

## Dieléctricos

El factor físico principal que determina el carácter de interacción del dieléctrico con el campo eléctrico es el momento dipolar eléctrico de los átomos y moléculas.

Los mecanismos de la polarización fundamentales son la aparición de momentos dipolares inducidos de los átomos y moléculas o la reorientación y redistribución de los que ya existen en el espacio. Existe también la polarización iónica de red.

### § 20. Campo local

*Se discuten las causas que determinan la diferencia entre los campos local y exterior, y se calcula la intensidad del campo local para las condiciones más sencillas.*

**Diferencia entre el campo local y el exterior.** Como consecuencia de la polarización del dieléctrico, ubicado en un campo exterior, el propio dieléctrico se convierte en fuente del campo eléctrico. Por lo tanto, *el campo dentro del dieléctrico, que actúa sobre sus moléculas, se diferencia del exterior.* Se denomina **campo local**. La diferencia entre el campo local y el exterior es esencial sobre todo para los dieléctricos con gran densidad: para los líquidos y sólidos.

**Cálculo de la intensidad del campo local.** Separemos en el volumen del dieléctrico una esfera pequeña desde el punto de vista físico, en cuyo centro se calcula la intensidad del campo local (fig. 100). La intensidad que surge en el centro de la esfera como consecuencia de la polarización del dieléctrico, consta de la intensidad  $E_1$  engendrada por la parte del dieléctrico, situada fuera del volumen limitado por la esfera, y la intensidad  $E_2$ , originada por la parte del dieléctrico que se encuentra en el volumen limitado por la esfera.

Al calcular  $E_1$  puede suponerse que el dieléctrico es un medio continuo, ya que la distancia entre el centro de la esfera en que se calcula la intensidad del campo local, y las fuentes del campo es relativamente grande. Puesto que la esfera posee un volumen pequeño desde el punto de vista físico, el medio en las inmediaciones de su superficie por la parte exterior puede considerarse homogéneamente polarizado. En el volumen limitado por la esfera es necesario tener en cuenta la estructura elemental del dieléctrico, es decir, calcular la aportación del momento dipolar de cada átomo en la intensidad del campo local y considerar la esfera como la frontera entre el medio fuera del volumen de la esfera y el vacío en el volumen limitado por la esfera.

La intensidad en el centro de la esfera se crea por las cargas ligadas en su superficie, como en la superficie de separación de los medios con diversas cons-

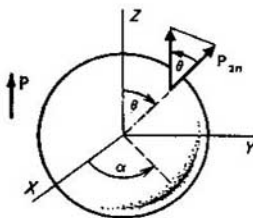


Fig. 100  
Cálculo del campo local

tantes dieléctricas. La densidad superficial de las cargas ligadas es igual a [véase (17.21)]

$$\sigma_{11g} = -(P_{2n} - P_{1n}) = -P_{2n}, \quad (20.1)$$

donde  $P_{2n}$  es la componente normal de la polarización por la parte exterior de la superficie de la esfera;  $P_{1n} = 0$ , por la interior. Dirigiendo el eje  $Z$  a lo largo del vector de polarización constante  $P$ , obtenemos

$$\sigma_{11g} = -P_{2n} = P \cos \theta. \quad (20.2)$$

En el ángulo sólido  $d\Omega$  se encuentra una carga superficial

$$dQ = \sigma_{11g} r^2 d\Omega, \quad (20.3)$$

donde  $r$  es el radio de la esfera. Esta carga en dirección del eje  $Z$  en el centro de la esfera crea un campo con intensidad

$$dE_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \cos \theta. \quad (20.4)$$

Se ve que sólo la componente de la intensidad del campo a lo largo del eje  $Z$  es diferente de cero. De (20.4), teniendo en cuenta (20.3), obtenemos

$$E_z = E_t = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \int \cos^2 \theta d\Omega = E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3\epsilon_0} P \quad (20.5)$$

o en forma vectorial

$$\boxed{E_1 = \frac{1}{3\epsilon_0} P.} \quad (20.6)$$

La fórmula (20.6) es válida sólo para un dieléctrico homogéneo ilimitado. Si el dieléctrico es finito, la intensidad del campo en él depende, por lo general, de sus dimensiones y forma. Las cargas de polarización volumétricas del dieléctrico homogéneo son nulas, ya que  $\rho_{11g} = -\text{div } P = -\kappa\epsilon_0 \times \text{div } E = 0$ . Por esta razón, la diferencia de la intensidad del campo de un dieléctrico finito de la intensidad  $E_1$  de un dieléctrico ilimitado se determina por la intensidad de los campos de las cargas ligadas que surgen en la superficie exterior del cuerpo. A veces este campo se denomina depolarizador ya que disminuye la intensidad del campo.

La intensidad  $E_2$  depende de la distribución de los momentos dipolares de las moléculas dentro de una esfera separada, pequeña desde el punto de vista físico, por lo que no puede representarse mediante alguna fórmula universal. Calculemos la intensidad para el caso cuando las moléculas se encuentran en los nudos de cierta red cristalina y todos los momentos dipolares poseen una misma

dirección en el espacio. Esta condición se cumple para los momentos dipolares inducidos. La intensidad  $E_2$  debe hallarse en el punto donde está una de las moléculas, es decir, en el nudo de la red cristalina. Coloquemos el origen de coordenadas en este punto y dirijamos los ejes  $X, Y, Z$  por las aristas de la red. Utilicemos la fórmula (16.85), que en el caso dado para la proyección  $x$  de la intensidad tiene el aspecto

$$E_{2x} = \frac{p_x}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{-r_i^2 + 3x_i^2}{r_i^5} + \frac{p_y}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{3x_i y_i}{r_i^5} + \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{3x_i z_i}{r_i^5}. \quad (20.7)$$

Aquí la adición se lleva a cabo por todas las moléculas del volumen físicamente pequeño dentro de la esfera. Las mismas fórmulas pueden escribirse para los componentes  $y$  y  $z$  del campo.

En la fórmula (20.7) se puede primero calcular la suma por todas las moléculas que se encuentran en una capa esférica pequeña de radio  $r$  y luego calcular la suma por las capas esféricas, correspondientes a diversos  $r$ . A causa de la simetría cúbica, para la primera adición tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_i x_i^2 &= \sum_i y_i^2 = \sum_i z_i^2 = \frac{1}{3} \sum_i r_i^2, \\ \sum_i x_i y_i &= \sum_i y_i z_i = \sum_i z_i x_i = 0. \end{aligned} \quad (20.8)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (20.8), (20.7) toma la forma

$$E_{2x} = 0. \quad (20.9)$$

De la misma manera se demuestra que  $E_{2y} = E_{2z} = 0$ . Por eso, en definitiva, obtenemos

$$E_2 = 0. \quad (20.10)$$

Así pues, la intensidad del campo local que actúa sobre la molécula dentro del dieléctrico es igual a

$$E^* = E + P/(3\epsilon_0). \quad (20.11)$$

*Esta fórmula debe ser considerada como la primera aproximación, ya que el dieléctrico real se diferencia del modelo, con cuya ayuda se obtuvo dicha fórmula. En particular, los campos eléctricos de las moléculas pueden diferenciarse de los campos, originados por los dipolos, la red del dieléctrico puede poseer otra simetría, los momentos dipolares de las moléculas pueden tener distintas direcciones, etc.*

El campo local que actúa sobre las moléculas del dieléctrico se distingue del exterior por el hecho de que el propio dieléctrico en el campo exterior se convierte en la fuente de un campo complementario.

La susceptibilidad dieléctrica molecular no depende esencialmente de la densidad de la sustancia y su temperatura.

La constante dieléctrica de un dieléctrico neutro puede depender de la temperatura sólo en forma implícita, dependiendo la concentración de moléculas de la temperatura.

El campo local, que actúa sobre las moléculas del dieléctrico, se diferencia del exterior por el hecho de que el propio dieléctrico en el campo exterior se convierte en la fuente de un campo complementario.

¿Qué hechos fundamentales determinan la diferencia entre las propiedades dieléctricas de los gases rarificados y los densos? ¿En qué consisten dichas diferencias?

¿Cuáles son los factores físicos que determinan la independencia entre la constante dieléctrica de los dieléctricos neutros y la temperatura en intervalos suficientemente amplios?

## § 21. Dieléctricos neutros

*Se describen las propiedades fundamentales de dieléctricos neutros.*

**Susceptibilidad dieléctrica molecular.** Partiendo del mecanismo de formación de un momento dipolar inducido de la molécula [véase el § 17] se desprende que su dirección coincide con la de la intensidad del campo eléctrico. En primera aproximación el momento dipolar de la molécula puede considerarse proporcional a la intensidad del campo:

$$p = \alpha \epsilon_0 E^*, \quad (21.1)$$

donde  $\alpha$  caracteriza la «polarizabilidad» de la molécula (o del átomo) y se denomina susceptibilidad dieléctrica molecular (o atómica). Se determina por las propiedades internas de la molécula. Debido a la gran magnitud de los campos eléctricos intrínsecos en la molécula, la susceptibilidad dieléctrica molecular es pequeña y no depende esencialmente de la densidad de la substancia y la temperatura. El valor de  $\alpha$  puede estimarse partiendo del siguiente modelo de la polarización molecular. La molécula se representa en forma de una esfera conductora, cuyo radio es aproximadamente igual al radio de la molécula ( $a = 10^{-10}$  m). En un campo continuo  $E^*$  esta esfera adquiere un momento dipolar [véase (16.82)] igual a

$$p = 4\pi\epsilon_0 a^3 E^*. \quad (21.2)$$

Comparando (21.2) con (21.1), hallamos la expresión para la susceptibilidad dieléctrica molecular

$$\alpha = 4\pi a^3. \quad (21.3)$$

Si para los radios de las moléculas se hace uso de los valores obtenidos de la teoría cinética, la fórmula (21.3) nos ofrece para  $\alpha$  valores algo aumentados, sin embargo correctos por el orden de la magnitud. Por esta razón, para estimar el orden de la magnitud semejante modelo de la polarización molecular es bastante bueno.

De (21.1) hallamos que la polarización es igual a

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \alpha \epsilon_0 E^* = \alpha \epsilon_0 E^* \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} 1 = \alpha \epsilon_0 N E^*. \quad (21.4)$$

Aquí

$$\sum_{\Delta V} 1 = \Delta V N, \quad (21.5)$$

donde  $N$  es la concentración de moléculas.

**Gases enrarecidos.** En este caso la intensidad  $E^*$  del campo local se diferencia muy poco de la intensidad  $E$  del campo exterior. Por eso [véase (21.4)]

$$P = \alpha \epsilon_0 N E. \quad (21.6)$$

Al comparar (21.6) y (17.11), deducimos que la susceptibilidad dieléctrica

$$\kappa = \alpha N. \quad (21.7)$$

La permitividad relativa  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ , tomando en consideración (17.31), se representa como

$$\epsilon_r = 1 + \alpha N. \quad (21.8)$$

El valor  $\epsilon_r$  se diferencia de la unidad en una magnitud  $\alpha N$ , que para los gases es muy pequeña. Por ejemplo, la concentración de moléculas de aire para condiciones normales es  $N = 2,6 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ . Considerando en correspondencia con (21.3) que para las moléculas  $\alpha \approx 10^{-29} \text{ m}^3$ , hallamos

$$\alpha N \approx 10^{-3}. \quad (21.9)$$

Al aumentar las dimensiones de las moléculas,  $\alpha$  y, como consecuencia,  $\alpha N$  crecen, permaneciendo pequeñas según el orden de magnitud.

*La magnitud  $\epsilon_r$  puede depender de la temperatura sólo en forma implícita, por medio de la dependencia de  $N$  respecto a la temperatura.* Designemos la constante de Avogadro, la densidad del gas y la masa molar del gas por  $N_A$ ,  $\rho_m$  y  $M$ , respectivamente, y escribamos la igualdad evidente

$$N = N_A \rho_m / M. \quad (21.10)$$

Con ayuda de (21.10) escribamos la relación (21.8) como

$$(\epsilon_r - 1) M / \rho_m = \alpha N_A. \quad (21.11)$$

Por lo tanto,  $(\epsilon_r - 1) / \rho_m$  es una magnitud constante que no depende de la temperatura y la presión, sólo si esta última es suficientemente pequeña. Al aumentar la presión, crece la densidad y surge la necesidad de tener en cuenta la diferencia entre los campos local y exterior.

**Gases densos.** En este caso en la fórmula (21.4) para  $E^*$  hay que utilizar la expresión (20.11):

$$P = \alpha \epsilon_0 N [E + P/(3\epsilon_0)], \quad (21.12)$$

de donde

$$P = \frac{\alpha \epsilon_0 N}{1 - \alpha N / 3} E. \quad (21.13)$$

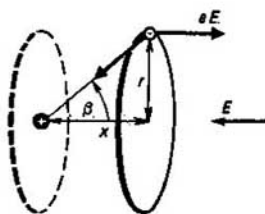


Fig. 101  
Para el cálculo de la susceptibilidad dieléctrica atómica del hidrógeno

Sustituyendo (21.13) en (17.29), hallamos

$$D = \epsilon E = \epsilon_0 E + \frac{\alpha \epsilon_0 N}{1 - \alpha N / 3} E, \quad (21.14)$$

de donde

$$\frac{3(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} = \alpha N. \quad (21.15)$$

Esta fórmula se denomina **fórmula de Clausius—Mossotti**. Con ayuda

$$\frac{3(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \frac{M}{\rho_m} = \alpha N_A. \quad (21.16)$$

*El primer miembro de la igualdad (21.16) no depende de la temperatura y la presión de los límites donde la susceptibilidad molecular permanece constante.*

Estas presiones para los gases pueden ser grandes (del orden de 100 MPa). En los líquidos y sólidos  $\alpha$  es función de la presión para grandes densidades. La fórmula (21.16) fue comprobada experimentalmente en un amplio intervalo de presiones. Por ejemplo, para el gas carbónico  $\text{CO}_2$  que es neutro la validez de la relación de Clausius—Mossotti (21.16) se comprobó con elevada precisión hasta presiones de unos 100 MPa a 100 °C. En todo el intervalo de dichas presiones la desviación relativa del primer miembro de (21.16) respecto a un valor constante no supera varias centésimas, con la particularidad de que hasta las presiones de unos 20 MPa se observa un pequeño crecimiento, y más arriba, cierta disminución del valor del primer miembro de (21.16). En este caso la constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r$  varía de manera bastante considerable, aproximadamente en vez y media en el intervalo de presiones desde 1 MPa hasta 100 MPa.

**Ejemplo 21.1.** Estimar la susceptibilidad dieléctrica atómica  $\alpha$  del átomo de hidrógeno. La intensidad del campo eléctrico está dirigida perpendicularmente al plano de movimiento del electrón (fig. 101).

Escribamos la condición de equilibrio de un electrón en movimiento en presencia del campo exterior:

$$eE = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)} \cos \beta = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (21.17)$$

Para  $x \ll r$  obtenemos que  $x/(x^2 + r^2)^{3/2} = x/r^3$  y por eso [véase (21.17)]

$$ex = 4\pi\epsilon_0 r^3 E = p,$$

de donde

$$\alpha = 4\pi r^3 \approx 1,57 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3,$$

lo que da un orden correcto de la susceptibilidad dieléctrica atómica del átomo de hidrógeno.

## § 22. Dieléctricos polares

*Se describen las propiedades principales de los dieléctricos polares.*

**Dependencia entre la polarización y la temperatura.** El momento dipolar permanente de la mayoría de las moléculas tiene el orden de  $10^{-30} \dots 10^{-30}$  C·m. Por ejemplo, el de CO es igual a  $0,36 \cdot 10^{-30}$  C·m, el de  $\text{SO}_2$ ,  $5,3 \cdot 10^{-30}$  C·m y el de KCl,  $3,5 \cdot 10^{-2}$  C·m. Los momentos dipolares de la mayoría de las moléculas están medidos y se citan en las tablas.

Un momento dipolar  $p$  que se encuentra en un campo eléctrico  $E$  posee una energía potencial

$$W = -p \cdot E. \quad (22.1)$$

Esta magnitud alcanza su valor mínimo cuando la dirección del dipolo coincide con la dirección de la intensidad del campo eléctrico. Dado que el estado del sistema es estable, al tener éste energía mínima, *los momentos dipolares de las moléculas polares tienden a dar la vuelta hasta coincidir con la dirección de la intensidad del campo eléctrico*. Este giro se realiza mediante un par de fuerzas que actúan sobre el dipolo (véase la fig. 91). En cambio, el movimiento térmico perturba la acción coordinada del campo eléctrico. Como consecuencia, se establece cierto equilibrio.

Hagamos que coincida el eje  $Z$  con la dirección de la intensidad  $E$  del campo eléctrico (fig. 102). La energía potencial de las moléculas (22.1) depende del ángulo entre las direcciones de su momento dipolar y su intensidad:

$$W = -pE \cos \theta = -p_z E \quad (22.2)$$

y, por lo tanto, la distribución de Boltzmann para este caso caracteriza la distribución de las direcciones de los momentos dipolares de las moléculas respecto a los ángulos. La cantidad de moléculas  $dn$ , cuyos momentos dipolares se encuentran en el ángulo sólido  $d\Omega$ , es igual a

$$dn = A e^{\frac{pE \cos \theta}{kT}} d\Omega = A e^{\frac{pE \cos \theta}{kT}} d\alpha \sin \theta d\theta. \quad (22.3)$$

Entonces, el valor medio de la componente del momento de los dipolos respecto al eje  $Z$  es

$$\langle p_z \rangle = \frac{\int p_z dn}{\int dn} = \frac{A p \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta}{A \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta}, \quad (22.4)$$

donde  $p_z = p \cos \theta$  y se introduce la designación

$$\beta = pE/(kT). \quad (22.5)$$

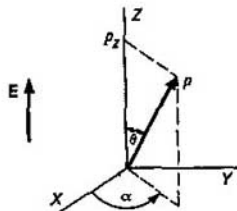


Fig. 102  
Orientación del dipolo en el sistema de coordenadas esférico

Ante todo es necesario calcular la integral interna en el denominador de (22.4):

$$I = \int_0^{\pi} e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta, \quad (22.6)$$

ya que la integral interna en el numerador se expresa mediante la fórmula

$$\int_0^{\pi} e^{\beta \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta = \partial I / \partial \beta. \quad (22.7)$$

La integral (22.6) se calcula fácilmente:

$$I = \int_0^{\pi} e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta = -\frac{1}{\beta} e^{\beta \cos \theta} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\beta} \sinh \beta, \quad (22.8)$$

de donde

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{2}{\beta} \left( \cosh \beta - \frac{1}{\beta} \sinh \beta \right). \quad (22.9)$$

Así, pues, la fórmula (22.4), teniendo en cuenta (22.8) y (22.9), toma la forma

$$\langle p_z \rangle = pL(\beta), \quad (22.10)$$

donde  $L(\beta) = \coth \beta - 1/\beta$  es la función de Langevin (fig. 103).

Para intensidades no muy grandes del campo, cuando  $pE \ll kT$ , es decir,  $\beta \ll 1$ , desarrollando la cotangente hiperbólica en serie

$$\coth \beta = 1/\beta + \beta/3 - \beta^3/45 + \dots \quad (22.11)$$

y limitándonos en la expresión para  $L(\beta)$  con el término lineal respecto a  $\beta$

$$L(\beta) = \beta/3, \quad (22.12)$$

obtenemos

$$\langle p_z \rangle = p^2 E / (3kT). \quad (22.13)$$

**Campo de saturación.** Al aumentar la intensidad del campo, los momentos dipolares se orientan de manera cada vez más intensa en dirección de la intensidad y para  $pE \gg kT$ , o sea, para  $\beta \gg 1$  puede considerarse que todos los momentos dipolares son paralelos entre sí y poseen la dirección de la intensidad del campo. Por lo tanto,

$$\langle p_z \rangle = p. \quad (22.14)$$

La relación (22.14) se obtiene de (22.10) si se toma en consideración que para  $\beta \gg 1$  la función  $L(\beta)$  es próxima a la unidad:

$$L(\beta \rightarrow \infty) \rightarrow 1. \quad (22.15)$$

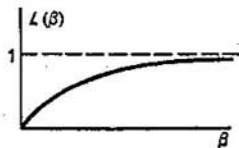


Fig. 103  
Función de Langevin



Al cumplirse la conducción (22.14), se alcanza la polarización máxima posible y el posterior aumento de la intensidad del campo no conduce su crecimiento. La intensidad del campo para la que se logra la polarización máxima posible, se denomina intensidad del campo de saturación. Considerando el orden de la magnitud de los momentos dipolares igual a  $10^{-29}$  C·m, sacamos la conclusión de que a  $T = 300$  K la intensidad del campo de saturación es

$$E_{\text{sat}} \approx kT/p \approx 4,2 \cdot 10^8 \text{ V/m.} \quad (22.16)$$

De aquí se ve que la condición  $pE \ll kT$ , para la cual es correcta la fórmula (22.13), se efectúa hasta las intensidades de los campos, iguales a millones de voltios por metro. Por esta razón, en la mayoría de los casos importantes en la práctica puede hacerse uso de la fórmula (22.13).

**Gases rarificados.** En este caso la intensidad del campo local puede considerarse igual a la intensidad del campo exterior y la polarización se puede representar [véase (22.13)] en la forma

$$P = Np^2E/(3kT). \quad (22.17)$$

A continuación, por analogía total de los cálculos, empleando las fórmulas (21.6)–(21.8), obtenemos que la permitividad relativa es

$$\epsilon_r = 1 + Np^2/(3kT\epsilon_0). \quad (22.18)$$

Los dieléctricos polares, a la par con la polarización a causa de la reorientación de los momentos dipolares permanentes, poseen una polarización, determinada por los momentos dipolares inducidos, la cual se describe por la fórmula (21.8). Por eso, teniendo en cuenta ambos mecanismos de polarización, la expresión para  $\epsilon_r$  de los dieléctricos gaseosos polares a una presión no muy grande tiene la forma

$$\epsilon_r = 1 + N[\alpha + p^2/(3kT\epsilon_0)]. \quad (22.19)$$

Como se ve de (21.3)  $\alpha = 10^{-29} \text{ m}^3$ . Por otra parte, a temperatura ambiente  $kT \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ , por lo que siendo  $p \approx 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$   $p^2/(3kT\epsilon_0) \sim 10^{-27} \text{ m}^3$ , es decir, la aportación a la polarización por parte de los momentos dipolares inducidos es unas cien veces inferior a la de los permanentes y por eso se puede menospreciar. Sin embargo, en principio, la precisión moderna de las mediciones es tal que permite dividir la contribución en la polarización por parte de los momentos dipolares inducidos y permanentes. Para eso se mide  $\epsilon_r$  en un amplio intervalo de temperaturas y se utiliza la fórmula (22.19). La dependencia entre  $\epsilon_r$  y  $1/T$  en la gráfica se representa mediante una línea recta. De aquí, aplicando la fórmula (22.19) se calcula  $\alpha = (\epsilon_r - 1)/N$ . Después de eso, por los resultados de las mediciones para otros valores de  $1/T$  con ayuda de la fórmula (22.19) puede calcularse el momento dipolar permanente, ya que todas las demás magnitudes en esta ecuación son conocidas.

**Interpretación cuántica de la polarización de los dieléctricos gaseosos polares.** Lo mismo que en la teoría clásica, en la cuántica la aparición de la polarización en los dieléctricos polares se explica por la orientación principal de los momentos magnéticos permanentes de las moléculas en dirección de la in-

tensidad del campo eléctrico. Para la constante dieléctrica se obtiene la fórmula (22.19). *En cambio, en la interpretación de la reorientación de los momentos dipolares permanentes existe una diferencia esencial con respecto a la teoría clásica.*

En la teoría cuántica es necesario tomar en consideración la rotación de las moléculas. El momento de impulso de las moléculas en rotación se orienta en el espacio en todas las direcciones y sus proyecciones sobre cualquier dirección elegida forma un conjunto discreto de valores, con la particularidad de que el valor medio de la proyección es nulo. El momento dipolar eléctrico está unido rígidamente con la molécula y cambia su orientación en el espacio debido a la rotación de la molécula.

El momento dipolar de la molécula puede descomponerse en dos componentes: a lo largo del eje de rotación y perpendicularmente a él. La segunda componente, a causa de la rotación de la molécula, cambia su orientación en el espacio, en el plano perpendicular al eje de rotación de la molécula. El valor medio de esta componente en el sistema de coordenadas, donde gira la molécula, es nulo. El valor medio de la componente del momento dipolar por el eje de rotación de la molécula es también nulo debido a que el momento de inercia de la molécula está cuantificado y el valor medio de su proyección sobre cualquier dirección es igual a cero, independientemente de si hay campo eléctrico o no. Por lo tanto, *las moléculas con un momento de impulso diferente de cero no contribuyen en la polarización. Esta última se forma sólo por las moléculas que no están en rotación y que poseen momento de impulso nulo, como consecuencia de la reorientación de sus momentos dipolares eléctricos permanentes.* Las proyecciones del momento dipolar sobre la dirección del campo eléctrico forman una serie discreta de valores con una magnitud media, diferente de cero, merced a lo cual surge la polarización.

**Gases densos.** En este caso es necesario tener en cuenta la diferencia entre el campo local y el exterior y la diversa orientación de los momentos dipolares que depende de la interacción entre los dipolos. Todo esto complica mucho los cálculos.

Considerando que la intensidad del campo local es mucho menor que la del campo de saturación, es racional para la polarización escribir, en vez de (22.17), la siguiente fórmula:

$$P = \frac{Np^2}{3kT} E^* \quad (22.20)$$

No obstante, la intensidad  $E^*$  del campo local en esta expresión no puede expresarse mediante la intensidad del campo exterior por la fórmula (20.11). Puede cerciorarse uno de eso por medio de los siguientes razonamientos.

Imaginémonos que en el centro de una cavidad esférica de radio  $a$ , que se forma en un dieléctrico denso con una constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r$ , se coloca un dipolo  $p$ . El campo de ese dipolo provoca la polarización del medio fuera de la esfera. Merced a ello, en la cavidad esférica surge una intensidad complementaria

$$E_{\text{comp}} = \frac{2(\epsilon_r - 1)}{2\epsilon_r + 1} \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad (22.21)$$

es decir, en la cavidad aparece una intensidad constante que coincide en dirección con la orientación del momento dipolar. Esta intensidad complementaria provoca la aparición de un momento dipolar inducido complementario, cuya dirección coincide con la del momento dipolar permanente y, por lo tanto, no puede reorientar el momento dipolar permanente. Como consecuencia, la polarización no puede interpretarse como la reorientación de los momentos dipolares en el campo local.

La fórmula (22.20), teniendo en cuenta (20.11), adquiere la forma

$$P = \frac{Np^2}{3kT} \left[ E + \frac{P}{(\epsilon_0)} \right], \quad (22.22)$$

de donde

$$P = \frac{Np^2/(3kT)}{1 - Np^2/(9kT\epsilon_0)} E. \quad (22.23)$$

Para  $T_0 = Np^2/(9kT\epsilon_0)$  el denominador del segundo miembro se convierte en cero. Para  $T > T_0$  la polarización  $P$  tiene un valor finito y para  $T = T_0$  se reduce al infinito. Eso significa que para  $T \leq T_0$  la substancia correspondiente debe poseer polarización espontánea. Por ejemplo, según la fórmula (22.23), es de esperar que los vapores de agua a alta presión deben ser polarizados espontáneamente, lo que a ciencia cierta es incorrecto. Semejantes resultados erróneos se obtienen también para otras substancias. Por esta razón, para describir los gases densos con moléculas polares y líquidos polares se necesitan otros modelos.

**Líquidos polares.** Onsager propuso un modelo para los líquidos polares que concuerda mejor con el experimento, a pesar de que ofrece resultados numéricos bastante aproximados. En el modelo se considera que cada dipolo se encuentra en el centro de una cavidad esférica real, cuyo volumen es igual al volumen medio correspondiente a una molécula. Se toma en consideración la orientación de los dipolos por las fuerzas de acción a distancia y el surgimiento de un momento dipolar complementario, influido por la intensidad (22.21). Como consecuencia se recibió la relación

$$\frac{(\epsilon_r - \epsilon_{\text{ind}})(2\epsilon_r + \epsilon_r \text{ndt})}{\epsilon_r (\epsilon_r \text{ind} + 2)^2} = \frac{Np^2}{9kT\epsilon_0}, \quad (22.24)$$

donde  $\epsilon_r$  es la constante dieléctrica relativa;  $\epsilon_{\text{r ind}}$ , la constante dieléctrica relativa, determinada por los momentos dipolares inducidos. Para el agua  $\epsilon_{\text{r ind}} = 4,9$ ,  $p = 2,16 \cdot 10^{-29}$  C·m y la fórmula (22.24) para  $T = 273$  K nos da el valor de  $\epsilon_r = 105$ . El valor experimental de  $\epsilon_r = 88$ . Es difícil esperar mejor concordancia con el experimento.

La mejor concordancia cuantitativa con el experimento se obtiene para las soluciones fuertemente diluidas de dieléctricos polares en disolvente no polar. En este caso las moléculas polares de la substancia disuelta se encuentran suficientemente lejos la una de la otra, por lo que puede menospreciarse la interacción entre ellas. Con ayuda del modelo de Onsager puede tomarse en consideración la interacción de las moléculas polares con el disolvente no polar. Como consecuencia, se obtiene una teoría que concuerda bastante bien con el experimento.

**Cristales iónicos.** Se les puede imaginar como dos subredes con iones positivos y negativos. Bajo la influencia del campo eléctrico exterior, estas redes se desplazan una respecto a otra, debido a lo cual surge una polarización considerable, lo que ofrece valores relativamente grandes de la constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r$ . Verbigracia, la sal común NaCl posee  $\epsilon_r = 6$ , KCl,  $\epsilon_r = 5$ , etc.

En condiciones típicas, cuando la polarización de dieléctrico polar alcanza el valor máximo posible, los campos de saturación son de centenares de millones de voltio por metro.

La contribución de los momentos dipolares inducidos en la polarización es unas cien veces inferior a la de los permanentes y en la mayoría de los casos puede menoscuparse.

El mecanismo de polarización de los gases y líquidos polares densos, teniendo en cuenta el campo local, no puede considerarse como una reorientación de los momentos dipolares en este campo.

¿Por qué los momentos dipolares de las moléculas polares tienden a girar hasta coincidir con la dirección de la intensidad del campo eléctrico?

¿Para qué condiciones la polarización de los dieléctricos polares alcanza la saturación?

¿A qué distancias entre las cargas elementales corresponden los momentos dipolares permanentes de las moléculas?

¿Permite la técnica moderna experimental separar la contribución de los momentos dipolares inducidos y permanentes en la polarización? Explíquese de qué manera puede hacerse eso en principio. ¿Cuáles son los factores físicos que conducen a la imposibilidad de examinar la polarización de los dieléctricos densos como consecuencia de la reorientación de los momentos dipolares en un campo local?

## § 23. Substancias ferroeléctricas

*Se examinan las propiedades físicas de las substancias ferroeléctricas y la naturaleza de la ferroelectricidad.*

**Definición.** Se llaman substancias ferroeléctricas a los dieléctricos polares que en un intervalo determinado de temperaturas están polarizados espontáneamente, es decir, poseen polarización en ausencia del campo eléctrico. En los límites del intervalo de temperaturas la substancia ferroeléctrica se convierte en un dieléctrico polar como consecuencia de la transición de fase.

La constante dieléctrica relativa de las substancias ferroeléctricas es extremadamente alta ( $\epsilon_r \sim 10^4$ ) y depende de la intensidad del campo sin ser, en cambio, una función unívoca de la intensidad. El valor de  $\epsilon_r$  depende de cómo varió la intensidad antes de lograr el valor dado.

El término «substancias ferroeléctricas» surgió por la analogía formal que existe entre sus propiedades y las de las substancias ferromagnéticas. En calidad de ejemplos de substancias ferroeléctricas pueden servir la sal de Seignette (de Rochelle)  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O} \cdot 4\text{H}_2\text{O}$  y el titanato de bario  $\text{BaTiO}_3$  y otros.

**Ciclo de histéresis.** Puesto que  $\epsilon$  es función de  $U$ ,  $D = \epsilon U$  depende no linealmente de  $E$ . Además, dado que  $\epsilon$  es función de la prehistoria de la variación de  $E$ ,  $D$  depende de manera multiforme de  $E$ . Coloquemos entre las

armaduras de un condensador plano una substancia ferroeléctrica y midamos  $\epsilon$  en función de la intensidad  $E$  del campo que varía según la ley armónica.

El esquema de la instalación se muestra en la fig. 104. A los bornes extremos de dos condensadores planos acoplados en serie se les conecta un generador que crea entre ellos una diferencia de potencial que varía armónicamente. Esta diferencia de potencial se distribuye entre el condensador  $C$  con la substancia ferroeléctrica y el condensador  $C_1$ , entre cuyas armaduras no hay ninguna subs-

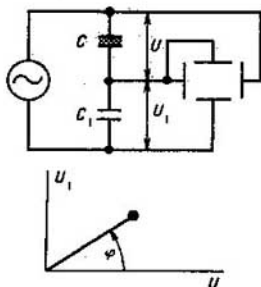


Fig. 104  
Esquema del dispositivo para  
eliminar el ciclo de histéresis:  
 $\operatorname{tg} \varphi = \epsilon / \epsilon_0 = D / \epsilon_0 E$

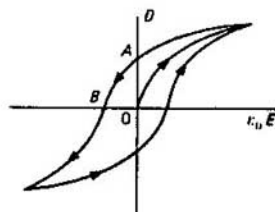


Fig. 105  
Ciclo de histéresis

tancia. Suponiendo que las áreas de todas las armaduras de los condensadores son iguales y designando por  $d$  la distancia entre las armaduras, tenemos

$$E = \sigma / \epsilon, \quad E_1 = \sigma / \epsilon_0, \quad (23.1)$$

de donde

$$U = Ed = \sigma d / \epsilon, \quad U_1 = \sigma d / \epsilon_0 \quad (23.2)$$

y por lo tanto,

$$\operatorname{tg} \varphi = U_1 / U = \epsilon / \epsilon_0 = \epsilon E / (\epsilon_0 E). \quad (23.3)$$

Por eso si aplicamos la tensión  $U$  a la exploración horizontal del oscilógrafo y  $U_1$  a la vertical, en la pantalla del dispositivo, al variar  $E$ , se traza una curva, la abscisa de cuyos puntos es en cierta escala igual a  $\epsilon_0 E$  y la ordenada, a  $\epsilon E = D$  en la misma escala. Esta curva se denomina ciclo de histéresis (fig. 105). Las flechas en la curva muestran la dirección del movimiento del punto por la curva al cambiar la intensidad del campo. El segmento  $OA$  caracteriza la polarización remanente, es decir, la polarización que debe poseer el modelo cuando la intensidad del campo exterior se convierte en cero. El segmento  $OB$  caracteriza la intensidad que tiene una dirección contraria a la de la polarización y para la cual el modelo se depolariza totalmente, o sea, su polarización remanente desaparece. Cuanto mayor es  $|OA|$ , tanto mayor es la polarización remanente de la substancia ferroeléctrica. Cuanto mayor es  $|OB|$ ,

tanto mejor se retiene la polarización remanente por parte de la substancia ferroeléctrica.

**Punto (temperatura) de Curie.** Al elevar la temperatura *por encima de cierto valor*  $T_C$ , *característico para cada substancia ferroeléctrica, sus propiedades ferroeléctricas desaparecen y ella se convierte en un dieléctrico polar ordinario.* El punto de transición de fase del estado ferroeléctrico al dieléctrico polar se llama **punto de Curie** y la temperatura que le corresponde,  $T_C$ , **temperatura de Curie.** En algunos casos existen dos puntos de Curie: las propiedades ferroeléctricas desaparecen también al disminuir la temperatura. Por ejemplo, la sal de Rochelle posee dos puntos de Curie que se caracterizan por las temperaturas  $t_{C,s} = 24^\circ\text{C}$ ,  $t_{C,i} = -18^\circ\text{C}$ . La cantidad de substancias ferroeléctricas con dos puntos de Curie es relativamente pequeña. La mayoría posee sólo el punto superior, denominado simplemente punto de Curie.

*En el punto de Curie se efectúa la transición del dieléctrico del estado ferroeléctrico al estado de dieléctrico polar. En este caso la constante dieléctrica varía constantemente desde el valor correspondiente al estado ferroeléctrico hasta el valor correspondiente al estado de dieléctrico polar.* La ley de variación de la susceptibilidad dieléctrica  $\kappa$  en las proximidades de la temperatura de Curie tiene la forma

$$\kappa = \frac{A}{T - T_0}, \quad (23.4)$$

donde  $A$  es cierta constante y  $T_0$ , la temperatura de Curie — Weiss próxima a la temperatura de Curie  $T_C$  (en la mayoría de los casos en la fórmula (23.4) en lugar de  $T_0$  se utiliza  $T_C$  lo que no introduce errores algo esenciales en  $\kappa$  para las temperaturas diferentes de  $T_C$ ). La ley expresada por la fórmula (23.4) se denomina ley de Curie—Weiss.

Si existe también el punto inferior de Curie, en las inmediaciones de éste la ley de Curie—Weiss tiene la forma

$$\kappa = \frac{A'}{T'_0 - T}. \quad (23.5)$$

Como ya se dijo, las propiedades dieléctricas de los cristales son diferentes por distintas direcciones y por eso, su susceptibilidad dieléctrica se caracteriza no mediante la susceptibilidad dieléctrica escalar  $\kappa$ , sino por el tensor de susceptibilidad dieléctrica  $\kappa_{ij}$ . En cambio, la dependencia entre las componentes del tensor y la temperatura tiene el mismo carácter que en (23.4) y (23.5).

**Mecanismo molecular de la polarización espontánea.** La teoría de la ferroelectricidad se encuentra fuera de los márgenes del curso de la física general. Por eso nos limitaremos sólo a la descripción cualitativa de los procesos a nivel molecular. Una interacción muy intensa entre los momentos dipolares de las moléculas puede conducir a que surja una polarización finita  $P$  a una intensidad  $E$ , tan pequeña como se quiera, del campo o, lo que es lo mismo, puede surgir la polarización  $P$  en ausencia del campo exterior. Con otras palabras, *para una interacción intensa entre los momentos dipolares de las moléculas surge una*

*polarización espontánea, en la que los momentos dipolares aislados están orientados en una misma dirección.* Tomando en consideración que los momentos dipolares permanentes son mucho mayores que los inducidos [véase (22.19)], se puede deducir que la polarización espontánea se caracteriza por una polarización muy grande. Pero eso conduce a que la susceptibilidad  $\kappa$  y la constante dieléctrica e correspondientes sean mucho mayores que los valores que se observan en los dieléctricos polares y neutros. *El estado de polarización espontánea es precisamente el estado ferroeléctrico.* El paso del estado ferroeléctrico al estado de dieléctrico polar es la transición del estado de polarización espontánea al estado cuando esa polarización desaparece y el dieléctrico se convierte en uno ordinario con moléculas que poseen momentos dipolares permanentes, es decir, es una transición al estado de dieléctrico polar. *Los factores físicos que conducen a esta transición, se reducen a los mecanismos que debilitan la interacción de los momentos dipolares de las moléculas.*

**Dominios dieléctricos.** La polarización espontánea es una fuente de campos eléctricos muy grandes. Por eso, si un volumen macroscópico de la substancia ferroeléctrica tiene polarización espontánea en cierta dirección, alrededor de este volumen surge un campo eléctrico muy grande con el que está relacionada una energía elevada del campo. Dicho estado no es energéticamente ventajoso. *El sistema tiende a pasar a un estado en el que, por una parte, exista polarización espontánea, y por otra, la energía del campo sea mínima. Eso puede realizarse como resultado de la división del volumen de la substancia ferroeléctrica en pequeñas zonas, cada una de las cuales posee una polarización espontánea en cierta dirección determinada, diferente para distintas zonas.* La polarización media del volumen que incluye una cantidad suficiente de pequeñas zonas con diferentes direcciones de la polarización espontánea, es nula y por esta razón, la intensidad del campo eléctrico exterior originado por este volumen, es próxima a cero. *Las pequeñas zonas con polarización espontánea se denominan dominios dieléctricos o simplemente dominios.* Así pues, una substancia ferroeléctrica no polarizada es un conjunto de dominios con polarizaciones espontáneas, orientadas al azar.

Es obvio que para disminuir la energía eléctrica es útil reducir los volúmenes de los dominios. *No obstante, al proceso de reducción de las dimensiones de los dominios obstaculiza otro factor, relacionado con la presencia de la energía superficial en la superficie de separación de dos dominios vecinos.* Está claro que la superficie sumaria de las fronteras entre los dominios aumenta al disminuir el volumen de los dominios y por lo tanto, aumenta también la energía superficial. Por esta razón, los volúmenes de los dominios pueden reducirse sólo hasta límites determinados, cuando eso conduce a la disminución de la energía total del sistema. *Al reducir posteriormente el volumen de los dominios a cuenta de la energía superficial, tiene lugar no la disminución, sino el aumento de la energía total. De esta manera se fijan las dimensiones de los dominios.* Estas dimensiones tienen el orden de miles de distancias intermoleculares. La existencia de los dominios se demuestra en los experimentos, observando directamente con ayuda de la luz polarizada, así como en los ensayos de decapado de la superficie de la substancia ferroeléctrica, ya que las distintas partes del dominio durante el decapado se destruyen con distinta velocidad.

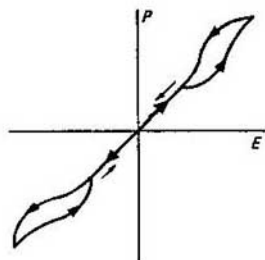


Fig. 106  
Ciclos dobles de histéresis en  
sustancias antiferromagnéticas  
que pasan en campos intensos  
al estado ferroeléctrico

de los momentos dipolares de las moléculas, perteneciente a otra de las subredes del cristal, en dirección contraria. En este caso, la polarización total de cualquier volumen pequeño de semejante cristal es nula. Así pues, no existen dominios con diferentes direcciones de la polarización espontánea, a pesar de que esta última en cualquier volumen pequeño está presente. Semejantes sustancias se denominan sustancias **antiferroeléctricas**. Por su estructura son análogas a las sustancias **antiferromagnéticas**.

En campos, suficientemente pequeños, las sustancias antiferroeléctricas se comportan como dieléctricos ordinarios con una dependencia lineal de la polarización respecto a la intensidad del campo exterior. En campos suficientemente intensos puede efectuarse el paso al estado ferroeléctrico con todas las consecuencias que se desprenden de ello, por ejemplo, se observa el ciclo de histéresis.

La transición se realiza para una intensidad, grande según el módulo, del campo eléctrico. Por esta razón, siendo grande la amplitud de oscilaciones de la tensión en el circuito de la fig. 104 con una sustancia antiferroeléctrica en lugar de ferroeléctrica, se observan dos ciclos de histéresis (fig. 106).

La temperatura de Curie-Weiss no coincide con la temperatura de Curie, pero es próxima a ella. En muchos casos no hay necesidad de diferenciarlas.

La mayoría de las sustancias ferroeléctricas tienen sólo un punto (superior) de Curie. No obstante, existe cierta cantidad de sustancias ferroeléctricas con dos puntos de Curie.

El proceso de cambio de la polarización de la sustancia ferroeléctrica en un campo eléctrico exterior consiste en la reorientación de los momentos dipolares de dominios aislados, en el cambio de los volúmenes y en el movimiento de las fronteras entre los dominios. Dichos procesos se estudian intensamente, ya que las sustancias ferroeléctricas tienen múltiples aplicaciones prácticas. Se conocen más de cien diferentes sustancias ferroeléctricas puras y una cantidad muy elevada de soluciones sólidas ferroeléctricas.

**Sustancias antiferroeléctricas.** A condiciones determinadas en el cristal surgen al mismo tiempo dos polarizaciones espontáneas que tienen dirección contraria. Una de las polarizaciones espontáneas nace como consecuencia de la orientación de los momentos dipolares de las moléculas, pertenecientes a una de las subredes del cristal, en una dirección, y la otra, debido a la orientación



## § 24. Substancias piezoeléctricas

*Se describen los mecanismos del efecto piezoeléctrico y del efecto piezoeléctrico inverso. Se analiza la relación entre el efecto piezoeléctrico inverso y la electrostricción. Se dan las nociones principales sobre las substancias piezoeléctricas.*

**Propiedades de las substancias piezoeléctricas.** Existe una cantidad muy grande de cristales, en cuya superficie surgen, al deformarse, cargas eléctricas. Semejantes cristales se denominan substancias piezoeléctricas. Dado que las deformaciones no pueden cambiar por sí mismas la carga total del cristal, las cargas superficiales que se forman durante la deformación poseen signos diferentes en distintas partes de la superficie. El cuarzo, la turmalina, la sal de Rochelle, etc. pertenecen a las substancias piezoeléctricas.

Como muestra el experimento, las cargas en la superficie de la substancia piezoeléctrica surgen como consecuencia de las deformaciones homogéneas de compresión o tracción en direcciones bien determinadas, denominadas ejes polares de la substancia piezoeléctrica. En las caras opuestas, perpendiculares al eje polar, durante las deformaciones homogéneas, surgen cargas de signo contrario, con la particularidad de que los signos de las cargas cambian al variar el signo de la deformación, es decir, si, por ejemplo, durante la compresión a lo largo del eje polar, en la cara dada se forma una carga positiva, durante la tracción, esta misma cara se carga negativamente. El efecto piezoeléctrico se observa no sólo durante la pura compresión o tracción a lo largo del eje polar, sino que durante cualquier deformación del cristal que va acompañada por la compresión o tracción a lo largo del eje polar.

