

Inducción electromagnética y corrientes alternas casiestacionarias

La aproximación casiestacionaria es válida al describir los campos electromagnéticos y corrientes en las zonas, cuyas dimensiones lineales son mucho menores que la longitud de onda y cuando puede menospreciarse las corrientes de desplazamiento. El campo eléctrico, originado por la variación del campo magnético, se tiene en cuenta, mientras que el campo magnético, engendrado por el cambio del campo eléctrico, no se toma en consideración. Las líneas de densidad de la corriente de conducción son cerradas, ya que se prescinde de las corrientes de desplazamiento. El campo magnético se determina por los valores instantáneos de la densidad de las corrientes de conducción en el mismo momento de tiempo. Las densidades de las corrientes de conducción dependen de la variación del campo magnético y, por lo tanto, del cambio de la densidad de las corrientes de conducción.

§ 44. Inducción de las corrientes en conductores en movimiento

Se da la enunciación cuantitativa de la inducción de corrientes en conductores en movimiento. Se describen los procesos físicos en los generadores de corriente alterna.

Aparición de fem en un conductor en movimiento. Al moverse el conductor en un campo magnético, sus *electrones libres*, influidos por las fuerzas de Lorentz, se ponen en movimiento respecto al conductor, o sea, en el conductor surge una corriente eléctrica. Este fenómeno se llama inducción de las corrientes en los conductores en movimiento.

Examinemos la sección rectilínea DG del conductor (fig. 176), que moviéndose con una velocidad v , se desplaza por los conductores CK y AL como por guías, conservando todo el tiempo el circuito $AGDCA$ cerrado. La inducción del campo magnético homogéneo exterior es perpendicular al plano en el que yace el contorno. Sobre las cargas en el conductor en movimiento actúa la fuerza de Lorentz

$$F = ev \times B, \quad (44.1)$$

colineal a DG . Las fuerzas que actúan sobre las cargas positivas y negativas del conductor, se muestran por los vectores $F_{(+)}$ y $F_{(-)}$, respectivamente. Los electrones libres comienzan a moverse, originando la corriente eléctrica. Su dirección se toma como el recorrido positivo del circuito, y, por lo tanto, la

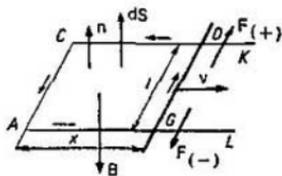


Fig. 176
Inducción de las corrientes en conductores en movimiento

normal positiva a la superficie en la que yace el circuito, es el vector n en esta figura.

La presencia de la fuerza F [véase (44.1)] equivale a que en el conductor sobre las cargas actúa un campo eléctrico efectivo

$$\mathbf{E}_{ef} = F/e = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (44.2)$$

y por eso la fem de inducción entre ciertos puntos 1 y 2 del conductor es igual a

$$(\Delta \mathcal{E}^{ind})_{21} = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \quad (44.3)$$

En el caso en cuestión dicha fem surge entre los puntos D y G :

$$(\Delta \mathcal{E}^{ind})_{DG} = \int_{(G)}^{(D)} vB \, dl = vBl. \quad (44.4)$$

En las secciones inmóviles del circuito cerrado no se forma fuerza electromotriz. Por eso la fem de inducción en el contorno cerrado $AGDCA$, provocada por el movimiento de su parte DG en el campo exterior, es

$$\mathcal{E}^{ind} = \int_{AGDCA} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = vBl. \quad (44.5)$$

Después de expresar la velocidad del conductor DG como

$$v = dx/dt, \quad (44.6)$$

donde x es la coordenada de sus contactos en los puntos D y G con los conductores, escribamos (44.5) en la forma

$$\mathcal{E}^{ind} = dxI/dt. \quad (44.7)$$

Tomemos en consideración que

$$\Phi = -xIB \quad (44.8)$$

es el flujo de inducción magnética a través de la superficie, limitada por el contorno $AGDCA$. El signo menos en (44.8) muestra que las direcciones de \mathbf{B} y $d\mathbf{S}$ son contrarias. Por eso, en definitiva, la fórmula (44.5) puede escribirse así

$$\mathcal{E}^{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (44.9)$$

es decir, al moverse un conductor cerrado en el campo magnético exterior, en su contorno surge una fuerza electromotriz de inducción que es igual a la velocidad de variación del flujo de inducción (flujo eléctrico) del campo magnético exterior.

a través de la superficie, tendida sobre el contorno cerrado.

La fórmula (44.9) se dedujo para el caso particular cuando se mueve sólo una parte del conductor en el plano perpendicular a la inducción del campo magnético. Si se mueven varias secciones del conductor, la fuerza electromotriz de inducción en el contorno cerrado es igual a la suma algebraica de las fem de inducción que surgen en las secciones. Por eso la fórmula (44.9) se generaliza sin cálculos posteriores para el caso de un movimiento arbitrario del conductor en el plano, perpendicular a la dirección del vector de inducción del campo magnético. Pero durante el movimiento el contorno del conductor puede, claro está, deformarse al azar.

Generalización para un caso aleatorio. Examinemos un elemento de longitud del conductor dl que se mueve con una velocidad $v = dr/dt$ (fig. 177). Conforme a la fórmula (44.3), en esta longitud se crea una fuerza electromotriz

$$d\mathcal{E}^{ind} = v \times B \cdot dl = \frac{d}{dt} (dr \times B \cdot dl). \quad (44.10)$$

El producto mixto en (44.10) se transforma de la siguiente manera:

$$dr \times B \cdot dl = dl \times dr \cdot B = -dr \times dl \cdot B = -dS \cdot B = -\delta\Phi, \quad (44.11)$$

donde $\delta\Phi$ es el flujo de inducción magnética a través del elemento superficial $dS = dr \times dl$, formado por el elemento de longitud dl durante su movimiento. La dirección positiva de la normal a dicho elemento superficial se elige de manera que coincida con el sentido positivo de la normal a la superficie, limitada por el contorno cerrado.

Poniendo (44.11) en (44.10), obtenemos

$$d\mathcal{E}^{ind} = -\delta\Phi/dt. \quad (44.12)$$

Para hallar la fuerza electromotriz total de inducción en un contorno cerrado es necesario sumar todas las fem de inducción respecto a todos los elementos dl de ese contorno:

$$\mathcal{E}^{ind} = \oint d\mathcal{E}^{ind} = -\frac{1}{dt} \oint \delta\Phi = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (44.13)$$

donde

$$\oint \delta\Phi = d\Phi \quad (44.14)$$

es la variación del flujo de inducción a través de la superficie limitada por el contorno cerrado.

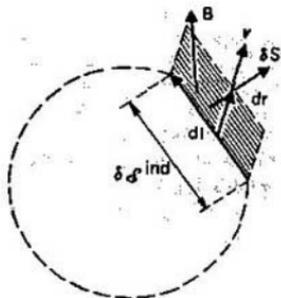


Fig. 177
Generalización de la fórmula para la inducción de las corrientes en los conductores en movimiento para un caso arbitrario

La fórmula (44.13) coincide con (44.9). Así, queda demostrado que (44.9) es válida para movimientos y deformaciones aleatorias del contorno cerrado.

Generadores de corriente alterna. Si un conductor cerrado se mueve en un campo magnético de manera que el flujo de inducción magnética que abarca éste, varía constantemente, en el conductor se genera permanentemente una fuerza electromotriz de inducción y una corriente alterna correspondiente, es decir, semejante contorno cerrado es de por sí un generador de corriente alterna. El circuito más sencillo de un generador de corriente alterna se da en la fig. 178, a. Si el campo magnético es homogéneo y el cuadro gira en él con una velocidad

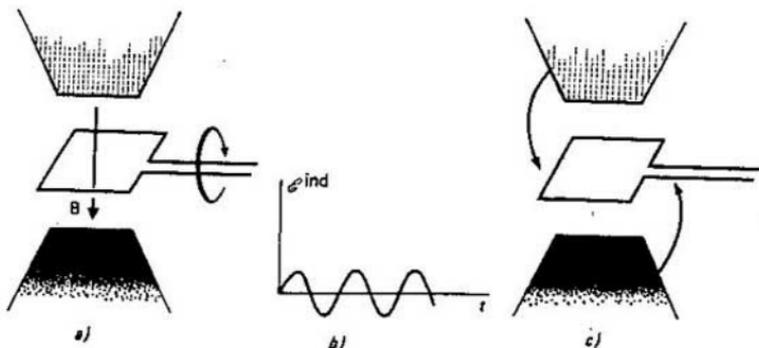


Fig. 178
Diagrama del generador de corriente alterna

angular constante, la \mathcal{E}^{ind} que surge en el cuadro es una fuerza electromotriz armónica, cuya frecuencia es igual a la frecuencia de rotación del cuadro en el campo magnético. En el contorno cerrado aparece una corriente alterna de correspondiente frecuencia (fig. 178, b).

Si en lugar de una espira, en el campo magnético se mueven dos espiras paralelas, acopladas en serie, la fuerza electromotriz de inducción aumenta el doble. Por eso, al confeccionar los generadores en la práctica, se utilizan los devanados de muchas espiras. En la electrotecnia se examinan con más detalle las cuestiones sobre la ejecución más útil de los devanados, sobre la creación de un campo magnético, la eliminación de la corriente de los devanados en movimiento, etc. Señalemos sólo que la eliminación de la corriente de los conductores en movimiento para una intensidad de corriente grande es una tarea difícil. Por esta razón, en vez del movimiento de los conductores con corriente se efectúa el movimiento de las fuentes del campo magnético permaneciendo los conductores inmóviles. En el circuito más sencillo (fig. 178, c) eso significa el movimiento de los imanes permanentes alrededor de un cuadro inmóvil con corriente. En este último se excita una fuerza electromotriz de inducción. Desde el punto de vista cuantitativo esa fem es la misma, siendo iguales las velocidades rela-

tivas de los imanes y del cuadro. Sin embargo, la esencia física de los fenómenos en cuestión en estos dos casos es diferente (véase el § 45).

Los primeros generadores eran máquinas con imanes permanentes, pero ya en 1866 se confeccionó un generador en el que el campo magnético se creaba mediante un electroimán. Después de ello, la construcción de los generadores se perfeccionó con rapidez.

Principio de conservación de la energía. Al recorrer la corriente un circuito con resistencia óhmica, se desprende calor de Joule. La energía que se libera en forma de calor, se obtiene por medio del trabajo de las fuerzas mecánicas en el generador de corriente eléctrica.

Claro está que al pasar la energía de una forma a otra, se observa el principio de conservación de la energía. Estudiemos eso en un ejemplo sencillo (fig. 176).

Sea R la resistencia en el contorno $AGDCA$ e I , la intensidad de la corriente en el circuito. Por lo tanto, en el contorno con corriente se libera en forma de calor, una energía con una potencia

$$P_1 = I^2 R. \quad (44.15)$$

Por otra parte, durante el movimiento de la sección del conductor DG con una corriente de intensidad I , es necesario superar la fuerza de Lorentz

$$F = IlB. \quad (44.16)$$

Por consiguiente, las fuerzas que efectúan el movimiento del conductor, deben desarrollar una potencial

$$P_2 = Fv = IlB \, dx/dt = -I g^{\text{ind}} = -I^2 R, \quad (44.17)$$

donde se tiene en cuenta la fórmula (44.9) y se toma en consideración que $g^{\text{ind}} = -IR$. El signo menos en (44.17) muestra que el trabajo se realiza sobre el sistema. La comparación de las expresiones (44.15) y (44.17) indica que $P_1 + P_2 = 0$. Esto significa que *la energía, liberada en forma de calor, en el contorno es igual al trabajo de las fuerzas que ponen el conductor en movimiento, es decir, a fin de cuentas, en el caso dado las fuerzas electromotrices exteriores son las fuerzas mecánicas que efectúan el movimiento del conductor.*

Al moverse y deformarse en un campo magnético exterior un conductor cerrado, en su contorno surge cierta fuerza electromotriz de inducción, numéricamente igual a la velocidad de variación del flujo de inducción de un campo magnético exterior a través de la superficie, tendida sobre un contorno cerrado.

Todo el trabajo, realizado por la corriente inducida en un conductor en movimiento, se efectúa mediante el trabajo de las fuerzas que ponen en movimiento el conductor.

¿Cuáles son los fenómenos físicos, basados en la acción de los generadores de corriente alterna? Describanse los circuitos principales de los generadores.

§ 45. Ley de la inducción electromagnética de Faraday

Se examinan la esencia física y la enunciación matemática de la ley de Faraday. Se analiza la relación entre la inducción electromagnética de Faraday y la inducción de la corriente en los conductores en movimiento.

Definición. En 1831 M. Faraday descubrió experimentalmente el fenómeno de la inducción electromagnética, que consiste en el surgimiento de corriente eléctrica en un conductor cerrado al variar el flujo de inducción magnética, que abarca el contorno. La regla que determina la dirección de la fem de inducción, fue enunciada en 1833 por E. H. Lenz (1804—1865); *el flujo de inducción está dirigido de tal manera que el campo, originado por él, obstaculiza la variación del flujo magnético.* Con otras palabras, la dirección de la corriente que surge en el contorno, forma con la dirección del cambio del flujo de inducción magnética un sistema a la izquierda (fig. 179). En 1845 F. E. Neumann (1798—1895) dio la definición matemática de la ley de inducción electromagnética en forma moderna:

$$\mathcal{E}^{\text{ind}} = - d\Phi/dt, \quad (45.1)$$

con la particularidad de que el contorno permanece inmóvil.

Esencia física del fenómeno. Según su aspecto, la fórmula (45.1) coincide con (44.9), pero su contenido físico es totalmente diferente. *La aparición de la fem, que se tiene en cuenta en (44.9), está ligada con la acción de la fuerza de Lorentz sobre las cargas en movimiento. Mientras que en el surgimiento de la fem que se tiene en cuenta por la expresión (45.1) no participa ninguna fuerza de Lorentz, ya que los conductores están sin movimiento.* En cambio, en el conductor surge corriente eléctrica, por lo que se puede deducir que en él existe un campo eléctrico.

Por lo tanto, *la ley de Faraday (45.1) expresa un fenómeno físico nuevo: el campo magnético en variación engendra un campo eléctrico. Así pues, el campo eléctrico se origina no sólo por las cargas eléctricas, sino también por un campo magnético en variación.*

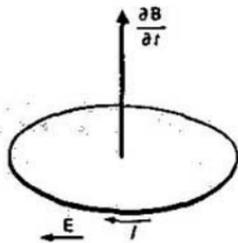


Fig. 179
Ley de inducción electromagnética de Faraday

Hablando en rigor, la presencia de corriente en un conductor cerrado muestra que el campo eléctrico existe sólo dentro del conductor. Sin embargo, el conductor en este caso desempeña el papel de dispositivo que detecta el campo eléctrico. En ausencia del conductor, el campo magnético en variación engendra también un campo eléctrico. Eso puede demostrarse, por ejemplo, con el hecho de que sobre la carga en un campo magnético en variación actúa una fuerza eléctrica (véase el § 56). Ello demuestra que la

inducción electromagnética es una ley fundamental general de la naturaleza que establece el enlace entre los campos magnéticos y eléctricos. El diferente contenido físico de los fenómenos, descritos por las fórmulas (44.9) y (45.1) queda claro del siguiente ejemplo. Supongamos que el conductor DG en la fig. 176 se mueve con una velocidad v , pero al mismo tiempo la inducción magnética B se reduce. Como consecuencia del movimiento del conductor en el contorno cerrado surge una fem de inducción que provoca la corriente (fig. 176). La variación de B por la ley de la inducción electromagnética de Faraday provoca en el contorno también una fem de inducción, que en este caso está orientada de manera contraria a la que aparece a causa del movimiento de la sección del conductor DG . Puede elegirse una velocidad de variación de B ($\partial B/\partial t$) que esas dos fem se compensen mutuamente. En definitiva, en el contorno cerrado no habrá corriente, ya que la fem total de inducción es nula. Pero esa compensación mutua de la fem de inducción tiene lugar en el contorno cerrado en total y no en cada punto del contorno. La fem de inducción a cuenta del movimiento del conductor surge sólo en la sección DG , mientras que la fem de inducción de Faraday aparece tanto en la sección DG , como en las demás secciones DC , CA , AG del conductor. Como consecuencia del movimiento, en el elemento dl del conductor surge una fem de inducción que depende sólo de B y de la velocidad v de movimiento de dicho elemento, pero que no es función de $\partial B/\partial t$. Debido al cambio de la inducción, en el elemento del conductor dl surge la fem de inducción de Faraday que no depende de la inducción B y la velocidad v de movimiento de dicho elemento, sólo es función de $\partial B/\partial t$. Esto es precisamente lo que demuestra que la naturaleza física de la fem de inducción en estos dos casos es diferente.

Conductor en movimiento en un campo magnético alternativo. Si un conductor cerrado se mueve en un campo magnético alternativo, sufriendo deformaciones arbitrarias de su forma, la fem de inducción en él surge tanto como consecuencia del movimiento y la deformación, que se tienen en cuenta por la fórmula (44.9), como a causa del cambio de la inducción del campo magnético, que se toma en consideración por la fórmula (45.1). Por eso puede decirse que la fem de inducción en el conductor se determina por la fórmula (45.1), con la particularidad de que por $d\Phi/dt$ se comprende la velocidad total de variación del flujo de inducción, que abarca el conductor, tanto debido a su movimiento y deformación, como también a causa del cambio del campo magnético.

Aplicación de la inducción electromagnética a los generadores de corriente alterna. Se ve por qué la corriente puede generarse no sólo moviéndose los conductores en el campo magnético, sino que también al moverse los imanes. La fig. 180 muestra el diagrama de la inducción electromagnética.

