. El término «potencial» fue introducido en la ciencia en 1828 por G. Green e independientemente por C. F. Gauss (1777–1855). Los científicos P. S. de Laplace (1749–1827) y S. D. Poisson (1781–1840), contribuyeron en gran medida en la teoría del potencial.

Basándose en el principio de superposición del carácter potencial del campo de una carga puntual, se desprende el carácter potencial de un campo electrostático arbitrario. La demostración matemática de esta afirmación es

$$\oint E \cdot dl = \oint \left(\sum_i E_i \right) \cdot dl = \sum_i \oint E_i \cdot dl = \sum_i 0 = 0, \quad (14.4)$$

donde

$$E = \sum E_i, \quad \oint E_i \cdot dl = 0. \quad (14.5)$$

Rotor del vector. El criterio del carácter potencial del campo que se utilizó hasta ahora, no es diferencial y no siempre se puede aplicar de manera fácil y

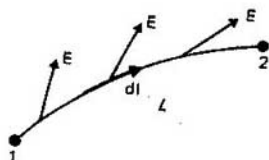


Fig. 36
Trabajo en el campo eléctrico al desplazar una carga puntual

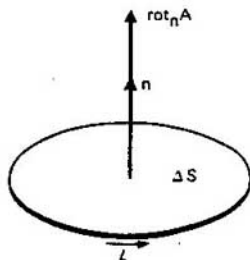


Fig. 37
Para la definición vectorial del rotor

eficaz. Su aplicación se reduce a la verificación de la corroboración de que el trabajo por cualquier camino cerrado es nulo. Ello significa la necesidad de investigar una cantidad infinita de caminos cerrados, lo que es imposible para el caso general. El criterio puede aplicarse sólo cuando se conoce la expresión general para el trabajo por cualquier camino, dada en forma analítica. Pero sólo en casos muy raros se logra obtener semejante fórmula. Por esta razón, es indispensable hallar otro criterio del carácter potencial que pueda utilizarse en la práctica con facilidad y comodidad. La forma diferencial que se da con ayuda del rotor del vector es precisamente este criterio.

Ante todo examinemos la definición vectorial del rotor A , designado por $\text{rot } A$. El vector se determina por tres componentes que no yacen en un mismo plano. Eliamos cierta dirección que se caracteriza por el versor n . En el plano, perpendicular a n , limitemos el área ΔS por un contorno cerrado muy pequeño L (fig. 37). Por lo general, la dirección del recorrido positivo en el contorno L está relacionada con n por la regla de Ampère (del sacacorchos). Se denomina **rotor** el vector, cuya proyección sobre la dirección de n se determina por la

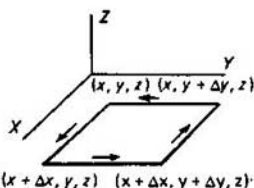


Fig. 38
Para la definición del rotor
en coordenadas

fórmula

$$\text{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (14.6)$$

El rotor caracteriza la intensidad del «remolino» del vector, lo que se refleja en el nombre de la operación. Supongamos, por ejemplo, que el vector \mathbf{A} sea igual a la velocidad \mathbf{v} de los puntos de un sólido que gira con una velocidad angular ω alrededor del eje, colineal con \mathbf{n} . Hallemos $\text{rot}_n \mathbf{v}$ para los puntos del eje de rotación. Elijamos en calidad de contorno L una circunferencia de radio r con centro en el eje y yacente en el plano perpendicular al eje. Es obvio que tenemos $v = \omega r$, $\Delta S = \pi r^2$ y $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = v dl$, donde dl es el valor escalar del elemento de la circunferencia. Por eso basándose en (14.6), obtenemos

$$\text{rot}_n \mathbf{v} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\omega r \oint dl}{\pi r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\omega r 2\pi r}{\pi r^2} = 2\omega, \quad (14.7)$$

donde $\oint dl = 2\pi r$ es la longitud de la circunferencia. De esta manera, el rotor de la velocidad lineal de los puntos de un sólido en rotación es igual a la velocidad angular duplicada de su rotación. Puede mostrarse que esta confirmación es válida no sólo para los puntos en el eje de rotación, sino para todos los puntos en general.

Al calcular el rotor en la práctica, es más cómodo emplear en lugar de (14.6) las fórmulas de coordenadas. Hallemos las proyecciones del rot \mathbf{A} en el sistema cartesiano rectangular de coordenadas. Cojamos como ejemplo el eje Z (fig. 38). El contorno L es un rectángulo con lados Δx , Δy . La dirección del recorrido positivo se indica en la figura. En este caso

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = & \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} A_x(x, y, z) dx + \int_{(x+\Delta x, y, z)}^{(x+\Delta x, y+\Delta y, z)} A_y(x+\Delta x, y, z) dy + \\ & + \int_{(x+\Delta x, y+\Delta y, z)}^{(x, y+\Delta y, z)} A_x(x, y+\Delta y, z) dx + \int_{(x, y+\Delta y, z)}^{(x, y, z)} A_y(x, y, z) dy, \quad (14.8) \end{aligned}$$

donde la integración se lleva a cabo a lo largo de los lados del rectángulo entre sus vértices, cuyas coordenadas se designan en (14.8) como límites de integración. Teniendo en cuenta que Δx y Δy son pequeños, cuan se quiera, se puede en los integrandos de las integrales segunda y tercera efectuar el desarrollo de A_y y A_x en serie respecto a Δx y Δy y limitarse a los términos lineales:

$$A_x(x, y+\Delta y, z) = A_x(x, y, z) + \Delta y \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} + \dots \quad (a)$$

$$A_y(x+\Delta x, y, z) = A_y(x, y, z) + \Delta x \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} + \dots \quad (b) \quad (14.9)$$

Calculemos la suma de la primera y tercera integrales:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} A_x(x, y, z) dx + \int_{(x+\Delta x, y+\Delta y, z)}^{(x, y+\Delta y, z)} A_x(x, y+\Delta y, z) dx = \\
 &= \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} A_x(x, y, z) dx - \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} \left[A_x(x, y, z) + \Delta y \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \right] dx, \quad (14.10)
 \end{aligned}$$

donde para calcular la segunda integral en (14.10) se utilizó la fórmula (14.9a) y el signo menos apareció como consecuencia del cambio de la dirección de la integración por la contraria. En (14.10) los términos que contienen en los integrandos $A_x(x, y, z)$ se eliminan mutuamente y por eso

$$I_1 = \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \Delta x \Delta y. \quad (14.11)$$

De la misma manera calculamos la suma de las integrales segunda y cuarta en (14.8):

$$I_2 = \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} \Delta x \Delta y. \quad (14.12)$$

Según la fórmula (14.6), hallamos

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (14.13)$$

Por analogía calculamos las proyecciones sobre los otros ejes de coordenadas:

$$(\text{rot } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad (\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}. \quad (14.14)$$

Designando como siempre por $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ los versores de los ejes de coordenadas, escribimos el vector de rot \mathbf{A} como

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{i}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (14.15)$$

Fórmula de Stokes. La fórmula de Stokes enlaza la circulación del vector por el contorno que limita la superficie, con el flujo de su rotor a través de la superficie. La deducción de dicha fórmula se basa en la definición de (14.6). Calculemos el flujo del vector de rot \mathbf{A} a través de la superficie S , limitada por el contorno L (fig. 39), la que dividimos en elementos ΔS_i :

$$\int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \int_{\Delta S_i} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (14.16)$$

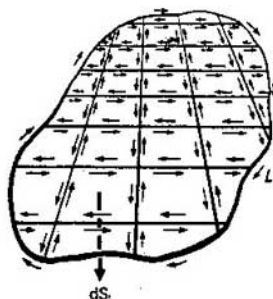


Fig. 39
Para la demostración de la
fórmula de Stokes

del área vecina. Las integrales tienen iguales módulos, pero signos contrarios, ya que los caminos a lo largo de las fronteras para calcular las integrales tienen orientaciones contrarias. Así pues, en la suma de (14.18) todas las partes de las integrales por las fronteras entre ΔS_i se reducen recíprocamente y queda sólo la suma de las integrales por aquellas partes de los contornos L_i que no forman frontera alguna entre ΔS_i , o sea, se conserva la integral por el contorno L que limita el área S . Para $\Delta S_i \rightarrow 0$ la igualdad aproximada (14.18) se convierte en exacta:

$$\boxed{\int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}, \quad (14.19)$$

denominada fórmula de Stokes.

Enunciación diferencial del carácter potencial del campo. La igualdad

$$\int_{L_1}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_2}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (14.20)$$

donde L_1 y L_2 son los caminos diversos entre los puntos A y B , expresa la independencia entre el trabajo y el camino al desplazar la carga en el campo eléctrico. Teniendo en cuenta que $\int_{L_1}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, representemos (14.20) como

$$\int_{L_1}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (14.21)$$

donde $L_1 + L_2 = L$. La fórmula (14.21) es la enunciación matemática de la afirmación de que en un campo electrostático el trabajo es nulo al desplazar la carga por cualquier contorno cerrado.

Aplicando (14.19), de (14.21) obtenemos

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (14.22)$$

donde S es la superficie, limitada por el contorno L . Puesto que S es arbitraria, de (14.22) se desprende que

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (14.23)$$

Esta igualdad es la forma diferencial del carácter potencial del campo electrostático.

Gradiente. Sea $\varphi(x, y, z)$ una función escalar del punto. El vector

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{i}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (14.24)$$

se llama gradiente de φ .

Para aclarar el sentido de este vector, calculemos la diferencial total de la función φ al desplazarse a $d\mathbf{r} = \mathbf{i}_x dx + \mathbf{i}_y dy + \mathbf{i}_z dz$:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r}. \quad (14.25)$$

De esta manera, un incremento infinitamente pequeño de $d\varphi$ al desplazarse en cierta dirección, es igual al componente del $\text{grad } \varphi$ por esta dirección, multiplicado por el módulo de desplazamiento. Tracemos la familia de superficies $\varphi = \text{const}$ (fig. 40). Al moverse a lo largo de la superficie $\varphi = \text{const}$, tenemos $d\varphi = 0$. Por esta razón [véase (14.25)] $\text{grad } \varphi \perp d\mathbf{r}$, es decir, el vector del $\text{grad } \varphi$ está dirigido perpendicularmente a la superficie $\varphi = \text{const}$. Es igual, según el módulo, a la derivada respecto a φ por el camino en dirección perpendicular a la superficie $\varphi = \text{const}$.

Potencial escalar. Dado que el trabajo para desplazar la carga en un campo potencial no depende del trayecto, sino que es sólo función de los puntos inicial y final del camino, se puede expresar a través de la coordenada de los extremos de la trayectoria. Eso se hace con ayuda del potencial.

Comprobando directamente, puede uno cerciorarse que existe siempre la igualdad idéntica

$$\text{rot grad } \varphi = 0. \quad (14.26)$$

Por esta razón, la ecuación (14.23) se satisface si \mathbf{E} se representa como

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (14.27)$$

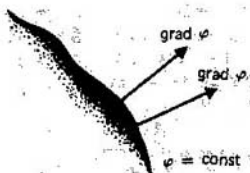


Fig. 40
Dirección del $\text{grad } \varphi$

El signo se elige de tal manera que la intensidad E esté dirigida hacia el decremento de φ . La función escalar φ , relacionada con la intensidad E del campo mediante la fórmula (14.27) se denomina potencial escalar del campo eléctrico.

La intensidad puede medirse de manera experimental. *El potencial φ no tiene un valor numérico determinado y no tiene sentido hablar de la definición experimental de su valor.*

Multiformidad del potencial escalar. De la fórmula (14.27) se ve que si a φ se le añade cierta constante, el campo, descrito por el potencial, no varía, ya que las derivadas de una magnitud constante con respecto a las coordenadas son nulas. Por lo tanto, *el potencial φ de un campo eléctrico dado está determinado sólo con una precisión de hasta una constante aditiva.*

Normalización. Haciendo uso de la multiformidad del potencial escalar, se le puede atribuir en cualquier punto, prefijado de antemano, cualquier valor, prefijado con anterioridad. Después de ello, el potencial tiene un valor bien determinado en todos los demás puntos, o sea, será unívoco. *Este procedimiento de atribuir al potencial un carácter unívoco, agregándole un valor determinado en uno de los puntos, se llama normalización del potencial.* Al estudiar los campos eléctricos en las proximidades de la superficie terrestre, por regla general, se toma como potencial nulo el de la Tierra. Al investigar cuestiones generales, cuando las cargas se hallan en una zona finita del espacio, es más cómodo considerar que el potencial es nulo a un alejamiento infinito de las cargas. Semejante normalización se utiliza con frecuencia en el presente libro.

Expresión del trabajo por medio del potencial. Si la carga se desplaza entre los puntos 1 y 2, el trabajo específico es igual a

$$A' = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{(1)}^{(2)} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} = - \int_{(1)}^{(2)} d\varphi = \varphi(1) - \varphi(2) \quad (14.28)$$

donde se utilizó la fórmula (14.25) y $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$. De (14.28) se ve que en efecto, el trabajo depende de los puntos inicial y final de la trayectoria y no depende de la forma de esta última. Partiendo de esta misma fórmula, se desprende que la diferencia de potencial entre dos puntos tiene un sentido físico claro y puede medirse experimentalmente. Así, pues, *el sentido físico lo posee no el propio potencial, sino la diferencial de potencial entre distintos puntos.*

Potencial del campo de una carga puntual. Normalicemos el potencial a cero en el infinito. Considerando que en la fórmula (14.28) el punto 2 se encuentra en el infinito, suponemos que $\varphi(2) = \varphi(\infty) = 0$ y obtenemos la siguiente expresión para el potencial en el punto 1:

$$\varphi(1) = \int_{(1)}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (14.29)$$

El camino del punto 1 al infinito puede ser cualquiera. Pero hay que elegirlo de manera que se simplifiquen en lo más posible los cálculos.

El campo de la carga puntual q es esféricamente simétrico. El potencial a la distancia r de la carga puntual es, según la fórmula (14.29)

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r'^2} \frac{r'}{r'} \cdot dl. \quad (14.30)$$

El camino de integración más adecuado es a lo largo del radio vector que parte de la carga puntual. Entonces $(r \cdot dl/r) = dr$ y de (14.30) se desprende que

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_r^\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (14.31)$$

Como ejercicio, se recomienda al estudiante comprobar si de esta fórmula se deduce la ley de Coulomb:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \text{grad } \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (14.32)$$

Potencial del campo de un sistema de cargas puntuales. Según el principio de superposición, el potencial del campo de un sistema de cargas puntuales es igual a la suma de los potenciales creados en el punto en cuestión por cada una de las cargas. Eso es obvio:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -\text{grad } \varphi_1 - \text{grad } \varphi_2 = -\text{grad } (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Por consiguiente, con ayuda de la fórmula (14.31) para el potencial, creado por un sistema de cargas puntuales q_i , puede escribirse la expresión

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}, \quad (14.33)$$

donde $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$ es la distancia entre la carga puntual q_i , que se encuentra en el punto (x_i, y_i, z_i) , y el punto (x, y, z) en el que se calcula el potencial.

Potencial del campo para una distribución continua de las cargas. Suponemos, como de costumbre, que todas las cargas están en una zona finita del espacio y el potencial está normalizado a cero en el infinito. Designando la densidad volumétrica de la carga por $\rho(x', y', z')$, obtenemos en vez de (14.33) para el potencial la expresión

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}. \quad (14.34)$$

Esta fórmula puede escribirse de otra manera, sin indicar detalladamente las variables:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r}, \quad (14.35)$$

donde dV es el elemento de volumen por el que se efectúa la integración. Semejante forma breve de escritura se emplea con frecuencia en la exposición a continuación.

Potencial del campo de las cargas superficiales. Si la carga está en la superficie, la distribución se caracteriza por la densidad superficial de la carga σ . En el elemento del área dS (es un escalar y no vector del elemento de la superficie) se encuentra una carga σdS y, por lo tanto, el potencial en cierto punto, de modo análogo con (14.35), se da por la fórmula

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r}, \quad (14.36)$$

donde r es la distancia entre el elemento del área dS y el punto en que se calcula la el potencial. La integral (14.36) se propaga a todas las superficies que poseen cargas superficiales.

Infinitud del potencial del campo de una carga puntual. De (14.31) se deduce que para $r \rightarrow 0$ el potencial $\varphi (r \rightarrow 0) \rightarrow \infty$. Esto está relacionado con el hecho de que la carga puntual posee formalmente una densidad volumétrica infinita, ya que su volumen es nulo. Precisamente la densidad volumétrica infinita de la carga es la que determina la inversión del potencial al infinito.

Carácter finito del potencial, siendo continua la distribución de la carga con densidad finita. Para la distribución continua de la carga con una densidad finita, el potencial no se reduce en ninguna parte al infinito. De ello puede uno cerciorarse al calcular el potencial por la fórmula (14.34). Tomemos el punto (x, y, z) como origen de las coordenadas ($x = y = z = 0$) y efectuaremos los cálculos en el sistema esférico de coordenadas. El elemento de volumen en éste se expresa mediante la fórmula $dx'dy'dz' = r'^2 \sin \theta' d\theta' d\alpha' dr'$, donde $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Entonces [véase (14.34)]

$$\varphi(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(r', \alpha', \theta') r' \sin \theta' d\alpha' dr'.$$

Por lo tanto, si ρ es finito, el potencial φ también es finito, lo que se requería demostrar.

Continuidad del potencial. La derivada del potencial por la coordenada cartesiana ofrece una componente correspondiente de la intensidad del campo eléctrico. Está claro que la intensidad no puede ser infinita. Por consiguiente, las derivadas del potencial respecto a las coordenadas deben ser finitas. Pero ello significa que el potencial es una función continua. De esta manera, el potencial φ es una función finita y continua con derivadas finitas por las coordenadas. Estas condiciones son importantes para resolver las ecuaciones diferenciales para el potencial.

Teorema de Earnshaw. Este teorema afirma que no existe una configuración de las cargas inmóviles que sea estable, si no hay otras fuerzas, además de las fuerzas de interacción coulombiana entre las cargas del sistema.

La demostración del teorema de Earnshaw se desprende de la fórmula de Gauss. Supongamos que el equilibrio es estable. Entonces, al desplazar cualquier

carga del sistema de su posición de equilibrio hacia cualquier dirección, sobre ella debe actuar una fuerza que tienda a volver la carga a la posición inicial. Pero eso significa que la intensidad del campo, creado en las inmediaciones de cada una de las cargas en reposo por todas las demás cargas, está dirigida a lo largo de los radios que emanan del punto en que está dicha carga. El flujo de la intensidad de este campo a través de una superficie cerrada alrededor de la carga se diferencia de cero, ya que la intensidad está orientada a lo largo de los radios en una dirección (en la cercanía de la carga positiva, hacia la carga y en la proximidad de la carga negativa, desde la carga). Según el teorema de Gauss, el flujo que atraviesa la superficie cerrada, se origina por la carga que está en un volumen limitado por dicha superficie. Esto contradice a la suposición inicial de que el flujo se crea por las cargas que se encuentran fuera del volumen. Por eso mismo se rechaza la suposición sobre la estabilidad de la configuración de las cargas inmóviles y el teorema de Earnshaw queda demostrado.

Las configuraciones estables de las cargas inmóviles pueden existir sólo cuando además de las fuerzas de interacción entre ellas, hay otras fuerzas ajenas que mantienen las cargas en las posiciones de equilibrio. Los estados estables de las cargas en movimiento pueden existir como, por ejemplo, el movimiento de dos cargas de signos contrarios por las elipses alrededor del centro de masas (si, claro está, menospreciamos la radiación).

La condición de los signos: el trabajo que ejecuta el campo se considera positivo y el que efectúan las fuerzas, exteriores respecto al campo, negativo.

La enunciación diferencial del potencial del campo eléctrico: $\text{rot } E = 0$. El signo menos en la expresión $E = -\text{grad } \varphi$ se eligió de acuerdo para que E esté orientada hacia la disminución de φ .

La utilización de la ecuación de Poisson para resolver el problema no supone una normalización determinada del potencial y la ausencia de las cargas en el infinito. El potencial es una función continua y finita con derivadas finitas respecto a las coordenadas.

¿Qué métodos para definir la intensidad del campo por la distribución prefijada de las cargas conoce Usted? ¿Qué es lo que determina en cada caso concreto la elección del método para resolver la tarea?

¿Qué ventajas tiene la búsqueda de la intensidad del campo, resolviendo las ecuaciones de Laplace y Poisson, en comparación con otros métodos?

¿Cuáles son las propiedades del potencial, como solución de las correspondientes ecuaciones diferenciales?

¿Qué enunciaciones del carácter potencial del campo electrostático conoce Usted? ¿En qué consiste la ventaja de la forma diferencial?

¿Cuáles son las circunstancias físicas que determinan la posibilidad de normalizar el potencial escalar? ¿Qué normalizaciones son las más aplicables y en qué casos son convenientes?

Ejemplo 14.1. Calcular $\text{grad } \varphi(r)$.

Tenemos:

$$\text{grad } \varphi = i_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \varphi' \frac{\partial r}{\partial x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

De la misma manera calculamos $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$. La raya significa la derivada con relación al argumento r . Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}, \text{ obtenemos } \text{grad } \varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr} (1_x x + 1_y y + 1_z z) = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

En particular, para $\varphi(r) = r$, $\text{grad } r = \mathbf{r}/r$, y para $\varphi(r) = 1/r$ $\text{grad } (1/r) = -\mathbf{r}/r^2$.

Ejemplo 14.2. Calcular tanto directamente, como con ayuda del teorema de Stokes, la circulación del vector $\omega \times \mathbf{r}$ por la circunferencia L de radio r_0 , situada en el plano perpendicular al vector constante ω . El centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas.

El vector $\omega \times \mathbf{r}_0$ está dirigido en cada punto por la tangente a la circunferencia. Por lo tanto,

$$\oint_L \omega \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = \omega r_0 \int_L dl = 2\pi\omega r_0^2. \quad (14.38)$$

La dirección del recorrido se ha elegido de manera que los vectores $\omega \times \mathbf{r}$ y $d\mathbf{l}$ son colineales en cada punto. Durante la dirección inversa del recorrido cambia el signo de la integral.

Con ayuda del teorema de Stokes el problema se resuelve de otra manera:

$$\oint_L \omega \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot}(\omega \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S},$$

donde S es la superficie, limitada por la circunferencia L . Para $\omega = \text{const rot}(\omega \times \mathbf{r}) = 2\omega$ y

$$\int_S \text{rot}(\omega \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_S \omega \cdot d\mathbf{S} = 2\omega \int_S dS = 2\pi\omega r_0^2, \quad (14.39)$$

lo que como debe ser, coincide con (14.38).

No es difícil ver que la superficie S puede ser cualquiera, limitada por la circunferencia y no solamente plana. Tenemos

$$\int_{S_1} \text{rot}(\omega \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_{S_1} \omega \cdot d\mathbf{S} = 2\omega \int_{S_1} dS. \quad (14.40)$$

Tomamos en consideración que

$$\oint_{S'} d\mathbf{S} = 0, \quad (14.41)$$

donde S' es una superficie cerrada que consta de la superficie S_1 en (14.40) y la superficie S del círculo en (14.39), es decir, $S' = S_1 + S$. De (14.41) obtenemos

$$\int_{S_1} d\mathbf{S} = -n\pi r_0^2, \quad (14.42)$$

donde n es un versor, perpendicular al plano del círculo. En (14.42) se tiene en cuenta que en (14.41) el elemento $d\mathbf{S}$ está dirigido por la normal exterior hacia la superficie cerrada. Sustituyendo (14.42) en (14.40), obtenemos una fórmula idéntica a (14.39).

Ejemplo 14.3. Hallar el potencial y la intensidad del campo, creado por un hilo con carga uniforme de longitud finita $2L$ en el espacio circundante. La densidad lineal de la carga del hilo es igual a τ .

Coloquemos el origen del sistema cartesiano de coordenadas en la mitad del hilo (punto O) y el eje Z lo dirigimos a lo largo del hilo (fig. 41). Como consecuencia de la simetría axial, el potencial depende sólo de r y de la coordenada z .

La fig. 41 muestra el plano que atraviesa el punto (r, z) y el eje Z . La carga $\tau dz'$ que se encuentra en el elemento de longitud dz' , crea en el punto (r, z) un potencial

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dz'}{\sqrt{r^2 + (z-z')^2}}$$

Por lo tanto, el potencial, originado por todo el hilo cargado, es igual a

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\tau dz'}{\sqrt{r^2 + (z-z')^2}} = \\ &= -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{z-L + \sqrt{r^2 + (z-L)^2}}{z+L + \sqrt{r^2 + (z+L)^2}} \right). \end{aligned} \quad (14.43)$$

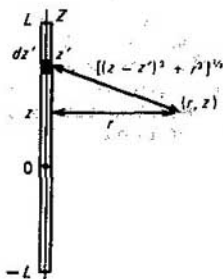


Fig. 41
Carga lineal de longitud finita

Las componentes de la intensidad del campo eléctrico se dan mediante las fórmulas:

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+L)^2}} \right), \quad (14.44)$$

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{z-L}{\sqrt{r^2 + (z-L)^2}} - \frac{z+L}{\sqrt{r^2 + (z+L)^2}} \right). \quad (14.45)$$

Para $L \rightarrow \infty$ obtenemos

$$E_z = 0, \quad E_r = \tau/(2\pi\epsilon_0 r).$$

El potencial para $L \rightarrow \infty$ tiende al infinito:

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} [\ln r - \ln(2L)] \rightarrow \infty.$$

Esto es la consecuencia de que la carga no está concentrada en una zona finita del espacio; por lo que no se puede utilizar la fórmula (14.43) para calcular el potencial en el caso de $L \rightarrow \infty$.

A distancias muy grandes del centro del hilo ($R = \sqrt{r^2 + z^2} \gg L$) de (14.43) hallamos

$$\varphi = \frac{\tau 2L}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R},$$

donde $Q = 2\tau L$ es la carga total del hilo. Así pues, a distancias grandes en comparación con las dimensiones lineales del hilo, el campo es próximo al coulombiano.

§ 15. Campo electrostático en el vacío

Se exponen los métodos fundamentales del cálculo del potencial y la intensidad del campo electrostático y se analizan los ejemplos de los cálculos.

Planteamiento del problema. Resolvamos uno de los problemas de la electrostática:

definir la intensidad del campo eléctrico, creado por una distribución conocida de cargas.

Este problema puede resolverse por varios métodos. En el sentido principal, todos esos métodos son equitativos, mientras que en el práctico, son diferentes en función de las circunstancias, ya que están relacionados con distintos volúmenes de cálculos. Es útil elegir el método que conduce al resultado buscado, aplicando el camino más sencillo.

Aplicación directa de la ley de Coulomb. En este caso la intensidad del campo en el punto se calcula como la suma de las intensidades de los campos,

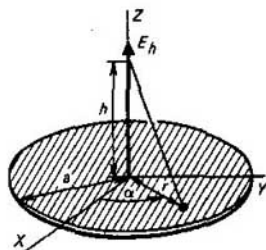


Fig. 42
Campo en el eje de un disco con carga uniforme

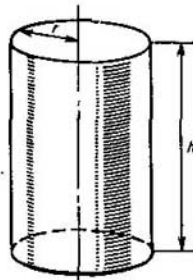


Fig. 43
Para el cálculo de la intensidad del campo de un hilo con carga infinita mediante el teorema de Gauss

creados por todos los elementos ρdV y σdS de las cargas volumétricas y superficiales. Dicho método es el más natural, pero no el más sencillo, ya que hay que sumar los vectores, lo que complica bastante los cálculos. Un ejemplo de aplicación de este método se examinó en el § 8 al calcular la fuerza de interacción de una carga puntual y un hilo recto infinito con carga.

Cálculo del potencial. Las fórmulas (14.35) y (14.36) pueden aplicarse sólo para la distribución de la carga en una zona finita del espacio y la normalización del potencial a cero en el infinito.

A título de ejemplo, analicemos un campo en los puntos de la perpendicular al plano de un disco uniformemente cargado de radio a que atraviesa su centro (fig. 42). La carga total del disco es igual a Q . Para el potencial a la distancia h de la superficie del disco tenemos [véase (14.36)]

$$\varphi(h) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}, \quad (15.1)$$

donde $\sigma = Q/(\pi a^2)$ es la densidad superficial de la carga en el disco. Es cómodo calcular la integral en coordenadas polares, considerando que $x^2 + y^2 = r^2$,

$dz dy = dS = r dr d\alpha$. Entonces [véase (15.1)]

$$\varphi(h) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} (\sqrt{a^2 + h^2} - h). \quad (15.2)$$

Partiendo de la simetría axial de la distribución de la carga, se desprende que el vector de intensidad del campo eléctrico está orientado a lo largo del eje del disco y es igual a

$$E_h = -\frac{\partial\varphi}{\partial h} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right). \quad (15.3)$$

Para $h \gg a$ puede considerarse que

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/h^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{h^2} + \dots \quad (15.4)$$

y por lo tanto,

$$E_h \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{h^2}, \quad (15.5)$$

como se podía esperar sin efectuar los cálculos, puesto que a distancias grandes la intensidad del campo de un cuerpo con carga es próxima a la intensidad del campo de una carga puntual.

Uso del teorema de Gauss. En ciertos casos, al haber simetría, el método más eficaz de definición de la intensidad del campo es la aplicación del teorema de Gauss. Sea, por ejemplo, que se requiera hallar la intensidad del campo de un hilo recto infinito con carga de una densidad lineal τ . Construyamos un cilindro circular de radio r , cuyo eje coincide con el hilo (fig. 43). Designemos la altura del cilindro por h . Apliquemos al volumen del cilindro el teorema de Gauss:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0, \quad (15.6)$$

donde Q es la carga en el volumen del cilindro y S , la superficie del cilindro. Es obvio que $Q = \tau h$. El flujo de \mathbf{E} a través de la base del cilindro es nulo, ya que el vector \mathbf{E} es paralelo a las bases. El flujo de \mathbf{E} que atraviesa la superficie lateral, se calcula fácilmente, puesto que en ésta el vector \mathbf{E} coincide en dirección con la normal a la superficie y según el módulo, es constante. Entonces

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{lat}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r h. \quad (15.7)$$

De esta manera, el teorema de Gauss conduce a la igualdad

$$E \cdot 2\pi r h = \tau h / \epsilon_0, \quad (15.8)$$

de la cual obtenemos

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}. \quad (15.9)$$

En un campo que posee esa intensidad, la fuerza que actúa sobre la carga puntual, tiene el valor de (8.5), obtenido aplicando directamente la ley de Coulomb.