Puesto que en diferentes caras, perpendiculares al eje polar, surgen cargas de diferente signo, las direcciones distintas a lo largo del eje polar no son equivalentes. Pero eso significa que si el cristal se gira a  $180^\circ$  alrededor del eje, perpendicular al polar, este último eje coincide consigo mismo, mientras que el cristal no coincide consigo mismo. Por esta razón, los cristales que poseen centro de simetría no pueden ser piezoeléctricos. Para que exista el efecto piezoeléctrico durante la deformación homogénea, es necesario que el cristal no tenga centro de simetría. Los ejes polares se determinan por las propiedades de simetría de la red cristalina. En general, el cristal posee varios ejes polares.

*Las propiedades piezoeléctricas dependen de la temperatura. Si a cierta temperatura la red cristalina cambia de tal manera que se forma un centro de simetría, a esta temperatura desaparecen las propiedades piezoeléctricas del cristal.* Por ejemplo, las propiedades piezoeléctricas del cuarzo hasta la temperatura de  $200^\circ\text{C}$  varían poco, pero luego hasta la temperatura de  $576^\circ\text{C}$  comienzan a debilitarse lentamente. A  $576^\circ\text{C}$  sucede el cambio de la red cristalina del cuarzo, debido al cual las propiedades piezoeléctricas del cuarzo desaparecen. Al bajar la temperatura, el cambio de las propiedades del cuarzo ocurre en dirección inversa.

**Efectos piezoeléctricos transversal y longitudinal.** La aparición de las cargas en las caras, perpendiculares al eje polar, durante la deformación homogénea del cristal a lo largo de este eje, se denomina efecto piezoeléctrico longitudinal. Sin embargo, puede provocarse la aparición de cargas en las mismas caras, comprimiendo o estirando el cristal perpendicularmente al eje polar sólo si en este caso tiene lugar la compresión o tracción del cristal a lo largo del eje polar. Este fenómeno se llama efecto piezoeléctrico transversal. *Su existencia se determina por la relación entre las deformaciones longitudinales y transversales del sólido.*

**Mecanismo del efecto piezoeléctrico.** Sólo los cristales iónicos pueden poseer propiedades piezoeléctricas. *El efecto piezoeléctrico surge cuando influida por las fuerzas exteriores, la subred cristalina de iones positivos se deforma de otra manera que la subred cristalina de iones negativos.* Como resultado tiene lugar el desplazamiento de los iones positivos y negativos que conducen a la aparición de polarización del cristal y de cargas superficiales. La polarización es, en primera aproximación, directamente proporcional a la deformación que, a su vez, es directamente proporcional a la fuerza. Por lo tanto, la polarización es directamente proporcional a la fuerza aplicada. Entre las caras con cargas de signos contrarios de un dieléctrico deformado surge una diferencia de potencial que puede medirse y después, según su valor, sacar la conclusión del valor de las deformaciones y las fuerzas aplicadas. El uso de esta relación encuentra gran aplicación práctica. Por ejemplo, existen captadores piezoeléctricos para medir presiones que varían rápidamente. Se conocen micrófonos piezoeléctricos, captadores piezoeléctricos en la automática y telemecánica, etc.

**Efecto piezoeléctrico inverso.** Consiste en que en un campo eléctrico exterior la substancia piezoeléctrica se deformará. *La necesidad de su existencia se desprende de la del efecto directo y el principio de conservación de la energía.* Durante la deformación de la substancia piezoeléctrica, el trabajo se gasta en formar la energía de deformación elástica y la energía del campo eléctrico que surge a causa del efecto piezoeléctrico. Por lo tanto, al deformar una substancia piezoeléctrica, es necesario superar además de la fuerza de elasticidad del cristal, la fuerza complementaria que obstaculiza la deformación y es un factor que determina el efecto piezoeléctrico inverso. Para compensar esta fuerza complementaria hay que aplicar un campo eléctrico exterior, contrario al que surge durante el efecto piezoeléctrico. Por consiguiente, para obtener cierta deformación de la substancia piezoeléctrica, bajo la acción de un campo eléctrico exterior, es necesario que sea igual, pero de dirección contraria, al campo que surge durante la deformación dada; debido al efecto piezoeléctrico directo. Por ejemplo, si durante cierta deformación de la substancia piezoeléctrica a lo largo del eje polar entre sus caras, perpendiculares al eje, surge cierta diferencia de potencial, para realizar la misma deformación sin utilizar fuerzas mecánicas, hay que aplicar a esas caras la misma diferencia de potencial, pero con signo contrario.

El mecanismo del efecto piezoeléctrico inverso es parecido al directo: influidas por el campo eléctrico exterior, las subredes cristalinas de iones positivos y negativos se deforman de diferente manera, lo que conduce a la deformación del cristal.

El efecto piezoeléctrico inverso tiene también numerosas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, hallaron gran aplicación los radiadores ultrasónicos de cuarzo.

**Substancias piroeléctricas.** La subred de iones positivos de algunas substancias piezoeléctricas resulta desplazada con respecto a la subred de iones negativos en estado de equilibrio termodinámico, debido a lo cual *semejantes cristales resultan polarizados en ausencia del campo eléctrico exterior*. De esta manera, los mencionados cristales poseen polarización eléctrica espontánea.

Por lo general, la existencia de semejante polarización espontánea se enmascara por las cargas superficiales libres que se precipitan del medio ambiente en la superficie del cristal bajo el efecto del campo eléctrico, relacionado con la polarización espontánea. Este proceso transcurre hasta que el campo eléctrico se neutralice totalmente, o sea, hasta que no se enmascare completamente la presencia de la polarización espontánea. Sin embargo, al variar la temperatura del modelo, por ejemplo, al calentarlo, tiene lugar el desplazamiento de las subredes iónicas una respecto a otra, como consecuencia de lo cual cambia la polarización espontánea y en la superficie del cristal aparecen cargas eléctricas. El surgimiento de dichas cargas se denomina efecto piroeléctrico directo y los cristales correspondientes se llaman cristales piroeléctricos.

*Toda substancia piroeléctrica es piezoeléctrica, pero no toda substancia piezoeléctrica es piroeléctrica.* Es que las substancias piroeléctricas poseen una dirección preferida, a lo largo de la cual existe la polarización espontánea, mientras que la substancia piezoeléctrica, en general, no tiene dirección preferida.

Existe también el *efecto piroeléctrico inverso: la variación del campo eléctrico en una substancia piroeléctrica aislada adiabáticamente, va acompañada por el cambio de su temperatura*. La necesidad de su existencia puede demostrarse, basándose en el análisis termodinámico del proceso y mediante los experimentos.

Al surgir condiciones para la polarización espontánea, el dieléctrico tiende a pasar a un estado en el que, por una parte, hay polarización espontánea, pero por otra parte, la energía del campo sea mínima. Merced a ello, ocurre la formación de los dominios.

La desaparición de la polarización espontánea y el paso del estado ferroeléctrico al dieléctrico polar se provocan por los factores que debilitan la interacción de los momentos dipolares de las moléculas.

¿En qué se diferencia la temperatura de Curie de la de Curie-Weiss?

¿Cuál es el mecanismo de aparición de los dominios? ¿Por qué los dominios no pueden ser muy grandes?

¿Qué es una substancia antiferroeléctrica?

## Problemas

- 3.1. Calcular la constante dieléctrica relativa del helio para  $p = 101,3 \text{ kPa}$ ,  $t = 15^\circ \text{C}$  si su susceptibilidad dieléctrica atómica  $\alpha = 2,48 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$ . El valor experimental de  $\epsilon_r = 1,000074$ .
- 3.2. Calcular la constante dieléctrica del amoníaco para  $t = 27^\circ \text{C}$ ;  $\alpha = 1,37 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$ ;  $p = 0,46 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$ . *Indicación: hacer uso de la fórmula (22.19).*

- 3.3. El momento dipolar permanente de la molécula de agua es  $6,2 \cdot 10^{-30}$  C·m. Determinar la polarización del vapor de agua saturado para  $t = 100$  °C y presión atmosférica.
- 3.4. El aire consta, en lo fundamental, de moléculas de  $N_2$  y  $O_2$ . Según la fórmula de Clausius—Mossotti, hallar los coeficientes de su susceptibilidad atómica, que para mayor simplicidad se toman iguales. Hallar el radio de las moléculas.
- 3.5. Tomando para las moléculas de nitrógeno los valores de  $\alpha$  y  $r_0$ , obtenidos en el problema 3.4, calcular la variación de la distancia entre las cargas que forman el dipolo, en un campo de intensidad de 1 MV/m.

### Respuestas

- 3.1.  $\epsilon_r = 1,000067$ . 3.2.  $\epsilon_r = 1,0076$ . 3.3.  $1,2 \cdot 10^{-4}$  C/m<sup>2</sup>. 3.4.  $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-30}$  m<sup>3</sup>;  $r_0 = 0,96 \cdot 10^{-10}$  m. 3.5.  $0,87 \cdot 10^{-16}$  m.

## Corriente eléctrica continua

En presencia de solamente las fuerzas de origen electrostático no puede haber corriente continua. Para que exista se necesitan fuerzas de origen no electrostático, denominadas fuerzas electromotrices exteriores. La ley principal es la de Ohm en la enunciación local:

### § 25. Campo eléctrico en presencia de corrientes continuas

*Se analizan las peculiaridades del campo eléctrico en presencia de corrientes continuas y el papel de las cargas volumétricas y superficiales. Se examina el papel de diversos factores que aseguran la existencia de la corriente continua.*

**Campo dentro del conductor.** La ley de Ohm (véase el § 16) en forma diferencial tiene el aspecto

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (25.1)$$

En presencia de corriente  $\mathbf{j} \neq 0$  y, por lo tanto,  $\mathbf{E} \neq 0$ . De esta manera, dentro del conductor con corriente hay campo eléctrico. Recordemos que en la electrostática no existe campo alguno dentro de los conductores.

*En general la densidad de la corriente continua por la sección del conductor está distribuida no uniformemente.* Para convencernos de ello examinemos una sección de un conductor encorvado con sección transversal circular [se trata de un conductor homogéneo ( $\gamma = \text{const}$ )]. La sección encorvada del conductor debe presentarse como cortada de un trozo de material sin deformar, ya que en el conductor encorvado hay deformación y la condición de homogeneidad para él, hablando en rigor, no se cumple y todo el cuadro de distribución de la densidad de la corriente se complica.

En la proximidad de la superficie del conductor la densidad de la corriente puede dirigirse sólo por la tangente a la superficie. Esto significa [véase (25.1)], que la intensidad  $\mathbf{E}$  del campo en las inmediaciones de la superficie del conductor es tangente a la superficie. Por lo tanto, las superficies equipotenciales son perpendiculares a la superficie del conductor. Si la sección del conductor está encorvada, es evidente que dos superficies equipotenciales próximas no pueden hallarse a una distancia invariable la una de la otra en todos los puntos dentro del conductor. Por ejemplo, en un conductor anular de sección circular la distancia entre las superficies equipotenciales en la parte interna del anillo es menos que en la externa. Ya que la distancia entre las superficies equipotenciales vecinas varía, cambia también la intensidad del campo eléctrico en los puntos correspondientes de la superficie equipotencial. De aquí [véase (25.1)]

sacamos la conclusión de que en un conductor homogéneo la densidad de la corriente continua en general, varía por la sección del conductor. En un conductor rectilíneo cilíndrico circular de longitud infinita las superficies equipotenciales dentro del conductor son planos, perpendiculares al eje del conductor. Por eso, por toda la sección de semejante conductor homogéneo, tanto la intensidad del campo eléctrico, como también la densidad de la corriente son constantes.

En lo sucesivo, se examinan principalmente sólo los conductores que poseen un área muy pequeña de la sección transversal, denominados lineales. Para esa clase de conductores puede menospreciarse con gran precisión la variación de la densidad de la corriente eléctrica por la sección del conductor, considerando que en cada punto de dicha sección la densidad de la corriente es constante según el módulo y está dirigida a lo largo del elemento de longitud  $dl$  del conductor. La intensidad de corriente que circula por el conductor, es en este caso igual a  $I = j\Delta S$ , donde  $\Delta S$  es el área de la sección transversal del conductor.

Así pues, en el caso general la cuestión sobre la intensidad del campo eléctrico y la densidad de la corriente continua dentro de los conductores gruesos es compleja. La distribución de la densidad de la corriente respecto a la sección depende de una serie de factores y, en particular, de la forma del conductor. Razonamientos más determinados pueden enunciarse sobre la intensidad del campo en las inmediaciones de la superficie del conductor. Cerca de la superficie tanto la intensidad del campo, como la densidad de la corriente están dirigidas de modo tangente a la superficie. Las componentes normales de estas magnitudes respecto a la superficie dentro del conductor están ausentes. De la condición de frontera (17.30) deducimos que en la proximidad de la superficie fuera del conductor hay un campo eléctrico, cuya componente tangencial de la intensidad  $E_t$  es igual a la componente tangencial de la intensidad  $E_t$  del campo dentro del conductor (fig. 107). En cambio, de aquí no se puede deducir nada sobre la componente normal de la intensidad del campo eléctrico fuera del conductor.

**Cuestión sobre las fuentes del campo.** ¿Qué es lo que engendra el campo eléctrico dentro del conductor, qué es la fuente de este campo? Puesto que la existencia de corriente continua en el circuito se asegura por una fuente correspondiente de corriente continua, por ejemplo, por pilas eléctricas, está claro que dicha corriente tiene algo que ver con la creación del campo eléctrico. Sin embargo, la corriente no puede directamente originar ese campo. Semejante afirmación es obvia en el caso de un conductor muy largo para las secciones aférras del circuito, alejadas de la pila a una distancia muy grande, por ejemplo, a centenas de kilómetros. La intensidad del campo eléctrico que pueden crear las cargas de los polos de la pila es insignificanemente pequeña a esa distancia. Por lo tanto, la pila no puede ser una fuente directa del campo eléctrico dentro del conductor.

La única fuente del campo eléctrico continuo puede ser la carga eléctrica. Por eso el problema en cuestión se reduce a la interrogante sobre qué cargas engendran el campo dentro de un conductor y dónde se encuentran dichas cargas.

**Campo fuera del conductor.** Para contestar a esta pregunta es necesario estudiar el campo eléctrico fuera del conductor. Coloquemos el conductor con

corriente en un baño plano, cubierto con una capa fina de polvo dieléctrico (fig. 108). Los granos pequeños de polvo se sitúan en cadenas a lo largo de las líneas de fuerza del campo eléctrico (véase el § 19). En la figura se muestran dos secciones del conductor con corriente y la línea de fuerza entre ellas.

Se ve que las líneas de fuerza del campo eléctrico no son tangentes a la superficie del conductor. Eso significa que fuera del conductor cerca de su superficie existe a la par con la componente tangencial de la intensidad  $E_r$  del cam-

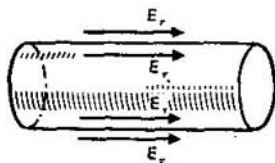


Fig. 107  
El campo dentro del conductor y la componente tangencial de la intensidad en las proximidades de la superficie fuera del conductor

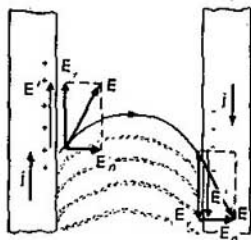


Fig. 108  
Demostración de la existencia de componente normal de la intensidad del campo cerca de la superficie del conductor

po eléctrico, la componente normal  $E_n = 0$ . Por eso de (17.26) deducimos que en la superficie del conductor deben existir cargas, cuya densidad superficial es

$$\sigma = \epsilon_0 E_n. \quad (25.2)$$

En la fórmula (25.2) se supone que el conductor se encuentra en el vacío. Si se sumerge en un medio dieléctrico, en lugar de  $\epsilon_0$  en la fórmula (25.2) participará la constante dieléctrica  $\epsilon$  del medio.

**Cargas superficiales.** Así pues, en la superficie del conductor por el que circula corriente eléctrica continua, existen cargas eléctricas. *Ellas son precisamente las fuentes del campo eléctrico que existe en el conductor y asegura la presencia de la corriente continua.* En diversas secciones del conductor la densidad superficial de la carga puede tener signos diferentes. Por ejemplo, las secciones derecha e izquierda del conductor en la fig. 108 tienen respectivamente densidad superficial negativa y positiva de la carga.

**Cargas volumétricas.** Los conductores homogéneos poseen sólo cargas superficiales. *En los conductores heterogéneos, cuando la conductibilidad varía de un punto a otro, surgen también cargas en el volumen del conductor.* Esto se desprende directamente del principio de conservación de la carga (5.24). En el caso estacional en cuestión  $(\partial\rho/\partial t) = 0$  y la ecuación (5.24) toma la forma

$$\operatorname{div} j = 0. \quad (25.3)$$

En principio, la carga volumétrica en la substancia puede ser tanto libre, como ligada. A nosotros nos interesa la densidad volumétrica sumaria  $\rho + \rho_{lig}$  de la carga, cuya presencia conduce a la variación de la intensidad del campo eléctrico a lo largo del conductor. Por eso [véase (17.27)] la densidad volumétrica sumaria de la carga es igual a

$$\rho + \rho_{lig} = \text{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \epsilon_0 \text{div}(\mathbf{j}/\gamma), \quad (25.4)$$

donde  $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\gamma$ . Teniendo en cuenta (25.3) y la expresión

$$\text{div}(\mathbf{j}/\gamma) = (1/\gamma) \text{div} \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \text{grad}(1/\gamma), \quad (25.5)$$

de (25.4) hallamos

$$\rho + \rho_{lig} = \epsilon_0 \mathbf{j} \cdot \text{grad}(1/\gamma). \quad (25.6a)$$

Dirigiendo el eje  $X$  a lo largo de la sección rectilínea del conductor y considerando que sus propiedades varían sólo en esta dirección, escribimos de nuevo la fórmula (25.6a) en la forma

$$\rho + \rho_{lig} = \epsilon_0 \mathbf{j} \frac{\partial(1/\gamma)}{\partial x}. \quad (25.6b)$$

Si la conductibilidad disminuye en dirección de la corriente, la densidad de las cargas es positiva. La causa consiste en lo siguiente. Siendo el área de la sección del conductor constante, la densidad de la corriente a lo largo del conductor debe ser constante. Si la conductibilidad disminuye en dirección de la corriente, para mantener invariable la corriente es necesario aumentar la intensidad del campo eléctrico. El aumento de la intensidad se asegura precisamente por las cargas positivas volumétricas. De la misma manera se explica la aparición de las cargas negativas volumétricas al aumentar la conductibilidad en dirección de la corriente.

**Mecanismo de realización de la corriente continua.** La fuente de corriente se denomina fuente de fuerzas electromotrices exteriores (fem exteriores; véase el § 26). Según los resultados de su acción, ella representa en sí un proceso o un dispositivo que separa las cargas positivas de las negativas. Después de ser divididas, las cargas se desplazan hacia los electrodos y por la ley de Coulomb influyen sobre las cargas del conductor en las inmediaciones de los electrodos; estas cargas, a su vez, actúan sobre otras cargas, etc. Como consecuencia de esas interacciones colectivas en el circuito, en la superficie de los conductores surge una distribución de las cargas que asegura la existencia del campo eléctrico correspondiente dentro del conductor. Así, pues, *el papel de las cargas en los polos de la fuente de las fem exteriores no consiste en crear en todos los conductores directamente el campo eléctrico correspondiente, sino en asegurar una distribución de las cargas superficiales en los conductores que cree el campo eléctrico necesario dentro de ellos.* Pero esto es precisamente lo que asegura la existencia de corriente continua. Ya que la interacción entre las cargas se efectúa mediante las fuerzas electromagnéticas, el proceso de formación de la corriente continua en el circuito después de su cierre, se caracteriza por la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas que depende de la distribución de las capacidades,



inductancias y otras características del circuito. En el espacio libre la velocidad de propagación de las interacciones electromagnéticas es igual a la velocidad de la luz.

**Variación del potencial a lo largo de un conductor con corriente.** Dado que en el conductor, en presencia de corriente continua  $E \neq 0$ , el potencial varía a lo largo del conductor, es decir, a diferencia de la electrostática el potencial no permanece constante en todos los puntos del conductor. *En cambio, el campo dentro del conductor se forma por las cargas superficiales inmóviles, constantes con el tiempo, y por esta razón, lo mismo que en la electrostática, es de potencial.* Por lo tanto, la diferencia de potencial entre dos puntos del conductor (fig. 109) según la fórmula (14.28) es igual a

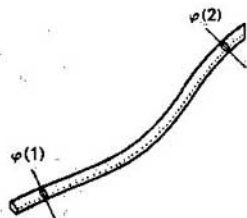


Fig. 109  
Para calcular la diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor con corriente

$$\varphi(2) - \varphi(1) = - \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (25.7)$$

donde la integral se calcula por cualquier camino que una los puntos 1 y 2. Para mayor comodidad de los cálculos, es útil elegir, como camino, una de las líneas de corriente que conecte cierto punto en la sección 1 del conductor con el correspondiente punto de la sección 2. A lo largo de la línea de corriente  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{l}$  son colineales y por eso  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E dl$ , con la particularidad de que el signo positivo se determina por el hecho de que la corriente circula en dirección del mayor potencial al menor. Además, si el área de la sección del conductor es constante, a lo largo del conductor  $E = \text{const.}$  Por lo tanto, [véase (25.7)]

$$\varphi(1) - \varphi(2) = EL, \quad (25.8)$$

donde  $l$  es la longitud del conductor entre las secciones 1 y 2. La diferencia de potencial entre las secciones se denomina tensión (voltaje) y se designa por  $U_{12} = \varphi(1) - \varphi(2)$ . Partiendo de la forma diferencial de la ley de Ohm ( $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ ), hallamos

$$\mathbf{E} = \mathbf{j} / \gamma = \mathbf{j} S / (\gamma S) = I / (\gamma S), \quad (25.9)$$

donde  $I$  es la intensidad de corriente. Tomando en consideración (25.9), la relación (25.8) toma la forma

$$U_{12} = I l / (\gamma S) = I R_{12}, \quad (25.10)$$

donde  $R_{12} = l / (\gamma S)$  es la resistencia óhmica de la sección del conductor. La fórmula (25.10) es la ley de Ohm para la sección del conductor.

## § 26. Fem exteriores

*Se discute el papel de las fem exteriores en los circuitos de corriente y se describen las fuentes concretas de las fem exteriores.*

**Esencia de las fem exteriores.** La fuerza electromotriz exterior puede tener origen electrostático por el simple hecho de que el campo electrostático es potencial. Por lo tanto, el trabajo del campo por un circuito cerrado, por el que circula corriente, es igual a cero, o sea, para dicha condición la corriente no podría existir ya que ella debe efectuar trabajo en superar la resistencia óhmica del conductor. La existencia de corriente continua demuestra que *las fuerzas electromotrices exteriores tienen origen no electrostático.*

La fuerza electromotriz exterior puede ser, en particular, una fuerza eléctrica o mecánica, sin ser una fuerza de origen electrostático. Por ejemplo, semejante fem es la fuerza que actúa sobre una carga en el campo eléctrico que surge por la ley de inducción electromagnética de Faraday (véase el capítulo 8).

**Fem exterior mecánica.** La fig. 110 muestra el esquema de la fuente más sencilla de corriente en el que la fem exterior posee origen mecánico. Entre los

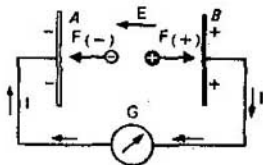


Fig. 110  
Esquema de la acción de las fem  
exteriores de origen mecánico

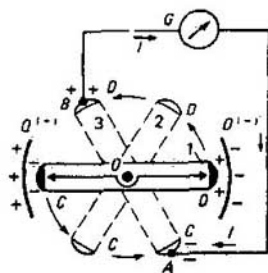


Fig. 111  
Esquema de una máquina elec-  
trostática

electrodos *A* y *B* existe un medio neutro con igual cantidad de cargas positivas y negativas. La fuerza exterior de origen no electrostático desplaza las cargas positivas hacia el electrodo *B*, mientras que las negativas, hacia *A*. Como consecuencia, el electrodo *A* recibe carga negativa y el electrodo *B*, positiva. En el circuito exterior de *B* a *A* circula una corriente eléctrica que efectúa un trabajo correspondiente. La energía necesaria para eso, se comunica al sistema mediante las fuerzas exteriores que gastan cierto trabajo para dividir las cargas entre los electrodos *A* y *B* y hacer llegar estas cargas hasta los electrodos contra las fuerzas del campo eléctrico con intensidad *E* que existe entre los electrodos.

La corriente entre los electrodos  $A$  y  $B$  dentro de la fuente de fem cierra la corriente en el circuito exterior. Si la dirección de la corriente se caracteriza respecto a los electrodos, en el circuito exterior la corriente circula del electrodo positivo al negativo, mientras que dentro de la fuente de corriente, desde el electrodo negativo hacia el positivo.

Una realización práctica de la fem exterior mecánica es la máquina electrostática, cuyo circuito se da en la fig. 111. Las cargas  $Q^+$  y  $Q^-$  crean un campo electrostático en el espacio entre ellas. Las placas conductoras  $C$  y  $D$ , aisladas una de otra, se mueven por una circunferencia alrededor del eje  $O$ , influidas por las fuerzas mecánicas exteriores. En la posición 1 las placas resultan estar unidas entre sí mediante un conductor inmóvil (línea continua con flechas en los extremos). Como consecuencia de la inducción electrostática, las placas  $C$  y  $D$  en esta posición adquieren cargas negativa y positiva, respectivamente. Durante la posterior rotación se interrumpe su contacto con el conductor y en la posición 2 las placas están aisladas una de otra, pero teniendo cargas de diferentes signos. En la posición 3 se ponen en contacto con los electrodos  $A$  y  $B$ , a los que pasa la carga de  $C$  y  $D$ . Entre los electrodos por el circuito  $BGA$  circula corriente eléctrica. Si existe un par de conductores en rotación  $CD$ , la corriente por el circuito circula por impulsos: dos impulsos por una vuelta. Pero si se coge una cantidad grande de placas  $C$ ,  $D$  que se pongan en contacto con los electrodos  $A$ ,  $B$ , sucesivamente con interrupciones infinitesimas, por el circuito exterior pasa una corriente prácticamente continua. Semejante máquina realiza fem exterior de origen mecánico, que surge debido a las fuerzas mecánicas que aseguran el movimiento de las placas  $C$ ,  $D$  por la circunferencia.

La cadena de transformaciones de la energía en este caso se representa de la siguiente manera. Las fuerzas mecánicas exteriores, al desplazar las placas  $C$  y  $D$ , efectúan cierto trabajo contra las fuerzas del campo electrostático que existe entre las cargas  $Q^+$  y  $Q^-$ , y trasladan las cargas en las placas  $C$  y  $D$  a los electrodos  $A$  y  $B$ . Como consecuencia de ello, la energía del campo electrostático varía, es decir, sucede la transformación de la energía de la forma mecánica a la energía del campo eléctrico. Después esta energía, debido a la circulación de la corriente por el circuito  $BGA$ , se convierte en calor de Joule y otras formas de energía, determinadas por el trabajo de la corriente en el circuito exterior.

**Pilas eléctricas (elementos galvánicos).** Las pilas eléctricas y los acumuladores son fuentes de corriente continua muy difundidas. La corriente eléctrica fue descubierta en 1791 por L. Galvani (1737—1798). No obstante, el científico no supo interpretar correctamente sus ensayos. Lo hizo en 1792 A. Volta (1745—1827). Los elementos de corriente continua, de los que se trata aquí, se denominan pilas eléctricas o elementos galvánicos, en honor de Galvani.

La diferencia de potencial (véase el § 2) surge no sólo habiendo contacto de los sólidos, sino que al estar en contacto los sólidos y líquidos. En ese caso pueden tener lugar reacciones químicas. Por ejemplo, si una placa de zinc  $Zn$  se mete en una solución de ácido sulfúrico  $H_2SO_4$ , el zinc se disuelve (fig. 112). Sin embargo, no son los átomos neutros de zinc los que pasan a la solución, sino que los iones positivos  $Zn^{++}$ , a causa de lo cual la solución adquiere carga posi-

tiva y la placa de zinc, negativa. Entre la solución y la placa surge diferencia de potencial. Para cierto potencial del metal con respecto a la solución, denominada electroquímica, cesa el paso de los iones de zinc a la solución. El depende de las propiedades del metal, del líquido y de la concentración de iones de metal en la solución. Al estar el metal en contacto con el agua, el primero obtiene una carga más negativa que al estar en contacto con la solución de sal que contiene iones de metal. Para una concentración grande de iones en la solución puede ocurrir el proceso inverso durante el cual los iones positivos se precipitan en

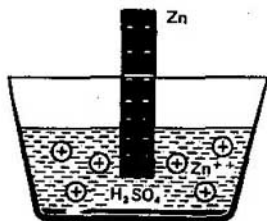


Fig. 112  
Aparición de la diferencia de potencial entre el sólido y líquido

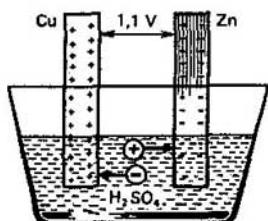


Fig. 113  
Pila de Volta

el metal y éste se carga positivamente. Así, pues, *siendo diferentes las combinaciones de metales, líquidos y concentraciones de los iones, en las soluciones pueden surgir distintos potenciales electroquímicos.*

Puesto que el potencial electroquímico depende de la concentración de iones de metal, se ha acordado tomar una solución que contenga en 1 litro de solución un mol de iones de metal, dividido por la valencia del ion. El potencial químico del metal respecto a semejante solución se llama **potencial electroquímico normal absoluto**. Por ejemplo, para las soluciones en ácido sulfúrico este potencial para Zn es igual a  $-0,5$  V y para Cu,  $+0,6$  V.

Si dos metales distintos se sumergen en la solución, entre ellos surge una diferencia de potencial, igual a la diferencia de sus potenciales electroquímicos. *El conjunto de dos metales y una solución se denomina pila eléctrica (elemento galvánico) y la diferencia de potencial entre los metales, fuerza electromotriz de la pila.*

**Pila de Volta.** Esta consta de placas de zinc y cobre, sumergidas en una solución de ácido sulfúrico (fig. 113). Tomando en consideración los potenciales electroquímicos del zinc y el cobre, deducimos que la fem de la pila de Volta es igual a  $0,6 - (-0,5) \text{ V} = 1,1 \text{ V}$ .

**Zona de acción de las fem exteriores.** No hay que pensar que las fem exteriores aparecen en el espacio entre las placas de zinc y cobre. *En el caso dado existen dos fem exteriores, concentradas en las capas superficiales de contacto de las placas de cobre y zinc con la solución. Estas capas poseen un grosor molecular. En todo el volumen restante de la solución no hay fem exteriores algunas.* Al unir las placas de la pila con un conductor, comienza a circular corriente de la placa

de cobre, que es el electrodo positivo de la pila, a la placa de zinc, que es el electrodo negativo. En la solución entre los electrodos la corriente circula de la placa de zinc a la de cobre. Así, pues, como debe de ser en efecto, las líneas de corriente continua son cerradas.

Examinemos la variación del potencial en un circuito con corriente. En dirección de la corriente el potencial cae en la resistencia óhmica del conductor. La fig. 114 muestra el cambio del potencial por un circuito cerrado con pila de Volta a título de la fuente de fem exterior. Los puntos *A* y *B* corresponden a las capas superficiales de los contactos entre las placas de cobre y zinc y las soluciones en las que actúan fuerzas electromotrices exteriores. Su diferencia

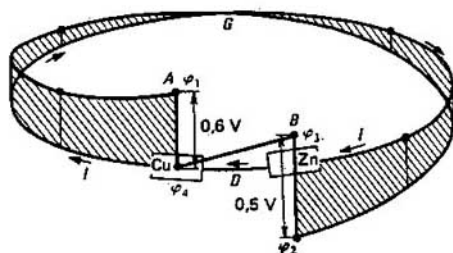


Fig. 114  
Cambio del potencial en un circuito con pila eléctrica

es precisamente la fem exterior de la pila. Es igual a la caída total de potencial en la resistencia óhmica del circuito exterior en la sección *AGB* y en la resistencia óhmica del electrolito en la sección *BDA*. La resistencia óhmica del electrolito se denomina resistencia interna de la pila. Designemos por  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$ ,  $R$  y  $r$  la fem exterior de la pila, la resistencia del circuito exterior y la resistencia interna de la pila, respectivamente. Escribamos la ley de Ohm para todo el circuito como

$$\mathcal{E}_{\text{ext}} = I(R + r). \quad (26.1)$$

La fem exterior de la pila se determina por las propiedades de la pila y no depende de la intensidad de la corriente que circula por ella. De la fórmula (26.1) se ve que la caída de tensión en el circuito exterior ( $U = IR$ ) no es igual a la fuerza electromotriz de la pila y es siempre inferior a ella. Es la tensión entre los bornes de la pila en funcionamiento, cuando por el circuito pasa corriente. Al aumentar la intensidad de corriente, la tensión en el circuito exterior disminuye, con la particularidad de que tanto más, cuanto mayor sea la resistencia interna de la pila. Al hacer uso de la pila, es necesario que la tensión en el circuito exterior dependa lo menos posible de la intensidad de corriente, o sea, de la carga. Por eso una característica importante de la pila es la resistencia interna. Cuanto menor es, tanto mejor es la calidad de la fuente de fem exteriores a igualdad de las demás condiciones.

**Principio de conservación de la energía.** Analicemos el principio de conservación de la energía en el circuito con corriente, mostrado en la fig. 114. Designemos el trabajo del campo eléctrico al moverse la carga  $q$  por un circuito cerrado por  $A_1$  y el trabajo de las fem exteriores por  $A_2$ . El campo eléctrico ejerce un trabajo en las secciones en que el potencial cae desde  $\varphi_1$  hasta  $\varphi_2$  (circuito exterior) y desde  $\varphi_3$  hasta  $\varphi_4$  (a causa de la resistencia óhmica de la solución a la corriente dentro de la pila). El trabajo es igual a

$$A_1 = (\varphi_1 - \varphi_2) q + (\varphi_3 - \varphi_4) q. \quad (26.2)$$

El trabajo de las fem exteriores en las capas de un grosor molecular conduce al aumento de los potenciales desde  $\varphi_4$  hasta  $\varphi_1$  (en la placa de cobre) y desde  $\varphi_2$  hasta  $\varphi_3$  (en la placa de zinc). Por esta razón, el trabajo de las fem exteriores se da mediante la expresión

$$A_2 (\varphi_1 - \varphi_4) q + (\varphi_3 - \varphi_2) q = (\varphi_1 - \varphi_2) q + (\varphi_3 - \varphi_4) q, \quad (26.3)$$

donde la segunda igualdad se obtuvo como consecuencia de la reagrupación de los términos. Comparando (26.2) y (26.3), se ve que

$$A_1 = A_2, \quad (26.4)$$

es decir, el trabajo que se efectúa en el circuito al pasar la corriente, es igual al trabajo de las fem exteriores.

Deduzcamos otra vez más la ley de Ohm (26.1) para todo el circuito, utilizando la ley de Ohm (25.10) para la sección del circuito:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR, \quad \varphi_3 - \varphi_4 = Ir, \quad (26.5)$$

de donde

$$IR + Ir = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_3 - \varphi_4) = (\varphi_1 - \varphi_4) + (\varphi_3 - \varphi_2) = \mathcal{E}_{\text{ext}}. \quad (26.6)$$

**Polarización de la pila.** Al pasar la corriente en el circuito de la pila de Volta, los iones  $\text{Zn}^{++}$  pasan a la solución, donde se unen con los iones negativos de  $\text{SO}_4^-$ , en que a la par con los iones de  $\text{H}_3^{++}$  disocia el ácido sulfúrico. En la solución tiene lugar la reacción  $\text{Zn}^{++} + \text{SO}_4^- = \text{ZnSO}_4$ , cuyos productos se precipitan en forma de sedimento. Los iones positivos de hidrógeno tienden a la placa de cobre, neutralizándose por los electrones de la corriente de conducción en la placa. Como consecuencia, en la superficie de la placa de cobre se forma una película de hidrógeno que, por una parte, aumenta la resistencia interna de la pila, pero por otra parte, crea un potencial electroquímico complementario, dirigido contra el potencial que existía allí antes de formarse la película. Debido a todos estos procesos, la fem de la pila disminuye. Semejantes procesos se denominan polarización de la pila.

**Métodos de despolarización.** Para evitar la caída de fem, se utilizan diversos métodos de despolarización.

1. Utilización de dos líquidos, elegidos de tal manera que en los electrodos no suceda desprendimiento de nuevas sustancias. Para cada electrodo se elige el líquido conveniente. Los líquidos se separan mediante un tabique que,

por una parte, los protege de mezclarse y, por otra, no obstaculiza el intercambio de iones. Verbigracia, en la pila de Daniel en calidad de líquidos se toman el sulfato de cobre  $\text{CuSO}_4$  (vitriolo de cobre) y la solución de  $\text{ZnSO}_4$  (fig. 115), con la particularidad de que en el vitriolo de cobre se sumerge una placa de cobre y en la solución de sulfato de zinc  $\text{ZnSO}_4$ , de zinc. El zinc pasa a la solución del ácido sulfúrico en forma de ion  $\text{Zn}^{++}$ . Los electrones de la placa de cobre pasan a la solución de sulfato de cobre y neutralizan el ion  $\text{Cu}^{++}$ , en definitiva, el cobre se precipita de la solución a la placa de cobre. Los iones  $\text{SO}_4^{--}$  que quedaron en la solución penetran a través del tabique a la otra parte de la pila y se unen con  $\text{Zn}^{++}$ , mientras que el exceso de  $\text{ZnSO}_4$  que se formó a causa de ello, se deposita

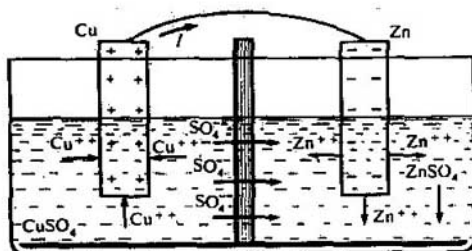


Fig. 115  
Pila de Daniel

en el fondo. De esta manera, al funcionar la pila, no surge polarización alguna, sólo sucede el empobrecimiento de la solución de vitriolo azul  $\text{CuSO}_4$ . Se necesita compensarlo.

2. Utilización de fuertes oxidantes que enlazan el hidrógeno y oxígeno, formando agua.

**Acumuladores.** Es una pila eléctrica en la que las sustancias que se gastan durante el trabajo en calidad de fuente de corriente, se acumulan si se hace pasar a través del acumulador corriente de una fuente constante. Semejante procedimiento se llama carga del acumulador. El más difundido es el acumulador de plomo, que consta de dos placas de plomo, metidas en una solución de ácido sulfúrico. En los electrodos se forma sulfato de plomo  $\text{PbSO}_4$  con el cual se satura toda la solución. Al dejar pasar la corriente por el acumulador durante su carga, va acompañado por la oxidación del plomo del electrodo, unido con el polo positivo del dispositivo de carga, hasta peróxido de plomo  $\text{PbO}_2$ , y la reducción del otro electrodo hasta plomo puro. Así pues, el acumulador cargado tiene una placa con peróxido de plomo  $\text{PbO}_2$  y la otra con plomo puro y un electrolito que consta de una solución de  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , saturada de sulfato de plomo sulfúrico  $\text{PbSO}_4$ . Al funcionar el acumulador, su placa con peróxido de plomo  $\text{PbO}_2$  es el polo positivo y se reduce paulatinamente hasta formarse  $\text{PbSO}_4$ . La placa negativa que consta de plomo puro, al funcionar el acumulador, se cubre

poco a poco de sulfato de plomo. Como consecuencia de ello, el acumulador se descarga. La fem del acumulador de plomo para la carga máxima es aproximadamente de 2,7 V. En cambio, ya durante una descarga pequeña, cae hasta 2,2 V y a este nivel se conserva durante largo tiempo, disminuyendo lentamente sólo trabajando el acumulador. La fem mínima admisible, para la cual la carga restablece totalmente las propiedades del acumulador, se considera igual a 1,85 V. Al descargarse hasta menores fem, el acumulador se estropea.

Una característica importante del acumulador es su capacidad, determinada como la carga total que puede entregar el acumulador durante la descarga y expresada en amperio-horas.

Se llama fem exterior a una fuerza de origen no electrostático que efectúa la división de las cargas.

El trabajo que se realiza en el circuito al pasar la corriente eléctrica, es igual al trabajo de las fem exteriores. La densidad de la corriente continua por la sección del conductor no está distribuida, en general, uniformemente. En la superficie del conductor con corriente existen cargas superficiales que son las fuentes del campo eléctrico que hay en el conductor y que asegura la presencia de la corriente continua.

En distintas secciones del conductor las cargas superficiales pueden tener signos diferentes. El papel de las cargas en los polos de las fuentes de fem exteriores no consiste en crear en todos los conductores directamente un campo eléctrico correspondiente, sino que en asegurar una distribución de las cargas superficiales en los conductores que forma el campo eléctrico necesario dentro de ellos.

Las cargas volumétricas surgen sólo en conductores heterogéneos.

## § 27. Forma diferencial de la ley de Joule—Lenz.

### Trabajo que se efectúa al pasar la corriente y potencia desarrollada

*Se introducen las fórmulas para el trabajo que se efectúa al pasar la corriente y para la potencia desarrollada. Se da la forma diferencial de la ley de Joule—Lenz. Se describe el cuadro electrónico clásico de la electroconductibilidad y se discuten sus defectos. Se exponen los rasgos generales de la interpretación cuántica de la electroconductibilidad.*

Trabajo que se efectúa al pasar la corriente. Potencia. Si entre los puntos con una diferencia de potencial  $U$  se traslada una carga  $dQ$ , se efectúa un trabajo

$$dA = dQU. \quad (27.1)$$

Sea que por el conductor circula una corriente  $I$ . Examinemos la sección del conductor, entre cuyos extremos existe una diferencia de potencial  $U$ . En el transcurso del tiempo  $dt$  en la sección se desplaza una carga  $dQ = I dt$  y, por lo tanto, el trabajo realizable es

$$dA = I U dt. \quad (27.2)$$



Por consiguiente, la potencial que desarrolla la corriente en dicha sección se determina por la fórmula.

$$P = dA/dt = IU. \quad (27.3)$$

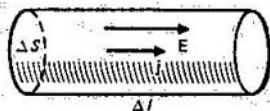


Fig. 116  
Para deducir la ley de Joule  
Lenz en forma diferencial

La forma de energía que se desprende en este caso, depende de la naturaleza de los factores físicos que determinan la caída de potencial. La caída de potencial en la resistencia óhmica de los cables se acompaña por el desprendimiento de calor, la caída de tensión en los bornes del motor de corriente continua se determina por la realización de trabajo mecánico, etc. La fórmula (27.3) da la potencial total que desarrolla la corriente en la sección con la caída de potencial  $U$ . Si toda la caída de potencial transcurre en la resistencia óhmica del conductor, entonces, según la ley de Ohm,  $U = IR$ , donde  $R$  es la resistencia de la sección. En este caso toda la energía se desprende en forma de calor con una potencia

$$P = IU = I^2R, \quad (27.4)$$

La fórmula (27.4) expresa la ley de Joule — Lenz. Fue descubierta en 1841 por J. P. Joule (1818—1889) e investigada posteriormente con más detalle por F. A. Lenz.

Forma diferencial de la ley de Joule — Lenz. Aplicando la ley (27.4) a un cilindro infinitésimo (fig. 116), cuyo eje coincide con la dirección de la corriente, obtenemos

$$\Delta p = (j\Delta S)^2 \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}, \quad (27.5)$$

donde  $I = j\Delta S$ ,  $j$  es la densidad de la corriente. La resistencia de un cilindro infinitésimo es igual a  $\Delta R = \Delta l / (\gamma\Delta S)$ . Tomando en consideración que  $\Delta S\Delta l = \Delta V$  es el volumen del cilindro, de (27.5) hallamos

$$P_V = \Delta P / (\Delta l \Delta S) = j^2 / \gamma, \quad (27.6)$$

donde  $P_V$  es la densidad volumétrica de la potencia térmica que se desprende en el conductor, es decir, del calor que se forma en  $1 \text{ m}^3$  de conductor por 1 s. La fórmula (27.6) es la forma diferencial de la ley de Joule—Lenz, ya que todas las magnitudes se refieren a un mismo punto.

Haciendo uso de la ley de Ohm en forma diferencial, transformemos (27.6):

$$P_V = j^2 / \gamma = \gamma E^2 = j \cdot E. \quad (27.7)$$

Cualquiera de estas igualdades, cuando en el primer miembro figura  $P_V$ , es la escritura de la ley de Joule—Lenz en forma diferencial. A pesar de que la fórmula (27.6) fue deducida para una sección cilíndrica infinitésima del conductor, su validez no está relacionada con la forma de un volumen infinita-

mente pequeño, ya que todas las magnitudes que participan en ella, dependen exclusivamente de sus valores en el punto y no son funciones de otros factores.

**Fuente de energía para el trabajo de la corriente eléctrica.** La caída del potencial en el circuito con corriente se compensa por la correspondiente elevación del potencial que surge debido a la acción de las fuerzas electromotrices exteriores sobre las cargas (véase el § 26). Al pasar la corriente, se efectúa cierto trabajo y se libera energía, por ejemplo, en forma de calor. Las fuerzas electromotrices exteriores ejecutan trabajo sobre las cargas, comunicándoles una energía correspondiente. Por eso resulta que *todo el trabajo que realiza la corriente, se efectúa a cuenta de la energía de las fuerzas electromotrices exteriores.*

**Dedución de la ley de Ohm, partiendo del cuadro electrónico de la electroconductibilidad.** El mecanismo de la circulación de la corriente por un conductor y su calentamiento en los márgenes de las representaciones clásicas tienen el siguiente aspecto.