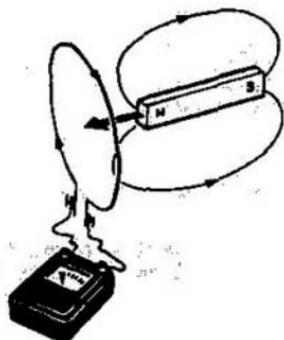


Fig. 180
Demostración de la inducción electromagnética de Faraday.

El campo eléctrico se engendra no sólo mediante las cargas eléctricas, sino también por el campo magnético variable.

La fem de inducción se expresa por la fórmula (45.1), con la particularidad de que por $p\Phi/dt$ se comprende la velocidad total de la variación del flujo de inducción que abarca el conductor, como consecuencia del movimiento y deformación del conductor y del cambio del campo magnético.

§ 46. Forma diferencial de la inducción electromagnética

Se da la forma diferencial de la ley de la inducción electromagnética y se examinan las propiedades de los potenciales escalar y vectorial de un campo electromagnético alternativo.

Enunciación. Escribamos la ley de la inducción electromagnética de inducción de Faraday [véase (85.1)] como

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (46.1)$$

donde L es el contorno y S , la superficie, tendida sobre el contorno L . En (46.1) se tienen en cuenta las definiciones:

$$\mathcal{E}^{\text{ind}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad \Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (46.2)$$

Señalemos que entre la dirección del recorrido del contorno L y el vector $d\mathbf{S}$ se observa una relación a la derecha. Es necesario prestar también atención en que en la definición del flujo de inducción [véase (46.2)] la superficie S , a través de la cual se calcula el flujo, es una superficie arbitraria, tendida sobre el contorno L . Semejante definición supone que esta integral no depende de la forma de la superficie, lo importante es que la superficie sea limitada por el contorno L o, como se dice, sea tendida sobre el contorno L . Demostremos eso. Elijamos dos superficies cualesquiera S_1 y S_2 , tendidas sobre el contorno L . Su conjunto forma una superficie cerrada $\bar{S} = S_1 + S_2$, que limita cierto volumen V entre ellas. El flujo del vector \mathbf{B} a través de la superficie cerrada \bar{S} es nulo, puesto que, según el teorema de Gauss—Ostrogradski, es igual a la integral por el volumen V , limitado por la superficie \bar{S} , respecto a la $\text{div } \mathbf{B} = 0$. De eso se desprende que la afirmación sobre la igualdad de los flujos a través de S_1 y S_2 (los signos de los flujos son los mismos para la misma orientación, respecto a la dirección del rodeo del contorno, de las normales positivas a dichas superficies).

Transformemos el primer miembro de (46.1) por la fórmula de Stokes:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (46.3)$$

En definitiva, obtenemos

$$\int_L \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (46.4)$$

con la particularidad de que la derivada respecto a t se introduce bajo el signo de la integral, basándose en que el área de integración no depende del tiempo. Ya que S es arbitraria, de la fórmula (46.4) se desprende que

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t. \quad (46.5)$$

La ecuación (46.5) es la escritura diferencial de la ley de la inducción electromagnética de Faraday. Ella describe la ley de creación del campo eléctrico en cierto punto, merced al cambio de la inducción del campo magnético en el mismo punto. El campo \mathbf{E} se denomina con frecuencia campo de inducción.

Carácter no potencial del campo eléctrico de inducción. En un campo magnético alternativo $\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$ y, por lo tanto, conforme a (46.5),

$$\text{rot } \mathbf{E} \neq 0. \quad (46.6)$$

Eso significa que el campo eléctrico de inducción, a diferencia del electrostático, originado por las cargas inmóviles, no es de potencial. El trabajo de desplazamiento de la carga q en él por un contorno cerrado, en general, no es nulo:

$$A = q \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0. \quad (46.7)$$

De aquí, en particular, se deduce que el mencionado campo no puede representarse en forma de gradiente respecto a cierta función, o sea, no puede ser representado en forma de (14.27). Es necesario utilizar una representación, distinta de (41.27).

Potenciales vectorial y escalar en un campo electromagnético alternativo. Dado que la ley de la inducción electromagnética no se refiere a las leyes de creación del campo magnético, la ecuación (36.4) para la divergencia del campo magnético permanece invariable, es decir, $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Por consiguiente, queda sin cambiar la fórmula (37.2) que enlaza el potencial vectorial con la inducción del campo magnético:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (46.8)$$

La relación del potencial escalar con la intensidad del campo eléctrico cambia. Expresando \mathbf{B} en (46.5) con ayuda de (46.8), recibimos

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A} = - \text{rot } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (46.9)$$

donde la sucesión de las diferenciaciones respecto al tiempo y a las coordenadas se cambió, a causa de su independendencia. La ecuación (46.9), escrita en la forma

$$\text{rot } \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (46.10)$$

muestra que el vector $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t$ es de potencial y, por lo tanto, puede representarse en forma de gradiente de cierta función

$$\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t = -\text{grad } \varphi, \quad (46.11)$$

donde φ es el potencial escalar. De esta manera, para los campos alternativos la intensidad del campo eléctrico se expresa no sólo mediante el potencial escalar, sino que también por medio del potencial vectorial:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t.} \quad (46.12)$$

El primer sumando en el segundo miembro de (46.12) tiene en cuenta sólo la engendración del campo eléctrico por las cargas eléctricas, mientras que el segundo sumando, la creación del campo por la ley de la inducción electromagnética de Faraday.

Multiformidad de los potenciales, transformación de calibración. Lo mismo que en el caso estacionario, los potenciales vectorial y escalar son multiformes, o sea, un mismo campo electromagnético puede describirse por muchos potenciales vectoriales y escalares.

Sea que el campo \mathbf{E} , \mathbf{B} , se describe mediante los potenciales \mathbf{A} , φ por las fórmulas (46.8) y (46.12) y existe cierta función $\chi(x, y, z, t)$. Se afirma que los potenciales

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi, \quad \varphi' = \varphi - \partial\chi/\partial t \quad (46.13)$$

caracterizan el mismo campo \mathbf{E} , \mathbf{B} que los potenciales \mathbf{A} y φ . Para demostrarlo hallemos \mathbf{E}' , \mathbf{B}' que se describen por medio de los potenciales \mathbf{A}' , φ' mediante las expresiones (46.8) y (46.12):

$$\mathbf{B}' = \text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \text{grad } \chi = \mathbf{B}, \quad (46.14)$$

donde se tiene en cuenta que $\text{rot grad} = 0$ y se toma en consideración la fórmula (46.8).

Para el campo \mathbf{E}' obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\text{grad } \varphi' - \partial\mathbf{A}'/\partial t = -\text{grad } \varphi - \text{grad } (\partial\chi/\partial t) - \\ &\quad - \partial\mathbf{A}/\partial t - \partial(\text{grad } \chi)/\partial t = -\text{grad } \varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t = \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (46.15)$$

Así pues, en efecto, los potenciales (46.13) describen un mismo campo que los potenciales \mathbf{A} , φ . Las transformaciones (46.13) se denominan de **calibración**. Ellas permiten «calibrar» los potenciales, es decir, aplicarles cierta condición, haciendo uso de su multiformidad (véanse los §§ 14, 37, 63).

§ 47. Energía del campo magnético

Se deducen las fórmulas para la energía del campo magnético de los circuitos con corriente y la expresión para la densidad de energía. Se citan las expresiones para la energía del magnético en un campo magnético exterior y de las fuerzas volumétricas que actúan sobre los magnéticos comprimibles.

Energía del campo magnético de un circuito aislado con corriente. Para que en un circuito inmóvil pueda crearse una corriente eléctrica, es necesario conectar al circuito una fuente de fem exteriores. Si el circuito es recorrido por una corriente continua, la energía que llega de la fuente de fem exteriores al circuito, se gasta en liberar el calor de Joule y realizar un trabajo en el consumidor de energía. La inducción del campo magnético, lo mismo que su energía, en este caso es invariable. La inducción cambia al variar la intensidad de la corriente. Por lo tanto, la fuente de fem exteriores transmite al circuito una energía para crear un campo magnético durante el aumento de la intensidad de la corriente. Después de calcular el trabajo que efectúa la fuente de fem exteriores para elevar la intensidad de la corriente desde cero hasta un valor finito, obtenemos cierta energía del campo magnético, relacionado con dicha corriente.

Al cambiar el flujo de la inducción magnética, que abarca el circuito, en este último surge una fem de inducción conforme a la ley (46.1). En el circuito aislado el flujo de la inducción electromagnética Φ aparece merced al campo magnético, originado por la corriente en el circuito (fig. 181). Al aumentar la intensidad de la corriente, crece el flujo Φ que abarca la corriente, y, conforme a la ley de Faraday, en el circuito surge una fem de inducción que en este caso se denomina fem de autoinducción. Según la ley de Lenz, dicha fem está dirigida de manera que impide el aumento de la intensidad de la corriente. Con el fin de elevarla es necesario que la fem exterior de la fuente esté dirigida de manera contraria a la fem de autoinducción y sea igual a ésta. Así pues, durante el incremento de la intensidad de la corriente, la fuente de las fem exteriores realiza un trabajo contra la fem de autoinducción. En el transcurso del tiempo dt por el circuito pasa una cantidad de electricidad $dQ = I dt$, y por eso, durante dt la fuente de las fuerzas exteriores efectúa un trabajo contra la fem de autoinducción igual a

$$dA = - \mathcal{E}^{ind} I dt = (d\Phi/dt) I dt = I d\Phi, (47.1)$$

donde para \mathcal{E}^{ind} se ha utilizado la fórmula (46.1). Al realizar ese trabajo, transcurre una transfor-

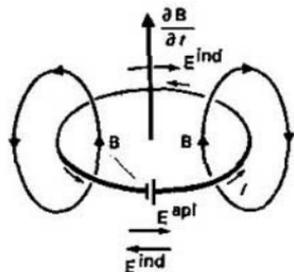


Fig. 181

Al aumentar la corriente, la fuente de fem exteriores efectúa un trabajo contra las fem autoinducidas

mación de la energía de la fuente de fem exteriores en la energía del campo magnético de la corriente en el circuito. Por eso la variación de la energía del campo magnético está ligada con el cambio del flujo mediante la relación

$$dW = I d\Phi. \quad (47.2)$$

La inducción del campo magnético de la corriente, de acuerdo con la ley de Biot—Savart (10.10), depende linealmente de la intensidad de la corriente. Por eso para la intensidad de la corriente alterna que circula por un circuito inmóvil rígido, el cuadro de las líneas de fuerza permanece el mismo, mientras que la

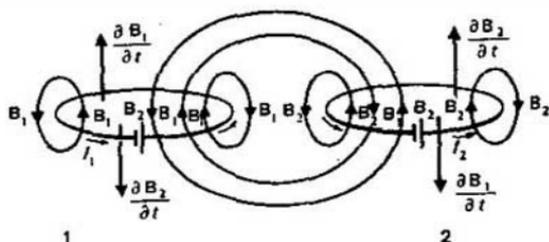


Fig. 182
Para calcular la inductancia del contorno

inducción en cada punto crece proporcionalmente a la intensidad de la corriente. Pero eso significa que el flujo de la inducción magnética Φ a través de un área inmóvil fija es también proporcional a la intensidad de la corriente y por eso

$$\Phi = LI, \quad (47.3)$$

donde L es un factor constante de proporcionalidad que no depende de la intensidad de la corriente y de la inducción del campo magnético. Dicho factor se denomina **inductancia** del circuito.

Sustituyendo (47.3) en (47.2), hallamos

$$dW = LI dI = d(1/2 LI^2). \quad (47.4)$$

Después de integrar los dos miembros de (47.4) desde $I = 0$ hasta cierto valor de I , obtenemos la fórmula

$$W = 1/2 LI^2, \quad (47.5)$$

que determina la energía del campo magnético que crea la corriente de intensidad I que recorre el circuito con la inductancia L .

Energía del campo magnético de varios circuitos con corriente. De la misma manera puede hallarse la energía del campo magnético de dos circuitos con corriente (fig. 182). En este caso es necesario tener en cuenta que la fem de inducción en cada circuito surge no sólo a causa de la variación del flujo de inducción del campo magnético, creado por la corriente de ese circuito, sino que también merced al cambio del flujo de inducción del campo magnético, originado por la corriente

que recorre el otro circuito. Designemos por I_1 e I_2 las intensidades de corriente en los circuitos primero y segundo, respectivamente, y por Φ_{11} y Φ_{12} los flujos de la inducción que abarca el primer circuito, de los campos magnéticos, creados correspondientemente por las corrientes I_1 e I_2 . Las magnitudes semejantes para el segundo circuito se denotan por Φ_{22} y Φ_{21} . Los flujos totales que abarcan cada uno de los circuitos, son

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}, \quad \Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}. \quad (47.6)$$

Sean L_{11} y L_{22} las inductancias de los circuitos. Entonces [véase (47.3)]

$$\Phi_{11} = L_{11}I_1, \quad \Phi_{22} = L_{22}I_2. \quad (47.7)$$

Partiendo de las mismas consideraciones, expuestas para obtener la fórmula (47.3), sacamos la conclusión de que el flujo Φ_{12} que abarca el primer circuito, debido al campo magnético, creado por la corriente en el segundo circuito, es proporcional a la intensidad de la corriente I_2 en el segundo circuito:

$$\Phi_{12} = L_{12}I_2, \quad (47.8)$$

donde L_{12} es una constante, llamada **inductancia mutua** de los circuitos primero y segundo. Para el segundo circuito obtenemos de la misma manera

$$\Phi_{21} = L_{21}I_1. \quad (47.9)$$

Por eso [véase (47.6)]

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_{11}I_1 + L_{12}I_2, \\ \Phi_2 &= L_{21}I_1 + L_{22}I_2. \end{aligned} \quad (47.10)$$

Las fem de inducción en el primero y segundo circuitos son iguales a:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^{\text{ind}} &= -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\left(L_{11}\frac{dI_1}{dt} + L_{12}\frac{dI_2}{dt}\right), \\ \mathcal{E}_2^{\text{ind}} &= -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\left(L_{21}\frac{dI_1}{dt} + L_{22}\frac{dI_2}{dt}\right). \end{aligned} \quad (47.11)$$

Todo el trabajo realizado por las fuentes de las fem exteriores de los circuitos durante dt , análogamente a la expresión (47.1), es igual a

$$\begin{aligned} dA &= dA_1 + dA_2 = -\mathcal{E}_1^{\text{ind}}I_1 dt - \mathcal{E}_2^{\text{ind}}I_2 dt = \\ &= (L_{11}I_1 dI_1 + L_{12}I_1 dI_2 + L_{21}I_2 dI_1 + L_{22}I_2 dI_2), \end{aligned} \quad (47.12)$$

donde se ha hecho uso de la relación (47.10).

Para los cálculos ulteriores demosntremos que $L_{12} = L_{21}$. Con este fin calculemos Φ_{21} y Φ_{12} :

$$\Phi_{21} = \int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2, \quad \Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1, \quad (47.13)$$

donde \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 son las inducciones de los campos, creados por las corrientes I_1 e I_2 , respectivamente; S_1 y S_2 , las superficies de integración, tendidas sobre los contornos. La inducción del campo en cada punto es igual a $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$. Designan-

do por A_1 y A_2 los potenciales vectoriales que describen los campos B_1 y B_2 , tenemos

$$B_1 = \text{rot } A_1, \quad B_2 = \text{rot } A_2$$

y, por consiguiente, las igualdades (47.13) toman la forma:

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \int_{S_2} \text{rot } A_1 \cdot dS_2 = \int_{L_2} A_1 \cdot dl_2, \\ \Phi_{12} &= \int_{S_1} \text{rot } A_2 \cdot dS_1 = \int_{L_1} A_2 \cdot dl_1, \end{aligned} \quad (47.14)$$

donde L_1 y L_2 son circuitos con corriente. El paso a la integración respecto a los circuitos se efectúa conforme a la fórmula de Stokes. La fórmula (37.11b) que expresa el potencial vectorial por medio de la corriente, adquiere en este caso el siguiente aspecto:

$$A_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{L_1} \frac{dl_1}{r}, \quad A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \int_{L_2} \frac{dl_2}{r}. \quad (47.15a)$$

Sustituyendo (47.15a) en (47.14), obtenemos:

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{L_2} \int_{L_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r_{21}}, \\ \Phi_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{dl_2 \cdot dl_1}{r_{12}}, \end{aligned} \quad (47.15b)$$

donde $r_{12} = r_{21}$ es la distancia entre los elementos dl_1 y dl_2 de los circuitos primero y segundo. Comparando (47.15b) con (47.8) y (47.9) recibimos:

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{dl_2 \cdot dl_1}{r_{12}}, \\ L_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_2} \int_{L_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r_{21}}. \end{aligned} \quad (47.16a)$$

Las fórmulas (47.16a) muestran que la inductancia mutua depende sólo de las características geométricas de los circuitos y de su disposición recíproca. Dado que dl_1 y dl_2 son variables independientes de integración, puede cambiarse el orden de integración. Teniendo también en cuenta que $r_{12} = r_{21}$ y $dl_1 \cdot dl_2 = dl_2 \cdot dl_1$, sacamos la conclusión de que

$$L_{12} = L_{21}, \quad (47.16b)$$

es decir, la inductancia mutua del primer circuito con el segundo es igual a la inductancia mutua del segundo circuito con el primero. Tomando lo dicho en consideración, podemos escribir

$$L_{12}I_1dI_2 + I_{21}dI_1 = d \left(\frac{1}{2}L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}I_{21}I_1I_2 \right)$$

y, por lo tanto, representar (47.12) como

$$dA = d \left(\frac{1}{2} L_{11} I_1^2 \Phi + \frac{1}{2} L_{12} I_1 I_2 L_2 + \frac{1}{2} L_{21} I_2 I_1 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \right). \quad (47.17a)$$

Teniendo en cuenta que el trabajo que se gasta en aumentar la intensidad de la corriente es igual a la energía del campo magnético que se forma en este caso; después de integrar los dos miembros de la igualdad (47.17a) desde los valores nulos de la intensidad de la corriente en los circuitos $I_1 = 0$, $I_2 = 0$ hasta sus valores I_1 e I_2 obtenemos

$$W = \frac{1}{2} (L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1 + L_{22} I_2^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 L_{ik} I_i I_k. \quad (47.17b)$$

Esta fórmula determina la energía del campo magnético, originado por las corrientes I_1 e I_2 . Se generaliza fácilmente para el caso de N circuitos

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N L_{ik} I_i I_k, \quad (47.18)$$

donde L_{ik} para $i = k$ se denomina inductancia del i -ésimo circuito y para $i \neq k$, inductancia mutua de los circuitos i -ésimo y k -ésimo. Las expresiones para estos coeficientes se dan mediante las fórmulas (47.16a) que adquieren el aspecto

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_i} \int_{L_k} \frac{dl_i \cdot dl_k}{r_{ik}} \quad (i \neq k), \quad (47.19)$$

donde dl_i , dl_k son elementos de longitud de los i -ésimo y k -ésimo circuitos L_i y L_k y r_{ik} , la distancia entre ellos. De la fórmula (47.19) se desprende la igualdad

$$L_{ik} = L_{ki}, \quad (47.20)$$

que es la generalización de (47.16b) para el caso de muchos circuitos con corriente.