Ecuación de Laplace y Poisson. En muchos casos el método más preferible para hallar la intensidad del campo es la reducción de la tarea a la solución de una ecuación diferencial para el potencial. Para obtenerla, sustituyamos en

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (15.10)$$

la expresión

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (15.11)$$

Entonces

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\rho/\epsilon_0. \quad (15.12)$$

Consideraremos que

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi, \quad (15.13)$$

donde ∇^2 es el operador de Laplace, que representa la suma de las segundas derivadas respecto a las coordenadas. A veces se denota por $\Delta \equiv \nabla^2$. Haciendo uso de (15.13), la igualdad (15.12) se escribe como

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0 \quad (15.14)$$

y se denomina **ecuación de Poisson**. En las zonas del espacio donde no hay cargas ($\rho = 0$), dicha ecuación se transforma en

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (15.15)$$

llamada **ecuación de Laplace**.

Después de hallar el potencial φ como solución de (15.14), puede calcularse la intensidad del campo eléctrico por la fórmula (15.11). La solución debe satisfacer las exigencias, enunciadas para el potencial (véase el § 14): *el potencial φ es una función finita y continua, con derivadas finitas respecto a las coordenadas.*

Si todas las cargas están concentradas en una zona finita del espacio, la solución de (15.14), es (14.35), lo que se desprende de la unicuidad de la solución de los problemas del electromagnetismo (véase el § 58).

La ventaja más importante de hallar la intensidad del campo con ayuda de la ecuación diferencial de Poisson para el potencial es la comunidad amplia de este método y su aplicación. Las fórmulas (14.35) y (14.36) suponen que todas las cargas se encuentran en una zona finita del espacio, merced a lo cual tiene sentido la normalización del potencial a cero en el infinito. Pero la ecuación de Poisson no presupone la normalización definida del potencial y la ausencia de las cargas en el infinito.

Cilindro circular infinito, cargado uniformemente. Aplicando la ecuación de Poisson, hallemos el potencial, creado por un cilindro circular infinito de radio a , cuya densidad volumétrica de la carga es $\rho = \text{const}$.

Dirijamos el eje Z a lo largo del eje del cilindro. Como consecuencia de la simetría axial de la distribución de la carga, el potencial φ posee también simetría axial, o sea, $\varphi = \varphi(r)$. Por esta razón, es cómodo hacer uso del sistema

de coordenadas cilíndricas, cuyo ángulo axial designaremos por α . En dicho sistema el operador de Laplace tiene el siguiente aspecto

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (15.16)$$

Puesto que en este caso el potencial φ depende sólo de r , la expresión (15.16) se simplifica:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (15.17)$$

y la ecuación de Poisson (15.14) se escribe así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_1}{dr} \right) &= -\rho/\epsilon_0 \quad (0 < r < a), \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_2}{dr} \right) &= 0 \quad (r > a). \end{aligned} \quad (15.18)$$

Las soluciones comunes de (15.18) se encuentran por integración:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 + A_1 \ln r + B_1, \\ \varphi_2 &= A_2 \ln r + B_2, \end{aligned} \quad (15.19)$$

donde A_1 , A_2 , B_1 y B_2 son constantes de integración. Dado que el potencial en todos los puntos debe ser finito, y $\ln r \rightarrow \infty$ para $r \rightarrow 0$, es necesario en la solución de (15.19) poner $A_1 = 0$. También resulta cómodo normalizar el potencial mediante la condición $\varphi_1(0) = 0$, entonces $B_1 = 0$.

Dado que no hay cargas superficiales, la intensidad del campo eléctrico en la superficie de la esfera es continua, es decir, es continua la derivada respecto al potencial. Las condiciones de continuidad para el potencial y su derivada a $r = a$ dan dos ecuaciones algebraicas para definir las dos constantes A_2 y B_2 , que permanecen por ahora incógnitas:

$$A_2 \ln a + B_2 = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0} a^2, \quad \frac{A_2}{a} = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} a. \quad (15.20)$$

De aquí se desprende que

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 \quad (0 < r \leq a), \\ \varphi_2(r) &= \frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} a^2 \ln \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0} a^2 \quad (r \geq a). \end{aligned} \quad (15.21)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} r \quad (0 < r \leq a), \\ E_r &= -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{a^2}{r} \quad (r \geq a). \end{aligned} \quad (15.22)$$

Teniendo en cuenta que $\rho \pi a^2 = \tau$ es la carga que corresponde a un metro de longitud del cilindro, la segunda igualdad de (15.22) puede escribirse

como

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}. \quad (15.23)$$

La comparación de (15.23) y (15.9) muestra que el campo fuera de un cilindro con carga uniforme es tal como si toda su carga estuviese concentrada en el eje.

La búsqueda de la intensidad del campo por la distribución prefijada de las cargas, aplicando directamente la ley de Coulomb, es la más natural, pero no la más sencilla.

Por lo general es útil hallar la intensidad del campo con ayuda del teorema de Gauss, habiendo simetrías de la distribución de la carga.

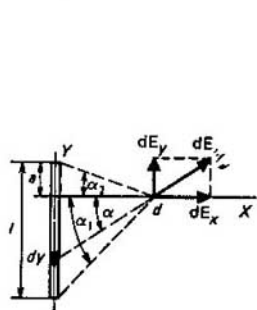


Fig. 44
Para el cálculo de la intensidad del campo eléctrico de una carga lineal de longitud finita

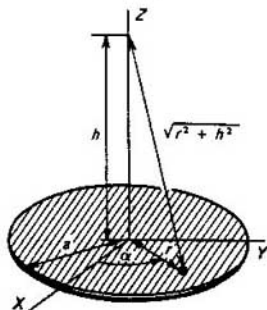


Fig. 45
Para el cálculo de la intensidad del campo eléctrico de un disco con carga

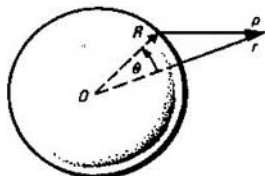


Fig. 46
Para el cálculo de la intensidad del campo de la carga superficial de una esfera

¿Qué puede decirse del sentido físico del potencial en los márgenes de la electrostática? ¿Qué sentido físico tiene la diferencia de potencial?

Ejemplo 15.1. Hallar la intensidad del campo de un hilo recto de longitud finita, cargado uniformemente con una densidad lineal de la carga τ (fig. 44). Tomar: $\tau = 10^{-10}$ C/m; $l = 1$ m; $d = 0,5$ m; $a = 0,5$ m.

Según la ley de Coulomb

$$dE_x = \frac{\tau dy \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{\tau dy}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + d^2)^{3/2}},$$

$$dE_y = \frac{\tau dy \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{\tau y dy}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + d^2)^{3/2}},$$

de donde

$$E_x = \frac{\tau d}{4\pi\epsilon_0} \int_{-(l-a)}^a \frac{dy}{(y^2 + d^2)^{3/2}},$$

$$E_y = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-(l-a)}^a \frac{y dy}{(y^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Sustituyendo las variables $y = d \tan \alpha$, $dy = d \sec^2 \alpha$, $1 + \tan^2 \alpha = 1/\cos^2 \alpha$ e integrando, obtenemos

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1) = 1,27 \text{ V/m},$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = 0. \quad (15.24)$$

Para un hilo infinito ($l \rightarrow \infty$) $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ y por eso $E_y = 0$ y $E_x = \tau/(2\pi\epsilon_0 d)$.

Ejemplo 15.2. Aplicando el potencial, determinar la intensidad del campo en los puntos de la perpendicular al plano del disco si por éste se distribuye uniformemente una carga Q . El radio del disco es a (fig. 45).

Tomar: $Q = 10^{-10}$ C; $a = 10$ cm; $h = 20$ cm (la distancia desde el plano del disco hasta el punto).

Según la fórmula (14.36) tenemos

$$\varphi(h) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma \, dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}, \quad \sigma = \frac{Q}{\pi a^2}.$$

Para calcular la integral pasemos a las coordenadas polares en el plano del disco: $x^2 + y^2 = r^2$, $dx \, dy = r \, dr \, d\alpha$,

$$\varphi(h) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^a \frac{r \, dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} (\sqrt{a^2 + h^2} - h), \quad (15.25)$$

de donde

$$E_h = -\frac{\partial \varphi}{\partial h} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right) = 18 \text{ V/m}. \quad (15.26)$$

La fórmula (15.26) coincide con (15.3).

Ejemplo 15.13. Hallar la intensidad del campo eléctrico que crea una carga superficial de la esfera de radio R . La carga total de la esfera es Q y la densidad superficial de la carga es $\sigma = Q/(4\pi R^2)$.

El potencial, originado por el elemento de la superficie cargada (fig. 46) en el punto que se caracteriza por r , es igual a

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\alpha}{\rho}, \quad (15.27)$$

donde $R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\alpha$ es el elemento superficial de la esfera en coordenadas esféricas, cuyo eje polar coincide con el vector r ; el ángulo α es axial. De la figura se ve que $\rho = R - r$. Después de elevar ambos miembros de la igualdad al cuadrado, hallamos que $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$. Tomando las diferenciales de los dos miembros de dicha igualdad, tenemos

$$2\rho \, d\rho = 2Rr \sin \theta \, d\theta,$$

de donde se deduce que $R^2 \sin \theta \, d\theta = (\rho R/r) \, d\rho$. Entonces [véase (15.27)]

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R}{r} \, d\rho \, d\alpha. \quad (15.28)$$

Integrando (15.28) por toda la superficie de la esfera, hallamos

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R}{r} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{|r-R|}^{r+R} d\rho = \frac{1}{2} \frac{\sigma R}{r} [\rho]_{|r-R|}^{r+R} = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & (r > R), \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} & (r < R). \end{cases} \quad (15.29)$$

De aquí obtenemos la intensidad del campo eléctrico

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & (r > R), \\ 0 & (r < R), \end{cases}$$

o sea, fuera de una esfera cargada uniformemente la intensidad del campo es tal, como si toda la carga estuviese concentrada en su centro y dentro del volumen, limitado por la esfera, no hay campo.

§ 16. Campo electrostático en presencia de conductores

Se examina la influencia de los conductores sobre un campo eléctrico. Se describen los fenómenos físicos fundamentales, determinados por la distribución de las cargas en la superficie del conductor (fuga de las cargas de la punta, etc.). Se discuten las características cuantitativas de las propiedades eléctricas de los conductores aislados y de sistemas de conductores. Se expone la esencia del método de representaciones.

Forma diferencial de la ley de Ohm. Se llaman conductores a los cuerpos materiales, en los cuales, habiendo un campo eléctrico, surge el movimiento de las cargas, o sea, corriente eléctrica. La ley que une la intensidad de la corriente que circula por el conductor, y la diferencia de potencial, aplicada a sus extremos, fue descubierta experimentalmente en 1827 por G.S. Ohm (1787—1854) y tiene la forma

$$I = U/R, \quad (16.1)$$

donde R es una magnitud denominada resistencia del conductor. La ley de Ohm en forma diferencial se obtiene, escribiendo la relación (16.1) para la densidad de corriente. Examinemos un elemento infinitamente pequeño del conductor (fig. 47; Δl es la longitud; ΔS , la sección transversal del conductor, a cuyos extremos se aplica la diferencia de potencial $\Delta\varphi$). Sea γ la conductividad eléctrica de la substancia, que es la magnitud inversa a la resistividad eléctrica. La resistencia eléctrica del elemento del conductor y la intensidad de corriente que pasa por él, son iguales a

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}, \quad (16.2a)$$

$$I_\tau = j_\tau \Delta S, \quad (16.2b)$$

donde el índice τ significa que se toma la componente de la densidad de corriente a lo largo del elemento del conductor. La ley de Ohm para este elemento del conductor se escribe así:

$$\Delta\varphi = j_\tau \Delta S \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}. \quad (16.3)$$

Tomando en consideración que $(\Delta\varphi/\Delta l) = E_\tau$ es la componente de la intensidad del campo eléctrico en dirección del elemento en cuestión, de (16.3) obtenemos

$$j_\tau = \gamma E_\tau. \quad (16.4)$$

Esta relación es válida para cualquier orientación del elemento del conductor y, por lo tanto, puede escribirse en forma vectorial:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (16.5)$$

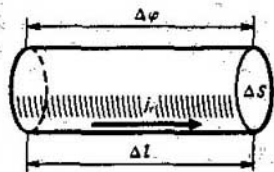


Fig. 47

Para la deducción de la forma diferencial de la ley de Ohm

Clasificación de los materiales según su conductividad. La conductividad eléctrica γ depende de las propiedades del material. Según el valor de ella, los materiales se dividen en tres clases: dieléctricos, semiconductores y conductores. Entre ellos no existe una brusca diferencia. Se considera la siguiente división de estos materiales según la conductividad:

a) dieléctricos. Substancias con pequeña conductividad eléctrica. Un dieléctrico ideal se caracteriza por la ausencia de conductividad. Pero ello puede realizarse sólo a 0 K. A temperatura diferente de 0 K, todos los materiales poseen cierta conductividad y, por lo tanto, no puede haber dieléctricos ideales; se acostumbra denominar dieléctrico al material, cuya conductividad eléctrica $\gamma < 10^{-8}$ S/m;

b) los semiconductores poseen una conductividad eléctrica superior a 10^{-3} S/m pero menor de 10^3 S/m;

c) los conductores se caracterizan por una conductividad eléctrica superior a 10^3 S/m. En su mayoría son metales. Entre ellos los mejores son el cobre y la plata, cuya conductividad eléctrica es del orden de 10^7 S/m.

Ausencia de campo eléctrico dentro del conductor. En la electrostática se examina el caso de cargas inmóviles cuando $\mathbf{j} = 0$. Entonces la igualdad (16.5) nos da

$$\mathbf{E} = 0, \quad (16.6)$$

es decir, *en el caso de equilibrio electrostático dentro del conductor no hay campo eléctrico.*

Ausencia de cargas volumétricas en el conductor. De la ecuación

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (16.7)$$

para $\mathbf{E} = 0$ se desprende que

$$\rho = 0, \quad (16.8)$$

o sea, *dentro del conductor no existen cargas volumétricas.* Eso significa que la carga del conductor se concentra en su superficie, en una capa de espesor atómico. Claro está, que *dentro del conductor existen tanto cargas positivas, como negativas, pero ellas se compensan mutuamente y en total las zonas internas del conductor son neutras.* [véase (16.8)].

El establecimiento de la neutralidad ocurre muy pronto. Supongamos que en cierto volumen dentro del conductor en el momento de tiempo $t = 0$ la densidad de las cargas libres se diferencia de cero ($\rho(0) \neq 0$). Entonces, teniendo en cuenta (16.5), la ecuación de continuidad (5.24) adquiere la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\gamma \mathbf{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

donde $\gamma = \text{const}$ (para un conductor homogéneo). Tomando en consideración (16.7), obtenemos de aquí la ecuación del cambio de ρ con el tiempo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho,$$

cuya solución es

$$\rho(t) = \rho(0) e^{-(\gamma/\epsilon_0)t},$$

es decir, la densidad disminuye exponencialmente. Según la regla general, puede considerarse que la carga volumétrica que se formó, «desaparece» en el transcurso de un lapso $\tau = \epsilon_0/\gamma$, denominado tiempo de relajación. Para los metales éste es extremadamente pequeño. Por ejemplo, para el cobre ($\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$) $\tau \approx 10^{-19} \text{ s}$. Semejante lapso es muy pequeño incluso en las escalas de procesos interatómicos. Por eso en situaciones inestables, cuando los campos varían con el tiempo, a frecuencias no muy elevadas, puede considerarse con gran precisión que en el conductor las cargas libres están distribuidas por la superficie y están ausentes las cargas volumétricas. La conclusión dada permanece válida también al tener en cuenta la dependencia entre la conductividad γ y la frecuencia, aunque se obtiene entonces el aumento del tiempo de relajación en varios órdenes.

La instauración de la neutralidad está relacionada con las corrientes que, sin embargo, no crean cargas en las zonas donde circulan. Para comprender lo dicho, examinemos un ejemplo simple. Se tiene una esfera de radio a_2 , cuya substancia se caracteriza por la constante dieléctrica ϵ y la conductividad γ . En el momento inicial $t = 0$ la zona esférica de radio $a_1 < a_2$ está cargada uniformemente con una densidad de carga ρ_0 . La capa esférica entre los radios a_1 y a_2 es neutra. Estudiemos el proceso de neutralización de la carga en el volumen de la esfera.

La variación de la densidad de la carga en diversos puntos de la esfera se da mediante la fórmula

$$\rho(r, t) = \begin{cases} \rho_0 e^{-t/\tau} & (r < a_1), \\ 0 & (r > a_1). \end{cases}$$

donde $\tau = \epsilon/\gamma$. La carga total de la esfera $Q_0 = 4/3\pi a_1^3 \rho_0$ permanece constante, pero la carga de la región esférica de radio a_1 disminuye según la ley

$$Q_1(t) = 4/3\pi a_1^3 \rho_0 e^{-t/\tau} = Q_0 e^{-t/\tau}.$$

Esta carga se traslada mediante la corriente de conducción a través de la capa esférica entre los radios a_1 y a_2 hacia la superficie de la esfera, donde se concentra en forma de carga superficial.

La distribución de la carga en cualquier momento de tiempo es esféricamente simétrica, por lo que, según el teorema de Gauss, obtenemos la siguiente expresión para la intensidad del campo eléctrico:

$$E_r = \begin{cases} \frac{Q_0 e^{-t/\tau_r}}{4\pi\epsilon a_1^2} & (0 < r < a_1), \\ \frac{Q_0 e^{-t/\tau}}{4\pi\epsilon r^2} & (a_1 < r < a_2), \\ \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > a_2). \end{cases}$$

La carga superficial de la esfera crece. Ella puede calcularse aplicando el principio de conservación de la carga o partiendo de las condiciones de frontera. En el primer caso, obtenemos

$$\sigma = \frac{1}{4\pi a_2^2} [Q_0 - Q_1(t)] = \frac{Q_0}{4\pi a_2^2} (1 - e^{-t/\tau}).$$

En el segundo caso, tenemos

$$\sigma|_{r=a_2} = D_r|_{r=a_2+0} - D_r|_{r=a_2-0} = \epsilon_0 E_r|_{r=a_2+0} - \epsilon E_r|_{r=a_2-0} = \frac{Q_0}{4\pi a_2^2} (1 - e^{-t/\tau}),$$

donde los valores de la función con los argumentos $r = a_2 + 0$ y $r = a_2 - 0$ se toman de las partes exterior e interior, respectivamente, de la superficie de la esfera.

La densidad de la corriente de conducción es igual a

$$j_r = \gamma E_r = \begin{cases} \frac{\gamma Q_0 e^{-t/\tau_r}}{4\pi\epsilon a_1^2} & (0 < r < a_1) \\ \frac{\gamma Q_0 e^{-t/\tau}}{4\pi\epsilon r^2} & (a_1 < r < a_2) \\ 0 & (a_2 < r < \infty) \end{cases}$$

La intensidad de la corriente de conducción que circula por la superficie esférica de radio r , se determina mediante la fórmula

$$I_r = j_r 4\pi r^2 = \begin{cases} \frac{\gamma Q_0 e^{-t/\tau}}{\epsilon} \frac{r^2}{a_1^2} & (0 < r < a_1) \\ \frac{\gamma Q_0 e^{-t/\tau}}{\epsilon} & (a_1 < r < a_2) \\ 0 & (a_2 < r < \infty) \end{cases}$$

Así, pues, la corriente total en la región $0 < r < a_1$ crece al aumentar el radio. Eso se determina por el hecho de que cada punto de dicho volumen es una fuente de corriente de conducción. En la región $a_1 < r < a_2$ no hay fuentes de la mencionada corriente y por eso la corriente total que atraviesa la superficie esférica no depende del radio.

Inducción electrostática. Si un conductor neutro se coloca en un campo eléctrico exterior, las cargas superficiales en el conductor se redistribuyen de

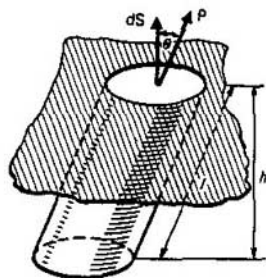


Fig. 48
Para la deducción de la fórmula para la componente normal de la intensidad del campo eléctrico en las proximidades de la superficie del conductor

manera que el campo, originado por ellas dentro del conductor, compensa por completo el campo exterior. Como consecuencia, la intensidad sumatoria del campo dentro del conductor se anula. *El fenómeno de redistribución de las cargas superficiales en el conductor, al ubicarlo en un campo eléctrico exterior, se denomina inducción electrostática.* Si el conductor está cargado, bajo la influencia del campo exterior ocurre también la redistribución de la carga del conductor.

Campo en las proximidades de la superficie del conductor. Elijamos en la superficie del conductor un elemento superficial ΔS y construyamos un cilindro recto de altura h , que interseca la superficie (fig. 48). Apliquemos a este cilindro el teorema de Gauss:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0, \quad (16.9)$$

donde S es la superficie del cilindro; Q , la carga en el volumen del cilindro.

Dentro del cilindro la carga existe sólo en la superficie del conductor y se caracteriza por la densidad superficial σ y, por lo tanto, $Q = \sigma S$. Dentro del conductor el campo es nulo, por esta razón, el flujo de \mathbf{E} a través de una parte de la superficie del cilindro que se encuentra en el volumen del conductor, es igual a cero. El flujo a través de la parte del cilindro que está fuera del conductor, se compone de los flujos que atraviesan la base del cilindro y su superficie lateral. En el límite tomemos la altura h del cilindro tan pequeña como se quiera ($h \rightarrow 0$), por lo tanto, también el área de la superficie lateral del cilindro y el flujo de \mathbf{E} a través de dicha superficie serán tan pequeñas como se desee. Por eso en el límite $h \rightarrow 0$, quedará sólo el flujo que atraviesa la base del cilindro:

$$\int_{\Delta S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_n \Delta S, \quad (16.10)$$

donde E_n es la componente normal de \mathbf{E} . Recordemos que en el teorema de Gauss por dirección positiva de la normal se toma la normal exterior respecto a la superficie cerrada. En el caso en cuestión ello significa que la normal positiva está orientada hacia el lado exterior de la superficie del conductor. Para $h \rightarrow 0$, teniendo en cuenta (16.10), la igualdad (16.9) toma el aspecto

$$E_n \Delta S = \sigma \Delta S / \epsilon_0, \quad (16.11)$$

de donde

$$E_n = \sigma / \epsilon_0. \quad (16.12)$$

De esta manera, *la componente normal de la intensidad del campo en la superficie del conductor se determina unívocamente por la densidad superficial de las cargas.*

Ahora surge la cuestión de la componente tangencial de la intensidad del campo. Mostremos que debe ser nula, partiendo del hecho de que no puede existir el móvil perpetuo. Examinemos un contorno cerrado L que interseca la superficie del conductor, cuya parte superior va paralelamente a la superficie fuera del conductor y la inferior, dentro del conductor (fig. 49). Dentro del conductor la intensidad E del campo es nula y, por lo tanto, no existe la componente tangencial del campo. Supongamos que fuera del conductor la componente tangencial del campo no es igual a cero. Cojamos una carga positiva y desplacémosla por el contorno cerrado en la dirección indicada por las flechas en la fig.

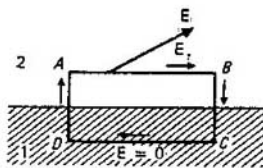


Fig. 49
Para la demostración de la ausencia de la componente tangencial de la intensidad del campo eléctrico fuera del conductor

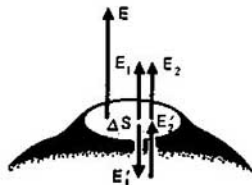


Fig. 50
Mecanismo de formación del campo en las inmediaciones de la superficie del conductor

49. En la sección AB el campo ejerce un trabajo positivo. La sección BC puede hacerse en el límite tan pequeña como quiera, ya que las secciones AB y CD se encuentran tan cerca como se quiera de la superficie del conductor. Por consiguiente, el desplazamiento por la sección BC está relacionado con el trabajo que puede hacerse tan pequeño como se desee. Para desplazar la carga en el segmento CD no se gasta trabajo alguno, puesto que el campo dentro del conductor está ausente. El trabajo, relacionado con el movimiento de la carga en la sección DA , lo mismo que en BC , puede hacerse tan pequeño como se quiera. De esta manera, como consecuencia de los desplazamientos de la carga por un contorno cerrado, el campo eléctrico efectúa un trabajo positivo y en el sistema no habrá ningunos cambios más. Puede repetirse este ciclo, obteniendo otra vez el mismo trabajo, etc. Así pues, se realiza el móvil perpetuo de primer género, lo que en principio, es imposible. Este móvil perpetuo efectúa el trabajo a cuenta de la componente tangencial de la intensidad del campo eléctrico en las inmediaciones de la superficie del conductor. Por lo tanto, esta componente debe ser nula. Con otras palabras, la igualdad de la componente tangencial del campo eléctrico a cero en la superficie del conductor es consecuencia del carácter potencial del campo electrostático y de la ausencia del campo dentro del conductor.

La igualdad

$$E_{\tau} = 0 \quad (16.13)$$

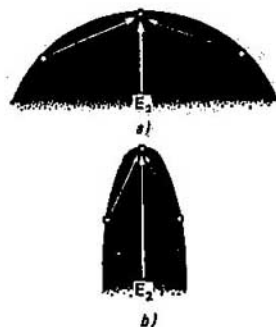


Fig. 51
Dependencia entre la densidad superficial de la carga y la curvatura de la superficie

claro que las cargas del elemento superficial ΔS originan un campo por las dos partes del elemento. Dado que las dos partes del elemento ΔS son equivalentes, puede hacerse la conclusión de que los vectores E_1 y E_1' tienen orientación contraria y son iguales por el módulo $|E_1| = |E_1'|$. El campo E_2 se crea por todas las cargas que se encuentran fuera del elemento ΔS . Es obvio que estas cargas generan no sólo la intensidad E_2 fuera del conductor, sino que también la intensidad E_2' dentro del conductor. Puesto que esto es precisamente el campo eléctrico en el espacio sin las cargas que lo originan, él debe ser continuo y, por lo tanto, $E_2 = E_2'$. La intensidad del campo total dentro del conductor es igual a cero, es decir, $E' = E_1' + E_2' = 0$. De aquí se desprende que $E_1' = -E_2'$. Teniendo en cuenta también la igualdad $|E_1| = |E_1'|$; sacamos la conclusión de que $|E_1| = |E_2|$.

De aquí se deduce que

$$E_1 = E_2 = 1/2 E, \quad (16.14)$$

es decir, *la intensidad del campo en las inmediaciones de la superficie del conductor consta de dos partes iguales: una se origina por las cargas superficiales del elemento adyacente de la superficie y la otra, por todas las demás cargas que yacen fuera de dicho elemento de la superficie.*

Dependencia entre la densidad superficial de las cargas y la curvatura de la superficie. La carga se distribuye por la superficie del conductor de manera no uniforme, es decir, la densidad superficial de la carga depende de la curvatura de la superficie. Para cerciorarse de ello analicemos la distribución de la intensidad del campo en las proximidades de cierto elemento superficial (fig. 51). Siendo pequeña la curvatura de la superficie (fig. 51, a), las cargas que están fuera de dS crean cerca de este elemento una pequeña componente normal de intensidad E_2' . Como consecuencia, para compensarla las cargas del elemento su-

significa que *la intensidad del campo eléctrico en las proximidades de la superficie del conductor está dirigida por la perpendicular a la superficie y es igual a σ/ϵ_0* [véase (16.12)].

Mecanismo de formación del campo cerca de la superficie del conductor. En la electrostática la única fuente de creación del campo eléctrico son las cargas. Por esta razón, el campo en las inmediaciones de la superficie del conductor se crea por todas las cargas superficiales del conductor dado y por todas las cargas que se encuentran fuera del conductor. Separemos un elemento infinitamente pequeño ΔS de la superficie del conductor (fig. 50). La intensidad E del campo cerca de la superficie del conductor consta de dos partes: la intensidad E_1 del campo, originado por las cargas que se encuentran en el elemento ΔS , y la intensidad E_2 del campo, creado por todas las demás cargas fuera del elemento ΔS . Está

periférica deben originar una intensidad relativamente pequeña del campo $E'_1 = -E_1$. Conforme a las fórmulas (16.14) y (16.12), concluimos que en este elemento la densidad superficial de la carga debe ser relativamente pequeña e igual a $\sigma = 2\epsilon_0 E'_1$. Pero si la curvatura de la superficie en las inmediaciones del elemento en cuestión es grande, la intensidad E_1 , creada por las cargas que se encuentran fuera del elemento superficial dS , es grande y, correspondientemente, debe ser mucho mayor la intensidad, originada por las cargas que yacen en el

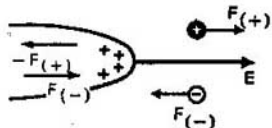


Fig. 52
Fuga de las cargas de la punta

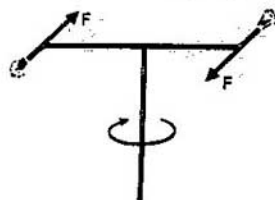


Fig. 53
Rueda «Segner» eléctrica

elemento superficial. Pero ello significa que la densidad superficial de las cargas en dicho elemento debe ser mayor. Así pues, puede sacarse la conclusión de que *la densidad superficial de las cargas crece al aumentar la curvatura de la superficie, o sea, crece al disminuir el radio de curvatura.*

Mediante razonamientos análogos, puede uno cerciorarse de que *en la superficie, cóncava hacia dentro, del conductor la densidad de la carga disminuye.*

El aumento de la densidad superficial de la carga en superficies convexas se observa con evidencia en la fuga de la carga de una punta.