El electrón libre se acelera por el campo que existe dentro del conductor. La ley de Newton para el movimiento del electrón es:

$$ma = eE, \quad (27.8)$$

donde  $m$ ,  $a$ ,  $e$  son la masa, la aceleración y la carga del electrón, respectivamente. El movimiento real del electrón es muy complicado, puesto que los electrones se encuentran en un movimiento térmico caótico. Bajo la influencia de un campo exterior todos ellos obtienen una misma aceleración, adquiriendo también una velocidad complementaria en una misma dirección. En definitiva, se forma un movimiento ordenado de los electrones, es decir, corriente eléctrica. En este caso nos interesa sólo el mencionado movimiento coordinado de los electrones que se sobrepone en su movimiento térmico. En su movimiento los electrones actúan recíprocamente entre sí y con los átomos de la red cristalina del conductor. Al interactuar con los átomos de la red cristalina, los electrones intercambian una parte pequeña de su energía con ellos. Dicha energía es, en término medio, la energía adquirida por los electrones a cuenta del campo eléctrico, ya que en ausencia del campo eléctrico, los electrones libres y los átomos se encuentran en equilibrio térmico. Este cuadro complejo de cómo los electrones adquieren la energía, influenciados por el campo eléctrico y su transmisión posterior a los átomos al actuar recíprocamente, puede imaginarse de la siguiente manera. Supongamos que el electrón, conforme a la ecuación (27.8), se acelera durante un tiempo  $\tau$ , luego choca con el átomo y le entrega toda la energía cinética que recibió. Después empieza de nuevo a acelerarse, al cabo de cierto tiempo  $\tau$  de nuevo choca con el átomo, etc., es decir,  $\tau$  es el tiempo de relajamiento de la distribución desequilibrada de los electrones hacia el equilibrio térmico con la red cristalina. En el modelo se supone que en el transcurso de este tiempo la energía cinética media de los electrones crece bajo la influencia de un campo eléctrico exterior, más de su energía térmica media, luego el exceso de la diferencia entre ambas energías se transmite mediante la red cristalina y se restablece de nuevo el equilibrio térmico. En realidad, claro que este proceso sucede continuamente y su carácter escalonado se introdujo sólo para simplificar los cálculos matemáticos. El tiempo  $\tau$  caracteriza la velocidad de retorno

al equilibrio térmico del conjunto de electrones y de la red cristalina del conductor si por ciertas razones (pero no sólo por el campo eléctrico exterior) el conjunto de electrones pierde ese equilibrio.

En este cuadro el resultado de numerosas transmisiones de la energía del electrón a los átomos se sustituye por una. Por eso  $\tau$  tiene el sentido de lapso medio entre las colisiones. Si  $l$  es la longitud media del recorrido entre las colisiones,  $v$ , la velocidad media del electrón, determinada por su movimiento térmico, según la definición,

$$\tau = l/v. \quad (27.9)$$

El camino que pasa el electrón del estado de reposo, acelerándose por el campo eléctrico, es igual a

$$s = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{eE}{m_e} \tau^2. \quad (27.10)$$

Es, en término medio, el camino de desplazamiento del electrón hacia la acción del campo eléctrico durante el tiempo  $\tau$  entre las colisiones. El desplazamiento coordinado se determina por la deriva de los electrones con una velocidad

$$v_{\text{der}} = s/\tau = eEl/(2m_e v). \quad (27.11)$$

La velocidad de la deriva es inversamente proporcional a la frecuencia  $v/l$  de las colisiones y, por tanto, disminuye al subir la temperatura.

Si  $n$  es la concentración de electrones,

$$j = env_{\text{der}} = e^2 l n E / (2m_e v). \quad (27.12)$$

Comparando (27.12) con la ley de Ohm  $j = \gamma E$ , hallamos la siguiente expresión para la conductividad eléctrica:

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{e^2 l n}{m_e v}. \quad (27.13)$$

Así pues, se obtiene la dependencia correcta entre la densidad de corriente y la intensidad del campo eléctrico, asimismo la expresión de la conductividad eléctrica por medio de la característica del movimiento de los electrones libres.

Deducción de la ley de Joule—Lenz partiendo de la teoría electrónica de la electroconductibilidad. La velocidad que pierde el electrón al chocar es

$$v_t = a\tau = \frac{eE}{m_e} \frac{l}{v}. \quad (27.14)$$

Por eso a los átomos durante cada colisión se les transmite la energía cinética

$$W_{\text{cin}} = \frac{m_e v_t^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^2 E^2 l^2}{m_e v^2}, \quad (27.15)$$

que se adquiere entre las colisiones.

La frecuencia de las colisiones de cada electrón con los átomos es igual a  $v/l$ , y la frecuencia de las colisiones de  $n$  electrones con los átomos,  $nv/l$ . Por esta razón, la densidad volumétrica de la potencia del desprendimiento de ca-

lor se da mediante la expresión

$$P_v = W_{cin} \frac{nv}{l} = \frac{1}{2} \frac{e^2 n l}{m_e v} E^2 = \gamma E^2, \quad (27.16)$$

donde se tienen en cuenta las igualdades (27.13) y (27.15). De esta manera, partiendo de la teoría electrónica de la electroconductibilidad, se obtiene la expresión correcta para la ley de Joule—Lenz en forma diferencial.

**Defectos de la teoría clásica de la electroconductibilidad.** La teoría clásica de la electroconductibilidad es muy evidente y ofrece una dependencia correcta entre la densidad de corriente y la cantidad de calor desprendido respecto a la intensidad del campo. *En cambio, ella no conduce a resultados cuantitativos correctos.* Las principales diferencias de la teoría y el experimento consisten en lo siguiente:

1) para obtener de la fórmula (27.13) valores correctos de  $\gamma$  es necesario considerar  $l$  muy grande ( $l$  supera miles de veces las distancias interatómicas en el conductor). Es difícil comprender en los márgenes de las representaciones clásicas la posibilidad de recorridos libres tan grandes;

2) el experimento para la dependencia entre la conductividad  $\gamma$  y la temperatura conduce a la ley  $\gamma \sim 1/T$ . Es imposible explicarla mediante la fórmula (27.13), ya que la teoría cinética de los gases nos da  $v \sim \sqrt{T}$ . En el cuadro clásico de interacción no se puede admitir la dependencia  $l \sim 1/\sqrt{T}$ ;

3) según el teorema de la equipartición de la energía respecto a los grados de libertad, es de esperar una contribución muy elevada por parte de los electrones libres en la capacidad térmica de los conductores que no se observa en los ensayos.

**Rasgos principales de la representación cuántica de la electroconductibilidad.** Sólo la teoría cuántica permitió superar las dificultades recién mencionadas, de las representaciones clásicas. *La teoría cuántica toma en consideración las propiedades ondulatorias de las micropartículas.* La característica más importante del movimiento ondulatorio es la capacidad de contornear los obstáculos merced a la difracción. Como consecuencia, en su movimiento los electrones aparentan contornear los átomos sin chocar con ellos y las longitudes de su recorrido libre pueden ser bastante grandes. Dado que los electrones se someten a la estadística de Fermi—Dirac, en la formación de la capacidad calorífica electrónica pueden participar sólo una parte insignificante de electrones en las proximidades del nivel de Fermi. Por esta razón, la capacidad calorífica electrónica de los conductores es insignificante. La solución del problema cuántico sobre el movimiento del electrón en un conductor metálico conduce a la dependencia  $\gamma \sim 1/T$ , como en realidad se observa. Así pues, sólo en los márgenes de la mecánica cuántica se construyó una teoría cuantitativa de electroconductibilidad sin contradicción alguna.

El trabajo que se efectúa al pasar la corriente no es consecuencia de la transformación de la energía cinética de los electrones en otras formas de energía. El portador de la energía que se gasta para realizar el trabajo no son los electrones, sino el campo electromagnético. Sólo en el caso particular de expulsión del calor de Joule la energía cinética de los electrones

es la forma intermedia de energía, mediante la cual la energía del campo electromagnético se convierte en calor. En otros casos la energía cinética de los electrones no desempeña ningún papel.

¿Qué sentido tiene el tiempo de recorrido libre en la teoría clásica de la electroconductibilidad?

¿Cuáles son las dificultades principales de la teoría clásica de la electroconductibilidad?

¿De qué manera se superan en rasgos generales?

## § 28. Circuitos lineales. Leyes de Kirchhoff

*Se enuncian las reglas para calcular los circuitos lineales.*

**Circuito cerrado aislado.** En el § 26 ya se examinó este caso, representando su resultado mediante la fórmula (26.1): *si en un circuito cerrado aislado existe una fuente de fem exteriores, la intensidad de corriente en el circuito debe ser tal que la caída sumaria de tensión en la resistencia exterior y en la resistencia interna de la fuente sea igual a la fem exterior de la fuente.* Si hay varios fuentes de fem exteriores, es necesario tomar su suma con signos, tomando en calidad de fem positiva la fem de una dirección determinada.

Para no confundirse de signos es cómodo hacer lo siguiente. Tomamos como dirección positiva o bien el rodeo del circuito en sentido de las agujas del reloj, o bien en sentido contrario a las agujas del reloj. En la fig. 117 se toma el rodeo positivo en sentido de las agujas del reloj. Las fuerzas electromotrices de las pilas se designan por  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ . De antemano no se sabe en qué dirección circula la corriente. Por eso elegimos cualquier dirección de la corriente, por ejemplo, en la fig. 117 ella coincide con la dirección positiva de rodeo.

Ahora es necesario quedar de acuerdo respecto a los signos. Se considera que el signo de la fem es positivo si al moverse por el circuito en sentido positivo se choca primero con el polo negativo de la fuente. Pero si se encuentra primero el polo positivo, la fem correspondiente tendrá el signo negativo. El signo de la intensidad de corriente se considera positivo si la dirección de la corriente coincide con la del rodeo. En caso contrario, el signo es negativo. De esta manera, tanto la fem, como la intensidad de corriente son magnitudes algebraicas que pueden obtener valores tanto positivos, como negativos. Ahora no será difícil generalizar la ecuación (26.1) para una cantidad arbitraria de fuentes de fem exteriores en un circuito cerrado aislado: *el producto del valor algebraico de la intensidad de corriente por la suma de las resistencias exteriores e internas en todas las secciones del circuito cerrado es igual a la suma de los valores algebraicos en el circuito cerrado:*

$$\pm I \sum_k R_k = \sum_i \pm \mathcal{E}_i, \quad (28.1)$$

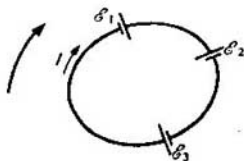


Fig. 117  
Circuito cerrado aislado

donde  $\pm$  delante de  $I$  y de  $\mathcal{E}_i$  significa que el signo debe elegirse conforme a las reglas citadas más arriba. Por ejemplo, para el caso representado en la fig. 117 la ecuación (28.1) tiene la forma

$$I(R + r_1 + r_2 + r_3) = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3, \quad (28.2)$$

donde  $r_1, r_2, r_3$  son las resistencias internas de las fem exteriores y  $R$ , la impedancia de todas las secciones del circuito fuera de las fuentes. Si para la misma

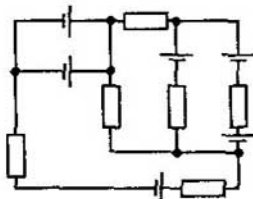


Fig. 118  
Circuito eléctrico

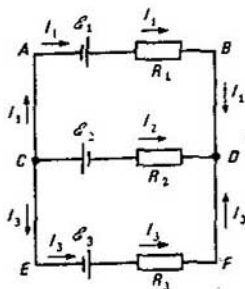


Fig. 119  
Para determinar los circuitos cerrados y los nudos del circuito derivado

dirección de rodeo, considerada positiva, la flecha que representa la corriente  $I$  estuviese orientada de manera contraria, en lugar de la ecuación (28.2) se obtendría la siguiente:

$$-I(R + r_1 + r_2 + r_3) = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3. \quad (28.3)$$

La ecuación (28.3) hay que resolverla respecto a  $I$ . Si en un caso concreto  $I$  es positiva, la corriente circula como muestra la flecha, pero si  $I$  es negativa, en sentido contrario.

**Circuitos derivados.** En muchos casos, importantes para la práctica, los circuitos eléctricos son más complejos como, por ejemplo, en la fig. 118. En cambio, en el circuito de cualquier complejidad participan elementos de dos tipos sencillos:

- 1) nudos en los que se encuentran más de dos conductores (fig. 119; puntos  $C$  y  $D$ );
- 2) circuitos cerrados (fig. 119; circuitos  $ABDCA$ ,  $CDFEC$ ,  $ABFEA$ ).

**Leyes de Kirchhoff.** Las leyes de Kirchhoff sirven para componer un sistema de ecuaciones del que se hallan las intensidades de corriente para el circuito derivado de cualquier grado de complejidad. *Son la inscripción de la ley de Ohm (28.1) para cada uno de los circuitos cerrados y del principio de conservación de la carga en cada nudo.* Las reglas de los signos para las intensidades de corriente y para la fem en cada uno de los circuitos cerrados son las mismas que para el

circuito aislado [véase (28.1)]. La dirección del rodeo positivo para todos los circuitos se elige la misma. El principio de conservación de la carga en los nudos exige que la suma de las intensidades de corrientes que entran en el nudo, sea igual a la suma de las intensidades de corrientes que salen de éste, o hablando de otra manera, la suma de los valores algebraicos de las intensidades de corrientes en el nudo debe ser nula. Al componer la suma de las intensidades de corrientes que muestran las flechas con la dirección desde el nudo, se cogen, por ejemplo, con el signo menos, mientras que las intensidades de las corrientes que dan las flechas con dirección hacia el nudo, con el signo más. Claro que se pueden tomar los signos contrarios, ello no cambia las ecuaciones correspondientes, solamente es importante aplicar una misma regla para todos los nudos.

Así pues, las leyes de Kirchhoff dicen que:

1) la suma de los valores algebraicos de las intensidades de corrientes en cada nudo es nula:

$$\sum_k (\pm) I_k = 0. \quad (28.4)$$

2) la suma de los productos de los valores algebraicos de las intensidades de corrientes por la resistencia de las secciones correspondientes de cada uno de los circuitos cerrados es igual a la suma de los valores algebraicos de las fem exteriores en cada circuito cerrado:

$$\sum_k \pm I_k R_k = \sum_i (\pm) \mathcal{E}_i; \quad (28.5)$$

Puede demostrarse que el sistema de ecuaciones, obtenido en este caso, para cualquier circuito derivado es completo y permite determinar todas las corrientes.

Todas estas leyes las dedujo G. R. Kirchhoff (1824—1887). El científico formuló la solución general del problema sobre los circuitos derivados de corriente continua en 1847, a pesar de que las propias leyes las enunció ya en 1845. Apliquemos las leyes de Kirchhoff al circuito mostrado en la fig. 119.

1. Según la primera ley de Kirchhoff:

a)  $-I_1 - I_2 - I_3 = 0$  (nudo C);

b)  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$  (nudo D).

2. Según la segunda ley de Kirchhoff:

a)  $I_1 r_1 + I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_2 r_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$  (circuito ABDCA).

b)  $I_2 R_2 + I_2 r_2 - I_3 R_3 - I_3 r_3 = -\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$  (circuito CDFEC).

c)  $I_1 r_1 + I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_3 r_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$  (circuito ABFEA).

Aquí  $r_1, r_2, r_3$  son las resistencias internas de las fuentes de las fem exteriores. Las ecuaciones para los nudos coinciden, pero sólo dos ecuaciones de las tres según los circuitos, son independientes. Verbigracia, si se suman las dos primeras ecuaciones miembro a miembro, se obtiene la tercera. Así pues, existe un sistema de tres ecuaciones para tres intensidades incógnitas de corriente  $I_1, I_2, I_3$ . Después de resolver este sistema, hallamos las intensidades de co-

riente y sus direcciones verdaderas. Pero incluso sin resolver dicho sistema puede decirse: en la fig. 119 nos hemos equivocado con seguridad en la elección de las direcciones de la corriente, puesto que en los nudos para las direcciones de corriente elegidas el principio de conservación de la carga no puede cumplirse a ciencia cierta: en el nudo *C* debe almacenarse la carga negativa y en el nudo *D*, la positiva. Pero eso no nos debe preocupar ya que la solución nos dice automáticamente cuales deben ser las direcciones de las corrientes.

De esta manera el ejemplo muestra que si se escriben las leyes de Kirchhoff para todos los circuitos y todos los nudos, resultan más ecuaciones que las necesarias, ya que no todas las ecuaciones son independientes. Para no complicar el trabajo es indispensable no escribir las ecuaciones sobrantes. Con ese fin se puede guiar de las siguientes reglas. Al escribir la siguiente ecuación para los circuitos cerrados es necesario fijarse de que ella contenga por lo menos una magnitud que no entró en las ecuaciones anteriores; si todas las magnitudes ya participaron en las ecuaciones anteriores, dicha ecuación es sobrante. Hacemos lo mismo al escribir las ecuaciones para los nudos. Por ejemplo, arriba en las ecuaciones para la segunda ley de Kirchhoff no se debía escribir la ecuación *c*) ya que todas las magnitudes que participan están en las ecuaciones *a*) y *b*) En las ecuaciones de la primera ley de Kirchhoff la ecuación *b*) es sobrante ya que todas las magnitudes en ella participan en la ecuación *a*). El posterior control de la veracidad del sistema escrito de ecuaciones consiste en constatar su completitud, o sea, la cantidad de ecuaciones debe ser igual a la cantidad de incógnitas.

¿Cómo se eligen los signos en las reglas de Kirchhoff?

¿De qué razones hay que guiarse para no escribir ecuaciones sobrantes de Kirchhoff?

## § 29. Corrientes en un medio continuo

*Se expone el método de cálculo de las intensidades de corrientes en medios continuos.*

**Planteamiento del problema.** La corriente eléctrica puede existir no sólo en los conductores. Verbigracia, el suelo (sobre todo el húmedo) es conductor de la corriente eléctrica. Se pregunta ¿qué resistencia a la corriente eléctrica afronta el suelo si a cierta distancia uno de otro se sumergen en él los extremos de dos conductores, unidos con los polos de la fuente de fem? O de otra manera, ¿cuál es la resistencia de una chapa metálica voluminosa a la que se le sueldan dos conductores que provienen de los polos de la fuente de fem? A título de resistencia de la chapa voluminosa o del medio a la corriente eléctrica se toma la relación entre la diferencia de potencial que existe entre los electrodos que suministran la corriente, y la intensidad de corriente. A pesar de que la conductividad del medio se conoce, el cálculo de la resistencia no es una tarea fácil. Pero es fácil



medir dicha resistencia por métodos estándar, hallando la diferencia de potencial y la intensidad de corriente.

**Deducción de la fórmula.** Examinemos un medio continuo homogéneo con electrodos, sumergidos en él, entre los cuales circula corriente eléctrica. Las líneas de densidad de corriente coinciden con las de la intensidad del campo eléctrico en el medio, ya que

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (29.1)$$

La intensidad de corriente a través de la superficie cerrada  $S$  que rodea uno de los electrodos, es igual a

$$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \gamma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (29.2)$$

Ahora imaginémosnos que el medio conductor se oprime y los electrodos se consideran como armaduras del condensador. Según la definición de la capacidad  $C$  del condensador tenemos

$$Q = CU, \quad (29.3)$$

donde  $Q$  es la carga del electrodo y  $U$ , la diferencia de potencial entre los electrodos. Según el teorema de Gauss, obtenemos

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0, \quad (29.4)$$

donde  $\mathbf{E}$  es la intensidad del campo del condensador y  $S$ , la misma superficie que en (29.2). En cambio, debido a la unicidad de la solución de los problemas de la electrostática, la diferencia de potencial dada entre los electrodos prefijados determina unívocamente la intensidad del campo. Por lo tanto, la intensidad del campo en un medio conductor, por el que circula corriente [véase (29.2)], coincide con la intensidad del campo que se crea en el vacío entre los mismos electrodos para la misma diferencia de potencial [véase (29.4)]. Por eso, de (29.2) y (29.4) teniendo en cuenta (29.3), sacamos la conclusión de que

$$I = \gamma Q/\epsilon_0 = \gamma CU/\epsilon_0. \quad (29.5)$$

Entonces la resistencia del medio homogéneo a la corriente se da mediante la fórmula

$$R = U/I = \epsilon_0/(\gamma C). \quad (29.6)$$

Señalemos que *todos estos razonamientos no pueden aplicarse a un medio heterogéneo*, puesto que en éste al pasar corriente, se forman cargas volumétricas que son fuentes de un campo eléctrico. En este caso el campo eléctrico en el medio, al pasar corriente continua, no coincide con el campo en el vacío, a pesar de que los electrodos están bajo la misma diferencia de potencial.

**Condiciones de aplicación de (29.6).** La fórmula (29.6) permite calcular la resistencia del medio a la corriente si se conoce la capacidad del condensador, cuyas armaduras sirven de electrodos. Los resultados se obtienen tanto más exactos, cuanto mejor se observa la constancia del potencial de los electrodos, al

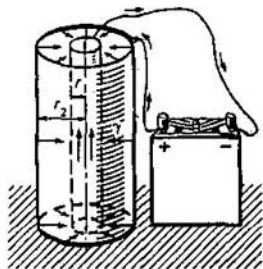


Fig. 120  
Para calcular la resistencia del medio entre electrodos coaxiales

Para calcular la resistencia del medio entre electrodos coaxiales, se necesita calcular la resistencia del medio que rodea al conductor interno. La corriente en el medio circula en todo el volumen del medio por los radios entre el alma central y la envoltura. Dado que la capacidad del condensador cilíndrico  $C = 2\pi\epsilon_0/\ln(r_2/r_1)$ , la resistencia del medio es igual a

$$R = \ln(r_2/r_1)/(2\pi l\gamma). \quad (29.7)$$

**Medio heterogéneo.** Si la conductividad no es constante, el problema se complica considerablemente, ya que surgen cargas volumétricas y es necesario tomar en consideración el campo eléctrico que originan.

Examinemos como ejemplo las corrientes eléctricas en la atmósfera. Como muestra el experimento, cerca de la superficie terrestre existe un campo eléctrico con una intensidad  $E^{(v)} \approx -100$  V/m, dirigida por el radio respecto al centro de la Tierra. La Tierra es un conductor bastante bueno y por eso puede considerarse que en ella hay carga superficial

$$\sigma_0 = \epsilon_0 E^{(v)} = -8,85 \cdot 10^{-10} \text{ C/m}^2. \quad (29.8)$$

Las mediciones muestran que la conductividad de la atmósfera terrestre aumenta con la altura. La causa principal consiste en la acción de los rayos cósmicos que provoca la ionización. En alturas grandes la fuente fundamental de ionización resulta la radiación del Sol. La atmósfera puede considerarse un conductor prácticamente ideal a la altura de cerca de 50 km. Como muestran las mediciones, la dependencia entre la conductividad y la altura puede representarse con suficiente exactitud como

$$\gamma(r) = \gamma_0 + A(r - r_0)^2. \quad (29.9)$$

Aquí  $r_0$  es el radio de la Tierra;  $r$ , la distancia desde el centro de la Tierra hasta el punto en cuestión;  $\gamma_0 = \gamma(r_0)$ , la conductividad de la superficie terrestre;

A, una constante, con la particularidad de que

$$\gamma_0 = 3 \cdot 10^{-14} \text{ S/m}, \quad (29.10)$$

$$A = 0,5 \cdot 10^{-20} \text{ S/m}^3. \quad (29.11)$$

En término medio, el campo en la atmósfera de la Tierra es estacionario y esféricamente simétrico. Por eso la ecuación de continuidad para la densidad de la corriente adquiere la forma

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_r) = 0, \quad (29.12)$$

de donde

$$j_r(r) = j_0 r_0^2 / r^2, \quad (29.13)$$

donde  $j_0$  es la densidad de corriente en la superficie terrestre ( $r = r_0$ ), igual a

$$j_0 = \gamma_0 E^{(0)} = -3 \cdot 10^{-12} \text{ A/m}^2. \quad (29.14)$$

Puesto que el radio de la Tierra  $r_0 \approx 6 \cdot 10^6$  m, la intensidad de la corriente desde la atmósfera a la Tierra es igual a  $I = |j_0| 4\pi r_0^2 \approx 1400$  A. La intensidad del campo eléctrico en la atmósfera a la distancia  $r$  desde el centro de la Tierra es

$$E_r = \frac{j_r(r)}{\gamma(r)} \quad (29.15)$$

y por eso la diferencia de potencial  $U$  entre la superficie terrestre y la atmósfera superior, cuya conductividad es prácticamente infinita, se determina por la fórmula

$$U = - \int_{r_0}^{\infty} E_r dr = - j_0 r_0^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \gamma(r)}. \quad (29.16)$$

Aquí la zona de integración se amplía hasta el infinito, ya que  $\gamma(r)$  a alturas mayores que unos 50 km tiende al infinito, mientras que el integrando a cero. No obstante, también puede obtenerse una precisión suficiente durante el cálculo, tomando para  $\gamma$  la expresión (29.9). En este caso la contribución en la integral de parte de la zona de integración para  $r > r_0 + 50$  km es muy pequeño en comparación con la contribución de la zona de integración desde  $r_0$  hasta  $r_0 + 50$  km y se puede menospreciar. Por eso en lugar de (29.16) obtenemos

$$U = - j_0 r_0^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 [\gamma_0 + A(r-r_0)^2]}. \quad (29.17)$$

Esta integral se calcula fácilmente en funciones elementales, pero el resultado es bastante voluminoso, por lo que aquí no se cita. Con suficiente precisión hasta una magnitud del orden de  $[\gamma_0 / (r_0^2 A)] \ll 1$ , la integral puede representarse como

$$U = - \frac{j_0}{A r_0} \left[ 1 + \ln \frac{\gamma_0}{A r_0^2} + \frac{\pi r_0}{2} \sqrt{\frac{A}{\gamma_0}} \right]. \quad (29.18)$$

Poniendo en (29.18) los valores de  $j_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $A$ , de las expresiones (29.14), (29.10) y (29.11), hallamos  $U \approx 400$  kV.

Merced a la corriente que circula constantemente por la atmósfera de una intensidad cerca de 1400 A, esa diferencia de potencial debe disminuir y la carga superficial terrestre, neutralizarse. El tiempo de relajamiento para el mencionado proceso tiene el orden de  $\tau = \epsilon_0/\gamma_0 \approx 300$  s. En cambio, en término medio, tanto la intensidad de la corriente, como la diferencia de potencial son estacionarios. Por eso existen causas que mantienen dicho carácter estacionario. Esas causas son principalmente los procesos no estacionarios en la atmósfera, tales como las tempestades, tormentas, etc.

Las propiedades más importantes de la puesta a tierra de las líneas de transmisión es la independencia entre la resistencia y la distancia entre los electrodos. Las secciones del medio que limitan directamente con los electrodos contribuyen principalmente en la resistencia.

La fórmula que expresa la resistencia del medio a través de la capacidad del condensador, cuyas armaduras son los electrodos, es válida sólo a condición de que en presencia de la corriente el potencial en todos los puntos de cada una de las armaduras sea continuo con una precisión suficientemente elevada y en el medio no surjan cargas volumétricas.

Para ello la conductancia específica del material de los electrodos debe superar bastante la del medio y este último tiene que ser eléctricamente homogéneo.

¿En que consiste la condición de aplicación de la fórmula para la resistencia del medio entre los electrodos por medio de la capacidad del condensador que forman los electrodos?

### § 30. Puesta a tierra de las líneas de transmisión

*Se aclara la base física de la posibilidad de puesta a tierra y se estudian las exigencias a este proceso.*

**Planteamiento del problema.** Dado que la conductividad eléctrica del terreno es bastante considerable, surge la interrogante sobre el empleo de la tierra a título de conductor de la corriente eléctrica. El circuito eléctrico en este caso se da en la fig. 121 ( $A$  y  $B$  son los electrodos, enterrados en la tierra). Está claro que así puede reducirse el gasto de cables aproximadamente el doble.

**Cálculo de la resistencia.** Hallemos la resistencia de un medio continuo, considerando que los electrodos son esferas de radios  $r_0$ . Designemos la distancia entre los centros de los electrodos por  $d$ . Para simplificar los cálculos supongamos que el medio es ilimitado (fig. 122) y la carga se distribuye en los electrodos de manera esféricamente simétrica.

Sea  $x$  la distancia desde el centro del electrodo izquierdo hasta cierto punto que yace en la línea que une los centros de los electrodos. La intensidad del campo en este punto es

$$E = E_{(+)} + E_{(-)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right). \quad (30.1)$$

La diferencia de potencial entre los electrodos

$$\begin{aligned} U &= \int_{r_0}^{d-r_0} E dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{x} + \frac{1}{(d-x)} \right]_{r_0}^{d-r_0} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{d-r_0} + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{d-r_0} \right). \end{aligned} \quad (30.2)$$

En la mayoría de los casos prácticamente importantes la distancia entre los electrodos es mucho mayor que las dimensiones de los electrodos, es decir,



Fig. 121  
Circuito de puesta a tierra de la línea de transmisión

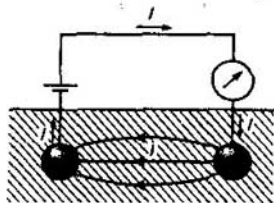


Fig. 122  
Para calcular la resistencia del medio para electrodos esféricos

$d \gg r$ . Por eso la igualdad (30.2) toma el aspecto

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0}. \quad (30.3)$$

Basándonos en lo dicho en el § 29, tenemos

$$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \gamma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \gamma Q / \epsilon_0, \quad (30.4)$$

donde  $I$  es la intensidad de la corriente en el medio y  $S$ , la superficie cerrada que rodea uno de los electrodos. Partiendo de (30.3) y (30.4), para la resistencia del medio obtenemos

$$R = U/I = (2\pi\gamma r_0)^{-1}. \quad (30.5)$$

La propiedad más importante de la resistencia en (30.5) es su independencia de la distancia entre los electrodos. Desde el punto de vista físico eso se explica por el hecho de que al aumentar la distancia entre los electrodos crece respectivamente el área eficaz del medio por el que circula la corriente. El aumento de la distancia entre los electrodos aumenta la resistencia, mientras que el aumento del área, la disminuye. Como muestra la fórmula (30.5) estos dos factores se compensan prácticamente y la resistencia resulta ser independiente de la distancia.

Por lo tanto, la contribución principal en la resistencia del medio proviene de las secciones que limitan directamente con los electrodos. Por esta razón, es

muy importante asegurarles una buena conductividad. Para este fin se usan electrodos que poseen un área grande de superficie y los entierran a una profundidad bastante grande donde la presencia de las aguas subterráneas garantiza una buena conductividad del suelo.

**Verificación experimental.** Dos electrodos planos, unidos con los polos de una pila de fem exteriores se sumergen en un líquido débilmente conductor

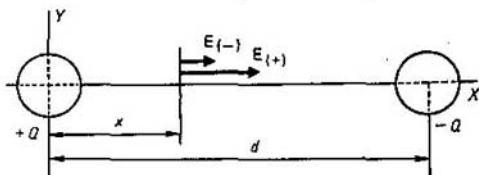


Fig. 123  
Para calcular la resistencia del medio para electrodos esféricos

(fig. 124), por ejemplo, en agua fluvial. Por el circuito pasa cierta corriente. Cambiando la distancia entre los electrodos vemos que a distancias suficientemente grandes (en comparación con las dimensiones lineales de los electrodos) eso no influye en las indicaciones del amperímetro. Por lo tanto, la resistencia del medio a las condiciones indicadas, no depende de la distancia entre los electrodos.

**Tensión de paso.** Dado que en el medio circula corriente, existe un campo eléctrico y un potencial que varía en el espacio.

Supongamos que tuvo lugar la ruptura de la línea de transmisión de alta tensión y el extremo del cable de longitud  $L$  está sobre la tierra. En los sectores que lindan con el conductor en el suelo hay corriente eléctrica. Si cerca de ese lugar camina una persona, entre los puntos de contacto de sus pies y la tierra existe una diferencia de potencial, denominada tensión de paso. Como consecuencia, la corriente eléctrica, cuya intensidad depende de dicha diferencia de potencia, atraviesa el cuerpo humano.

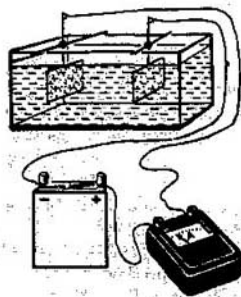


Fig. 124  
Demostración de la independencia de la resistencia del medio respecto a la distancia entre los electrodos

Calculemos la tensión de paso. A causa de que la longitud del cable es grande, puede considerarse que la corriente que proviene de él, circula hacia adentro de la tierra por direcciones, perpendiculares al cable. Las superficies equipotenciales son superficies de semicilindros, cuyos ejes coinciden con el cable (fig. 124). Supongamos que el hombre va en dirección, perpendicular al cable, la distancia entre su pie, próxima al cable, y el cable es  $d$  y la longitud del paso  $l$ . Considerando que la corriente del cable fluye

uniformemente en la zona semicilíndrica, para la densidad de la corriente a la distancia  $r$  del cable obtenemos

$$j = I/(\pi r L). \quad (30.6)$$

Entonces la intensidad del campo a lo largo de los radios, perpendiculares al cable, es igual a

$$E_r = j/\gamma = I/(\pi r L \gamma). \quad (30.7)$$

Por consiguiente, la tensión de paso

$$U_p = \int_d^{d+l} E_r dr = \frac{I}{\pi \gamma L} \ln \frac{d+l}{d}. \quad (30.8)$$

Por ejemplo, para  $I = 500$  A,  $d = 1$  m,  $l = 65$  cm y  $L = 30$  m, hallamos  $U_p = 270$  V. Para otras condiciones y configuraciones de los cables pueden surgir tensiones mucho mayores. Por eso al caer las cables de alta tensión sobre la tierra surge una situación peligrosa no sólo al estar en contacto directo el cable y el hombre, sino también debido a la aparición de voltajes tipo tensión de paso.

La independencia de la resistencia respecto a la distancia entre los electrodos en un medio ilimitado se determina por el hecho de que la sección transversal efectiva del área que atraviesa la corriente es proporcional a la distancia entre los electrodos.

**Ejemplo 30.1.** Un toma de tierra semiesférico se ha metido en la tierra al nivel de su superficie (fig. 125). Hallar la tensión bajo la cual puede resultar afectada una persona que se acerca al toma de tierra (la tensión de paso). La intensidad de corriente  $I$  que circula por el hilo está prefijada. La longitud del paso es  $l$  y la distancia entre el pie del hombre que está más cerca del toma de tierra, y el toma de tierra es igual a  $r_0$ . Estudiar el ejemplo numérico:  $\gamma = 10^{-3}$  S/m,  $I = 1$  A,  $r_0 = 2$  m,  $l = 1$  m.

La intensidad de corriente del toma de tierra es uniforme por todas las direcciones y por eso el vector de densidad de la corriente está dirigido por el radio vector respecto al toma de tierra y es igual a

$$j_r = I/(2\pi r^2).$$

La intensidad del campo eléctrico es, según la ley de Ohm,  $E_r = j_r/\gamma = I/(2\pi r^2 \gamma)$ . Por lo tanto, la tensión de paso

$$U_p = \int_{r_0}^{r_0+l} E_r dr = \frac{I}{2\pi \gamma} \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi \gamma} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0+l} \right) = 2,7 \text{ V.}$$

## Problemas

- Una esfera de cobre de 10 cm de diámetro se mete en una taza semiesférica de cobre con un diámetro de 20 cm, que está llena de agua, de tal manera que la esfera y la taza son concéntricas. La conductividad del agua es igual a  $\gamma = 10^{-3}$  S/m. Determinar la resistencia eléctrica entre la esfera y la taza.
- Un electrodo esférico pequeño de radio  $a$  se ubica en un medio con una conductividad  $\gamma$  a la distancia  $d$  respecto al otro electrodo que es en sí una placa grande con buena conduc-

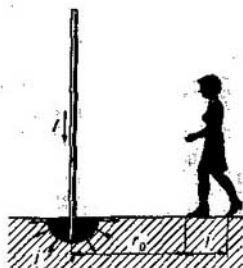


Fig. 125

Para calcular la tensión del paso al aproximarse al hilo semiesférico de puesta a tierra

tancia. Hallar la resistencia del medio a la corriente eléctrica que circula entre los electrodos.

- 4.3. Hallar la resistencia del medio a la corriente entre dos electrodos concéntricos, cuyos radios son  $r_1$  y  $r_2$ . La conductividad del medio es  $\gamma$ .
- 4.4. Hallar la resistencia entre los puntos  $A$  y  $B$  del circuito, mostrado en la fig. 126. La resistencia de los lados de los cuadrados pequeños es  $R$ .
- 4.5. Entre dos electrodos planos con un área  $S$  cada uno, cuyas dimensiones lineales son mucho más grandes que la distancia  $d$  entre ellos, se encuentra un material conductor,

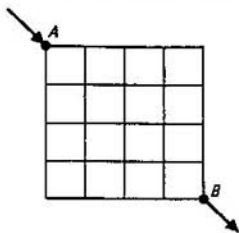


Fig. 126

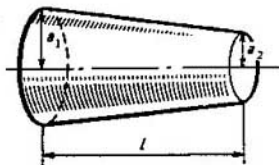


Fig. 127

cuya conductividad varía linealmente desde  $\gamma_1$  en la superficie de un electrodo hasta  $\gamma_2$  en la superficie del segundo. Hallar la resistencia del medio entre los electrodos.

- 4.6. Hallar la resistencia de un conductor cónico de sección circular, cuyas dimensiones se indican en la fig. 127. La conductividad del material del conductor es  $\gamma$ .
- 4.7. El espacio entre dos electrodos paralelos infinitos planos que se encuentran a la distancia  $d$  el uno del otro, está lleno de dos capas de substancia, cuya frontera es plana y paralela a los electrodos. Las conductividades y susceptibilidades dieléctricas de las substancias de las capas son respectivamente iguales a  $\gamma_1, \epsilon_1$  y  $\gamma_2, \epsilon_2$ , y el grosor de cada capa,  $a$  y  $d - a$ . A los electrodos se les aplican unos potenciales  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ . Hallar el potencial y la densidad superficial de la carga en la superficie de separación de las capas.

## Respuestas

4.1.  $R = 1590$  Ohmios. 4.2.  $R = [1 - a/(2d)] / (4\pi\gamma a)$ . 4.3.  $R = \frac{1}{4\pi\gamma} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ .

4.4.  $R_{AB} = \frac{47}{22} R$ . 4.5.  $R = \frac{d \ln(\gamma_2/\gamma_1)}{S(\gamma_2 - \gamma_1)}$ . 4.6.  $R = \frac{1}{\pi\gamma a_1 a_2}$ . 4.7.  $\varphi = \frac{\varphi_1 \gamma_1 (d-a) + \varphi_2 \gamma_2 a}{\gamma_1 (d-a) + \gamma_2 a}$ ;

$\sigma = \frac{(\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1)(\varphi_1 - \varphi_2)}{\gamma_1 (d-a) + \gamma_2 a}$ .



## Electroconductibilidad

Los mecanismos de la electroconductibilidad son multiformes. Lo común entre ellos es sólo el enlace indisoluble con el movimiento de las cargas. En dependencia del mecanismo de la electroconductibilidad, las propiedades de la substancia y las condiciones de la aparición de la corriente eléctrica, las regularidades que describen la electroconductibilidad varían en amplios límites.

### § 31. Electroconductibilidad de los metales

*Se describen los hechos experimentales fundamentales, relacionados con la electroconductibilidad de los metales, y su interpretación teórica.*

**Demostración de que en los metales no existe transferencia de la substancia por la corriente eléctrica.** Mucho antes de descubrir los electrones se demostró experimentalmente que el paso de la corriente en los metales, a diferencia de la corriente en los electrolitos líquidos, no está relacionado con la transferencia de la substancia del metal. La prueba consistió en que a través del contacto de dos metales diferentes, por ejemplo, el oro y la plata, durante cierto tiempo que contaba muchos meses, se dejaba pasar corriente eléctrica continua. Después de ello se investigaba el material en las inmediaciones de los contactos. Fue demostrado que no existe transferencia alguna de la substancia a través de la superficie de separación de diferentes metales, y la substancia por las distintas partes de la superficie de separación posee la misma composición que antes de dejar pasar la corriente. Dichos ensayos mostraron que *los átomos y las moléculas de los metales no participan en la transferencia de la corriente eléctrica*, pero no dieron respuesta alguna sobre la naturaleza de los portadores de la carga en los metales.

**Ensayos de Tolman y Stewart.** Una demostración directa de que la corriente eléctrica en los metales se determina por el movimiento de los electrones, fueron los ensayos de Tolman y Stewart, realizados en 1916. La idea de estos experimentos fue enunciada por Mandelshtam y Papaleksi en 1913.

Imaginémonos una bobina conductora que puede girar alrededor de su eje. Con ayuda de contactos corredizos los extremos de la bobina se cortocircuitan en un galvanómetro (fig. 128). Si la bobina que está girando rápidamente se frena bruscamente, los electrones libres en el conductor continúan el movimiento por inercia, debido a lo cual el galvanómetro debe registrar el impulso de corriente.

La aceleración lineal de la bobina durante el frenado se designa por  $v$ . Está dirigida por la tangente a la superficie de la bobina. Siendo el devanado

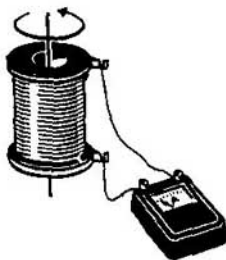


Fig. 128  
Experimento de Tolman y Stewart

bastante denso y los cables finos, puede considerarse que la aceleración está dirigida a lo largo de los cables. Al frenar la bobina, a cada electrón libre se le aplica una fuerza de inercia  $m_e \dot{v}$ , orientada en sentido contrario a la aceleración ( $m_e$  es la masa del electrón). Influido por ella, el electrón se comporta en el metal como si sobre él actuase cierto campo eléctrico eficaz:

$$E_{ef} = -m_e \dot{v} / e. \quad (31.1)$$

Por esta razón, la fuerza electromotriz eficaz en la bobina, determinada por la inercia de los electrones libres, es igual a

$$\mathcal{E}_{ef} = \int_L E_{ef} dl = -\frac{m_e}{e} \dot{v} \int_L dl = -\frac{m_e}{e} \dot{v} L, \quad (31.2)$$

donde  $L$  es la longitud del cable en la bobina. Todos los puntos del cable se frenan con la misma aceleración y por eso  $\dot{v}$  en (31.2) se saca fuera del signo de la integral.

Designando por:  $I$  la intensidad de la corriente que circula por un circuito cerrado, y  $R$ , la resistencia de todo el circuito, incluyendo la resistencia de los cables de la bobina y los cables del circuito exterior y del galvanómetro, escribamos la ley de Ohm como

$$IR = m_e \dot{v} L / e. \quad (31.3)$$

La cantidad de electricidad que pasa por la sección transversal del conductor en el transcurso de cierto tiempo  $dt$  para la intensidad de la corriente  $I$ , es igual a

$$dQ = I dt = -\frac{m_e}{e} \frac{L}{R} \dot{v} dt = -\frac{m_e}{e} \frac{L}{R} dv. \quad (31.4)$$

Por eso durante el tiempo de frenado de la bobina desde la velocidad lineal inicial  $v_0$  hasta la parada completa, la cantidad de electricidad que pasa por el galvanómetro es

$$Q = \int dQ = \frac{m_e}{e} \frac{L}{R} \int_{v_0}^0 dv = \frac{m_e}{e} \frac{L}{R} v_0. \quad (31.5)$$

El valor de  $Q$  se encuentra por las indicaciones del galvanómetro y los valores de  $L$ ,  $R$  y  $v_0$  son conocidos. Por esta razón, puede hallarse tanto el signo, como el valor absoluto de  $e/m_e$ . Los experimentos mostraron que  $e/m_e$  corresponde a la relación entre la carga del electrón y su masa. Así pues, se demostró que la corriente que se observa con ayuda del galvanómetro, se determina por el movimiento de los electrones.

Sobre la teoría de las bandas. La base de la teoría cuántica de la electroconductibilidad de los sólidos la compone la teoría de las bandas que se funda-

menta en el análisis del espectro energético de los electrones (véase el § 2). El espectro eléctrico se divide en zonas, separadas por intervalos prohibidos. Si en la zona superior donde hay todavía electrones, éstos no rellenan todos los estados cuánticos, es decir, dentro de los límites de la zona existe la posibilidad de redistribuir la energía e impulsos de los electrones, la substancia correspondiente es conductor de la corriente eléctrica. La zona entonces se denomina banda de conducción y la substancia correspondiente es conductor de la corriente eléctrica con el tipo de conducción por electrones. Si en la banda de conducción hay muchos electrones y estados cuánticos libres, la electroconductibilidad es suficientemente grande. Solamente los electrones en la banda de conducción son portadores de las cargas que confeccionan la corriente eléctrica. Su movimiento se somete a las leyes cuánticas. La cantidad de estos electrones es una parte pequeña de la cantidad total de electrones. Merced a ello, se eliminan las dificultades de la teoría clásica de la electroconductibilidad (véase el § 27).

**Dependencia entre la resistencia y la temperatura.** No sólo en los metales la contribución principal en la electroconductibilidad proviene del movimiento de los electrones. Por ejemplo, en los semiconductores con tipo de conducción por electrones el movimiento de los electrones es también el contribuidor principal en la transferencia de la carga eléctrica. Una de las diferencias más características de la electroconductibilidad en estos dos casos es el carácter de la dependencia entre la conductividad y la temperatura.

El experimento muestra que *la resistividad de los conductores metálicos aumenta al subir la temperatura, es decir, la conductividad disminuye*. A temperatura no muy baja la dependencia entre la conductividad y la temperatura tiene la forma  $\gamma \sim 1/T$ .