Energía del campo magnético en presencia de magnéticos. Si todo el espacio está lleno de un magnético homogéneo, la inducción del campo, creada por las corrientes prefijadas, varía en μ/μ_0 veces en comparación con la inducción en el vacío [véase (38.29)]. Por lo tanto, en tantas veces cambian los flujos Φ y $d\Phi$ en la fórmula (47.1). Todos los cálculos posteriores son análogos, pero en todas las partes Φ varía en μ/μ_0 veces. Partiendo de las fórmulas (47.7) y (47.8), concluimos que la inductancia del circuito y las inductancias mutuas aumentan μ/μ_0 veces. Eso significa que las fórmulas (47.16a) para la inductancia mutua en presencia de magnético tienen la misma forma, pero sustituyendo μ_0 por μ . Semejante sustitución tiene lugar en las fórmulas (47.15a) y (47.15b). Las expresiones (47.5) y (47.17) para la energía del campo magnético permanecen invariables, pero en ellas las inductancias e inductancias mutuas crecen μ/μ_0 veces. Por lo tanto, la energía del campo magnético de las corrientes que circulan

en un magnético homogéneo e ilimitado, varía μ/μ_0 veces en comparación con la energía del campo de las mismas corrientes, pero en el vacío.

Densidad de la energía del campo magnético. El campo magnético de las corrientes prefijadas está distribuido por todo el espacio. Expresemos la energía del campo (47.5) de un circuito aislado con corriente por medio de los vectores del campo. La fórmula (47.5) con ayuda de (47.3) puede representarse en la forma

$$W = \frac{1}{2} I \Phi. \quad (47.21)$$

Aquí

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (47.22)$$

donde L y S son, respectivamente, el circuito de corriente y la superficie, tendida sobre este circuito. En la expresión (47.22) el potencial \mathbf{A} se origina por la corriente I . Así pues, la corriente cerrada está en interacción con su campo magnético propio. La esencia física de dicha interacción consiste en que cada uno de los elementos de corriente $I d\mathbf{l}$ crea en el espacio un campo magnético con el que actúan recíprocamente los demás elementos de corriente. Sustituyendo (47.22) en (47.21), hallamos

$$W = \int_V \frac{I}{2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV, \quad (47.23)$$

donde, con ayuda de la relación (9.26), se efectúa el paso a las corrientes volumétricas. Ahora transformemos el integrando de manera que en él entren únicamente los vectores del campo y el potencial vectorial. Para eso haremos uso de las fórmulas $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}$, así como de la relación, conocida del potencial vectorial, $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{H}$. En definitiva, se obtiene $\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H})$ y, por lo tanto, la fórmula (47.23) adquiere la forma

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV - \int_V \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV. \quad (47.24)$$

La segunda integral por el teorema de Gauss—Ostrogradski se transforma en una integral por la superficie que limita el volumen de integración:

$$\int_V \text{div} \mathbf{A} \times \mathbf{H} dV = \int_S \mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}. \quad (47.25)$$

Si todas las corrientes se encuentran en una zona finita del espacio, a grandes distancias r de dicha zona $\mathbf{A} \sim 1/r$, $\mathbf{H} \sim 1/r^2$, o sea, el integrando disminuye como $\sim 1/r^3$. En este caso la superficie de integración crece como r^2 y, por lo tanto, la integral disminuye como $1/r$. Por eso para todo el espacio, cuando $r \rightarrow \infty$, la segunda integral en (47.24) se anula y la energía total del campo se da mediante la fórmula

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (47.26)$$

Puede decirse que la energía del campo se distribuye por todo el espacio con una densidad volumétrica

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}, \quad (47.27)$$

es decir, la densidad volumétrica de la energía del campo magnético en cada punto se determina por el valor de los vectores del campo en este punto, con la particularidad de que no importa qué fuentes son las que crean dichos campos.

Inductancia. En la igualdad (47.23) representemos el potencial A con ayuda de (37.11a) como

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{j'}{r} dV', \quad (47.28)$$

donde la densidad de corriente y el elemento de volumen se dan con trazos para no confundirlos con las mismas magnitudes en el integrando (47.23): son distintos elementos de volumen de una misma corriente, la distancia entre los cuales se denota en (47.28) por r (véase la fig. 183). Poniendo (47.28) en (47.23), hallamos

$$W = \frac{1}{2} \frac{\mu}{4\pi} \int \int \frac{j \cdot j'}{r} dV dV' = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{1}{I^2} \int \int \frac{j \cdot j'}{r} dV dV', \quad (47.29)$$

donde en la última igualdad el numerador y denominador de la fórmula se multiplican por I^2 . Comparando (47.29) y (47.5), obtenemos

$$L = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{I^2} \int \int \frac{j \cdot j'}{r} dV dV'. \quad (47.30)$$

Los fórmulas (47.16a) para la inductancia mutua, al pasar a las corrientes volumétricas ($I dl \rightarrow j dV$) toman el aspecto

$$L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{I_i I_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{j_i \cdot j_k}{r_{ik}} dV_i dV_k, \quad (47.31)$$

semejante a (47.30). En cambio, la fórmula (47.30) no puede expresarse mediante las corrientes lineales. Si se hace eso de manera formal, el integrando en la mencionada fórmula adquiere la forma $I^2 dl \cdot dl' / r$ y se convierte en infinito al coincidir los elementos de integración cuando $dl = dl'$ ya que en este caso $r = 0$. Por eso la integral es divergente y la fórmula para la inductancia pierde el sentido. Esa situación es semejante a la que existe para calcular la energía propia de la carga cuando para la carga puntual la energía propia se reduce al infinito.

Campo de un solenoide. A título de ejemplo para utilizar las fórmulas obtenidas en el presente párrafo, examinemos el campo de un solenoide. Como

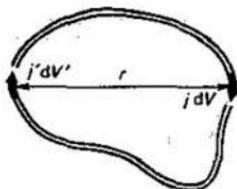


Fig. 183.

Para calcular la energía del campo magnético de dos contornos con corriente

ya se ha mostrado, la inducción del campo fuera del solenoide es nula, mientras que dentro de él, se determina por la igualdad (38.40), o sea

$$B = \mu n I, \quad (47.32)$$

donde n es la cantidad de espiras por 1 m de longitud de solenoide. El flujo de inducción del campo, que abarca una espira del solenoide, es igual a

$$\Phi_1 = BS = \mu n I S, \quad (47.33)$$

donde S es el área de la sección transversal del solenoide. El flujo que abarca N espiras del solenoide, que ocupan la longitud del solenoide $l = N/n$, es

$$\Phi_N = \Phi_1 N = \mu n I S N = \mu I S N^2 / l. \quad (47.34)$$

Por consiguiente, la inductancia de N espiras del solenoide es igual a

$$L_N = \Phi_N / I = \mu S N^2 / l. \quad (47.35)$$

La energía, concentrada en la longitud l , es

$$W = \frac{1}{2} L_N I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu N^2 I^2}{2} S = \frac{1}{2} \mu n^2 I^2 S l = \frac{1}{2} H B V, \quad (47.36)$$

donde $\mu n^2 I^2 = H B$, $S l = V$ es el volumen de la sección del solenoide en la que se calcula la energía del campo. La fórmula (47.36) permite definir la energía del campo tanto mediante la corriente e inductancia, como por medio de la densidad de la energía del campo.

Hallemos el vector-potencial de un solenoide infinitamente largo. Es útil partir de la fórmula (47.22). A causa de la simetría axial del problema, calculemos todo en el sistema de coordenadas cilíndricas con el eje axial que coincide con el eje del solenoide. Designemos el ángulo axial por φ y la distancia del eje hasta el punto en que se calcula el potencial, por r . En calidad de contorno L en (47.22) elijamos una circunferencia con radio r , yacente en el plano perpendicular al eje del solenoide y con centro en el eje. Entonces

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L A_\varphi r d\varphi = 2\pi r A_\varphi,$$

donde se toma en consideración que $A_\varphi = \text{const}$ para $r = \text{const}$. Por lo tanto, el vector-potencial es igual a

$$A_\varphi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

donde S es el área del círculo, limitado por la circunferencia de radio r . De aquí

$$A_\varphi = \begin{cases} \mu n I r / 2 & (0 < r < a), \\ \mu n I a^2 / (2r) & (a < r < \infty). \end{cases}$$

Energía del magnético en un campo magnético exterior. Supongamos que existe una distribución fijada de las corrientes, que en el espacio libre crea un

campo magnético, cuya inducción es $\mathbf{B}_0(x, y, z) = \mu_0 \mathbf{H}(x, y, z)$, y la energía

$$W_0 = \frac{1}{2} \int \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B}_0 dV. \quad (47.37)$$

Supongamos que todo el espacio está lleno de un magnético homogéneo con una permeabilidad magnética $\mu = \text{const}$ y el campo se crea por la misma distribución de las corrientes. Como fue demostrado [véase (38.22)], la intensidad del campo magnético en el magnético no varía ($\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$) y la inducción será $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Por consiguiente, en presencia del magnético la energía del campo

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B} dV. \quad (47.38)$$

Esto significa que al llenar todo el espacio de magnético, la energía del campo aumenta. A título de fuente de dicha energía sirven, por ejemplo las fuerzas electromotrices exteriores, con cuya ayuda se mantienen constantes las corrientes, al llenar el espacio de magnético. Puesto que después de llenar el espacio de magnético todas las fuentes, merced a las cuales surgió el campo adicional, son idénticas a las que originaron el campo antes de llenar el espacio, puede considerarse que la energía del magnético en un campo exterior \mathbf{H}_0 es la magnitud

$$W_m = W - W_0 = \frac{1}{2} \int (\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B} - \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B}_0) dV. \quad (47.39)$$

El integrando puede transformarse:

$$\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B} - \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = (\mu - \mu_0) \mathbf{H}_0^2 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0. \quad (47.40)$$

donde

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \mathbf{B}. \quad (47.41)$$

Por consiguiente, la energía del magnético en un campo magnético es igual a

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0 dV. \quad (47.42)$$

Esta expresión es semejante a la fórmula (18.30) para la energía del dieléctrico en un campo eléctrico exterior, pero se diferencia por el signo en el primer miembro.

La fórmula (47.42) se dedujo para el magnético que llena todo el espacio con $\mu = \text{const}$. Sin embargo, tiene forma de una integral respecto a la densidad de energía del magnético y por eso es de esperar que sea válida para el caso arbitrario. Los cálculos correspondientes confirman esta deducción. No los citamos en el presente manual por su voluminosidad.

Ahora podemos calcular la energía del magnético con la permeabilidad magnética μ_1 , que se encuentra en un medio, cuya permeabilidad magnética es μ_2 . Examinemos otra vez un magnético infinito partiendo de la fórmula (47.42)

de la misma manera que al deducir la expresión (48.30) con una diferencia que consiste en que en la electrostática dicha distribución de las cargas crea un mismo campo D en distintos medios, mientras que en la teoría del campo magnético estacionario la distribución dada de las corrientes origina en diversos medios un mismo campo H . Entonces

$$W_{m12} = W_{m1} - W_{m2} = (\mu_1 - \mu_2) \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 dV, \quad (47.43)$$

donde

$$W_{mi} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{H}_i - \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}_0) dV. \quad (47.44)$$

La expresión (47.43) es semejante a la fórmula (18.31) con el signo cambiado antes de la integral. A pesar de ser deducida dicha fórmula para un magnético infinito, es válida también para un magnético limitado. En este caso la integral se propaga por todo el volumen del magnético. La intensidad \mathbf{H}_2 es la intensidad del campo, originado en los puntos del volumen del magnético si su permeabilidad fuese igual a la permeabilidad magnética μ_2 del medio; \mathbf{H}_1 es la intensidad real en el magnético con permeabilidad magnética μ_1 , sumergido en un medio con permeabilidad magnética μ_2 .

Supongamos que la permeabilidad magnética del medio varía en una magnitud infinitésima $\delta\mu$. Entonces la energía del magnético que se encuentra en el campo magnético \mathbf{H} cambia en δW_m . Suponiendo que en (47.43) $\delta\mu = \mu_1 - \mu_2$, $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} + \delta\mathbf{H}$ y prescindiendo de $\delta\mu\delta\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}$ como una magnitud del orden superior de infinitud, obtenemos

$$\delta W_m = \frac{1}{2} \int \delta\mu H^2 dV, \quad (47.45)$$

donde μ puede ser función de un punto o de otros parámetros. Esta fórmula se diferencia de la fórmula (18.36) para los dieléctricos sólo por el signo.

Cálculo de las fuerzas, partiendo de la expresión para la energía. Examinemos un sistema de circuitos por los cuales circulan corrientes. Al desplazarse y deformarse los contornos a causa de las fuerzas electromotrices exteriores, se efectúa trabajo mecánico. La energía de la fuente de las fuerzas electromotrices exteriores se gasta en crear un campo magnético y en realizar un trabajo mecánico. El trabajo de las fuerzas electromotrices exteriores se determina por la fórmula (47.2) y el trabajo mecánico al variar el parámetro ξ_i que caracteriza la configuración del sistema, es, según la definición, igual a $F_i d\xi_i$, donde F_i es la fuerza generalizada respecto al parámetro ξ_i . El principio de conservación de la energía se escribe como

$$\sum_j I_j d\Phi_j = dW + \sum_i F_i d\xi_i. \quad (47.46)$$

Examinemos ante todo los procesos virtuales, en los cuales se conservan los flujos magnéticos, o sea $d\Phi_j = 0$. La ecuación (47.46) adquiere el aspecto

$$0 = (dW)_\Phi + \sum_i F_i d\xi_i, \quad (47.47)$$

de donde, teniendo en cuenta la independencia de $d\xi_i$, obtenemos

$$F_i = - \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)_{\Phi}, \quad (47.48)$$

donde el índice Φ de la derivada parcial en forma explícita muestra que se toma para los valores constantes de los flujos Φ_j . Para poder hacer uso de la fórmula (47.48) es necesario que la energía del campo magnético se exprese como función de Φ_i y ξ_i como parámetros independientes.

Para las aplicaciones prácticas en muchos casos es más cómodo expresar la fuerza generalizada en forma de derivadas de la energía respecto a los parámetros generalizados para las corrientes continuas. La energía del campo magnético (47.18), teniendo en cuenta que [véase (47.6)]

$$\Phi_i = \sum_k L_{ik} I_k, \quad (47.49)$$

se expresa como

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i I_i. \quad (47.50)$$

Para las corrientes continuas ($I_i = \text{const}$) de (47.50) se desprende que

$$(dW)_I = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i, \quad (47.51)$$

y por eso la fórmula (47.46) se reduce a la forma

$$(dW)_I = \sum_i F_i d\xi_i. \quad (47.52)$$

Señalemos que esta fórmula es válida sólo para corrientes continuas. Tomando en consideración la independencia de ξ_i , hallamos la expresión para las fuerzas generalizadas:

$$F_i = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)_I, \quad (47.53)$$

donde el índice I de la derivada parcial significa que ésta se toma para corrientes continuas. Para poder utilizar la fórmula (47.53) W debe expresarse como una función de las intensidades de las corrientes y de los parámetros ξ_i .

Examinemos a título de ejemplo dos circuitos con corrientes en interacción, cuyos campos magnéticos poseen una energía determinada por la fórmula (47.17). Haciendo uso de (47.53), calculemos la componente x -ésima de la fuerza que ejerce el primer circuito sobre el segundo. En calidad de coordenada generalizada tomemos el valor de la coordenada x en cierto punto del segundo circuito, considerando que el primer circuito es inmóvil. Como desplazamiento virtual, relacionado con dicha coordenada, se debe tomar el desplazamiento del segundo circuito a lo largo del eje X sin deformaciones y rotaciones, y expresar la energía del campo magnético por medio de la mencionada coordenada y otros

parámetros independientes que ahora no nos interesan. Toda la dependencia de la energía del campo magnético respecto a x se encuentra en la inductancia mutua $L_{12} = L_{21}$, ya que las inductancias L_{11} y L_{22} no dependen del cambio de la disposición mutua de los circuitos. La fuerza generalizada, enlazada con la coordenada cartesiana x , es la proyección de la fuerza F_x ordinaria. Por eso (47.53) adquiere el aspecto

$$F_x = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x}. \quad (47.54)$$

De la misma manera se determinan las otras componentes de la fuerza. La inductancia L_{12} es una magnitud geométrica y su dependencia respecto a x es fácil hallar mediante la fórmula (47.19).