Fuga de la carga de una punta. Examinemos lo que ocurre en la cercanía de una punta del conductor cargado (fig. 52). La intensidad E en las proximidades de la punta es muy elevada. En el aire circundante existen cargas (iones, electrones) sobre las cuales en el campo con intensidad E actúa una fuerza. De acuerdo con la tercera ley de Newton, una fuerza igual, pero con dirección contraria, actúa sobre las cargas de la punta. Por eso como consecuencia de la interacción, las cargas en el aire cerca de la punta y la propia punta reciben los mismos impulsos, pero de orientación contraria. Las cargas en el aire, que se mueven hacia la punta, influidas por la fuerza que actúa sobre ellas, al caer sobre la punta, le transmiten su impulso y carga. Este impulso es de igual módulo que el impulso que recibió la punta a causa de la interacción con la carga correspondiente, pero de dirección contraria. Por lo tanto, debido a que las cargas caen sobre la punta, dichos impulsos se compensan mutuamente y el resultado total de la interacción es nulo.

Así pues, *la interacción de las cargas de la punta con las de signos contrarios del aire circundante no conduce a la aparición de fuerza alguna que actúe sobre la punta.*

Otra cosa es cuando se trata de cargas del mismo signo: la fuerza que actúa sobre las cargas de la punta, está dirigida todo el tiempo hacia el conductor (en

la fig. 52 esta fuerza se denota $-E_{(+)}$. Si la punta tiene carga positiva, las cargas negativas que llegan a la punta, como se muestra en la fig. 52, neutralizan las correspondientes cargas positivas. Eso parece como si las cargas positivas abandonasen la punta o, como se dice, se fugaran de la punta. La fuerza $-E_{(+)}$ que actúa sobre la punta en este caso, equivale a la fuerza reactiva que surge como consecuencia de la fuga de las cargas de la punta. Si esta última posee carga negativa, los electrones la abandonan de hecho, o sea, en realidad se fugan de la punta. El mecanismo de la aparición de la «fuerza reactiva» aquí es completamente semejante al descrito anteriormente.

Esto significa que la «fuerza reactiva» aparece no sólo en el momento de «partida» de los electrones de la superficie del conductor, sino que en todos los momentos posteriores de tiempo cuando el electrón se acelera por el campo de las cargas que quedaron en la punta.

Una demostración eficaz de la presencia de la «fuerza reactiva» a causa de la fuga de la carga de una punta, es la rotación de la rueda «Segner» eléctrica (fig. 53). Las flechas punteadas muestran la dirección de la fuga de las cargas, merced a lo cual surge la «fuerza reactiva» y el segmento horizontal del conductor comienza a girar rápidamente alrededor de su eje vertical.

Electroscopios y electrómetros. El dispositivo más simple para descubrir las cargas eléctricas es una barra metálica vertical o una placa, al cual se fija por un extremo una lámina conductora ligera o una flecha (fig. 54). Al no haber carga alguna en la barra metálica y en la lámina (flecha), esta última pende verticalmente, de modo paralelo a la barra. Habiendo una carga, las fuerzas de repulsión entre las cargas de un mismo signo en la barra y lámina (flecha) desvían la lámina respecto a la posición vertical a cierto ángulo. De esta manera, el dispositivo puede servir de indicador para la presencia de carga, o sea, de electroscopio. El ángulo de desviación de la flecha respecto a la perpendicular es tanto mayor, cuanto mayor es la carga de la barra. Esto permite graduar el electroscopio y, basándose en el ángulo de desviación, definir la cantidad de electricidad en él. Semejante electroscopio, adaptado para las mediciones cuantitativas, se denomina electrómetro. La carga depende del potencial de la barra y la flecha. Por eso con ayuda del electrómetro puede medirse la diferencia de potencial. El electrómetro se ubica en un cuerpo (fig. 54).

La dependencia entre la densidad superficial de la carga y la curvatura de la superficie del conductor se muestra mediante el electrómetro de la siguiente manera. Con una bola conductora pequeña, fijada en un mango no conductor, se toca la sección correspondiente de la superficie del conductor (fig. 55). En la bola se crea una carga tanto mayor, cuanto mayor sea la densidad superficial de la carga en la parte del conductor con la que está en contacto la bola. Después de eso, la bola se aleja de la superficie del conductor y se pone en contacto con la barra del electrómetro. Este último recibe una carga tanto mayor, cuanto mayor sea la carga de la bola. Por esta razón, por la desviación de la aguja se puede juzgar sobre la densidad superficial de la carga de aquella sección de la superficie del conductor, de la que se tomó la carga, transmitida al electrómetro. Haciendo uso de las relaciones de los ángulos de desviación de la aguja, puede juzgarse sobre la relación de las densidades superficiales de la carga en las seccio-

nes correspondientes de la superficie del conductor. La densidad superficial de la carga varía considerablemente en función de la curvatura de la superficie.

Pantalla metálica. El mecanismo de aniquilación del campo dentro de un conductor por la distribución de las cargas en su superficie muestra que las partes interiores del conductor no tienen nada que ver con eso, por lo que se pueden eliminar. Como consecuencia de eso queda una envoltura cerrada conductora

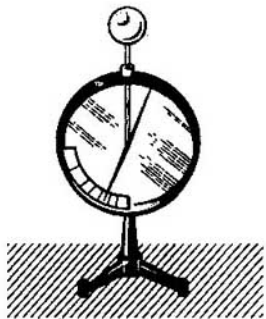


Fig. 54
Esquema del electroscopio y electrómetro

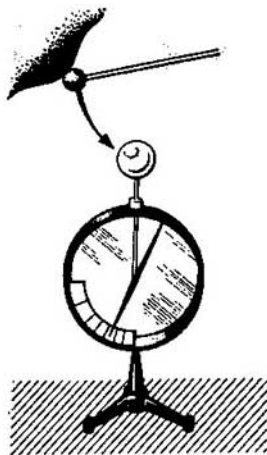


Fig. 55
Demostración de la dependencia entre la densidad de la carga superficial en el conductor y la curvatura de la superficie con ayuda del electrómetro

(fig. 56). En el espacio, rodeado por la envoltura, el campo eléctrico es nulo. La envoltura cerrada se denomina **pantalla**. Esta apantalla el espacio interior contra los efectos del campo eléctrico exterior. Las pantallas se utilizan para proteger los dispositivos técnicos contra las influencias de los campos eléctricos exteriores. Por lo general, se confeccionan no de material conductor continuo, sino de una red con celdillas pequeñas. Como muestran la experiencia y el cálculo, la capacidad de blindaje de semejante red es algo inferior a la de la pantalla continua, pero se gasta mucho menos material y la estructura de la pantalla resulta más sencilla.

¿Apantalla una envoltura conductora cerrada el espacio exterior de las cargas que están dentro de la cavidad? O hablando de otra manera, ¿puede penetrar el campo de las cargas, que hay en el volumen, rodeado por una envoltu-

ra conductora cerrada, al espacio exterior? Sí, penetra. Para cerciorarse de ello es necesario analizar con más detalle la situación.

Supongamos que en el volumen V dentro de la cavidad está distribuida una carga

$$Q = \int_V \rho \, dV. \quad (16.15)$$

Según la ley de la inducción electrostática en la superficie interior de la envoltura se forma una carga de signo contrario (fig. 57). Para hallar su valor

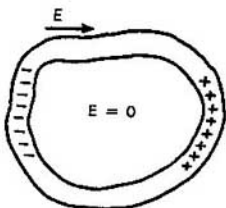


Fig. 56
Pantalla metálica para los campos exteriores

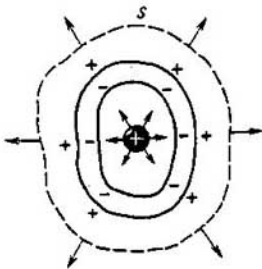


Fig. 57
Carga, rodeada por una envoltura conductora cerrada

utilicemos el teorema de Gauss, aplicado al volumen dentro de la envoltura cerrada:

$$\int_{S_{int}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV, \quad (16.16)$$

donde S_{int} es la superficie interior de la envoltura.

Designando por σ la densidad superficial de la carga en la superficie interior, obtenemos para la intensidad \mathbf{E} del campo cerca de la superficie [(véase (16.12))]:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}, \quad (16.17)$$

donde \mathbf{n} es la normal a la superficie interior de la envoltura, dirigida hacia dentro del volumen, limitado por la envoltura. Consideremos que $d\mathbf{S}$ en (16.16) está orientado por la normal exterior al volumen V , es decir, de manera contraria a \mathbf{n} . Por lo tanto,

$$\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = dS \cos(\mathbf{n}, d\mathbf{S}) = dS \cos \pi = -dS. \quad (16.18)$$

La integral en el primer miembro de (16.16), teniendo en cuenta (16.17) y (16.18), es igual a

$$\int_{S_{\text{int}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{S_{\text{int}}} \sigma dS. \quad (16.19)$$

Entonces el teorema de Gauss (16.16) adquiere la forma

$$-\int_{S_{\text{int}}} \sigma dS = \int_V \rho dV = Q. \quad (16.20)$$

Por lo tanto, en la superficie interior de la envoltura se forma una carga de igual valor absoluto que la carga dentro de la cavidad, pero de signo contrario.

La intensidad del campo dentro de la envoltura es nula, ya que la envoltura es en sí un conductor. En la superficie exterior de la envoltura hay cierta carga, cuyo signo es contrario al de la carga en la envoltura interior, mientras que el valor absoluto de la carga, según el principio de conservación de la carga, es igual al de la carga en la superficie interior.

Para demostrar la existencia de un campo eléctrico en el espacio exterior haremos uso del teorema de Gauss. En la fig. 57 la curva a trazos muestra la superficie cerrada que rodea la envoltura. La carga total en el volumen, limitado por esta superficie cerrada, es igual a la carga dentro de la cavidad, limitada por la envoltura, ya que la carga de la envoltura es nula. Por consiguiente, el teorema de Gauss tiene el aspecto

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = Q/\epsilon_0 \neq 0, \quad (16.21)$$

es decir, la intensidad \mathbf{E} del campo en el espacio exterior que rodea la envoltura no es nula.

Ahora spongamos a tierra la envoltura, o sea, unámosla mediante un conductor con un cuerpo conductor muy grande alejado. Por lo general la Tierra sirve de ese cuerpo (fig. 58). Para simplificar el análisis representemos este cuerpo como un medio conductor infinito que ocupa todo el espacio fuera de la envoltura y que está en contacto con ella. Todas las cargas de la superficie exterior de la envoltura se alejarán al infinito, quedará sólo la carga dentro de la cavidad y la carga en la superficie interior de la envoltura. La intensidad del campo dentro del medio conductor que rodea la envoltura, es nula. En este caso el papel del medio se reduce sólo al hecho de que se asegure el alejamiento de la carga de la superficie exterior de la envoltura al infinito. Por esta razón, el papel de las zonas del medio a una distancia finita de la envoltura puede desempeñarlo un conductor fino de alambre que garantice la posibilidad del intercambio de cargas entre la envoltura y las zonas del medio suficientemente alejadas. Está claro que después de eliminar el medio conductor de la región que rodea la en-

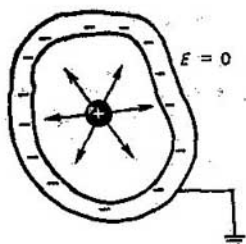


Fig. 58
La envoltura cerrada puesta a tierra apantalla el espacio exterior contra las cargas dentro del volumen

voltura, la intensidad del campo en los puntos de la región es como siempre nula. Así pues, *la envoltura cerrada puesta a tierra apantalla el espacio exterior de las cargas que se encuentran en el volumen rodeado por esta envoltura. La envoltura no puesta a tierra no apantalla.*

Potencial de un conductor. De la igualdad a cero de la intensidad E del campo dentro del conductor, se desprende que en todos los puntos del conductor el potencial tiene un mismo valor, es decir, la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 del conductor [véase (14.28)] es igual a

$$\varphi(2) - \varphi(1) = \int_{(1)}^{(2)} E \cdot dl = 0. \quad (16.22)$$

El valor del potencial, igual en todos los puntos del conductor, se denomina potencial del conductor.

Supongamos que existe un conductor cargado aislado. En el espacio que rodea el conductor hay un campo eléctrico, creado por la carga del conductor. Normalicemos el potencial a cero en el infinito. Entonces [véase (14.29)] el potencial del conductor puede expresarse mediante la fórmula

$$\varphi = \int_{(\text{superficie del conductor})}^{\infty} E \cdot dl. \quad (16.23)$$

En la fórmula (16.23) el camino de integración comienza en cualquier punto del conductor y termina en el infinito.

Capacidad de un conductor aislado. ¿De qué depende el potencial de un conductor aislado? De la fórmula (16.23) se ve que según el principio de superposición, el potencial debe ser directamente proporcional a la carga, ya que E en el integrando de (16.23) es directamente proporcional a la carga. A continuación queda evidente que el potencial depende de las dimensiones y la forma del conductor, las cuales se tienen en cuenta por su capacidad.

Se llama **capacidad** del conductor a la relación entre la carga Q del conductor aislado y su potencial φ :

$$C = Q/\varphi. \quad (16.24)$$

La capacidad del conductor se expresa en faradios (F). De (16.24) hallamos:

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}. \quad (16.25)$$

En el sistema de unidades electrostáticas la capacidad se expresa en centímetros. La fórmula para la capacidad coincide con (16.24). Dado que $1 \text{ V} = (1/300)$ de unidades del sistema cegesimal, $1 \text{ C} = 3 \cdot 10^9$ unidades del sistema cegesimal, de (16.24) se desprende que $1 \text{ F} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm}$.

El faradio es una unidad muy grande. Calculemos, por ejemplo, la capacidad de una esfera, cuyo radio es R y la carga Q . Puesto que la intensidad del campo de semejante esfera en el espacio que la rodea es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{r}{r}, \quad (16.27)$$

el potencial y la capacidad se expresan por las fórmulas:

$$\varphi = \int_R^{\infty} E \, dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}, \quad (16.28)$$

$$C = Q/\varphi = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (16.29)$$

Para el radio de la esfera de 1 cm hallamos

$$C = 10^{-2}/(9 \cdot 10^9) \approx 10^{-12} \text{F}. \quad (16.30)$$

Por esta razón, para la capacidad se suelen emplear los submúltiplos del faradio: microfaradio (μF), nanofaradio (nF) y picofaradio (pF).

Sistema de conductores. Si hay varios conductores, el potencial de cada uno de ellos depende no sólo de la carga del conductor, sino que también de las intensidades de los campos, creados por otros conductores, o, con otras palabras, es función de las cargas de los otros conductores, con la particularidad de que, según el principio de superposición, es directamente proporcional a esas cargas.

Para mayor definición examinemos dos conductores (fig. 59). Basándose en lo dicho, puede escribirse

$$\varphi_1 = \alpha_{11}Q_1 + \alpha_{12}Q_2, \quad \varphi_2 = \alpha_{21}Q_1 + \alpha_{22}Q_2, \quad (16.31)$$

dónde α_{ij} son los coeficientes potenciales que dependen de la forma y las dimensiones de los conductores, asimismo de su disposición mutua. El cálculo teórico de dichos coeficientes resulta ser un problema matemático muy complejo. Por lo general, se determinan por vía experimental.

Los coeficientes potenciales no son mutuamente independientes, de los que uno puede cerciorarse de la siguiente manera. Sean σ_1 y σ_2 las densidades superficiales de las cargas; r_{11} , la distancia entre el elemento de integración dS_1 en la superficie del primer conductor hasta cierto punto fijo dentro de él; r_{12} , la distancia entre el elemento de la superficie dS_2 del segundo conductor hasta el mismo punto. Entonces los potenciales de los conductores primero y segundo son respectivamente iguales a

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \frac{\sigma_1 \, dS_1}{r_{11}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \frac{\sigma_2 \, dS_2}{r_{12}}, \quad (16.32)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \frac{\sigma_2 \, dS_2}{r_{22}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \frac{\sigma_1 \, dS_1}{r_{21}}, \quad (16.33)$$

(el sentido de r_{22} y r_{21} es el mismo que el de r_{11} y r_{12}).

Las cargas de los conductores son iguales a:

$$Q_1 = \int_{S_1} \sigma_1 \, dS_1, \quad Q_2 = \int_{S_2} \sigma_2 \, dS_2. \quad (16.34)$$

Supongamos que las cargas de los conductores han variado:

$$Q'_1 = \int_{S_1} \sigma'_1 \, dS_1, \quad Q'_2 = \int_{S_2} \sigma'_2 \, dS_2. \quad (16.35)$$

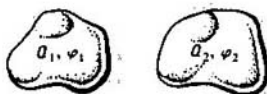


Fig. 59
Sistema de conductores

Multipliquemos ambos miembros de (16.32) por Q'_1 y (16.33) por Q'_2 , y sumemos miembro a miembro las igualdades obtenidas:

$$\begin{aligned}
 Q'_1\varphi_1 + Q'_2\varphi_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \sigma'_1 dS_1 \int_{S_1} \frac{\sigma_2 dS_{11}}{r_{11}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \sigma'_1 dS_1 \int_{S_2} \frac{\sigma_2 dS_2}{r_{12}} + \\
 &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \sigma'_2 dS_2 \int_{S_2} \frac{\sigma_1 dS_2}{r_{22}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \sigma'_2 dS_2 \int_{S_1} \frac{\sigma_1 dS_1}{r_{21}} = \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \sigma_1 dS_1 \int_{S_1} \frac{\sigma'_1 dS_{11}}{r_{11}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \sigma_2 dS_2 \int_{S_1} \frac{\sigma'_1 dS_1}{r_{12}} + \\
 &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \sigma_2 dS_2 \int_{S_2} \frac{\sigma'_2 dS_{22}}{r_{22}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \sigma_1 dS_1 \int_{S_2} \frac{\sigma'_2 dS_2}{r_{21}} = Q_1\varphi'_1 + Q_2\varphi'_2, \quad (16.36)
 \end{aligned}$$

donde el orden de integración se ha cambiado, ya que la integración se efectúa con relación a diferentes variables independientes. Las magnitudes φ'_1 y φ'_2 son potenciales de los conductores cuando sus cargas son iguales a Q'_1 y Q'_2 . La relación, obtenida en (16.36)

$$\boxed{Q'_1\varphi_1 + Q'_2\varphi_2 = Q_1\varphi'_1 + Q_2\varphi'_2} \quad (16.37)$$

se denomina **teorema de la reciprocidad**. Partiendo de él, se obtiene la condición a que satisfacen los coeficientes potenciales α_{ij} .

Si la carga del segundo conductor es nula ($Q_2=0$, $Q_1 \neq 0$), entonces 0 [véase (16.31)]

$$\varphi_1 = \alpha_{11}Q_1, \quad \varphi_2 = \alpha_{21}Q_1. \quad (16.38)$$

Si la carga del primer conductor es nula ($Q_1=0$, $Q_2 \neq 0$), [véase (16.31)]

$$\varphi'_1 = \alpha_{12}Q'_2, \quad \varphi'_2 = \alpha_{22}Q'_2 \quad (16.39)$$

El teorema de la reciprocidad (16.37) para estos dos casos adquiere la forma

$$Q'_2\varphi_2 = Q_1\varphi'_1. \quad (16.40)$$

Sustituyendo en (16.40) las expresiones para φ_2 y φ'_1 [véase (16.38) y (16.39)] y reduciendo ambos miembros de la igualdad obtenida por el factor común Q'_1Q_1 , hallamos

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}, \quad (16.41)$$

es decir, *los coeficientes potenciales son simétricos respecto a sus índices*.

No es difícil realizar todos los cálculos para cualquier número de conductores, escribiendo las relaciones iniciales (16.31) para n conductores en la forma

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}Q_j. \quad (16.42)$$

Todos los cálculos posteriores son análogos a los hechos desde (16.32) hasta (16.37) y en lugar de (16.37) conducen a la siguiente fórmula, que expresa el teorema de la reciprocidad para el caso general:

$$\sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i = \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i. \quad (16.43)$$

De (16.43) en vez de (16.41) se obtiene la condición general de simetría de los coeficientes potenciales

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}. \quad (16.44)$$

El sistema de ecuaciones (16.42) puede resolverse con respecto a Q_i :

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \varphi_j. \quad (16.45)$$

Aquí $C_{ij} = A_{ij}/D$, donde D es el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones (16.24), A_{ij} es el complemento del elemento α_{ij} en este determinante. Basándose en (16.44), sacamos la conclusión de que los coeficientes C_{ij} satisfacen la condición

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad (16.46)$$

donde C_{ij} son los coeficientes de capacidad, C_{ii} el coeficiente de capacidad del i -ésimo conductor y C_{ij} , el coeficiente de capacidad entre los conductores i -ésimo y j -ésimo. El coeficiente de capacidad de un conductor aislado se denomina simplemente capacidad del conductor.

Dado que la carga positiva en el conductor aislado origina un potencial positivo, puede deducirse que *todos los coeficientes de capacidad con los mismos índices* (C_{11}, C_{22}, \dots) *son positivos*. Para cerciorarse de ello, pongamos a tierra todos los conductores, a excepción del i -ésimo, en el que dejamos una carga positiva, o sea, consideraremos que $Q_i > 0$. Entonces es obvio que $\varphi_i > 0$ y $\varphi_j = 0$ para $j \neq i$. Por lo tanto, la ecuación (16.45) para Q toma la forma

$$Q_i = C_{ii} \varphi_i. \quad (16.47)$$

Puesto que $\varphi_i > 0$ y $Q_i > 0$, $C_{ii} > 0$, lo que se necesitaba demostrar.

De la misma manera puede demostrarse que *los coeficientes de capacidad con diversos índices no pueden ser positivos: pueden ser negativos o bien nulos*. Por ejemplo, examinemos dos conductores, uno de los cuales está puesto a tierra y el otro está aislado y con carga positiva. Esta carga positiva induce una carga negativa en el conductor conectado a tierra, como consecuencia del fenómeno de inducción electrostática. La fórmula (16.45) para la carga en el segundo conductor adquiere el aspecto

$$Q_2 = C_{21} \varphi_1. \quad (16.48)$$

Ya que $Q_2 < 0$, $\varphi_1 > 0$, $C_{21} < 0$. Esta deducción no excluye la posibilidad de que el coeficiente pueda ser nulo, pero no puede, sin duda alguna, ser positivo.

Examinemos tres esferas conductoras (fig. 60). Sus potenciales y cargas se denotarán por $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ y Q_1, Q_2, Q_3 , respectivamente. Para definir C_{ij} tenemos las ecuaciones (16.45) que en este caso toman la forma:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + C_{13}\varphi_3, \\ Q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + C_{23}\varphi_3, \\ Q_3 &= C_{31}\varphi_1 + C_{32}\varphi_2 + C_{33}\varphi_3. \end{aligned} \quad (16.49)$$

Para determinar los coeficientes C_{ij} es necesario tener una cantidad suficiente de ecuaciones (16.49) con Q_i y φ_i conocidos, de las cuales se calcula C_{ij} .

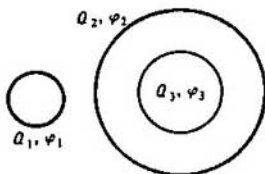


Fig. 60
Para hallar los coeficientes de capacidad en el caso de dos esferas

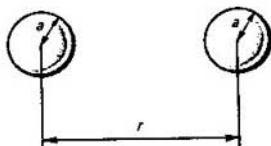


Fig. 61
Para el cálculo de los coeficientes de capacidad de dos esferas conductoras

Supongamos que $Q_3 = 0$ y la segunda esfera está puesta a tierra. Entonces $\varphi_3 = \varphi_2 = 0$ y las ecuaciones (16.49) se escriben como:

$$Q_1 = C_{11}\varphi_1, \quad Q_2 = C_{21}\varphi_1, \quad 0 = C_{31}\varphi_1. \quad (16.50)$$

Entonces, $C_{31} = C_{13} = 0$, es decir, el coeficiente de capacidad entre los conductores apantallados es nulo.

Supongamos que la primera y segunda esferas están puestas a tierra, o sea, $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$, pero la carga $Q_3 \neq 0$. En este caso las ecuaciones (16.49) toman la forma:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = C_{23}\varphi_3, \quad Q_3 = C_{33}\varphi_3. \quad (16.51)$$

Como ya se mostró, en la superficie interior de la envoltura conductora, puesta a tierra, se induce una carga de igual valor absoluto que la carga en la cavidad limitada por la envoltura, pero de signo contrario, es decir, $Q_2 = -Q_3$. De la ecuación (16.51) obtenemos

$$C_{23} = -C_{33}. \quad (16.52)$$

De esta manera, el coeficiente de capacidad entre dos conductores, uno de los cuales rodea totalmente al otro, es igual al coeficiente de capacidad del conductor interior, tomado con signo contrario. Esto desempeña un papel importante para los condensadores.

Supongamos que existen dos esferas, situadas a una distancia r , mucho mayor en comparación con sus radios a (fig. 61). Designemos por a los radios de las

esferas y por r la distancia entre sus centros. Dado que $a \ll r$, para calcular la intensidad del campo a gran distancia de las esferas puede menospreciarse la redistribución de las cargas en las esferas a causa de su inducción electrostática mutua. Entonces las fórmulas para los potenciales de las esferas adquieren el aspecto:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{r} \right), \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{a} \right), \quad (16.53)$$

donde Q_1 y Q_2 son las cargas de las esferas primera y segunda. Las ecuaciones (16.53) pueden resolverse respecto a Q_1 y Q_2 :

$$\begin{aligned} Q_1 &= 4\pi\epsilon_0 \frac{ar^2}{r^2 - a^2} \varphi_1 - 4\pi\epsilon_0 \frac{a^2 r}{r^2 - a^2} \varphi_2, \\ Q_2 &= -4\pi\epsilon_0 \frac{ra^2}{r^2 - a^2} \varphi_1 + 4\pi\epsilon_0 \frac{r^2 a}{r^2 - a^2} \varphi_2. \end{aligned} \quad (16.54)$$

Entonces,

$$C_{11} = C_{22} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ar^2}{r^2 - a^2} = C > 0, \quad (16.55)$$

$$C_{12} = C_{21} = -4\pi\epsilon_0 \frac{ra^2}{r^2 - a^2} = \gamma < 0. \quad (16.56)$$

Tomando en consideración (16.55) y (16.56), representemos (16.54) como:

$$Q_1 = C\varphi_1 + \gamma\varphi_2, \quad Q_2 = \gamma\varphi_1 + C\varphi_2. \quad (16.57)$$

Para $r \rightarrow \infty$ obtenemos $C_{11} = C_{22} = 4\pi\epsilon_0 a$, $C_{12} = C_{21} = 0$, o sea, el enlace eléctrico entre las esferas cesa y cada una de ellas se comporta como un conductor aislado, y el coeficiente de capacidad de cada esfera se convierte simplemente en la capacidad de una esfera aislada.

Examinemos ahora un problema típico.

Recordemos que siendo la configuración de los conductores y la posición mutua de ellos invariables, los coeficientes de capacidad son constantes independientemente de la variación de sus cargas y potenciales. Por esta razón, hay que estudiar tantas situaciones diferentes, cuantos coeficientes de capacidad incógnitos existen, y resolver el sistema de ecuaciones.

Sea que a las esferas se les comunican ciertas cargas, como consecuencia de lo cual sus potenciales serán φ_1 y φ_2 . Después de ello, la segunda esfera se pone a tierra. ¿Cuáles son las cargas y los potenciales de las esferas después de poner éstas a tierra?

Antes de la puesta a tierra las cargas y los potenciales de las esferas estaban relacionados entre sí mediante las ecuaciones (16.57). Ya que los potenciales son conocidos, las cargas pueden calcularse valiéndose de estas fórmulas. Una vez puesta a tierra la segunda esfera, su potencial se anula ($\varphi_2' = 0$) y la carga Q_2' es desconocida. La carga de la primera esfera es como siempre igual a $Q_1' = Q_1$, ya que ella está aislada. El potencial φ_1' es desconocido. Escribamos las ecuaciones (16.57) para el caso cuando la segunda esfera está puesta a tierra:

$$Q_1' = C\varphi_1'; \quad Q_2' = \gamma\varphi_1'; \quad Q_1' = Q_1. \quad (16.58)$$

La solución de estas ecuaciones es:

$$\varphi_1' = \frac{Q_1}{C} = \frac{C\varphi_1 + \gamma\varphi_2}{C} = \varphi_1 + \frac{\gamma}{C} \varphi_2. \quad (16.59)$$

$$Q_2' = \gamma \frac{Q_1}{C}.$$

De (16.55) y (16.56) se desprende que

$$\gamma/C = -a/r, \quad (16.60)$$

por lo que las expresiones (16.59) toman el aspecto

$$\varphi_1' = \varphi_1 - (a/r) \varphi_2, \quad Q_2' = - (a/r) Q_1. \quad (16.61)$$

es decir, después de poner la segunda esfera a tierra, el potencial de la primera esfera cambia en una a/r parte del potencial de la segunda esfera y en esta última queda la carga inducida, igual a una a/r parte de la carga de la primera esfera y con el signo contrario al de la carga de la primera esfera.

Interrumpamos la puesta a tierra de la segunda esfera, luego conectamos a tierra la primera esfera y determinemos el potencial de la segunda esfera y la carga de la primera.

Es obvio que después de que la primera esfera se pone a tierra, su potencial es nulo ($\varphi_1' = 0$) y la carga Q_1' es desconocida. Puesto que la segunda esfera está aislada, su carga no cambia al poner a tierra la primera esfera ($Q_2' = Q_2'$). Una vez puesta a tierra la primera esfera, las ecuaciones (16.57) son:

$$Q_1' = \gamma\varphi_2', \quad Q_2' = C\varphi_2', \quad Q_2' = Q_2', \quad (16.62)$$

de donde

$$\begin{aligned} \varphi_2' &= \frac{Q_2'}{C} = -\frac{a}{rC} Q_1' = -\frac{a}{r} \varphi_1' + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \varphi_2', \\ Q_1' &= \frac{\gamma}{C} Q_2' = -\left(\frac{a}{r}\right)^2 Q_1'. \end{aligned} \quad (16.63)$$

Estos ejemplos muestran los métodos para calcular los coeficientes de capacidad, las cargas y los potenciales, habiendo varios conductores en un campo electrostático.