En cambio, *la conductividad de algunas substancias, por ejemplo, de los cristales, semiconductores, electrolitos, etc., aumenta con la temperatura*. A pesar de que los mecanismos del aumento de la conductividad es diferente, ellos se reducen, a fin de cuentas, al incremento de la cantidad de portadores de las cargas eléctricas, merced a cuyo movimiento se efectúa la corriente eléctrica. En los metales la cantidad de portadores, o sea, de electrones libres, no depende prácticamente de la temperatura y la resistencia a la corriente, se determina solamente por su capacidad de formar un movimiento coordinado bajo la influencia del campo eléctrico, es decir, por su movilidad. Pero ésta disminuye, al subir la temperatura.

**Efecto Hall.** Sobre las cargas, cuyo movimiento determina la corriente, actúa la fuerza de Ampère (9.23). La densidad de esta fuerza puede escribirse como

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = nev_{\text{der}} \times \mathbf{B}, \quad (31.6)$$

donde  $n$ ,  $e$  son la concentración y la carga, cuyo movimiento determina la corriente, y  $v_{\text{der}}$  es la velocidad de la deriva de la carga.

Bajo la acción de la fuerza con densidad  $\mathbf{f}$ , las cargas en el conductor en presencia del campo magnético, cuya inducción es perpendicular a la densidad de la corriente  $\mathbf{j}$ , tienden a desplazarse en dirección de la fuerza (fig. 129, a). Como resultado, en la parte correspondiente de la superficie del conductor se

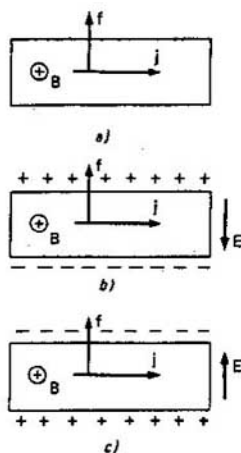


Fig. 129  
Efecto Hall

campo eléctrico, denominado **campo Hall**:

$$E_{ef} = v_{der} B. \quad (31.7)$$

Por consiguiente, entre las superficies del conductor se crea una diferencia de potencial (fig. 129, b).

$$U = \int_0^d v_{der} B dx = v_{der} B d, \quad (31.8)$$

donde  $d$  es el grosor del conductor. Tomando en consideración que  $j = nev_{der}$ , escribamos (31.8) como

$$U = djB/(ne) = RjBd, \quad (31.9)$$

donde

$$R = 1/(ne) \quad (31.10)$$

es el **coeficiente Hall**. La diferencia de potencial puede medirse. Las demás magnitudes, a excepción de la concentración  $n$  de las cargas y su signo, son conocidas. *Por el signo de la diferencia de potencial puede determinarse el signo de la carga de los portadores, cuyo movimiento crea la corriente, mientras que por la diferencia de potencial se define su concentración.*

Notemos que las fórmulas (31.9) y (31.10) coinciden con las fórmulas correspondientes de la teoría más completa del efecto Hall, cuando se tienen en cuenta la distribución de los electrones respecto a las velocidades, las características

forma un exceso de cargas del mismo signo que el de las cargas que confeccionan la corriente. Por eso, si la corriente se determina por el movimiento de las cargas positivas, se crea la distribución de la densidad superficial de las cargas mostrada en la fig. 129, b, y la fig. 129, c representa la distribución para el movimiento de las cargas negativas. Entre las partes opuestas del conductor aparece diferencia de potencial y un campo eléctrico, cuya intensidad  $E$  neutraliza la acción de la densidad de fuerza (31.6). La dirección de la intensidad depende del signo de las cargas, que originan la corriente, y el módulo se determina por los factores de los que depende la densidad de fuerza (31.6). La aparición de la diferencia de potencial en un conductor con corriente en el campo magnético se denomina **efecto Hall**. Fue descubierto en 1879.

La inducción  $B$  del campo y la velocidad  $v_{der}$  de las cargas son mutuamente perpendiculares. La razón entre la densidad de la fuerza (31.6) y la carga de la misma manera que (31.4) puede considerarse como la intensidad eficaz del

estadísticas de sus colisiones, etc. Pero los cálculos resultan muy voluminosos, por lo que aquí no se citan.

Los resultados de las mediciones mostraron que en los metales la corriente se crea por el movimiento de las cargas negativas. La concentración de los portadores es aproximadamente igual a la concentración de los átomos, es decir, una carga que participa en la formación de la corriente, corresponde aproximadamente a un átomo de metal, a pesar de que este número varía en límites determinados. Los portadores de las cargas que crean la corriente en los metales, son los electrones. Lo dicho significa que en los metales a un átomo le corresponde, en término medio, cerca de un electrón libre. Por ejemplo, 0,7 electrones le corresponde a un átomo de plata; 0,8, al átomo de cobre; 0,9, al de oro; unos dos electrones, al átomo de aluminio. Recordemos que la concentración general de los átomos de los metales, y por tanto, de los electrones libres es próxima a  $n \sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

La investigación del efecto Hall en otros casos mostró que éste no siempre se determina por el movimiento de las cargas negativas. Cuando el signo de la diferencia de potencial en el efecto Hall corresponde al movimiento de las cargas positivas, el efecto se denomina anómalo.

El efecto Hall es uno de los fenómenos galvanomagnéticos. Este término une los fenómenos que surgen en un conductor con corriente que se encuentra en un campo magnético. La esencia física de todos estos fenómenos consiste en que la electroconductibilidad del conductor en un campo magnético exterior no es una magnitud escalar, sino un tensor. La intensidad del campo eléctrico transversal, denominado campo Hall, se suma con la intensidad del campo eléctrico que determina la existencia de corriente en ausencia del campo magnético. Como consecuencia de ello, la intensidad del campo eléctrico forma con la densidad de corriente cierto ángulo, llamado ángulo Hall. Es decir, las direcciones de la densidad de corriente y la intensidad del campo eléctrico no coinciden. Dichas magnitudes están relacionadas por la fórmula tensorial

$$j_i = \sum_k \gamma_{ik} E_k,$$

en la que  $\gamma_{ik}$  es el tensor de la electroconductibilidad. En las sustancias anisótropas la conductividad se describe también por el tensor de la electroconductibilidad en ausencia del campo magnético exterior.

**Magnetorresistencia.** Otro fenómeno importante galvanomagnético es la variación de la resistencia del conductor, colocado en un campo magnético transversal (efecto de magnetorresistencia). Como muestra el experimento la variación relativa de la conductividad eléctrica  $\Delta\gamma/\gamma$  para los campos no muy fuertes, se expresa por la fórmula

$$\Delta\gamma/\gamma = -\kappa_1 B^2,$$

donde  $\kappa_1$  es el coeficiente de magnetorresistencia que depende de las propiedades del material y  $B$ , la inducción del campo magnético.

Este fenómeno es consecuencia del carácter tensorial de la electroconductibilidad del conductor en un campo magnético. En definitiva, surge una com-

ponente de la intensidad del campo eléctrico, colineal a la corriente, lo que precisamente origina la variación de su intensidad que se manifiesta en el cambio de la resistencia.

**Movilidad de los electrones.** La ley de Ohm  $j = \gamma E$  puede escribirse como

$$nev_{\text{der}} = \gamma E. \quad (31.11)$$

Se llama *movilidad  $b$*  de los electrones a la relación entre la velocidad de deriva y la intensidad del campo eléctrico:

$$b = v_{\text{der}} E. \quad (31.12)$$

Tomando en consideración (31.11), obtenemos

$$b = \gamma / (ne). \quad (31.13)$$

La conductividad del metal se conoce y  $ne$  puede hallarse del efecto Hall, o sea, la medición del efecto Hall permite encontrar la movilidad de los electrones en el conductor. En los metales la movilidad de los electrones tiene el orden de

$$b \sim 10^{-4} \dots 10^{-3} \text{ m}^2 / (\text{V} \cdot \text{s}). \quad (31.14)$$

Así pues, la velocidad de deriva de los electrones en los metales es muy pequeña en comparación con las velocidades corrientes del movimiento de las micropartículas. *La elevada conductividad de los metales está condicionada principalmente por la gran concentración de portadores de cargas ( $n \sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ), pero no por su gran movilidad (véase (31.13)):*

$$\gamma = enb \sim 10^{-19} \cdot 10^{28} \cdot 10^{-3} \text{ S/m} = 10^6 \text{ S/m}.$$

La mayoría de los electrones de los dieléctricos están ligados rígidamente a los átomos por lo que hay muy pocos portadores libres de carga. Por eso, *a pesar de que la movilidad de estos portadores de cargas no se diferencia mucho de la de los electrones libres en los metales, la conductividad de los dieléctricos es muy pequeña. La concentración de portadores en los semiconductores varía en amplios límites desde  $10^{19}$  hasta  $10^{25} \text{ m}^{-3}$  y las movilidades se encuentran dentro de los márgenes aproximadamente desde  $10$  hasta  $10^{-4} \text{ m}^2 / (\text{V} \cdot \text{s})$ , es decir, son grandes. Merced a tales amplios límites de variación de la concentración de portadores y sus movilidades, la conductividad de los semiconductores varía dentro de amplios límites, en muchos órdenes de magnitudes. Sin embargo, no se logró aún obtener una conductibilidad de los semiconductores tan elevada como la de los metales, conservando, claro está, la dependencia característica para los semiconductores entre la conductividad y la temperatura (el aumento de la conductividad con la temperatura).*

**Superconductividad.** En 1911 H. Kamerlingh Onnes descubrió que a  $T = 4,2 \text{ K}$  el mercurio, por lo visto, pierde totalmente la resistencia a la corriente eléctrica. La disminución de la resistencia transcurre bruscamente en un intervalo de varias centésimas de grado. En lo sucesivo se observó la pérdida de la resistencia en otras sustancias puras, así como en muchas aleaciones. El

propio fenómeno recibió el nombre de superconductividad. Las temperaturas de transición al estado superconductor son diferentes, pero siempre muy bajas.

**Temperatura crítica.** Al provocar una corriente eléctrica en un anillo de superconductor con ayuda de la inducción electromagnética, puede observarse que su intensidad no disminuye en el transcurso de varios años. Eso permite hallar el límite superior de la resistividad de los superconductores (inferior a  $10^{-25} \Omega \cdot m$ ). Es muchos órdenes menos que, por ejemplo, la resistividad del cobre a baja temperatura ( $10^{-12} \Omega \cdot m$ ). *Por esta razón, se considera que la resistencia eléctrica de los superconductores es nula.* La resistencia, antes de pasar al estado superconductor, suele ser muy distinta. Muchos de los superconductores a temperatura ambiente tienen una resistencia bastante elevada. La transición al estado superconductor se efectúa siempre de manera muy brusca. La transición de los monocristales puros ocupa un intervalo de temperaturas menos que una milésima de grado.

Entre las sustancias puras el aluminio, cadmio, zinc, indio, y el galio poseen superconductividad. La propiedad de superconductividad depende de la estructura de la red cristalina. Verbigracia, el estaño blanco es superconductor y el gris no; el mercurio posee propiedad superconductor sólo en la fase alfa.

**Campo crítico.** En 1914 K. Onnes descubrió que *el estado superconductor se perturba por el campo magnético cuando la inducción magnética  $B$  supera cierto valor crítico.* Este último depende del material del superconductor y de la temperatura.

El campo crítico que elimina la superconductividad, puede crearse por la propia corriente superconductor. Por esta razón, existe una intensidad crítica de la corriente para la que se perturba la superconductividad.

**Efecto Meissner.** En 1933 Meissner y Ochsenfeld descubrieron que *dentro de un cuerpo superconductor no existe por completo campo magnético alguno.* Al enfriar el superconductor en un campo magnético continuo, en el momento de la transición al estado superconductor el campo magnético se desplaza totalmente de su volumen. Esto es lo que diferencia el superconductor del conductor ideal, en el cual al descender la resistividad hasta cero, la inducción del campo magnético en el volumen debe permanecer invariable. El fenómeno de desplazamiento del campo magnético del volumen del superconductor se denomina efecto Meissner. El mencionado efecto y la ausencia de la resistencia eléctrica son las propiedades más importantes del superconductor.

**Corriente superficial.** La ausencia de campo magnético en el volumen del superconductor permite hacer la deducción, partiendo de las leyes generales del campo magnético (véase el capítulo 6) de que *en él existe sólo la corriente superficial.* Desde el punto de vista físico, es real y por eso ocupa una capa fina en las inmediaciones de la superficie. El campo magnético de la corriente aniquila el campo magnético exterior dentro del superconductor. En este sentido, el superconductor se comporta formalmente como un diamagnético ideal (véase el § 41). Pero en cambio, él no es un diamagnético ya que dentro del superconductor la imanación es nula.

**Superconductores de primero y segundo géneros.** Las sustancias puras, en las que se observa el fenómeno de superconductividad, son poco numerosas.

Las aleaciones poseen con más frecuencia la superconductividad. En las sustancias puras tiene lugar el efecto Meissner total, mientras que en las aleaciones no ocurre el desplazamiento completo del campo magnético del volumen (efecto Meissner parcial). *Las sustancias que manifiestan el efecto Meissner total se denominan superconductores de primer género y el efecto parcial, superconductores de segundo género.*

El volumen de los superconductores de segundo género tiene corrientes circulares que crean un campo magnético, el cual, sin embargo, no llena todo el volumen, sino que está distribuido en él en forma de hilos aislados. En lo que se refiere a la resistencia, ella es nula lo mismo que en los superconductores de primer género.

**Explicación de la superconductividad.** Según su naturaleza física, la superconductividad es la superfluidez del líquido que consta de electrones. La superfluidez surge a causa de que cesa el intercambio de energía entre el componente superfluido del líquido y sus otras partes, debido a lo cual desaparece la fricción. Lo esencial de ello es la posibilidad de «condensar» las moléculas de líquido en el nivel más bajo de energía, separado de los demás niveles por una ranura energética, bastante amplia, la que las fuerzas de interacción no están en condiciones de superar. En eso consiste la causa de la interrupción de la interacción. Para muchas partículas la posibilidad de estar en el nivel inferior requiere que se sometan a la estadística de Bose—Einstein, es decir, que tengan el spin entero.

Los electrones se someten a la estadística de Fermi—Dirac y por eso no pueden «condensarse» en el nivel inferior de energía y formar un líquido electrónico superfluido. Las fuerzas de repulsión entre los electrones se compensan en un grado considerable por las fuerzas de atracción de los iones positivos de la red cristalina. En cambio, merced a las oscilaciones térmicas de los átomos en los nudos de la red cristalina, entre los electrones puede surgir una fuerza de atracción. Entonces ellos se unen en pares. *Los pares de electrones se comportan como partículas con spin entero, es decir, se someten a la estadística de Bose—Einstein. Ellos pueden condensarse y crear una corriente de líquido superfluido—pares electrónicos que es la que forma la corriente eléctrica superconductora.* Más arriba del nivel inferior de energía existe una ranura energética la cual el par electrónico no puede superar a expensas de la energía de interacción con las demás cargas, es decir, no puede cambiar su estado energético. Por esta razón: la resistencia eléctrica está ausente.

La posibilidad de formar pares electrónicos y de su superfluidez se explican mediante la teoría cuántica.

La gran diferencia en la conductibilidad de los conductores, semiconductores y dieléctricos no se determina por la desigualdad de la movilidad de los portadores de cargas, sino, que, principalmente, por la gran distinción de la concentración de los portadores.

**Ejemplo 31.1.** *La dependencia entre la resistencia y la temperatura es muy importante para el funcionamiento de muchos dispositivos, lo que se ve bien en el ejemplo del trabajo de una bombilla corriente. El filamento se hace de tungsteno. A temperaturas entre 300 y 3000 K la conductividad del tungsteno y la luminosidad energética  $M$ , es decir, la densidad superficial del flujo de emisión desde la superficie, pueden representarse mediante las fórmulas:  $\gamma = 0,95 \times$*



$10^{10} T^{-2/3}$  S/m;  $M = 6,6 \cdot 10^{-12}$  T<sup>3</sup> W/m<sup>2</sup>, donde  $T$  es la temperatura termodinámica. Calcular el diámetro  $d$  y la longitud  $l$  del filamento para que la bombilla radie una potencia  $P$  para la tensión  $U$  y la temperatura  $T$  del filamento. Las pérdidas de energía en la conductibilidad térmica del filamento son menoscabablemente pequeñas. Estimar las exigencias de precisión al confeccionar el filamento.

Tenemos

$$R = \frac{U^2}{P}, \quad R = \frac{1}{\gamma} \frac{4l}{\pi d^2}, \quad P = \pi M l d,$$

de donde

$$d = \left( \frac{4P^2}{\pi^2 \gamma U^2 M} \right)^{1/3}, \quad l = \left( \frac{\gamma P U^2}{4\pi M^2} \right)^{1/3}.$$

Dado que  $\gamma M \sim T^{3/6}$ ,  $\gamma/M^2 \sim T^{-11/2}$ , la dependencia de la longitud y el grosor del filamento respecto a la temperatura es bastante fuerte. Por eso el error en mantener el diámetro y la longitud del filamento, al confeccionarlo, influye en la temperatura y, por tanto, en la composición espectral de la luz que se emite. Las tolerancias se someten a unas exigencias muy rigurosas.

## § 32. Electroconductibilidad de los líquidos

*Se describe el mecanismo de la electroconductibilidad de los líquidos y la dependencia entre la electroconductibilidad y diversos factores*

**Disociación.** Los líquidos puros, por lo general, son malos conductores de la electricidad. Eso está determinado por el hecho de que constan de átomos y moléculas eléctricamente neutros, cuyo movimiento no puede crear una corriente eléctrica. Sin embargo, las soluciones de sales, ácidos y álcalis en el agua y en algunos otros líquidos dejan pasar bien la corriente. Esto está relacionado con que las moléculas de la sustancia disuelta disocian, es decir, se desintegran en iones positivos y negativos. El movimiento coordinado de los iones asegura la transferencia de las cargas eléctricas, o sea, la corriente. *Si al disolverse, las moléculas no disocian, la solución no es conductor de la electricidad.*

**Cálculo de la electroconductibilidad.** Designemos la concentración de los iones de cada signo en la solución por  $N = N^{(+)} + N^{(-)}$ . Para la densidad de corriente puede escribirse la fórmula

$$j = q (b^{(+)} + b^{(-)}) NE, \quad (32.1)$$

donde  $q$  es el módulo de la carga de los iones;  $b^{(+)}$  y  $b^{(-)}$ , las movilidades de los iones positivos y negativos [véase (31.12)].

Basándose en (31.12), la velocidad de deriva de los iones es proporcional a la intensidad:

$$v_{\text{der}}^{(\pm)} = b^{(\pm)} E. \quad (32.2)$$

En general, la movilidad de los iones positivos y negativos es diferente. La movilidad de los iones en los líquidos no es grande y habitualmente es de diezmillonésimas del metro elevado al cuadrado por segundo-voltio.

La concentración de iones depende del grado de disociación, que se caracteriza por el coeficiente de disociación  $\alpha$ , determinado por la relación de la concentración  $N$  de iones respecto a la concentración  $N_0$  de moléculas de la sustancia disuelta, o sea,

$$N = \alpha N_0. \quad (32.3)$$

Por consiguiente, la concentración de moléculas que no están disociadas

$$N' = (1 - \alpha) N_0. \quad (32.4)$$

En la solución transcurre simultánea y continuamente tanto la disociación de las moléculas, como el proceso inverso a la disociación, es decir, la combinación de los iones en moléculas neutras. Durante el equilibrio las intensidades de estos dos procesos que cambian la composición de la solución en direcciones contrarias, son iguales. La velocidad de variación ( $dN/dt$ ) de la concentración de iones de cada signo, debido a la disociación de las moléculas, es proporcional a la concentración  $N'$  de las moléculas no disociadas:

$$(dN/dt) = \beta (1 - \alpha) N_0, \quad (32.5)$$

donde  $\beta$  es el coeficiente de proporcionalidad.

Como consecuencia de la ionización de los iones, la velocidad de variación ( $dN'/dt$ ) de la concentración de moléculas no disociadas es proporcional al producto de las concentraciones de iones positivos y negativos:

$$(dN'/dt) = \eta \alpha^2 N_0^2, \quad (32.6)$$

donde  $\eta$  es el coeficiente de proporcionalidad. Durante el equilibrio

$$\left( \frac{dN}{dt} \right) = \left( \frac{dN'}{dt} \right). \quad (32.7)$$

De aquí, teniendo en cuenta (32.5) y (32.6), obtenemos la fórmula que une el coeficiente de disociación y la concentración de sustancia disuelta:

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha^2} = \frac{\eta}{\beta} N_0. \quad (32.8)$$

Es evidente que el coeficiente de disociación depende de la concentración de sustancia disuelta. Para una concentración muy débil ( $N_0 \approx 0$ ), la igualdad (32.8) nos da

$$\alpha = 1, \quad (32.9)$$

es decir, la disociación es próxima a la completa. Si  $\alpha \ll 1$ , de (32.8) recibimos

$$\alpha = \sqrt{\frac{\beta}{\eta} \frac{1}{N_0}}, \quad (32.10)$$

es decir,  $\alpha$  disminuye, al aumentar la concentración de sustancia disuelta.

La fórmula (32.1), tomando en consideración (32.3), puede escribirse así

$$j = q (b^{(+)} + b^{(-)}) \alpha N_0 E. \quad (32.11)$$

La movilidad de los iones en límites muy amplios de las intensidades de los campos eléctricos no depende de la intensidad. *Sólo cuando la intensidad es muy elevada, del orden de millones de voltios por centímetro, se observa la desviación de la proporcionalidad directa entre la intensidad del campo y la velocidad de la deriva de los portadores de las cargas*, lo que conforme a (32.2) significa la dependencia de la movilidad respecto a la intensidad. El valor de  $\alpha$  tampoco depende dentro de límites muy amplios de  $E$ . Por lo tanto, hasta las intensidades de millones de voltios por centímetro, la fórmula (32.11) expresa la ley de Ohm. Por esta razón, la conductividad eléctrica de la solución es

$$\gamma = q (b^{(+)} + b^{(-)}) \alpha N_0. \quad (32.12)$$

**Dependencia entre la electroconductibilidad y la concentración.** Para una concentración pequeña de la solución el coeficiente de disociación [véase (32.9)] es una magnitud constante y la suma de las movilidades de los iones  $b^{(+)} + b^{(-)}$  es también aproximadamente constante. Por consiguiente, *para una concentración pequeña de la solución la electroconductibilidad es proporcional a la concentración, mientras que cuando la concentración es grande, la dependencia entre ellas se complica considerablemente*. Por una parte, es necesario tener en cuenta la dependencia entre el coeficiente de disociación y la concentración [véanse (32.8), (32.10)], y por otra parte, la movilidad de los iones comienza también a depender en gran parte de la concentración y disminuye en las soluciones concentradas, ya que empieza a tener influencia la interacción eléctrica de los iones entre sí. Por esta razón, *para una concentración grande no se observa el carácter directamente proporcional entre la electroconductibilidad y la concentración de la solución*.

**Dependencia entre la electroconductibilidad y la temperatura.** Al subir la temperatura, el coeficiente de disociación aumenta, ya que el movimiento más enérgico de las moléculas dificulta el proceso inverso a la disociación y facilita la propia disociación (durante las colisiones). Al calentar el líquido, su viscosidad disminuye y, por lo tanto, aumenta la movilidad de los iones. Por esta razón, [véase (32.12)] *la conductividad de los electrolitos crece al aumentar la temperatura, con la particularidad de que dicho incremento puede ser bastante considerable (miles de veces)*.

**Electrolitos.** Puesto que la circulación de la corriente en las soluciones se determina por el movimiento de los iones, *como consecuencia sucede la separación de las moléculas de la sustancia disuelta en sus partes integrantes que se desprenden en los electrodos. Este fenómeno se denomina electrólisis*. El estudio de la electrólisis desempeñó un papel importante en el desarrollo de la teoría de la estructura de la sustancia. Las leyes de la electrólisis fueron descubiertas por M. Faraday y se estudian minuciosamente en la escuela secundaria. Los conductores de la corriente eléctrica que, siendo recorridos por la corriente, sufren la electrólisis, o sea, se descomponen en sus partes integrantes, se llaman electrolitos. De lo dicho se desprende que *muchas soluciones de sales, ácidos y álcalis, así como varios compuestos químicos en estado tanto líquido, como sólido, son electrolitos*.

Como ejemplo de un electrolito sólido puede servir el vidrio que por su naturaleza física es un líquido fuertemente sobreenfriado con una viscosidad muy

elevada. Puede mostrarse experimentalmente que en el vidrio los iones  $\text{Na}^+$ , cuyo movimiento determina precisamente la electroconductibilidad del vidrio, poseen una movilidad notoria. Al calentar el vidrio, su resistencia puede disminuir millones de veces. Eso permite obtener una demostración impresionante. Primero un palito de vidrio se calienta en la llama del mechero. La corriente en el circuito desprende calor de Joule, lo que contribuye al incremento de la temperatura del palito. A cierta temperatura, que es necesario elegir mediante el experimento, el mechero con la llama se retira, y la posterior subida de la temperatura del palito se asegura ya sólo mediante el calor óhmico. La velocidad de variación de la temperatura del palito aumenta todo el tiempo, ya que con la temperatura crece la conductividad, lo que, a su vez, provoca un incremento aún más enérgico de la temperatura. Como consecuencia de semejante aumento en avalancha de la temperatura tiene lugar el fundido activo del vidrio y el palito se quema, relampagueando.

### § 33. Electroconductibilidad de los gases

*Se examinan diversos mecanismos de creación de la corriente en los gases, la característica de la corriente y el papel de la carga espacial.*

**Corrientes automantenida y no automantenida.** El gas que no tiene partículas cargadas no es conductor de la electricidad. El se convierte en conductor solamente en presencia de la ionización cuando aparecen los portadores de las cargas eléctricas en forma de electrones e iones libres. En función de la cantidad de electrones perdidos, los iones positivos pueden ser de carga única o de cargas múltiples. Los iones negativos que se forman merced a la asociación de un electrón al átomo, son por lo general de carga única.

*Para que el gas se haga conductor es necesario la presencia de cualquier factor ajeno de ionización (una temperatura alta del gas, la radiación ultravioleta o X, etc.). Si la intensidad del campo no es grande, la corriente termina de circular por el gas tan sólo cese de actuar el factor ajeno de ionización. Semejante corriente se denomina no automantenida.*

Si la intensidad es suficientemente elevada, el campo puede provocar por sí mismo la ionización, como consecuencia de la cual el gas se hace conductor. La corriente que surge en este caso se llama automantenida. *Para la mencionada corriente no existe ninguna dependencia funcional universal entre la intensidad de la corriente y la tensión. Todo se determina por las condiciones concretas.* Por ejemplo, con frecuencia resulta que la intensidad de la corriente automantenida disminuye al subir la tensión.

**Corriente no automantenida.** Examinemos con más detalle la corriente no automantenida. Designemos por:  $N$  la concentración de cargas de cada signo,  $(dN/dt)_{cr}$ . (cr significa creación) es la velocidad de variación de la concentración de cargas por la fuente exterior de ionización. A la par con el proceso de

creación de las cargas, transcurre el proceso de su liquidación a causa de la recombinación, o sea, tiene lugar el proceso de neutralización mutua. Al pasar un lapso suficientemente largo, se establece el equilibrio dinámico cuando la velocidad de creación de las cargas y la velocidad de recombinación se neutralizan mutuamente. Entonces, es obvio que

$$N^{(+)} = N = N^{(-)}, \quad (33.1)$$

donde, para simplificar, los iones se suponen la carga única.

Está claro que la velocidad de recombinación debe ser proporcional al producto de la concentración de las cargas, o sea, a  $N^2$ . Por consiguiente, durante el equilibrio

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{cr} = -rN^2, \quad (33.2)$$

donde  $r$  es el coeficiente de recombinación.

Según la definición, la densidad de corriente es igual a

$$j = j^{(+)} + j^{(-)} = q(N^{(+)}v_{der}^{(+)} + N^{(-)}v_{der}^{(-)}) = qN(v_{der}^{(+)} + v_{der}^{(-)}). \quad (33.3)$$

La velocidad de deriva de la carga en un campo eléctrico es proporcional a su intensidad:

$$v_{der} = bE, \quad (33.4)$$

Las movilidades  $b^{(+)}$  y  $b^{(-)}$  de las cargas positivas y negativas son, por lo general, distintas. Teniendo en cuenta (33.4), la igualdad (33.2) toma la forma

$$j = (b^{(+)} + b^{(-)})NE. \quad (33.5)$$

Esta fórmula se parece a la ley de Ohm. Sin embargo, ella es equivalente a la ley de Ohm sólo cuando el factor de  $E$  no es función de  $E$  y  $j$ . En general, en los gases este factor depende de las magnitudes indicadas y por eso la fórmula (33.5) no equivale a la ley de Ohm.

Pero cuando la cantidad de iones en recombinación en el gas en un segundo supera en gran parte el número de iones que caen durante 1 s en el electrodo, para definir  $N$  en (33.5) puede utilizarse su expresión (33.2) para la condición de equilibrio. Entonces

$$j = q(b^{(+)} + b^{(-)}) \sqrt{\frac{1}{r} \left| \left( \frac{dN}{dt} \right) \right|_{cr}} E. \quad (33.6)$$

Para aclarar las condiciones de aplicación de esta fórmula es necesario tener en cuenta que la movilidad de los iones en los gases a presión normal tiene el orden de diezmilésimas del metro elevado al cuadrado por segundo-voltio y el coeficiente de recombinación  $r \approx 1 \text{ m}^3/\text{s}$ . Por ejemplo, si  $dN/dt$  tiene el orden de  $10^{18}$  iones/( $\text{m}^3 \cdot \text{s}$ ) y  $E = 10^3 \text{ V/m}$ , la cantidad de iones que caen sobre  $1 \text{ m}^2$  de electrodo en 1 s es igual a

$$\frac{j}{e} = (b^{(+)} + b^{(-)}) \sqrt{\frac{1}{r} \left| \left( \frac{dN}{dt} \right) \right|_{cr}} E \approx 2 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}. \quad (33.7)$$

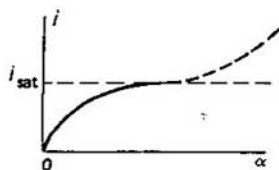


Fig. 130  
Característica de las corrientes  
automantenida y no automante-  
nida

Si la distancia entre los electrodos planos es igual a 0,1 m, en el espacio entre los electrodos en 1 m<sup>2</sup> de sección transversal recombinar 10<sup>16</sup> iones, es decir, la condición de aplicación de la fórmula (33.6) en este caso se cumple. De la misma manera se verifica la aplicación de dicha fórmula para otros valores de los parámetros.

**Densidad de la corriente de saturación.** Designemos la distancia entre los electrodos planos por  $d$ . Si la intensidad del campo es suficientemente alta, de manera que todos los iones que se forman por la fuente exterior, caen sobre los electrodos antes de recombinarse, surge la corriente de saturación, cuya densidad es

$$j_{\text{sat}} = qd \left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{cr}}. \quad (33.8)$$

**Característica de la corriente.** En la región de los campos eléctricos intermedios una parte de iones, antes de caer sobre los electrodos, consigue recombinarse. El balance de las pérdidas y la creación de iones se escribe como

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{cr}} + \left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{rec}} + \left( \frac{dN}{dt} \right)_j = 0. \quad (33.9)$$

Tomando en consideración las igualdades (33.2), (33.3) y (33.8), obtenemos

$$j_{\text{sat}}/q - rN^2d - N(b^{(+)} + b^{(-)})E = 0. \quad (33.10)$$

Teniendo en cuenta que

$$j = qN(b^{(+)} + b^{(-)})E. \quad (33.11)$$

escribamos (33.10) en forma de ecuación respecto a  $j$ :

$$j^2 + 2\alpha j + 2\alpha j_{\text{sat}} = 0, \quad (33.12)$$

donde

$$\alpha = |q| (b^{(+)} + b^{(-)})^2 E^2 / (2rd). \quad (33.13)$$

La raíz positiva de la ecuación (33.12) es igual a

$$j = \alpha \left( \sqrt{1 + 2j_{\text{sat}}/\alpha} - 1 \right). \quad (33.14)$$

La gráfica de la densidad de corriente en función de  $\alpha$  se da en la fig. 130. En los casos límites ( $\alpha \ll j_{\text{sat}}$  y  $\alpha \gg j_{\text{sat}}$ ) (33.14) pasa a las fórmulas (33.6) y (33.8), respectivamente.

La expresión (33.14) se denomina característica de la corriente no automantenida. Está en buena concordancia con el experimento si se tiene en cuenta complementariamente las pérdidas de iones a causa de la difusión.

**Corriente automantenida.** Si para la densidad de corriente casi igual a la de la corriente de saturación, seguimos aumentando la intensidad del campo eléctrico, la densidad de corriente comienza a crecer de nuevo. Esto sucede

debido a que los electrones que existen en el gas, antes de recombinar con los iones del gas tienen tiempo de acelerarse, merced a la elevada intensidad del campo, hasta energías cuando, al chocar, ionizan las moléculas de gas: En definitiva, la velocidad de ionización comienza a depender de la intensidad. La corriente que surge en este caso se denomina automantenida. La parte inicial de la característica de dicha corriente se muestra en la fig. 130 con línea punteada. Empieza a un valor finito de  $\alpha$ .

**Acción de la carga espacial.** Como ya se señaló, la movilidad de los portadores positivos y negativos de las cargas es distinta y, por lo general,  $b^{(+)} > b^{(-)}$ . Debido a esto, la densidad de corriente, determinada por el movimiento de las cargas positivas, es inferior a la densidad de corriente, relacionada con el movimiento de las cargas negativas. Por eso la cantidad de cargas positivas que caen en el transcurso de un intervalo fijo de tiempo sobre el cátodo es menor que el número de cargas negativas que llegan al ánodo, a pesar de que la cantidad de iones que se forman y recombinan durante este intervalo de tiempo, es la misma. Es obvio que semejante estado no puede ser equilibrado. El estado de equilibrio se logra de la siguiente manera. Como consecuencia del movimiento de las cargas positivas hacia el cátodo y de las negativas hacia el ánodo, cerca del cátodo se forma un exceso de cargas positivas y cerca del ánodo, de negativas. Sin embargo, a causa de la mayor movilidad de las cargas negativas, el exceso de la carga negativa cerca del ánodo será inferior al exceso de la carga positiva en las proximidades del cátodo. Debido a semejante redistribución de la concentración de las cargas y la variación de la intensidad del campo eléctrico, relacionada con eso, se establece el equilibrio, durante el cual el número de cargas positivas y negativas que caen sobre los electrodos, se iguala.

**Movilidad de las cargas.** Un ion con cierta masa  $m$  y carga  $q$  en un campo homogéneo  $E$  se mueve con una aceleración constante

$$a = qE/m \quad (33.15)$$

y durante el tiempo  $\tau$  siendo la velocidad inicial nula, recorre el camino

$$s = qE\tau^2/(2m). \quad (33.16)$$

Si  $l$  es el recorrido libre medio del ion en el gas para el movimiento térmico desordenado y  $v$ , la velocidad media, puede considerarse que  $\tau = l/v$ . El tiempo y el recorrido libre medio se definen de manera que pueda considerarse que en cada choque el ion pierde totalmente su energía del movimiento ordenado. Por eso para la velocidad de deriva a título de velocidad media del movimiento ordenado en dirección colineal a la de la intensidad del campo, puede escribirse, basándose en (33.16):

$$v_{\text{der}} = s/\tau = qE\tau/(2m) = qlE/(2mv). \quad (33.17)$$

Las precisiones, introducidas por la distribución estadística de  $l$ , conducen sólo a un pequeño cambio del coeficiente numérico en (33.17). Por eso la movilidad de los iones es igual a

$$b = ql/(2mv). \quad (33.18)$$

De esta fórmula se ve que la movilidad de los iones positivos y negativos con las mismas masas debe ser igual. No obstante, la movilidad media de las cargas negativas es mayor que la de las positivas, debido a que la movilidad de las cargas negativas se forma no sólo por la contribución de los iones negativos, sino que también se tiene presente la contribución de los electrones. Pero la movilidad de los electrones a causa de su masa pequeña, es insignificante, lo que determina, a fin de cuentas, la gran movilidad de las cargas negativas.

**Comparación de las deducciones de (55.18) con el experimento.** De (33.18) se ve que la movilidad es inversamente proporcional a la densidad del gas, ya que la longitud del recorrido libre es inversamente proporcional a la densidad. Dicha deducción se confirma por el experimento.

En cambio, en total la fórmula (33.18) no explica todo el conjunto de hechos experimentales. Por ejemplo, la prueba nos ofrece para la movilidad un valor menor que la teoría. Para explicar la divergencia entre la teoría y el experimento, Langevin tuvo en cuenta la polarización de los iones, al acercarse durante las colisiones, merced a las cuales los iones adquieren ciertos momentos dipolares y el carácter de sus colisiones varía. La consideración de esta circunstancia introduce correcciones esenciales en las fórmulas. Pero la exposición de dicha teoría rebasa los márgenes del presente curso.

Para que el gas se convierta en conductor es necesaria la presencia de cualquier factor ajeno (elevada temperatura del gas, radiación ultravioleta o  $X$ , etc.). Sin embargo, para una intensidad suficientemente grande del campo eléctrico la ionización surge como resultado de la acción del campo. La corriente que aparece en este caso se denomina automantenida. Si existen factores ajenos de ionización, la corriente se denomina no automantenida.

¿Qué son en sí las corrientes automantenida y no automantenida?

¿Por qué entre los electrodos surge una carga espacial? ¿Cuál es su acción? ¿Debido a cuáles factores la movilidad de las cargas negativas resulta mayor que la de las positivas?

### § 34. Corriente eléctrica en el vacío

*Se examinan las regularidades fundamentales de la emisión termoiónica y su manifestación al circular la corriente entre los electrodos en el vacío.*

**Emisión termoiónica.** Si en el vacío no hay portadores de cargas eléctricas, no puede existir ninguna corriente eléctrica. Pero si existen electrones, su movimiento determina la aparición de la corriente, denominada corriente en el vacío.

En el metal hay gas electrónico. En condiciones de equilibrio, la distribución de los electrones respecto a los niveles de energía se determina por la estadística de Fermi—Dirac y se da mediante la fórmula

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{\exp\{\beta(E_i - \mu)\} + 1} \quad (34.1)$$



donde  $\beta = 1/(kT)$ ;  $n_i$  es el número de electrones que poseen la energía  $E_i$ ;  $g_i$ , la cantidad de estados cuánticos, correspondientes a la energía  $E_i$ ;  $\mu$ , la energía de Fermi a temperatura  $T$  que para  $T \rightarrow 0$  K, tiende a la energía de Fermi  $\mu_0$  para  $T = 0$  K conforme a la fórmula

$$\mu = \mu_0 \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right] \quad (33.2)$$

Tomando en consideración que en todos los casos, interesantes en la práctica,  $\mu \gg kT$ , la magnitud  $\mu$  en (34.1) puede estimarse igual a  $\mu_0$ .

Sea  $E_0$  la energía del electrón en reposo en las inmediaciones de la superficie fuera del metal (fig. 131). La fórmula (34.1) permite calcular la probabilidad de que el electrón posea la energía  $E_0$  si  $E_i$  se sustituye por  $E_0$ . Esta probabilidad no es nula y es tanto mayor, cuanto más alta es la temperatura (o sea, cuanto menor es  $\beta$ ). Así pues, en la proximidad de la superficie del metal existe una nube electrónica que se encuentra en equilibrio con el gas electrónico dentro del metal. Dicho equilibrio es dinámico: los electrones dentro del metal, que poseen una energía cinética suficientemente grande, superan las fuerzas que los sostienen dentro del metal, y rebasan sus límites; los electrones cerca del metal para las correspondientes direcciones de sus velocidades y posición son capturados por las fuerzas que mantienen los electrones dentro del metal. De esta manera, en condiciones de equilibrio dinámico la superficie del metal se atraviesa por las corrientes de dirección contraria, cuyas intensidades son iguales, según el módulo. La intensidad sumaria de la corriente a través de la superficie es nula. *El fenómeno de formación de una nube electrónica en las inmediaciones de la superficie metálica a causa del movimiento térmico de los electrones libres se denomina emisión termoiónica.* A 0 K no se observa ninguna emisión termoiónica, es decir, en la proximidad de la superficie metálica no existe ninguna nube electrónica.

Los electrones con una energía cinética  $W_{cin}$  en la proximidad de la superficie metálica poseen una energía total  $E_i = W_{cin} + E_0$  y la fórmula (34.1) para ellos adquiere el siguiente aspecto:

$$\frac{n}{g} \Big|_{W_{cin}} = \frac{1}{\exp[\beta(E_{cin} + \Phi)] + 1} \quad (33.3)$$

donde  $\Phi = E_0 - \mu$  es el trabajo de salida de los electrones del metal. De la fórmula (34.3) se ve que la densidad de la nube electrónica cerca de la superficie metálica depende mucho del trabajo de salida  $\Phi$  y disminuye bruscamente al aumentar éste.

Si en las inmediaciones de la superficie metálica existe un campo eléctrico, los electrones de la nube se ponen en movimiento y se forma una corriente eléctrica, denominada termoiónica. Así pues, si en el vacío existen dos placas metálicas, a las que se aplica una diferencia de potencial, entre ellas surge una corriente termoiónica. Es obvio que *la intensidad de la corriente debe crecer al*

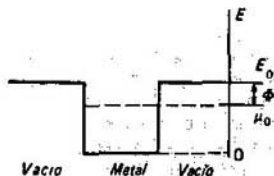


Fig. 131  
Niveles energéticos de los electrones libres en el metal

aumentar la diferencia de potencial. Existe una intensidad de la corriente máxima cuando todos los electrones que llegan a la nube electrónica a través de la superficie catódica, se arrastran por el campo eléctrico exterior hacia el ánodo, entonces no habrá ninguna corriente inversa de los electrones a través de la superficie al interior del cátodo. La mencionada intensidad de la corriente máxima se denomina intensidad de corriente de saturación; al aumentar posteriormente la diferencia de potencial entre el ánodo y cátodo, la intensidad de la corriente no varía, ya que todos los electrones que se suministran del cátodo debido a la emisión termiónica, se utilizan para formar la corriente eléctrica y para el ulterior aumento de la intensidad de la corriente no quedan ningunos portadores de la carga.

Para los metales  $\Phi$  constituye varios electrón-voltios. La energía de  $kT$  incluso a una temperatura de miles de kelvin constituye partes del electrón-voltio. Por consiguiente,  $\beta\Phi \gg 1$  y  $\exp\{\beta(W_{\text{cin}} + \Phi)\} \gg 1$ . Por eso en (34.3) en el denominador puede monospreciarse la unidad en comparación con  $\exp\{\beta(W_{\text{cin}} + \Phi)\}$  y escribir esta fórmula como

$$\frac{n}{g} \Big|_{W_{\text{cin}}} \approx e^{-\Phi/(kT)} e^{-W_{\text{cin}}/(kT)} \quad (34.4.)$$

Así, pues, la intensidad de la corriente de saturación depende en gran parte del trabajo de salida y de la temperatura, puesto que estas magnitudes entran en el exponente. Para los metales puros una corriente considerable puede obtenerse sólo a temperatura de un orden de 2000 K, es decir, en calidad de cátodos es necesario utilizar metales con elevada temperatura de fusión. Al mismo tiempo es deseable que su trabajo de salida sea el menor posible. Por ejemplo, el tungsteno puro, cuyo trabajo de salida es de 4,5 eV, debe trabajar a temperatura de 2500 K. Para disminuir la temperatura de funcionamiento del cátodo y reducir el trabajo de salida se hace uso de los cátodos revestidos de óxido, cuando con ayuda de los correspondientes procesos tecnológicos el soporte del cátodo se cubre de una capa de óxidos de metales alcalino-térreos (verbigracia, BaO, SrO y otros). Después el cátodo se activa dejando pasar por él una corriente termiónica a temperatura del cátodo de unos 1300 K. En definitiva, se forma una capa monoatómica de átomos alcalino-térreos que reducen considerablemente el trabajo de salida. Por ejemplo, los cátodos revestidos de óxidos de bario y estroncio poseen un trabajo de salida de unos 1,8 eV, merced a lo cual ya a una temperatura de cerca de 1100 K se logra obtener corrientes considerables. A esta misma temperatura se alcanza una densidad de corriente del orden de  $10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ . Por lo general, la capa de óxido de bario y estroncio se aplica a un tubo de níquel, dentro del cual se utiliza a título de calentador un filamento de tungsteno. Semejante estructura tiene una ventaja complementaria en comparación con el uso del filamento de tungsteno calentado como cátodo, ya que en este último caso a lo largo del filamento surge una caída de potencial grande y su superficie no será equipotencial. En el cátodo, recubierto de óxidos, la capa de éstos es una superficie equipotencial, lo que mejora bastante las condiciones de trabajo del cátodo en total.

**Características de la nube electrónica.** La nube electrónica en la proximidad de la superficie metálica se describe mediante la fórmula (34.4). El número de

estados cuánticos en un elemento de volumen fásico  $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$  es

$$g = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} dx dy dz dp_x dp_y dp_z. \quad (34.5)$$

Por esta razón, la cantidad de electrones, incluidos en el elemento del volumen fásico  $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ , se representa así

$$dn = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\Phi/(kT)} e^{-p^2/(2m_e kT)} \times \\ \times dx dy dz dp_x dp_y dp_z, \quad (34.6)$$

donde  $W_{cin} = p^2/(2m_e)$ .