Está claro que el valor de la fuerza no depende de por medio de cuál fórmula se calcula. Por eso, llegaremos también al valor de la fuerza de (47.54) si la calculamos valiéndonos de la fórmula (47.48). Realicemos este cálculo. En (47.48) a título de expresión para W no se puede coger la fórmula (47.17), ya que aquí participan en forma explícita las intensidades de corriente. Las excluimos con ayuda de las fórmulas (47.10), de las que se desprende:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{L_{22}\Phi_1 - L_{12}\Phi_2}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}, \\ I_2 &= \frac{L_{11}\Phi_2 - L_{21}\Phi_1}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}. \end{aligned} \quad (47.55)$$

Sustituyendo (47.55) en (47.17), hallamos

$$W = \frac{1}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2} \left[\frac{L_{11}\Phi_1^2}{2} - L_{12}\Phi_1\Phi_2 + \frac{L_{22}\Phi_2^2}{2} \right]. \quad (47.56)$$

Ahora la energía del campo magnético se expresa en forma explícita a través de los flujos y puede aplicarse la fórmula (47.48) para $\Phi_i = \text{const}$. La única magnitud que depende en (47.56) de x es L_{12} , por eso

$$F_x = - \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{1}{(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)^2} [L_{12}L_{22}\Phi_1^2 - (L_{11}L_{22} + L_{12}^2)\Phi_1\Phi_2 + L_{12}L_{11}\Phi_2^2] \frac{\partial L_{12}}{\partial x} = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x}, \quad (47.57)$$

donde se tienen en cuenta las igualdades (47.55). Como era de esperar (47.57) coincide con (47.54).

Es necesario utilizar las fórmulas (47.48) y (47.53) en dependencia de las circunstancias y elegir la que conduce a los cálculos más sencillos.

Fuerzas volumétricas que actúan sobre los magnéticos comprimibles. Disponiendo de la expresión (47.45) para la energía del magnético en el campo magnético, se puede, haciendo uso de la relación entre las fuerzas y la energía, obtener la expresión para las fuerzas de la misma manera que fue hecho para los dieléctricos en el § 19. Partimos de la expresión (47.45) y razonamos del mismo modo que al pasar de (18.36) a la fórmula (19.41). Todos los cálculos son también análogos, únicamente hay que tener en cuenta que para los dieléctricos la fuerza se halla para las cargas constantes, es decir, por la fórmula (19.46), mientras que

para los magnéticos, a corrientes continuas, es decir, por la fórmula (47.53). Eso significa que al calcular las derivadas, es necesario coger la energía con signos diferentes. En definitiva, en lugar de la fórmula (19.41), se obtiene la siguiente fórmula:

$$f = -\frac{1}{2} H^2 \text{grad } \mu + \frac{1}{2} \text{grad} \left(H^2 \rho_m \frac{\partial \mu}{\partial \rho_m} \right). \quad (47.58)$$

Recordemos que todo el examen se llevó a cabo para los procesos isotérmicos y, por lo tanto, la derivada $\partial \mu / \partial \rho_m$ en (47.58) debe calcularse a $T = \text{const.}$

La fórmula (47.58) es útil escribirla de otra manera:

$$f = \frac{1}{2} B^2 \text{grad} \left(\frac{1}{\mu} \right) - \frac{1}{2} \text{grad} \left[B^2 \rho_m \frac{\partial}{\partial \rho_m} \left(\frac{1}{\mu} \right) \right], \quad (47.59)$$

donde se tiene en cuenta que $H^2 = B^2 / \mu^2$ y $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \cong -\frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial x}$, etc. Así la fórmula (47.59) es un análogo más cercano a la expresión (19.41), ya que el papel de vector de campo en el magnetismo lo desempeña B y el análogo de z es $1/\mu$.

Escribamos la fórmula (47.41) como

$$\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} = \frac{J}{B}. \quad (47.60)$$

Sea que la imanación J depende linealmente de la densidad ρ_m , o sea, $J \sim \rho_m$. Entonces de (47.60) se desprende que

$$\rho_m \frac{\partial}{\partial \rho_m} \left(\frac{1}{\mu} \right) = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0}. \quad (47.61)$$

Para estas condiciones la fórmula (47.59) adquiere el aspecto

$$f = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \text{grad } B^2, \quad (47.62)$$

lo que coincide con (39.13). De esta manera, la fórmula (39.13) es válida no sólo para los magnéticos rígidos, sino que también para los comprimibles, para los cuales la imanación depende linealmente de la densidad de masa. Esto se observa en los gases y ciertos líquidos.

Energía del momento magnético en un campo exterior. Puesto que el trabajo, necesario para aumentar el flujo de inducción magnética a través de la superficie, tendida sobre el circuito con corriente I , es igual a $I d\Phi$ ($d\Phi$ es el flujo de inducción magnética que no se origina por la corriente I que circula por el circuito, sino que se crea mediante otras fuentes del campo magnético), la energía que se gasta al formar el flujo Φ a través de la superficie, limitada por el circuito de corriente I , es igual a $I\Phi$. En caso de un circuito infinitésimo $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$, $I\Phi = \mathbf{p}_m \mathbf{B}$, donde $\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}$ es el momento magnético de la corriente. Por lo tanto, la energía del momento magnético en el campo magnético exterior

es

$$W = -p_m \cdot B. \quad (47.63)$$

Esta magnitud alcanza su valor mínimo cuando p_m y B coinciden en dirección. Esto significa que *el campo magnético exterior tiende a girar el momento magnético hasta hacerlo coincidir con el vector de inducción* [véase (39.8)].

¿Por qué la inducción mutua puede calcularse por la fórmula en la que entran las corrientes lineales, y la inductancia no puede expresarse mediante las corrientes lineales?

¿Qué propiedad del campo magnético determina la constancia de la inductancia de un circuito rígido con corriente?

Las inductancias e inductancias mutuas dependen sólo de las características geométricas de los circuitos con corrientes y su disposición recíproca.

Ejemplo 47.1. *Calcular la fuerza con que un solenoide entra o se expulsa de otro (fig. 184). Las densidades del devanado y la intensidad de las corrientes en ellos son n_1, I_1 y n_2, I_2 , respectivamente.*

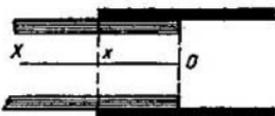


Fig. 184
Para calcular las fuerzas de interacción de los solenoides

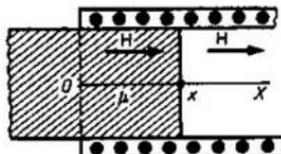


Fig. 185
Para calcular las fuerzas de interacción del solenoide y el imán

mente, y las áreas de las secciones transversales son iguales. Los solenoides son lo suficientemente largos y el devanado bastante denso para poder describir el campo lejos de sus extremos mediante las fórmulas para un solenoide infinitamente largo. El valor de x es grande, merced a lo cual pueden menospreciarse los efectos de borde.

Hallemos la inductancia mutua haciendo uso de las fórmulas (47.48)–(47.49). El primer solenoide origina a través de cada espira del segundo solenoide un flujo $\mu_0 n_1 I_1 S$ y todo el flujo a través de $n_2 x$ espiras del segundo solenoide en la zona de intersección es igual a

$$\Phi_{21} = \mu_0 n_1 I_1 S n_2 x,$$

de donde obtenemos la inductancia mutua

$$L_{21} = \Phi_{21}/I_1 = \mu_0 n_1 n_2 S x \quad (L_{12} = L_{21}). \quad (47.64)$$

Entonces la fuerza es igual a

$$F_x = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x} = \mu_0 n_1 I_1 n_2 I_2 S. \quad (47.65)$$

Si las corrientes tienen el mismo sentido, $I_1 I_2 > 0$, $F_x > 0$ y, por lo tanto, los solenoides se repelen. Siendo las direcciones de las corrientes contrarias $I_1 I_2 < 0$, $F_x < 0$, lo que significa la atracción de los solenoides.

Ejemplo 47.2. *En un solenoide, cuyo área de la sección circular es S , la longitud l y que posee n espiras por 1 m de longitud, se introduce un magnético con permeabilidad magnética μ (fig. 185). Hallar la fuerza que actúa sobre el magnético, menospreciando los efectos de borde si el solenoide es recorrido por la corriente de intensidad I .*

Ya que la susceptibilidad magnética del magnético $\chi \ll 1$, en primera aproximación puede considerarse que la intensidad es en todas las partes igual a $H^{(2)} = H_x = nI$. Por consiguiente, la energía del campo magnético del sistema es igual a

$$W = [H_x B_x / 2 + H^{(2)} B^{(2)} (1 - x) / 2] S,$$

donde B_x y $B^{(2)}$ son las inducciones en el magnético y en el vacío, respectivamente. Teniendo en cuenta que $B_x = \mu H_x$, $B^{(2)} = \mu_0 H^{(2)}$, obtenemos

$$W = (n^2 I^2 / 2) [\mu x + \mu_0 (1 - x)] S$$

y, por lo tanto, la fuerza es

$$F_x = (\partial W / \partial x)_I = 1/2 (\mu - \mu_0) n^2 I^2 S = (w - w_0) S, \quad (47.66)$$

donde

$$w = \mu n^2 I^2 / 2 = H_x B_x / 2, \quad w_0 = \mu_0 n^2 I^2 / 2 = H B^{(2)} / 2$$

son las densidades de la energía del campo magnético por las diferentes partes de la superficie de separación, sobre la que actúa la fuerza. Así pues, la densidad superficial de la fuerza $f_x = F_x / S$ es la suma de dos fuerzas que actúan desde diversas partes sobre la superficie de separación. La densidad superficial de cada una de las fuerzas es igual a la densidad de la energía del campo magnético.

Ejemplo 47.3. Calcular la intensidad de un cable coaxial de longitud l , cuyo alma central posee un radio r_1 y la envoltura, los radios r_2 (la interior) y r_3 (la inferior) (véase la fig. 140). La permeabilidad magnética de los conductores es igual a μ y el espacio entre el alma y la envoltura está lleno de dieléctrico.

Hallemos ante todo la inducción del campo magnético. Está claro que el campo es axial-simétrico y las líneas de fuerza de la inducción son de por sí circunferencias con centro en el eje del cable. Partiendo de la ley de la corriente total, tenemos (véase el ejemplo 35.1)

$$B_\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\mu}{2\pi} I \frac{r}{r_1^2} & (0 < r < r_1), \\ \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} & (r_1 < r < r_2), \\ \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{r} \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} & (r_2 < r < r_3), \\ 0 & (r_3 < r < \infty). \end{cases} \quad (47.67)$$

Para calcular la autoinducción del segmento de cable hacemos uso de la relación $W = LI^2/2$. Puesto que $W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV$, entonces [véase (47.67)]

$$\begin{aligned} W &= \frac{l}{2} \frac{\mu I^2}{(2\pi)^2} \int_0^{r_1} \frac{r^2}{r_1^2} 2\pi r dr + \frac{l}{2} \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi)^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r dr + \frac{l}{2} \frac{\mu I^2}{(2\pi)^2} \int_{r_2}^{r_3} \frac{1}{r^2} \left(\frac{r_3^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} \right)^2 \cdot 2\pi r dr = \\ &= \frac{l}{2} \frac{\mu I^2}{8\pi} + \frac{l}{2} \frac{\mu_0 I^2}{2} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{l}{2} \frac{\mu I^2}{2} \left[\frac{r_3^2}{(r_3^2 - r_1^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{1}{4} \frac{3r_3^2 - r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \right], \end{aligned}$$

de donde

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{l}{2\pi} \left[\mu_0 \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu r_3^2}{(r_3^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{\mu r_3^2}{2(r_3^2 - r_1^2)} \right]. \quad (47.68)$$

§ 48. Circuitos de la corriente alterna casiestacionaria

Se exponen los métodos principales del cálculo de los circuitos de corriente alterna casiestacionaria.

Definición. Al estudiar los campos alternativos y las corrientes alternas es necesario tomar en consideración dos factores:

1) la velocidad finita de propagación de los campos electromagnéticos (véase el § 61);

2) la creación del campo magnético por medio de un campo magnético en variación. La magnitud $j_{des} = \partial D / \partial t$ se denomina densidad volumétrica de la corriente de desplazamiento (véase el § 57).

Para una frecuencia no muy elevada de la corriente alterna, dichos factores pueden menospreciarse, o sea, puede considerarse que los campos electromagnéticos se propagan en el espacio instantáneamente, sin existir las corrientes de desplazamiento o, con otras palabras, el campo magnético se engendra sólo por las corrientes de conducción. Las corrientes y los campos que satisfacen estas condiciones se llaman casiestacionarios. Expresemos los criterios casiestacionarios desde el punto de vista matemático.

1. Si existe un proceso periódico que se propaga desde una fuente con la velocidad c , la longitud de onda de ese proceso, o sea, la distancia en la que se desenvuelve un período T de variación del proceso con el tiempo, es igual a

$$\lambda = cT.$$

La variación espacial de cierta magnitud que caracteriza el proceso puede menospreciarse sólo si esa magnitud se examina en las zonas, cuyas dimensiones lineales son mucho menores que la longitud de onda ($l \ll \lambda$). Esto es precisamente el criterio de menosprecio de la velocidad final de propagación de los campos electromagnéticos.

2. Si $D = D_0 \exp(i\omega t)$, $j_{des} = \partial D / \partial t = i\omega D = i\omega \epsilon E$. Por eso el efecto de las corrientes de desplazamiento puede menospreciarse en comparación con el efecto de las corrientes de conducción para la condición

$$|j_{des}|_{\max} \ll |j|_{\max}.$$

Puesto que $j = \gamma E$, $j_{des} = i\omega \epsilon E$, esta condición puede escribirse como

$$\frac{|j_{des}|_{\max}}{|j|_{\max}} = \frac{\omega \epsilon}{\gamma} \ll 1.$$

Tomando en consideración que para los conductores metálicos $\epsilon \approx \epsilon_0$, $\gamma \approx 10^7$ S/m, obtenemos que las corrientes de desplazamiento son poco importantes en la zona de frecuencias

$$\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0} \approx 10^{18} \text{c}^{-1},$$

es decir, hasta frecuencias mayores que las frecuencias de oscilaciones, correspondientes a la parte ultravioleta del espectro, esta estimación es aproximada, ya que no tiene en cuenta las propiedades inerciales del medio que a frecuencia elevada desempeñan un papel esencial. La consideración de las propiedades inerciales de la substancia debilita la mencionada estimación en varios órdenes, en cambio, después de eso el intervalo de frecuencias para las que se puede menospreciar las corrientes de desplazamiento en comparación con las de conducción sigue siendo muy grande.

No obstante, para los campos electromagnéticos en el vacío y dieléctrico es necesario tener en cuenta las corrientes de desplazamiento, como fuente del campo magnético, para todas las frecuencias, ya que allí no existen corrientes de conducción. La presencia de las corrientes de desplazamiento determina la existencia de las ondas electromagnéticas (véase el capítulo 9).

En lo que se refiere al primer criterio, su papel se define por la magnitud relativa de la longitud de la onda y las dimensiones espaciales de la zona, en la que se estudia el proceso. Verbigracia, para la corriente técnica de 50 Hz de frecuencia la longitud de onda es de $\lambda \approx 6$ mil km. Por esta razón, si nos interesan las cuestiones, relacionadas con la distribución de la corriente por los conductores en los límites de la estación eléctrica o incluso de la ciudad, puede considerarse que la corriente es casiestacionaria. Pero si se trata de la transmisión de la corriente a muchos miles de kilómetros, es necesario tomar en consideración su variabilidad a lo largo de la línea de transmisión y no se puede considerar casiestacionaria. La corriente de frecuencias muy elevadas con una longitud de onda de varios metros no se puede considerar casiestacionaria incluso en los márgenes de un apartamento.

Autoinducción. La fuerza electromotriz de inducción (46.1) surge al variar el flujo Φ que abarca el circuito de corriente, cualesquiera que sean las causas de esta variación. En particular, la propia corriente cerrada lineal crea un flujo de inducción magnética a través de la superficie que restringe. Por lo tanto, al cambiar la intensidad de la corriente en el circuito surge una fuerza electromotriz. Este fenómeno se llama autoinducción. Ya que la corriente crea a su alrededor un campo magnético según la regla de Ampère y la fuerza electromotriz en el circuito está relacionada con la variación del flujo conforme a la regla de la mano izquierda, de la fig. 186 deducimos que la fuerza electromotriz de autoinducción está dirigida de tal manera, que impide la variación de la intensidad de la corriente que la provoca (regla de Lenz).

La intensidad de la corriente en el circuito está ligada con el flujo propio de inducción magnética que abarca la corriente, por la fórmula (47.3)

$$\Phi = LI, \quad (48.1)$$

donde L es la inductancia del circuito. Por eso la expresión (46.1) para la fem de autoinducción adquiere el aspecto

$$\mathcal{E}^{\text{a.ind}} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (48.2)$$

Conexión y desconexión de la fem continua en un circuito con resistencia e inductancia. Si en el momento $t = 0$ (fig. 187) se conecta al circuito una fuente de fem exterior de magnitud constante, por ejemplo, una pila, la intensidad de la corriente I en el circuito comienza a crecer. Pero debido al crecimiento de la inducción del campo, en el circuito surge una fem de autoinducción que actúa en sentido contrario a la fem exterior. Como resultado, la elevación de la intensidad de la corriente en el circuito se hace más lenta. Para cada momento de tiempo se observa la ley de Ohm que, teniendo en cuenta (48.2), se escribe en forma de la ecuación siguiente

$$IR = U_0 = L \, dI/dt, \quad (48.3)$$

donde R es la impedancia en el circuito (incluyendo la resistencia interna de la fuente). Dicha ecuación debe resolverse para la condición inicial $I(0) = 0$.