Condensadores. Se llama condensador al conjunto de dos cualesquiera conductores con cargas de igual valor absoluto, pero de signo contrario. *Los conductores se denominan armaduras del condensador.* Haciendo en (16.34) $Q_1 = +Q$, $Q_2 = -Q$, obtenemos $\varphi_1 = Q(\alpha_{11} - \alpha_{12})$, $\varphi_2 = Q(\alpha_{21} - \alpha_{22})$. Entonces la diferencia de potencial entre los conductores es

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = Q(\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21}). \quad (16.64a)$$

Esto significa que la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador es proporcional a la carga en la armadura y, por lo tanto, el condensador se caracteriza por un parámetro, denominado capacidad. La capacidad del con-

densador se determina por la relación

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi}, \quad (16.64b)$$

con la particularidad de que según la definición, la capacidad se considera una magnitud positiva, o sea, en (16.64) tanto Q , como $\Delta\varphi$ deben tener el mismo signo. La comparación de (16.64b) y (16.64a) muestra que la capacidad del condensador se expresa a través de los coeficientes potenciales mediante la fórmula

$$C = (\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12})^{-1}, \quad (16.64c)$$

donde $\alpha_{12} = \alpha_{21}$. Dado que α_{12} y α_{21} son negativos, la capacidad C en (16.64c) es siempre positiva [véase (16.64b)]. Tomando en consideración el sentido de los

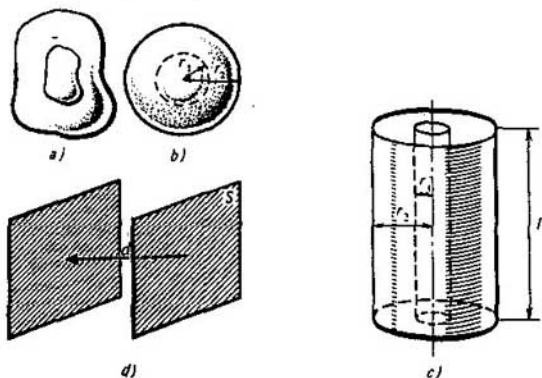


Fig. 62
Condensadores: caso general (a), esférico (b), cilíndrico (c) y plano (d)

coeficientes potenciales de (16.64c), deducimos que la capacidad del condensador depende sólo de las características geométricas de las armaduras del condensador y de su disposición mutua.

Partiendo de (16.45) y haciendo uso de la definición (16.64b), obtenemos la expresión para la capacidad del condensador por medio de los coeficientes de capacidad:

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}. \quad (16.64d)$$

En la mayoría de los casos la forma de las armaduras del condensador y su disposición mutua se eligen de manera que los campos exteriores no ejerzan una

influencia esencial sobre el campo eléctrico entre ellos y las líneas de fuerza, que comienzan en una de las armaduras, terminen sin falta en la otra. Merced a ello, en las armaduras siempre se asegura la igualdad de los valores absolutos de las cargas.

El condensador puede representarse como un conductor, colocado en cierta cavidad, rodeada por una envoltura cerrada (fig. 62, a). Si el conductor interior es una esfera o bola y la envoltura cerrada, una esfera concéntrica a él, el condensador se denomina esférico (fig. 62, b). Si el conductor interior es un cilindro continuo recto y la envoltura es un cilindro recto vacío, coaxial al interior, el condensador recibe el nombre de cilíndrico (fig. 62, c). El conjunto de dos placas conductoras planas y paralelas es un condensador plano (fig. 62, d).

El cálculo de la capacidad del condensador se reduce a la definición de la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador, siendo la carga en las armaduras conocida. Por ejemplo, si en la armadura interior de un condensador esférico hay una carga Q , la intensidad del campo entre las armaduras exterior e interior es igual a $E = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ y está dirigida por el radio. Por esta razón, la diferencia de potencial entre las armaduras es

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (16.65)$$

De aquí, aplicando la fórmula (16.64b), obtenemos que la capacidad del condensador esférico es

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_1 r_2 / (r_2 - r_1). \quad (16.66)$$

De la misma manera hallamos las capacidades de los condensadores cilíndrico y plano:

$$C = 2\pi\epsilon_0 l / \ln(r_2/r_1), \quad C = \epsilon_0 S/d.$$

Determinemos la capacidad de un condensador plano, cuya área de las armaduras es $1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$ y la distancia entre las armaduras $d = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$:

$$C = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{10^{-4}}{10^{-3}} \text{ F} \approx 10^{-2} \text{ F} = 1 \text{ pF}. \quad (16.67)$$

Los condensadores pueden acoplarse en serie (fig. 63, a) y en paralelo (fig. 63, b). *Para el acoplamiento en serie las diferencias de potencial se suman, mientras que para el acoplamiento en paralelo, se suman las cargas en las armaduras.*

Para el acoplamiento en serie

$$U = U_1 + U_2, \quad U = Q/C, \quad U_1 = Q/C_1, \quad U_2 = Q/C_2, \quad (16.68)$$

donde U es la diferencia de potencial entre las armaduras extremas de los condensadores; U_1 y U_2 son las diferencias de potencial entre las armaduras de cada uno de los condensadores; Q , el módulo de la carga en cada armadura de los condensadores (los módulos de la carga en todas las armaduras de los condensadores son iguales); C , la capacidad de dos condensadores; C_1 y C_2 , las capacidades

des de cada uno de los condensadores. De (16.68) se desprende que

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \quad (16.69)$$

Así, pues, para el acoplamiento en serie se suman los valores inversos de las capacidades.

Para el acoplamiento en paralelo

$$Q = Q_1 + Q_2, \quad Q = UC, \quad Q_1 = UC_1, \quad Q_2 = UC_2. \quad (16.70)$$

Entonces,

$$\boxed{C = C_1 + C_2} \quad (16.71)$$

o sea, para el acoplamiento en paralelo se suman las capacidades de los condensadores.

Esfera conductora en un campo homogéneo. La intensidad del campo, que surge como resultado de la introducción de una esfera conductora en campo eléctrico homogéneo exterior, puede hallarse por métodos elementales.

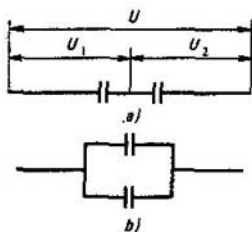


Fig. 63
Conexiones en serie (a) y en paralelo (b) de los condensadores

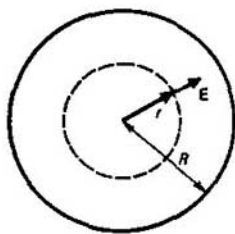


Fig. 64
Campo dentro de una esfera con carga homogénea

Determinemos ante todo la intensidad dentro de una esfera cargada homogéneamente de radio R (fig. 64) que, claro está, no es conductora. Sea ρ la densidad volumétrica de la carga dentro de la esfera. Entonces en el volumen esférico de radio $r < R$ hay una carga $Q_r = 4/3\pi r^3 \rho$. Aplicando el teorema de Gauss al volumen esférico, obtenemos (ϵ_0 es la constante dieléctrica del material de la esfera):

$$E(r) 4\pi r^2 = Q_r / \epsilon_0 = 4\pi r^3 \rho / (3\epsilon_0) \quad (16.72)$$

y, por lo tanto, la intensidad del campo dentro de una esfera con carga homogénea en el punto que se caracteriza por el radio vector \mathbf{r} , es igual a

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = [(\rho / (3\epsilon_0)) \mathbf{r}], \quad (16.73)$$

con la particularidad de que como punto de referencia del radio vector sirve el centro de la esfera.

Ahora imaginémosnos que hay dos esferas del mismo radio y con la misma densidad volumétrica de la carga de signos diferentes (fig. 65). Supongamos que la esfera con carga negativa está desplazada hacia la izquierda. Designemos por

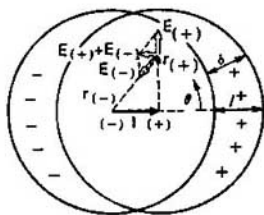


Fig. 65
Para el cálculo de la intensidad del campo de las esferas, desplazadas una con respecto a otra

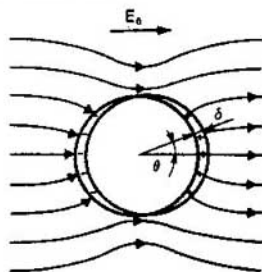


Fig. 66
Esfera conductora en un campo eléctrico homogéneo

l el vector, trazado desde su centro al centro de la otra esfera. Hallemos la intensidad del campo en los puntos interiores de las esferas. Las intensidades, creadas por la carga de cada esfera, son:

$$E_{(+)} = [|\rho|/(3\epsilon_0)]r_{(+)}, \quad E_{(-)} = -[|\rho|/(3\epsilon_0)]r_{(-)}, \quad (16.74)$$

donde $E_{(+)}$ y $E_{(-)}$ son las intensidades originadas por las cargas de las esferas del signo correspondiente y $r_{(+)}$ y $r_{(-)}$, los radios vectores trazados al punto en cuestión desde los centros de las esferas con cargas del signo correspondiente. La intensidad sumaria es

$$E = E_{(+)} + E_{(-)} = [|\rho|/(3\epsilon_0)](r_{(+)} - r_{(-)}) = -[|\rho|/(3\epsilon_0)]l, \quad (16.75)$$

donde

$$r_{(-)} = l + r_{(+)} \quad (16.76)$$

(véase la fig. 65). Así pues, dentro de las esferas la intensidad del campo es constante y está dirigida a lo largo de la línea que une sus centros.

En los puntos de intersección de los volúmenes de las esferas la densidad de la carga es nula, ya que las densidades negativa y positiva de la carga se compensan mutuamente. Sólo las partes de las esferas falciformes que no se intersecan permanecen cargadas (véase la fig. 65). La anchura máxima de esas esferas falciformes, igual a l , puede ser tan pequeña como se quiera.

Imaginémosnos ahora que una esfera conductora se ubica en un campo homogéneo exterior con intensidad E_0 . La inducción electrostática conducirá a la aparición de cargas superficiales. Los signos de dichas cargas y la dirección

de la intensidad del campo exterior se dan en la fig. 66. Dentro de la esfera el campo debe ser nulo, es decir, la distribución de las cargas superficiales será la misma que en la fig. 65 y el campo que surge en este caso dentro de las esferas compensa el campo exterior. Entonces, [véase (16.75)]

$$(|\rho|/3\epsilon_0)l = E_0. \quad (16.77)$$

De esta manera, los centros de las esferas cargadas imaginarias están desplazados uno respecto al otro por la línea de intensidad del campo exterior. Dado que l en (16.77) coincide con E_0 según la dirección, para las magnitudes escalares puede escribirse

$$|\rho|l = 3\epsilon_0 E_0.$$

Es evidente que el desplazamiento l de los centros de las esferas puede ser tan pequeño como se quiera si $|\rho|$ es suficientemente grande. Por eso las cargas que surgen en este caso pueden considerarse, en efecto, superficiales con una densidad superficial variable.

Hallemos la distribución de la densidad superficial de la carga en función del ángulo θ . La distancia entre las superficies de las esferas en dirección del ángulo θ es igual a $\delta = l \cos \theta$ (fig. 65). Si la carga volumétrica entre las superficies de las esferas se interpreta como superficial y se designa por la densidad superficial σ , entonces

$$\sigma \Delta S = \rho \Delta S \delta, \quad (16.78)$$

donde el primer miembro contiene la expresión para la carga, que corresponde al elemento superficial ΔS , por medio de la densidad superficial, y el segundo miembro, mediante la densidad volumétrica. Por lo tanto [véase (16.78)],

$$\sigma = \rho \delta = \rho l \cos \theta = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta, \quad (16.79)$$

donde $\delta = l \cos \theta$.

Ahora se puede hallar la intensidad del campo en la superficie de la esfera conductora:

$$E_n = \sigma/\epsilon_0 = 3E_0 \cos \theta, \quad (16.80)$$

de donde se ve que ella varía desde cero hasta el valor triplicado de la intensidad del campo homogéneo. Claro está que en todos los puntos de la superficie de la esfera la intensidad está orientada por la normal a la superficie.

Fuera de la esfera, a una distancia finita de su superficie, dicha intensidad es igual a la suma de las intensidades del campo exterior y de los campos, creados por las esferas cargadas, desplazadas mutuamente, o, lo que es lo mismo, por las correspondientes cargas superficiales. El campo fuera de la esfera uniformemente cargada es tal como si toda su carga estuviese concentrada en el centro. Así pues, es necesario hallar la intensidad del campo de dos cargas puntuales, de signos contrarios con igual valor absoluto, que se encuentran a una distancia pequeña la una de la otra. Semejante conjunto de cargas de denomina dipolo (fig. 67). El vector l , trazado desde la carga negativa a la positiva, se

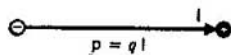


Fig. 67
Dipolo

denomina brazo del dipolo. El vector

$$p = ql \quad (16.81)$$

se llama **momento del dipolo**. En la fórmula (16.81) q es el valor absoluto de cada una de las cargas del dipolo. Para determinar la intensidad del campo fuera de la esfera conductora es necesario hallar la intensidad del campo del dipolo, cuyas cargas están concentradas en los centros de las esferas desplazadas. De (16.77) se desprende que el momento del dipolo es

$$p = \frac{4}{3}\pi R_1 \rho l = 4\pi \epsilon_0 R^3 E_0, \quad (16.82)$$

donde R es el radio de la esfera.

Campo de un dipolo. La intensidad del campo del dipolo está formada por las intensidades de las componentes de las cargas que forman el dipolo. El

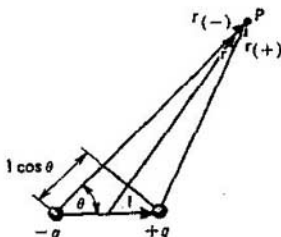


Fig. 68
Para el cálculo del campo del dipolo

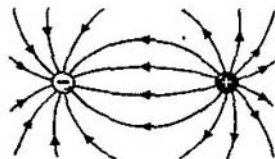


Fig. 69
Líneas de fuerza en las proximidades del dipolo

brazo del dipolo es tan pequeño como se quiera, por lo cual se puede considerar mucho más pequeño que la distancia hasta los puntos en los cuales se calcula la intensidad. Halleemos el potencial del dipolo. En el punto P (fig. 68) el potencial se expresa, por lo visto, mediante la fórmula

$$\varphi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{(+)}} - \frac{1}{r_{(-)}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(+)}r_{(-)}} \right). \quad (16.83)$$

Puesto que $l \ll r$, puede considerarse que $r_{(-)} - r_{(+)} \approx l \cos \theta$, $r_{(-)} r_{(+)} \approx r^2$ y caracterizar la posición del punto P por el radio vector r con origen en cualquier punto del dipolo, ya que este último posee dimensiones geométricas tan pequeñas cuanto se quiera.

Entonces [véase (16.83)]

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot r}{r^3}, \quad (16.84)$$

donde $q l \cos \theta = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/r$, de donde

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]. \quad (16.85)$$

La intensidad del campo del dipolo decrece inversamente proporcional al tercer grado de la distancia, o sea, con mayor rapidez que la intensidad del campo coulombiano de la carga. Las líneas de fuerza del campo del dipolo se muestran en la fig. 69.

La fórmula (16.85) permite trazar las líneas de la intensidad del campo, cuando, la esfera conductora se ubica en un campo homogéneo exterior. En cada punto la intensidad es igual a la suma de la intensidad \mathbf{E}_0 del campo homogéneo exterior y la intensidad \mathbf{E} , originada por las cargas inducidas en la superficie de la esfera conductora. Las líneas de intensidad de ese campo se dan en la fig. 66.

Método de representaciones. Al resolver el problema sobre la esfera conductora en un campo homogéneo exterior, se hizo una suposición cuya validez no se demostró, a saber: fue construido cierto campo que satisfacía todas las condiciones del problema, considerando que no existe otro campo que pudiese satisfacer las mismas condiciones del problema, es decir, se supuso que la solución del problema es única. De no ser así, la solución concreta hallada no sería obligatoriamente la solución que se realiza de hecho. En la teoría de la electricidad y el magnetismo se demostró que la solución de los problemas que satisfacen todas las condiciones necesarias, es única. En adelante se examinará sobre cuáles todas condiciones se trata y de qué manera, en rasgos generales, se lleva a cabo la demostración de esta confirmación. Mientras tanto, por ahora tomemos su validez sin demostración. Esto permite hallar la solución del problema con ayuda de ciertas conjeturas o construcciones y, basándose en el teorema de unicidad, sacar la conclusión de que el campo, hallado de esta manera, proporciona la solución del problema. La solución, estudiada más arriba, de la esfera conductora en un campo eléctrico homogéneo exterior es un ejemplo de una suposición acertada.

Existe un método directo de construcción de un campo que satisface las condiciones del problema, denominado método de representaciones. Su esencia consiste en lo siguiente. El campo de una carga puntual es bien conocido. Se trata de elegir un sistema de cargas puntuales, cuyo campo sumario satisfaga todas las condiciones del problema. Partiendo del teorema de unicidad de la solución, deducimos que este campo nos da la solución buscada. El problema matemático se reduce a la búsqueda del potencial que satisface las condiciones del problema. La intensidad \mathbf{E} está orientada perpendicularmente a las superficies equipotenciales y se calcula como el gradiente con signo contrario del potencial. En principio, es fácil recibir la forma de las superficies equipotenciales para el sistema de cargas puntuales. Examinemos, por ejemplo, el campo de dos cargas puntuales positivas q , situadas a la distancia $2d$ la una de la otra (fig. 70). Puesto que el potencial de la carga puntual a la distancia r de ella es igual a $\varphi = q/(4\pi\epsilon_0 r)$, el potencial del sistema de dos cargas puntuales iguales (véase

la fig. 70) en el punto (x, y, z) se define mediante la expresión

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right). \quad (16.86)$$

De (16.86) obtenemos la ecuación de las superficies equipotenciales:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} = \text{const.} \quad (16.87)$$

Cada una de ellas se caracteriza por el potencial correspondiente $\varphi_1 = \text{const.}$, $\varphi_2 = \text{const.}$

La fig. 70 muestra las líneas de intersección del plano XY con superficies equipotenciales. Estas últimas se obtienen como consecuencia de la rotación del cuadro, dado en la fig. 70, alrededor del eje X .

Sea que una superficie aislada conductora coincide con una de las superficies equipotenciales, cuyo potencial es φ_0 . Si se toma que sobre esa superficie

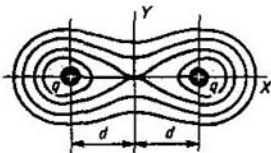


Fig. 70
Superficies equipotenciales de dos cargas puntuales iguales

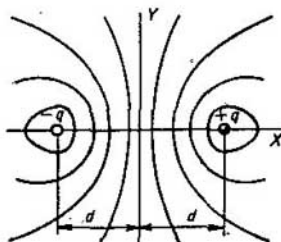


Fig. 71
Superficies equipotenciales de dos cargas puntuales de signos contrarios y distinto valor absoluto

hay una carga $2q$ y su potencial es igual a φ_0 , el sistema de superficies equipotenciales y el campo, correspondiente a él, satisfacen totalmente las condiciones del problema acerca del campo de una superficie cargada. En todos los puntos exteriores respecto a la superficie, el potencial se define por la fórmula (16.86). De esta manera, la determinación de las características del campo, creado por el conductor con carga, se reduce a la determinación de las características del campo de dos cargas puntuales iguales del mismo signo. Esta es la esencia del método de representaciones. El origen del nombre de dicho método quedará claro de los ejemplos que se examinan a continuación.

El potencial de dos cargas puntuales de signos contrarios se determina de la misma manera que (16.86):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right). \quad (16.88)$$

La fig. 71 da para este caso la forma de las superficies equipotenciales. El potencial a lo largo del eje Y es nulo y, por lo tanto, es nulo en el plano $X = 0$.

Imaginémonos que todo el semiespacio infinito $X < 0$ está lleno de conductor, cuya frontera es el plano YX y hay una carga $+q$ en el lugar, mostrado en la fig. 71. Está claro que mediante la inducción electrostática, esta carga inducirá una carga $-q$ en la superficie del conductor. El potencial del conductor en este caso debe ser $\varphi = 0$ y las líneas de fuerza en cada punto de la superficie deben ser normales a ella. Es obvio, que el cuadro de las líneas de fuerza en el semiespacio $X > 0$, mostrado en la fig. 71, satisface totalmente estas condiciones. Como consecuencia la tarea de definir las características del campo de una carga puntual $+q$ que está a una distancia d de la superficie plana del conductor que llena el semiespacio $X < 0$, se reduce a encontrar las características de los campos de dos cargas puntuales q y $-q$. La carga $-q$ se sitúa en el punto que es la representación de la posición de la carga puntual q si el plano $X = 0$ fuese un espejo. De aquí proviene el nombre del método de representaciones. En lugar de un cuerpo conductor, que ocupa el semiespacio $X < 0$, puede cogerse una placa conductora, puesta a tierra, paralela al plano $X = 0$. El método de cómputo y el campo permanecen invariables. Si la placa no está puesta a tierra, en la parte de la placa, vuelta hacia los valores negativos del eje X , se inducen cargas positivas superficiales que cambian por completo el carácter del campo: el campo en este caso no es la superposición de los campos de la carga q y su representación.

Determinemos la intensidad del campo de la carga q , situada en el punto $x = d$, habiendo un plano conductor puesto a tierra, $X = 0$. El potencial del campo en todos los puntos $x > 0$ se da mediante la fórmula (16.88). La intensidad del campo eléctrico en el plano $Z = 0$ es igual a

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x-d}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{x+d}{[(x+d)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}, \quad (16.89)$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{y}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{y}{[(x+d)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}. \quad (16.90)$$

En el plano $X = 0$ la componente E_y desaparece, mientras que

$$E_x = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{(z^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (16.91)$$

La densidad superficial de la carga en el plano $X = 0$ [véase (16.12)] es igual a

$$\sigma = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(z^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (16.92)$$

La carga superficial total en el plano $X = 0$ se da mediante la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma dz dy = -\frac{qd}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz dy}{(z^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} = -q, \quad (16.93)$$

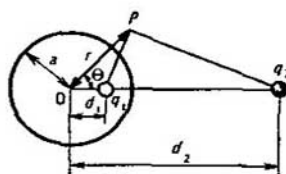


Fig. 72
Para la determinación de las superficies equipotenciales de dos cargas puntuales de diferente magnitud

Examinemos el cuadro de las superficies equipotenciales, creadas por dos cargas de distinto módulo. Para mayor comodidad, introduzcamos un sistema de coordenadas polar con origen en el punto O (fig. 72). El eje polar atraviesa la posición de las cargas puntuales q_1 y q_2 . Las coordenadas polares q_1 y q_2 son iguales a $\theta_1 = 0$, $r_1 = d_1$ y $\theta_2 = 0$, $r_2 = d_2$, respectivamente. El potencial en el punto P se expresa mediante la fórmula

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{\sqrt{r^2 + d_1^2 - 2rd_1 \cos \theta}} + \frac{q_2}{\sqrt{r^2 + d_2^2 - 2rd_2 \cos \theta}} \right). \quad (16.95)$$

Si $d_1 = a^2/d_2$ ($a < d_2$) y $q_2 = -aq_1/d_2$, $\varphi(a, \theta) = 0$, es decir, el potencial en la esfera de radio a es nulo. Como consecuencia, semejante esfera es una superficie equipotencial con valor nulo del potencial. Si en su lugar se coloca una esfera conductora real puesta a tierra, el campo no varía. Así pues, si existe una esfera conductora puesta a tierra de radio a y una carga puntual q_2 fuera de ella a la distancia d_2 del centro de la esfera, el campo fuera de la esfera es el mismo que el creado por la carga q_2 y su «imagen», la carga $q_1 = -aq_2/d_2$, colocada en el punto con las coordenadas $d_1 = a^2/d_2$, $\theta = 0$ dentro de la esfera. La fuerza de interacción entre la carga q_2 y la esfera es igual a

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 (d_2 - d_1)^2} = -\frac{d_2 a q_2^2}{4\pi\epsilon_0 (d_2^2 - a^2)^2}. \quad (16.96)$$

En la electrostática dentro de un conductor no hay campo alguno y las cargas volumétricas están ausentes. En las proximidades de la superficie del conductor la intensidad del campo eléctrico está orientada por la normal a la superficie y es proporcional a la densidad superficial de la carga.

En la superficie convexa del conductor la densidad superficial de las cargas y la intensidad del campo aumentan al crecer la curvatura de la superficie, es decir, al disminuir el radio de curvatura. En la superficie cóncava del conductor la densidad superficial de la carga disminuye.

La ley de Ohm en forma diferencial es válida no sólo para la conductibilidad eléctrica constante, sino también para la variable, independientemente de las causas y el carácter de su variación.

es decir, la carga inducida en el conductor es igual a la carga que induce, pero con signo contrario [véase (16.20)].

La fuerza de interacción de la carga puntual q con la carga en la superficie $x = 0$ es igual a la fuerza de interacción de q con su representación:

$$F = -q^2 / (16\pi\epsilon_0 d^2). \quad (16.94)$$

El signo menos indica que la carga puntual se atrae hacia la superficie conductora puesta a tierra.

El método de representaciones no se reduce, claro está, en todos los casos en el sentido literal a la búsqueda de la imagen especular de las cargas.

¿La consecuencia de qué propiedad del campo electrostático es la ausencia de la componente tangencial de la intensidad del campo en las inmediaciones de la superficie del conductor?

La capacidad de un conductor aislado depende sólo de su forma y dimensiones. Los coeficientes potenciales y de capacidad dependen sólo de las características geométricas de los conductores y de su disposición mutua.

Los coeficientes de capacidad con iguales índices son siempre positivos y con diferentes, son o bien nulos, o bien negativos.

Ejemplo 16.1. Hallar la fuerza de interacción entre una esfera conductora de radio a y la carga puntual q_2 que está a una distancia d_2 del centro de la esfera, si la carga Q está distribuida por la esfera.

La fig. 72 muestra el esquema de disposición de la esfera y la carga. La carga q_2 induce en la esfera conductora su imagen en forma de carga $q_1 = -q_2 a/d_2$ a la distancia $d_1 = a^2/d_2$ del centro de la esfera. En cambio, ahora la interacción no se reduce a la fuerza de atracción entre la carga q_2 y su representación, ya que, según la condición, la esfera posee una carga Q y no q_1 . Por lo tanto, para describir la interacción es necesario añadir otra «representación» de la carga que crea en la esfera un potencial constante y junto con q_1 forma la carga Q . Por eso, es necesario colocar en el centro de la esfera la carga $Q - q_1 = Q + q_2 a/d_2$. La interacción de la carga q_2 con la esfera con una carga Q , se compone de la interacción de q_2 con las «imágenes» q_1 y $Q + q_2 a/d_2$. Así pues, la fuerza de interacción es

$$F = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q + q_2 a/d_2}{d_2^2} - \frac{q_2 a}{d_2(d_2 - d_1)^2} \right]. \quad (16.97)$$

Ejemplo 16.2. Hallar la fuerza de interacción entre la esfera conductora de radio a que se mantiene a un potencial constante φ_0 , y una carga puntual q_2 que se encuentra a la distancia d_2 del centro de la esfera.

El esquema de disposición de la esfera y la carga se da en la fig. 72. La carga q_2 y su imagen q_1 crean un potencial nulo de la esfera. Para que éste sea igual a φ_0 , es necesario colocar en el centro de la esfera una «imagen» $Q = 4\pi\epsilon_0 a\varphi_0$. La fuerza de interacción entre la carga puntual q_2 y la esfera que se mantiene a un potencial φ_0 , es igual a

$$F = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{d_2^2} - \frac{q_2 a}{d_2(d_2 - d_1)^2} \right]. \quad (16.98)$$

Ejemplo 16.3. Dos placas planas conductoras forman un ángulo α_0 (fig. 73). La longitud de las placas, perpendiculares al plano de la figura, es infinita. Entre las placas se mantiene una diferencia de potencial constante U_0 . Hallar la intensidad del campo entre las placas y la capacidad que corresponde a la longitud l . La anchura de la placa es $b - a$. Se acepta que las placas no hacen contacto en el punto O , pero convergen bastante cerca, por lo cual puede prescindirse de los efectos de borde.

El campo es axialmente simétrico. Por eso es cómodo utilizar el sistema de coordenadas cilíndrico, cuyo eje Z está dirigido perpendicularmente al plano de la figura. Designemos: por α el ángulo axial y por r , la distancia hasta el eje. Entonces la ecuación de Laplace tiene la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (16.99)$$

donde se tiene en cuenta que $\partial^2 \varphi / \partial z^2 = 0$ a causa de la simetría cilíndrica del campo. La solución se busca como

$$\varphi(r, \alpha) = R(r) \Phi(\alpha). \quad (16.100)$$

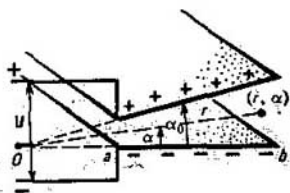


Fig. 73
Para la definición del campo de un condensador con placas no paralelas

Sustituyendo (16.100) en (16.99), hallamos que $\frac{\Phi}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2} \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} = 0$. Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por $r^2/R\Phi$, obtenemos

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2}. \quad (16.101)$$

Los miembros primero y segundo de (16.101) son funciones de diferentes variables independientes. Por lo tanto, la igualdad puede satisfacerse sólo cuando los miembros primero y segundo sean iguales por separado a una misma constante. Por eso suponemos que:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = n^2, \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} = n^2, \quad (16.103)$$

donde n^2 es una constante. La solución de la ecuación para Φ es obvia:

$$\Phi = \begin{cases} B_1\alpha + B_2 & \text{para } n=0, \\ A_1 \operatorname{sen} n\alpha + A_2 \cos n\alpha & \text{para } n \neq 0. \end{cases} \quad (16.103)$$

La solución de la ecuación para R la buscamos en forma de $R = Ar$ ($\beta \neq 0$).