La integración de la expresión (34.6) respecto a  $dx dy dz$  nos da como factor el volumen  $V$ . Por eso la cantidad de electrones en el volumen  $V$ , cuyos impulsos se encuentran en el elemento de volumen  $dp_x dp_y dp_z$  cerca del impulso  $p_x, p_y, p_z$  es igual a

$$dn_p = [2V/(2\pi\hbar)^3] \exp[-\Phi/(kT)] \exp[-p^2/(2m_e kT)] dp_x dp_y dp_z, \quad (34.7)$$

donde  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ . De aquí para la concentración de la nube electrónica en las inmediaciones de la superficie metálica obtenemos la expresión

$$n'_0 = \frac{1}{V} \int dn_p = \left[ \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \right] \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e kT}\right) dp_x dp_y dp_z = \\ = \frac{1}{4} \left( \frac{2\pi m_e kT}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right). \quad (34.8)$$

La energía cinética media de los electrones

$$\langle W_{cin} \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{\int [p^2/(2m_e)] dn_p}{\int dn_p} = \frac{3}{2} kT. \quad (34.9)$$

**Densidad de la corriente de saturación.** Dirijamos el eje  $Z$  del sistema cartesiano de coordenadas perpendicularmente a la superficie metálica (fig. 132). Los electrones contribuyen en la densidad de la corriente de saturación mediante la componente  $v_z$  de la velocidad por el eje  $Z$ . La aportación de un electrón a la densidad de la corriente es igual a  $ev_z = ep_z/m_e$ . Por lo tanto, la densidad de la corriente de saturación se define por la fórmula

$$j_{sat} = \frac{e}{m_e} \int_{p_z > 0} p_z dn_p = \left[ \frac{2e}{m_e (2\pi\hbar)^3} \right] \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2m_e kT}\right) dp_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p_y^2}{2m_e kT}\right) dp_y \int_0^{\infty} p_z \exp\left(-\frac{p_z^2}{2m_e kT}\right) dp_z = \\ = \frac{em_e k^2}{2\pi^2 \hbar^3} T^2 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right), \quad (34.10)$$

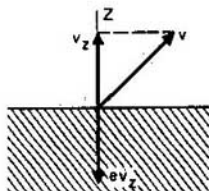


Fig. 132  
Para calcular la intensidad de la corriente de saturación

o bien

$$j_{sat} = AT^2 \exp[-\Phi/(kT)], \quad (34.11)$$

donde la constante

$$A = em_e k^2 / (2\pi\hbar^3) = 1,2 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}. \quad (34.12)$$

La igualdad (34.11) se denomina fórmula de Richardson—Dushman.

Para la verificación experimental de dicha fórmula es cómodo representarla como

$$\ln(j_{sat}/T^2) = \ln A - \Phi/(kT). \quad (34.13)$$

En la gráfica, según la fórmula (34.13), la dependencia entre  $\ln(j_{sat}/T^2)$  y  $1/T$  se expresa por una línea recta (fig. 133). El experimento corrobora seme-

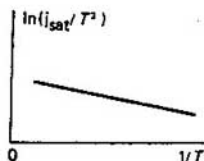


Fig. 133  
Dependencia entre la intensidad de la corriente de saturación y la temperatura

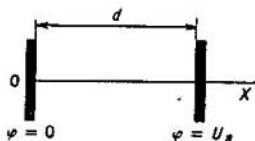


Fig. 134  
Para deducir la ley de Child — Langmuir

jante dependencia, teniendo en cuenta una pequeña variación de  $\Phi$ , determinada por la disminución de  $\mu$  con la temperatura [véase (34.2)]. Conforme a la fórmula (34.13), por el ángulo de inclinación de la recta se define el trabajo de salida  $\Phi$ . La intersección de la recta con el eje de ordenadas nos permite calcular  $\ln A$ . Según la fórmula (34.12), la magnitud  $A$  debe ser una constante universal, igual para todos los metales. Esta conclusión no se confirma por los ensayos. Para diferentes metales existe cierta divergencia de los valores de  $A$ . Por ejemplo, para el cobre  $A = 1,1 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}$ , para el níquel  $A = 1,2 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}$  y para el platino  $A = 0,3 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}$ . Esta variación de  $A$  está determinada por los efectos superficiales. Además, la densidad de la corriente de saturación de los cristales se diferencia en cierto grado para distintas caras.

**Ley de Child—Langmuir.** Examinemos la dependencia de la intensidad de la corriente que circula en el vacío entre los electrodos, respecto a la diferencia de potencial aplicada. Consideremos que los electrodos son planos y dirijamos el eje  $X$  perpendicularmente a la superficie de los electrodos (fig. 134). Tomemos el potencial del cátodo por cero ( $\varphi_c = 0$ ) y el potencial del ánodo lo designemos por  $U$ .

El factor físico principal que influye sobre el movimiento de los electrones entre el cátodo y el ánodo, es la carga volumétrica: las fuerzas de interacción

con ella dificultan el movimiento de los electrones del cátodo al ánodo bajo la acción de la diferencia de potencial aplicada.

Supongamos que las áreas de las placas del cátodo y el ánodo son bastante grandes y durante el cálculo de la densidad de la corriente cerca de la línea que une los centros de los electrodos, se puede menospreciar la variación de las magnitudes en las direcciones perpendiculares a esta línea, es decir, examinar un problema unidimensional, cuando todas las magnitudes dependen sólo de la coordenada  $x$ . La ecuación de Poisson para el potencial tiene la forma

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho e}{\epsilon_0} = \frac{n |e|}{\epsilon_0}, \quad (34.14)$$

donde  $n$  es la concentración de electrones. El principio de conservación de la energía para la deriva de los electrones tiene la forma

$$1/2 m_e v_{\text{der}}^2 = |e| \varphi, \quad (34.15)$$

donde  $v_{\text{der}}$  es la velocidad de deriva en el punto con potencial  $\varphi$ . La densidad volumétrica de corriente en ese punto es

$$|j| = n |e| v_{\text{der}}. \quad (34.16)$$

Todas las magnitudes en el segundo miembro de (34.16) son positivas. Calculando  $v_{\text{der}}$  de (34.15) y poniendo la ecuación obtenida en (34.16), hallamos

$$n |e| = |j| [m_e / (2 |e| \varphi)]^{1/2}. \quad (34.17)$$

Teniendo en cuenta (34.17), la ecuación (34.14) se transforma en

$$d^2\varphi/dx^2 = \alpha / \sqrt{\varphi}, \quad (34.18)$$

donde  $\alpha = (|j| / |e|) \sqrt{m_e / (2 |e|)}$ . Después de multiplicar los dos miembros de (34.18) por  $(d\varphi/dx) = \dot{\varphi}$ , obtenemos

$$\ddot{\varphi} \dot{\varphi} = \alpha \dot{\varphi} / \sqrt{\varphi}, \quad (34.19)$$

donde los puntos significan la diferenciación con relación a  $x$ . Tomando en consideración que

$$\ddot{\varphi} \dot{\varphi} = (\dot{\varphi}^2)^{\cdot} / 2, \quad \dot{\varphi} / \sqrt{\varphi} = 2(\sqrt{\varphi})^{\cdot}; \quad (34.20)$$

escribamos (34.19) así:

$$(\dot{\varphi}^2)^{\cdot} = 4\alpha (\sqrt{\varphi})^{\cdot}. \quad (34.21)$$

Ahora se puede integrar los dos miembros de (34.21) respecto a  $x$  en los límites desde 0 hasta el valor de  $x$  para el cual el potencial es igual a  $\varphi$ . Entonces,

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0^2 = 4\alpha \sqrt{\varphi}, \quad (34.22)$$

donde se tuvo en cuenta que  $\varphi(0) = 0$ . La derivada  $(d\varphi/dx)_0$  caracteriza la intensidad del campo eléctrico cerca del cátodo,  $\alpha$  es proporcional a  $j$ . Por eso la densidad volumétrica de la corriente  $j$  alcanza el valor máximo para  $(d\varphi/dx)_0 =$

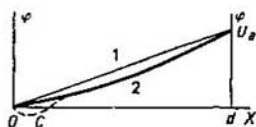


Fig. 135  
Influencia de la carga volumétrica sobre la distribución del potencial entre el ánodo y el cátodo

= 0 y entonces [véase (34.22)]

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\sqrt{\alpha}\varphi^{1/4}, \quad (34.23)$$

o bien

$$\frac{d\varphi}{\varphi^{1/4}} = 2\sqrt{\alpha} dx. \quad (34.24)$$

Al integrar los dos miembros de (34.24) dentro de los límites desde  $x = 0$  hasta  $x = d$ ,  $\varphi = U$ , obtenemos

$$U^{3/4} = \frac{3}{2} d\sqrt{\alpha}. \quad (34.25)$$

Elevando ambos miembros de (34.25) al cuadrado y teniendo en cuenta que

$$\alpha = (|j|/e_0)\sqrt{m_e/(2|e|)}, \quad (34.26)$$

obtenemos

$$|j| = \beta U^{3/2}, \quad (34.27)$$

donde

$$\beta = \frac{4e_0}{9d^2} \left( \frac{2|e|}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (34.28)$$

El cálculo de un problema semejante para los electrodos cilíndricos coaxiales, para los electrodos esféricos concéntricos conduce a la misma forma de dependencia entre la densidad volumétrica de la corriente y la diferencia de potencial elevada a la potencia de tres medios. A propósito, esta dependencia se podía esperar sin realizar cálculos algunos mediante el análisis de las dimensiones. El coeficiente  $\beta$  en todos los casos tiene la misma dimensión, como se desprende de la ecuación de Poisson, escrita en diversos sistemas de coordenadas.

En ausencia de la carga volumétrica entre el cátodo y el ánodo, la variación del potencial transcurre por una ley lineal (fig. 135; la recta 1). La carga volumétrica cambia ese curso. Está claro que en las proximidades del cátodo la carga volumétrica reduce las fuerzas que actúan sobre los electrones en ausencia de la carga volumétrica, mientras que en las inmediaciones del ánodo, las aumenta. Por eso la variación del potencial entre los electrodos, tomando en consideración la carga volumétrica, se caracteriza por la curva 2.

La deducción de la fórmula (34.27) fue hecha en suposición de que los electrones abandonan el cátodo con una velocidad nula. En cambio, ellos pueden abandonar el cátodo con la velocidad finita de emisión. En este caso la corriente existe incluso si cerca del cátodo hay un pequeño campo inverso. Por consiguiente, la densidad volumétrica de la carga puede cambiar hasta valores, para los cuales el potencial cerca del cátodo disminuya hasta valores negativos. Como consecuencia de esto, la marcha del potencial en la proximidad del cátodo se caracterizará por la curva punteada C.

Siendo la diferencia de potencial suficientemente grande, se observa una desviación de la ley de Child—Langmuir. Ella surge cuando la densidad volumétrica de la carga se reduce a tal grado, que resulta imposible mantener el campo

eléctrico nulo en la superficie del cátodo y, por lo tanto, no se cumple la condición  $(d\phi/dx)_0 = 0$ , para la cual se introdujo la ley de los tres medios. Durante el posterior aumento de la intensidad, la densidad volumétrica de corriente se hace independiente de la diferencia de potencial (la corriente de saturación).

La ley de Child—Langmuir se estudia aquí a título de ejemplo de una relación no lineal entre la intensidad de la corriente y la tensión. Dicha ley no tiene un carácter universal e incluso en el caso citado es válida sólo en un intervalo relativamente estrecho de tensiones y corrientes. La carencia de linealidad en la característica tensión-corriente es la peculiaridad más importante de muchos elementos de los circuitos radio y electrotécnicos, incluyendo los elementos de la electrónica de los sólidos.

¿En qué consiste el mecanismo de la emisión termoiónica? ¿Qué es lo que determina la existencia de corriente de saturación? ¿De qué factores depende su intensidad?

¿A qué condiciones se observan las desviaciones de la ley de Child—Langmuir?

## Problemas

- La concentración de electrones de conducción en el cobre es igual a  $n_0 = 8,5 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ . Determinar la velocidad de deriva de los electrones de conducción para la densidad de corriente  $j = 10 \text{ A/mm}^2$ .
- A través de un electrolito pasaron  $|Q|$  coulombios de electricidad. Las movilidades de los iones son  $b^{(+)}$  y  $b^{(-)}$ . ¿Qué cantidad de electricidad han traspasado los iones positivos y negativos?
- Dos baños electrolíticos (cubetas reográficas) con soluciones de  $\text{AgNO}_3$  y  $\text{CuSO}_4$  están acopladas en serie. Definir la masa de plata que se libera en el transcurso de un tiempo, durante el cual se desprendieron 10 mg de cobre.
- La electrólisis de  $\text{AgNO}_3$  se lleva a cabo a una diferencia de potencial de 4 V. ¿Qué energía se gasta para liberar 100 mg de plata?
- Una cinta metálica conductora de un grosor  $a = 0,1 \text{ mm}$  y anchura  $d = 5 \text{ cm}$  se coloca en un campo magnético homogéneo con inducción  $B = 1 \text{ T}$ , dirigida perpendicularmente a la superficie de la cinta. Por ésta circula una corriente de intensidad  $I = 1,6 \text{ A}$ . Hallar la diferencia de potencial de Hall.
- En un tubo de descarga de gases entre los electrodos con el área de la sección transversal de  $1 \text{ cm}^2$ , situados a la distancia de 3 cm uno del otro, la intensidad de la corriente de saturación es igual a  $I_{\text{sat}} = 10^{-7} \text{ A}$ . La descarga no es automantenida. ¿Cuántas cargas elementales de cada uno de los signos surge cada segundo en  $1 \text{ cm}^2$  del volumen del tubo?

## Respuestas

- 5.1.  $v_{\text{der}} = 0,0736 \text{ cm/s}$ . 5.2.  $|Q^{(+)}| = \frac{b^{(-)} |Q|}{b^{(-)} + b^{(+)}}$ ,  $|Q^{(-)}| = \frac{b^{(+)} |Q|}{b^{(-)} + b^{(+)}}$ . 5.3. 34 mg.  
5.4. 360 J. 5.5.  $10^{-3} \text{ V}$ . 5.6.  $N \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$ .

## Campo magnético estacionario

El campo magnético estacionario se determina por las corrientes eléctricas. No se puede crear con el movimiento de una carga aislada, ya que en este caso el campo magnético será inevitablemente alternativo. A pesar de eso, mediante el principio de superposición se saca la conclusión de la formación del campo por una carga aislada en movimiento.

### § 35. Ley de la corriente total

*Se da la deducción de la forma diferencial de la ley de la corriente total. Se examina la verificación experimental de la ley de la corriente total.*

**Planteamiento del problema.** Lo mismo que en la electrostática, nos hace falta obtener la forma diferencial de las leyes del campo magnético. En la electrostática eso se ha hecho, partiendo de la ley de Coulomb y el principio de superposición como teorías experimentales. Su enunciación integral se da mediante el teorema de Gauss, del que se desprende la ecuación diferencial (13.20).

Para el campo magnético se puede, en principio, hacer lo mismo, a saber: puede partirse de la ley de Biot—Savart (10.10) ó (10.11) y el principio de superposición para el campo magnético como factores experimentales. Su enunciación integral se denomina ley de la corriente total (en este capítulo es para el caso de campos estacionarios) de los que se obtiene la ecuación diferencial correspondiente. Sin embargo, puede hacerse de otra manera y seguir la deducción teórica de las leyes del campo magnético basándose en las leyes del campo eléctrico mediante la teoría de la relatividad (véanse los §§ 8, 9). Por eso partimos de la fórmula (9.28) para la inducción del campo magnético de una corriente que pasa por un conductor infinito rectilíneo, la cual se obtuvo teóricamente.

**Forma integral de la ley de la corriente total.** Las líneas de inducción del campo magnético, originado por la corriente que pasa por un conductor fino ilimitado y rectilíneo, son circunferencias concéntricas, cuyo centro se encuentra en la línea de la corriente. El valor de la inducción se da mediante la fórmula (9.28). Calculemos la circulación del vector  $\mathbf{B}$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (35.1)$$

respecto a cierto circuito cerrado  $L$  alrededor de la corriente  $I$  (fig. 136). Dado que las líneas de  $\mathbf{B}$  yacen en los planos, perpendiculares a la línea de corriente  $I$ , es necesario elegir el circuito  $L$  yacente en uno de los planos.



Haciendo uso, para calcular la integral (35.1), de las designaciones mostradas en la fig. 137,  $\alpha$ , obtenemos

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B dl \cos(\widehat{\mathbf{B}, d\mathbf{l}}) = B dl_{\perp}. \quad (35.2)$$

Según la definición,  $d\alpha = dl_{\perp}/r$ . Tomando en consideración la fórmula (10.3), escribamos (35.2) de manera

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} dl_{\perp} = \frac{\mu_0}{2\pi} I d\alpha. \quad (35.3)$$

Entonces

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \oint_L d\alpha = \mu_0 I, \quad (35.4)$$

donde se tiene en cuenta que la integral respecto a  $d\alpha$  por el circuito cerrado, que rodea el origen de coordenadas, es igual a  $2\pi$ . Por lo tanto, la circulación

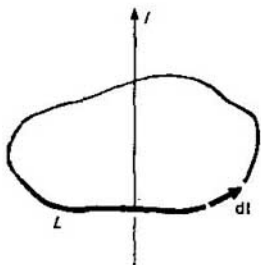


Fig. 136  
Cálculo de la circulación del vector  $\mathbf{B}$  por un circuito cerrado

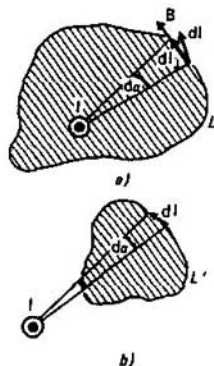


Fig. 137  
La corriente  $I$  está dirigida perpendicularmente al plano del diseño hacia arriba. El rodeo positivo del contorno es en sentido contrario a las agujas del reloj

del vector  $\mathbf{B}$  por un circuito cerrado alrededor de una corriente no depende de la forma del circuito y se determina sólo por la intensidad de la corriente.

Si el circuito cerrado  $L'$  no abarca la corriente  $I$  (fig. 137, b), entonces

$$\oint_{L'} d\alpha = 0, \quad (35.5)$$



Fig. 138  
Generalización de la ley de la corriente total para un conjunto arbitrario de corrientes

es decir, la circulación del vector  $\mathbf{B}$  por un circuito cerrado, que no abarca la corriente, es nula. Por esta razón, los resultados obtenidos pueden enunciarse así:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \begin{cases} \mu_0 I & \text{(el circuito de integración abarca la corriente),} \\ 0 & \text{(el circuito de integración no abarca la corriente).} \end{cases} \quad (35.6)$$

Imaginémonos que existe una gran cantidad de corrientes y el circuito abarca sólo una parte de ellas (fig. 138). La inducción del campo magnético en cada punto del circuito, según el principio de superposición, es igual a la suma de inducciones de los campos magnéticos, creados por cada una de las corrientes:

$$\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i. \quad (35.7)$$

Sustituyendo  $\mathbf{B}$  en el primer miembro de (35.6), obtenemos

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \left( \sum_i \mathbf{B}_i \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum_i \oint_L \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \mu_0 I_k = \mu_0 I, \quad (35.8)$$

donde con el índice  $k$  se designan sólo las corrientes que entraron en el circuito  $L$ . Las corrientes no abarcadas por dicho circuito, no dan aportación alguna en la integral. Por consiguiente, la intensidad de la corriente  $I$  en (35.8) es la suma de todas las intensidades de las corrientes que abarca el circuito. Por esta razón, en el caso general, la ley de la corriente total puede enunciarse como

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad (35.9)$$

donde  $I$  es la intensidad de la corriente total que abarca el circuito  $L$ . Si la intensidad de la corriente total es nula, la circulación es también nula. Este caso se realiza no sólo cuando el circuito no abarca ninguna corriente, sino también cuando las corrientes rodeadas circulan en sentidos contrarios y en total se anulan. Por ejemplo, la circulación de  $\mathbf{B}$  por el contorno que rodea dos corrientes de igual intensidad que circulan en sentidos contrarios, es igual a cero. En la fórmula (35.9) el signo de la corriente  $I$  se considera según la regla general (véase el § 14): si la dirección del rodeo del contorno  $L$  y el sentido de la corriente están relacionados por la regla de Ampère, el signo de  $I$  es positivo.

En el caso contrario el signo de  $I$  es negativo.

La expresión (35.9) de la ley de la corriente total para el vacío en el caso estacionario es el corolario directo de la relación (9.28) y puede verificarse por vía experimental. La mencionada ley fue deducida antes para una corriente que

pasa por un conductor infinito recto, pero ahora quedará obvio que es válida también para una corriente arbitraria.

**Forma diferencial de la ley de la corriente total.** Escribamos la fórmula (35.9) para las corrientes volumétricas. Designemos por  $S$  la superficie encerrada por el contorno  $L$ . Como siempre, la normal positiva a la superficie está relacionada con la dirección del rodeo del circuito  $L$  mediante la regla de Ampère.

La intensidad de la corriente total  $I$ , que circula por la superficie, es

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (35.10)$$

donde  $\mathbf{j}$  es la densidad volumétrica de la corriente. Por lo tanto, la ley de la corriente total (35.9) adquiere la forma

$$\int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (35.11)$$

El primer miembro de la igualdad (35.11) puede transformarse por el teorema de Stokes en la integral por la superficie:

$$\int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (35.12)$$

y representar la igualdad (35.11) como

$$\int_S [\text{rot } \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j}] \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (35.13)$$

La igualdad a cero de la integral (35.13) debe observarse para la elección arbitraria de la superficie  $S$ . Por consiguiente, el integrando es nulo:

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}}. \quad (35.14)$$

La igualdad (35.14) es la forma diferencial de la ley de la corriente total. Tiene carácter diferencial y es válida en cada punto. De aquí se desprende que es correcta para un campo arbitrario a pesar de ser deducida para un campo, originado por la corriente que pasa por un conductor infinito rectilíneo.

Ahora puede demostrarse que la ley de la corriente total (35.9) es válida para las corrientes arbitrarias y no sólo para las rectilíneas. Para la demostración tomemos corrientes arbitrarias y tracemos una superficie  $S$  al azar, limitada por el contorno cerrado  $L$ . Multiplicando los dos miembros de (35.14) por el elemento  $d\mathbf{S}$  de esa superficie, e integrando respecto a  $d\mathbf{S}$ , hallamos

$$\int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (35.15)$$

El primer miembro de (35.15) se transforma por el teorema de Stokes (35.12) en la integral por el contorno y el segundo miembro, con ayuda de (35.10) se expresa mediante la corriente total  $I$  que interseca la superficie. En definitiva,



Fig. 139  
Espiral de Rogowski

(35.15) adquiere la forma (35.9). Eso demuestra que la ley (35.9) es válida para corrientes y contornos arbitrarios. Señalemos también que al calcular la intensidad de la corriente total por la fórmula (35.10), puede elegirse cualquier superficie  $S$ , tendida sobre el circuito  $L$ . De aquí se desprende que la ecuación (35.14) se recibió partiendo de la ley de Coulomb, el principio de superposición para la intensidad del campo eléctrico, la invariancia de la carga y las fórmulas de la teoría de la relatividad. La ley de Biot—Savart en forma (10.10) ó (10.11) se obtiene de (35.14) como solución de esta ecuación en caso de no haber corrientes en el infinito [véase (37.11, c)].

**Verificación experimental de la ley de la corriente total.** Para demostrar la ley de la corriente total y su comprobación experimental con una precisión no muy elevada puede hacerse uso de la espiral de Rogowski. Representa en sí una espiral de alambre flexible, confeccionada en forma de cinturón (fig. 139), cuyos extremos se conectan al galvanómetro. La acción de la espiral se funda en la ley de inducción electromagnética de Faraday (véase el capítulo 8) al cambiar el campo magnético, en el circuito de la espiral de Rogowski surge una corriente eléctrica. Según las indicaciones del galvanómetro puede determinarse

$$\int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad (35.16)$$

donde  $L$  es el contorno que coincide con el eje de la espiral de Rogowski.

Para mostrar la ley de la corriente total (35.9) es suficiente colocar la espiral de Rogowski en forma de circuito cerrado que coincida con los contornos  $L$  y  $L'$  (véase la fig. 137). Al conectar la corriente, en el caso mostrado en la fig. 137, *a*, se observa la desviación de la aguja del galvanómetro, por la que puede uno cerciorarse de que la integral es igual a  $\mu_0 I$ . Para el caso dado en la fig. 137, *b* la aguja del galvanómetro no se desvía, lo que significa la igualdad a cero de la circulación del vector  $\mathbf{B}$  por el contorno  $L'$ .

**Deducción de la forma diferencial, diferenciando directamente la fórmula de Biot—Savart.** La fórmula (35.14) se obtiene inmediatamente si se toma la operación rot de los dos miembros de la fórmula (10.11) que expresa la ley de Biot—Savart. En el segundo miembro la operación rot se aplica sólo al integrando, ya que el volumen  $V$  de la integración no depende de las variables, por las cuales se efectúa la operación. En el integrando  $\mathbf{j}$  no depende de dichas variables, sólo depende  $r$  y  $\gamma$ . Calculando rot y efectuando la integración, obtenemos la fórmula (35.14). Dichos cálculos pueden realizarse como ejercicios.

Si la permeabilidad magnética del cuerpo supera la del medio, el cuerpo se comporta como un paramagnético, pero si es inferior a la del medio, como un diamagnético.

La circulación del vector de inducción por un circuito cerrado alrededor de la corriente no depende de la forma del circuito y se determina sólo por la intensidad de la corriente.

**Ejercicio 35.1.** Aplicando la ley de la corriente total, hallar la inducción del campo magnético en un cable coaxial que se utiliza para transmitir la corriente continua (fig. 140). La corriente circula por el alma central de radio  $r_1$  y retorna por la envoltura, cuyos radios exterior e interior son iguales a  $r_2$  y  $r_3$ . El espacio entre el alma y la envoltura está lleno de dieléctrico.

Teniendo en cuenta la simetría axial del campo magnético, mediante la ley de la corriente total, obtenemos

$$B = \frac{\mu \cdot I_r}{2\pi r},$$

donde  $I_r$  es la intensidad de la corriente que se rodea por un contorno circular de radio  $r$ . La densidad de corriente en el alma  $j_1 = I/(\pi r_1^2)$ . Por eso para  $0 < r < r_1$ , tenemos  $I_r = j_1 \pi r^2 = I r^2 / r_1^2$  y, por consiguiente,

$$B = \mu I r / (2\pi r_1^2).$$

Para  $r_1 < r < r_2$  tenemos  $I_r = I = \text{const}$  y, por lo tanto,

$$B = \mu I / (2\pi r).$$

Para  $r_2 < r < r_3$  el contorno abarca la corriente de retorno, cuya densidad es

$$j_2 = I / [\pi (r_3^2 - r_2^2)].$$

Entonces la intensidad de la corriente que rodea el contorno para  $r_2 < r < r_3$  y la inducción del campo magnético son iguales a:

$$I_r = I - I \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2},$$

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right).$$

Fuera del cable la inducción del campo se anula.

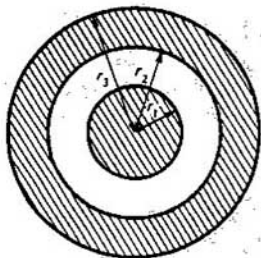


Fig. 140  
Cable coaxial

## § 36. Ecuaciones de Maxwell para un campo magnético estacionario

*Se da la enunciación de las ecuaciones de Maxwell para el caso particular del campo magnético estacionario y se discuten los tipos de problemas a resolver.*

**Ecuación para div B.** Calculemos la div B, partiendo de la fórmula (9.30):

$$\text{div B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{div} \left( i_x \cdot \frac{r}{r^3} \right) dx', \quad (36.1)$$

donde la operación de div se introdujo bajo el signo de la integral en virtud de que los límites de integración no dependen de las variables, respecto a las cuales

se efectúa la diferenciación al calcular  $\text{div}$ . Para las ulteriores transformaciones de las fórmulas es útil escribir en forma explícita las variables en la ecuación (36.1). Sea  $\mathbf{B}$  la inducción del campo en el punto  $(x, y, z)$ , es decir,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$ . El cálculo de  $\text{div}$  se reduce a la diferenciación respecto a  $x, y, z$ . Las coordenadas corrientes de los puntos de integración en el integrando (36.1) se designan por  $x'$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{i}_x(x-x') + \mathbf{i}_y y + \mathbf{i}_z z, \\ r &= \sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (36.2)$$

Según la fórmula (A.15) tenemos

$$\text{div} \left( \mathbf{i}_x \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \text{rot} \mathbf{i}_x - \mathbf{i}_x \text{rot} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad (36.3)$$

ya que el primer término del segundo miembro es igual a cero debido a la independencia de  $\mathbf{i}_x$  respecto a las coordenadas  $(x, y, z)$ , por las que se efectúa la diferenciación para calcular  $\text{rot}$ . La igualdad a cero del segundo término se demuestra calculando directamente  $\text{rot} (r/r^3) = 0$ . La igualdad a cero de  $\text{rot} (r/r^3)$  es consecuencia de la simetría central del campo del vector  $r/r^3$ . No es difícil demostrar que cualquier campo simétrico central es potencial. Recomendamos, como ejercicio, demostrar eso.

Así pues, el integrando en (36.1) es idénticamente igual a cero y, por lo tanto,

$$\boxed{\text{div} \mathbf{B} = 0.} \quad (36.4)$$

Partiendo de la igualdad (36.4) sacamos la conclusión (véase el § 13) de que las líneas de  $\mathbf{B}$  no tienen fuentes. Eso significa que *no existen cargas magnéticas que creen un campo magnético, como las cargas eléctricas originan el campo eléctrico*. Las líneas de  $\mathbf{B}$  no tienen ni comienzo ni fin. Ellas son o bien líneas cerradas o bien parten al infinito. Es obvio la ausencia de los inicios y finales de semejantes líneas. Sin embargo, pueden existir líneas no cerradas, incluidas en una zona finita del espacio y, a pesar de eso, no tener ni comienzo, ni final. Examinemos, por ejemplo, un toro (fig. 141), en cuya superficie se enrolla una espiral. Si la relación de la longitud de la circunferencia mayor del toro respecto al paso de la espiral es un número irracional, la línea jamás será cerrada y enrollará el toro una cantidad de veces infinita. Semejante línea es un ejemplo de una línea sin cerrar que no tiene ni comienzo ni final y está incluida en una zona finita del espacio. Es fácil efectuar experimentalmente las líneas de  $\mathbf{B}$  de semejante tipo. Para ese fin es necesario dejar pasar una corriente  $I_1$  por el eje del toro, perpendicularmente a su plano, y por la circunferencia mayor, que coincide con el eje de la espiral del toro, una corriente

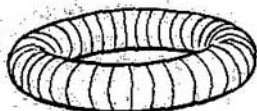


Fig. 141  
Para la relación irracional entre la longitud de la circunferencia del toro y el paso de la espiral la línea de fuerza no está cerrada

Experimentalmente las líneas de  $\mathbf{B}$  de semejante tipo. Para ese fin es necesario dejar pasar una corriente  $I_1$  por el eje del toro, perpendicularmente a su plano, y por la circunferencia mayor, que coincide con el eje de la espiral del toro, una corriente

$I_2$ . Para determinadas relaciones entre  $I_1$  e  $I_2$  se realizarán las condiciones mencionadas más arriba cuando las líneas de  $\mathbf{B}$  no estén cerradas.

**Ecuaciones de Maxwell.** Las ecuaciones (35.14) y (36.4) forman un sistema de ecuaciones de Maxwell para el campo magnético, originado por las corrientes continuas en el vacío:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (36.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (36.6)$$

La solución de estas ecuaciones permite hallar  $\mathbf{B}$  si  $\mathbf{j}$  es conocida. La cantidad de magnitudes escalares incógnitas en estas ecuaciones es igual a tres ( $B_x, B_y, B_z$ ) y el número total de ecuaciones escalares para definir las, es igual a cuatro [tres ecuaciones escalares que se obtienen de la primera ecuación vectorial y otra ecuación escalar más (36.6)]. De esta manera, la cantidad de ecuaciones supera el número de incógnitas, en cambio, el sistema no queda repleto (véase el § 58).

**Tipos de problemas a resolver.** Con ayuda de las ecuaciones (36.5) y (36.6) pueden resolverse dos problemas:

1. Sabiendo la inducción del campo magnético, hallar la densidad volumétrica de la corriente.

Para eso es necesario calcular  $\operatorname{rot} \mathbf{B}$  valiéndose de la ecuación (36.5).

2. Conociendo la densidad de las corrientes, hallar la inducción del campo magnético que engendran. Para ello es necesario resolver dichas ecuaciones para las incógnitas  $\mathbf{j}$ . Los métodos de solución de la ecuación se examinarán a continuación, ahora sólo señalemos que para el caso en que todas las corrientes se concentran en una zona finita del espacio, la solución se da por medio de la fórmula de Biot—Savart (10.11):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \quad (36.7)$$

Los cálculos resultan muy voluminosos, debido a una estructura compleja del integrando y su carácter vectorial. Para simplificarlos, es útil introducir el potencial vectorial.

La ecuación  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  indica que las líneas del vector no tienen ni comienzo ni final: ellas son o bien cerradas, o bien tienden al infinito o están concentradas en una zona finita del espacio, pero sin comienzo y final. Esto significa que no existen cargas magnéticas que creen un campo magnético, lo mismo que las cargas eléctricas crean un campo eléctrico.

¿Puede Ud citar un ejemplo de líneas que se encuentre toda en una zona finita del espacio, pero que no tenga ni comienzo ni final?

### § 37. Potencial vectorial

*Se examinan las propiedades del potencial vectorial y su calibración.  
Se calcula la inducción del campo de una corriente elemental.*

Posibilidad de introducir el potencial vectorial. La identidad conocida del análisis vectorial  $\text{div rot} = 0$  muestra que la solución de la ecuación

$$\text{div B} = 0 \quad (37.1)$$

puede representarse como

$$\mathbf{B} = \text{rot A}, \quad (37.2)$$

donde A es el potencial vectorial del campo magnético.

**Multiformidad del potencial vectorial.** El campo con una inducción prefijada B puede describirse no por un potencial vectorial, sino que por muchos. Para cerciorarse de ello, demostremos que si el potencial A describe un campo con inducción B, el otro potencial

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi \quad (36.3)$$

para una función arbitraria  $\chi$  describe el mismo campo B. Para demostrar eso calculemos la inducción del campo B' que se describe por el potencial A':

$$\mathbf{B}' = \text{rot A}' = \text{rot A} + \text{rot grad } \chi = \text{rot A} = \mathbf{B}, \quad (37.4)$$

dado que  $\text{rot grad} = 0$ .

La multiformidad del potencial vectorial es análoga a la del potencial escalar en la teoría del campo electrostático, sólo que *en aquel caso el potencial se determinaba con una precisión de hasta una constante arbitraria, mientras que en este caso, con una precisión de hasta una función arbitraria de cierta clase.*

**Calibración del potencial.** Haciendo uso de la multiformidad en la elección del potencial, puede imponerse una condición determinada sobre el potencial. En la magnetostática dicha condición se elige con más frecuencia en forma de

$$\text{div A} = 0 \quad (37.5)$$

y se denomina **condición de calibración del potencial**. Su papel es semejante al de la normación del potencial escalar en la electrostática. Por ejemplo, *la elección al azar del potencial vectorial muestra que el potencial vectorial posee sólo un valor auxiliar y no puede medirse experimentalmente.*

**Ecuación para el potencial vectorial.** Sustituyendo (37.2) en (36.5), obtenemos

$$\text{rot rot A} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (37.6)$$

Del análisis vectorial se sabe que

$$\text{rot rot A} = \text{grad div A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (37.7)$$



y por eso (37.6) toma la forma

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (37.8)$$

donde se toma en consideración la calibración (37.5). Escribamos la ecuación (37.8) en coordenadas:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z. \quad (37.9)$$

Así, pues, cada una de las proyecciones del potencial vectorial se somete a la ecuación de Poisson (véase el § 15). En particular, si todas las corrientes se concentran en una zona finita del espacio, por analogía con la función (14.35) que es solución de (15.14), puede escribirse la solución de las ecuaciones (37.9) como:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_x dV}{r}, \quad A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_y dV}{r}, \quad A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_z dV}{r} \quad (37.10)$$

o en forma vectorial

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r} dV. \quad (37.11a)$$

Para la corriente lineal

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\mathbf{l}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i I_i \int_{L_i} \frac{d\mathbf{l}}{r}, \quad (37.11b)$$

donde  $L_i$  son circuitos de las corrientes. En general, en cada uno de ellos la intensidad de corriente  $I_i$  es diferente. Al integrar por un contorno cerrado  $L_i$  de una corriente concreta, la intensidad de corriente  $I_i$  puede sacarse del signo de la integral como se hizo en la suma de (37.11b).

Después de hallar el potencial vectorial, por la fórmula (37.2) puede definirse la inducción del campo magnético, correspondiente a él.

**Ley de Biot-Savart.** De (37.11a) mediante la fórmula (37.2) obtenemos la siguiente expresión para la inducción del campo magnético:

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{rot} \left[ \frac{\mathbf{j}(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right] dx' dy' dz',$$

donde en forma explícita se han escrito las coordenadas del punto de observación en el que se calcula el rotor, y las coordenadas corrientes  $(x', y', z')$  del punto de integración. La operación de rotor incluye en sí el cálculo de las derivadas parciales respecto a  $(x, y, z)$ . Teniendo en cuenta la fórmula del análisis vectorial  $\text{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \text{rot} \mathbf{A} + \text{grad} \varphi \times \mathbf{A}$ , obtenemos

$$\text{rot} \frac{\mathbf{j}}{r} = \frac{1}{r} \text{rot} \mathbf{j} + \text{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{j} = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

donde  $\text{rot } \mathbf{j} = 0$ , ya que  $\mathbf{j}$  no depende de las variables, respecto a las cuales se calcula el rotor, y  $\text{grad } (1/r) = -\mathbf{r}/r^3$ . Por lo tanto, recibimos la fórmula

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV, \quad (37.11c)$$

que expresa la ley de Biot—Savart. De esta manera termina la deducción de las leyes principales del campo magnetostático partiendo de las leyes del campo electrostático con ayuda de la teoría de la relatividad.

**Campo de la corriente elemental.** Calculemos el potencial vectorial y la inducción del campo de una corriente cerrada elemental, es decir, de la corriente

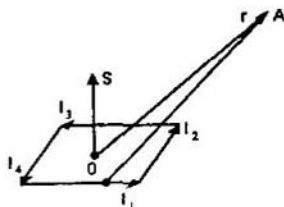


Fig. 142  
Corriente elemental

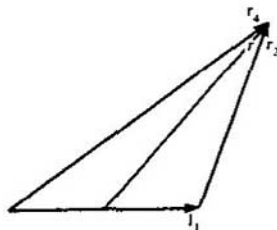


Fig. 143  
Cálculo de la diferencia de las distancias hasta dos puntos

lineal que rodea la superficie, cuyas dimensiones lineales en sentido físico son infinitamente pequeñas. El contorno por el que circula la corriente lineal  $I$ , se elige en forma de un paralelogramo con lados  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  y  $l_4$  (fig. 142). El origen de coordenadas se coloca en el punto  $O$  de la superficie, rodeada por la corriente. La elección del punto  $O$  no tiene importancia, ya que el contorno y la superficie son infinitamente pequeños. El potencial se calcula en el punto que se caracteriza por el radio vector  $\mathbf{r}$ . Según la fórmula (37.11b) obtenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{l_1 l_2 l_3 l_4} \frac{d\mathbf{l}}{r}, \quad (37.12)$$

donde se ejecutó el paso a las corrientes lineales ( $\mathbf{j} dV \rightarrow I d\mathbf{l}$ ).

Dado que las longitudes de los lados del paralelogramo son ínfimas, al integrar (37.12) respecto a cada uno de sus lados, el valor  $r$  puede considerarse constante e igual, por ejemplo, a la distancia desde el punto en que se determina el campo hasta el medio del lado. Por eso [véase (37.12)]

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \left( \frac{1}{r_1} \int_{l_1} d\mathbf{l} + \frac{1}{r_2} \int_{l_2} d\mathbf{l} + \frac{1}{r_3} \int_{l_3} d\mathbf{l} + \frac{1}{r_4} \int_{l_4} d\mathbf{l} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \left( \frac{l_1}{r_1} + \frac{l_2}{r_2} + \frac{l_3}{r_3} + \frac{l_4}{r_4} \right). \end{aligned} \quad (37.13)$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{l}_1 = -\mathbf{l}_3$  y  $\mathbf{l}_2 = -\mathbf{l}_4$ , hallamos

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{l}_1}{r_1} + \frac{\mathbf{l}_2}{r_2} &= \mathbf{l}_1 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3} \right) = \mathbf{l}_1 \left( \frac{r_3 - r_1}{r_1 r_3} \right) \approx \frac{\mathbf{l}_1 (-\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^3} = -\frac{\mathbf{l}_1 (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^3}, \\ \frac{\mathbf{l}_2}{r_2} + \frac{\mathbf{l}_4}{r_4} &= \mathbf{l}_2 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_4} \right) = \mathbf{l}_2 \left( \frac{r_4 - r_2}{r_2 r_4} \right) = \frac{\mathbf{l}_2 (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r})}{r^3}, \end{aligned} \quad (37.14)$$

donde se toma en consideración que durante los cálculos se puede menospreciar las infinitésimas de órdenes superiores. Verbigracia, en la fig. 143 se muestran las construcciones geométricas que se han usado al calcular la segunda serie de las igualdades (37.14):

$$\mathbf{r}_4 = \mathbf{l}_1 + \mathbf{r}_2, \quad (37.15)$$

de donde

$$r_4^2 = l_1^2 + r_2^2 + 2\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \quad (37.16)$$

y, por lo tanto,

$$r_4^2 - r_2^2 = (r_4 - r_2)(r_4 + r_2) = l_1^2 + 2\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_2. \quad (37.17)$$

Entonces

$$r_4 - r_2 = \frac{2\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + l_1^2}{r_4 + r_2} \approx \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r} / r. \quad (37.18)$$

Aquí se conservan sólo los términos del primer orden de pequeñez respecto a  $l_1$ . Con ayuda de las igualdades tipo (37.18) se obtienen las fórmulas (37.14). Más teniendo en cuenta (37.14), la expresión para el potencial (37.13) adquiere la forma

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [\mathbf{l}_2 (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{l}_1 (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r})]. \quad (37.19)$$

Del álgebra vectorial se conoce la descomposición del producto vectorial doble:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (37.20)$$

que muestra que la expresión entre corchetes de (37.19) puede representarse como

$$\mathbf{l}_2 (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{l}_1 (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r} \times (\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_1) = (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \times \mathbf{r}. \quad (37.21)$$

Tomando en consideración que

$$\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = \mathbf{S} \quad (37.22)$$

es el vector del elemento superficial, rodeado de corriente, escribamos de nuevo (37.19), pero teniendo en cuenta (37.21) y (37.22):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IS \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (37.23)$$

La magnitud

$$IS = p_m \quad (37.24)$$

desempeña un papel muy importante en el magnetismo y se denomina momento magnético de la corriente elemental. Según el módulo, es igual al producto de la

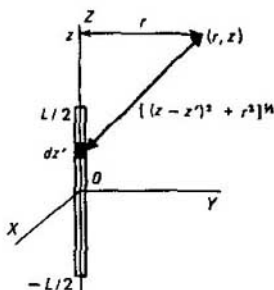


Fig. 144

Para calcular el potencial de la sección finita de una corriente rectilínea

intensidad de corriente en el contorno por el área que abarca el contorno. Coincide en dirección con el sentido de la normal positiva a la superficie. Representemos el potencial vectorial de la corriente elemental en forma

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{P_m \times r}{r^3}, \quad (37.25)$$

de donde

$$B = \text{rot } A = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(P_m \cdot r)r}{r^5} - \frac{P_m}{r^3} \right\}. \quad (37.26)$$

La fórmula (37.26) muestra que la inducción del campo del momento magnético disminuye inversamente proporcional al tercer grado de la distancia, mientras que la inducción del campo del elemento de la corriente decrece inversamente proporcional al cuadrado de las distancias. Ello se determina por el hecho de que la inducción del campo del momento magnético se compone de las inducciones de los campos de los elementos de las corrientes que circulan en sentidos opuestos a distancias muy pequeñas unas de otras.

**Ejemplo 37.1.** Hallar el vector potencial y la inducción del campo, creados por una sección rectilínea de un conductor lineal de longitud  $L$ , por el que pasa una corriente  $I$ .

Se comprende aquí que la sección dada forma parte del circuito cerrado. Según el principio de superposición, este potencial participa en calidad de sumando en el potencial total respecto a la corriente que circula por el contorno cerrado y por eso su cálculo tiene sentido físico, a pesar de que no existe una corriente continua que no sea cerrada. Coloquemos el origen de coordenadas en el medio de la sección en cuestión, dirigiendo el eje  $Z$  a lo largo del conductor (fig. 144). Puesto que el campo magnético de la corriente rectilínea es axialmente simétrico, es suficiente calcular la inducción en los puntos del plano  $ZY$ . Las coordenadas del punto en este plano se caracterizan por la distancia  $r$  desde el eje  $Z$  y por la coordenada  $z$ . De la fórmula (37.11b) se desprende que sólo la componente  $A_z$  es distinta de cero, ya que la corriente circula en dirección del eje  $Z$ . Entonces

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{[(x-z)^2 + r^2]^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4} \ln \left[ \frac{-z + L/2 + [(z-L/2)^2 + r^2]^{1/2}}{-(z+L/2) + [(z+L/2)^2 + r^2]^{1/2}} \right]. \quad (37.27)$$

La inducción se calcula valiéndose de la fórmula

$$B = \text{rot } A,$$

que es necesario escribir en coordenadas cilíndricas. La única proyección diferente de cero de la inducción  $B$  es  $B_\varphi$ , donde  $\varphi$  es el ángulo axial del sistema de coordenadas cilíndricas, con la particularidad de que

$$B_\varphi = -\partial A_z / \partial r. \quad (37.28)$$

En la figura en los puntos del plano  $ZY$   $B_\varphi$  es una componente, dirigida perpendicularmente a dicho plano hacia los valores negativos del eje  $X$ . Conforme a la fórmula (37.28) y

con ayuda de (37.27), obtenemos

$$B_{\varphi} = -\partial A_z / \partial r = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[ \frac{-z + L/2}{[r^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} + \frac{z + L/2}{[r^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} \right]. \quad (37.29)$$

Para un conductor rectilíneo infinito hallamos, partiendo de (37.27) y (37.29):

$$A_z (L \rightarrow \infty) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + \text{const}, \quad (37.30)$$

$$B (L \rightarrow \infty) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (37.31)$$

**Ejemplo 37.2.** Hallar el potencial vectorial y la inducción creados por la corriente que circula por un cable coaxial (fig. 140). El material de los conductores y el espacio entre ellos no son magnéticos.