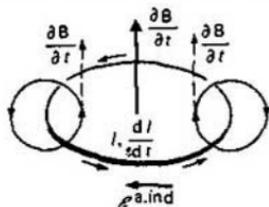


Fig. 186
Surgimiento de la autoinducción.
Regla de Lenz

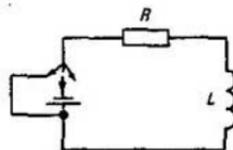


Fig. 187
Circuito con resistencia e inductancia

Al decir que en cada momento se observa la ley de Ohm, se supone que la intensidad de la corriente en todas las secciones del circuito es la misma, es decir, la corriente es casiestacionaria. La solución de la ecuación (48.3) es elemental:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right]. \quad (48.4)$$

La gráfica $I(t)$ se muestra en la fig. 188. El valor establecido de la intensidad de la corriente $I(\infty) = U_0/R$, correspondiente a la ley de Ohm para la corriente continua, se alcanza sólo en el sentido de límite para un tiempo infinito. Teniendo en cuenta la dependencia exponencial entre la intensidad de la corriente y el tiempo, se puede, como habitualmente, en calidad de tiempo de incremento de la intensidad de la corriente en el circuito tomar el valor τ para el cual el exponente se convierte en menos la unidad, es decir,

$$\tau = L/R. \quad (48.5)$$

Para una inductancia grande en el circuito el aumento de la intensidad de la corriente transcurre lentamente. Por ejemplo, si en el circuito se conecta una bobina grande de inductancia y una lámpara de incandescencia, después de cerrar el circuito pasa un lapso considerable durante el cual la lámpara alcanza su caldeo permanente total.

Al desconectar la fuente constante de fem exteriores (fig. 187), por ejemplo, al cortocircuitarla, puede observarse que la intensidad de la corriente no se reduce a cero instantáneamente, sino que disminuye poco a poco. La ecuación para la intensidad de la corriente en este caso, evidentemente, tiene la forma

$$IR = -L \, dI/dt \quad (48.6)$$

y se resuelve para la condición inicial $I(0) = U_0/R$:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \exp(-RT/L). \quad (48.7)$$

La gráfica de esta función se da en la fig. 189. El tiempo de reducción de la intensidad de la corriente se expresa por la misma fórmula (48.5). Para inductan-

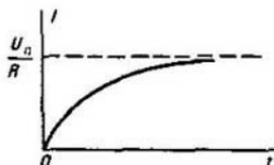


Fig. 188
Incremento de la intensidad de la corriente en el circuito después de conectar una fem exterior continua

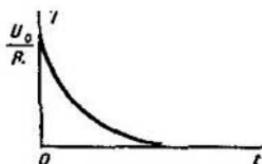


Fig. 189
Decremento de la intensidad de la corriente en el circuito después de desconectar la fem exterior continua

cias suficientemente grandes después de desconectar la fem exterior, la lámpara en el circuito se apaga sólo gradualmente en el transcurso de un lapso notorio. La fuerza electromotriz que asegura la existencia de la corriente en el circuito durante este lapso, es la fuerza electromotriz de autoinducción, y la fuente de energía es la energía del campo magnético de la bobina de inductancia. Las cuestiones de conexión y desconexión de la fem en el circuito con autoinducción fueron examinadas por primera vez en 1855 por Helmholtz.

Obtención de impulsos rectangulares de corriente. Si existe una fuente de impulsos rectangulares de tensión, la presencia del fenómeno de autoinducción en el circuito impide obtener impulsos rectangulares de corriente. La fig. 190 muestra la forma de los impulsos de corriente. Para aproximar al máximo posible su forma a la rectangular es necesario hacer que la inductancia del circuito sea la menor posible.

Capacidad en el circuito. La presencia del condensador en el circuito excluye la posibilidad de que por él circule corriente continua. En este caso la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador, en las que se sitúan las cargas correspondientes, compensa totalmente la acción de la fem exterior. Sin embargo, la corriente alterna en el circuito en presencia del condensador puede circular, ya que en este caso la carga en las armaduras del condensador es alterna, lo que permite precisamente existir la corriente en el circuito. Además, la diferencia de potencial en las armaduras del condensador no compensa la ac-

ción de la fem exterior, merced a lo cual se mantiene la intensidad de la corriente correspondiente.

En presencia de un condensador y una resistencia en el circuito (fig. 191) la ley de Ohm se escribe como la ecuación

$$IR = U_0 - Q/C, \quad (48.8)$$

donde Q es la carga en la armadura del condensador y Q/C , la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador. Es cómodo diferenciar la ecuación (48.8) respecto a t y escribirla en la forma

$$R \frac{dI}{dt} = \frac{dU_0}{dt} - \frac{1}{C} I, \quad (48.9)$$

donde $I = dQ/dt$

Conexión y desconexión de la fem constante en un circuito con capacidad y resistencia. Sea que la tensión constante U_0 se conecta en el momento $t = 0$.

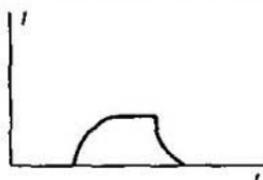


Fig. 190
Forma de los impulsos de corriente para los impulsos rectangulares de tensión

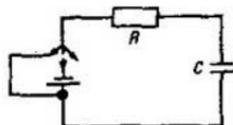


Fig. 191
Circuito con capacidad y resistencia

De la ecuación (48.8) se ve que $I(0) = U_0/R$, y la ecuación (48.9) adquiere el aspecto para $t > 0$

$$R \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{C} I. \quad (48.10)$$

Para la condición inicial $I(0) = U_0/R$ la solución de esta ecuación se expresa mediante la fórmula

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \exp[-t/(RC)], \quad (48.11)$$

es decir, con el tiempo la intensidad de la corriente en el circuito disminuye desde el valor máximo U_0/R hasta cero. La gráfica $I(t)$ es semejante a la mostrada en la fig. 189 y el tiempo de reducción de la intensidad de la corriente $\tau = RC$. Por eso, si la capacidad C es suficientemente grande, la corriente después de desconectar la tensión constante puede existir un tiempo notorio. La bombilla, conectada al circuito, primero se enciende y luego comienza a apagarse poco a poco.

Después de que la intensidad de la corriente alcanza el valor cero, el condensador resulta estar cargado hasta una diferencia de potencial, igual a la fem

exterior, pero de dirección contraria. Ellas se compensan mutuamente. Al desconectar la fem exterior, por ejemplo, al cortocircuitar los polos de la pila, la diferencia de potencial en las armaduras del condensador resulta estar no compensada. La corriente comienza a recorrer el circuito con una intensidad inicial igual a U_0/R y la ley de reducción de la intensidad de la corriente coincide totalmente con (48.11) teniendo el mismo tiempo de reducción de la intensidad de corriente.

Circuito con capacidad, inductancia, resistencia y fuente de fem exteriores. Este circuito se muestra en la fig. 192. Basándose en las expresiones (48.8) y (48.6), la ecuación para la corriente en el circuito tiene la forma

$$IR = U - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C}. \quad (48.12)$$

Después de diferenciar los dos miembros de (48.12) respecto a t , escribamos la ecuación en la forma

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dU}{dt}. \quad (48.13)$$

Distintos casos particulares de la solución de dicha ecuación fueron examinados antes.

Corriente alterna. El más importante es el análisis de la corriente alterna armónica, ya que con ayuda de la representación de una función arbitraria en forma de serie o integral de Fourier para este caso puede reducirse cualquier otro caso.

Para estudiar estas cuestiones es útil aplicar la forma compleja de representación de las magnitudes que varían armónicamente. Examinemos el régimen estable.

Si la fem exterior varía según la ley

$$U = U_0 e^{i\omega t}, \quad (48.14)$$

es obvio, que la intensidad de la corriente en (48.13) también debe cambiar con el tiempo según la ley

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad (48.15)$$

con la particularidad de que I , U , I_0 , U_0 en las fórmulas (48.14) y (48.15) son, en general, magnitudes complejas. Partiendo de estas fórmulas, se deduce que

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U, \quad \frac{dI}{dt} = i\omega I, \quad (48.16)$$

y por eso la ecuación (48.13) toma el aspecto

$$(-\omega^2 L + i\omega R + 1/C) I = i\omega U. \quad (48.17)$$

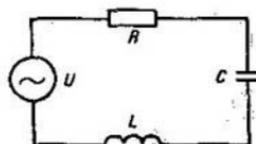


Fig. 192
Circuito con capacidad, inductancia, resistencia y fuente de fem exteriores

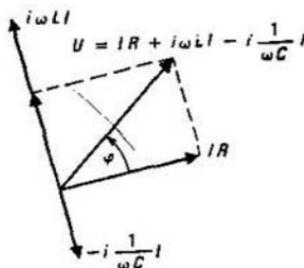


Fig. 193
Diagrama vectorial de las tensiones en el circuito de corriente alterna

Dividiendo los dos miembros de la ecuación (48.17) por $i\omega$, la representamos en la forma

$$IZ = U, \quad (48.18)$$

donde

$$Z = R + i[\omega L - 1/(\omega C)] \quad (48.19a)$$

se denomina **impedancia**. La ecuación (48.18) tiene la forma de la ley de Ohm, en la que entra la impedancia. Para la corriente alterna la impedancia desempeña el papel de resistencia, en cambio, siendo una magnitud compleja, mediante (48.18) permite no sólo tener en cuenta la relación entre las amplitudes de la intensidad de la corriente y la tensión, sino que las relaciones entre sus fases.

En general, en la ecuación (48.18) todas las magnitudes son complejas. Tomando los módulos de los dos miembros de dicha ecuación, hallamos la relación entre las amplitudes de la intensidad de la corriente y la tensión:

$$|I| |Z| = |U|, \quad (48.19b)$$

donde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}, \quad (48.19c)$$

Así pues, si nos interesan sólo las amplitudes de la intensidad de la corriente y la tensión, la ecuación (48.19b) es totalmente equivalente a la ley de Ohm para la corriente continua, no obstante, la magnitud $|Z|$ que desempeña el papel de resistencia depende de la frecuencia de la corriente conforme a (48.19c).

Diagramas vectoriales. Representemos los números complejos por medio de vectores en el plano complejo. La magnitud que varía armónicamente, se muestra por un vector que gira con una frecuencia ω alrededor de su comienzo en sentido levógiro. La longitud de dicho vector es igual a la amplitud de las oscilaciones de la magnitud física correspondiente.

El método gráfico de solución de la ecuación (48.18) queda obvio de la fig. 193 si se tiene en cuenta que la multiplicación de una magnitud compleja por i significa girarla a $\pi/2$ en sentido levógiro sin cambiar su longitud, mientras que la multiplicación por $(-i)$, el giro a $\pi/2$ en sentido dextrógiro.

De la fig. 193 se ve que el ángulo φ se determina de la ecuación

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (48.20)$$

Por lo tanto, φ varía en los límites de $(+\pi/2, -\pi/2)$ en dependencia de la relación entre las impedancias de distintos elementos del circuito y la frecuencia. En este caso la fase de la tensión exterior U puede variar desde la coincidencia con la tensión en la inductancia hasta la coincidencia con la tensión en la capacidad. Es más cómodo expresar lo dicho en forma de la relación entre las

fases de las tensiones en los elementos del circuito y la fase de la tensión exterior:

- 1) la fase de la tensión en la inductancia ($U_L = i\omega LI$) siempre adelanta la fase de la tensión exterior en un ángulo entre 0 y π ;
- 2) la fase de la tensión en la capacidad [$U_C = -iI/(\omega C)$] siempre se retrasa de la fase de la tensión exterior en un ángulo entre 0 y $-\pi$;
- 3) la fase de tensión en la resistencia puede encontrarse tanto en avance, como en retraso con respecto a la fase de la tensión exterior en un ángulo entre $+\pi/2$ y $-\pi/2$, con la particularidad de que el retraso es principalmente para la carga inductiva cuando $\omega L > 1/(\omega C)$ y el avance, siendo la carga capacitiva cuando $\omega L < 1/(\omega C)$.

El diagrama (fig. 193) permite también enunciar las siguientes afirmaciones sobre la relación entre las tensiones e intensidades de las corrientes en distintos elementos del circuito, con la particularidad de que es cómodo llevar la cuenta, partiendo de la intensidad de la corriente, ya que en todos los elementos del circuito tiene una misma fase:

- 1) la fase de tensión en la inductancia se encuentra en avance de fase con respecto a la intensidad de corriente en $\pi/2$;
- 2) la fase de tensión en la capacidad se encuentra en un retraso de $\pi/2$ con respecto a la fase de la intensidad de corriente;
- 3) la fase de tensión en la resistencia coincide con la fase de la intensidad de corriente;
- 4) la fase de la tensión exterior puede encontrarse tanto en avance, como en retraso con respecto a la fase de la intensidad de la corriente, lo que se determina por la carga.

Reglas de Kirchhoff. La ecuación (48.18) permite resolver todos los problemas, referentes a la corriente alterna en el circuito que contiene inductancia, capacidad y resistencia de la misma manera que se resuelven los problemas correspondientes con ayuda de la ley de Ohm para un circuito con resistencia en caso de corriente continua. El análisis de los circuitos derivados de corriente alterna es semejante al análisis de los circuitos con corriente continua (véase el § 28). Puesto que para la corriente alterna en un circuito cerrado es correcta la ley (48.19) y en cada nudo es válido el principio de conservación de la carga, las reglas de Kirchhoff (28.4) y (28.5) para la corriente continua se generalizan para las corrientes alternas de la siguiente manera:

- 1) para cada circuito cerrado

$$\sum_l (\pm) I_l Z_l = \sum_k (\pm) U_k; \quad (48.21)$$

- 2) en cada nudo

$$\sum (\pm) I_l = 0. \quad (48.22)$$

Esta generalización de las reglas de Kirchhoff para los circuitos derivados de corriente alterna fue hecha en 1886 por J. W. St. Rayleigh (1842—1919). Hay que hacer una objeción sobre los signos de las magnitudes en (48.21) y (48.22). A pesar de que cada una de las magnitudes I_l o U_k que figuran en estas

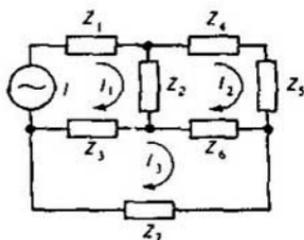


Fig. 194
Método de corrientes de contorno

fórmulas, es compleja y contiene en sí una fase (y por lo tanto, un signo), al componer las ecuaciones es necesario poner los signos ya que una misma sección puede pertenecer a distintos circuitos y en las ecuaciones entra con direcciones contrarias. Lo mismo se refiere al signo de U_h . La solución de las ecuaciones permite hallar tanto las amplitudes, como las fases de todas las intensidades de corrientes. Debido a que todas las magnitudes son complejas, el número de ecuaciones esenciales es dos veces mayor que el que habría para el mismo caso, pero para las corrientes continuas.

Acoplamiento en serie y en paralelo de las impedancias. De la misma manera que para el caso de corrientes continuas, de la fórmula (48.18) se desprende que durante el acoplamiento en serie

$$Z = Z_1 + Z_2, \quad (48.23)$$

y en paralelo

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}. \quad (48.24)$$

Esta circunstancia hace que el análisis de los circuitos eléctricos de corriente alterna sea semejante al análisis de los circuitos de corriente continua, por eso no hay necesidad de examinar con más detalle esta cuestión.

La magnitud, inversa a la impedancia, se denomina **conductancia**:

$$Y = 1/Z. \quad (48.25)$$

Por eso puede decirse que para el acoplamiento en paralelo las conductancias se suman:

$$Y = Y_1 + Y_2. \quad (48.26a)$$

Aplicando la conductancia, la ley de Ohm se escribe como

$$I = YU. \quad (48.26b)$$

Método de corrientes de contorno. Para calcular los circuitos complejos el método de corrientes de contorno, que es de por sí el colatorio directo de las reglas de Kirchoff, presenta simplificaciones considerables. Un circuito complejo consta de sistemas de circuitos cerrados simples. La fig. 194 muestra un circuito complejo que consta de tres circuitos simples. En la ecuación de Kirchoff al recorrer el circuito cerrado en cada una de sus secciones entre los nudos se toma la intensidad de la corriente que realmente circula por esta sección. En general, en cada sección del circuito la intensidad de la corriente es diferente.

En el método de corrientes de contorno se considera que en todas las secciones de cada circuito cerrado circula una misma corriente. Estas corrientes se llaman de contorno. Aquí la intensidad de corriente total que recorre la sección del circuito es igual a la suma algebraica de las intensidades de las corrientes de contorno para las que este sector es común. La ecuación de Kirchhoff para cada circuito se escribe teniendo en cuenta esa circunstancia, es decir, se expresa mediante las corrientes de contorno. La impedancia total para cada sección del contorno entre los nudos (fig. 194) se designa por el índice correspondiente. La dirección positiva del recorrido se toma en sentido dextrógiro.

Las ecuaciones para las corrientes de contorno, cuyo número coincide con la cantidad de circuitos simples, tienen el aspecto:

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 &= U, \\ Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 &= 0, \\ Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 &= 0, \end{aligned} \quad (48.27)$$

donde Z_{11} , Z_{22} y Z_{33} son las impedancias propias de los circuitos, iguales a la suma de impedancias de las secciones de los circuitos correspondientes:

$$Z_{11} = Z_1 + Z_2 + Z_3, \quad Z_{22} = Z_4 + Z_5 + Z_6 + Z_2, \quad Z_{33} = Z_3 + Z_6 + Z_2, \quad (48.28)$$

y Z_{12} , Z_{13} , etc. son las impedancias mutuas de los circuitos, iguales a las impedancias de las secciones, pertenecientes a dos circuitos. Su signo depende de cómo recorre la sección correspondiente la corriente que es factor de la impedancia mutua, en dirección positiva o negativa con relación a la corriente de contorno para la que se escribe la ecuación. Así, por ejemplo,

$$Z_{12} = -Z_2, \quad Z_{21} = -Z_2, \quad \text{etc.} \quad (48.29)$$

Es fácil ver que

$$Z_{ij} = Z_{ji}. \quad (48.30)$$

Lo expuesto hace casi evidente el hecho de que las ecuaciones (48.27) unen en sí las dos reglas de Kirchhoff. Eso se puede demostrar de manera más estricta si (48.27) se obtiene de las reglas de Kirchhoff (48.21) y (48.22), pasando a las corrientes de contorno. El lector puede intentar ejecutar dichos cálculos algebraicos.