Sustituyendo esta expresión en la primera de las ecuaciones (16.102), obtenemos la igualdad

$$\beta^2 = n^2, \quad (16.104)$$

de la cual se desprende que $\beta = \pm n$. Para $n = 0$ la primera de las ecuaciones (16.102) se simplifica:

$$r \frac{dR}{dr} = \text{const}$$

y puede satisfacerse mediante la función

$$R = D_1 \ln r + D_2.$$

Por lo tanto, la solución definitiva de la ecuación (16.102) puede representarse como

$$R = \begin{cases} D_1 \ln r + D_2 & \text{para } n=0, \\ C_1 r^n + C_2 r^{-n} & \text{para } n \neq 0 \end{cases} \quad (16.105)$$

Intentemos hallar la solución del problema que no dependa de r , es decir, para $n = 0$ $D_1 = 0$, entonces [véase (16.103)] $\varphi(\alpha) = B_1\alpha + B_2$. Las condiciones límites para φ tienen el aspecto: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\alpha_0) = U_0$, o sea, $0 = B_2$, $U_0 = B_1\alpha_0$. Como consecuencia

$$\varphi(\alpha) = U_0\alpha/\alpha_0. \quad (16.106)$$

La intensidad del campo eléctrico es

$$E_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -U_0/(r\alpha_0). \quad (16.107a)$$

La densidad superficial de las cargas en las placas

$$\sigma_1 = \varepsilon E_\alpha(\alpha=0) = -\varepsilon U_0/(r\alpha_0), \quad \sigma_2 = -\varepsilon E_\alpha(\alpha=\alpha_0) = \varepsilon U_0/(r\alpha_0). \quad (16.107b)$$

La carga de cada una de las placas (por el módulo) en la longitud l se expresa por la fórmula

$$Q = l \int_a^b \sigma dr = (l\varepsilon U_0/\alpha_0) \ln(b/a). \quad (16.108)$$

La capacidad, correspondiente a la longitud l , es igual a

$$C = \frac{Q}{U_0} = \frac{l\varepsilon_0 \ln(b/a)}{\alpha_0}. \quad (16.109)$$

§ 17. Campo electrostático en presencia de dieléctricos

Se examinan la influencia del dieléctrico sobre el campo eléctrico y diversos mecanismos de la polarización. Se deduce la relación entre las densidades de las cargas ligadas superficiales y volumétricas y la polarización. Se discuten los fenómenos en la superficie de separación de los dieléctricos.

Momento dipolar de la distribución continua de las cargas. Faraday investigó y descubrió experimentalmente la influencia de la substancia sobre los campos eléctricos y magnéticos. Los resultados de estos trabajos condujeron al científico a la idea de la acción a corta distancia y la concepción del campo. En 1837 descubrió la inducción electrostática. En ese mismo año Faraday introdujo en la ciencia los términos «dieléctrico» y «constante dieléctrica».

Supongamos que en cierto volumen V (fig. 74) haya una carga distribuida continuamente con una densidad volumétrica ρ , con la particularidad de que en total el volumen es neutro desde el punto de vista eléctrico. No obstante, eso no significa que en cada punto dentro del volumen las cargas positiva y negativa se compensan mutuamente. Si las cargas positivas y negativas están distribuidas en el volumen por leyes distintas, en unos puntos del volumen la densidad sumaria ρ de la carga es positiva y en otros, negativa. Desde el punto de vista matemático, la condición de neutralidad del volumen V tiene la forma

$$\int_V \rho \, dV = 0. \quad (17.1)$$

Si en todos los puntos del volumen $\rho = 0$, el sistema material en el volumen V es eléctricamente neutro: sobre él no actúa ningún campo eléctrico exterior y el propio sistema no genera campo eléctrico alguno. Sin embargo, si la densidad ρ de la carga es en unas partes del volumen V positiva y en otras, negativa, entonces, a pesar de que la carga en total en el volumen es nula, el sistema posee propiedades eléctricas: sobre él actúa un campo eléctrico exterior y el propio sistema origina un campo eléctrico. En primera aproximación las propiedades de un sistema neutro se caracterizan por su momento dipolar. Para dos cargas puntuales la definición de momento dipolar se da mediante la fórmula (16.81). Para una distribución continua de las cargas el momento dipolar (fig. 74) se determina por la fórmula

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{r} \, dV.$$

(17.2)

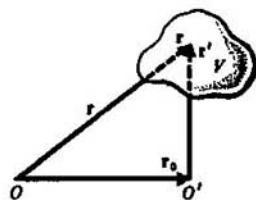


Fig. 74
Para la definición del momento dipolar de una distribución continua de las cargas

El radio vector \mathbf{r} en (17.2) se cuenta desde cualquier punto O que se toma como punto de referencia. Es evidente que (17.2) no depende de qué punto se ha elegido como origen del sistema de referencia. Para demostrar eso tomemos como punto de referencia el punto O' , cuya posición respecto al punto O se caracteriza por el radio vector \mathbf{r}_0 (véase la fig. 74). La fórmula (17.2) tiene con respecto al punto O' el aspecto

$$\mathbf{p}' = \int_V \rho \mathbf{r}' dV. \quad (17.3)$$

Transformemos (17.3):

$$\mathbf{p}' = \int_V \rho (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = \int_V \rho \mathbf{r} dV - \int_V \mathbf{r}_0 \rho dV = \int_V \rho \mathbf{r} dV = \mathbf{p}, \quad (17.4)$$

lo que se requería demostrar. Aquí $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$ y [véase (17.1)]

$$\int_V \mathbf{r}_0 \rho dV = \mathbf{r}_0 \int_V \rho dV = 0. \quad (17.5)$$

Apliquemos la fórmula (17.2) para calcular el momento dipolar de dos cargas puntuales que pueden considerarse como cargas que están en los volúmenes

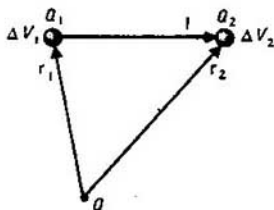


Fig. 75.
Para el cálculo del momento dipolar de dos cargas puntuales, aplicando la fórmula para la distribución continua de las cargas

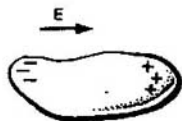


Fig. 76
Polarización de los dieléctricos neutros en el campo eléctrico

ΔV_1 y ΔV_2 , tan pequeños como se quiera, (fig. 75):

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{r} dV = \int_{\Delta V_1} \rho \mathbf{r}_1 dV + \int_{\Delta V_2} \rho \mathbf{r}_2 dV = \mathbf{r}_1 \int_{\Delta V_1} \rho dV + \mathbf{r}_2 \int_{\Delta V_2} \rho dV = \mathbf{r}_1 Q_1 + \mathbf{r}_2 Q_2, \quad (17.6)$$

donde Q_1 , Q_2 son las cargas en los volúmenes ΔV_1 y ΔV_2 , respectivamente y \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 son los radios vectores de dichos volúmenes. Por ejemplo, sea que en el volumen ΔV_2 haya una carga positiva $Q_2 = Q$. Entonces, como consecuencia de la neutralidad eléctrica del sistema, $Q_1 = -Q$ y la fórmula (17.6) adquiere

la forma

$$p = Q(r_2 - r_1) = Ql, \quad (17.7)$$

análoga a (16.81).

La intensidad del campo de un sistema neutro con un momento dipolar p se determina por las fórmulas (16.84) y (16.85).

Polarización de los dieléctricos. Se llaman dieléctricos a las sustancias, en las cuales bajo la acción de un campo eléctrico, no surge el desplazamiento de cargas como, por ejemplo, en los conductores. *En cambio, eso no significa que en los dieléctricos, bajo el efecto del campo eléctrico, las cargas no se mueven en general. Ellas se desplazan, pero no a distancias grandes.*

Examinemos un volumen eléctricamente neutro del dieléctrico (fig. 76). El campo eléctrico exterior tiende a desplazar las cargas positivas en dirección de la intensidad del campo y las negativas, en dirección opuesta. Por esta razón, en dirección de la intensidad en el dieléctrico se forma un exceso de carga positiva, mientras que en dirección contraria, deficiencia. El dieléctrico adquiere momento dipolar. El mencionado proceso recibe el nombre de **polarización**.

El grado de polarización del dieléctrico se caracteriza por la polarización dieléctrica que se determina como la razón entre el momento dipolar Δp del elemento del dieléctrico y su volumen ΔV :

$$P = \frac{\Delta p}{\Delta V}. \quad (17.8)$$

Cuadro molecular de la polarización. El dieléctrico consta de átomos y moléculas, con la particularidad de que cualquiera de sus elementos físicos infinitesimales de volumen es eléctricamente neutro. La carga positiva está concentrada en los núcleos de los átomos, mientras que la negativa, en las capas electrónicas de los átomos y moléculas. Las cargas positivas y negativas se encuentran en diversos puntos del espacio y, por lo tanto, los átomos y moléculas pueden poseer momentos dipolares eléctricos que varían con la frecuencia de las oscilaciones de los electrones en los átomos del orden $\approx 10^{15} \text{s}^{-1}$.

Si al no haber campo eléctrico exterior, en el átomo la *nube electrónica está distribuida con simetría esférica respecto al núcleo, el átomo no posee momento dipolar eléctrico. De la misma manera, en las moléculas las cargas positivas y negativas pueden poseer una simetría de distribución cuando en ellas no surge momento dipolar.* Semejantes moléculas y átomos se denominan **no polares**, por ejemplo, el átomo de helio, las moléculas biatómicas que constan de los mismos átomos (H_2 , N_2 , O_2 , ...), las moléculas poliatómicas simétricas, tales como CO_2 , CH_4 , etc. Al no haber campo exterior, semejante dieléctrico no está polarizado.

Las moléculas y los átomos que, al no haber campo exterior, poseen momento dipolar eléctrico, se denominan **polares**, por ejemplo, CO , N_2O , SO_2 , etc. El momento dipolar constante de éstos tiene el orden de $10^{-29} \dots 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$. Eso corresponde a un dipolo que consta de dos cargas elementales de $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, la distancia entre las cuales es de 10^{-10} m , o sea, del orden de las dimensiones atómicas.

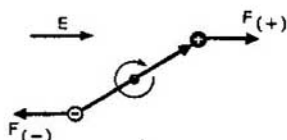


Fig. 77
Polarización de los dieléctricos polares en el campo eléctrico

En ausencia de campo eléctrico exterior, los momentos dipolares permanentes de las moléculas aisladas están en desorden. Por lo tanto, su suma en un volumen físico infinitésimo es nula, es decir, el dieléctrico no está polarizado.

En un campo eléctrico exterior las cargas positivas tienden a desplazarse en dirección de la intensidad del campo, mientras que las negativas, en sentido contrario. *En definitiva, las moléculas no polares adquieren momento dipolar y el dieléctrico se polariza.* Las moléculas polares

también adquieren un momento dipolar complementario, inducido por el campo exterior, y merced a ello, se polariza también, pero esta polarización desempeña un papel insignificante para ellas. El mecanismo principal de polarización para ellas es otro: *en un campo eléctrico exterior sobre los momentos dipolares de las moléculas actúan momentos de fuerzas [fig. 77; véase (19.7)], que tienden a orientar los momentos dipolares en sentido de la intensidad del campo. Como consecuencia, las moléculas se reorientan de tal manera, que los elementos físicos infinitésimos del volumen del dieléctrico adquieren momentos dipolares, es decir, el dieléctrico se polariza.* La polarización a causa de la reorientación de las moléculas es mucho mayor que cuando surge como consecuencia de la formación de momentos dipolares complementarios, inducidos por el campo exterior.

A la par con esos mecanismos de polarización, existe otro más. *Influídos por el campo eléctrico exterior, los iones positivos de los cristales iónicos se desplazan en dirección de la intensidad del campo, mientras que los negativos, en sentido contrario.* En definitiva, sucede cierta deformación de la red cristalina o un desplazamiento relativo de las subredes, lo que conduce a que en el dieléctrico aparezcan momentos dipolares, o sea, surge la polarización del dieléctrico. Semejante polarización se denomina *polarización iónica de red.*

En todos los casos la polarización se caracteriza cuantitativamente por la polarización dieléctrica P . El mecanismo de la polarización se manifiesta sólo al estudiar la dependencia entre P y la intensidad del campo exterior y otros factores (véase el cap. 3). En este caso la fórmula que enlaza entre sí la intensidad del campo eléctrico, el desplazamiento eléctrico y la polarización dieléctrica, permanece invariable [véase (17.29)].

La polarización dieléctrica de las moléculas no polares es

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} p_i = N p_0, \quad (17.9)$$

donde ΔV bajo el símbolo de la suma indica que la adición se extiende a todas las moléculas en el volumen ΔV ; N es la concentración de moléculas; p_0 , el momento dipolar inducido (el mismo para todas las moléculas) que coincide, en dirección, con la intensidad E del campo eléctrico exterior. En ausencia del campo exterior $p_0 = 0$ y, por lo tanto, $P = 0$, es decir, no hay polarización.

El mecanismo principal de la polarización de las moléculas polares es la

reorientación de las direcciones de los momentos dipolares permanentes, influidos por el campo exterior. La fórmula para la polarización dieléctrica es

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} p_i = N \langle p \rangle, \quad (17.10)$$

donde $\langle p \rangle$ es el valor medio de los momentos dipolares, iguales por el valor absoluto, pero de distinta orientación en el espacio. En los dieléctricos isotrópos los momentos dipolares medios coinciden en dirección con la intensidad del campo eléctrico exterior. En los dieléctricos anisótropos, o sea, en los que las propiedades eléctricas son diferentes en distintas direcciones, no se observa semejante coincidencia. En ellos el enlace entre la polarización dieléctrica y la intensidad es más complejo (véase el cap. 3). La aportación de los momentos dipolares inducidos de los dieléctricos polares en la polarización dieléctrica es mucho menor que la de la reorientación de los momentos dipolares permanentes y, por lo general, no se tiene en cuenta. Al haber necesidad de considerarlos, hay que añadir el segundo miembro de la igualdad (17.9) al segundo miembro de la fórmula (17.10).

La polarización iónica de red se describe mediante la fórmula (17.10), en la que bajo $\langle p \rangle$ es necesario tomar el valor medio de los momentos dipolares en el volumen ΔV que surgen como consecuencia del desplazamiento de los iones en los nudos de la red cristalina. En la mayoría aplastante de los casos dicha polarización es anisótropa.

Dependencia entre la polarización dieléctrica y la intensidad del campo eléctrico. La polarización de los electretos y las sustancias ferroeléctricas puede ser diferente de cero estando ausente el campo eléctrico ($E = 0$, $P \neq 0$). Los demás dieléctricos, al no haber campo eléctrico, poseen polarización nula. La dependencia de esta última respecto a la intensidad puede representarse en el caso general de la siguiente forma

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \kappa_{ij} E_j + \epsilon_0 \sum_{j,k} \kappa_{ijk} E_j E_k + \dots,$$

donde los índices i, j, k, \dots numeran las componentes de las magnitudes por los ejes del sistema cartesiano de coordenadas ($i = x, y, z; j = x, y, z, \dots$). Por eso, la polarización en el caso general depende no sólo del primer grado de la intensidad del campo eléctrico, sino que también de los grados superiores. *Si la dependencia de los grados superiores es esencial, el dieléctrico recibe el nombre de dieléctrico no lineal.* Semejante no linealidad se manifiesta, por lo general, sólo en los campos eléctricos muy fuertes, aunque hay ciertos materiales especiales en los que se observa la no linealidad para campos relativamente débiles.

Si la no linealidad no es grande, la polarización se expresa mediante los primeros grados de las componentes del campo:

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \kappa_{ij} E_j.$$

Semejante dieléctrico se llama **lineal**. Si las propiedades de dicho dieléctrico son diferentes respecto a las direcciones, el dieléctrico se denomina **anisó-**

tropo. El conjunto de las nueve magnitudes κ_{ij} se denomina **tensor de la susceptibilidad dieléctrica**. Caracteriza totalmente las propiedades eléctricas del dieléctrico. Si las propiedades del dieléctrico son las mismas por todas las direcciones, éste se denomina **isótropo lineal**. Sus propiedades dieléctricas se caracterizan por una magnitud escalar: la susceptibilidad dieléctrica.

Para un dieléctrico isótropo lineal

$$\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (17.11)$$

donde κ es la susceptibilidad dieléctrica. En el sistema absoluto de unidades de Gauss la susceptibilidad dieléctrica κ' es un magnitud 4π veces inferior a κ en la fórmula (17.11):

$$\kappa' = \kappa / (4\pi). \quad (17.12)$$

La susceptibilidad dieléctrica de la mayoría de los dieléctricos sólidos y líquidos se expresa por números del orden de varias unidades. La susceptibilidad dieléctrica de la mayoría de los gases constituye diezmilésimas partes de la unidad y en la mayor parte de los casos prácticamente puede no tomarse en consideración. En cambio, existen dieléctricos, cuya susceptibilidad alcanza grandes valores. Por ejemplo, el agua tiene $\kappa = 80$, el alcohol, $\kappa = 25 \dots 30$ y las substanciales ferroeléctricas (sal de Seignette o de Rochelle, titanatos de bario, etc.) tienen una susceptibilidad dieléctrica que alcanza varios miles de unidades.

Influencia de la polarización sobre el campo eléctrico. El momento dipolar del elemento del volumen dV , conforme a la fórmula (17.8), es igual a

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P} dV = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E} dV, \quad (17.13)$$

es decir, coincide en dirección con la intensidad \mathbf{E} , ya que $\kappa > 0$. Por eso, la intensidad del campo, creado por el momento dipolar, está orientada de manera contraria a la intensidad del campo exterior y lo debilita (fig. 78). Así pues, *como consecuencia de la polarización, la intensidad en el dieléctrico se debilita*. El papel de la polarización en este caso se reduce sólo a la división de las cargas positivas y negativas, merced a lo cual en el volumen del dieléctrico, como también en su superficie, se forman cargas, denominadas **de polarización** o **ligadas**, ya que, ellas como si estuviesen amarradas a distintos lugares del dieléctrico, no pueden desplazarse libremente por su volumen o superficie. *Las cargas ligadas originan un campo eléctrico de la misma manera que lo hacen las cargas libres, y en este sentido no se diferencian en nada de ellas*. Así pues, la presencia del dieléctrico se tiene en cuenta tomando en consideración el campo eléctrico, creado por las cargas ligadas que surgen a causa de la polarización. Por esta razón, es necesario hallar la expresión para las cargas ligadas.

Densidades superficial y volumétrica de las cargas ligadas. Examinemos un elemento dS de la superficie (fig. 79), trazada dentro de un dieléctrico no polarizado. Durante la polarización, las cargas eléctricas comienzan a moverse a través de este elemento superficial. Calculemos la carga que interseca el elemento dS al surgir la polarización \mathbf{P} . Para simplificar las fórmulas, considera-

remos que se mueven sólo las cargas positivas. Designemos por q la carga del dipolo; por l el brazo del dipolo, correspondiente a la polarización \mathbf{P} y por N , la concentración de cargas. Al aparecer la polarización \mathbf{P} , el área dS (véase la fig. 79) la intersecan todas las cargas positivas que antes del movimiento, determinado por la polarización, estaban en el volumen $dV = dSh = dSl \cos \theta$ de un cilindro oblicuo con base dS . Por lo tanto,

$$dQ = Ngl \cos \theta dS = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (17.14)$$

Examinemos ahora cierto volumen V (fig. 80). Como consecuencia de la polarización, la superficie S , que limita el volumen V , se interseca por las cargas. En función del balance de las cargas que llegan y salen del volumen, en

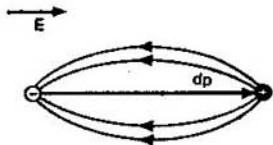


Fig. 78
Mecanismo de debilitamiento del campo durante la polarización

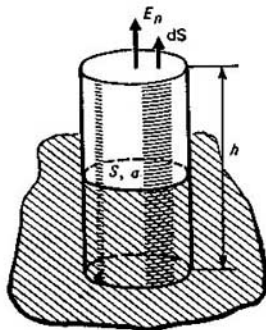


Fig. 79
Cálculo de la carga que atraviesa el elemento superficial durante la polarización

ésto se forma una carga ligada, cuya densidad volumétrica es ρ_{lig} . Teniendo en cuenta (17.14), escribamos el principio de conservación de la carga en el volumen V como

$$\int_V \rho_{lig} dV = - \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (17.15)$$

El signo menos indica que en el volumen surge una carga, de signo contrario a la que sale de la superficie que limita el volumen. Escribamos de nuevo la igualdad (17.15), aplicando a su segundo miembro el teorema de Gauss—Ostrogradski:

$$\int_V (\rho_{lig} - \text{div } \mathbf{P}) dV = 0 \quad (17.16)$$

Si la igualdad (17.16) se cumple idénticamente para cualesquiera V , el integrando será idénticamente igual a cero. Por lo tanto,

$$\rho_{lig} = -\operatorname{div} P. \quad (17.17)$$

De esta manera, las cargas ligadas volumétricas surgen sólo cuando la polarización P varía de un punto a otro. Esto queda claro también sin cálculo alguno,

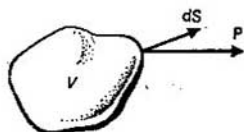


Fig. 80
Para la búsqueda de la expresión para la carga volumétrica ligada

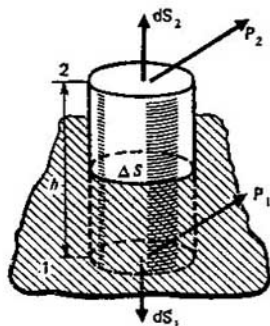


Fig. 81
Para la deducción de la expresión para la densidad superficial de las cargas ligadas

ya que para la polarización homogénea las cargas pasan a un nuevo lugar, ocupando los sitios de la misma cantidad de cargas que marcharon. Como consecuencia, las correspondientes partes del volumen del dieléctrico permanecen eléctricamente neutras.

En la superficie de separación de dos dieléctricos diferentes surgen cargas superficiales. Eso queda obvio de las siguientes consideraciones. Siendo la intensidad del campo eléctrico la misma en distintos dieléctricos, la polarización es diferente. Por lo tanto, la superficie de separación se interseca por distinta cantidad de cargas de polarización por parte de cada uno de los dieléctricos. Como resultado, en las inmediaciones de la superficie de separación se acumula cierta carga ligada, denominada carga ligada superficial. Designemos por σ_{lig} su densidad superficial. Para hallarla lo más sencillo es partir de la fórmula (17.17). Construyamos en la superficie de separación entre los dieléctricos un cilindro recto, cuya área de la base es ΔS y su altura h (fig. 81) e integremos los dos miembros de la ecuación (17.17) respecto al volumen de dicho cilindro:

$$\int_V \rho_{lig} dV = - \int_V \operatorname{div} P dV. \quad (17.18)$$

En el primer miembro de (17.18) está la carga total dentro del volumen, o sea, la carga superficial $\sigma_{11g} \Delta S$. El segundo miembro de la igualdad se transforma, aplicando el teorema de Gauss—Ostrogradski, en una integral respecto a la superficie:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV = \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{P}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 + \int_{S_1} \mathbf{P}_1 \cdot d\mathbf{S}_1, \quad (17.19)$$

donde los índices 1 y 2 indican las magnitudes, referentes al primero y segundo dieléctricos por las dos partes diferentes de la superficie de separación. El flujo de polarización del vector \mathbf{P} se compone de los flujos que atraviesan las bases y las superficies laterales del cilindro. Los flujos a través de las superficies laterales se suponen iguales a cero. Elijamos a título de normal positiva a la superficie de separación la que está orientada del primer dieléctrico al segundo. Por lo tanto, $d\mathbf{S}_2$ está dirigida por la orientación positiva de la normal y $d\mathbf{S}_1$, por la negativa. Por eso

$$\int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = P_{2n} \Delta S - P_{1n} \Delta S. \quad (17.20)$$

Recordemos que la integral por la superficie lateral no se toma en consideración. Teniendo en cuenta el valor de la integral en el primer miembro de la ecuación (17.18), obtenemos definitivamente

$$\sigma_{11g} = -(P_{2n} - P_{1n}). \quad (17.21a)$$

Por esta razón, denotando el versor de la normal, dirigido hacia el segundo medio por \mathbf{n}_2 , la fórmula (17.21a) puede presentarse como

$$\sigma_{11g} = -\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1). \quad (17.21b)$$

Es útil señalar que el vacío puede también considerarse como un dieléctrico, cuya polarización es nula. La fórmula (17.21a) puede aplicarse a la superficie de separación entre el dieléctrico y el vacío. Tomando la normal exterior al dieléctrico como normal positiva, [es decir, considerando el dieléctrico a título de medio 1 en la fórmula (17.21a)], hagamos $P_{2n} = 0$. Por lo tanto, [véase (17.21)],

$$\sigma_{11g} = P_n, \quad (17.22)$$

donde P_n es la componente normal de la polarización del dieléctrico en su superficie de separación con el vacío.

Las fórmulas (17.17) y (17.21) permiten totalmente tener en cuenta la influencia del dieléctrico sobre el campo eléctrico. La intensidad del campo, creada por las cargas ligadas, se calcula mediante las mismas fórmulas, por las que se determina la intensidad en el vacío, la cual se origina por las cargas libres. En particular, el potencial φ_d , creado por las cargas ligadas del dieléctrico, se da por las fórmulas (14.35) y (14.36), sustituyendo en ellas las cargas libres por

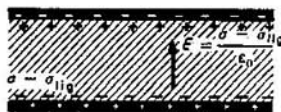


Fig. 82
Campo en el condensador en presencia del dieléctrico

las ligadas:

$$\begin{aligned} \Phi_d &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_{11g} dV}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_{11g} dS}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\operatorname{div} \mathbf{P} dV}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{P_{11n} - P_{21n}}{r} dS. \end{aligned} \quad (17.23)$$

Este potencial se compone con el potencial, creado por las cargas libres.

Ahora es útil enunciar otra vez más en forma explícita la idea principal para considerar la influencia de la substancia sobre el campo, que se siguió en el ejemplo de los conductores y dieléctricos: *en presencia de un campo eléctrico exterior la substancia se convierte por sí misma en una fuente del campo eléctrico, como consecuencia de lo cual el campo exterior varía.*

Estudiemos este proceso en el ejemplo de la formación del campo en un condensador plano, cuyo espacio entre las armaduras está lleno de dieléctrico (fig. 82). Consideremos que en las armaduras del condensador hay una carga con densidad superficial σ . Si entre las armaduras del condensador existe vacío, $E' = \sigma/\epsilon_0$ [véase (16.12)]. A causa de la polarización del dieléctrico, la intensidad del campo disminuye. Determinemos la polarización del dieléctrico por la fórmula (17.11), teniendo en cuenta que $E \neq \sigma/\epsilon_0$. Como consecuencia de la homogeneidad del dieléctrico y del campo entre las placas cargadas paralelas, sacamos la conclusión que la polarización del dieléctrico es homogénea, o sea, las cargas ligadas volumétricas están ausentes. Sólo existen las cargas superficiales ligadas, cuya densidad superficial es [véase (17.22)]

$$\sigma_{11g} = \kappa\epsilon_0 E, \quad (17.24)$$

donde E es la proyección de la intensidad por la normal exterior del dieléctrico. Se sabe que la intensidad está dirigida desde la placa con carga positiva del condensador hacia la que tiene carga negativa. Por eso de (17.24) se desprende que la densidad superficial de la carga ligada en la superficie de separación con la placa con carga positiva es negativa y en la superficie de separación con la placa con carga negativa es positiva. Por esta razón, la intensidad del campo en el dieléctrico entre las placas del condensador es igual a la intensidad del campo en el vacío entre las mismas placas, pero siendo la densidad superficial de la carga $\sigma - \sigma_{11g}$. Basándose en esto, puede escribirse la ecuación para definir la magnitud incógnita

$$E = (\sigma - \sigma_{11g})/\epsilon_0 = (\sigma - \kappa\epsilon_0 E)/\epsilon_0. \quad (17.25)$$

La solución de esta ecuación tiene el aspecto

$$E = \sigma/[\epsilon_0(1 + \kappa)]. \quad (17.26)$$

Desplazamiento eléctrico. La ecuación (13.19), teniendo en cuenta las cargas ligadas como fuentes del campo, puede escribirse; evidentemente, de la

siguiente manera:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 + \rho_{\text{lig}}/\epsilon_0. \quad (17.27)$$

Sustituyendo en (17.27) ρ_{lig} por la expresión de (17.17), obtenemos

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho. \quad (17.28)$$

El vector

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \quad (17.29)$$

se denomina **vector del desplazamiento**. *Él no es un vector puramente de campo, ya que tiene en cuenta la polarización del medio.* Escribamos con su ayuda la ecuación (17.28) como

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.} \quad (17.30)$$

Acordándonos del sentido de la divergencia del vector, de (17.30) puede deducirse sobre las ventajas del empleo de \mathbf{D} . Se ve que la única fuente de \mathbf{D} son las cargas libres, en las cuales este vector comienza y finaliza. En los puntos sin cargas libres es continuo, incluyendo los puntos con cargas ligadas. Las variaciones de la intensidad del campo, determinadas por las cargas libres, ya se han tenido en cuenta en el propio vector \mathbf{D} [véase (17.29)].

Expresando \mathbf{P} en (17.29) por la fórmula (17.11), hallamos

$$\mathbf{D} = (\epsilon_0 + \kappa \epsilon_0) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon = (1 + \kappa) \epsilon_0, \quad (17.31)$$

donde ϵ es la constante dieléctrica. La aplicación de \mathbf{D} simplifica considerablemente el análisis del campo en presencia del dieléctrico. A la par con ϵ es cómodo utilizar también la magnitud adimensional

$$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0, \quad (17.32)$$

denominada **permitividad relativa**.