El potencial se somete a la ecuación (37.8). Debido a la simetría axial del problema, es cómodo hacer uso del sistema de coordenadas cilíndricas, cuyo eje  $Z$  coincide con el eje del cable. Es evidente que, el potencial no depende de  $z$  y del ángulo axial  $\varphi$ , es decir,  $A = A(r)$ . Además, si sólo la componente  $j_z$  de la densidad de corriente es diferente de cero, se distinguirá de cero la componente  $A_z$  del potencial vectorial que es necesario buscar. Designemos esta componente por  $A$ . El índice indica la zona a la que pertenece dicha componente. De esta manera,  $A_1, A_2, A_3, A_4$  son los potenciales vectoriales en las zonas  $(0, r_1), (r_1, r_2), (r_2, r_3), (r_3, \infty)$ , respectivamente. Entonces, [véase (37.8)]

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_1 &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_1}{dr} \right) = -\frac{\mu_0 I}{\pi r_1^2} \quad (0 < r < r_1), \\ \nabla^2 A_2 &= 0 \quad (r_1 < r < r_2), \end{aligned}$$

donde  $j_1 = I/(\pi r_1^2)$ ,  $j_2 = 0$ ,  $j_3 = I/(r_3^2 - r_2^2)$ ,  $j_4 = 0$ .

La solución de las ecuaciones (37.32) es la siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_3 &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_3}{dr} \right) = -\frac{\mu_0 I}{\pi (r_3^2 - r_2^2)} \quad (r_2 < r < r_3), \\ \nabla^2 A_4 &= 0 \quad (r_3 < r < \infty) \end{aligned} \quad (37.32)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi r_1^2} + C_1 \ln r + C_2 \quad (0 < r < r_1), \\ A_2 &= C_3 \ln r + C_4 \quad (r_1 < r < r_2), \end{aligned} \quad (37.33)$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{\mu_0 I r^2}{4\pi (r_3^2 - r_2^2)} + C_5 \ln r + C_6 \quad (r_2 < r < r_3), \\ A_4 &= C_7 \ln r + C_8 \quad (r_3 < r < \infty). \end{aligned}$$

Hallamos la inducción del campo magnético por la fórmula  $B = \text{rot } A$  que en el caso dado se reduce a la expresión  $B_{\varphi} = -\partial A / \partial r$ .

Dado que  $B_{\varphi}$  es la única proyección de la inducción magnética distinta de cero, el índice  $\varphi$  en lo sucesivo se omite. El índice significa la zona a la que pertenece el valor de  $B$ . Entonces,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2} - \frac{C_1}{r}. \quad (37.34)$$

Para  $r = 0$ , del carácter finito de  $B_1$ , sacamos la conclusión de que  $C_1 = 0$ . Elijamos a título de condición de la normalización  $A_1(0) = 0$ . Eso nos da que  $C_2 = 0$  y por eso las expresiones para  $A_1$  y  $B_1$  toman la forma:

$$A_1 = -\mu_0 I r^2 / (4\pi r_1^2), \quad B_1 = \mu_0 I r / (2\pi r_1^2). \quad (37.35)$$

Para la región  $r_1 < r < r_2$  obtenemos

$$B_2 = -C_3/r. \quad (37.36)$$

Haciendo uso de las condiciones de frontera para B y teniendo en cuenta que  $\mu = \mu_0$ , recibimos que  $B_2(r_1) = B_1(r_1) = -C_3/r_1 = \mu_0 I / (2\pi r_1)$ . Por lo tanto,  $C_3 = -\mu_0 I / (2\pi)$ .

Escribimos la condición de continuidad del potencial vectorial para  $r = r_1$  como  $C_3 \ln r_1 + C_4 = -\mu_0 I / (4\pi)$ , lo que conduce a la igualdad  $C_4 = -\mu_0 I / (4\pi) + [\mu_0 I / (2\pi)] \ln r_1$ . Por esta razón, las expresiones para el potencial vectorial y la inducción magnética para  $r_1 < r < r_2$  toman la forma

$$A_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_1} - \frac{\mu_0 I}{4\pi}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (37.37)$$

La inducción en la envoltura del cable ( $r_2 < r < r_3$ ) es igual a

$$B_3 = -\frac{\partial A_3}{\partial r} = -\frac{\mu_0 I r}{2\pi (r_3^2 - r_2^2)} - \frac{C_5}{r}.$$

Partiendo de las condiciones de frontera  $B_2(r_2) = B_3(r_2)$  y  $A_2(r_2) = A_3(r_2)$ , hallamos:

$$C_5 = -\frac{\mu_0 I r_2^2}{2\pi (r_3^2 - r_2^2)},$$

$$C_6 = -\frac{\mu_0 I r_2^2}{4\pi (r_3^2 - r_2^2)} + \frac{\mu_0 I r_2^2}{2\pi (r_3^2 - r_2^2)} \ln r_2 - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

de donde

$$A_3 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r}{r_2} + 2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right], \quad (37.38)$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I (r_3^2 - r^2)}{2\pi r (r_3^2 - r_2^2)}.$$

Haciendo uso de las condiciones de frontera, hallamos para  $r = r_3$  para el potencial vectorial y la inducción del campo magnético siendo  $r_2 < r < \infty$  las expresiones

$$A_4 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \ln \frac{r_2}{r_1} \right] = \text{const}, \quad (37.39)$$

$$B_4 = 0.$$

## § 38. Campo magnético en presencia de magnéticos

*Se examinan la influencia del magnético sobre el campo magnético y diversos mecanismos de la imanación. Se deduce la relación entre las densidades volumétrica y superficial de los flujos moleculares y la imanación. Se discuten los fenómenos en la superficie de separación entre los magnéticos y la medición de la inducción del campo magnético en el magnético. Se aclara la esencia del blindaje magnético.*

**Definición.** Se llaman magnéticos a las substancias que, introduciéndolas en un campo exterior cambian de manera que se convierten en fuentes de un campo magnético complementario. La inducción total del campo magnético es igual a la suma

de inducciones del campo magnético exterior y el campo magnético, originado por el magnético. La variación del estado del magnético, influido por el campo magnético, debido a lo cual el propio magnético se convierte en una fuente del campo magnético, se denomina imanación del magnético. Dicho fenómeno para una amplia clase de substancias fue descubierto experimentalmente por M. Faraday en 1845. El fue también quien estableció la existencia de cuerpos dia y paramagnético, para los que introdujo estos términos.

**Mecanismos de la imanación.** Existen diversos mecanismos de imanación. *Conforme a ellos los magnéticos se dividen en substancias dia, para, ferro y ferrimagnéticas. Las substancias antiferromagnéticas también pertenecen a los magnéticos, a pesar de que no crean campo magnético alguno en el espacio que les rodea (véase el capítulo 7).*

Desde el punto de vista cuantitativo la intensidad de imanación en todos los casos se caracteriza de la misma manera, a saber: bajo la acción del campo magnético todos los elementos del volumen adquieren un momento magnético. Eso puede determinarse por los siguientes mecanismos:

1. Al introducir el cuerpo en un campo magnético exterior, en las moléculas y los átomos el movimiento de los electrones cambia de tal manera, que se forma de modo determinado una corriente circular sumaria y orientada que se caracteriza por el momento magnético [véase (37.24)]. Puede decirse que, *siendo introducidas en el campo magnético, las moléculas reciben un momento magnético inducido.* Merced a ello, las moléculas se convierten en fuentes de un campo complementario, cuya inducción se define por la fórmula (37.26), es decir, la substancia se imana. Semejantes substancias se llaman diamagnéticas.

2. El movimiento de los electrones en las moléculas puede ser tal, que las moléculas poseen momento magnético en ausencia del campo magnético, o sea, *las moléculas poseen un momento magnético permanente.* Merced a eso, cada molécula es en sí una fuente del campo magnético. Si no existe un campo exterior, los momentos magnéticos de diversas moléculas están orientados de manera totalmente caótica, debido a lo cual la inducción sumaria del campo, creado por ellos, es igual a cero, es decir, los elementos del cuerpo, infinitesimales desde el punto de vista físico, no son fuentes del campo magnético y el cuerpo no se imana. *Al introducir semejante magnético en un campo exterior, los momentos magnéticos permanentes de las moléculas aisladas se reorientan en dirección de la inducción del campo, como resultado de lo cual se forma una dirección principal de la orientación de los momentos magnéticos.* En este caso los volúmenes físicos ínfimos adquieren un momento magnético que es igual a la suma de los momentos magnéticos de las moléculas, comprendidas en el volumen, convirtiéndose en fuentes del campo magnético, o sea, el magnético se imana. Semejantes substancias se denominan paramagnéticas.

3. La imanación de las substancias ferromagnéticas y ferrimagnéticas está relacionada con que los electrones poseen un momento magnético que se encuentra en una relación determinada con su momento mecánico: el spin. *La imanación de los magnéticos de esta clase está ligada con una determinada orientación de los spines y por eso se llama de spin.* La explicación del magnetismo de spin rebasa los márgenes de la teoría clásica de la electricidad y el magnetismo y puede

discutirse sólo en la teoría cuántica. Por esta razón, en el presente manual se describen sólo las propiedades más importantes de esta clase de magnéticos sin ofrecer la teoría cuantitativa. Toda la teoría, expuesta a continuación, del campo magnético en presencia de magnéticos se refiere solamente a las sustancias día y paramagnéticas, si no se estipula lo contrario.

**Imanación.** Esta magnitud se determina por la razón entre el momento magnético del volumen físico elemental y el volumen:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}_{mi}, \quad (38.1)$$

donde  $\Delta V$  es el volumen elemental y  $\mathbf{p}_{mi}$ , los momentos de las moléculas. La adición se extiende a todas las moléculas en el volumen  $\Delta V$ .

Con otras palabras, la definición (38.1) para la imanación puede enunciarse así: *la imanación es la densidad volumétrica del momento magnético del magnético.* De (38.1) se desprende que el momento magnético del elemento de volumen  $\Delta V$  es igual a

$$d\mu_m = \mathbf{J} dV. \quad (38.2)$$

**Potencial vectorial en presencia de magnéticos.** Éste es igual a la suma del potencial  $\mathbf{A}_0$ , creado por las corrientes de conducción, y el potencial  $\mathbf{A}_m$ , originado por el magnético como consecuencia de la imanación:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_m, \quad (38.3)$$

con la particularidad de que basándose en (37.11), (37.25) y (38.2) puede escribirse:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r} dV, \quad (38.4a)$$

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \quad (38.4b)$$

**Densidad volumétrica de los flujos moleculares.** Como se ha dicho antes, la aparición de los momentos magnéticos está relacionada con la existencia de las corrientes circulares. Las corrientes en los volúmenes elementales que conducen al surgimiento del momento de necesario valor, obtuvieron el nombre de flujos moleculares. Pero no hay que comprender a pie de letra dicha expresión. En el sentido estricto de la palabra, los flujos moleculares pueden estar sólo dentro de las moléculas. Al definir la imanación y otras magnitudes se comprenden valores promedios, merced a lo cual *los momentos magnéticos de las moléculas aparentan estar dispersados por todo el volumen y los flujos moleculares, fluir por el volumen del magnético como en un medio continuo.* A pesar de eso, esas corrientes conservaron el nombre de flujos moleculares.

Examinemos un contorno cerrado infinitésimo  $L$  que rodea  $\Delta S$  (fig. 145) y calculemos la circulación de la imanación respecto al contorno:

$$\int_L \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \int_L J_\tau dl, \quad (38.5)$$



donde  $J_\tau$  es la componente tangencial de  $\mathbf{J}$  a lo largo del circuito de integración. Ella se origina por las corrientes que circulan por contornos cerrados alrededor de la línea, a lo largo de la cual se efectúa la integración de (38.5) (fig. 145;  $\delta S$  es el área rodeada por la corriente en el plano perpendicular a la línea de integración). Después de multiplicar el numerador y el denominador en (38.5) por  $\delta S$ , ejecutemos las siguientes transformaciones:

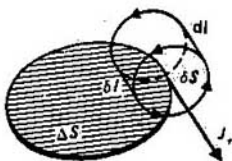


Fig. 145  
Determinación de la expresión para la densidad volumétrica de los flujos moleculares

$$\int_L J_\tau dl = \int_L J_\tau \frac{dl \delta S}{\delta S} = \int_L \frac{J_\tau dV}{\delta S} = \int_L \frac{dp_{m\tau}}{\delta S}, \quad (38.6)$$

donde se toma en consideración la fórmula (38.2). Según la definición del momento magnético, tenemos  $dp_{m\tau} = \delta I \delta S$  ( $\delta I$  es la intensidad de la corriente que rodea el área  $\delta S$  en la longitud  $dl$ , con la particularidad de que  $\delta I$  interseca  $\Delta S$  por la normal). Por eso

$$\int_L \frac{dp_{m\tau}}{\delta S} = \int_L \frac{\delta I \delta S}{\delta S} = \int_L \delta I = \Delta I_n, \quad (38.7)$$

donde  $\Delta I_n$  es la componente normal de la intensidad de la corriente que interseca el área  $\Delta$ . Así, pues, (38.5), teniendo en cuenta (38.6) y (38.7), adquiere el aspecto

$$\int_L \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \Delta I_n. \quad (38.8a)$$

Hallemos la componente del rot  $\mathbf{J}$  en dirección de la normal al área  $\Delta S$ . Haciendo uso de la definición (14.6) para el rotor y la igualdad (38.8a), encontramos

$$\text{rot}_n \mathbf{J} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int_L \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I_n}{\Delta S} j_{mn}. \quad (38.8b)$$

La magnitud

$$j_{mn} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I_n}{\Delta S} \quad (38.9)$$

es, por lo visto, la componente normal de la densidad de los flujos moleculares, ya que precisamente estos flujos son los que impulsan la aparición de la imanación. La igualdad (38.8b) es válida para cualquier orientación arbitraria del área  $\Delta$ , es decir, para cualesquiera componentes de rot  $\mathbf{J}$  y  $j_m$ . Por esta razón, tiene lugar la igualdad vectorial

$$j_m = \text{rot } \mathbf{J}. \quad (38.10)$$

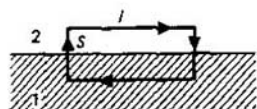


Fig. 146  
Para deducir la fórmula para la densidad superficial de las corrientes

mediante el índice  $1$  y las referentes al magnético  $2$ , por el índice  $2$ . Tracemos en el plano, perpendicular a la superficie de separación, un contorno  $L$ . Las superficies de separación paralelas de una parte del contorno son iguales a  $l$  y las perpendiculares son muy pequeñas y tienden a cero. Este circuito limita el área superficial  $S$ , perpendicular a la superficie de separación de los magnéticos. Sea  $dS$  el elemento de dicha superficie que, según la dirección del rodeo del contorno, elegida en la fig. 146, está dirigido a partir de nosotros. Al multiplicar los dos miembros de (38.10) por  $dS$  e integrar respecto a  $S$ , hallamos

$$\int_S \text{rot } \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S}. \quad (38.11)$$

El primer miembro de (38.11) puede transformarse por el teorema de Stokes en una integral por el contorno  $L$  y calcularse

$$\int_L \text{rot } \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = (J_{2\tau} - J_{1\tau}) l + (J)_{1at} \Delta l_{1at}, \quad (38.12)$$

donde  $J_{1\tau}$  y  $J_{2\tau}$  son las componentes tangenciales al circuito de integración en los medios primero y segundo, con la particularidad de que el signo menos de  $J_{1\tau}$  apareció al cambiar la dirección de integración por la contraria, al pasar al segundo medio. La magnitud  $(J)_{1at} \Delta l_{1at}$  tiene en cuenta las integrales por las secciones verticales del camino. No se necesita escribirlas con más detalle, ya que se anulan al unir las secciones horizontales de integración hacia la superficie. El segundo miembro de (38.11) de la proyección del flujo en dirección de la normal a la superficie  $S$ . Esta orientación es también tangencial a la superficie de separación de los magnéticos, por eso

$$\int \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S} = \Delta I_{m.\text{sup}}. \quad (38.13)$$

Tomando en consideración (38.12) y (38.13), la igualdad (38.11) después de ser dividida por  $l$ , toma la forma

$$J_{1\tau} - J_{2\tau} + (J)_{1at} \Delta l_{1at} / l = \Delta I_{m.\text{sup}} / l = i_{m.\text{sup}}, \quad (38.14)$$

donde

$$i_{m.\text{sup}} = \Delta I_{m.\text{sup}} / l \quad (38.15)$$

Esta fórmula expresa la densidad volumétrica de los flujos moleculares que engendran la imanación  $J$ .

**Flujos moleculares superficiales.** Los flujos moleculares pueden también circular por la superficie de separación entre magnéticos o por la superficie de separación entre el magnético y el vacío.

La fig. 146 muestra la superficie de separación entre los magnéticos  $1$  y  $2$ . Todas las magnitudes, referentes al magnético  $1$ , se designan mediante el índice  $1$  y las referentes al magnético  $2$ , por el índice  $2$ . Tracemos en el plano, perpendicular a la superficie de separación, un contorno  $L$ . Las superficies de separación paralelas de una parte del contorno son iguales a  $l$  y las perpendiculares son muy pequeñas y tienden a cero. Este circuito limita el área superficial  $S$ , perpendicular a la superficie de separación de los magnéticos. Sea  $dS$  el elemento de dicha superficie que, según la dirección del rodeo del contorno, elegida en la fig. 146, está dirigido a partir de nosotros. Al multiplicar los dos miembros de (38.10) por  $dS$  e integrar respecto a  $S$ , hallamos

es la proyección de la densidad superficial de la corriente sobre la dirección, perpendicular a la superficie  $S$ . Al comprimir en (38.14) el contorno hacia la superficie ( $\Delta l_{lat} \rightarrow 0$ ), obtenemos

$$J_{2x} - J_{1x} = i_{m-sup}. \quad (38.16)$$

Esta fórmula es correcta para una orientación arbitraria del contorno respecto a distintas direcciones a lo largo de la superficie de separación. Por eso es más cómodo escribirla en forma vectorial. Designemos por  $n$  el versor de la

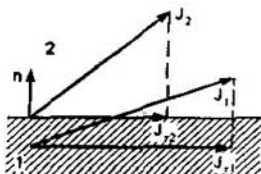


Fig. 147  
Para deducir la escritura vectorial para la densidad superficial de los flujos moleculares

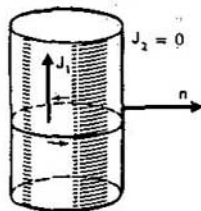


Fig. 148  
Flujos moleculares superficiales por un cilindro imantado homogéneamente

normal a la superficie de separación, dirigido hacia el segundo medio (fig. 147). De la construcción en la fig. 147 y el sentido de las magnitudes que participan en las fórmulas anteriores se ve que la expresión (38.16) en forma vectorial se escribe de la siguiente manera:

$$i_m = n \times (J_2 - J_1). \quad (38.17)$$

**Cilindro homogéneamente imantado.** Como ejemplo del cálculo empleando la fórmula (38.17) halleemos la densidad superficial del flujo molecular de un cilindro homogéneamente imantado (fig. 148) que puede realizarse en forma de un imán permanente. A pesar de que la naturaleza del ferromagnetismo que determina la existencia de los imanes permanentes, no puede comprenderse en los márgenes de la teoría clásica del magnetismo, el campo, engendrado por las sustancias ferromagnéticas imantadas en el espacio, puede describirse por la teoría clásica. *La imanación del material ferromagnético que se supone conocida, se considera como una fuente del campo magnético en el mismo sentido, como la imanación de las sustancias dia y paramagnéticas es la fuente del campo magnético. La imanación de las sustancias dia y paramagnéticas existe sólo en presencia del campo exterior, mientras que la de las sustancias ferromagnéticas se conserva en ausencia del campo exterior, y el campo originado por dicha imanación, existe independientemente.* La tarea consiste en describir ese campo.

Un cilindro homogéneamente imantado puede representarse como una sustancia dia o paramagnética, colocada en un campo exterior que, con una ele-

vada precisión, garantiza una imanación continua. En este caso en el espacio fuera del cilindro se determina la inducción no del campo completo, sino que de su parte, definida por la imanación.

En la fig. 148 la imanación  $J_1$  del cilindro se muestra por la flecha, en el vacío  $J_2 = 0$  y la normal  $n$  a la superficie de separación es la normal exterior respecto al cilindro. Según la fórmula (38.17) la densidad del flujo molecular superficial que circula por el cilindro, es

$$i_m = -n \times J_1 = J_1 \times n. \quad (38.18)$$

Una de las líneas de esta corriente se da en la fig. 148 como cierta circunferencia con flechas. Es evidente que la imanación  $J_1$  con la corriente que circula por la superficie del cilindro forma un sistema a la derecha. La fórmula (38.10) muestra que los flujos volumétricos moleculares dentro del cilindro están ausentes, ya que  $\text{rot } J_1 = 0$ . Por lo tanto, todo el campo fuera del cilindro se crea por los flujos laterales, que circulan por circunferencias. De esta manera se ha demostrado la equivalencia de los campos de un imán cilíndrico permanente y las corrientes circulares (campos del solenoide). Esta afirmación es correcta para cualesquiera magnéticos, incluyendo las sustancias ferromagnéticas.

**Intensidad del campo magnético.** En ausencia de magnéticos se efectúa la relación

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$$

que describe el campo magnético originado por las corrientes de conducción. En presencia de magnéticos, a la par con las corrientes de conducción  $\mathbf{j}$ , el campo se engendra también por los flujos moleculares  $\mathbf{j}_m$  [véase (38.10)]. Por consiguiente, en presencia de magnéticos (38.18) debe escribirse como

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_m) = \mu_0 (\mathbf{j} + \text{rot } \mathbf{J}). \quad (38.19)$$

Dividamos los dos miembros de (38.19) por  $\mu_0$  y pasemos  $\text{rot } \mathbf{J}$  al primer miembro:

$$\text{rot } (\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}) = \mathbf{j}.$$

donde

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J} \quad (38.21)$$

es la intensidad del campo magnético. Ella no es una magnitud puramente de campo, ya que incluye en sí el vector  $\mathbf{J}$  que caracteriza la imanación del medio. Por eso, según su significado, el vector  $\mathbf{H}$  desempeña en la teoría del campo magnético el mismo papel que el vector  $\mathbf{D}$  en la teoría del campo eléctrico, por lo que no debería llamarse intensidad. Sin embargo, este nombre se apoderó de esa magnitud ya históricamente.

**Ecuación para la intensidad.** Teniendo en cuenta (38.21), la ecuación (38.20) toma la forma

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (38.22a)$$

Esta ecuación es muy cómoda para calcular la intensidad del campo en presencia de magnéticos. La ley de la corriente total en presencia de magnéticos se deduce de la misma manera que fue obtenida en ausencia de los mismos,

partiendo de (35.14) y pasando posteriormente a (35.15):

$$\int_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \quad (38.22b)$$

**Dependencia entre la imanación y la intensidad.** Por las mismas causas, por las que el vector  $\mathbf{H}$  fue denominado intensidad del campo magnético, se acostumbró considerar que no es  $\mathbf{B}$  la fuente de imanación, sino  $\mathbf{H}$ . Por eso la dependencia entre  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{H}$  se representa como

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}, \quad (38.23)$$

donde  $\chi$  es la susceptibilidad magnética. La dependencia entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  se acostumbra escribir en forma de

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (38.24)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio. Estas magnitudes para las sustancias dia y paramagnéticas no dependen de  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ . Para hallar la relación entre ellas sustituycamos (38.23) y (38.24) en (38.21) y reduzcamos los dos miembros de la igualdad obtenida por  $\mathbf{H}$ :

$$1 = \mu/\mu_0 - \chi, \quad (38.25)$$

o bien

$$\chi = (\mu - \mu_0)/\mu_0 = \mu_r - 1, \quad (38.26)$$

donde  $\mu_r = \mu/\mu_0$  es la permeabilidad magnética relativa del medio. Observemos que en el sistema de unidades electrostáticas la susceptibilidad magnética se expresa por un número que es  $4\pi$  veces inferior al del SI.

*Distintos mecanismos de imanación conducen a diferentes dependencias entre  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{H}$  (véase el capítulo 7). Ahora sólo señalemos que la imanación de las sustancias diamagnéticas está dirigida de manera contraria a  $\mathbf{H}$ . Las sustancias diamagnéticas poseen  $\chi < 0$  [véase (38.23)] y, por lo tanto, conforme a (38.26) la permeabilidad magnética  $\mu < \mu_0$  ( $\mu_r < 1$ ). Esto significa que el campo, originado por la sustancia diamagnética tiene orientación contraria a la inicial, es decir, la sustancia diamagnética debilita el campo exterior. El módulo de su susceptibilidad  $\chi$  es muy pequeño y tiene el orden de  $\sim 10^{-5}$ . La susceptibilidad no depende de la temperatura. Todas las sustancias poseen diamagnetismo.*

*En las sustancias paramagnéticas  $\mathbf{J}$  coincide en dirección con  $\mathbf{H}$ . Para ellas  $\chi > 0$ ,  $\mu > \mu_0$ ,  $\mu_r > 1$ . El campo complementario de las sustancias paramagnéticas coincide en dirección con el inicial. Por lo tanto, la sustancia paramagnética amplifica el campo. La susceptibilidad  $\chi$  de las sustancias paramagnéticas depende de la temperatura. A temperatura ambiente la susceptibilidad paramagnética de las sustancias en estado sólido tiene el orden de  $\sim 10^{-3}$ , es decir, es aproximadamente dos órdenes superior a la susceptibilidad diamagnética. Por eso el papel de la susceptibilidad diamagnética en las sustancias paramagnéticas es relativamente pequeño y se puede menospreciar.*

*En las sustancias ferromagnéticas  $\mathbf{J}$  coincide en dirección con  $\mathbf{H}$  y es muy grande. Para ellas  $\chi \gg 1$ ,  $\mu \gg \mu_0$ . Es característico que  $\chi$  y  $\mu$  dependen del cam-*

po y de la prehistoria de la imanación. Merced a ello, poseen imanación remanente, o sea, *la imanación del modelo se conserva en total incluso después de anular el campo exterior. Por sus propiedades formales, las substancias ferromagnéticas son parecidas a las substancias ferroeléctricas* (véase el § 23).

**Campo en el magnético.** En el vacío  $J = 0$  y la fórmula (38.21) permite determinar la intensidad del campo en el vacío mediante la igualdad  $H_0 = B/\mu_0$ . En un magnético homogéneo infinito las corrientes de conducción engendran un campo  $H$  [véase (38.22)]. Las mismas corrientes de conducción en el vacío originan el campo  $H_0$  [véase (35.14)]. La ecuación (35.14) puede escribirse de nuevo como

$$\text{rot } H_0 = j. \quad (38.27)$$

Comparando (38.22) con (38.27), sacamos la conclusión de que las mismas corrientes de conducción excitan las mismas intensidades del campo magnético en el vacío y en un magnético homogéneo ilimitado:

$$H = H_0. \quad (38.28)$$

Por consiguiente, las inducciones en el magnético y en el vacío  $B$  y  $B_0$  se encuentran en una relación:

$$B = \mu B_0/\mu_0 = \mu_r B_0. \quad (38.29)$$

Esta igualdad muestra que en las substancias diamagnéticas ( $\mu_r < 1$ ) la inducción del campo disminuye en comparación con la inducción en el vacío, mientras que en las substancias paramagnéticas ( $\mu_r > 1$ ), aumenta.

Si todos los magnéticos y las corrientes de conducción se encuentran en una zona finita del espacio y son conocidas tanto las corrientes de conducción como la imanación de todos los magnéticos como función del punto [ $J = J(x, y, z)$ ], en principio, la inducción del campo magnético puede siempre hallarse fácilmente. El potencial vectorial se da como las fórmulas (38.3), (38.4a) y (38.4b), las cuales es útil escribirlas de otra manera. Puede decirse que el potencial vectorial  $A$  es la suma de los potenciales creados por las corrientes de conducción (38.4a), los flujos moleculares (38.10) y por los flujos moleculares superficiales (38.17), con la particularidad de que todas corrientes originan el potencial por una misma ley (38.4a). Por eso la fórmula para el potencial tiene el aspecto

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \int_V \frac{1}{r} dV + \int_V \frac{\text{rot } J}{r} dV + \int_S \frac{n \times (J_1 - J_2)}{r} dS \right), \quad (38.30a)$$

donde la última integral tiene en cuenta los flujos moleculares superficiales y  $S$  significa el conjunto de superficies de separación entre los magnéticos.

En cambio, la facilidad de hallar el potencial con ayuda de (38.30a) es aparente, puesto que así él puede ser hallado sólo cuando se conoce  $J$ . Pero en muchos casos esta magnitud es desconocida y su determinación es una tarea difícil.

**Imanes permanentes.** Están hechos de substancia o bien ferromagnética, o ferrimagnética y la teoría expuesta no se les puede aplicar directamente. *A pesar de ello, por las fórmulas, obtenidas más arriba, se puede calcular de manera for-*

mal del potencial del campo engendrado por los imanes permanentes en el espacio que les rodea. Las propiedades magnéticas de los imanes permanentes, al igual que los de los magnéticos, se caracterizan por su imanación  $J_{\text{cont}}$  que engendra el campo de la misma manera como si fuese la imanación de la substancia dia o paramagnética. Por eso, haciendo uso de (38.30a), para el potencial vectorial originado por los imanes permanentes, puede escribirse la fórmula

$$A_{\text{cont}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot } J_{\text{cont}}}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{J_{\text{cont}} \times \mathbf{n}}{r} dS. \quad (38.30b)$$

En particular, si la imanación del imán permanente es la misma por todo el volumen, el primer término en (38.30b) se reduce a cero y todo el campo magnético aparenta creado por las corrientes que circulan por la superficie del imán conforme a la segunda integral de (38.30b). No obstante, no existen ningunas corrientes reales que circulen por las superficies del imán permanente, en el caso dado ellas son sólo una magnitud auxiliar para calcular la intensidad del campo. El sentido físico del carácter auxiliar de esta magnitud puede comprenderse del siguiente ejemplo. Imaginémonos un imán permanente en forma de un cilindro largo que crea cierto campo en el espacio que lo rodea. Si se toma un solenoide cilíndrico del mismo diámetro y longitud con un bobinado bastante denso y un núcleo hecho de cierta substancia dia o paramagnética, eligiendo la intensidad de corriente, puede lograrse que la inducción del campo en el espacio que rodea el solenoide coincida prácticamente con la inducción del campo del imán permanente. La corriente que circula por el solenoide por conductores finos puede considerarse como una corriente superficial, equivalente a la imaginaria que recorre la superficie del imán cilíndrico permanente. Esto es el sentido matemático de la presencia del segundo sumando en el segundo miembro de (38.30b). *El carácter imaginario de la corriente se descubre cuando surge el interrogante sobre el campo dentro del magnético y del solenoide.* Estos campos son diferentes.

Al tener en cuenta los imanes permanentes, la ecuación para la inducción queda invariable ( $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ), pero la ecuación que expresa el enlace de la inducción y la intensidad del campo magnético, varía en cierto grado. El imán permanente es una fuente complementaria del campo magnético y por eso, en lugar de (38.21), es necesario escribir la ecuación

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \mathbf{J}_{\text{cont}}, \quad (38.31a)$$

donde  $J_{\text{cont}}$  es la imanación por contacto. Tomando en consideración que  $\mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J} = \mu \mathbf{H}$ , obtenemos

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}_{\text{cont}}. \quad (38.31b)$$

Señalemos que en esta fórmula  $\mu$  es sólo la permeabilidad dia y paramagnética de la substancia, pero no la permeabilidad ferromagnética, que se tiene en cuenta mediante el término  $\mu_0 \mathbf{J}_{\text{cont}}$ . Por eso, si por  $J_{\text{tot}}$  se comprende la imanación total ( $J_{\text{tot}} = J + J_{\text{cont}}$ ), la fórmula (38.31a) se representa mejor como

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \mu_0 J_{\text{tot}}. \quad (38.31c)$$

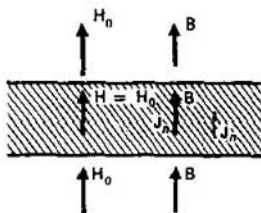


Fig. 149  
Campo magnético en presencia  
de material ferromagnético

imán permanente es igual a (véase la fig. 149):

$$H = H_0 - J_{\text{cont.}}$$

**Condiciones de frontera para los vectores de campo.** En la superficie de separación entre los magnéticos con distintas  $\mu$  los vectores  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  sufren unas variaciones a salto que se caracterizan por las condiciones de frontera. Para deducirlas partimos de las ecuaciones (36.4) y (38.22) que son válidas tanto para el vacío, como para el medio lleno de magnético. Desde el punto de vista metódico, la deducción de las condiciones de frontera se efectúa de la misma manera que para el campo eléctrico [véase el § 17, (17.21) y (17.30)].

**Condición de frontera para la componente normal del vector  $\mathbf{B}$ .** Se deduce de la misma manera que (17.21), partiendo de (17.17), sólo que ahora en lugar de (17.17), es necesario hacer uso de la ecuación

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (38.32)$$

Como consecuencia, obtenemos

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}}. \quad (38.33)$$

**Condición de frontera para la componente tangencial del vector  $\mathbf{H}$ .** Se deduce análogamente a (17.30), partiendo de (17.29), sólo que ahora es necesario, en vez de (17.29), utilizar la ecuación

$$\int_{ABCD} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (38.34)$$

que se obtiene de (38.22) si sus dos miembros se multiplican por  $d\mathbf{S}$  e integran por el área, limitada por el contorno  $ABCD$  (véase la fig. 83), transformando su primer miembro según el teorema de Stokes. En definitiva, recibimos

$$\boxed{H_{2\tau} - H_{1\tau} = j_{\text{sup}}}. \quad (38.35)$$



donde  $i_{\text{sup}}$  es la densidad superficial de la corriente en dirección perpendicular a la orientación en la que se eligen las componentes tangenciales de la intensidad del campo magnético. También es necesario tener en cuenta que son corrientes superficiales de conducción y no flujos superficiales moleculares  $i_m$  [véase (38.16)].

**Refracción de las líneas de fuerza magnética.** En la superficie de separación de los magnéticos las líneas de fuerza sufren una refracción que se determina con ayuda de las condiciones de frontera de la misma manera como fue hecho al analizar la fórmula (17.31).

**Medición de la inducción del campo magnético.** El método más sencillo y evidente para medir la inducción se basa en la aplicación de la ley de inducción

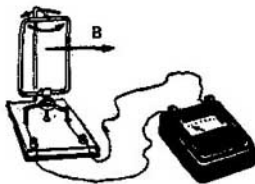


Fig. 150  
Cambio de la inducción con ayuda de la ley de Faraday

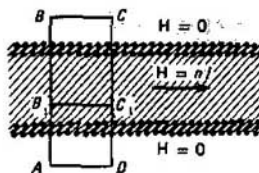


Fig. 151  
Campo de un solenoide infinito

electromagnética de Faraday. Si un conductor en forma de un bucle pequeño (fig. 150), unido con un galvanómetro, se orienta en el plano, perpendicular a  $B$ , y luego se gira a  $90^\circ$  alrededor del eje, yacente en este plano, por el galvanómetro pasa un impulso de corriente, por el cual se puede determinar  $B$  en la región del bucle (véase el capítulo 8). Aplicando este método, se mide la inducción media del campo en el área limitada por el bucle. En vez de girar el cuadro, puede desconectarse el campo.

**Campos de un solenoide infinito y de un cilindro infinitamente largo y homogéneamente imantado.** Supongamos que el campo se crea por una corriente que circula por el devanado de un solenoide infinito (fig. 151). La cantidad de espiras del conductor en 1 m de longitud, la intensidad de corriente y la permeabilidad magnética del núcleo las denotaremos por  $n$ ,  $I$  y  $\mu$ , respectivamente. El campo magnético es axialmente simétrico y puede tener sólo la componente, paralela al eje del solenoide (las espiras se devanan con gran densidad).

Para hallar la intensidad del campo hacemos uso de (38.22a) y, efectuando la integración respecto al contorno  $ABCD$ , obtenemos

$$\int_{ABCD} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (38.36)$$

ya que por las partes opuestas del solenoide las corrientes circulan en direcciones contrarias y, por lo tanto, la intensidad sumaria de las corrientes a través de la superficie, tendida sobre el contorno  $ABCD$  es igual a cero. La contribu-

ción a la integral por parte de las secciones de integración  $BC$  y  $DA$  es nula, puesto que el vector  $\mathbf{H}$  puede dirigirse sólo perpendicularmente a  $BC$  y  $DA$ . Por eso queda sólo la aportación de las secciones  $AB$  y  $CD$ :

$$H_{BC}l - H_{AD}l = 0, \quad (38.37)$$

donde  $H_{BC}$  y  $H_{AD}$  son las intensidades del campo en las secciones  $BC$  y  $AD$ , y  $l$ , la longitud de dichas secciones. El signo menos apareció como consecuencia de que las direcciones de integración en las secciones son contrarias. Estirando el contorno a lo largo de  $AB$  y  $CD$ , por ejemplo, alejando  $AD$  del cilindro, vemos que para que (38.37) sea idénticamente válida es necesario que  $H$  no dependa de la distancia, es decir,  $H$  fuera del solenoide debe ser una magnitud constante. A una distancia infinitamente grande del solenoide no habrá campo alguno, y por lo tanto, éste está ausente en todo el espacio fuera del solenoide.

Para determinar la intensidad del campo dentro del solenoide apliquemos la ley (38.22a) al contorno  $AB_1C_1DA$  (fig. 151). La integral no es nula solamente en la sección  $B_1C_1$  y por eso

$$H_{B_1C_1}l = nIl,$$

ya que la superficie, limitada por el contorno  $AB_1C_1DA$ , se interseca por  $nI$  espiras con corriente  $I$ . De la fórmula (38.38) se ve que el campo dentro del solenoide es homogéneo y su intensidad es igual a

$$H = nI. \quad (38.39)$$

Esta fórmula permite medir la intensidad del campo magnético en amperio-vueltas, lo que se utiliza con frecuencia en la técnica. De (38.39) vemos que la intensidad del campo magnético dentro del solenoide no depende del material de que está hecho, y, a igualdad de las demás condiciones, es la misma para todos los materiales. Pero la inducción del campo dentro del solenoide, teniendo en cuenta (38.24) y (38.39), es igual a

$$B = \mu H = \mu nI \quad (38.40)$$

y depende del material del núcleo. Para las sustancias diamagnéticas es inferior a la inducción en un solenoide vacío, mientras que para las sustancias paramagnéticas, es mayor.

La inducción del campo de un cilindro infinitamente largo y homogéneamente imantado se encuentra de la misma manera, pero con la diferencia de que las corrientes superficiales están ausentes. La relación (38.77) no cambia y la intensidad del campo fuera del cilindro, lo mismo que para el solenoide infinitamente largo, es nula. En vez de la fórmula (38.38), obtenemos  $Hl = 0$  ó  $H = 0$ . Esto significa que la intensidad del campo dentro de un cilindro infinitamente largo y homogéneamente imantado es nula, mientras que en el solenoide difiere de cero. Sin embargo, la inducción dentro del cilindro no es nula ( $B = \mu_0 J$ ). Si la longitud del cilindro es finita, la intensidad del campo magnético es diferente de cero tanto dentro del cilindro, como fuera de él.

**Medición de la permeabilidad magnética, inducción e intensidad del campo dentro de un magnético.** Imaginémonos un solenoide infinito, en cuyo núcleo

paralelamente al eje del solenoide se hizo un canal extremadamente estrecho (fig. 152). El campo dentro del solenoide se crea por la corriente del devanado. En el canal se introduce una bobina medidora, conectada al galvanómetro.

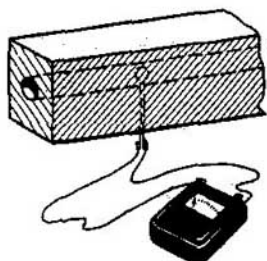


Fig. 152  
Variación de la intensidad del campo magnético dentro del magnético

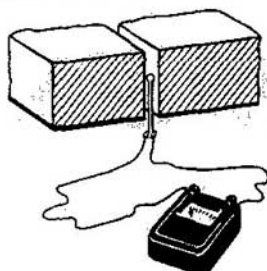


Fig. 153  
Cambio de la inducción del campo magnético dentro del magnético

La condición de frontera (38.35) muestra que la intensidad en el canal es igual a la intensidad en el magnético. La inducción en el canal es igual a  $B_{\parallel} = \mu_0 H$ . Se puede medir, haciendo girar a  $90^\circ$  el bucle o desconectando el campo. La intensidad del campo dentro del magnético se calcula por la fórmula

$$H = B_{\parallel} / \mu_0. \quad (38.41)$$

Para medir la inducción dentro del magnético hagamos un pequeño corte transversal en el solenoide infinito (fig. 153). La condición de frontera (38.33) muestra que en este corte la inducción  $B_{\perp}$  es igual a la inducción  $B$  dentro del magnético. Por eso es suficiente medir la inducción en el corte transversal.

Sabiendo la inducción y la intensidad del campo en el magnético, puede determinarse la permeabilidad magnética:

$$\mu = B/H = \mu_0 B_{\perp} / B_{\parallel}. \quad (38.42)$$

**Esfera de magnético en un campo homogéneo.** Supongamos que una esfera de radio  $R$ , hecha de magnético, con una permeabilidad magnética  $\mu_1$  se coloca en un medio infinito con permeabilidad magnética  $\mu_2$ , en el cual se engendra un campo magnético homogéneo con intensidad  $H_0$  (fig. 154, a, b). Se necesita determinar la inten-

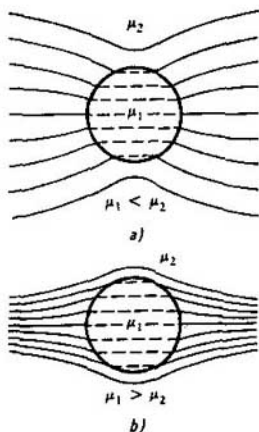


Fig. 154  
Esfera de magnético en un campo magnético homogéneo

sidad del campo magnético tanto dentro de la esfera, como fuera de ella. Las corrientes de conducción se suponen ausentes.

En este caso la ecuación (38.22) adquiere el aspecto

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (38.43)$$

es decir, el campo magnetostático en el espacio donde están ausentes las corrientes de conducción, es de potencial. Las corrientes de conducción no existen ni dentro de la esfera, ni fuera de ella, y, por lo tanto, el campo es potencial en todo el espacio. Designemos el potencial de este campo por  $\varphi_m$ . Entonces

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m. \quad (38.44)$$

Para un medio homogéneo ( $\mu = \text{const}$ ) la ecuación  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (38.45)$$

Sustituyendo (38.44) en (38.45), obtenemos para todos los puntos fuera de la esfera ( $\mu_2 = \text{const}$ ) y para todos los puntos dentro de la esfera ( $\mu_1 = \text{const}$ ) la ecuación

$$\nabla^2 \varphi_m = 0. \quad (38.46)$$

Así pues, el potencial del campo magnético satisface la ecuación de Laplace.

Señalemos que si la permeabilidad magnética no es constante, en lugar de (38.46) se recibe otra ecuación. Para deducirla tomemos en consideración la ecuación (38.21), que puede escribirse así

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}. \quad (38.47)$$

Tomando la divergencia de los dos miembros de dicha igualdad, obtenemos,

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{H} + \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{J} = -\mu_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_m + \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (38.48a)$$

donde se tuvo en cuenta la relación (38.44) y la ecuación  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ . Por consiguiente, la ecuación para  $\varphi_m$  tiene la forma

$$\nabla^2 \varphi_m = \operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (38.48b)$$

lo que complica considerablemente la solución del problema para el magnético con una permeabilidad magnética variable.

Coloquemos el origen de coordenadas en el centro de la esfera y dirijamos el eje polar del sistema de coordenadas esféricas en dirección del vector  $\mathbf{H}_0$ . A causa de la simetría axial, la ecuación de Laplace (38.46) toma la forma de (17.42). Esta ecuación debe resolverse para las condiciones de frontera (38.33) y (38.25) sobre la superficie de la esfera, que coinciden totalmente con las condiciones de frontera para  $D_n$  y  $E_r$  [véase (17.42)]. Dado que las corrientes superficiales de conducción están ausentes, en (38.35) puede ponerse  $i_{\text{sup}} = 0$ . Por eso la solución de este problema es semejante a la del problema sobre la esfera

dieléctrica en un campo eléctrico homogéneo. Sólo que en la solución de la ecuación (17.42) hay que sustituir  $\varphi \rightarrow \varphi_m$ ,  $E \rightarrow H$ ,  $D \rightarrow B$  y  $\epsilon \rightarrow \mu$ .