La cantidad de ecuaciones (48.27) para las corrientes de contorno es igual a la cantidad de corrientes incógnitas. El sistema de ecuaciones se resuelve según la regla general con ayuda de la teoría de determinantes:

$$I_1 = U (\Delta_{11}/\Delta), \quad I_2 = U (\Delta_{12}/\Delta), \quad I_3 = U (\Delta_{13}/\Delta), \quad (48.31)$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix} \quad (48.32)$$

es el determinante del sistema; Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{13} son los complementos de los elementos Z_{11} , Z_{12} y Z_{13} en el determinante Δ :

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{23} \\ Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}, \\ \Delta_{12} &= - \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{33} \end{vmatrix}, \\ \Delta_{13} &= \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{22} \\ Z_{31} & Z_{32} \end{vmatrix}.\end{aligned}\quad (48.33)$$

Así pues, el problema queda resuelto. La generalización del método expuesto de corrientes de contorno para una cantidad arbitraria de circuitos elementales es obvia. Únicamente es necesario observar con atención que todos los circuitos elementales sean recorridos en una misma dirección y tomados en consideración en las ecuaciones.

La inductancia y la capacidad caracterizan la propiedad del circuito de acumular la energía en forma de energía de los campos eléctrico y magnético. Ellas «aislan» las curvas de variación de la intensidad de la corriente en comparación con las curvas de variación de la tensión en función del tiempo.

La impedancia tiene en cuenta no sólo la resistencia óhmica del circuito, sino también su inductancia y capacitancia. Siendo una magnitud compleja, la impedancia permite tomar en consideración no sólo la relación entre las amplitudes de la intensidad de la corriente y la tensión, sino también entre sus fases.

A pesar de que para las corrientes alternas las fuerzas electromotrices y las intensidades de las corrientes se representan como magnitudes complejas y, por lo tanto, contienen la fase (y signo), al componer las ecuaciones de Kirchhoff es necesario poner los signos, ya que una misma sección puede pertenecer a diferentes circuitos y ser recorrida, al formar las ecuaciones, en direcciones contrarias. En el método de corrientes de contorno se admite que en todas las secciones de cada circuito cerrado circule una misma corriente, llamada de contorno. La intensidad total de la corriente que recorre la sección del circuito, es igual en este caso a la suma algebraica de las intensidades de las corrientes de contorno, para las cuales dicha sección es común.

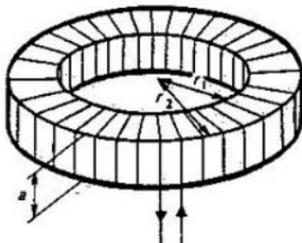


Fig. 195
Toroide de sección rectangular

¿Cuál es el sentido físico de los criterios casiestacionarios?

¿Qué es lo que determina los signos en las ecuaciones que expresan las reglas de Kirchhoff para las corrientes alternas?

¿Cuáles son las ventajas del método de corrientes de contorno y para qué casos es útil aplicarlo?

Ejemplo 48.1. Hallar la autoinducción de n espiras, devanadas en un toroide de sección rectangular, cuyos radios interior y exterior son r_1 y r_2 , respectivamente y su altura es igual a a (fig. 195).

Eligiendo a título de contorno de integración L_0 una circunferencia de radio r , concéntrica con el eje de simetría del toroide y aplicando la ley de la corriente total, obtenemos

$$\oint_{L_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \varphi \cdot 2\pi r = \begin{cases} 0 & \text{para } r > r_2, \\ nI & \text{para } r_1 < r < r_2, \\ 0 & \text{para } r < r_1, \end{cases}$$

donde I es la intensidad de la corriente que recorre el devanado del toroide.

El flujo magnético que abarca una espira es igual a

$$\Phi_1 = \mu a \int_{r_1}^{r_2} H \varphi dr = \frac{\mu a n I}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu a n I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (48.34)$$

de donde la autoinducción es igual a

$$L = (n\Phi_1/I) = [\mu a n^2 / (2\pi)] \ln (r_2/r_1). \quad (48.35)$$

§ 49. Trabajo y potencia de la corriente alterna

Se deducen las fórmulas del trabajo y la potencia que desarrolla la corriente alterna. Se analizan los fenómenos físicos principales, relacionados con el funcionamiento de los motores eléctricos.

Potencia instantánea. La energía de la fuente de fem exteriores en el circuito con corriente sufre las siguientes transformaciones:

a) se convierte en calor, debido al calentamiento de Joule del conductor [véase (27.4)]. Si en el circuito existe un consumidor que, a cuenta de la energía de la fuente de fem exteriores, efectúa un trabajo mecánico, su potencia se expresa mediante una fórmula, semejante a (27.4). Por eso, supongamos que en el circuito existe sólo una resistencia óhmica R y la potencia disipada en esta resistencia, la denotamos por $P_{iR} = I^2 R$;

b) se transforma en energía del campo magnético. Dado que la energía del campo magnético se determina por la fórmula (47.5), la potencia, desarrollada por la fuente de fem exteriores para la variación de la energía del campo magnético, es igual a

$$P_{iL} = \frac{dW}{dt} = LI \frac{dI}{dt}. \quad (49.1)$$

Las propiedades inductivas del circuito se caracterizan por la inductancia L . A diferencia de P_{iR} , la potencia P_{iL} puede ser tanto positiva ($dI/dt > 0$), como negativa ($dI/dt < 0$). Esto significa que la fuente de las fem exteriores cede la energía para aumentar la energía del campo magnético y recibe la energía al disminuir la energía del campo magnético;

c) se transforma en energía del campo eléctrico al variar éste. Las propiedades eléctricas del circuito se caracterizan por su capacidad C . Dado que la energía del condensador, cuyas placas contienen una carga Q , se determina por la fórmula (18.20d), la potencia de la fuente de fem exteriores para la variación de la energía del campo eléctrico es igual a

$$P_{tC} = \frac{dW}{dt} = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{C} I, \quad (49.2)$$

donde $I = dQ/dt$ es la intensidad de la corriente en el circuito. Esta potencia puede ser tanto positiva, como negativa: al aumentar la intensidad del campo eléctrico, la energía de la fuente de fem exteriores se convierte en energía del campo eléctrico y al disminuir la intensidad, la energía del campo eléctrico se transforma en energía de la fuente de fem exteriores.

La potencia total, disipada por la fuente de fem exteriores en el circuito, es igual a

$$P_t = P_{tR} + P_{tL} + P_{tC}. \quad (49.3)$$

Con frecuencia P_t se denomina potencia, disipada por la corriente o potencia de corriente. Nosotros haremos uso de esta expresión, pero recordando su carácter convencional. De la misma manera, P_{tR} , P_{tL} , P_{tC} se llaman potencias de corriente en la resistencia, inductancia y capacidad. Para mayor evidencia supongamos que la resistencia óhmica, la inductancia y la capacidad están concentradas en distintas partes del circuito (véase la fig. 192).

La fem exterior U se denomina tensión.

En la resistencia óhmica transcurre el cambio del potencial en $U_{tR} = IR$, por eso se ha aceptado denominar U_{tR} pérdida de tensión en la resistencia. Entre las placas del condensador la diferencia de potencial es $U_{tC} = Q/C$. Por eso en el circuito en el condensador la tensión varía en U_C . En la inductancia surge la fem de autoinducción $\mathcal{E}^{\text{ind}} = -L dI/dt$, para cuya compensación la fuente de fem exteriores gasta una parte correspondiente de la fem exterior ($U_{tL} = L dI/dt$ es la variación de la tensión en la inductancia).

Por esta razón, las fórmulas (49.1) y (49.2) adquieren el aspecto:

$$P_{tL} = U_{tL}I, \quad P_{tC} = U_{tC}I. \quad (49.4)$$

Entonces [véase (49.3)]

$$P_t = U_{tR}I + U_{tL}I + U_C I = UI. \quad (49.5)$$

Sea que la intensidad de la corriente en el circuito varía según la ley

$$I = I_0 \text{ sen } \omega t. \quad (49.6)$$

Conforme a la fig. 193 para los valores reales de U_{tL} , U_{tC} y U_{tR} escribimos:

$$U_{tL} = I_0 \omega L \text{ sen } (\omega t + \pi/2), \quad (49.7)$$

$$U_{tC} = [I_0/(\omega C)] \text{ sen } (\omega t - \pi/2), \quad (49.8)$$

$$U_{tR} = I_0 R \text{ sen } \omega t. \quad (49.9)$$

Por consiguiente, las potencias instantáneas, disipadas por la corriente en diversos elementos del circuito, se determinan por las fórmulas:

$$P_{tL} = I_0^2 \omega L \sin \omega t \sin (\omega t + \pi/2) = I_0^2 \omega L \sin \omega t \times \cos \omega t, \quad (49.10)$$

$$P_{tC} = [I_0^2 / \omega C] \sin \omega t \sin (\omega t - \pi/2) = - [I_0^2 / (\omega C)] \sin \omega t \cos \omega t, \quad (49.11)$$

$$P_{tR} = I_0^2 R \sin^2 \omega t, \quad (49.12)$$

que muestran que únicamente en la resistencia R la potencia de corriente es todo el tiempo positiva, es decir, la corriente efectúa un trabajo positivo. La potencia instantánea, disipada por la corriente en la inductancia y capacidad es de signo variable: una parte de tiempo la corriente realiza un trabajo positivo, es decir, transmite su energía a esos elementos; y otra parte de tiempo es trabajo negativo, o sea, la energía de dichos elementos retorna a la fuente de fem exteriores. De esta manera sucede el intercambio de energía entre las inductancias, capacidades y fuentes de fem exteriores, durante el cual la capacidad e inductancia desempeñan el papel de fuentes de fuerzas electromotrices.

Potencia media. Para obtener la potencia media de corriente durante un período de oscilaciones es necesario tomar el valor medio de las expresiones (49.10)–(49.12) respecto al período de oscilaciones de la intensidad de la corriente. En este caso hay que tener en cuenta que

$$\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0, \quad \langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2. \quad (49.13)$$

Tomando en consideración (49.13) y partiendo de (49.10) – (49.12), hallamos:

$$P_L = \langle P_{tL} \rangle = 0, \quad (49.14)$$

$$P_C = \langle P_{tC} \rangle = 0, \quad (49.15)$$

$$P_R = \langle P_{tR} \rangle = I_0 R / 2. \quad (49.16)$$

La potencia media se diferencia de cero sólo en la resistencia R . Las potencias medias en la inductancia y capacidad son nulas, es decir, la corriente en estos elementos no efectúa ningún trabajo, son en término medio, eléctricamente neutros. Por esta razón la resistencia R se denomina elemento activo del circuito (resistencia óhmica) y la capacidad e inductancia, reactivas.

Valores efectivos de la intensidad de la corriente y de la tensión. De la fig. 193 se ve que

$$I_0 R = U_0 \cos \varphi, \quad (49.17)$$

y por eso la fórmula (49.16) puede representarse como

$$P_R = 1/2 I_0 J_0 R = 1/2 I_0 U_0 \cos \varphi, \quad (49.18)$$

dónde I_0 , U_0 , son las amplitudes de la intensidad de la corriente y de la tensión exterior; φ , la diferencia de fases entre la intensidad de la corriente y la tensión [véase (48.20)] y $\cos \varphi$, el factor de potencia, del que depende cuán efectiva es la transmisión de la potencia desde la fuente de corriente al consumidor.

La potencia instantánea de la corriente continua coincide con la media [véase (49.2)]. Puesto que en la corriente continua $\cos \varphi = 1$, la fórmula (49.18) puede hacerse idéntica a (27.3) si en lugar de los valores de la amplitud de I_0 y U_0 se usan sus valores efectivos:

$$I_{ef} = I_0/\sqrt{2}, \quad U_{ef} = U_0/\sqrt{2}. \quad (49.19)$$

Entonces

$$P_R = I_{ef}U_{ef}\cos \varphi. \quad (49.20)$$

La utilización de I_{ef} y U_{ef} permite examinar la potencia de corriente alterna de modo formal como si no hubiese oscilaciones de la potencia. Únicamente la presencia de $\cos \varphi$ nos recuerda que se trata de la corriente alterna.

Cuando en la electrotecnia se habla de la intensidad de la corriente alterna y la tensión, se tienen en cuenta sus valores efectivos. Por ejemplo, los amperímetros y voltímetros se gradúan, por lo general, respecto a los valores efectivos. Por esta razón, el valor máximo de la tensión en el circuito de corriente alterna es casi una vez y media mayor que el que muestra el voltímetro. Esto se debe tener presente al calcular los aisladores, al analizar las cuestiones de seguridad, etc.

Factor de potencia. Una de las aplicaciones principales de los circuitos de corriente alterna es la transmisión de la energía. Por eso al proyectar las líneas de transmisión es necesario tener en cuenta el $\cos \varphi$.

Supongamos que en la línea haya sólo una carga activa. Entonces, $\cos \varphi = 1$ y la potencia que se transmite a la carga es máxima para I_{ef} y U_{ef} prefijadas. Si en el circuito se conecta una carga reactiva, por ejemplo, una inductancia, el $\cos \varphi$ se hace inferior a la unidad y para asegurar la transmisión se deberá aumentar respectivamente $I_{ef} U_{ef}$, es decir, suministrar una corriente mayor al consumidor de energía por medio de la línea de transmisión. Ello conduce al incremento de las pérdidas de energía en calor de Joule en la línea de transmisión. Por eso se tiende siempre a distribuir las cargas de manera que $\varphi \approx 0$, o sea, $\cos \varphi \approx 1$.

Examinemos, verbigracia, la línea de transmisión para alimentar una bombilla (fig. 196) cuando en el circuito se acoplan en serie con la bombilla una inductancia grande y una capacidad variable. Sea en el momento inicial la capacitancia nula ($C = \infty$). En este caso para valores de $L\omega$ suficientemente grandes en comparación con la resistencia R de la bombilla, el ángulo φ alcanza valores próximos a $\pi/2$ y $\cos \varphi$ es muy pequeño. Por eso, incluso si el valor absoluto de U_{ef} en el circuito es bastante grande, de la bombilla se desprende una potencia muy pequeña, por lo que arde sin brillo o incluso no arde. Al disminuir la capacidad C , el factor de potencia crece (el ángulo φ disminuye, aproximándose a cero) y comienza a aumentar el caldeo de la bombilla. La tensión efectiva en los bornes del generador permanece invariable y la potencia que transmite el generador a la línea, crece. Así pues, el aumento del factor de potencia, introduciendo cargas reactivas que no consumen potencia alguna σ , como se llaman, cargas desvatadas, en el circuito permite mejorar la eficacia del funcionamiento de la línea de transmisión.

Motores eléctricos. Una de las aplicaciones más importantes de la corriente eléctrica es la transformación de la energía que transmite en trabajo mecánico que efectúan los motores eléctricos. Su funcionamiento se basa en el empleo de la fuerza de Ampère que actúa sobre el conductor con corriente en un campo magnético. El primer motor eléctrico que dio origen al empleo de la electricidad para producir trabajo, fue construido en 1839 por B. S. Jacobi (1801—1874).

Para aclarar la parte principal del asunto estudiemos el motor más sencillo de corriente continua (fig. 197). La fuente de la fuerza electromotriz constante

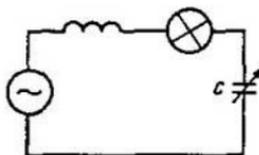


Fig. 196
Elevación del factor de potencia

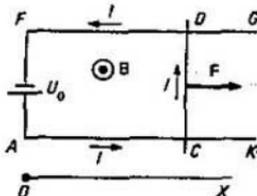


Fig. 197
Esquema de funcionamiento de un motor eléctrico elemental

U_0 se conecta al circuito $ACDFA$. Un conductor rectilíneo DC puede deslizarse a lo largo de los conductores FG y AK . El se encuentra en un campo magnético homogéneo, cuya inducción está dirigida hacia arriba respecto al plano del diseño. Cuando la corriente recorre este conductor, sobre él actúa la fuerza de Lorentz $F = IIB$. Influido por ella, el conductor se mueve y realiza un trabajo mecánico, o sea, efectúa la función de motor eléctrico.

Examinemos el balance de energías. Al desplazar el conductor a dx , se realiza un trabajo

$$dA = F dx = IIB dx \quad (49.21)$$

y, por lo tanto, la potencia es igual a

$$P_m = dA/dt = IBlv, \quad (49.22)$$

donde

$$v = dx/dt \text{ es la velocidad del conductor.}$$

Por otra parte, al moverse el conductor en el circuito surge una fuerza electromotriz de inducción

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \frac{-d\Phi}{dt} = -\frac{IB dx}{dt} = -IBv, \quad (49.23)$$

dirigida contra la fuerza electromotriz exterior que genera las corrientes y efectúa el trabajo en superar la acción de la fuerza (49.23). La potencia que gasta en este caso la fuente de fem exteriores es igual a

$$P_{\text{ext}} = \mathcal{E}^{\text{ind}} I = -IBvI. \quad (49.24a)$$

La comparación de (49.24) con (49.22) muestra que *toda la potencia que desarrolla el motor eléctrico se abastece por la fuente de fem exteriores*. Además de las potencias útiles (49.22), la fuente de fem exteriores desarrolla una potencia que se gasta para liberar el calor de Joule en la resistencia óhmica de los cables, por los que circula la corriente, y en la resistencia interna de la fuente. Designando por R la resistencia óhmica sumaria de los cables y la resistencia interna de la fuente, obtenemos el siguiente balance de tensiones para un circuito cerrado (la primera regla de Kirchhoff):

$$IR = U_0 + \mathcal{E}^{\text{ind}} = U_0 - lBv. \quad (49.24b)$$

Multipliquemos los dos miembros de dicha igualdad por I :

$$I^2R = U_0I - IlBv = U_0I - P_m, \quad (49.25)$$

donde se ha hecho uso de la expresión (49.22). Es útil escribir la fórmula (49.25) en definitiva como

$$P_F = IU_0 = I^2R + P_m, \quad (49.26)$$

es decir, la potencia que desarrolla la fuente de fem exterior, se gasta en liberar el calor de Joule con una potencia I^2R y el trabajo del motor eléctrico de potencia P_m .