Teorema electrostático de Gauss en presencia de dieléctricos. Al multiplicar los dos miembros de (17.30) por dV e integrar respecto al volumen V , obtenemos

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV. \quad (17.33)$$

En el segundo miembro de (17.33) se halla la carga total Q dentro del volumen y el primer miembro se transforma en la integral por la superficie con ayuda del teorema de Gauss—Ostrogradski. En definitiva encontramos la fórmula

$$\boxed{\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q,} \quad (17.34)$$

llamada **teorema electrostático de Gauss en presencia de dieléctricos**. Es válido para cualquier posición de los dieléctricos y las superficies de separación: una

parte del volumen o todo puede llenarse de diversos dieléctricos, y la superficie S puede pasar tanto en el vacío, como también intersectar los dieléctricos.

Al aplicar la fórmula (17.34) a una carga puntual q que se encuentra en un medio dieléctrico homogéneo ilimitado, y al tomar en calidad de superficie de integración una esfera de radio r con centro en el punto en que se encuentra la carga puntual, obtendremos la ley de Coulomb en el medio dieléctrico homogéneo:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \frac{r}{r}. \quad (17.35)$$

La intensidad del campo en el medio es ϵ_r veces inferior a la del vacío. Tantas veces menor es también el potencial de la carga puntual. La fórmula (17.26) muestra que la intensidad del campo entre las armaduras del condensador en presencia del dieléctrico disminuye también ϵ_r veces en comparación con la intensidad del campo en el vacío. La capacidad del condensador aumenta ϵ_r veces.

Condiciones de frontera. Se denominan condiciones de frontera el enlace entre los vectores del campo por las diferentes partes de la superficie que separa las dos zonas. Dicha superficie puede dividir substancias con distintas propiedades, ser separadora del cuerpo en el vacío y, hablando en general, puede ser simplemente una superficie imaginaria en un medio homogéneo. En todos los casos las condiciones de frontera permiten determinar la variación de los vectores del campo al atravesar el límite. Dichas condiciones se deducen con ayuda de las ecuaciones del campo.

Condiciones de frontera para la componente normal del vector D . Deduzcamos esta condición de la misma manera que se recibió la condición límite (17.21). Pero ahora hay que partir de la ecuación (17.30) y no de (17.17):

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}, \quad \boxed{n_2 \cdot (D_2 - D_1) = \sigma}, \quad (17.36)$$

donde σ es la densidad superficial de la carga en el límite. La normal n_2 está orientada hacia el medio 2. De (17.36) puede obtenerse, por ejemplo, la intensidad del campo en la superficie de un conductor cargado. Considerando como positiva la normal exterior respecto al conductor, debemos considerar en la fórmula (17.36) que el vacío es el medio 2 y el conductor, el medio 1. La intensidad E del campo en el conductor es nula, es decir, $D_{1n} = 0$. Por lo tanto,

$$D_n = \sigma \quad (17.37)$$

o bien

$$E_n = \sigma/\epsilon. \quad (17.38)$$

Esta fórmula coincide con la fórmula (16.12) para el vacío, pero sustituyendo ϵ_0 por ϵ , o sea, la intensidad del campo en la superficie del conductor en presencia del dieléctrico disminuye $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ veces.

La fórmula (17.38) da también la solución directa del problema sobre el campo en un condensador plano que se expresa por la relación (17.26). En este caso desaparece la necesidad de tener en cuenta en forma explícita las cargas li-

gadas superficiales en el dieléctrico entre las placas del condensador, como se hizo al deducir (17.26).

Condiciones de frontera para la componente tangencial del vector E . Construyamos cerca de la superficie de separación de los dieléctricos 1 y 2 un contorno cerrado (fig. 83). A causa del carácter potencial del campo eléctrico, la circulación E por el contorno cerrado es nula:

$$\oint_{AB\bar{C}D\bar{A}} E \cdot dl = 0. \quad (17.39)$$

Las integrales por las secciones BC y DA son tan pequeñas como se quiera, ya que AB y CD se encuentran extremadamente cerca a la superficie de separación.

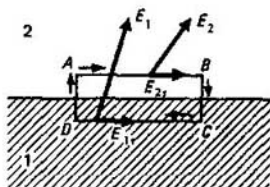


Fig. 83
Para la deducción de la condición de frontera para la componente tangencial del vector E

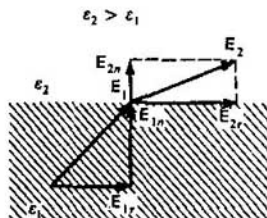


Fig. 84
Refracción de las líneas de fuerza en la superficie de separación de los dieléctricos

ción. Los signos de las integrales por AB y CD son contrarios, debido a que las vías de integración transcurren en direcciones contrarias. Por eso [véase (17.39)]

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \quad (17.40)$$

Refracción de las líneas de fuerza en la superficie de separación de los dieléctricos. Supongamos que en la superficie de separación de los dieléctricos no haya cargas libres. Entonces,

$$\epsilon_1 \epsilon_{1n} = \epsilon_2 \epsilon_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (17.41)$$

Si $\epsilon_2 > \epsilon_1$, $E_{2n} < E_{1n}$ y, por lo tanto, las líneas de fuerza se comportan como se muestra en la fig. 84, o sea, las líneas de fuerza se alejan de la normal, penetrando en el dieléctrico con una constante dieléctrica mayor.

Signos de las cargas ligadas en la superficie de separación de los dieléctricos. Examinemos las componentes normales de la intensidad del campo y de la polarización en la superficie de separación de los dieléctricos. Escribamos la fórmula (17.11), teniendo en cuenta (17.31) para los dieléctricos por las partes di-

ferentes de la separadora, en forma de (fig. 85):

$$P_{2n} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) E_{2n}, \quad P_{1n} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) E_{1n}, \quad (17.42)$$

Transformemos la fórmula (17.21) para la densidad superficial de la carga, tomando en consideración (17.32):

$$\sigma_{lig} = P_{1n} - P_{2n} = \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}). \quad (17.43)$$

De no haber cargas libres en la superficie, $\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = 0$ y la fórmula (17.43) se simplifica:

$$\sigma_{lig} = -\epsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}). \quad (17.44)$$

Para mayor precisión consideraremos como siempre que $\epsilon_2 > \epsilon_1$ y E está dirigida desde el primer medio al segundo. Recordemos que a título de normal

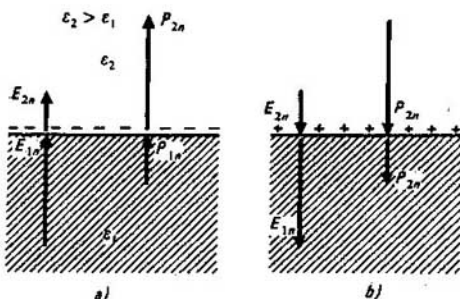


Fig. 85

Signo de la carga superficial y comportamiento de las componentes normales de la intensidad del campo y la polarización al intersecar las superficies de separación en distintas direcciones

positiva se elige la orientada hacia el segundo medio. Entonces en la fórmula (17.44) E_{1n} y E_{2n} son positivas, con la particularidad de que $E_{1n} > E_{2n}$. Por eso la carga ligada en la superficie de separación es negativa (fig. 85, a). Las magnitudes P_{1n} y P_{2n} son también positivas y, por lo tanto, $P_{2n} > P_{1n}$, como se ve de (17.43) para $\sigma_{lig} < 0$ (fig. 85, a).

Con ayuda de semejantes razonamientos puede estudiarse la variación de las componentes normales de la intensidad del campo, la polarización y el signo de la densidad superficial de la carga cuando la intensidad del campo está orientada hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica (fig. 85, b).

Método de representaciones. La idea del método aplicado a los dieléctricos es la misma que al emplearlo para los conductores (véase el § 16).

Supongamos que se tienen dos medios dieléctricos infinitos (con permitividades ϵ_1 y ϵ_2) con superficie de separación plana. En el primer medio a la distan-

cia d de la superficie de separación se encuentra una carga puntual q . Se afirma que el potencial en el primer medio es el mismo que el debido a la carga q y su imagen $q' = q(\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$, situada en el segundo medio a la distancia d de la superficie de separación (fig. 86, a), con la particularidad de que el cálculo se lleva a cabo de tal manera, como si la constante dieléctrica de los medios fuese ϵ_1 . El potencial del segundo medio es igual al potencial, creado por la carga $q'' = 2\epsilon_2 q/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$, que se encuentra en el lugar de la carga q en el primer

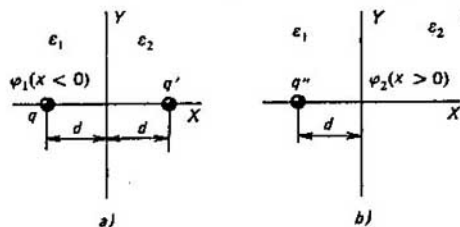


Fig. 86
Método de representaciones en aplicación de a los dieléctricos

medio (fig. 86, b), con la particularidad de que el cálculo se efectúa de tal manera, como si la constante dieléctrica de los medios fuese ϵ_2 . Así pues, los potenciales de los medios primero y segundo son iguales a:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} \right\}, \quad (17.45)$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}}.$$

No es difícil comprobar que φ_1 y φ_2 satisfacen la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=0}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \Big|_{x=0} = 0, \end{aligned} \quad (17.46)$$

que expresa la continuidad de las componentes normales de D y de las componentes tangenciales de E . Además, se satisfacen también la exigencia de que el potencial sea finito:

$$\varphi_1 |_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad \varphi_2 |_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow 0. \quad (17.47)$$

Según el teorema de unicidad, las fórmulas (17.45) son la solución buscada. La fuerza que actúa sobre la carga q es igual a la fuerza de interacción de esta carga con la imagen $(\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2) q$, situada a la distancia $2d$ de la

carga q :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \frac{q^2}{4a^2}. \quad (17.48)$$

Para $\epsilon_1 < \epsilon_2$ el valor de F es negativo, es decir, q se atrae a la superficie de separación de los dieléctricos. Pero si $\epsilon_1 > \epsilon_2$, F es positiva y, por lo tanto, q se repele de la frontera.

Esfera dieléctrica en un campo homogéneo. Con ayuda de la ecuación de Laplace hallemos la intensidad del campo eléctrico al introducir una esfera dieléctrica en el campo eléctrico inicialmente homogéneo. Si las dimensiones lineales de las armaduras de un condensador plano son bastante grandes, incluso para una distancia relativamente grande entre ellas, el campo en las zonas inter-

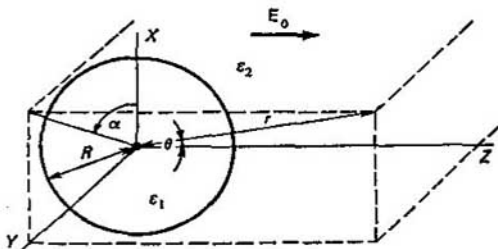


Fig. 87
Orientación del sistema de coordenadas para una esfera dieléctrica en un campo homogéneo

nas lejos de los extremos es homogéneo con elevada precisión. Si las dimensiones de las armaduras aumentan hasta el infinito, creciendo al mismo tiempo hasta el infinito la distancia entre ellas, para una densidad superficial de las cargas en las armaduras constantes, en todo el espacio se crea un campo eléctrico homogéneo. Coloquemos en este campo una esfera dieléctrica conductora. Está claro que a causa de la polarización la intensidad del campo en las proximidades de la esfera varía, permaneciendo constante en el infinito. Determinemos la intensidad del campo eléctrico en todo el espacio, incluyendo la zona dentro de la esfera dieléctrica.

Supongamos que la esfera de radio R consta de un dieléctrico, cuya constante dieléctrica es ϵ_1 , y el medio que la rodea está lleno de dieléctrico con la constante dieléctrica ϵ_2 (fig. 87). La intensidad del campo homogéneo está dirigida paralelamente al eje Z . Como consecuencia de la simetría axial del problema, es cómodo hacer uso del sistema esférico de coordenadas con el eje polar orientado por el eje Z .

Para un dieléctrico homogéneo con constante dieléctrica ϵ la ecuación de Poisson (15.14) tiene el aspecto

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon, \quad (17.49)$$

lo que es obvio, al comparar la ecuación (15.10) para el vacío con la ecuación (17.30) que para el dieléctrico homogéneo tiene el aspecto

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon. \quad (17.50)$$

En el sistema esférico de coordenadas la ecuación de Poisson se escribe así:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (17.51)$$

donde α es el ángulo axial. En dicho problema no hay cargas libres ($\rho = 0$), y, como consecuencia de la simetría axial, $\partial \varphi / \partial \alpha = 0$. Por eso la tarea se reduce a la solución de la ecuación de Laplace

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (17.52)$$

en todo el espacio, observando las siguientes condiciones:

- 1) en todas las partes el potencial φ es continuo y finito;
- 2) las componentes normales del vector $\mathbf{D} = -\epsilon \operatorname{grad} \varphi$ son continuas en las superficies de separación de los medios, o sea, en la superficie de la esfera;
- 3) las componentes tangenciales del vector $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ son continuas en la superficie de la esfera.

Designemos las magnitudes, referentes a la zona interior de la esfera por el índice 1 y a la zona exterior, por el índice 2. En las matemáticas se conoce la solución general de la ecuación (17.52). En el caso dado todo se simplifica considerablemente. Mediante la verificación directa, puede uno cerciorarse de que las funciones

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 r \cos \theta + A_2 r^{-2} \cos \theta, \\ \varphi_2 &= -E_0 r \cos \theta + B_2 r^{-2} \cos \theta \end{aligned} \quad (17.53a)$$

satisfacen la ecuación (17.52), donde A_1 , A_2 y B_2 son constantes y E_0 es el módulo de la intensidad del campo homogéneo (en el infinito).

Dado que φ_1 y φ_2 satisfacen la ecuación (17.52), son el potencial si satisfacen todas las exigencias del problema. El potencial φ_1 pertenece a la zona interior de la esfera y φ_2 , a la exterior. De (17.53a) se ve que $\varphi_1 \rightarrow \infty$ para $r \rightarrow 0$. Por eso es necesario considerar que $A_2 = 0$. La condición de continuidad de φ en la superficie de separación tiene el aspecto

$$A_1 R \cos \theta = -E_0 R \cos \theta + B_2 R^{-2} \cos \theta, \quad (17.53b)$$

de donde

$$A_1 = B_2 R^{-3} - E_0. \quad (17.54)$$

La componente tangencial del vector \mathbf{E} en la superficie de la esfera es igual a

$$E_\tau = E_\theta = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right]_{r=R}. \quad (17.55)$$

La condición $E_1 \theta = E_2 \theta$ se satisface si se cumple la condición (17.53b), es decir, entre A_1 y B_2 existe la relación (17.54).

Las componentes normales del vector de intensidad son:

$$\begin{aligned} E_{1n} = E_{1r} &= -(\partial\varphi_1/\partial r)_{r=R} = -A_1 \cos \theta, \\ E_{2n} = E_{2r} &= -(\partial\varphi_2/\partial r)_{r=R} = E_0 \cos \theta + 2B_2 R^{-3} \cos \theta. \end{aligned} \quad (17.56)$$

Partiendo de la condición $\varepsilon_1 E_{1r} = \varepsilon_2 E_{2r}$, se desprende que

$$A_1 = -(\varepsilon_2/\varepsilon_1)(E_0 + 2B_2 R^{-3}). \quad (17.57)$$

La solución del sistema de (17.54) y (17.57) es:

$$A_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0, \quad B_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} R^3 E_0. \quad (17.58)$$

Los potenciales dentro de la esfera y fuera de ella son iguales a:

$$\varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 r \cos \theta, \quad (17.59)$$

$$\varphi_2 = -\left(1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\right) E_0 r \cos \theta. \quad (17.60)$$

Evidentemente, dentro de la esfera la intensidad del campo es constante y paralela al eje Z:

$$E_{1z} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial(r \cos \theta)} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0. \quad (17.61)$$

Esta es la suma de las intensidades del campo exterior y del campo creado por las cargas ligadas que surgen en la superficie de la esfera. Por lo tanto, la

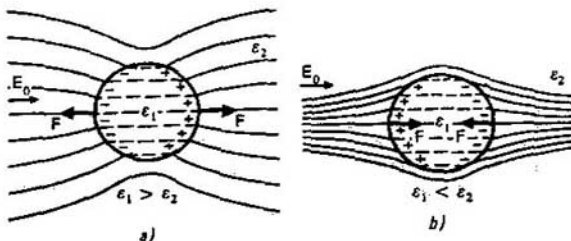


Fig. 88
Líneas del vector de desplazamiento D para una esfera dieléctrica en un campo homogéneo exterior

intensidad del campo, formado dentro de la esfera por las cargas ligadas es igual a

$$E_{1lg} = E_{1z} - E_0 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)E_0/(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2). \quad (17.62)$$

Esta es constante y está dirigida por el eje Z. La distribución de las cargas en la superficie de la esfera que conduce a una intensidad constante dentro de la esfera, se determina por la fórmula (16.75). Por eso puede concluirse que la intensi-

dad de (17.62) se crea por las cargas ligadas en la superficie de la esfera, cuya densidad varía con el ángulo θ como en la fórmula (16.79), es decir, $\sigma \sim \cos \theta$.

De (17.62) se ve que para $\epsilon_1 > \epsilon_2$ la intensidad E_{lig} está orientada en sentido contrario a E_0 y, por lo tanto, la intensidad dentro de la esfera es inferior a la del campo homogéneo inicial. Para $\epsilon_2 > \epsilon_1$ la intensidad E_{lig} coincide en dirección con E_0 y amplifica ésta dentro de la esfera. La fig. 88 muestra las líneas del vector D para los casos $\epsilon_1 > \epsilon_2$ (a) y $\epsilon_1 < \epsilon_2$ (b) y los signos de las cargas ligadas que en este caso se forman en la superficie de la esfera. Señalemos que en la fig. 88 se muestran las líneas del vector D y no de E , ya que precisamente el vector D es continuo al no haber cargas libres. Al trazar las líneas del vector E , es necesario cambiar su densidad en la superficie de la esfera donde existen cargas ligadas.

Las cargas polarizadas (o ligadas) surgen donde cambia la polarización.

Habiendo campo eléctrico exterior, los cuerpos materiales se convierten ellos mismos en fuentes del campo eléctrico, como consecuencia de lo cual, el campo que se observa, varía. En este caso los campos eléctricos se comportan con respecto a sus fuentes como si todo ocurriese en el vacío y no hubiese cuerpos materiales algunos.

Se llama polarización al proceso de formación de momentos dipolares en los volúmenes macroscópicos del dieléctrico.

La componente normal de la intensidad del campo eléctrico sufre una discontinuidad en la superficie de separación de diversos dieléctricos y por eso las líneas de fuerza se refractan.

Ejemplo 17.1. Hallar las cargas ligadas, la polarización y la intensidad del campo, inducido por la carga puntual q colocada en el centro de dos esferas concéntricas con radios a_1 y a_2 . La capa esférica está llena de una substancia, cuya constante dieléctrica es ϵ (fig. 89).

El campo es esféricamente simétrico. Eligiendo como S la superficie de la esfera con radio r y centro en el punto en que está la carga q , determinamos, por la fórmula de Gauss

$$\int_S D \cdot dS = D_r 4\pi r^2 = q, \text{ el desplazamiento eléctrico}$$

$$D_r = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2},$$

que es constante en todo el espacio. La intensidad del campo eléctrico

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \text{ para } r < a_1,$$

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \text{ para } a_1 < r < a_2,$$

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \text{ para } a_2 < r$$

sufre una discontinuidad en la superficie de la capa esférica para $r = a_1$ y $r = a_2$.

La polarización se da mediante las expresiones

$$P_r = D_r - \epsilon_0 E_r = \begin{cases} 0 & \text{para } r < a_1 \\ \frac{(\epsilon - \epsilon_0) q}{4\pi\epsilon r^2} & \text{para } a_1 < r < a_2, \\ 0 & \text{para } a_2 < r \end{cases} \quad (17.64)$$

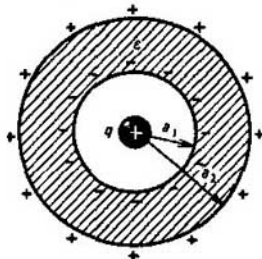


Fig. 89
Carga puntual, rodeada por una capa dieléctrica, concéntrica con ella

y, por lo tanto, la densidad superficial de las cargas ligadas es

$$\sigma_{11g.1} = -P_r(r = a_1) = -(\epsilon - \epsilon_0) q / (4\pi\epsilon a_1^2), \quad (17.65)$$

$$\sigma_{11g.2} = P_r(r = a_2) = (\epsilon - \epsilon_0) q / (4\pi\epsilon a_2^2).$$

Las cargas ligadas en la superficie de la capa esférica se calculan por las fórmulas:

$$q_{11g.1} = 4\pi a_1^2 \sigma_{11g.1} = -(\epsilon - \epsilon_0) q / \epsilon,$$

$$q_{11g.2} = 4\pi a_2^2 \sigma_{11g.2} = (\epsilon - \epsilon_0) q / \epsilon.$$

Son iguales por el valor absoluto y contrarias según el signo.

La densidad volumétrica de las cargas ligadas es por todas las partes nula, ya que

$$\rho_{11g} = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = 0. \quad (17.66)$$

El campo dentro de la capa esférica se crea por la carga puntual q y la carga ligada $q_{11g.1}$ que se encuentra en la superficie interior de la capa. La carga ligada situada en la superficie exterior de la capa esférica no forma campo eléctrico en el volumen que limita. Por esta razón, la intensidad del campo de una carga puntual q dentro de la capa esférica disminuye en el valor de la intensidad, creada por la carga ligada $q_{11g.1} = -(\epsilon - \epsilon_0) q / \epsilon$. Para $a_1 \rightarrow 0$ deducimos que la carga puntual q en el dieléctrico actúa como una carga puntual efectiva

$$q_{\text{ef}} = q + q_{11g.1} = \epsilon_0 q / \epsilon. \quad (17.67)$$

Esto conduce al debilitamiento de la intensidad del campo eléctrico en el dieléctrico.

§ 18. Energía del campo electrostático

Se examinan la energía de interacción y energía propia de las cargas y su relación con la densidad de energía del campo eléctrico. Se deducen las fórmulas para la energía de los conductores cargados y la energía de un cuerpo dieléctrico en un campo exterior.

Energía de interacción de las cargas discretas. Supongamos que haya esferas cargadas de diámetro muy pequeño, que es inferior a la distancia entre los centros de las esferas. La distribución de la carga en las esferas es esféricamente simétrica. El sentido físico de la fórmula (14.32) permite deducir que la magnitud

$$W' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r} \quad (18.1)$$

es igual al trabajo que se efectúa al alejar las cargas Q_1 y Q_2 desde la distancia r entre ellas hasta el infinito. Este trabajo es positivo cuando las cargas son del mismo signo y entre ellas actúan fuerzas de repulsión. Entre las cargas de signos contrarios actúan fuerzas de atracción y el trabajo es negativo. En el último caso el trabajo tiene que ejercerse a cuenta de las fuentes exteriores de energía. Por eso, conforme a la definición general, (18.1) es la energía de interacción entre las esferas cargadas. Dado que ambas cargas participan en la fórmula (18.1)

es más conveniente escribirla como

$$W' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r} Q_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r} Q_2 \right) = \frac{1}{2} (\varphi_1' Q_1 + \varphi_2' Q_2), \quad (18.2)$$

donde φ_1' es el potencial, creado por la segunda carga en el centro de la primera esfera y φ_2' el potencial, que forma la primera carga en el centro de la segunda esfera.

La fórmula (18.2) se generaliza fácilmente para el caso de varias esferas cargadas con cargas Q_i :

$$W' = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i' Q_i. \quad (18.3)$$

Esta fórmula nos ofrece la energía de interacción del sistema de cargas.

Energía de interacción durante la distribución continua de las cargas. Sea que en el elemento de volumen dV se encuentre una carga $dQ = \rho dV$. Para definir la energía de interacción de los elementos de la carga dQ puede aplicarse la fórmula (18.3), pasando en ella de la suma a la integral:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV, \quad (18.4)$$

donde φ es el potencial en el punto del elemento de volumen dV .

Energía propia. A primera vista la fórmula (18.4) parece ser análoga a (18.3). En cambio, entre ellas existe una diferencia de principio. La fórmula (18.3) tiene en cuenta sólo la energía de interacción entre las esferas cargadas sin considerar la energía de interacción de los elementos de la carga de cada esfera entre sí. Mientras que la fórmula (18.4) toma en consideración tanto la energía de interacción entre las esferas, como también la energía de interacción de los elementos de carga de cada esfera entre sí, denominada energía propia de la esfera cargada. Al calcular la energía de interacción de las esferas cargadas, (18.4) se reduce a las integrales respecto a los volúmenes V_i de las esferas:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV = \sum_i \frac{1}{2} \int_{V_i} \varphi_i \rho dV. \quad (18.5)$$

En cualquier punto del volumen de la i -ésima esfera φ_i se compone de dos partes: $\varphi_i^{(1)}$, creado por las cargas de las otras esferas y $\varphi_i^{(pr)}$, formado por las cargas de la i -ésima esfera:

$$\varphi_i = \varphi_i^{(1)} + \varphi_i^{(pr)}. \quad (18.6)$$

Entonces [véase (18.5)]

$$W = \sum_i \frac{1}{2} \int_{V_i} \varphi_i^{(1)} \rho dV + \sum_i \frac{1}{2} \int_{V_i} \varphi_i^{(pr)} \rho dV. \quad (18.7)$$

Puesto que las cargas en las esferas se distribuyen de manera esféricamente simétrica,

$$\int_{V_i} \varphi_i^{(v)} \rho \, dV = \varphi_i Q_i, \quad (18.8)$$

donde φ_i es el potencial en el centro de la esfera y $Q_i = \int_{V_i} \rho \, dV$, la carga total de la esfera.

La demostración de (18.8) en principio es semejante a la de la equivalencia del campo eléctrico, engendrado por la distribución esféricamente simétrica de la carga en la esfera y por la correspondiente carga puntual, situada en el centro de la esfera (para la zona fuera de la esfera). Ahora (18.7) puede escribirse como

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i + \frac{1}{2} \sum_i \int_{V_i} \varphi_i^{(pr)} \rho \, dV = W' + \sum_i W_i^{(pr)}, \quad (18.9)$$

donde W_i se da por la fórmula (18.3).

Las energías propias $W_i^{(pr)}$ de las esferas dependen de las leyes de distribución de la carga en las esferas y los valores de las cargas. Por ejemplo, sea que por la superficie de la esfera esté distribuida uniformemente una carga Q . En este caso el potencial se determina por la fórmula (16.28) y, por lo tanto,

$$W^{(pr)} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \quad (18.10)$$

Para $R \rightarrow 0$ la magnitud $W^{pr} \rightarrow \infty$. Eso significa que la energía propia de la carga puntual es infinita. Ello conduce a serias dificultades al utilizar el concepto de cargas puntuales.

Así pues, la fórmula (18.3) puede emplearse para analizar la interacción de las cargas puntuales, ya que ella no contiene sus energías propias infinitas. La fórmula (18.4) para la distribución continua de la carga tiene en cuenta toda la energía de interacción, mientras que la (18.3) sólo parte de ella. Por esta razón, (18.4) es una fórmula más completa y con mayor contenido que la (18.3).

Densidad de la energía del campo. Haciendo uso de la ecuación

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (18.11)$$

escribamos (18.4) en la forma

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV. \quad (18.12)$$

Tomando en consideración la fórmula del análisis vectorial

$$\varphi \operatorname{div} \mathbf{D} = -\mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{div} (\varphi \mathbf{D}), \quad (18.13)$$

representemos (18.12) como la suma de dos integrales:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dV + \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} (\varphi \mathbf{D}) \, dV, \quad (18.14)$$

donde $E = -\text{grad } \varphi$. La segunda integral en (18.14), según el teorema de Gauss—Ostrogradski, es igual a

$$\int_V \text{div}(\varphi D) dV = \int_S \varphi D \cdot dS, \quad (18.15)$$

donde S es una superficie cerrada que abarca el volumen V . Se supone que todas las cargas están en una zona finita del espacio. A distancias r lejanas de las cargas $\varphi \sim 1/r$, $D \sim 1/r^2$, o sea, $\varphi D \sim 1/r^3$. El área S de la superficie crece directamente proporcional a r^2 . Por lo tanto, la integral (18.15) tiene el orden de $\varphi SD \sim 1/r$ y al alejar la superficie de integración al infinito, tiende a cero. Por eso para todo el espacio la fórmula (18.14) adquiere la forma

$$W = \frac{1}{2} \int E \cdot D \, dv. \quad (18.16)$$

Las energías W , calculadas por las fórmulas (18.16) y (18.4) son iguales, pero el contenido físico de estas fórmulas es totalmente diferente. Imaginemos que las cargas estén en unas capas superficiales finas de las esferas. En este caso la integral (18.4) se reduce a la suma de las integrales por las capas superficiales de las esferas, mientras que en el espacio entre las cargas es nula. La integral en (18.16) se reduce a la integral respecto al espacio entre las esferas donde hay un campo E . Por consiguiente, en (18.4) como portador de la energía sirven las cargas, y la energía se presenta localizada en las cargas. En (18.16) el campo eléctrico se considera portador de la energía y la energía se imagina localizada en todo el espacio donde existe campo eléctrico. La densidad de la energía eléctrica [véase (18.16)] es igual a

$$w = 1/2 E \cdot D. \quad (18.17)$$

De esta manera, la densidad de la energía en (18.17) es positiva, ya que $E \cdot D = \epsilon E^2 > 0$. Por lo tanto, la energía total en (18.16) y (18.4) es también positiva. En cambio, la energía de interacción en (18.3) entre las cargas discretas puede ser tanto positiva, como negativa. La causa de esto se desprende de la igualdad (18.9), la que es útil representar como

$$W' = W - \sum_i W_i^{(pr)}. \quad (18.18)$$

Así pues, la energía de interacción entre las cargas discretas es positiva cuando su energía propia (que siempre es positiva) es inferior a la energía total del campo, y negativa, cuando su energía propia es mayor que la energía total del campo.

Supongamos que todas las cargas estén fijas en sus lugares, a excepción de una de ellas. Entonces la energía de interacción de la carga separada con las otras se denomina energía potencial. Basándose en lo dicho, ésta es simplemente una parte de la energía del campo eléctrico. La variación de la energía potencial está relacionada con el cambio de la energía del campo. El principio de conserva-

ción de la energía para una partícula en un campo de potencial que afirma la constancia de la suma de su energía cinética y potencial significa que la disminución de la energía cinética de la partícula va acompañada del aumento correspondiente de la energía del campo, y viceversa.