La intensidad del campo magnético dentro de la esfera es constante y, por analogía con (17.51) es igual a

$$H_{iz} = \frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} H_0. \quad (38.49)$$

Es la suma de las intensidades del campo exterior  $H_0$  y del campo, originado por la esfera a causa de su imanación. El campo, creado dentro de la esfera merced a su imanación, se denomina «campo desmagnetizante  $H_{desm}$ ». Este nombre es convencional, ya que no existe ninguna desmagnetización, sino que simplemente el magnético se imanta en el campo exterior, originando un campo complementario que se suma al inicial. Pero por cuanto la denominación del campo  $H_{desm}$  ya se estableció hace años, no queda más remedio que utilizarla. Entonces

$$H_{desm} = H_{iz} - H_0 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + 2\mu_2} H_0. \quad (38.50)$$

Esta expresión puede escribirse de otra forma. Basándose en (38.23) y teniendo en cuenta (38.26), tenemos

$$J_1 = (\mu_1/\mu_0 - 1) H_{1z}, \quad J_2 = (\mu_2/\mu_0 - 1) H_0, \quad (38.51)$$

de donde

$$J_2 - J_1 = \frac{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_0 + 2\mu_2)}{\mu_0(\mu_1 + 2\mu_2)} H_0. \quad (38.52)$$

Por consiguiente, la fórmula (38.50) puede representarse como

$$H_{desm} = [\mu_0/(\mu_0 + 2\mu_2)] (J_2 - J_1). \quad (38.53)$$

Por ejemplo, si la esfera se encuentra en el vacío,  $\mu_2 = \mu_0$  y  $J_2 = 0$ , por eso

$$H_{desm} = -J_1/3.$$

**Blindaje magnético.** De (38.50) se ve que para  $\mu_1 > \mu_2$  el campo magnético dentro de la esfera se debilita, es decir, la esfera aparenta apantallar su parte interior contra el campo magnético exterior. Si se calcula la inducción del campo dentro de la cavidad, rodeada por una envoltura de magnético con una permeabilidad bastante grande  $\mu_1$ , resulta que las líneas magnéticas se concentran, en general, en la envoltura (fig. 155) sin penetrar hacia dentro de la cavidad. Eso significa que la envoltura hecha de magnético, con gran  $\mu$  actúa como un blindaje que no permite al campo magnético penetrar al espacio, limitado por la envoltura.

¿Qué magnitud en la teoría del campo eléctrico corresponde a la permeabilidad magnética  $\mu$  en la teoría del campo magnético? ¿Por qué los flujos moleculares no pueden representarse en circulación sólo en el volumen de las moléculas?

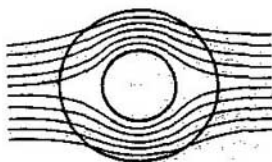


Fig. 155  
Blindaje magnético

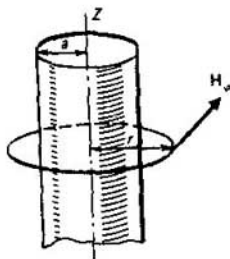


Fig. 156  
Para determinar el campo de la corriente que circula por un cilindro de sección circular

La imanación de las sustancias diamagnéticas se orienta contra la intensidad del campo magnético y la inducción del campo exterior disminuye.

La imanación de las sustancias paramagnéticas está dirigida por la intensidad del campo magnético y la inducción del campo exterior aumenta.

La teoría clásica no puede explicar el ferromagnetismo, pero está en condición de describir el campo magnético fuera de las sustancias ferromagnéticas si se considera conocida la imanación de la sustancia ferromagnética.

**Ejemplo 38.1.** A lo largo del eje de un cilindro recto circular infinito de radio  $a$  circula una corriente lineal de intensidad  $I$ . La permeabilidad magnética de la sustancia del cilindro es  $\mu$ . Fuera del cilindro se encuentra el espacio libre. Hallar la intensidad del campo magnético, la inducción y la imanación en todos los puntos del espacio.

Dirijamos el eje  $Z$  del sistema de coordenadas cartesianas a lo largo del eje del cilindro en dirección de la corriente  $I$  (fig. 156). Elijamos a título de contorno de integración  $L$  la circunferencia de radio  $r$  con centro en el eje del conductor y yacente en el plano, perpendicular a la corriente. Entonces la intensidad del campo magnético en todos los puntos se determina por la ley de la corriente total:

$$\int_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_\varphi 2\pi r = I,$$

de donde

$$H_\varphi = I/(2\pi r) \quad (38.54)$$

es la intensidad del campo magnético orientada por la tangente a la circunferencia. Las circunferencias concéntricas con corriente son las líneas de intensidad.

La inducción es igual a

$$B_\varphi = \begin{cases} \mu H_\varphi = \frac{\mu I}{2\pi r} & (0 < r < a), \\ \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & (a < r). \end{cases} \quad (38.55)$$

Es cómodo hallar la imanación, partiendo de la relación (38.21):

$$J_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} H = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \frac{I}{2\pi r} & (0 < r < a), \\ 0 & (a < r). \end{cases} \quad (38.56)$$

¿Por qué el diamagnetismo de las sustancias paramagnéticas es pequeño en comparación con el paramagnetismo? Presente estimaciones cuantitativas.

¿De qué manera puede medirse la inducción y la intensidad del campo magnético dentro del magnético?

Enumeren las circunstancias merced a las que  $H$  desempeña en la teoría del campo magnético el mismo papel que  $D$  en la teoría del campo eléctrico.

En el sentido literario, los flujos moleculares pueden circular sólo dentro de las moléculas. En cambio, en el modelo del medio continuo se trata de magnitudes, promedias respecto a volúmenes infinitesimos y por eso los flujos moleculares se representan como circulantes por el volumen del magnético como si fuese en un medio continuo.

Según su valor, la intensidad del campo magnético desempeña el mismo papel en la teoría del campo magnético que el desplazamiento en la teoría del campo eléctrico.

La densidad volumétrica de los flujos moleculares se encuentra con ayuda de (38.10). Tomando en consideración que la imanación se da en (38.56) en coordenadas cilíndricas, es cómodo calcular el rotor en (38.10) también en coordenadas cilíndricas. Tenemos

$$j_m = \text{rot } \mathbf{J} = -i_r \frac{\partial J_\varphi}{\partial z} + i_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r J_\varphi) = 0. \quad (38.57)$$

Así pues, no hay flujos moleculares volumétricos. Sin embargo, existe el flujo molecular superficial, cuya densidad, basándose en (38.17) y teniendo en cuenta (38.56), es igual a

$$i_{mz} = -\frac{(\mu - \mu_0) I}{\mu_0^2 r a}. \quad (38.58)$$

## § 39. Fuerzas en un campo magnético

*Se examinan las fuerzas que actúan sobre las corrientes y las fuerzas volumétricas que actúan sobre los magnéticos incompresibles.*

**Fuerzas que actúan sobre la corriente.**

$$\mathbf{dF} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (39.1a)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV = \int_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (39.1b)$$

**Fuerza de Lorentz.** Sobre una carga puntual  $q$  que se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}$ , actúa una fuerza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (39.2)$$

con la particularidad de que  $q$  incluye en sí el signo de la carga, o sea, puede ser tanto positiva, como negativa. La fórmula (39.2) se obtiene de (39.1b) si se tiene en cuenta que  $\mathbf{j} = nq\mathbf{v} dV = \rho\mathbf{v} dV$ , donde  $\rho$  es la densidad volumétrica de las cargas y, por lo tanto,  $\rho dV$  es la carga en el volumen  $dV$  y  $\int \rho dV = q$ .

**Fuerza y momentos de fuerza que actúan sobre el momento magnético.** Supongamos que la corriente elemental circular que crea un momento magnético, circula por un cuadro cuadrado con el lado  $l$ . Coloquemos el origen de coordenadas en el centro del cuadrado y dirijamos el eje  $Z$  perpendicularmente al plano del cuadro (fig. 157). La dirección de la corriente  $I$  en el cuadro se indica por las flechas. El campo magnético es arbitrario, las corrientes extrañas y las substancias ferromagnéticas están ausentes en la zona del cuadro ( $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ,  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ ). Determinemos la fuerza y el momento de fuerzas que actúan sobre el momento magnético del cuadro con corriente. Las dimensiones del cuadro son

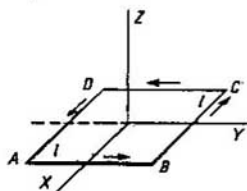


Fig. 157

Para calcular la acción de la fuerza sobre el momento magnético

pequeñas y es necesario tener en cuenta la variación de la inducción del campo magnético en los límites del cuadrado sólo hasta las magnitudes del primer orden de pequeñez respecto a las dimensiones del cuadrado.

Conforme a la fórmula (39.1) sobre los lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$  del cuadrado por parte del campo magnético actúan las fuerzas:

$$F_{AB} = Ii_y \times \mathbf{B}(i_x l/2),$$

$$F_{BC} = Il[-i_x \times \mathbf{B}(i_y l/2)],$$

$$F_{CD} = Il[-i_y \times \mathbf{B}(-i_x l/2)],$$

$$F_{DA} = Il[i_x \times \mathbf{B}(-i_y l/2)],$$

donde  $i_x$ ,  $i_y$  son versores en direcciones de los ejes  $X$  e  $Y$ . En los argumentos de  $\mathbf{B}$  se señalan las distancias entre el centro del cuadrado y los lados correspondientes, teniendo en cuenta la dirección. La fuerza completa que actúa sobre el cuadrado es

$$\mathbf{F} = F_{AB} + F_{BC} + F_{CD} + F_{DA} = Ii_y \times [\mathbf{B}(i_x l/2) - \mathbf{B}(-i_x l/2)] + \\ + Ii_x \times [\mathbf{B}(-i_y l/2) - \mathbf{B}(i_y l/2)]. \quad (39.3)$$

Teniendo en cuenta que al conservar sólo los términos del primer orden de pequeñez,

$$\mathbf{B}\left(\pm \frac{i_x l}{2}\right) = \mathbf{B}(0) \pm \frac{l}{2} \frac{\partial \mathbf{B}(0)}{\partial x},$$

$$\mathbf{B}(\pm i_y l/2) = \mathbf{B}(0) \pm \frac{l}{2} \frac{\partial \mathbf{B}(0)}{\partial y},$$

transformemos (39.3) a la forma

$$\mathbf{F} = Il^2 \left( i_y \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} - i_x \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right). \quad (39.4)$$

Tomando en consideración que  $Il^2 = p_m$  es el valor absoluto del momento magnético del cuadrado con corriente, así como las relaciones bien conocidas entre los versores de coordenada ( $i_x \times i_y = i_z$ ,  $i_y \times i_x = -i_z$ ,  $i_x \times i_x = i_y$ ), transformemos (39.4) así:

$$\mathbf{F} = (p_m \times i_x) \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = (p_m \times i_y) \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y},$$

donde  $p_m = i_x p_m$  es el momento magnético del cuadrado. Descomponiendo el producto vectorial doble por la fórmula del álgebra vectorial  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ , obtenemos

$$\mathbf{F} = i_x \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) - p_m \left( i_x \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) + i_y \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) - p_m \left( i_y \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) = \\ = i_x \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) + i_y \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) - p_m \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right), \quad (39.5)$$



donde  $i_x \cdot (\partial \mathbf{B} / \partial x) = \partial B_x / \partial x$ ,  $i_y \cdot (\partial \mathbf{B} / \partial y) = \partial B_y / \partial y$ . Puesto que  $\text{div } \mathbf{B} = \partial B_x / \partial x + \partial B_y / \partial y + \partial B_z / \partial z = 0$ , entonces

$$-p_m \left( \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) = p_m \frac{\partial B_z}{\partial z} = p_m \left( i_z \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right) = i_z \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right),$$

de donde

$$\mathbf{F} = i_x \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) + i_y \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) + i_z \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right). \quad (39.6)$$

Esta fórmula muestra que sobre el momento magnético la fuerza actúa sólo en un campo heterogéneo. Dado que la fórmula (39.6) expresa la fuerza por medio del momento magnético  $p_m$ , la forma especial, elegida antes, del circuito de corriente no tiene ninguna importancia, por lo que (39.6) es válida para un momento magnético arbitrario, cuyas dimensiones espaciales son suficientemente pequeñas.

Para calcular el momento de las fuerzas que actúan sobre el momento magnético, hacemos lo mismo. Colocamos el origen de coordenadas en el centro del cuadro y calculamos el momento de fuerzas según la fórmula

$$\mathbf{M} = I \int_L \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}). \quad (39.7)$$

No obstante, ahora los cálculos se simplifican, ya que la distancia  $r$  tiene el orden de las dimensiones  $l$  del cuadro, y la magnitud  $\mathbf{B}$  debe tenerse en cuenta sólo en el orden nulo según las dimensiones del cuadro, es decir, se debe considerarla constante. Como consecuencia obtenemos

$$\mathbf{M} = p_m \times \mathbf{B}. \quad (39.8)$$

Esta fórmula muestra que el momento de fuerzas tiende a girar el momento magnético hasta que éste coincida con el vector de inducción magnética del campo.

**Fuerzas volumétricas que actúan sobre los magnéticos incompresibles.** Dado que el elemento de volumen  $dV$  del magnético con una imanación  $\mathbf{J}$  posee un momento magnético

$$d\mathbf{p}_m = \mathbf{J} dV, \quad (39.9)$$

sobre él [véase (39.6)] actúa una fuerza

$$dF_x = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} dV, \quad dF_y = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} dV, \quad dF_z = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} dV. \quad (39.10)$$

Es obvio que estas expresiones son válidas en todo caso para los magnéticos rígidos, ya que la fórmula (39.6) se obtuvo como resultado de la diferenciación para  $p_m = \text{const.}$

Representemos (39.10) en forma vectorial. Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{J} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \mathbf{B}, \quad (39.11)$$

hallamos para la densidad volumétrica de la fuerza la expresión

$$f_x = \frac{dF_x}{dV} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial x}, \quad (39.12)$$

etc. Así pues, la densidad volumétrica de la fuerza que actúa sobre el magnético es igual a

$$f = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0} \text{grad } B^2. \quad (39.13)$$

Esto significa que:

a) *las sustancias paramagnéticas poseen  $\mu > \mu_0$  y por eso la densidad volumétrica de la fuerza está dirigida hacia el aumento de la inducción del campo;*

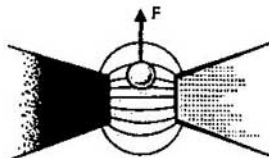


Fig. 158  
Expulsión de un cuerpo dinámico fuera de la zona del campo máximo

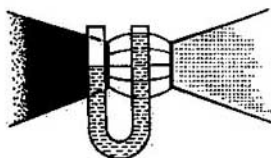


Fig. 159  
Refracción del líquido paramagnético a la zona del campo máximo

b) *las sustancias diamagnéticas poseen  $\mu < \mu_0$  y por eso la densidad volumétrica de la fuerza está dirigida hacia la disminución de la inducción del campo.*

Muchos experimentos muestran con evidencia el distinto comportamiento de las sustancias dia y paramagnéticas en un mismo campo. Sea que el campo magnético se crea en el vacío entre los polos de un imán fuerte (fig. 158). Está claro que entre los polos del imán la inducción del campo disminuye desde la línea central que une los polos, hasta la periferia. Una bola de bismuto ligera que es en sí un cuerpo diamagnético, se expulsa de la zona del campo con inducción máxima (fig. 158). Un líquido paramagnético, por ejemplo, una solución acuosa de cloruro ferroso, se atrae a la zona del campo con inducción máxima (fig. 159).

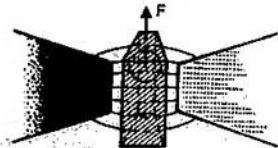


Fig. 160  
Un cuerpo paramagnético colocado en un medio paramagnético, cuya permeabilidad magnética supera a la del cuerpo, se comporta como un diamagnético

Si el espacio entre los polos del imán está lleno de un medio material, la dirección de las fuerzas depende de la relación entre las permeabilidades magnéticas del medio y del cuerpo. Si la permeabilidad magnética del cuerpo supera la del medio, el cuerpo se comporta como una sustancia paramagnética, pero si es inferior a la del medio, como sustancia diamagnética. Por ejemplo, si entre los polos del imán se coloca un líquido paramagnético con una permeabilidad suficientemente grande (fig. 160), sobre una bola para-

magnética, cuya permeabilidad es inferior a la del líquido, la fuerza actúa de la misma manera que sobre una bola diamagnética en el vacío.

La fuerza actúa sobre el momento magnético sólo en un campo magnético heterogéneo. El momento de fuerzas que surge como consecuencia de la acción del campo magnético sobre el momento magnético, tiende a dar vuelta al momento magnético hasta que coincida con el vector de la inducción magnética del campo.

Las fuerzas volumétricas que actúan sobre la sustancia paramagnética, están orientadas hacia el aumento de la inducción del campo magnético, mientras que las que actúan sobre las sustancias diamagnéticas, hacia la disminución.

¿Cómo varía la acción de las fuerzas sobre un magnético si la permeabilidad magnética del medio se diferencia de la constante magnética y se hace mayor o menor que la permeabilidad magnética del magnético?

**Ejemplo 39.1.** Por un anillo de radio  $r_0$ , hecho de un alambre muy fino, circula una corriente de intensidad  $I$ . La resistencia del alambre a la ruptura es igual a  $f_0$ . El anillo se ubica en un campo magnético, cuya inducción es perpendicular al plano del anillo de manera que las fuerzas que actúan tienden a romper el anillo. Determinar la inducción para la cual el anillo se rompe. Considerar que  $f_0 = 1,5 \text{ N}$ ;  $r_0 = 15 \text{ cm}$ ;  $I = 10 \text{ A}$ .

Las fuerzas actúan sobre el anillo por el radio. Designando por  $dl$  el elemento de longitud del anillo, hallamos que el elemento de fuerza que actúa sobre el elemento  $dl$  en dirección radial es igual a  $dF = I dl \times B$ . Tracemos el eje  $X$  a través del centro del anillo en su plano. La proyección del elemento de la fuerza  $dF$  sobre el eje  $X$  es igual a  $dF_x = dF \cos \alpha = IB dl \cos \alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo entre el eje  $X$  y el radio, trazado al elemento  $dl$ .

Puesto que  $dl = r_0 d\alpha$ , la expresión para la fuerza que actúa sobre el semianillo en dirección de los valores positivos del eje  $X$ , es  $F_x = IB r_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = 2IB r_0$ . Esta fuerza se distribuye en dos secciones del alambre en los lugares donde él se interseca con el eje  $Y$ . Por eso la condición de ruptura tiene la forma  $2IB r_0 = 2f_0$  y, por lo tanto,  $B = f_0 / (I r_0) = 1 \text{ T}$ .

## Problemas

- Hay una espiral de cobre de radio  $a$  y densidad  $n$  de espiras por 1 m. Las espiras están enrolladas de tal manera que entre ellas existe un espacio muy pequeño. El extremo superior de la espiral está sujeto, mientras que el inferior está unido con una carga conductora de masa  $m$ , yacente en una mesa metálica. En esta posición sobre la carga por parte de la espiral no actúan ningunas fuerzas elásticas. Considerando que los espacios entre las espiras disminuyen uniformemente, determinar la intensidad de la corriente que debe recorrer la espiral para elevar la carga de la mesa. Menospreciar la masa de la espiral.
- Dos imanes pequeños con iguales momentos magnéticos  $p_m$  y masas  $m$  están suspendidos de hilos largos y ligeros. La distancia  $d$  entre los puntos de suspensión es muy grande. Las longitudes de los hilos son iguales. Mostrar que los imanes se orientarán de manera que se atraerán mutuamente. Definir el ángulo de desviación de los hilos respecto a la dirección vertical. Menospreciar la influencia del campo magnético de la Tierra.
- Una esfera de radio  $a$ , cargada uniformemente con una densidad superficial de la carga  $\sigma$ , gira alrededor del eje que atraviesa el centro de la esfera con una velocidad angular  $\omega$ . Hallar la inducción magnética en el centro de la esfera en rotación.
- ¿Cuál es el momento magnético, originado por una carga puntual  $q$  que se mueve por una circunferencia de radio  $r_0$  con una velocidad angular constante  $\omega$ ?

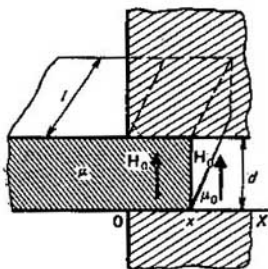


Fig. 161  
Para calcular la fuerza de interacción entre los imanes

6.5. En el espacio entre los polos de un imán permanente en el que existe un campo magnético  $H_0$  se introduce una placa de magnético con permeabilidad magnética  $\mu$  (Fig. 161). Hallar la fuerza que actúa sobre el magnético.

6.6. Hallar la fuerza en el problema 6.5 si la placa es un imán permanente, cuya imanación  $J_{\text{cont}}$  coincide en dirección con  $H_0$ .

6.7. Hallar la fuerza, con que la corriente superficial homogénea  $i_{\text{sup}}$ , que circula por un plano infinito, actúa sobre la longitud  $l$  de la corriente de intensidad  $I$ , paralela a aquélla y que pasa por un conductor lineal infinito a una distancia  $d$  del plano. Designese la normal a la superficie en dirección del conductor lineal por  $n$ .

6.8. La corriente de intensidad  $I_1$  circula por un conductor anular de radio  $a$ , yacente en el plano  $(x, y)$  con centro en el origen de coordenadas, y forma el tornillo derecho con dirección positiva del eje  $Z$ . La corriente de intensidad  $I_2$  recorre

el conductor recto infinitamente largo en sentido paralelo al eje  $X$  en dirección de sus valores positivos, intersectando el eje  $Z$  en el punto  $z = d$ . Definir la fuerza que actúa sobre la corriente rectilínea.

- 6.9. Hallar la inducción magnética en el centro de un solenoide de longitud  $L$  con  $n$  espiras que tiene una sección cuadrada con el lado  $a$ . La intensidad de corriente que circula por el devanado del solenoide es igual a  $I$ .
- 6.10. Un disco de radio  $r$  gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje, perpendicular a la superficie del disco y que atraviesa su centro. Hallar la inducción del campo magnético en el eje de rotación del disco a la distancia  $h$  de su plano. La densidad superficial de la carga es igual a  $\sigma$ .
- 6.11. Una esfera dieléctrica polarizada de radio  $a$  gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje que atraviesa su centro. La polarización  $P$  es constante y coincide con la dirección de  $\omega$ . Hallar la inducción magnética en los puntos de intersección de la superficie de la esfera con el eje de rotación.
- 6.12. Un haz cilíndrico rectilíneo infinito de una sección transversal circular de radio  $a$  con una densidad volumétrica de la carga  $\rho$  se mueve en dirección de su eje con una velocidad  $v$ . Hallar la inducción magnética.
- 6.13. Por un conductor cilíndrico rectilíneo infinito de radio  $a$ , cuyo eje coincide con el eje  $Z$  del sistema cartesiano de coordenadas, circula una corriente de intensidad  $I$  en sentido positivo del eje  $Z$ . Hallar el potencial vectorial.
- 6.14. Hallar la componente axial del potencial vectorial en el centro de la espiral por la que circula la corriente de intensidad  $I$ . Los datos de la espiral se citan en el problema 1.7.
- 6.15. Una esfera dieléctrica de radio  $a$  gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje que atraviesa su centro. La densidad volumétrica de la carga de la esfera es igual a  $\rho$ . Hallar la inducción dentro de la esfera en el eje de rotación.
- 6.16. Un cilindro circular homogéneamente cargado de radio  $a$  y longitud  $l$ , cuya carga es  $Q$ , gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor de su eje. Hallar su momento magnético dipolar.
- 6.17. Hallar, en aproximación dipolar, la inductancia mutua de dos corrientes circulares de radios  $a_1$  y  $a_2$ , yacentes en un mismo plano. La distancia entre las espiras es igual a  $r$ .
- 6.18. El eje de un cilindro circular recto coincide con el eje  $Z$  del sistema cartesiano de coordenadas, cuyo origen se encuentra en el centro del cilindro. El cilindro está imantado homogéneamente. El vector de imanación coincide con la dirección positiva del eje  $Z$ :  $J = J_1 z$ . Hallar la inducción magnética en el eje del cilindro si el radio de su sección transversal es  $a$  y la longitud  $l$ .
- 6.19. Una capa esférica de magnético, cuyos radios de las superficies concéntricas exterior e interior son  $r_1$  y  $r_2$ , está homogéneamente imantada. El vector de imanación es para-

- lelo al eje  $Z$  del sistema de coordenadas cartesianas, cuyo centro coincide con el de las superficies y es igual a  $J_1$ . Hallar la intensidad del campo magnético en el eje  $Z$  para los valores positivos de  $z$ .
- 6.20. Un cilindro recto, cuya longitud es  $l$  y el radio de la sección circular  $a$ , está homogéneamente imantado. El vector de imanación es paralelo al eje del cilindro e igual a  $J$ . Hallar la inducción magnética en el centro del cilindro, considerando  $l \gg a$ .
- 6.21. Una esfera con densidad superficial de la carga  $\sigma$  gira alrededor de su diámetro con una velocidad angular  $\omega$ . Hallar su momento magnético dipolar.
- 6.22. Una corriente de intensidad  $I$  circula por un conductor rectilíneo infinito, paralelo a la superficie de separación plana de los medios, uno con la permeabilidad magnética  $\mu_0$  en el que se encuentra el conductor con corriente, y el otro con la permeabilidad magnética  $\mu$ . Hallar la fuerza que actúa sobre la sección  $l$  del conductor. La distancia entre el conductor y la superficie de separación es  $d$ .
- 6.23. Sobre la superficie de una esfera de madera se enrollan con gran densidad en una capa las espiras de un alambre muy fino. Los planos de todas las espiras pueden considerarse perpendiculares a un mismo diámetro de la esfera. Las espiras cubren toda la superficie de la esfera. El radio de la esfera es  $a$  y la cantidad total de espiras es  $n$ . Una corriente de intensidad  $I$  circula por el devanado. Hallar la inducción magnética en el centro de la esfera.
- 6.24. En un conductor cilíndrico de radio  $a$  hay una cavidad cilíndrica de radio  $b$ , cuyo eje es paralelo al eje del conductor y se sitúa a una distancia  $d$  respecto a éste. El conductor es recorrido por una corriente con una densidad volumétrica  $j$ . Hallar la inducción magnética en los puntos del diámetro de la cavidad que coincide con el diámetro del conductor.

## Respuestas

- 6.1.  $I = \frac{1}{na} \sqrt{\frac{2mg}{\pi\mu_0}}$ . 6.2.  $\theta = \frac{3}{2} \frac{P_m^2}{\pi\mu_0 d^4} \frac{1}{mg}$ . 6.3.  $B = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma a \omega$ . 6.4.  $p_m = q\omega a^3/2$ . 6.5.  $F_x = \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) H_0^2 l d$ . 6.6.  $F_x = \mu_0 J n (H_0 + J n) l d$ . 6.7.  $F = -\frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_{\text{sup}} I n l$ . 6.8.  $F = -\frac{1}{2} \mu_0 I_1 I_2 (1 - d/\sqrt{d^2 + a^2})$ . 6.9.  $B = \mu_0 n I \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a^2}{L^2 + a^2}\right)$ . 6.10.  $B_h = \sigma \omega \left(\frac{h^2 + a^2/2}{\sqrt{h^2 + a^2}} - h\right)$ . 6.11.  $B_1 = \frac{2}{3} \mu_0 P a \omega$ ,  $B_2 = -\frac{2}{3} \mu_0 P a \omega$ . 6.12.  $B = \frac{1}{2} \mu_0 \rho v \times r$  para  $0 < r < a$ ,  $B = \frac{1}{2} \mu_0 \rho a^2 v \times r/r^3$  para  $a < r < \infty$ . 6.13.  $A_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r^3}{a^2} + \text{const}$  para  $r < a$ ,  $A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + \text{const}$  para  $a < r < \infty$ , donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . 6.14.  $\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(n\pi \alpha + \sqrt{1 + \pi^2 n^2 \tan^2 \alpha})$ . 6.15. 0. 6.16.  $Qa^2\omega/4$ . 6.17.  $L_{12} = \pi\mu_0 a_1^2 a_2^2 / (4r^3)$ . 6.18.  $B_z = \frac{\mu_0}{2} J \times \left(\frac{z+l/2}{\sqrt{a^2 + (z+l/2)^2}} - \frac{z-l/2}{\sqrt{a^2 + (z-l/2)^2}}\right)$ . 6.19.  $H_z = 0$  para  $0 < z < r_1$ ,  $H_z = -\frac{J(z^2 + 2r_1^2)}{3z^3}$  para  $r_1 < z < r_2$ ,  $H_z = 2J(r_2^3 - r_1^3)/(3z^3)$  para  $r_2 < z < \infty$ . 6.20.  $B = \mu_0 J (1 - a^2/l^2)$ . 6.21.  $p_m = 4/3 \pi \sigma a^4 \omega$ . 6.22.  $F = -\frac{\mu_0 I}{4\pi d} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} I^2$ . 6.23.  $\mu_0 n I / (4a)$ . 6.24.  $\mu_0 d/2$ .

# Magnéticos

Desde el punto de vista fenomenológico, las propiedades del magnético en un campo magnético se tienen en cuenta mediante la permeabilidad magnética. Las dependencias con respecto a diversos parámetros son muy variadas como son multiformes los propios magnéticos. Estas dependencias se interpretan construyendo modelos de los magnéticos que tienen en cuenta las peculiaridades de su comportamiento en el campo magnético.

## § 40. Substancias diamagnéticas

*Se examinan la naturaleza física de la susceptibilidad diamagnética y sus propiedades*

**Precisión de Larmor.** En el campo magnético la frecuencia de rotación de los electrones en el átomo se distingue de su frecuencia de rotación en ausencia del mencionado campo. Para cerciorarse de ello examinemos el caso más sencillo cuando en ausencia del campo magnético el electrón se mueve alrededor del núcleo por una órbita circular de radio  $r$  y la frecuencia de su rotación es igual a  $\omega_0$  (fig. 162). La ecuación de Newton para el movimiento del electrón tiene la forma

$$m\omega_0^2 r = F_{\text{cent}}, \quad (40.1)$$

donde  $F_{\text{cent}}$  es la fuerza centrípeta que surge como consecuencia de la atracción del electrón por el núcleo. Esta fuerza es bastante grande en comparación con las fuerzas que actúan sobre el electrón por parte de los campos exteriores, por eso *los radios de las órbitas de los electrones no varían al colocar el átomo en un campo exterior. Con respecto a los campos exteriores, el átomo con gran precisión puede considerarse rígido.*

Ahora sea que el átomo se encuentre en un campo exterior, cuyo vector de inducción  $B$  es perpendicular al plano de la órbita del electrón. La fuerza de Lorentz actúa a lo largo del radio  $y$ , según su dirección o bien coincide con la fuerza centrípeta, o bien tiene sentido contrario en función de la orientación relativa de los vectores de velocidad angular del movimiento del electrón por la órbita y la inducción magnética. Por su valor absoluto, esta fuerza es igual a

$$F = |e| \omega r B, \quad (40.2)$$

donde  $|e|$  es la carga del electrón y  $\omega$ , la frecuencia de rotación del electrón por la órbita en el campo magnético, diferente de  $\omega_0$ .

La ecuación del movimiento del electrón en el campo magnético tiene la forma

$$m\omega^2 r = F_{\text{cent}} \pm |e| \omega r B, \quad (40.3)$$

donde el radio  $r$  de la órbita del electrón es el mismo que en (40.1) y los signos ( $\pm$ ) se eligen conforme a la orientación relativa de los vectores de velocidad angular del movimiento del electrón por la órbita y la inducción magnética. Claro está que la fuerza centrípeta  $F_{\text{cent}}$  en (40.3) es la misma que en (40.1), ya que es la fuerza de atracción que proviene del núcleo y la distancia  $r$  no cambió. Excluyendo  $F_{\text{cent}}$  de dichas ecuaciones, recibimos

$$m\omega^2 r - m\omega_0 r = \pm |e| \omega r B. \quad (40.4)$$

Teniendo en cuenta que  $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\Delta\omega\omega$ , donde  $|\Delta\omega| = |\omega - \omega_0| \ll \omega$ , de (40.4) hallamos  $\Delta\omega = \pm |e| B / (2m)$ .

Así pues, en el campo magnético el electrón adquiere una velocidad angular complementaria de movimiento que se caracteriza por la frecuencia

$$\omega_L = |e| B / (2m), \quad (40.6)$$

que se denomina frecuencia de Larmor. No es difícil determinar la dirección del vector de velocidad angular. Verbigracia, si la inducción  $\mathbf{B}$  (véase la fig. 162) está dirigida en sentido contrario a la velocidad angular de movimiento del electrón alrededor del núcleo, la fuerza  $\mathbf{F}$  está dirigida en sentido contrario a  $\mathbf{F}_{\text{cent}}$  y, por lo tanto, la velocidad del electrón y la frecuencia de rotación deben disminuir. Ello significa que  $\omega_L$  coincide con la dirección de  $\mathbf{B}$ . Si la dirección de  $\mathbf{B}$  es contraria a la inicial, llegamos a la misma conclusión. Por esta razón, puede escribirse

$$\omega_L = -e\mathbf{B}/(2m), \quad (40.7)$$

donde se tiene en cuenta que la carga del electrón  $e$  es negativa. La formación de esta velocidad angular complementaria de rotación sin cambiar el radio de la órbita puede representarse como una rotación complementaria del átomo como algo entero con una frecuencia  $\omega_L$  en el campo magnético. La frecuencia total de rotación del electrón es igual a la suma de su frecuencia de rotación  $\omega_0$  en el átomo y la frecuencia de rotación  $\omega_L$  del átomo. Todo ello es correcto sólo para cuando los vectores de velocidad angular y de inducción del campo magnético son colineales.

Dado que la velocidad del electrón en el átomo, ubicado en un campo magnético, varía, cambia también su energía cinética. Por otra parte, ya que  $r$  permanece invariable, la energía potencial no cambia. Se pregunta, ¿debido a qué cambia la energía del electrón en el átomo si se sabe que el campo magnético

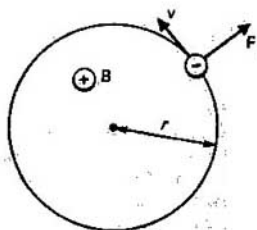


Fig. 162  
Aparición de la velocidad angular complementaria de rotación de los electrones en un campo magnético

tico actúa siempre perpendicularmente a la velocidad y no efectúa trabajo? La respuesta a este interrogante puede darse sólo en los márgenes de la teoría de la inducción electromagnética (véase el capítulo 8): *al surgir el campo magnético, se engendra el campo eléctrico, cuya acción cambia la velocidad de movimiento de los electrones en el átomo.*

Para imaginarnos cuál será el movimiento del átomo siendo arbitraria la orientación mutua de la velocidad angular del electrón alrededor del núcleo y la inducción del campo exterior, generalicemos los resultados obtenidos para un caso cualquiera. El átomo con el electrón que se mueve en él por una circunferencia, puede examinarse como un giróscopo que posee un momento magnético.

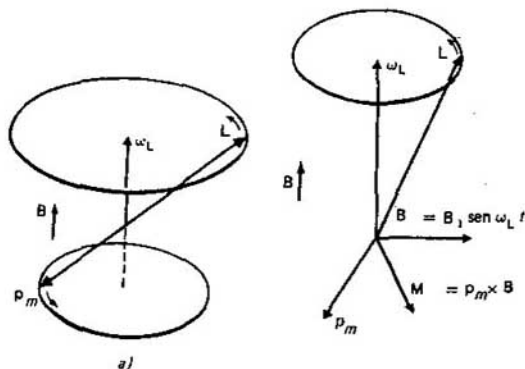


Fig. 163  
Precesión de Larmor (a); surgimiento de la resonancia paramagnética (b)

El momento de impulso del electrón es igual a  $m\omega r^2$ . El electrón en movimiento por la órbita equivale a la corriente circular de una intensidad  $e/T = e\omega/(2\pi)$  y, por lo tanto, el momento magnético del átomo es igual a  $\pi r^2 e\omega/(2\pi)$ . Teniendo en cuenta la dirección de los momentos magnético y mecánico del átomo, determinados por el movimiento del electrón, escribimos

$$L = mr^2\omega, \quad p_m = (er^2/2)\omega. \quad (40.8)$$

Aquí se toma en consideración que la carga  $e$  del electrón es negativa y el momento mecánico  $L$  y el momento magnético  $p_m$  tienen direcciones contrarias (fig. 163, a).

La ecuación de movimiento del átomo, considerado como un giróscopo, tiene el aspecto

$$\frac{dL}{dt} = M, \quad (40.9)$$



donde  $M$  es el momento de fuerzas [véase (39.8)]. De (40.8) se desprende que

$$p_m = eL/2m \quad (40.10)$$

y, por lo tanto, la ecuación (40.9) toma la forma

$$\frac{dL}{dt} = \frac{e}{2m} L \times B = -\frac{e}{2m} B \times L \quad (40.11)$$

La comparación de (40.11) con la ecuación del movimiento de los puntos de un sólido que gira con una velocidad angular  $\omega$ ,

$$v = dr/dt = \omega \times r \quad (40.12)$$

muestran que el extremo del vector  $L$  se mueve alrededor de la dirección del vector de inducción con una frecuencia

$$\omega_L = -eB/(2m). \quad (40.13)$$

Por consiguiente, el átomo efectúa en el campo magnético un movimiento de precesión semejante a un giroscopo (fig. 163, b). Dicho movimiento se denomina precesión de Larmor.

**Diamagnetismo.** Como consecuencia de la precesión de Larmor, cada electrón en el átomo crea una corriente circular que con la dirección del vector de inducción del campo magnético forma un sistema inverso. Por lo tanto, la inducción complementaria del campo magnético, originada por esa corriente circular, está dirigida en oposición al vector de inducción del campo magnético exterior. El momento magnético del átomo que surge como consecuencia de la precesión, y la imanación están también orientados en sentido contrario al vector de inducción del campo magnético exterior. Este cuadro de aparición de la precesión de Larmor, asimismo el momento magnético y el campo magnético complementario, relacionados con ella, forman la esencia del diamagnetismo. Es evidente que toda substancia posee diamagnetismo. La cuestión consiste sólo en la estimación de su magnitud.

**Susceptibilidad diamagnética.** Cada electrón en el átomo realiza un movimiento de Larmor alrededor del eje que coincide con la dirección del campo magnético (fig. 164). El momento magnético que surge como resultado de esto es

$$p_{mi} = S_i I_i = \pi r_i^2 e / T = e r_i^2 \omega_L / 2, \quad (40.14)$$

de donde

$$J = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} p_{mi} = -\frac{e^2}{4m} BN \left\langle \sum_i r_i^2 \right\rangle, \quad (40.15)$$

donde  $N$  es la concentración de átomos. En (40.15) se utiliza la expresión para la frecuencia de Larmor y bajo el signo de la suma del término medio se encuentra la suma de los cuadrados de las distancias de los electrones en el átomo desde el eje de precesión de Larmor. De la fig. 164 se ve que

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \quad (40.16)$$

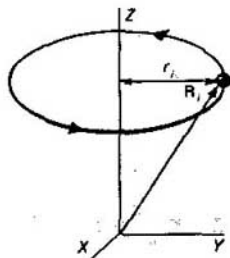


Fig. 164  
Para calcular la susceptibilidad diamagnética

donde  $R_i$  es la distancia del electrón respecto al núcleo. Tomando en consideración la orientación caótica de los átomos en el espacio, tenemos

$$\langle x_i^2 \rangle = \langle y_i^2 \rangle = \langle z_i^2 \rangle = \langle R_i^2 \rangle / 3 \quad (40.17)$$

y, por lo tanto,

$$\langle r_i^2 \rangle = \langle x_i^2 + y_i^2 \rangle = 2 \langle R_i^2 \rangle / 3 = 2 \langle R^2 \rangle / 3, \quad (40.18)$$

de donde

$$\left\langle \sum_i r_i^2 \right\rangle = 2Z \langle R^2 \rangle / 3, \quad (40.19)$$

donde  $Z$  es el número de electrones en el átomo. Por esta razón, en definitiva, obtenemos para la imanación la siguiente fórmula

$$J = -\frac{e^2}{6m} NZ \langle R^2 \rangle \mu H. \quad (40.20)$$

Comparando (40.20) con la fórmula

$$J = \chi_d H, \quad (40.21)$$

obtenemos para la susceptibilidad diamagnética la expresión

$$\chi_d = -\frac{e^2}{6m} NZ \langle R^2 \rangle \mu_0, \quad (40.22)$$

donde se tiene en cuenta que  $\mu \approx \mu_0$ , ya que la permeabilidad de los diamagnéticos se diferencia poco de la permeabilidad del vacío. La fórmula (40.22) concuerda bien con el experimento si bajo  $\langle R^2 \rangle$  se comprende el cuadrado medio de la distancia del electrón respecto al núcleo en el átomo, calculado por la teoría cuántica. Para los sólidos y líquidos la susceptibilidad diamagnética tiene el orden de  $\sim 10^{-5}$ , mientras que para los gases es considerablemente inferior, debido a la menor concentración de átomos [es decir, menores valores de  $N$  en la fórmula (40.22)].

Independencia de la susceptibilidad diamagnética con respecto a la temperatura. La fórmula (40.22) muestra que  $\chi_d$  no depende de la temperatura, ya que ninguna de las magnitudes que entran en la fórmula puede ser función de la temperatura. Eso se explica por el hecho de que el movimiento de Larmor de los electrones se establece muy pronto, durante lapsos, característicos para los procesos atómicos. Por eso el movimiento térmico y las colisiones de los átomos no les sacan del estado de precesión de Larmor para cierto tiempo notorio. Esto se confirma bien por el experimento: La independencia de la susceptibilidad diamagnética respecto a la temperatura fue descubierta experimentalmente en 1895 por P. Curie (1859—1906).

La variación de la frecuencia de rotación del electrón en el átomo que determina el diamagnetismo, surge al cambiar la inducción del campo magnético en el momento de introducir el átomo en el campo magnético o en el momento de aparecer el campo magnético. El campo magnético por sí mismo no efectúa trabajo alguno y no puede cambiar la velocidad de movimiento de los electrones en el átomo.

La susceptibilidad diamagnética no depende de la temperatura, ya que el movimiento térmico y las colisiones de los átomos no los sacan para un tiempo algo notorio del estado de precesión de Larmor.

## § 41. Substancias paramagnéticas

*Se examinan la naturaleza física de la susceptibilidad paramagnética y sus propiedades. Se describen el magnetismo, determinado por los electrones libres, y la resonancia paramagnética.*

**Mecanismo de la imanación.** Las substancias, cuyas moléculas poseen momentos magnéticos permanentes, se denominan paramagnéticas. La energía del momento magnético en el campo magnético exterior es

$$W = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}. \quad (41.1)$$

El mínimo de energía se alcanza cuando  $\mathbf{p}_m$  coincide con la inducción del vector de inducción, merced a lo cual al introducir el cuerpo paramagnético en un campo magnético conforme a la distribución de Boltzmann, surgen una orientación principal de los momentos magnéticos de sus átomos en dirección de la inducción y la imanación correspondiente. La inducción del campo magnético a causa de la imanación coincide en dirección con la inducción del campo exterior y la amplifica. En cambio, el ángulo entre la dirección del momento magnético del átomo y la inducción del campo magnético bajo la acción del campo no varía: el momento magnético sufre sólo un movimiento de precesión alrededor de la dirección del vector de inducción sin cambiar el ángulo entre ellos [véase (40.11)]. La reorientación de los momentos magnéticos, conforme a la distribución de Boltzmann, transcurre como consecuencia de las colisiones e interacción de los átomos entre sí.

**Dependencia entre la susceptibilidad paramagnética y la temperatura.** El mecanismo de imanación de las substancias paramagnéticas es semejante al mecanismo de la electrización de los dieléctricos polares (véase el § 22). La diferencia consiste sólo en que es necesario utilizar la fórmula (41.1) en lugar de la (22.1). Por eso las fórmulas para la susceptibilidad paramagnética se obtienen, sustituyendo las magnitudes  $p \rightarrow \mathbf{p}_m$ ,  $E \rightarrow \mathbf{B}$  en las fórmulas del § 22 para la susceptibilidad dieléctrica.

En vez de (22.10) obtenemos la fórmula

$$\langle p_{mz} \rangle = p_m L(\beta), \quad (41.2)$$

donde  $L(\beta)$  es la función de Langevin (véase el § 22) para  $\beta = p_m B / (kT)$ . Para temperaturas relativamente altas y campos pequeños, cuando  $p_m B \ll kT$ , o sea,  $\beta \ll 1$ , en lugar de (22.13) obtenemos la fórmula

$$\langle p_{mz} \rangle = p_m^2 B / (3kT) \approx p_m^2 \mu_0 H / (3kT), \quad (41.3)$$

donde  $\mu \approx \mu_0$  ya que la permeabilidad magnética de los cuerpos paramagnéticos no se diferencia mucho de  $\mu_0$ . Para la imanación recibimos la fórmula

$$J = N \langle p_{mz} \rangle = [p_m^2 N \mu_0 / (3kT)] H, \quad (41.4)$$

cuya comparación con la igualdad

$$J = \chi_p H \quad (41.5)$$

conduce a la siguiente expresión para la susceptibilidad paramagnética:

$$\chi_p = p_m^2 N \mu_0 / (3kT) = C/T, \quad (41.6)$$

donde  $C$  es la constante de Curie.

La dependencia  $\chi_p \sim 1/T$  se denomina ley de Curie, pues fue descubierta experimentalmente en 1896 por P. Curie.

El valor de los momentos magnéticos atómicos tiene el orden de  $p_m \sim 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ , por eso a temperatura ambiente,  $\chi_p \sim 10^{-8}$ , es decir,  $\chi_p$  es dos órdenes mayor que la susceptibilidad diamagnética. Eso significa que en las sustancias paramagnéticas se puede prescindir de la susceptibilidad diamagnética.