Para la corriente alterna el cálculo del balance de energías es algo más complicado, pero la esencia física queda siendo la misma.

Motores sincrónicos. Para asegurar la continuidad de funcionamiento del motor es necesario crear cierto régimen periódico. El circuito más sencillo es el que se muestra en la fig. 197, en el que la inducción cambia periódicamente con el tiempo.

Después de que el conductor CD se desplace a cierta distancia a la derecha y efectúe un trabajo determinado, la dirección de la inducción se hace inversa. Para una misma orientación de la corriente la fuerza F cambia también su dirección por la contraria. Después de ello, el conductor se decelera y comienza a moverse hacia la izquierda, realizando de nuevo un trabajo, etc. En definitiva, se obtiene un motor eléctrico, cuya parte de funcionamiento (conductor CD) se mueve de modo sincrónico con un campo magnético exterior variable. Semejante motor se denomina sincrónico. En el circuito indicado se puede, claro está, dejar la inducción constante y cambiar periódicamente la dirección de la corriente en el circuito en movimiento. En este caso el movimiento del conductor va a transcurrir de modo sincrónico, variando la corriente en él. Este motor es también sincrónico. También se puede cambiar simultáneamente de una manera correspondiente la intensidad de corriente en el conductor y la inducción, ejecutando de manera sincrónica con ellas un movimiento correspondiente del conductor CD .

Los motores sincrónicos que se usan en la técnica, funcionan en principio de la misma manera que el motor esquemático. Además en la técnica se utilizan las tres posibilidades de realizar el motor sincrónico. Sin embargo, la realización efectiva de estos circuitos, sencillos en lo fundamental, se confeccionan con construcciones bastante complejas. Por regla general, se usa el movimiento giratorio.

La fig. 198 representa el circuito más simple de funcionamiento del motor sincrónico con movimiento rotatorio. En un campo magnético constante se encuentra un cuadro que recorre la corriente alterna. Las fuerzas de Lorentz que actúan sobre los conductores del cuadro, perpendiculares a la inducción del campo magnético, crean un momento rotatorio, bajo la acción del cual el cuadro gira. Para que ese momento actúe todo el tiempo en una misma dirección la frecuencia de rotación del cuadro debe ser igual a la frecuencia de la corriente alterna que circula por él, es decir, debe observarse la condición de sincronismo. Pue-

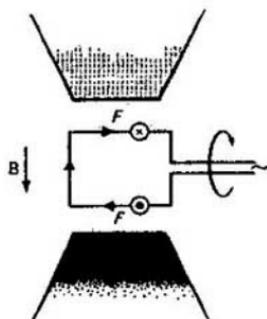


Fig. 198
Circuito de funcionamiento de un motor sincrónico

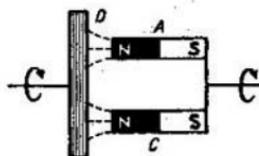


Fig. 199
Esquema de aparición de momento de rotación en un motor asíncrono

den realizarse también tales circuitos de los motores cuando la frecuencia de rotación del cuadro sea en una cantidad entera de veces inferior a la frecuencia de la corriente alterna que alimenta el motor eléctrico.

Los defectos principales de los motores sincrónicos son la dificultad de ponerlos en marcha, cuando la frecuencia de rotación del cuadro se hace sincrónica con la frecuencia de la corriente alterna y puede desaparecer el sincronismo al aumentar bruscamente la carga. En la técnica se elaboraron procedimientos para superar con bastante eficacia dichos defectos.

Motores asíncronos. El campo magnético que varía según la ley de la inducción electromagnética de Faraday crea un campo eléctrico [véase (46.5)]. Si en el conductor existe semejante campo rotacional, surgen las correspondientes corrientes eléctricas, cuya densidad en cada punto del conductor se determina por la ley de Ohm ($j = \gamma E$). Estas corrientes están en interacción con el campo magnético. Por consiguiente, el campo magnético alternativo no sólo crea en el conductor corrientes, sino que actúa sobre él con las fuerzas correspondientes.

Imaginémonos que el campo magnético alternativo se origina por los imanes A y C que están sujetos en un eje y pueden girar alrededor de él bajo la acción del momento de fuerzas exterior (fig. 199). El disco D, hecho de un conduc-

tor continuo, se fija también en el eje y puede girar a su alrededor. Al moverse los imanes, en cada punto del disco D existe un campo magnético alternativo y surge una densidad correspondiente de corriente, sobre la que actúa la fuerza de Ampère por parte del campo magnético. Así pues, sobre el disco D por parte de los imanes en rotación actúan fuerzas determinadas. Calculemos el efecto resultante de dichas fuerzas. Según la ley de Lenz, las corrientes que aparecen en el conductor merced a la inducción electromagnética de Faraday, tienden a disminuir la acción de los factores que las provocan. En el caso dado el factor que provoca las corrientes de inducción en el disco D es el movimiento relativo del

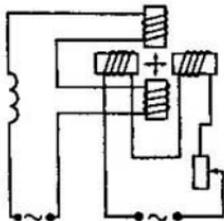


Fig. 200
Esquema de la instalación para crear un campo magnético giratorio

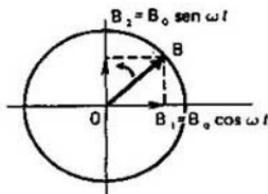


Fig. 201
Adición de dos oscilaciones armónicas mutuamente perpendiculares con una diferencia de fases de $\pi/2$

imán y del disco. Por lo tanto, las fuerzas que actúan sobre el disco, deben tender a reducir la velocidad respecto al movimiento del imán y del disco. Esto significa que al disco debe aplicarse un momento de fuerzas que tiende a hacer girarlo en la misma dirección en que giran los imanes. Por esta razón, el disco comienza a rotar en dirección del movimiento de los imanes, como si se atrajese por el campo en rotación de los imanes. El momento de fuerzas existe sólo cuando la velocidad angular de rotación de los imanes se diferencia de la de rotación del disco, o sea, entre el campo magnético en rotación y el disco existe un «deslizamiento». Cuanto menor sea éste, menor será el momento de fuerzas que actúan sobre el disco. Por eso, al aumentar la carga sobre el eje del disco, crece el «deslizamiento». Para la velocidad constante de rotación del campo magnético y de su inducción la velocidad de rotación del disco se reduce.

Este mecanismo de poner el disco en rotación es la base principal del funcionamiento de los motores asíncronos. Pero para que el motor pueda denominarse motor eléctrico, es necesario asegurar la rotación del campo magnético sin usar la transmisión mecánica. Con este fin se usan los imanes eléctricos que se alimentan de corriente alterna.

Creación de un campo magnético giratorio. Dos imanes eléctricos que originan campos magnéticos mutuamente perpendiculares (fig. 200), se alimentan de una corriente alterna con diferencia de fases $\pi/2$. En el circuito (fig. 200) esto se logra en gran medida introduciendo en el circuito imanes eléctricos de

inductancia L y resistencia R . Como resultado de ello, en el espacio entre los polos de los imanes se forman dos campos magnéticos alternativos, cuyas inducciones varían por una ley armónica con diferencia de fases, próxima a $\pi/2$. La suma de las inducciones B_1 y B_2 de estos campos es el vector B que gira alrededor del punto O (fig. 201).

Si en el espacio entre los imanes (fig. 200) se coloca un conductor masivo, por ejemplo, un cilindro con el eje de rotación perpendicular al plano de la figura, en el campo giratorio él girará en la dirección de rotación del campo. Los procesos físicos que transcurren son semejantes a los que se realizan al crear el campo por medio de imanes permanentes en rotación. En lugar de un cilindro continuo se usa un rotor cortocircuitado (fig. 202).

El campo magnético giratorio es más cómodo crearlo con ayuda de corriente trifásica, ya que en este caso no se requiere crear artificialmente una diferencia de fases entre las intensidades de las corrientes que alimentan distintos imanes eléctricos (véase el § 52).

Está claro que la velocidad de rotación del motor asíncrono puede variar continuamente, sin estar en alguna relación múltipla con la frecuencia de la corriente de alimentación, por eso el motor se denomina asíncrono. La posibilidad de variar continuamente la velocidad de rotación es una de sus ventajas más esenciales.

La intensidad de la corriente en los devanados del imán eléctrico depende del «deslizamiento»: cuanto mayor es éste, tanto mayor es la intensidad de la corriente. Por eso en el momento de puesta en marcha, cuando el deslizamiento es máximo, por los devanados del motor pasa una corriente muy fuerte que les puede deteriorar. Para evitar eso, al circuito de alimentación se introduce un reóstato regulador que se pone en el momento de conexión en una resistencia bastante grande. A medida de aumentar la frecuencia de rotación del motor, se reduce la resistencia del reóstato.

Lo mismo que en el caso de los motores síncronos, la ejecución técnica de los motores asíncronos se caracteriza por la gran variedad y no es una tarea sencilla. No obstante, incluso en las construcciones más complejas los principios fundamentales permanecen invariables.

Los motores asíncronos pueden funcionar no sólo cuando el campo magnético es giratorio, sino cuando es pulsante. Esto es evidente si se toma en consideración que el campo pulsante es equivalente a dos campos que giran en direcciones contrarias. Uno de los campos asegura la rotación del rotor del motor asíncrono, mientras que el campo con dirección de rotación contraria no ejerce, en término medio, influencia alguna sobre la rotación del rotor.

Adaptación de la carga al generador. Un generador de corriente alterna que origina la fuerza electromotriz, posee por sí mismo cierta resistencia interna, capacidad e inductancia, es decir, posee una impedancia determinada:

$$Z_g = R_g + iX_g, \quad (49.27)$$

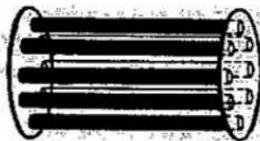


Fig. 202.
Inducido en cortocircuito de un motor asíncrono

donde R_g es la resistencia óhmica y X_g , la reactancia que es en sí la diferencia entre la inductancia y la capacitancia. La carga para la que trabaja el generador, se caracteriza también por la impedancia:

$$Z_c = R_c + iX_c, \quad (49.28)$$

con la particularidad de que la potencia se disipa sólo en la resistencia óhmica R_c . En el circuito el generador y la carga se unen en serie, U_g es la fuerza electromotriz del generador.

La potencia que se desarrolla en la carga R_c , conforme a la fórmula (49.16), es

$$P_c = 1/2 I_0^2 R_c, \quad (49.29)$$

donde I^2 es el cuadrado de la amplitud de la intensidad de la corriente que circula por la carga. Basándose en (48.19b), tenemos

$$I_0^2 = |I|^2 = \frac{|U_g|^2}{|Z_g + Z_c|^2} = \frac{|U_g|^2}{(R_g + R_c)^2 + (X_g + X_c)^2}. \quad (49.30)$$

Con ayuda de esta ecuación escribamos la fórmula (49.29) así

$$P_c = \frac{|U_g|^2}{2} \frac{R_c}{(R_g + R_c)^2 + (X_g + X_c)^2}. \quad (49.31)$$

Aclaremos para qué condiciones esta potencia es máxima.

Las reactancias X_g y X_c pueden tomar tanto valores positivos, como negativos. Es obvio que para lograr la potencia máxima en (49.31), es necesario que se cumpla la condición

$$X_g + X_c = 0. \quad (49.32)$$

Eso significa que el factor de potencia debe tener el valor máximo ($\cos \varphi = 1$). Al observar la condición (49.32), la expresión (49.31) adquiere el aspecto

$$P_c = \frac{|U_g|^2}{2} \frac{R_c}{(R_g + R_c)^2}. \quad (49.33)$$

La potencia cambia al variar la resistencia óhmica de la carga, alcanzando el máximo a condición $\partial P_c / \partial R_c = 0$, es decir, cuando

$$R_c = R_g. \quad (49.34)$$

Si se observan las condiciones (49.32) y (49.34), *el generador entrega a la carga la potencia máxima. En este caso se dice que la carga está adaptada totalmente al generador.*

Teniendo en cuenta (49.34), la potencia máxima, disipada por la carga del generador, es igual a

$$P_{c \text{ máx}} = \frac{|U_g|^2}{2} \frac{1}{4R} = \frac{\langle U_g^2 \rangle}{4R}, \quad (49.35)$$

donde $\langle U_g^2 \rangle$ es el cuadrado medio de la amplitud de la tensión del generador.

Las cuestiones de la adaptación de la carga al generador tienen gran importancia en todos los casos cuando se necesita transmitir a la carga una potencia máxima. Verbigracia, la resistencia de entrada del receptor debe estar adaptada a la resistencia de la antena (generador) y de la línea de transmisión (véase el § 54).

Corrientes de Foucault. *Las corrientes de inducción que surgen en los conductores masivos en un campo magnético alternativo, se denominan corrientes de Foucault.* A veces desempeñan un papel útil, pero en algunas ocasiones, son nocivas.

Las corrientes de Foucault son útiles en el rotor del motor asincrónico que se pone en movimiento por medio de un campo magnético giratorio, ya que la misma ejecución del principio de funcionamiento del motor asincrónico requiere la aparición de dichas corrientes. Siendo corrientes de conducción, las corrientes de Foucault disipan parte de la energía en liberar el calor de Joule. Dicha pérdida de energía en el rotor del motor asincrónico es infructuosa, pero hay que conformarse con ella, evitando únicamente el calentamiento excesivo del rotor. Pero al mismo tiempo en los núcleos de los imanes eléctricos del motor asincrónico, hechos por lo general de material ferromagnético, por lo que son conductores, surgen también las corrientes de Foucault que no tienen nada que ver con el principio de funcionamiento de los imanes, pero calientan los núcleos, empeorando con ello sus características. Ellas deben eliminarse como factores perjudiciales. Se eliminan, confeccionando los núcleos en forma de placas finas, separadas la una de la otra con capas de aislador, con la particularidad de que se colocan de tal manera que las corrientes de Foucault atraviesen las placas. Merced a ello, siendo el grosor de las placas bastante pequeño, las corrientes de Foucault no pueden desarrollarse y por eso poseen una densidad volumétrica pequeña.

El calor de Joule que desprenden las corrientes de Foucault se aplica con utilidad durante el calentamiento o incluso la fundición de los metales, cuando eso resulta más ventajoso o más útil en comparación con otros métodos de calentamiento. Si el metal se calienta usando corriente de frecuencia muy alta, debido al efecto pelicular (véase el § 53), se calienta al rojo sólo la capa superficial del conductor.

La potencia instantánea que desarrolla la corriente en las inductancias y capacidades, es de signo variable y en la resistencia, es positiva.

§ 50. Resonancias en el circuito de corriente alterna

Se examinan las resonancias en el circuito de corriente alterna y las propiedades del circuito oscilante.

Resonancia en serie. Examinemos un circuito en el que se conectan en serie con el generador R , L , C (véase la fig. 192) y determinemos la dependencia del valor de la amplitud de la intensidad de la corriente I_0 y la diferencia de fases φ

entre la corriente y la tensión exterior con respecto a la frecuencia. Basándose en (48.18) y (48.20), tenemos:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + |L\omega - 1/(\omega C)|^2}}, \quad (50.1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (50.2)$$

Las gráficas de las dependencias de $I_0(\omega)$ y $\varphi(\omega)$ se representan en las figs. 203 y 204. La intensidad de la corriente I_0 alcanza el valor máximo para la frecuencia

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (50.3)$$

que se denomina frecuencia de resonancia del circuito. Aquí la amplitud de la intensidad de la corriente es igual a U_0/R y la diferencia de fases $\varphi = 0$, o sea,

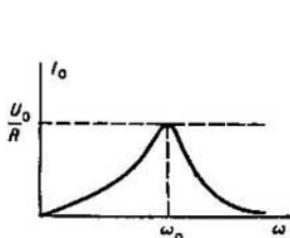


Fig. 203
Dependencia entre la intensidad de la corriente y la frecuencia para la resonancia en serie

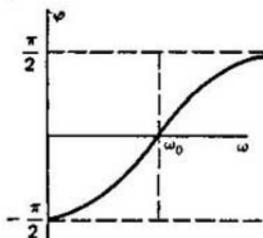


Fig. 204
Dependencia entre el desfase φ y la frecuencia para la resonancia en serie

resulta como si el circuito no tuviera ni capacidad, ni inductancia. Con otras palabras, para esa frecuencia las tensiones en la capacidad e inductancia se compensan por completo mutuamente, siendo iguales de valor (siempre son contrarias según la fase). Por eso dicha resonancia se llama también **resonancia de tensión** o con más frecuencia, **resonancia en serie**. El diagrama vectorial de la resonancia en serie se da en la fig. 205. Durante la resonancia ($\omega = \omega_0$) el circuito se comporta como una resistencia puramente óhmica.

Si por el circuito circula una corriente de frecuencia constante ω , al cambiar, por ejemplo, la inductancia, I_0 tiene también un carácter de resonancia de la variación. El valor máximo de I_0 se alcanza para $L = 1/(\omega^2 C)$ [véanse (50.1) y (50.3)]. Si se conecta una bombilla en el circuito, su brillo aumenta al aproximarse a la resonancia, alcanzando el máximo en la resonancia, y después disminuye.