La expresión (18.17) está enunciada en forma local y determina la densidad de la energía como función de la intensidad del campo eléctrico y las propiedades del medio en el punto dado, consideradas por el desplazamiento D . Está claro que la validez de esta fórmula no puede depender del modo que se creó el campo eléctrico en el punto dado. Por eso la expresión (18.17) es justa no sólo para los campos continuos, sino que también para los variables. Con otras palabras, esta fórmula expresa la densidad de la energía del campo eléctrico y no sólo del electrostático.

Energía del campo de las cargas superficiales. Dado que la fórmula (18.17) no depende de qué cargas son las fuentes del campo, ella es válida también habiendo cargas superficiales. La fórmula (18.16) da también la energía total del campo independientemente de cuáles son las cargas que engendran el campo. Por lo tanto, la fórmula (18.16) tiene en cuenta correctamente no sólo las cargas volumétricas, sino que las superficiales.

En presencia de cargas superficiales la fórmula (18.4) varía en cierto grado. Sin embargo, este cambio es evidente. El integrando en (18.4) es igual a $\varphi \rho dV = \varphi dq$ y tiene el sentido de energía potencial que posee un elemento de carga dq , encontrándose en el punto con potencial φ . Esta energía potencial no depende del hecho de si es dq un elemento de la carga volumétrica o superficial. Por esta razón, la expresión (18.4) es aplicable también para las cargas superficiales, pero entonces $dq = \sigma dS$ y es necesario integrar respecto a todas las superficies S en las que haya cargas. Por consiguiente, teniendo en cuenta las cargas superficiales, la fórmula (18.4) adquiere el aspecto

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS. \quad (18.19)$$

Todo lo dicho sobre la energía de interacción y la energía propia es válido también para las cargas superficiales. Sólo es necesario tomar en consideración su aportación tanto en la energía total, como en la propia. Esta circunstancia ya fue utilizada al deducir la energía propia [véase (18.10)].

Energía de los conductores con carga. Puesto que en los conductores existen sólo cargas superficiales y el potencial en los distintos puntos del conductor tiene un mismo valor constante, la fórmula (18.18) toma el aspecto

$$W = \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS = \frac{1}{2} \sum_i \int_{S_i} \varphi_i \sigma_i dS_i = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \int_{S_i} \sigma_i dS_i = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i. \quad (18.20a)$$

Poniendo en esta fórmula la expresión (16.42), obtenemos la relación

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{ij} Q_i Q_j. \quad (18.20b)$$

Transformemos (18.20a) con ayuda de (16.45) a la forma

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} \varphi_i \varphi_j. \quad (18.20c)$$

De (18.20a) tenemos

$$W = \frac{1}{2} Q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}, \quad (18.19d)$$

donde $C = Q/(\varphi_1 - \varphi_2)$ es la capacidad del condensador y Q , la carga en una de sus armaduras.

Energía del dipolo en un campo exterior. Esta energía es igual a la suma de energías de las cargas del dipolo (véase la fig. 77):

$$W = q [\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \varphi(\mathbf{r})]. \quad (18.21)$$

Desarrollemos $\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l})$ en serie respecto a l :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) &= \varphi(\mathbf{r}) + l_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + l_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + l_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \dots = \\ &= \varphi(\mathbf{r}) - (l_x E_x + l_y E_y + l_z E_z) = \varphi(\mathbf{r}) - \mathbf{l} \cdot \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (18.12)$$

donde debido a la extremada pequeñez de l se conservan sólo los términos del primer orden respecto a l . La fórmula (18.21) adquiere la forma

$$\boxed{W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}. \quad (18.23)$$

Energía de un cuerpo dieléctrico en un campo exterior. El momento dipolar del elemento de volumen dV del cuerpo es igual a $d\mathbf{p} = \mathbf{P} dV$. La energía de este elemento en un campo exterior con intensidad \mathbf{E} es [véase (18.23)] $dW = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} dV$. Parece como si la energía del cuerpo dieléctrico fuese igual a la integral de dW respecto al volumen del cuerpo. Pero eso es erróneo. Es que cada elemento polarizado del volumen dV del cuerpo dieléctrico se convierte en fuente del campo eléctrico, merced a lo cual participa dos veces en el cálculo de la energía: una vez como el momento dipolar que se encuentra en el campo exterior, y otra vez, como fuente del campo en el que se hallan los demás momentos dipolares.

Por esta razón, para definir su energía es cómodo partir de la energía total del campo. Además, supongamos que el dieléctrico es homogéneo y ocupa todo el espacio, lo que simplifica considerablemente los cálculos matemáticos.

Sea que el campo electrostático se cree mediante cierta distribución de las cargas en el espacio libre. Como siempre, las cargas se consideran situadas en una zona finita del espacio. Designemos por \mathbf{E}_0 y $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ los vectores del campo, originado por la distribución de la carga en el espacio libre. La energía total del campo [véase (18.16)] es

$$W_0 = \frac{1}{2} \int \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 dV, \quad (18.24)$$

donde la integral se extiende a todo el espacio. Ahora supongamos que todo el espacio se llena de un medio dieléctrico, permaneciendo constantes las cargas como fuentes de campo. El campo en todo el espacio varía. Designemos por ϵ , \mathbf{E} , $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ la constante dieléctrica y los vectores del campo en el medio, respectivamente. La energía total después de llenar el espacio con dieléctrico, es igual a

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV. \quad (18.25)$$

Por lo tanto, la energía del dieléctrico, colocado en un campo exterior con intensidad \mathbf{E}_0 , es

$$W_d = W - W_0 = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0) dV. \quad (18.26)$$

Al llenar todo el espacio con dieléctrico homogéneo con permitividad ϵ , la intensidad en todos los puntos del campo disminuye en ϵ/ϵ_0 veces. Por lo tanto

$$\mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 / \epsilon. \quad (18.27)$$

Por eso, el integrando en (18.26) puede transformarse como

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 = \epsilon E^2 - \rho_0 E_0^2 = -(\epsilon - \epsilon_0) \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_0^2 = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0, \quad (18.28)$$

donde

$$(\epsilon - \epsilon_0) \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \mathbf{E}_0 = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = \mathbf{P}. \quad (18.29)$$

Entonces [véase (18.26)]

$$W_d = -\frac{1}{2} \int \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 dV. \quad (18.30)$$

Puede mostrarse que la fórmula (18.30) es válida también para la energía del dieléctrico de dimensiones finitas en un campo exterior \mathbf{E}_0 .

De (18.20) puede obtenerse la energía del cuerpo dieléctrico con permitividad ϵ_2 que se encuentra en un medio con la constante dieléctrica ϵ_1 . Escribamos a fórmula (18.30) para la energía del cuerpo dieléctrico con la constante dieléctrica ϵ_1 :

$$W_{d1} = -\frac{1}{2} \int (\epsilon_1 - \epsilon_0) \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_0 dV, \quad (18.31)$$

donde \mathbf{E}_1 es la intensidad del campo en el cuerpo. Para simplificar los cálculos consideramos, como siempre, que el dieléctrico llena todo el espacio. La energía del dieléctrico con la permitividad ϵ_2 es semejante a la expresión (18.31) e igual a

$$W_{d2} = -\frac{1}{2} \int (\epsilon_2 - \epsilon_0) \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_0 dV. \quad (18.32)$$

De aquí se desprende que la diferencia de las energías del dieléctrico con la constante dieléctrica ϵ_2 y del dieléctrico con la constante dieléctrica ϵ_1

es igual a

$$W_{d21} = W_{d2} - W_{d1} = -\frac{1}{2} \int [(e_2 - e_0) E_2 \cdot E_0 - (e_1 - e_0) E_1 \cdot E_0] dV. \quad (18.32a)$$

Transformando el integrando con auxilio de las fórmulas

$$E_2 = e_0 E_0 / e_2, \quad E_1 = e_1 E_1 / e_1, \quad (18.33)$$

hallamos

$$\begin{aligned} (e_2 - e_0) E_2 \cdot E_0 - (e_1 - e_0) E_1 \cdot E_0 &= \left[\frac{e_0}{e_2} (e_2 - e_0) - \frac{e_0}{e_1} (e_1 - e_0) \right] E_0^2 = \\ &= (e_2 - e_1) \frac{e_0^2}{e_1 e_2} E_0^2 = (e_2 - e_1) E_2 \cdot E_1. \end{aligned} \quad (18.34)$$

Entonces (18.32) toma la forma

$$W_{d21} = -\frac{1}{2} \int (e_2 - e_1) E_2 \cdot E_1 dV, \quad (18.35)$$

donde W_{d21} es la energía del dieléctrico con la constante dieléctrica e_2 , colocado en un medio, cuya constante dieléctrica es e_1 y en el que el campo E_1 se origina por las cargas libres fijadas en el medio. Puede mostrarse que esa fórmula es válida también para un dieléctrico finito si en (18.35) se toma la integración por el volumen del dieléctrico. En este caso: E_1 es la intensidad del campo que existiría en el volumen del dieléctrico si su constante dieléctrica fuese igual a e_1 del medio ambiente; E_2 , la intensidad del campo en el volumen del dieléctrico después de introducirlo en el campo, siendo las cargas que crean el campo fijas. La fórmula (18.35) resulta importante para comprender las fuerzas que actúan sobre los dieléctricos.

De la fórmula (18.35) se desprende una confirmación muy importante: *el aumento de la constante dieléctrica del medio conduce a la disminución de la energía total del campo*. La demostración se lleva a cabo de la siguiente manera. Sea la intensidad del campo inicial $E_1 = E$ y la constante dieléctrica del medio e_1 . Al aumentar la constante dieléctrica del medio en $\delta e = e_2 - e_1$, la intensidad es $E_2 = E + \delta E$ y, por lo tanto, la variación de la energía se da mediante la fórmula

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int \delta e E^2 dV \quad (18.36)$$

(el término $\delta e \delta E \cdot E$ del orden superior de infinitud se omite). La fórmula (18.36) demuestra la afirmación enunciada.

La energía propia de la carga es la energía de interacción de distintos elementos de la carga entre sí. La energía propia de la carga puntual es infinita.

La energía de interacción de las cargas discretas es la energía total del campo, descontando la energía propia de las cargas. Esta es positiva cuando su energía propia (que siempre es positiva) es inferior a la energía total del campo, y es negativa, cuando supera a la total.

El principio de conservación de la energía para la partícula en un campo potencial que confirma la constancia de la suma de sus energías cinética y potencial, significa que la disminución de la energía cinética de la partícula va acompañada por el correspondiente crecimiento de la energía del campo y viceversa. El aumento de la constante dieléctrica del medio conduce a la disminución de la energía total del campo.



¿Qué es lo que determina la diferencia de los factores en las fórmulas para la energía del dipolo [véase (18.23)] y la energía del cuerpo dieléctrico [véase (18.30)]?

Ejemplo 18.1. Hallar la energía, acumulada en un condensador cilíndrico de dos capas en la longitud l . Los datos sobre el condensador se citan en la fig. 90.

Considerando que en la armadura interior del condensador en la longitud l se encuentra una carga Q , y aplicando el teorema de Gauss a la superficie cilíndrica de radio r , coaxial con el eje del condensador, hallamos para la componente radial de la intensidad del campo la expresión

$$E_r = \begin{cases} \frac{1}{2\pi l \epsilon_1} \frac{Q}{r} & \text{para } r_1 < r < a, \\ \frac{1}{2\pi l \epsilon_2} \frac{Q}{r} & \text{para } a < r < r_2, \\ 0 & \text{para } r_2 < r < \infty. \end{cases}$$

Fig. 90
Condensador esférico o cilíndrico de dos capas

La energía del campo se encuentra por la fórmula

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dV,$$

que en este caso adquiere la forma

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_0^l dl \int_{r_1}^a \left(\frac{Q}{2\pi l} \right)^2 \frac{1}{\epsilon_1} \frac{1}{r^2} 2\pi r \, dr + \frac{1}{2} \int_0^l dl \int_a^{r_2} \left(\frac{Q}{2\pi l} \right)^2 \frac{1}{\epsilon_2} \frac{1}{r^2} 2\pi r \, dr = \\ &= \frac{Q^2}{4\pi l} \left(\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{a}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_2}{a} \right). \end{aligned}$$

§ 19. Fuerzas en el campo eléctrico

Se examinan las fuerzas que actúan en el campo eléctrico sobre las cargas, conductores y dieléctricos. Se analiza la aparición de las fuerzas superficiales y volumétricas.

Naturaleza de las fuerzas. Todas las fuerzas que surgen en el campo electrostático son, a fin de cuentas, fuerzas que actúan sobre la carga.

Fuerza que actúa sobre una carga puntual. Esta es igual a

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (19.1)$$

Fuerza que actúa sobre una carga continuamente distribuida. Esta es igual a

$$d\mathbf{F} = \rho\mathbf{E} \, dV. \quad (19.2)$$

Por lo tanto, la densidad volumétrica de las fuerzas es

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \rho \mathbf{E} = -\rho \text{grad } F. \quad (19.3)$$

Fuerza que actúa sobre el dipolo. Esta fuerza es igual a la suma de las fuerzas aplicadas a las cargas del dipolo (fig. 91):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{(+)} + \mathbf{F}_{(-)} = q [\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{E}(\mathbf{r})]. \quad (19.4)$$

Aquí $\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l})$ puede representarse como una serie respecto a l_x, l_y, l_z y limitarse con los términos lineales:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) + l_x \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial x} + l_y \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial y} + \\ &+ l_z \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial z} + \dots = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (19.5)$$

donde $(\mathbf{l} \cdot \nabla) = l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} + l_z \frac{\partial}{\partial z}$. Teniendo en cuenta (19.5), la fórmula (19.4) adquiere el aspecto

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (19.6)$$

En un campo homogéneo, la fuerza que actúa sobre el dipolo es igual a cero, ya que a las cargas del dipolo se les aplican fuerzas, de igual módulo, pero de dirección contraria.

Momento de fuerzas que actúa sobre el dipolo. Las fuerzas, aplicadas a las cargas del dipolo (véase la fig. 91) forman un par de fuerzas, cuyo momento es

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (19.7)$$

Fuerzas volumétricas que actúan sobre el dieléctrico. La fuerza que se aplica al elemento del volumen dV del dieléctrico es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre los dipolos elementales dentro de este volumen. Por eso la fórmula (19.6) toma la forma

$$d\mathbf{P} = \sum_{\Delta V} \mathbf{F}_i = \sum_{\Delta V} (\mathbf{p}_i \cdot \nabla) \mathbf{E}_i, \quad (19.8)$$

donde ΔV significa que la adición se lleva a cabo por todos los dipolos elementales en el volumen ΔV . En el cuadro macroscópico la intensidad \mathbf{E} se considera una magnitud que varía lentamente. Por esta razón, en la suma de (19.8) \mathbf{E}_i puede sustituirse por la intensidad \mathbf{E} , igual para todos los términos de la suma. Entonces la adición en (19.8) se reduce al cálculo de

$$\sum_{\Delta V} \mathbf{p}_i = \mathbf{P} \Delta V. \quad (19.9)$$

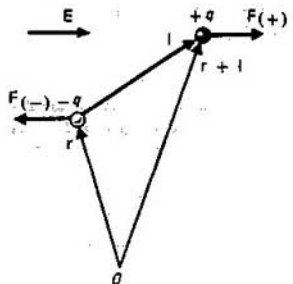


Fig. 91
Fuerza y momento de fuerzas que actúan sobre el dipolo

Por eso para la densidad volumétrica de la fuerza que actúa en el dieléctrico de (19.8) obtenemos

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{\Delta V} = (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (19.10)$$

Tomemos en consideración que $\mathbf{P} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}$, y utilicemos la identidad, conocida del análisis vectorial,

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} = 1/2 \text{ grad } E^2 - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E}, \quad (19.11)$$

en la cual $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, ya que el campo electrostático es potencial. Entonces [véase (19.10)]

$$\mathbf{f} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2} \text{ grad } E^2. \quad (19.12)$$

Esta fórmula es válida tanto para los dieléctricos absolutamente rígidos, como para los comprimidos a condición de que su polarización depende linealmente de la densidad de la masa o, con otras palabras, a condición de que los momentos dipolares de las moléculas y átomos individuales no varían, al comprimirse y dilatarse el elemento del volumen, mientras que los momentos dipolares, determinados por el desplazamiento de los iones, o están ausentes, o su aportación en la polarización puede considerarse insignificante. Estas condiciones se realizan en los gases y, en la mayoría de los casos, en los líquidos.

Esta fórmula es muy evidente, ya que muestra que sobre los volúmenes elementales del dieléctrico actúan fuerzas que tienden a desplazar estos volúmenes en dirección de la velocidad máxima del aumento del módulo de intensidad del campo eléctrico. A veces eso se expresa en forma de una confirmación de que el elemento de volumen del dieléctrico se arrastra en dirección del aumento del módulo de intensidad.

La fórmula para la densidad volumétrica de las fuerzas, válida para los dieléctricos isótropos comprimidos, tiene el aspecto [véase (19.41)]

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} E^2 \text{ grad } \varepsilon + \frac{1}{2} \text{ grad } \left[\rho_m \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \right)_T E^2 \right], \quad (19.13)$$

donde ρ_m es la densidad de la masa del dieléctrico. Esta fórmula es válida cuando $\varepsilon \neq \text{const}$. Si \mathbf{P} es función lineal de ρ_m , $\varepsilon = D/E = \varepsilon_0 + P/E$, $P \sim \rho_m$, de donde $\rho_m (\partial \varepsilon / \partial \rho_m) = \varepsilon - \varepsilon_0$ y la fórmula (19.13) pasa a (19.12). Si dentro del dieléctrico hay cargas libres y presión hidrostática, en (19.13) se añade la densidad volumétrica $\rho \mathbf{E}$ de las fuerzas que actúan sobre las cargas libres, y la presión hidrostática.

Apliquemos estas fórmulas para determinar las fuerzas que actúan sobre una esfera dieléctrica en un campo homogéneo (véase la fig. 88). Para poder utilizar la fórmula (19.12) es necesario considerar que el paso de la zona exterior con la constante dieléctrica ε_2 a la interior con la constante dieléctrica ε_1 se efectúa en la superficie de la esfera no a salto, sino continuamente en una capa

esférica fina. En esta capa la intensidad E varía continuamente desde su valor fuera de la esfera hasta el valor dentro de la esfera. En cada uno de los puntos de la capa esférica, para calcular la fuerza puede hacerse uso de la fórmula (19.12).

Para $\epsilon_1 > \epsilon_2$ la intensidad del campo dentro de la esfera es inferior a la de fuera de la esfera. Por eso la fuerza en cada punto de la capa está dirigida hacia la parte exterior de la esfera. Como consecuencia de la simetría, las resultantes de estas fuerzas por diferentes partes de la esfera tienden a estirar la esfera por la línea de la intensidad del campo exterior (véase la fig. 88, a), no obstante, la resultante de todas las fuerzas es nula y la esfera como todo entero permanece en reposo. Para $\epsilon_1 < \epsilon_2$ las fuerzas en la capa esférica transitoria están orientadas hacia dentro de la esfera y sus resultantes por las diferentes partes de la esfera tienden a aplastarla por la línea de la intensidad del campo exterior. La resultante que actúa sobre la esfera en total es, lo mismo que antes, nula (fig. 88, b).

En cambio, si el campo exterior es heterogéneo, la resultante que actúa sobre la esfera en total no es igual a cero. Es fácil ver que para $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ella está dirigida hacia el aumento de la intensidad del campo en el medio. Ello explica el hecho de que los objetos dieléctricos ligeros se atraen a los cuerpos electrizados, ya que para el aire $\epsilon_2 = \epsilon_0$ y la condición $\epsilon_1 > \epsilon_0$ siempre se observa. Pero si $\epsilon_1 < \epsilon_2$, la resultante está dirigida en sentido contrario, es decir, hacia la disminución de la intensidad del campo en el medio. Por eso en un medio que posee una constante dieléctrica suficientemente grande los objetos dieléctricos con menor constante dieléctrica se repelen de los cuerpos electrizados.

Al investigar el comportamiento de la intensidad del campo eléctrico en la superficie de separación de dos dieléctricos (véanse las figs. 84 y 85) se notó que E^2 siempre aumenta hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica. Por esta razón, con ayuda de razonamientos, análogos a los utilizados para la esfera dieléctrica, de la fórmula (19.12) llegamos a la conclusión de que en la superficie de separación sin carga de dos dieléctricos la fuerza está siempre orientada hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica. Lo dicho explica muchos fenómenos. Por ejemplo, los cuerpos dieléctricos, pedacitos de papel, etc. se atraen a la carga. Claro está que en cualesquiera partes de la superficie del cuerpo, del pedazo de papel, etc. las fuerzas están dirigidas hacia la parte exterior, no obstante, estas fuerzas son mayores en las partes de la superficie que se encuentran más cerca de la carga. Como resultado, surge una fuerza sumaria de atracción (fig. 92).

Semejante comportamiento de los dieléctricos puede comprenderse, partiendo de la expresión (18.35) para la energía del dieléctrico con la constante dieléctrica ϵ_2 que se encuentra en un medio, cuya constante dieléctrica es ϵ_1 . Es obvio que para $\epsilon_2 > \epsilon_1$ esta energía es negativa. Ella disminuye a causa del aumento de ϵ_2 y E_1 y la disminución de ϵ_1 . Puesto que el sistema tiende al mínimo de energía, para $\epsilon_2 > \epsilon_1$ el cuerpo se arrastrará a las zonas de mayor intensidad del campo o menor constante dieléctrica ϵ_1 . Pero si $\epsilon_2 < \epsilon_1$, el dieléctrico con ϵ_2 se expulsará de la zona con mayor intensidad a la que posee menor intensidad.

Supongamos que el cuerpo dieléctrico en forma de un elipsoide alargado se coloca en el campo mostrado en la fig. 93. Ya que en todos los puntos de la superficie del elipsoide las fuerzas que actúan hacia la parte exterior, son mayores allí donde es mayor el gradiente del cuadrado de la intensidad, surge un momento de fuerzas que tiende a poner el elipsoide con su eje mayor a lo largo de las líneas de fuerza. Eso queda sobre todo claro si se recuerda que todas las partes del dieléctrico se arrastran a la zona de mayor intensidad.

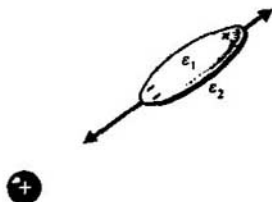


Fig. 92
Mecanismo de aparición de la fuerza de atracción por parte de la carga sobre los cuerpos dieléctricos neutros

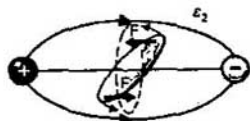


Fig. 93
Cuerpo dieléctrico en forma de un elipsoide alargado, cuyo eje mayor se encuentra a lo largo del campo

Si la constante dieléctrica del cuerpo es inferior a la del medio, las fuerzas en la capa superficial del cuerpo se dirigen hacia la parte exterior. Por eso la dirección de la resultante varía. Los cuerpos dieléctricos, los pedacitos de papel, etc. en vez de atraerse hacia el cuerpo electrizado, se repelen. La fig. 94 muestra el cuadro de las fuerzas para el caso mencionado. El elipsoide dieléctrico alargado en un medio, cuya constante dieléctrica supera la del elipsoide, se sitúa con su eje mayor no en dirección de las líneas de fuerza, sino que perpendicularmente a su orientación (fig. 95). Entonces, las partes del dieléctrico se expulsan de la zona con mayor intensidad a las zonas con menor intensidad.

Fuerzas que actúan sobre un conductor. Sobre la carga $dq = \sigma dS$ que se encuentra en el elemento superficial dS del conductor actúa sólo la mitad de la intensidad del campo que existe en la superficie del conductor, ya que la otra mitad se crea por la propia carga del elemento superficial, por lo que no puede influenciar sobre él (véase el § 16, fig. 39). Como consecuencia, la densidad superficial de la fuerza es

$$f_{\text{sup}} = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma F}{2} \frac{\sigma^2}{2\epsilon} n. \quad (19.14)$$

donde n es el versor de la normal exterior a la superficie del conductor y ϵ , la constante dieléctrica del medio, con el que limita el conductor [véase (17.28)]. Así pues, sobre la superficie del conductor la fuerza siempre actúa en dirección de la normal exterior y como si tendiera a aumentar su volumen.

La resultante que actúa sobre el conductor en total [véase (18.24)], es igual a

$$F = \frac{1}{2} \int_S \frac{\sigma^2}{\epsilon} \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \int_S \frac{\sigma^2}{\epsilon} dS, \quad (19.15)$$

donde S es la superficie del conductor.

La expresión (19.15) permite calcular inmediatamente la fuerza, correspondiente a la sección de área S de la armadura de un condensador plano lleno de dieléctrico:

$$F = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon} S, \quad (19.16)$$

ya que en este caso el campo es homogéneo, es decir, σ y ϵ en el integrando (19.15) son constantes. Dicha fuerza está dirigida hacia el condensador.

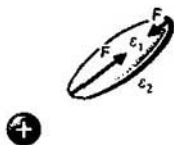


Fig. 94
Mecanismo de aparición de la fuerza de repulsión por parte de la carga sobre un cuerpo dieléctrico neutro, colocado en un medio dieléctrico, cuya constante dieléctrica supera la del cuerpo



Fig. 95
Elipsoide alargado en un medio, cuya constante dieléctrica es mayor que la de él. Se sitúa con su eje mayor transversalmente al campo

Fuerzas superficiales que actúan sobre un dieléctrico. Las fuerzas volumétricas de origen electrostático en estado de equilibrio no ponen en movimiento los elementos correspondientes del volumen. *Ellas provocan la deformación del medio, como consecuencia de la cual surgen fuerzas volumétricas de elasticidad que equilibran totalmente las fuerzas electrostáticas volumétricas.* Semejante equilibrio aparece en el volumen de un líquido que se encuentra en el campo de gravedad. Sobre cada elemento del volumen actúa la fuerza de gravedad del líquido que se encuentra en el elemento de volumen, pero ella se equilibra por la fuerza que surge debido a la presión de las secciones vecinas del líquido sobre la superficie del elemento de volumen. Las fuerzas eléctricas volumétricas ponen en movimiento los volúmenes elementales sólo en el caso de variaciones suficientemente rápidas de los campos cuando las fuerzas elásticas no compensan las fuerzas eléctricas en cada momento de tiempo. La resultante de todas las fuerzas volumétricas está aplicada al dieléctrico en total y puede provocar su movimiento sólo si no se equilibra por cualquier otra fuerza.

A la par con las fuerzas volumétricas, los dieléctricos poseen también *fuerzas superficiales que surgen en la capa superficial del dieléctrico.* Actúan jun-

to con las fuerzas volumétricas. Durante su deducción partiremos del primer principio de la termodinámica.

En los procesos isotérmicos en calidad de potencial termodinámico sirve la energía libre F , relacionada con el trabajo mediante la expresión

$$dA = -dF. \quad (19.17)$$

Puesto que las relaciones termodinámicas, al no haber campo eléctrico, fueron estudiadas en la física molecular, nos limitaremos sólo a tener en cuenta las magnitudes que dependen del campo eléctrico. Por esta razón, en (19.17) se examinan sólo el trabajo y el cambio de la energía libre, determinados por el campo eléctrico. El trabajo y el cambio de la energía libre, determinados por

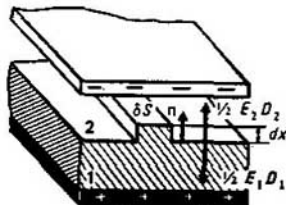


Fig. 96
Aparición de las tensiones de Maxwell

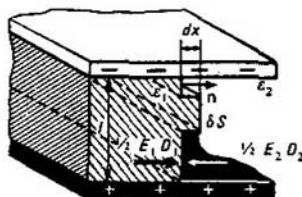


Fig. 97
Aparición de las presiones de Maxwell

las deformaciones y las fuerzas de elasticidad, no los tomaremos en consideración, o sea, consideraremos que el dieléctrico no puede deformarse. Además, nos limitaremos a estudiar los dieléctricos isotrópicos.

La parte de la energía interna que no está enlazada en el sistema y es accesible para obtener trabajo, es la energía libre. Su valor depende de las condiciones de existencia del proceso.

Examinemos una superficie de separación plana entre los dieléctricos con constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_2 . A título de modelo concreto de un sistema físico puede cogerse un condensador plano, cuyo espacio entre las armaduras está lleno con dieléctrico líquido con superficie de separación plana. Esta última puede pasar bien paralelamente a las armaduras, o bien perpendicularmente a ellas. Con ayuda de este modelo pueden obtenerse las expresiones para la densidad superficial de las fuerzas que actúan en la superficie de separación de los dieléctricos. Ya que las relaciones que se obtendrán tienen carácter local, no dependen de la forma concreta del modelo no local, en los márgenes del cual se han obtenido, es decir, su carácter es general.

Estudiemos una superficie de separación plana, paralela a las armaduras del condensador (fig. 96). La intensidad E del campo es perpendicular a la superficie de separación. En calidad de normal positiva elijamos la que está orientada al segundo dieléctrico. Siendo el desplazamiento de la frontera infinitamente pequeño, el trabajo se realiza a cuenta de la variación de la energía libre.

Después de calcular independientemente el trabajo y la variación de la energía libre, hallamos de (19.17) la densidad superficial de las fuerzas. Claro está que el desplazamiento dx debe ser considerado como virtual, es decir, que en realidad no tiene que efectuarse obligatoriamente.

El trabajo para desplazar el elemento superficial ΔS a dx por la normal es

$$dA = \Delta S f_{\text{sup}} dx, \quad (19.18)$$

donde f_{sup} es la densidad superficial de la fuerza.