La teoría de Langevin describe con bastante precisión sólo los gases, cuya interacción entre las moléculas es menospreciablemente pequeña debido a las grandes distancias entre ellas. En los líquidos y sólidos semejante interacción puede ser considerable. La consideración de esa interacción modifica en muchos casos la dependencia (41.6) de la susceptibilidad respecto a la temperatura. Dicha dependencia adquiere la forma de la ley de Curie-Weiss:

$$\chi_p = \text{const}/(T - T_0), \quad (41.7)$$

donde la temperatura  $T_0$  es característica para la sustancia y se determina por sus propiedades.

**Momentos magnéticos de los átomos libres.** Los momentos magnéticos de los átomos surgen debido a dos factores:

1) al movimiento orbital de los electrones. El momento magnético orbital total del átomo es la suma de los momentos magnéticos orbitales de electrones aislados;

2) a la presencia de momento magnético propio en cada electrón, relacionado con el spin, es decir, de un momento mecánico propio del electrón.

Los momentos magnéticos de los electrones aislados se enlazan entre sí, formando un momento magnético de spin total del átomo. Cada electrón, moviéndose en un campo magnético, originado por el movimiento orbital de todos los demás electrones, merced a la existencia del momento magnético de spin, está en interacción con dicho campo. Esta interacción se denomina spin-orbital. *Gracias a ella el momento orbital de los electrones se enlaza con su momento magnético de spin, formando el momento magnético total del átomo. Sobre semejante forma de crear el momento magnético total del átomo se habla como del enlace LS.* En principio puede haber otro camino de aparición del momento magnético total del átomo: *primero el momento magnético de spin de cada electrón se enlaza con el momento orbital del mismo electrón, formando el momento magnético total del electrón y luego los momentos magnéticos totales de los electrones se unen entre sí y se crea el momento magnético total del átomo.* Pero en la mayoría de los casos, a excepción de los elementos más pesados, esta forma no se realiza, ya que la intensidad de interacción del momento magnético de spin del electrón con su propio momento orbital resulta más débil que su interacción con los momentos magné-

ticos de spin de los demás electrones y el momento magnético total para cada electrón por separado no surge. Por esta razón, *en la mayoría de los casos se realiza el enlace LS.*

La cuestión sobre la adición del momento magnético orbital total con el momento de spin total exige tener en cuenta la circunstancia de que el factor de proporcionalidad en la relación lineal entre el momento magnético orbital total y el momento mecánico orbital total se diferencia del factor de proporcionalidad en la relación lineal entre el momento magnético de spin total y el spin total. Según la regla de adición de los vectores, en el átomo se suman los momentos mecánicos totales, mientras que la adición de los momentos magnéticos se obtiene como consecuencia de la adición de los momentos mecánicos. En definitiva, *el momento magnético total del átomo puede ser no colineal con su momento mecánico interno total.*

El problema de los momentos magnéticos de los átomos libres se simplifica merced a que, desde el punto de vista energético, es ventajoso el relleno de las capas atómicas por los electrones, para el cual el momento total posee el valor mínimo. Debido a esto, los momentos de spin y orbital total de las capas llenas cerradas del átomo, así como el momento total de las capas completamente llenas son nulos. Por lo tanto, *el momento magnético del átomo se determina sólo por los electrones de las capas que no están llenas por completo.* En la mayoría de los casos semejantes capas son exteriores. La simplificación posterior del cuadro se obtiene debido a que los spines de los electrones y los momentos orbitales en la capa exterior tienden a orientarse en direcciones contrarias para compensarse en lo máximo. Por esta razón, *el momento magnético del átomo libre se determina, en lo principal, por los spines no compensados de los electrones exteriores.*

Momentos magnéticos de las moléculas. El momento magnético de la molécula no es igual a la suma de los momentos magnéticos de los átomos, ya que la realización del enlace químico entre los átomos requiere cierta reestructuración de las capas atómicas exteriores. Por ejemplo, la molécula de nitrógeno  $N_2$  se efectúa por el enlace covalente y los dos electrones generalizados poseen spines antiparalelos. Los momentos orbitales están también compensados y se anulan. Como consecuencia, resulta que las moléculas de  $N_2$  no poseen un momento magnético permanente, o sea, el nitrógeno no es una sustancia paramagnética. En las moléculas con enlace iónico se observa la misma tendencia de compensar los momentos magnéticos. Verbigracia, la molécula de sal común NaCl se realiza mediante el enlace iónico entre  $Na^+$  y  $Cl^-$ . Los dos iones poseen capas electrónicas cerradas, debido a lo cual el momento magnético total es nulo. Puede decirse que *la tendencia general al formarse las moléculas consiste en garantizar un momento total nulo.* Entre los gases difundidos sólo el oxígeno  $O_2$ , cuyos spines de los electrones generalizados no están compensados, posee propiedades paramagnéticas, asimismo NO y  $NO_2$ , cuya cantidad total de electrones es impar y, por lo tanto, el spin de uno de los electrones resulta no compensado.

La mayoría de los sólidos consta de iones con capas cerradas, merced a lo cual no poseen propiedades paramagnéticas, sino que son sólo sustancias diamagnéticas. La excepción principal de dicha regla la forman los compuestos, en

cuya composición entran los elementos de transición. La capa electrónica de estos elementos está llena sólo parcialmente, por lo que son multivalentes y sus iones poseen momentos magnéticos permanentes. Así pues, *el paramagnetismo de los compuestos de elementos de transición se determina por los momentos magnéticos de sus iones*. Los iones con configuraciones parecidas de las capas electrónicas exteriores conducen a semejantes propiedades paramagnéticas de los compuestos.

**Magnetismo determinado por los electrones libres.** A pesar de que los electrones en el campo magnético, influidos por la fuerza de Lorentz, se mueven por circunferencias, la teoría clásica predice la ausencia del efecto diamagnético a causa de la reflexión de los electrones en las fronteras de la zona, mientras que la teoría cuántica afirma su existencia. La susceptibilidad diamagnética resulta ser igual a

$$\chi_d = -\frac{\mu_0 e^2}{6\pi m^*} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3}, \quad (41.8)$$

donde  $m^*$  es la masa efectiva de los electrones libres y  $n$ , su concentración. Para una inducción del campo magnético no muy grande la susceptibilidad diamagnética es constante y no depende de la temperatura.

Otro efecto magnético, relacionado con los electrones de conducción, se determina por la interacción del momento magnético de spin del electrón con el campo magnético, merced a lo cual surge un exceso de electrones, cuyos momentos magnéticos de spin están orientados respecto a la dirección de la inducción del campo, en comparación con los electrones con momentos magnéticos de spin contrarios. Este fenómeno se denomina **paramagnetismo de los electrones de conducción**. Como muestran los cálculos, en condiciones de laboratorio la susceptibilidad paramagnética de los electrones de conducción no depende prácticamente de la temperatura. El paramagnetismo de los electrones de conducción se manifiesta con más intensidad en los metales de transición. En condiciones de laboratorio la susceptibilidad diamagnética de los electrones de conducción casi siempre es inferior a su susceptibilidad paramagnética (aproximadamente tres veces) y por eso su susceptibilidad sumaria resulta ser positiva (paramagnética).

**Resonancia paramagnética.** Imaginémosnos que en la substancia paramagnética, ubicada en un campo magnético, se crea un campo magnético periódico complementario, cuyo vector de inducción es perpendicular al vector de inducción del campo continuo. Debido al campo magnético continuo (fig. 163, b) los momentos magnéticos de los átomos realizan la precesión de Larmor. Como resultado de la interacción del momento magnético  $p_m$  del átomo con la inducción  $B$  del campo magnético alternativo se origina el momento de fuerzas  $M$  que tiende a cambiar el ángulo entre  $p_m$  y  $B$ . Si la frecuencia del campo magnético alternativo se diferencia de la frecuencia de la precesión de Larmor, una parte del tiempo este momento tiende a aumentar el ángulo entre  $p_m$  y  $B$ , y otra parte del tiempo, a disminuirlo, así, en término medio, no se observa ningún efecto. Pero si las frecuencias del campo magnético alternativo y de la precesión de Larmor coinciden, el momento de fuerzas, creado por el campo magné-

tico alternativo, o aumenta todo el tiempo el ángulo entre el momento atómico y la inducción del campo magnético continuo, o bien lo disminuye, en función de la relación de las fases en la precesión de Larmor y la inducción del campo magnético alternativo. *Como consecuencia de semejante acción, relativamente larga, del momento de fuerzas suceden la reorientación del momento magnético del átomo y la variación del ángulo entre éste y el vector de inducción del campo magnético continuo.* Este fenómeno se denomina **resonancia paramagnética**. La reorientación del momento magnético conforme a la fórmula (41.1) está ligada con la variación de la energía del momento magnético en un campo magnético continuo, lo que, según el principio de conservación de la energía, va acompañada por el intercambio de energía con el campo magnético alternativo. Dicho campo se efectúa en forma de ondas electromagnéticas estacionarias, cuyo vector magnético es perpendicular al vector de inducción del campo magnético continuo. Así pues, *el intercambio de energía ocurre con la onda electromagnética.*

Como consecuencia de ello, se forman grupos de átomos con una orientación de los momentos magnéticos, paralela a la inducción del campo magnético y antiparalela, es decir, que poseen, conforme a (41.1) distinta energía de interacción con el campo magnético. Las energías de los átomos con orientación antiparalela son mayores que con orientación paralela.

Además del mecanismo de reorientación de los momentos magnéticos mediante el campo electromagnético alternativo, actúa constantemente el mecanismo de reorientación de los momentos magnéticos mediante el movimiento térmico y la interacción entre los átomos. En condiciones de la acción simultánea de dichos mecanismos, el movimiento térmico y la interacción de los átomos efectúan principalmente la reorientación de los momentos magnéticos, antiparalelos al vector de inducción. La energía que se libera en este caso se transforma en calor. La reorientación de los momentos magnéticos, paralelos a la inducción, se realiza con preferencia como consecuencia de la absorción de la energía de la onda electromagnética. Por eso *la observación de la resonancia paramagnética se reduce a la medición de la intensidad de la onda electromagnética que pasa por la sustancia paramagnética en el campo magnético.* Desde el punto de vista experimental, es más fácil utilizar la onda electromagnética de frecuencia fija y lograr la resonancia cambiando la inducción del campo magnético. En el momento cuando la frecuencia de Larmor, correspondiente a la inducción del campo, es igual a la frecuencia de la onda electromagnética, se observa un brusco debilitamiento de su intensidad, que testimonia el comienzo de la resonancia paramagnética.

La resonancia paramagnética permite obtener una información extensa y variada sobre las propiedades de la sustancia paramagnética y se utiliza ampliamente en las investigaciones científicas.

Este cuadro clásico del surgimiento de la resonancia paramagnética sólo tiene carácter cualitativo. Un enfoque más estricto puede efectuarse en los márgenes de la teoría cuántica, basada en la representación de la absorción y la emisión de cuantos de la radiación electromagnética por los sistemas atómicos con la correspondiente reorientación a salto de los momentos magnéticos que aseguran el cumplimiento del principio de conservación de la energía. En los már-

genes de estas representaciones se logra obtener relaciones cuantitativas que caracterizan la resonancia paramagnética.

De la fórmula (40.13) se desprende que siendo la inducción del campo magnético de 1 T, la frecuencia de la resonancia paramagnética tiene el orden de  $10^{10}$  Hz. Al disminuir la inducción, esa frecuencia se reduce respectivamente y puede tenerse la esperanza de observar la resonancia paramagnética a frecuencias relativamente bajas. Sin embargo, no se acierta observarla a frecuencias inferiores a  $10^8$  Hz, es decir, para la inducción del campo continuo aproximadamente igual a 0,01 T.

Esto está en concordancia con la teoría cuántica de la resonancia paramagnética que predice una disminución considerable de la absorción de las ondas electromagnéticas al reducir su frecuencia, merced a lo cual a frecuencias relativamente bajas, la resonancia se manifiesta de manera bastante débil. Las frecuencias del orden de  $10^{10}$  Hz (la longitud de onda es de 3 cm) son las que más se utilizan en las investigaciones.

## § 42. Substancias ferromagnéticas

*Se analizan los hechos experimentales fundamentales del ferromagnetismo y se da su interpretación elemental teórica. Se introduce la idea sobre el anti-ferromagnetismo, ferrimagnetismo y la resonancia ferromagnética.*

**Definición.** *Los magnéticos, cuya permeabilidad magnética alcanza grandes valores y depende del campo magnético exterior y de la prehistoria, se denominan substancias ferromagnéticas. Ellas poseen imanación residual, es decir, su imanación puede ser diferente de cero en ausencia del campo magnético exterior. En este caso son imanes permanentes. Así pues, según sus manifestaciones formales, las substancias ferromagnéticas se parecen a las ferroeléctricas (véase el § 23). Hay que señalar que el ferromagnetismo fue descubierto y estudiado mucho antes que la ferroelectricidad. En 1878 A.G. Stolétov (1839—1896) investigó la imanación de los ferromagnéticos. Construyó la curva de la permeabilidad magnética (fig. 168), llamada más tarde curva de Stolétov. La histéresis fue descubierta en 1880 por Warburg (1846—1934).*

**Curva de imanación y ciclo de histéresis.** *La susceptibilidad magnética de las substancias ferromagnéticas es función de la intensidad del campo exterior y la dependencia de  $J(H)$  tiene la forma dada en la fig. 165. Al crecer la intensidad, la imanación no aumenta ilimitadamente, sino que tiene un límite, denominado imanación de saturación. Su existencia por analogía con las substancias paramagnéticas, muestra que la imanación de las substancias ferromagnéticas se determina también por la reorientación de ciertos momentos magnéticos elementales.*



Dado que

$$B = \mu_0 H + \mu_0 J, \quad (42.1)$$

la curva de la dependencia  $B(H)$  no llega a la saturación, a pesar de que  $J$  sufre la saturación. La gráfica de dicha dependencia se denomina *curva de imanación* (fig. 166).

Si efectuamos la remagnetización de la muestra en un campo magnético periódico, en analogía completa con las sustancias ferroeléctricas, la curva de

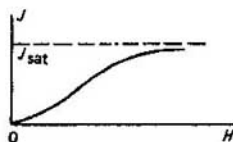


Fig. 165  
Saturación de la imanación



Fig. 166  
Curva de imanación

la dependencia  $B(H)$  tiene forma de un ciclo, llamado *ciclo de histéresis* (fig. 167). La sección  $OA$  es la curva de imanación, ya que la conexión del campo se efectúa a un valor nulo de la inducción, o sea, en ausencia de imanación permanente. La curva cerrada  $ACDFGKA$  es el ciclo de histéresis. Su demostración se lleva

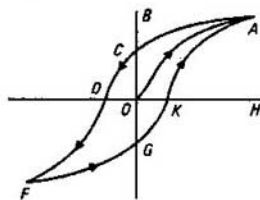


Fig. 167  
Ciclo de histéresis

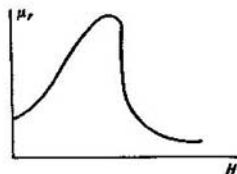


Fig. 168  
Curva de permeabilidad magnética (curva de Stolétov)

a cabo por el mismo esquema que al demostrar el ciclo de histéresis de las sustancias ferroeléctricas, sustituyendo los condensadores por las bobinas (véase el § 23).

Al disminuir la intensidad  $H$  del campo magnético desde cierto valor (punto  $A$ ) hasta cero, la inducción  $B$  del campo se reduce sólo un poco, hasta el valor de inducción, descrito por el segmento  $OC$ . Esa inducción se denomina *residual*. El cuerpo ferromagnético en este estado se llama *imán permanente*.

Para liquidar el campo residual, es necesario aplicar un campo inverso, cuya intensidad se prefiere por el segmento  $OD$ . Dicha intensidad se denomina

de retardo o fuerza coercitiva de la sustancia ferromagnética. La forma del ciclo de histéresis, la inducción residual y la fuerza coercitiva dependen del material de la sustancia ferromagnética y cambian para distintos materiales en amplios límites.

**Curva de la permeabilidad magnética.** La permeabilidad magnética relativa  $\mu_r = \mu/\mu_0 = B/(\mu_0 H)$  como función de  $H$  puede construirse por medio de los datos de la curva de imanación (fig. 166) y tiene la forma que ofrece la fig. 168. Al crecer  $H$ , el valor de  $\mu_r$  alcanza el máximo y luego, al alcanzar la saturación de la imanación, disminuye rápidamente. Las sustancias ferromagnéticas con frecuencia poseen  $\mu_r$  del orden de  $10^4$  en el máximo.

**Clasificación de los materiales ferromagnéticos.** Los materiales ferromagnéticos pueden dividirse en dos grupos:

- 1) materiales magnéticamente blandos con una permeabilidad magnética grande que se imantan y desimantan fácilmente y poseen pequeña fuerza coercitiva;
- 2) materiales magnéticamente duros con una permeabilidad magnética relativamente baja que se imantan y desimantan con dificultad y poseen una fuerza coercitiva grande.

Los materiales del primer grupo se utilizan principalmente en la electrotecnia de los campos alternativos, en particular, en los transformadores, y los del segundo grupo, para confeccionar imanes permanentes.

**Interacción de los electrones.** El ferromagnetismo puede examinarse sólo en los márgenes de la teoría cuántica. Pues *dentro de la teoría clásica se puede únicamente describir las propiedades de las sustancias ferromagnéticas y discutir desde el punto de vista cualitativo el mecanismo de su aparición.*

En los ensayos de Einstein y de Haas por primera vez se estableció experimentalmente que el ferromagnetismo se determina por los spines de los electrones. Las sustancias ferromagnéticas poseen la propiedad de la imanación espontánea cuando en ausencia de campos magnéticos exteriores, influidos por causas internas, los spines de los electrones tienden a orientarse en una dirección común. Sin embargo, al modelo en total no le es energéticamente ventajoso estar imantado. Por eso él se divide en pequeñas zonas imantadas, dominios. Cada dominio se imanta en un sentido determinado, pero la dirección del vector de imanación en los dominios vecinos es diferente, por lo que el momento magnético de los pequeños volúmenes físicos resulta ser nulo, es decir, el magnético en total, no está imantado.

Lo dicho demuestra que *la cuestión principal de la teoría del ferromagnetismo consiste en explicar la tendencia de los spines de los electrones a orientarse en una dirección común.* Ya que en el sistema se realiza el estado con la energía mínima, la tarea consiste en hallar tal interacción, para la que sea ventajosa la orientación paralela de los momentos magnéticos de spin de los diversos átomos. Para eso es necesario que la energía total sea mínima para la orientación paralela de los momentos.

La aparición de semejante situación está relacionada con la interacción de cambio. Debido a que los electrones se someten a la estadística de Fermi-Dirac que no permite que dos partículas se encuentren en un mismo estado, los

electrones con spines paralelos resultan como separados en el espacio, merced a lo cual disminuye su energía de interacción coulombiana en comparación con los electrones que poseen spines antiparalelos, cuando pueden estar situados en el espacio uno más cerca del otro. Se llama energía de interacción de cambio la diferencia de energías entre las configuraciones con spines paralelos y antiparalelos.

No obstante, semejante situación por sí misma no asegura el surgimiento del ferromagnetismo, ya que al disminuir la interacción coulombiana para los spines paralelos tiene lugar el aumento de su energía cinética. En la mayoría de los casos tampoco resulta ventajosa la energía total de las configuraciones con spines paralelos. Sólo en raros casos, cuando la reducción de la energía potencial para los spines paralelos es considerablemente mayor que el aumento de la energía cinética, la energía total disminuye. Entonces las configuraciones con spines paralelos se convierten en ventajosas desde el punto de vista energético, y surge el ferromagnetismo. La investigación de las condiciones, para las que puede realizarse semejante situación constituye el objeto de la teoría del ferromagnetismo. Aquí el papel principal lo desempeña la elección correcta de la expresión para la energía de interacción.

**Teoría elemental del ferromagnetismo.** La energía de cambio en la teoría del ferromagnetismo se da mediante la fórmula

$$W_{\text{cam}} = -2I_{\text{cam}} S_1 \cdot S_2, \quad (42.2)$$

donde  $S_1$  y  $S_2$  son los spines de los electrones en interacción e  $I_{\text{cam}}$ , la integral de la interacción de cambio. De la fórmula (42.2) se ve que para  $I_{\text{cam}} > 0$  la energía potencial alcanza el mínimo para los spines paralelos. Dicha energía se condiciona por la interacción del momento magnético del electrón con el campo magnético y se expresa por medio de la fórmula (41.1), en la cual, en cambio, por inducción  $B$  se comprende la inducción  $B_{\text{cam}}$  del campo de cambio. El propio momento magnético  $p_m^{(0)}$  del electrón está ligado con su propio momento mecánico o con el spin  $S$  mediante la relación tipo (40.10), pero siendo el factor de proporcionalidad dos veces mayor:

$$p_m^{(0)} = (e/m) S. \quad (42.3)$$

Por esta razón, interpretando la energía de interacción (42.2) como la energía del momento magnético del segundo electrón que se encuentra en el campo magnético, creado a cuenta de la interacción de cambio, por el primer electrón, tenemos

$$V_{\text{cam}} = -\frac{2I_{\text{cam}} S_1 m}{e} \cdot \frac{e}{m} S_2 = -p_m^{(0)} \cdot B_{\text{cam}}, \quad (42.4)$$

donde

$$B_{\text{cam}} = (2I_{\text{cam}} m/e) S_1. \quad (42.5)$$

La inducción completa del campo magnético se compone de la inducción  $B$  del campo en ausencia de interacción de cambio y la inducción  $B_{\text{cam}}$  del campo de cambio. La relación (38.21) teniendo en cuenta (38.23) puede representarse como

$$\mu_0 (1 + \chi) \mathbf{J} = \chi \mathbf{B}, \quad \text{o bien} \quad \mu_0 \mathbf{J} = [\chi/(1 + \chi)] \mathbf{B}. \quad (42.6)$$

Esta relación se generaliza en presencia de la interacción de cambio mediante la fórmula

$$\mu_0 \mathbf{J} = [\chi/(1 + \chi)] (\mathbf{B} + \mathbf{B}_{\text{cam}}), \quad (42.7)$$

con la particularidad de que la susceptibilidad magnética  $\chi$  en esta fórmula se considera igual a su valor en (42.6) para la substancia paramagnética en ausencia de interacción de cambio.

El posterior examen se lleva a cabo en una aproximación del campo medio, cuya suposición principal consiste en que la inducción del campo de cambio es proporcional a la imanación:

$$\mathbf{B}_{\text{cam}} = \lambda \mu_0 \mathbf{J}, \quad (42.8)$$

donde  $\lambda$  es la constante de la interacción de cambio. Sustituyendo (42.8) en (42.7), hallamos la relación

$$\mu_0 \mathbf{J} = [\chi/(1 + \chi - \lambda\chi)] \mathbf{B}, \quad (42.9)$$

que es útil representar como [de manera análoga a (42.7)]:

$$\mu_0 \mathbf{J} = [\chi'/(1 + \chi')] \mathbf{B}, \quad (42.10)$$

donde

$$\chi'/(1 + \chi') = \chi/(1 + \chi - \lambda\chi) \quad (42.11)$$

caracteriza la susceptibilidad, teniendo en cuenta la interacción de cambio. De la fórmula (42.11) hallamos

$$\chi' = \frac{\chi}{1 - \chi\lambda} = \frac{C}{T - \lambda C}, \quad (42.12)$$

donde  $\chi = C/T$ .

En el intervalo de temperaturas  $T > \lambda C$  el cuerpo se comporta como paramagnético con una disminución característica de la susceptibilidad magnética al aumentar la temperatura. Al aproximarse a  $T = \lambda C$ , la susceptibilidad  $\chi' \rightarrow \infty$ . Eso significa que los campos tan pequeños como se quiera provocan una imanación finita. Con otras palabras, para  $T = \lambda C$  sucede el surgimiento de la imanación espontánea, es decir, el paso al estado ferromagnético. La teoría elemental expuesta no permite analizar cuantitativamente el cambio de la imanación espontánea al disminuir ulteriormente la temperatura en el intervalo  $T < \lambda C$ . La teoría más precisa muestra que la imanación espontánea para  $T = \lambda C$  crece a salto hasta el valor finito y luego, al bajar  $T$ , sigue creciendo, pero la velocidad de crecimiento disminuye poco a poco. Así pues, para  $T < \lambda C$  el magnético se encuentra en la fase ferromagnética.

**Ley de Curie-Weiss.** Para cada substancia ferromagnética existe una temperatura, pasando por la cual ella sufre una transición de fase (de segundo género) y se convierte en paramagnética. La susceptibilidad magnética en la zona paramagnética en las inmediaciones de la temperatura de transición, denominada temperatura de Curie, se describe por la relación tipo (42.12), llamada ley de Curie-Weiss. La magnitud  $\lambda C = \Theta$  se denomina temperatura de Curie-Weiss. La teoría muestra que la transición de fase no se efectúa a la temperatura de Curie-Weiss, sino que a una temperatura próxima a ella.

Por esta razón, a veces puede no hacerse diferencia entre la temperatura de Curie, durante la cual transcurre la transición de fase, y la temperatura de Curie—Weiss.

**Anisotropía de la imanación.** Al investigar las curvas de imanación de los monocristales ferromagnéticos, se mostró que para diversas orientaciones del campo magnetizante respecto a los ejes del cristal, las curvas de imanación son diferentes, es decir, las propiedades ferromagnéticas del cristal dependen de la dirección de la imanación. *La dirección, en la que la imanación es máxima para el*

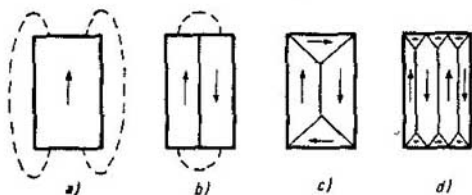


Fig. 169  
Estructuras idealizadas de los dominios en un monocristal

campo dado, se llama dirección o eje de imanación fácil, mientras que la dirección, en la que la imanación es mínima para el campo dado, se denomina dirección o eje de imanación difícil.

**Dominios.** Las estructuras idealizadas de los dominios en el monocristal se muestran en la fig. 169 (las flechas indican las direcciones de la imanación):  
a — la inducción del campo magnético exterior es grande;

b — el campo exterior está concentrado principalmente cerca de las paredes inferior y superior y posee una energía considerablemente menor que en el caso a;

c — no hay polos libres y el campo no sale de la zona de los dominios;

d — se efectúa la misma situación que en el caso c, pero dividiendo la estructura en dominios más pequeños.

**Fronteras.** Para minimizar la energía del campo magnético es útil disminuir al máximo las dimensiones del dominio. Sin embargo, a esto obstaculiza la necesidad de gastar energía para formar las fronteras entre los dominios, ya que la imanación por las diferentes partes de la frontera tiene diversa dirección. La frontera entre los dominios posee un grosor finito  $d$ , dentro de cuyos límites la imanación varía paulatinamente su dirección desde la orientación en un dominio a la orientación en el otro, es decir, las fronteras entre los dominios son paredes de grosor finito. Las paredes se clasifican por las peculiaridades del giro del vector de imanación en ellas. Si la componente de imanación, perpendicular a la pared, no varía durante su giro, la pared se denomina pared de Bloch. Con otras palabras, la rotación de la imanación en la pared de Bloch sucede en el plano, paralelo a la pared (fig. 170, a). Si el cambio de la dirección de la imanación transcurre al variar su componente, perpendicular a la pared, ésta se denomina pared de Néel (fig. 170, b).

**Remagnetización.** El aumento de la imanación del modelo al crecer la intensidad del campo magnético transcurre primero a causa del desplazamiento reversible de las fronteras y los giros de las paredes fronteras (fig. 171; sección  $OA$ ). En la sección  $AC$  se efectúa el desplazamiento irreversible de las fronteras y la desaparición de algunos dominios y, por fin, en la sección  $CD$ , que precede a la saturación, se observa la variación del sentido de la imanación dentro de los dominios.

**Antiferromagnetismo.** A condiciones determinadas la interacción de cambio lleva a una situación cuando la orientación antiparalela del momento de

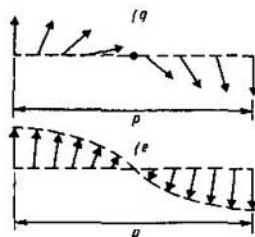


Fig. 170  
Variación de la imanación en la pared: de Bloch (a); de Neel (b)

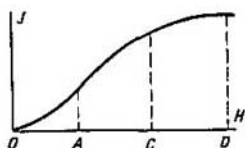


Fig. 171  
Zonas de diversos mecanismos de la remagnetización

spin de los átomos vecinos resulta ser energéticamente útil. Para eso es necesario realizar las condiciones, semejantes a las del surgimiento del ferromagnetismo, pero para las configuraciones con spines antiparalelos. Como consecuencia de eso, los momentos magnéticos de spin de los átomos vecinos resultan orientados en direcciones contrarias (fig. 172).

*Semejante situación puede interpretarse como la existencia simultánea de dos subredes que se imantan espontáneamente en direcciones contrarias con la misma intensidad. La imanación sumaria es nula.* Esta situación se llama antiferromagnetismo y los cuerpos en los que se efectúa, antiferromagnéticos.

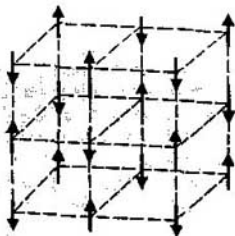


Fig. 172  
Antiferromagnetismo

En las sustancias ferromagnéticas el vector de inducción del campo de cambio está orientado de manera contraria al vector de imanación  $J$ . Por eso en lugar de (42.8) para ellas es válida la relación

$$B_{\text{cam}} = -\lambda_a \mu_0 J. \quad (42.13)$$

Realizando los mismos cálculos que condujeron de (42.8) a (42.12), obtenemos para la susceptibilidad de la sustancia antiferromagnética la fórmula (42.12), pero sustituyendo  $\lambda$  por  $-\lambda_a$ :

$$\lambda_a = C/(T + \lambda_a C) = C/(T + \Theta), \quad (42.14)$$

donde  $\Theta = \lambda_a C$  es la temperatura de Curie—Weiss. Lo mismo que para las substancias ferromagnéticas, el paso al estado antiferromagnético transcurre a una temperatura que se diferencia de la temperatura de Curie—Weiss. La temperatura de paso al estado antiferromagnético se denomina temperatura de Néel  $T_N$ .

En un campo nulo a una temperatura inferior a la de Néel la imanación espontánea total de la substancia antiferromagnética es nula, ya que las imanaciones contrarias de las subredes se compensan mutuamente por completo. Al superponer el campo exterior, surge una pequeña imanación, correspondiente a la susceptibilidad positiva.

En muchos casos para explicar el antiferromagnetismo es suficiente el modelo de dos subredes. Sin embargo, a veces, cuando el caso se reduce sólo a los

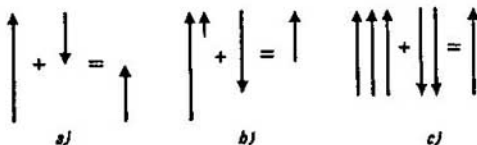


Fig. 173  
Posibilidades elementales de ejecución del ferromagnetismo

momentos magnéticos colineales y es necesario asegurar la igualdad a cero de la suma vectorial de varios momentos magnéticos, que es en sí un resgo característico del antiferromagnetismo, se tiene que utilizar un modelo de más de dos subredes.

**Ferrimagnetismo.** Puede ocurrir que las subredes poseen una imanación espontánea de dirección contraria y de distinta intensidad, por lo que no sucede la liquidación total de la imanación, como tiene lugar en las substancias ferromagnéticas. Las mencionadas substancias tienen una *imanación espontánea, aunque menos intensa en comparación con las substancias, todos los momentos magnéticos de las cuales estuviesen orientados en un mismo sentido.* Esos materiales poseen propiedades, semejantes a las de los ferromagnéticos, en particular, tienen imanación residual, se caracterizan por la fuerza coercitiva, etc. Los mencionados materiales se denominan **ferrimagnéticos** o **ferritas**. A veces, *el ferrimagnetismo se comprende como el antiferromagnetismo no compensado.*

*Las ventajas muy esenciales de las ferritas en comparación con las substancias ferromagnéticas están relacionadas con su extremadamente pequeña conductividad eléctrica, mientras que los materiales ferromagnéticos son buenos conductores de la corriente eléctrica, ya que la buena conductividad eléctrica de dichos materiales es un estorbo para utilizarlos en la radiotecnia.*

Se comprende como **subred** el conjunto de todos los iones dentro del cristal, mutuamente equivalentes, tanto en el sentido cristalográfico, como en el sentido de las interacciones magnéticas y electrostáticas y con los iones circundantes. De aquí se desprende que para que exista el ferrimagnetismo es necesario que haya por lo menos dos subredes no equivalentes. En la fig. 173, a — c se dan las posibilidades más sencillas de realización del ferrimagnetismo.

**Resonancia ferromagnética.** Está condicionada por la interacción de los momentos magnéticos de spin de los electrones con un campo electromagnético alternativo. No obstante, en las sustancias ferromagnéticas dicha resonancia es mucho más complicada que en las paramagnéticas. Esto se debe a que en la sustancia ferromagnética existe la imanación espontánea y una estructura de dominio, y los spines de los electrones están unidos intensamente con la interacción de cambio. Por eso *en el cuerpo ferromagnético el fenómeno de resonancia desde el principio tiene carácter colectivo y la precesión de los spines se determina no sólo por el campo exterior, sino que por el campo efectivo, dependiente tanto del campo exterior, como también de los campos interiores del cuerpo ferromagnético, tales como por ejemplo el campo de anisotropía.*

La resonancia ferromagnética se observa a frecuencias de varios miles de Megahertzios. Si el campo de hiperfrecuencia es homogénea según la amplitud, en todo el modelo ferromagnético se observa una precesión homogénea de spines que provoca la aparición del pico correspondiente de resonancia. Pero a la par con él, se forman otros picos de resonancia complementarios, determinados por las paredes de dominio (resonancia de las paredes de dominio). La heterogeneidad del campo de hiperfrecuencia conduce al surgimiento de picos de resonancia complementarios, condicionados por la forma y dimensiones del modelo. La decodificación de este cuadro bastante complejo de la resonancia ferromagnética permite obtener una información valiosa sobre las propiedades de la sustancia ferromagnética y medir muchas magnitudes que la caracterizan, tales como la imanación de saturación, la relación giromagnética, la constante de anisotropía, etc.

Lo mismo que el ferromagnetismo, la resonancia ferromagnética puede describirse sólo mediante la teoría cuántica.

La peculiaridad característica de la curva de imanación de las sustancias ferromagnéticas es la existencia de saturación, y la de la curva de remagnetización, el ciclo de histéresis.

## § 43. Efectos giromagnéticos

*Se describen los efectos giromagnéticos y su observación experimental*

**Relación entre los momentos magnéticos y mecánicos.** La imanación del magnético está siempre relacionada con la reorientación de los momentos magnéticos en cierta dirección. Sólo en el fenómeno del diamagnetismo se forman nuevos momentos magnéticos que desde su aparición tienen la misma dirección. El momento magnético del movimiento orbital del electrón está ligado con el momento mecánico de dicho movimiento por medio de la relación (40.10). El momento magnético propio del electrón está unido con su momento mecánico propio también mediante una relación lineal. Por eso está claro que el momento magnético del átomo está también enlazado con su momento mecánico mediante una relación determinada. Ello significa que *la reorientación de los momentos magnéticos su-*



cede de mismo tiempo que la reorientación de los correspondientes momentos mecánicos.

El momento magnético total del átomo se compone de los momentos magnéticos de los movimientos orbitales de los electrones y sus momentos magnéticos de spin. Así mismo se suman los momentos mecánicos. En cambio, teniendo en cuenta que los factores de proporcionalidad entre los momentos mecánicos y magnéticos del movimiento orbital y del spin son diferentes, en general, el momento magnético total del átomo no es colineal a su momento mecánico,

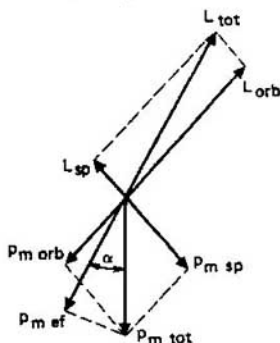


Fig. 174  
Diagrama de adición de los momentos mecánicos y magnéticos en el átomo

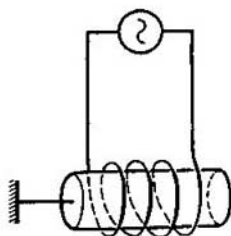


Fig. 175  
Experimento de Einstein — Haas

sino que forma con él cierto ángulo (fig. 174). El momento mecánico del sistema aislado se conserva. Por consiguiente, en el átomo libre  $L_t$  conserva su dirección en el espacio. Por eso, como consecuencia del movimiento de los electrones en el átomo,  $\mathbf{p}_{mt}$  precesa alrededor de la dirección del momento mecánico total, con la particularidad de que la velocidad angular de esa precesión se define por los tiempos de los procesos interatómicos, o sea, es muy grande. Por esta razón, durante la interacción del momento magnético con los campos exteriores, el valor efectivo lo tiene sólo la componente  $\mathbf{p}_{met}$  en dirección del momento mecánico total del átomo. Durante la interacción con los campos exteriores el momento magnético efectivo del átomo es el momento  $\mathbf{p}_{met}$ , colineal a  $L_t$ . De esta manera, en todos los casos la relación entre las componentes puede representarse como

$$\mathbf{p}_m = g e L / (2m), \quad (43.1)$$

donde  $e$  y  $m$  son la carga y la masa del electrón, respectivamente y  $g$ , la relación giromagnética. Para el movimiento orbital del electrón  $g = 1$ , para el spin  $g = 2$  y para los átomos esta magnitud tiene un valor intermedio entre 1 y 2, en función de en qué proporción y de qué manera se presentan las contribuciones

del movimiento orbital de los electrones y sus spines en los momentos totales. Recordemos una vez más que *para el átomo en (43.1) por  $p_m$  se comprende no el momento magnético total verdadero del átomo, sino que su proyección sobre la dirección del momento mecánico total, designado en la fig. 174 por  $p_{met}$ .*

**Experimento de Einstein—Haas.** Examinemos un cilindro hecho de magnético y suspendido de un hilo elástico (fig. 175). La relación (43.1) entre los momentos mecánico y magnético muestra que la imanación del cilindro largo del eje conduce a que los átomos adquieren no sólo momento magnético a lo largo del eje del cilindro, sino que también un momento mecánico correspondiente, dirigido a lo largo del eje. El momento mecánico total de la barra se compone de los momentos mecánicos de los átomos aislados y del momento mecánico de la barra como un cuerpo entero. Antes de la imanación el momento mecánico total de la barra es nulo. Para el sistema aislado el momento total se conserva. En el caso en cuestión el sistema aislado consta de la barra y un campo imantado que se crea mediante las corrientes en el solenoide.

Señalemos, sin demostración alguna (véase el capítulo 9) que el momento de impulso del campo electromagnético del eje del cilindro es nulo y, por lo tanto, no influye sobre el principio de conservación del momento de impulso en el sistema en cuestión. Eso significa que la suma de los momentos mecánicos de todos los átomos y el momento mecánico de la barra en total debe ser constante, o sea, después de la imanación dicha suma debe ser también nula. Pero por cuanto el momento mecánico de los átomos, como consecuencia de la imanación, cambia, varía también el momento de la barra como un todo. De (43.1) se desprende que durante la imanación se cumple la relación

$$\Delta p_{mz} = g [e/(2m)] \Delta L_z, \quad (43.2)$$

donde  $\Delta L_z$  y  $\Delta p_{mz}$  son los momentos mecánico y magnético, adquiridos por cada átomo durante la imanación a lo largo del eje  $Z$ . Al sumar los dos miembros de (43.2) por todos los átomos, obtenemos

$$VJ = \sum \Delta p_{mz} = g [e/(2m)] \sum \Delta L_z, \quad (43.3)$$

donde  $J$  es la imanación de la barra y  $V$ , su volumen. Según el principio de conservación del momento de impulso, el momento de impulso de la barra como algo entero, adquirido a causa de la imanación, es igual a

$$L_z = - \sum \Delta L_z = -[2m/(eg)] VJ. \quad (43.4)$$

La velocidad angular  $\omega$  de rotación de la barra está ligada con su momento de impulso  $L_z$  respecto al eje de rotación y el momento de inercia  $I_z$  mediante la relación

$$L_z = I_z \omega. \quad (43.5)$$

La energía cinética de rotación es

$$W = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (43.6)$$

Por otra parte, el módulo de torsión  $D$  del hilo está relacionado con la frecuencia  $\omega_0$  de las vibraciones torsionales libres mediante la expresión

$$I_z \omega_0^2 = D. \quad (43.7)$$

La barra, como resultado del adquirimiento de energía cinética (43.6), retorcerá el hilo a un ángulo  $\theta$ , definido por el principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} D \theta^2. \quad (43.8)$$

Partiendo de (43.8) y teniendo en cuenta (43.7), (43.4) y (43.3), obtenemos

$$I_z \omega = D \theta^2 / \omega = -2mVJ(eg), \quad (43.9)$$

de donde

$$g = -2mVJ\omega / (e\theta^2 D). \quad (43.10)$$

Todas las magnitudes en el primer miembro o son conocidas o, en principio, pueden medirse, lo que permite definir  $g$ .

El efecto de torsión del hilo durante la imanación es pequeño. Por eso, de hecho, la prueba se efectúa imantando no una vez, como se describió antes, sino remagnetizando múltiples veces el modelo con una frecuencia  $\omega_0$ . Como consecuencia sucede el incremento de las vibraciones de torsión del modelo, con la particularidad de que la amplitud de las oscilaciones forzadas en la resonancia, siendo bastante bueno el factor  $Q$ , puede medirse ya fácil y fiablemente. En el sentido principal, el paso a la intensificación de resonancia no trae ningún cambio en los razonamientos citados.

Los ensayos de Einstein—Hass se efectuaron con barras ferromagnéticas, cuyo efecto de imanación se nota muy bien. Fue obtenido experimentalmente

$$g = 2. \quad (43.11)$$

Este valor supera dos veces el que se debería esperar si el magnetismo se determinase por el movimiento orbital de los electrones en el átomo. Cuando se realizaron por primera vez esos ensayos (1915) aún no se sabía nada sobre el spin del electrón y el resultado del experimento parecía misterioso. A continuación fue descubierto el spin y se mostró que para él  $g = 2$ . Después de eso quedó claro que el resultado del ensayo de Einstein—Haas es la indicación experimental directa de que el ferromagnetismo se determina por el momento magnético propio de los electrones y no por su movimiento orbital.

Para otros magnéticos la relación giromagnética en ensayos semejantes se obtuvo entre 1 y 2. El signo en todos los casos testimonia que el magnetismo se determina por el movimiento de los electrones.

**Efecto Barnett.** Cualquier magnético posee diamagnetismo. Si es una substancia paramagnética, su diamagnetismo se provoca por la precesión de los momentos magnéticos de los átomos alrededor de la dirección del vector de inducción del campo magnético, creado en el sistema de coordenadas donde el magnético, como algo entero, está en reposo. Con otras palabras, su diamagnetismo es consecuencia de la precesión de los átomos respecto a la red cristalina del magnético. Pongamos en rotación el magnético un todo único. Los átomos aisla-

dos son de por sí unos giróscopos pequeños que tienden a conservar la dirección de su eje de rotación en el espacio. Por esta razón, la orientación de los momentos magnéticos de átomos aislados en el espacio permanece invariable. Como consecuencia, dichos momentos magnéticos respecto a la red cristalina del magnético ejecutarán un movimiento de precesión con la frecuencia de rotación del magnético. Pero semejante precesión ordenada de los átomos respecto al magnético como un todo conduce a la imanación. Por lo tanto, *como consecuencia de la rotación, el magnético se imanta*. En esto consiste el efecto que observó por primera vez en 1909 el científico Barnett.

De lo expuesto antes queda claro que al girar el magnético con una frecuencia  $\omega$ , su imanación será la misma que al introducir un cuerpo diamagnético en el campo magnético con la inducción

$$B = 2m_e\omega / (|e|g). \quad (43.12)$$

Subrayemos que *al girar un cuerpo paramagnético, en él surge sólo imanación diamagnética*. Es aproximadamente dos órdenes inferior a la imanación a causa del efecto paramagnético (reorientación de los momentos magnéticos).

¿Qué causas conducen a que el momento magnético total y el momento mecánico total del átomo no sean colineales?

¿Cuál es la magnitud que desempeña el papel de momento total eficaz del átomo habiendo una interacción con los campos magnéticos exteriores?

¿Por qué en el experimento de Einstein—Haas se hace uso de la remagnetización en un campo exterior periódico? ¿Cuáles exigencias satisface la frecuencia del campo exterior? ¿Cuál es la naturaleza de la imanación en el efecto Barnett?

## Problemas

- La susceptibilidad diamagnética del cobre (en estado sólido) es igual a  $\chi_d = -8.8 \times 10^{-9}$ . Determinar la distancia media de los electrones respecto al núcleo en el átomo de cobre.
- El momento magnético de la molécula de oxígeno es igual a  $p_m = 2.6 \cdot 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . Definir la susceptibilidad paramagnética del oxígeno para las condiciones normales.
- El momento magnético dipolar de la molécula tiene el orden de un magnetón de Bohr  $\mu = e\hbar/(2m_e) = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . Tomando en consideración que las moléculas de gas perfecto poseen un momento magnético permanente  $\mu$ , hallar la imanación máxima posible para  $t = 100 \text{ }^\circ\text{C}$  y  $p = 101,3 \text{ kPa}$ .

## Respuestas

7.1.  $\sqrt{R^2\langle} = \sqrt{-6m\chi_d/(e^2Z\mu_0N)} = 0,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

7.2.  $\chi_d = p^2 mN\mu_0/(3kT) = 18 \cdot 10^{-7}$ . 7.3.  $J_{\text{máx}} = 182 \text{ A/m}$ .