Al calcular dF tenemos en cuenta que en la superficie de separación de los dieléctricos $D_2 = D_1$ o sea, el desplazamiento de la frontera transcurre para $D = \text{const}$. Esto corresponde a la condición de constancia de la carga en las armaduras del condensador ya que $D = \sigma$. Por lo tanto, es necesario calcular dF para la carga constante q de las armaduras, es decir, $(dF)_{T,q}$. Al desplazar la frontera a dx el volumen $\Delta S dx$, llenado inicialmente por la energía eléctrica de densidad $E_2 D_2 / 2$, quedará lleno de energía con una densidad $E_1 D_1 / 2$. No existen otros factores energéticos que participen en el proceso de realización del trabajo. Como consecuencia, la diferencia de energías en el volumen $\Delta S dx$ después de desplazarse la frontera y antes de su desplazamiento constituye precisamente la variación de la energía libre:

$$(dF)_{T,q} = \left(\frac{1}{2} D_{1n} E_{1n} - \frac{1}{2} D_{2n} E_{2n} \right) \Delta S dx, \quad (19.19)$$

donde el índice n significa que se examinan las componentes normales de D y E .

Teniendo en cuenta (19.18) y (19.19), la relación (19.17) adquiere la forma

$$f_{\text{sup}} = 1/2 E_{2n} D_{2n} - 1/2 E_{1n} D_{1n}. \quad (19.20)$$

La densidad superficial de la fuerza está orientada por la normal a la superficie de separación. De (19.20) se ve que la densidad superficial de la fuerza f_{sup} se compone de dos partes:

1) la densidad superficial de la fuerza

$$f_{2\text{sup}} = 1/2 E_{2n} D_{2n}, \quad (19.21)$$

que surge bajo la influencia del campo eléctrico del segundo medio y está dirigida hacia el segundo medio;

2) la densidad superficial de la fuerza

$$f_{1\text{sup}} = -1/2 E_{1n} D_{1n}, \quad (19.22)$$

que surge bajo la influencia del campo eléctrico del primer medio y está orientada hacia este medio.

Así pues, en el caso dado los campos eléctricos que se encuentran por distintas partes de la superficie de separación, como si atrajesen hacia sí la superficie de separación con densidad superficial de la fuerza, igual a la densidad volumétrica de la energía eléctrica, correspondiente a la componente normal de la intensidad del campo.

La resultante de dos fuerzas, aplicadas a la superficie de separación por distintas partes de la frontera de los campos es una fuerza total que actúa sobre la superficie de separación. Ya que $D_{2n} = D_{1n} = D_n$, [véase (19.20)]

$$f_{\text{sup}} = \frac{1}{2} D_n^2 \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right). \quad (19.23)$$

Para $\epsilon_2 < \epsilon_1$ la densidad superficial de la fuerza $f_{\text{sup}} > 0$. Esto significa que la fuerza actúa sobre la superficie de separación hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica, es decir, en dirección de la mayor densidad volumétrica de la energía eléctrica. Señalemos que la densidad volumétrica de la fuerza [véase (19.12)] está también orientada hacia el aumento de la densidad volumétrica de la energía eléctrica.

Ahora examinemos los dieléctricos, cuya superficie de separación plana es perpendicular a las armaduras del condensador plano (fig. 97). En este caso en la superficie de separación se observa la condición $E_{2\tau} = E_{1\tau} = E_\tau$ ya que la intensidad del campo está dirigida paralelamente a la frontera. El índice τ significa las componentes tangenciales de los vectores respecto a la superficie de separación. El desplazamiento de la frontera transcurre para la condición $E_\tau = \text{const}$, es decir, para una diferencia de potencial constante. Por lo tanto, es necesario calcular la variación de la energía libre ($dF_{\text{v},\varphi}$). Para mantener constante la diferencia de potencial es indispensable cambiar la densidad de las cargas en la parte de las armaduras del condensador que corresponde al desplazamiento de la superficie de separación a dx . Por eso se gasta una energía de desplazamiento de la carga, igual a $dq(\varphi_2 - \varphi_1) = dqE_\tau l$, donde E_τ y l son la intensidad del campo y la distancia entre las armaduras del condensador, respectivamente. Las densidades superficiales de la carga en la zona de contacto entre las armaduras y los dieléctricos primero y segundo, son iguales, respectivamente, a $\sigma_1 = \epsilon_1 E_\tau = \epsilon_1 E_\tau$ y $\sigma_2 = \epsilon_2 E_\tau = \epsilon_2 E_\tau$. La profundidad del dieléctrico en dirección perpendicular al plano de la fig. 97, es $\Delta S/l$. Por lo tanto,

$$dq = (\sigma_1 - \sigma_2) (\Delta S/l) dx. \quad (19.24)$$

Para las condiciones dadas sólo la diferencia entre la energía del campo y la energía que se gasta para mantener la constancia de los potenciales, es accesible para producir trabajo. Por eso la variación de la energía libre es

$$(dF)_{\text{T},\varphi} = (1/2 E_{1\tau} D_{1\tau} - 1/2 E_{2\tau} D_{2\tau}) \Delta S dx - (\sigma_2 - \sigma_1) (\Delta S/l) dx E_\tau l. \quad (19.25)$$

Puesto que $\sigma_2 = \epsilon_2 E_\tau$ y $\sigma_1 = \epsilon_1 E_\tau$,

$$(dF)_{\text{T},\varphi} = - (1/2 E_{1\tau} D_{1\tau} - 1/2 E_{2\tau} D_{2\tau}) \Delta S dx. \quad (19.26)$$

Teniendo en cuenta (19.18) y (19.26), la relación (19.17) adquiere la forma

$$f_{\text{sup}} = - 1/2 E_{2\tau} D_{2\tau} + 1/2 E_{1\tau} D_{1\tau}. \quad (19.27)$$

Esta densidad superficial de la fuerza está también orientada por la normal a la superficie de separación. De (19.27) se ve que ella se compone de dos partes:

1) de la densidad superficial de la fuerza

$$f_{2\text{sup}} = -\frac{1}{2}E_{2\tau}D_{2\tau}, \quad (19.28)$$

que actúa sobre la superficie de separación en dirección del primer medio por parte del campo eléctrico del segundo medio. Recordemos que la normal positiva se elige del primer medio al segundo y, por lo tanto, el signo menos en (19.28) testimonia la orientación de la fuerza del segundo medio al primero;

2) de la densidad de la fuerza

$$f_{1\text{sup}} = \frac{1}{2}E_{1\tau}D_{1\tau}, \quad (19.29)$$

que actúa sobre la superficie de separación en dirección de la normal positiva por parte del campo eléctrico del primer medio.

De esta manera, a cuenta de la componente tangencial de la intensidad el campo eléctrico como si ejerciera presión sobre la superficie de separación que limita con él, con la particularidad de que la presión es igual a la densidad volumétrica de la energía correspondiente a la componente tangencial de la intensidad del campo.

La resultante de las fuerzas de presión, aplicadas a la superficie de separación por parte de los campos por diferentes lados de la frontera, es la fuerza total aplicada a la frontera. Dado que $E_{1\tau} = E_{2\tau} = E_{\tau}$, la fórmula (19.27) adquiere la forma

$$f_{\text{sup}} = \frac{1}{2}E_{\tau}^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2). \quad (19.30)$$

Para $\epsilon_2 < \epsilon_1$ la densidad de la fuerza $f_{\text{sup}} > 0$. Por lo tanto, la densidad superficial de la fuerza está dirigida hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica. De esta manera, independientemente de la orientación del campo respecto a la superficie de separación, la densidad superficial de la fuerza está siempre dirigida hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica [véase (19.21)]. La validez y generalidad de dicha confirmación se desprenden también de la igualdad (18.36) si se tiene en cuenta que el sistema tiende a pasar al estado con energía mínima.

Fuerzas volumétricas que actúan sobre un dieléctrico comprimido. Partimos de la fórmula (18.36) en la que δz se determina por la deformación que cambia la densidad de la masa. Los procesos se suponen isotérmicos ($T = \text{const}$). La constante dieléctrica varía de un punto a otro, siendo función de r , y , además, puede depender de la densidad ρ_m de la masa del dieléctrico, o sea, $\epsilon = \epsilon(r, \rho_m)$. Supongamos que al deformarse, el elemento del volumen dV se desplaza a l y en este caso transcurre un cambio de la densidad de la masa del dieléctrico. El elemento de volumen que después del desplazamiento se encuentra en el punto con el radio vector r , antes del desplazamiento se hallaba en el punto $r - l$. Por lo tanto,

$$d\epsilon = -l \text{ grad } \epsilon + \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \delta \rho_m, \quad (19.31)$$

donde $\delta \rho_m$ es la variación de la densidad de la masa del dieléctrico.

Puede mostrarse que el elemento de volumen dV' después de deformarse, es igual a

$$dV = (1 + \operatorname{div} \mathbf{l}) dV'. \quad (19.32)$$

El principio de conservación de la masa para el elemento de volumen tiene la forma

$$\rho_m dV = \rho'_m dV' \quad (19.33)$$

o bien

$$\rho_m (1 + \operatorname{div} \mathbf{l}) dV = \rho'_m dV', \quad (19.34)$$

donde ρ_m y ρ'_m son las densidades de la masa después de la deformación y antes de ella, respectivamente. De (19.34) se desprende que para un desplazamiento infinitamente pequeño

$$\delta\rho_m = \rho_m - \rho'_m = -\rho_m \operatorname{div} \mathbf{l}. \quad (19.35)$$

Poniendo (19.31) y (19.35) en (18.36), hallamos

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \left[E^2 \mathbf{l} \cdot \operatorname{grad} \epsilon + E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \operatorname{div} \mathbf{l} \right] dV. \quad (19.36)$$

Según la fórmula (A.12), tenemos

$$E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \operatorname{div} \mathbf{l} = \operatorname{div} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \mathbf{l} \right) - \mathbf{l} \cdot \operatorname{grad} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \right). \quad (19.37)$$

Entonces [véase (19.36)]

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \left[F^2 \operatorname{grad} \epsilon - \operatorname{grad} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \right) \cdot \mathbf{l} \right] dV + \frac{1}{2} \int \operatorname{div} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \mathbf{l} \right) dV. \quad (19.38)$$

Haciendo las suposiciones generales acerca de la continuidad de los integrales, la segunda de las integrales puede transformarse por el teorema de Gauss—Ostrogradski en la integral respecto a la superficie que limita el volumen en cuestión. Considerando, para simplificar los razonamientos, que el dieléctrico ocupa todo el espacio y las cargas que engendran el campo están distribuidas en una zona finita del espacio, nos cercioramos de que la segunda integral es nula, ya que $E^2 \sim 1/r^4$, donde r es la distancia de la carga a la superficie de integración y, por eso

$$\int \operatorname{div} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \mathbf{l} \right) dV = \int_{S \rightarrow \infty} E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \mathbf{l} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0. \quad (19.39)$$

La densidad volumétrica de las fuerzas \mathbf{f} describe la acción del campo eléctrico sobre el dieléctrico. La densidad volumétrica del trabajo que ejecuta esta misma fuerza durante la deformación es igual a $\mathbf{f} \cdot \mathbf{l}$. Por eso el principio de conservación de la energía durante la deformación, teniendo en cuenta (19.38) y (19.39), tiene la forma

$$\int \mathbf{f} \cdot \mathbf{l} dV = -\frac{1}{2} \int \left[E^2 \operatorname{grad} \epsilon - \operatorname{grad} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \right) \right] \cdot \mathbf{l} dV. \quad (19.40)$$

Puesto que la igualdad (19.40) es válida para los desplazamientos arbitrarios I ,

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} E^2 \text{grad } \epsilon + \frac{1}{2} \text{grad} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \right). \quad (19.41)$$

Esta fórmula es válida para los dieléctricos isotrópicos comprimidos para la dependencia arbitraria de ϵ respecto a la densidad de la masa ρ_m [véase (19.13)].

Si la polarización depende linealmente de la densidad volumétrica de la masa,

$$\rho_m = \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} = \epsilon - \epsilon_0 \quad (19.42)$$

y (19.41) se transforma en (19.12). Por lo tanto, la fórmula (19.12) es válida no sólo para los dieléctricos rígidos, sino que también para los comprimidos con $P \sim \rho_m$.

A pesar de que para facilitar los razonamientos durante las transformaciones de (19.39) la fórmula (19.41) fue deducida suponiendo que el dieléctrico ocupa todo el espacio, es válida siempre, ya que es una relación diferencial, cuya veracidad no puede depender de lo que ocurre en otros puntos del espacio.

Cálculo de las fuerzas, partiendo de la expresión para la energía. Para transportar una carga dq al punto con potencial φ es necesario realizar un trabajo φdq . Por eso la variación total de la energía del sistema de cargas al cambiar la carga en dq_i , es igual a

$$\sum_j \varphi_j dq_j. \quad (19.43)$$

Esta variación va acompañada del cambio de la energía del campo eléctrico, en dW y de la realización de trabajo por las cargas. Si la configuración del sistema se caracteriza por los parámetros ξ_i , según la definición, se llama fuerza generalizada, relacionada con ese parámetro, a la magnitud F_i , tal que $F_i d\xi_i$ es el trabajo que efectúa el sistema al cambiar el parámetro ξ_i en $d\xi_i$. El principio de conservación de la energía tiene la forma

$$\sum_j \varphi_j dq_j = dW + \sum_i F_i d\xi_i. \quad (19.44)$$

Examinemos ante todo los procesos virtuales, en los que las cargas conservan los valores constantes, es decir, $dq_i = 0$. En este caso la ecuación (19.44) adquiere el aspecto

$$0 = (dW)_q + \sum_i F_i d\xi_i. \quad (19.45a)$$

Aquí $(dW)_q$ depende sólo de ξ_i y por eso

$$(dW)_q = \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)_q d\xi_i. \quad (19.45b)$$

La comparación de (19.45a) y (19.45b), tomando en consideración la independencia de $d\xi_i$, conduce a la igualdad

$$F_i = - \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)_q, \quad (10.46)$$

donde el índice q de la derivada parcial en forma explícita muestra que la fuerza se calcula para cargas constantes. *Para utilizar esta fórmula la energía W debe expresarse en forma de una función respecto a las cargas y los parámetros ξ_i .*

También puede expresarse la fuerza generalizada por medio de la derivada con potencial continuo. Para eso tomamos en consideración la expresión

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i. \quad (19.47)$$

La variación de la energía siendo los potenciales continuos es

$$(dW)_\varphi = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i dq_i, \quad (19.48)$$

por eso véase (19.45a)

$$0 = (dW)_\varphi - \sum_i F_i d\xi_i. \quad (19.49)$$

Teniendo en cuenta la independencia de $d\xi_i$, obtenemos

$$F_i = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)_\varphi, \quad (19.50)$$

donde el índice φ de la derivada parcial en forma explícita muestra que ésta se calcula para potenciales continuos. *Para hacer uso de esta fórmula la energía W debe ser expresada en forma de función de los potenciales φ_i y los parámetros ξ_i .* Es obvio que las fórmulas (19.46) y (19.50) son equivalentes y se obtienen la una de la otra. Cuál de ellas será necesaria, depende de las circunstancias.

Por ejemplo, supongamos que se requiera calcular la fuerza con que se atraen mutuamente las placas de un condensador plano. La energía del condensado plano es

$$W = Q^2/(2C) = (\Delta\varphi)^2 C/2,$$

donde $C = \epsilon_0 S/x$; S y x son el área de la armadura del condensador y la distancia entre las armaduras, respectivamente.

El cálculo de la fuerza por las fórmulas (19.46) y (19.50) nos da:

$$F_x = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{2C} \right)_Q = - \frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial x}; \quad (19.51)$$

$$F'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(\Delta\varphi)^2 C}{2} \right]_\varphi = \frac{(\Delta\varphi)^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (19.52)$$

Tomando en consideración la definición de la capacidad $C = Q/\Delta\phi$, sacamos la conclusión de que $F'_x = F_x$.

A fin de cuentas las fuerzas en un campo eléctrico son fuerzas que actúan sobre las cargas, a pesar de que no siempre en la expresión para la fuerza figura el valor de las cargas.

La fórmula para la fuerza que actúa sobre dieléctricos absolutamente rígidos, es también válida para los dieléctricos a comprimir a condición de que su polarización dependa linealmente de la densidad de la masa.

Las fuerzas que actúan sobre el dieléctrico dependen de la relación entre la constante dieléctrica del cuerpo y la constante dieléctrica del medio ambiente. En la superficie de separación de los dieléctricos la fuerza siempre está orientada hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica.

La componente del campo, normal a la superficie de separación de los dieléctricos, como si atrayese hacia sí la superficie con la densidad superficial de la fuerza, igual a la densidad volumétrica de la energía eléctrica del campo, relacionada con esta componente.

La componente del campo, tangencial a la superficie de separación de los dieléctricos, como si presionase sobre la superficie, con la particularidad de que la presión es igual a la densidad volumétrica de la energía eléctrica del campo, relacionada con esta componente.

Independientemente de la orientación del campo, la fuerza superficial actúa siempre hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica.

Ejemplo 19.1. Partiendo de los resultados de la solución del ejemplo 16.3, hallar el momento de fuerza que acerca las placas del condensador, mostrado en la fig. 73.

La energía del condensador [véase (16.109)] es igual a

$$W = \frac{U_0^2 C}{2} = \frac{U_0^2 \epsilon_0 \ln(b/a)}{2\alpha_0} \quad (19.53)$$

La fuerza generalizada para el ángulo de giro es el momento de fuerza M con respecto al eje que coincide en este caso con la línea de intersección de las placas del condensador. Por eso teniendo en cuenta (19.50), obtenemos

$$M = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_0} \right)_{\alpha} = - \frac{U_0^2 \epsilon_0 \ln(b/a)}{2\alpha_0^2} \quad (19.54)$$

donde el signo menos significa que el momento de fuerzas tiende a disminuir el ángulo α_0 . Con otras palabras, entre las placas de condensador actúan fuerzas de atracción. Claro que entre las placas de condensador siempre existen fuerzas de atracción y el resultado de (19.54) sólo confirma que el momento de fuerzas se obtuvo con signo negativo. Semejante verificación de que el resultado es correcto es útil al hacer uso de las coordenadas generalizadas y las fuerzas generalizadas cuando estas variables no tienen una interpretación bastante evidente.

Obtenemos este mismo resultado aplicando otro método. La densidad superficial de la fuerza que actúa sobre el conductor es igual a $f = \sigma^2/(2\epsilon)$. Por eso sobre una capa de longitud l entre r y $r + dr$ actúa una fuerza

$$dF = -f l dr = - \frac{eU_0^2}{2\alpha_0^2 r^2} l dr, \quad (19.55)$$

donde para σ se utilizó el valor de (16.107b). El signo menos tiene en cuenta que esta fuerza tiende a disminuir el ángulo α_0 . La resultante que actúa sobre la placa es

$$F = \int_a^b dF = - \frac{eU_0^2 l}{2\alpha_0^2} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{eU_0^2 l}{2\alpha_0^2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right). \quad (19.56)$$

La línea de aplicación de las fuerzas se encuentra del eje de rotación a la distancia r_0 , que se determina por la condición

$$r_0 F = \int_a^b r dF = - \frac{eU_0^2 l}{2\alpha_0^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (19.57)$$

de donde

$$r_0 = \frac{ab}{b-a} \ln \frac{b}{a}. \quad (19.58)$$

El momento de fuerza respecto al eje de rotación es

$$M = r_0 F = -\frac{\epsilon U \bar{M}}{2\alpha \bar{\epsilon}} \ln \frac{b}{a}, \quad (19.59)$$

lo que coincide con (19.54).

Problemas

- Hallar la intensidad del campo eléctrico en una cavidad esférica de radio a dentro de una esfera con carga uniforme de radio R . La densidad volumétrica de la carga es ρ (fig. 98).
- Hallar la intensidad del campo en una cavidad cilíndrica circular ilimitada, cuyo eje es paralelo al eje de un cilindro circular infinitamente largo con carga uniforme. La densidad volumétrica de la carga es ρ (fig. 98).

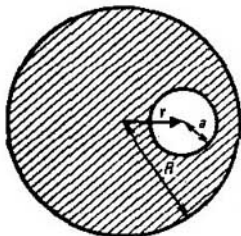


Fig. 98
Cavidad cilíndrica en un cilindro o cavidad esférica en una esfera

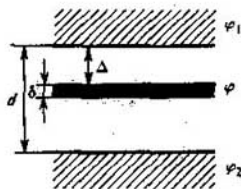


Fig. 99
Placa conductora en un condensador plano

- La distancia entre las placas de un condensador plano es d . En el espacio entre las armaduras del condensador se introduce una placa metálica de grosor δ , cuya superficie es paralela a las armaduras. Las placas del condensador poseen potenciales ϕ_1 y ϕ_2 (fig. 99). Hallar el potencial de la placa metálica.
- Definir la fuerza que actúa sobre la carga q , situada a la distancia d respecto al centro de una esfera conductora aislada sin carga de radio r_0 ($d > r_0$).
- Hallar la fuerza que actúa sobre la carga q , colocada dentro de una esfera metálica a la distancia r de su centro. El radio de la esfera es a .
- Hay dos esferas conductoras concéntricas de radios r_1 y r_2 ($r_1 < r_2$). Entre las esferas a la distancia d de su centro común ($r_1 < d < r_2$) se coloca una carga puntual q . Determinar las cargas inducidas en las esferas.
- Una carga puntual q se coloca a la distancia d del centro de una esfera puesta a tierra. Determinar la relación f entre la carga, inducida en la parte de la esfera, que se ve desde el punto en que está la carga q , y la carga de la parte invisible de la esfera. El radio de la esfera es a , $d > a$.
- Dos condensadores de capacidades C_1 y C_2 y con cargas q_1 y q_2 (q_1 y q_2 son los valores absolutos de las cargas de las placas de los condensadores (primero y segundo) están

- acoplados en paralelo. Calcular la variación de la energía de los condensadores y explicar el resultado obtenido.
- 2.9. La constante dieléctrica del medio entre las placas de un condensador plano de área S varía uniformemente de ϵ_1 a ϵ_2 . La distancia entre las placas es igual a d . Determinar la capacidad del condensador.
- 2.10. Un condensador cilíndrico con radios de las placas r_1 y r_2 se sumerge perpendicularmente en un líquido dieléctrico, cuya constante dieléctrica es ϵ . El extremo inferior del condensador se encuentra en el líquido y el superior, en el aire, cuya constante dieléctrica es ϵ_0 . La densidad de la masa del líquido es ρ . Determinar la altura h a que se eleva el líquido entre las placas del condensador si la diferencia de potencial entre ellas es U .
- 2.11. Una esfera conductora, cuya densidad es ρ_1 , está flotando en un líquido con densidad ρ_2 ($\rho_2 > 2\rho_1$) y constante dieléctrica ϵ . Menos de la mitad de la esfera se sumerge en el líquido. ¿Qué carga es necesario comunicarle para que la esfera se hunda en el líquido hasta la mitad? El radio de la esfera es a .
- 2.12. Las armaduras de un condensador plano tienen la forma de un cuadrado con el lado igual a a . La distancia y la diferencia de potencial entre las placas son d y U , respectivamente. En el espacio entre las armaduras se introduce parcialmente una placa de grosor Δ en forma de cuadrado con el lado a . Sus superficies y lados son paralelos a las superficies y lados de las armaduras y la constante dieléctrica es ϵ . Hallar la fuerza con que la placa se arrastra al espacio entre las armaduras del condensador.
- 2.13. A la distancia d del eje de un cilindro conductor ilimitado de radio r se encuentra un hilo infinito con carga uniforme, paralelo al eje del cilindro. La densidad lineal de la carga es τ . Determinar la fuerza que actúa sobre la longitud l del hilo ($d > r$).
- 2.14. Aplicando el método de representaciones, hallar la fuerza correspondiente a la longitud l de cada uno de dos cilindros conductores infinitos. La distancia entre sus ejes paralelos es d . Los radios de los cilindros son iguales a r_1 y r_2 . Uno de los cilindros tiene una carga con densidad lineal τ .
- 2.15. Hallar el momento dipolar de la carga distribuida uniformemente por la superficie de la esfera de radio a . Una de las semiesferas posee una carga Q y la otra, $-Q$.
- 2.16. Un dipolo puntual con el momento p se encuentra a la distancia d del centro de una esfera conductora puesta a tierra de radio a . Hallar el momento dipolar inducido de la esfera.
- 2.17. A las armaduras de un condensador plano de aire que tienen la forma de cuadrados con el lado l , se aplica una diferencia de potencial constante U_0 . Determinar la fuerza, necesaria para desplazar una de las placas paralelamente a sí misma en dirección, perpendicular a cualquier lado del cuadrado, permaneciendo constante la distancia d entre las placas.
- 2.18. Hay una esfera conductora de radio r_1 y una capa conductora esférica, concéntrica con la esfera. La superficie interior de la capa tiene el radio r_2 ($r_2 > r_1$) y la inferior, r_3 ($r_3 > r_2$). El espacio entre r_1 y r_2 está libre. Las cargas de la esfera y la capa son Q_1 y Q_2 , respectivamente, con la particularidad de que $Q_1 \neq -Q_2$ (lo que no existe en el condensador). Hallar la energía de este sistema de cargas.
- 2.19. Hallar la intensidad del campo eléctrico en el centro de un cilindro circular recto de longitud l y radio a , cuya polarización P es paralela al eje y es homogénea.
- 2.20. La polarización P en el problema 2.19 está dirigida perpendicularmente al eje del cilindro. Hallar la intensidad del campo en el centro del cilindro.
- 2.21. Un cilindro conductor ilimitado de sección circular y radio a y un plano conductor, situado a la distancia d del eje del cilindro, forman un condensador. Hallar la capacidad, correspondiente a la longitud l del cilindro.
- 2.22. Haciendo uso del resultado de la solución de 2.21, hallar la fuerza que ejerce un plano infinito puesto a tierra sobre una sección de longitud l de cierto hilo rectilíneo cargado, paralelo al plano. La densidad lineal de la carga del hilo es τ .
- 2.23. La molécula está representada con ayuda de un modelo como una carga $-2|q|$ en el origen de coordenadas y como dos cargas $|q|$ situadas en los puntos que se caracterizan por los radios vectores r_1 y r_2 , con la particularidad de que $|r_1| = |r_2| = l$. El ángulo entre r_1 y r_2 se denota por θ . Hallar la carga eficaz $|q|_{\text{ef}}$ para la molécula de agua H_2O que tiene $l = 0,958 \cdot 10^{-10}$ m, $\theta = 105^\circ$ y $p = 6,14 \cdot 10^{-30}$ C-m.

- 2.24. Entre dos planos conductores, infinitos, paralelos y puestos a tierra, cuya distancia entre ellos es d , se coloca una carga puntual q a la distancia x de uno de ellos. Después de encontrar la imagen de la carga q , calcular la fuerza que actúa sobre ella.

Respuestas

- 2.1. $E = \rho r / (3\epsilon_0)$. 2.2. $E = \rho r / (2\epsilon_0)$. 2.3. $\varphi = \varphi_1 - \frac{\Delta}{d-\delta} (\varphi_1 - \varphi_2)$. 2.4. $F = -\frac{q^2 r_0^2}{4\pi\epsilon_0 d^3} \times \left[\frac{2d^2 - r_0^2}{(d^2 - r_0^2)^2} \right]$. 2.5. $F = \frac{q^2 ar}{4\pi\epsilon_0 (a^2 - r^2)^2}$. 2.6. $q_1 = -\frac{r_1 (r_2 - d)}{d (r_2 - r_1)} q$, $q_2 = -\frac{r_2 (d - r_1)}{d (r_2 - r_1)} q$. 2.7. $f = \sqrt{(d+a)/(d-a)}$. 2.8. $\Delta W = (C_2 q_1 - C_1 q_2)^2 / [2C_1 C_2 (C_1 + C_2)]$. 2.9. $C = \frac{S}{d} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\ln(\epsilon_2/\epsilon_1)}$. 2.10. $h = \frac{(\epsilon - \epsilon_0) U^2}{(r_2^2 - r_1^2) \ln(r_2/r_1)} \frac{1}{\rho g}$. 2.11. $Q = 4\pi (\epsilon + \epsilon_0) \sqrt{\frac{a^2 g (\rho_2 - 2\rho_1)}{3(\epsilon - \epsilon_0)}}$. 2.12. $F = \frac{\epsilon_0}{2} \times \frac{(\epsilon - \epsilon_0) \Delta}{(d - \Delta) \epsilon + \Delta \epsilon_0} \frac{a}{d} U^2$. 2.13. $f = -\tau^2 dl / [2\pi\epsilon_0 (d^2 - r^2)]$. 2.14. $f = -\frac{\tau^2 dl}{2\pi\epsilon_0} [d^2 - (r_1 + r_2)^2]^{-1/2} \times [d^2 - (r_1 - r_2)^2]^{-1/2}$. 2.15. $p = Qa$. 2.16. $p_{\text{ind}} = \rho a^2 / d^3$. 2.17. $F = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 l}{d} U_0$. 2.18. $W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) Q_1^2 + \frac{2Q_1 Q_2 + Q_2^2}{r_3} \right]$. 2.19. $E = -(1/\epsilon_0) P (1 - l/\sqrt{4a^2 + l^2})$. 2.20. $E = -\frac{[1/(2\epsilon_0)] IP}{\sqrt{4a^2 + l^2}}$. 2.21. $C = \frac{\ln[(d + \sqrt{d^2 - a^2})/a]}{2\pi\epsilon_0 l}$; para $a \ll d$ tenemos $C \approx \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(2d/a)}$. 2.22. $F = -\left(\frac{\partial W}{\partial d}\right)_Q = \left(\frac{\partial W}{\partial d}\right)_\varphi = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial d} = \frac{U^2}{d} \frac{\pi\epsilon_0 l}{(\ln 2d/a)^2} = \frac{U^2 C^2 l}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{\tau^2 l}{4\pi\epsilon_0 d}$. 2.23. $p = |q| \text{ef} (r_1 + r_2)$. $p = 2 |q| \text{ef} l \cos(\theta/2)$, $|q| \text{ef} = 5,26 \cdot 10^{-20} \text{C} = 0,328 |e|$. 2.24. $F = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(nd+x)^2} - \frac{1}{(nd-x)^2} \right] \right\}$.