Resonancia en paralelo. Examinemos el circuito representado en la fig. 206. Es obvio que la intensidad de la corriente que circula por el circuito es

igual a

$$I = I_L + I_C = U \left(\frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C \right) = U \left(\frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\omega C \right) = \\ = U \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - i \frac{U}{R^2 + \omega^2 L^2} \left[\omega L - \omega C (R^2 + \omega^2 L^2) \right]. \quad (50.4)$$

Por consiguiente, para la condición

$$\omega L - \omega C (R^2 + \omega^2 L^2) = 0 \quad (50.5)$$

el circuito se comporta como una resistencia puramente óhmica. El desfase entre la tensión exterior y la intensidad de la corriente es igual a cero. Al dividir

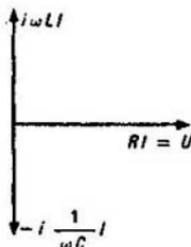


Fig. 205
Diagrama vectorial de las tensiones para la resonancia en serie

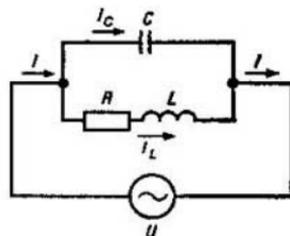


Fig. 206
Circuito en el que se efectúa la resonancia en paralelo

todos los términos de la ecuación (50.5) por $\omega^2 LC$, la escribimos en la forma

$$\frac{1}{\omega C} - \omega L = \frac{R^2}{\omega L}. \quad (50.6)$$

En la mayoría de los casos importantes en la práctica se observa la condición $\omega L \gg R$ y por eso la solución de las ecuaciones (50.5) y (50.6) puede representarse como

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (50.7)$$

Para esta frecuencia de resonancia la impedancia alcanza su valor máximo y la intensidad de corriente I_0 en el circuito, el valor mínimo. Sin embargo, las intensidades de corriente I_L y I_C en este caso no son mínimas. El diagrama vectorial de las intensidades de corrientes en el circuito se da en la fig. 207. Al aproximarse a las condiciones de resonancia, el diagrama de corrientes adquiere la forma mostrada en la fig. 208. Así pues, dentro del circuito circulan corrientes muy grandes en comparación con las que se suministran a dicho circuito. La carga dentro del circuito pasa de la capacidad a la inductancia y viceversa, o sea, en este circuito tiene lugar la oscilación de la intensidad de la corriente. Las intensidades de las corrientes en la capacidad e inductancia se encuen-

tran en resonancia como se ve de la fig. 208. Ellas se compensan mutuamente. Por eso la propia resonancia se denomina resonancia de corriente o con más frecuencia, resonancia en paralelo.

Circuito oscilante. En ambos casos examinados el circuito, mostrado en la fig. 192, se comporta como un sistema de resonancia que efectúa oscilaciones forzadas bajo la influencia de la fuerza exterior. En 1853 Thomson por primera vez estudió las oscilaciones de la corriente en un circuito LC . Fue entonces cuando obtuvo la fórmula (50.7), llamada posteriormente **fórmula de Thomson** ($T = 2\pi\sqrt{LC}$). Para analizar las oscilaciones de la intensidad de la corriente

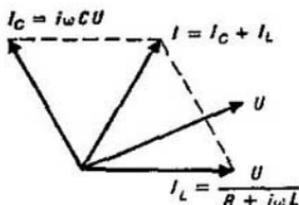


Fig. 207
Diagrama vectorial de las corrientes en el circuito con capacidad e inductancia acopladas en paralelo

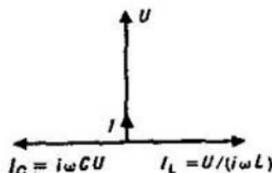


Fig. 208
Diagrama vectorial de las corrientes para la resonancia en paralelo

se puede directamente utilizar los resultados de la teoría de las oscilaciones mecánicas forzadas de un punto. Con este fin es necesario aclarar qué magnitudes en las oscilaciones eléctricas corresponden a la fuerza, desviación y velocidad para las oscilaciones mecánicas. Escribamos la ecuación para las oscilaciones mecánicas forzadas:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F/m, \quad (50.8)$$

donde x es la desviación del punto respecto a la posición de equilibrio; m , su masa; F , la fuerza exterior; $\gamma = b/(2m)$, el decremento del amortiguamiento y b , el coeficiente de fricción. Los puntos significan las derivadas respecto al tiempo.

Ahora transformemos las ecuaciones (48.12) y (48.13) para el circuito eléctrico. Tomando en consideración que $\theta I = dQ/dt$, escribamos (48.12) como

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = U. \quad (50.9)$$

Al dividir los dos miembros de (50.9) por L , recibimos la ecuación

$$\ddot{Q} + (R/L) \dot{Q} + [1/(LC)] Q = U/L, \quad (50.10)$$

semejante a (50.8). El papel de la desviación en el circuito eléctrico lo desempeña la carga Q en las placas del condensador, el papel de masa, la inductancia L , el papel de fuerza, la fuerza electromotriz U y el papel de coeficiente de fricción,

la resistencia óhmica R . La frecuencia de las oscilaciones naturales del circuito es igual a $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ [véase (50.3)]. La intensidad de corriente $I = -dQ/dt$ desempeña el papel de velocidad. Dado que para las oscilaciones mecánicas de un punto se estudian por lo general su desviación respecto a la posición de equilibrio, la amplitud de las oscilaciones, etc., a analizar las oscilaciones eléctricas es cómodo hacer uso de la ecuación (50.10), en vez de (48.13). Además, en lugar de la carga Q en las placas del condensador es útil emplear la tensión en el condensador ($U_C = Q/C$). Respecto a esta magnitud la ecuación (50.10) adquiere el aspecto

$$\ddot{U}_C + 2\gamma\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 U, \quad (50.11)$$

donde $\gamma = R/(2L)$ y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Todas las propiedades de estas oscilaciones se obtienen mediante una simple comparación de las magnitudes γ , ω_0 , U , U_C del circuito oscilante eléctrico con las magnitudes correspondientes que caracterizan las oscilaciones mecánicas del punto. En ausencia de resistencia ($R = 0$) la frecuencia de las oscilaciones naturales del circuito es igual a $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$. Las oscilaciones son no amortiguadas. En presencia de resistencia óhmica las oscilaciones se hacen amortiguadas, con la particularidad de que la duración del amortiguamiento es igual a

$$\tau_{am} = 1/\gamma = 2L/R. \quad (50.12)$$

A título de frecuencia de las oscilaciones no amortiguadas, en el sentido convencional usual, se toma la frecuencia

$$\pi = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (50.13)$$

El decremento logarítmico de amortiguamiento es igual a

$$\Theta = \gamma T, \quad (50.14)$$

donde $T = 2\pi/\omega_0$ es el período de las oscilaciones naturales.

Las curvas de resonancia de amplitud y de fase son semejantes a las curvas correspondientes para las oscilaciones mecánicas.

El factor Q se determina por la igualdad

$$Q = \left| \frac{U_{C \text{ res}}}{U_{C \text{ est}}} \right| = \frac{U_{C \text{ 0 res}}}{U_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (50.15)$$

donde $U_{C \text{ 0 res}}$ es la amplitud de la tensión en el condensador durante la resonancia; U_0 , la amplitud de la fem exterior, aplicada al circuito. Así pues, en un circuito con buen factor Q la amplitud de oscilaciones de tensión en el condensador puede ser mucho mayor que la amplitud de la tensión, suministrada al circuito.

La anchura de la curva de resonancia es

$$2\Delta\omega = \omega_0/Q = R/L. \quad (50.16)$$

Recordemos que la anchura $2\Delta\omega$ de la curva de resonancia no se determina respecto a la amplitud de oscilaciones, sino respecto al cuadrado de la amplitud.

§ 51. Circuitos con inducción mutua

Se exponen los métodos principales del cálculo de los circuitos. Se examina el funcionamiento del transformador.

Papel de la inducción mutua. Cada uno de los circuitos, recorrido por la corriente alterna, es una fuente de un campo magnético alternativo. Según la ley de la inducción electromagnética de Faraday, este campo induce en otros circuitos que se encuentran en dicho campo, fuerzas electromotrices que cambian la intensidad de la corriente en los mencionados circuitos. De esta manera, los circuitos resultan estar ligados entre sí mediante la inducción electromagnética.

Ecuaciones para el sistema de conductores, teniendo en cuenta la auto-inducción e inducción mutua. El flujo magnético total que atraviesa el k -ésimo circuito se define por la expresión

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^N L_{ki} I_i, \quad (51.1)$$

que es una generalización directa de las fórmulas (47.6) y (47.10) para el caso de muchos circuitos con corriente, basándose en el principio de superposición. Aquí L_{kk} es la inductancia del k -ésimo circuito y L_{ki} para $k \neq i$ es la inductancia mutua de los circuitos k -ésimo e i -ésimo. La cantidad total de conductores es N .

Para simplificar supongamos que en los circuitos no hay capacidades. Entonces, teniendo en cuenta la inducción magnética para la intensidad de la corriente en el k -ésimo circuito obtenemos la ecuación

$$I_k R_k = U_k - d\Phi_k/dt, \quad (51.2)$$

donde U_k es la fuerza electromotriz exterior en el k -ésimo circuito. Poniendo (51.1) en (51.2), obtenemos para definir la intensidad de la corriente en todos los circuitos, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$I_k R_k = U_k - \sum_{i=1}^N L_{ki} \frac{dI_i}{dt} \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (51.3)$$

Este sistema lineal de N ecuaciones para N incógnitas que son las intensidades de las corrientes I_k , es completo y, en principio, siempre se puede resolver. El único problema no trivial es la definición de las inductancias mutuas y las inductancias de los circuitos. En las ecuaciones (51.3) estas magnitudes se consideran conocidas.

Caso de dos circuitos. Examinemos como ejemplo el sistema de ecuaciones para dos circuitos:

$$I_1 R_1 = U_1 - \left(L_{11} \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} \right), \quad (51.4)$$

$$I_2 R_2 = U_2 - \left(L_{21} \frac{dI_1}{dt} + L_{22} \frac{dI_2}{dt} \right), \quad (51.5)$$

donde L_{11} y L_{22} son las inductancias de los circuitos primero y segundo y L_{12} y L_{21} , las inductancias mutuas de los circuitos.

La solución sucesiva será bastante sencilla si se examina la situación que se realiza con una precisión suficiente en el transformador de corriente alterna (fig. 209).

Transformador. En el transformador existen dos conductores, devanados en forma de bobinas sobre un núcleo cerrado hecho de material con gran permeabilidad magnética, merced a lo cual los flujos de inducción magnética, originados por las corrientes que recorren los conductores, están concentrados por completo prácticamente dentro del núcleo. Los conductores se denominan devanados del transformador. El devanado al que se conecta la fuente de fem exteriores se denomina primario y el devanado al que se la une la carga, secundario.

Las magnitudes, referentes al primario y secundario, se denotan con los índices 1 y 2, respectivamente. Escribamos las ecuaciones (5.2) en la forma:

$$I_1 R_1 = U_1 - d\Phi_1/dt, \quad (51.6)$$

$$I_2 R_2 = -d\Phi_2/dt, \quad (51.7)$$

donde R_1 es la resistencia óhmica del primario; R_2 , la suma de las resistencias óhmicas del secundario y la carga que para simplicidad se considera puramente óhmica; Φ_1 y Φ_2 , los flujos totales de inducción magnética que abarcan el primario y el secundario, respectivamente; U_1 , la fem exterior, suministrada al primario.

La resistencia R_1 del primario es bastante pequeña y la caída de tensión en ella debido a la resistencia óhmica puede considerarse mucho menor que U_1 , es decir, $I_{10} R_1 \ll U_{01}$, donde I_{10} y U_{10} son las amplitudes de la intensidad de la corriente y de la tensión en el primario. Por eso en la relación (51.6) se puede menospreciar el producto $I_0 R_1$ en comparación con U_1 y escribir como

$$U_1 = d\Phi_1/dt. \quad (51.8)$$

En condiciones normales la resistencia óhmica de la carga es mucho mayor que la resistencia óhmica del secundario. Por eso R_2 en (51.7) es igual con gran precisión a la resistencia de la carga. Por lo tanto, $I_2 R_2$ en el primer miembro de (51.7) es igual a la tensión U_2 en los bornes del secundario del transformador. Por esta razón, (51.7) puede escribirse de la siguiente manera:

$$U_2 = -d\Phi_2/dt. \quad (51.9)$$

Dado que la fem exterior varía según la ley armónica [$U_1 \sim \exp(i\omega t)$], todas las magnitudes cambian según la misma ley. Por lo tanto, $d\Phi_1/dt = i\omega\Phi_1$, $d\Phi_2/dt = i\omega\Phi_2$. Puesto que todo el flujo de inducción magnética está concentrado dentro del núcleo, cada una de las espiras del primario y secundario abarca un mismo flujo magnético Φ_0 . Por lo tanto, los flujos que abarcan el primario

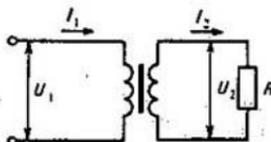


Fig. 209
Transformador

y secundario, son iguales a

$$\Phi_1 = \Phi_0 N_1, \quad (51.10)$$

$$\Phi_2 = \Phi_0 N_2, \quad (51.11)$$

donde N_1 y N_2 son la cantidad de espiras del primario y secundario, respectivamente. Teniendo en cuenta (51.10) y (51.11), las ecuaciones (51.8) y (51.9) toman el aspecto:

$$U_1 = i\omega N_1 \Phi_0, \quad (51.12)$$

$$U_2 = -i\omega N_2 \Phi_0. \quad (51.13)$$

Después de dividir miembro a miembro las ecuaciones (51.12) y (51.13) y de pasar a los módulos, obtenemos

$$|U_1|/|U_2| = N_1/N_2. \quad (51.14)$$

Teniendo en cuenta que $|U_1| = U_{01}$, $|U_2| = U_{02}$ son las amplitudes de la tensión en el primario y secundario, escribimos (51.14) en la forma

$$U_{01}/N_1 = U_{02}/N_2, \quad (51.15)$$

es decir, la amplitud de la tensión en el secundario es tantas veces mayor (menor) que la amplitud de la tensión en el primario, en cuantas veces el número de espiras del secundario supera (es inferior) a la cantidad de espiras del primario.

Si se menosprecian las pérdidas de energía en el transformador, el principio de conservación de energía tiene el aspecto

$$I_1 U_1 = I_2 U_2. \quad (51.16)$$

Pasando en (51.16) a los módulos, obtenemos a base de (51.15) la relación

$$I_{10} N_1 = I_{20} N_2, \quad (51.17)$$

donde I_{10} e I_{20} son las amplitudes de la intensidad de las corrientes en el primario y secundario.

Las fórmulas (51.15) y (51.17) describen la ley de transformación de las amplitudes de las tensiones y las intensidades de las corrientes en el transformador. Son válidas estrictamente para un transformador ideal, en el que no hay disipación del flujo magnético y pérdidas de energía. Para un transformador real se observan con gran precisión.

Diagrama vectorial de la marcha en vacío del transformador. El funcionamiento del transformador con el secundario abierto es la marcha en vacío. Menospreciemos el retardo de la fase del flujo de inducción magnética en comparación con la fase de la intensidad de la corriente en el primario a causa de cierta inercia de la remagnetización del material del núcleo. Este retardo es despreciablemente pequeño. Por eso puede considerarse que el flujo coincide en fase con la corriente en el primario, denominada corriente en vacío. La corriente en el secundario es nula. De la fórmula

$$U^{\text{ind}} = -d\Phi/dt \quad (51.18)$$

se desprende que U^{ind} retarda en $\pi/2$ del flujo Φ . Por esta razón, el diagrama vectorial de un transformador en vacío tiene la forma dada en la fig. 210: U_1 es la tensión exterior, aplicada al primario; U_1^{ind} , la tensión en el primario como consecuencia de la autoinducción; U_2^{ind} , la tensión del secundario debida a la inducción mutua; I_0 , la intensidad de la corriente en vacío; Φ_0 , el flujo en vacío que abarca cada una de las espiras de los devanados del transformador. Lo mismo que antes prescindimos de las pérdidas de energía y de la disipación del flujo en el transformador.

Según la ley de la inducción electromagnética

$$U_1^{ind} = -\frac{d\Phi_0}{dt} N_1, \quad (51.19)$$

$$U_2^{ind} = -\frac{d\Phi_0}{dt} N_2, \quad (51.20)$$

ya que los flujos totales de inducción que atraviesan el primario y el secundario, son respectivamente iguales a

$$\Phi_1 = \Phi_0 N_1, \quad \Phi_2 = \Phi_0 N_2. \quad (51.21)$$

Es necesario tomar en consideración que la intensidad de la corriente en vacío es muy pequeña, lo mismo que la resistencia óhmica del primario en comparación con su inductancia. Por eso (véase la fig. 210)

$$U_1 \approx U_1' \approx -U_1^{ind}, \quad (51.22)$$

es decir,

$$U_1^{ind} \approx -U_1. \quad (51.23)$$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones (51.20) y tomando en consideración (51.23), hallamos

$$|U_2^{ind}| / |U_1^{ind}| \approx N_2 / N_1. \quad (51.24)$$

Diagrama vectorial del transformador cargado. En el transformador cargado el flujo Φ_0 , que abarca cada una de las espiras de los devanados, se origina por las corrientes tanto del primario como del secundario. La fem de autoinducción en el primario debe compensar todo el tiempo la tensión exterior, o sea, la suma de los flujos $\Phi^{(1)}$ y $\Phi^{(2)}$ creados por las corrientes del primario y secundario debe ser aproximadamente igual al flujo Φ_0 en vacío, es decir, $\Phi_0 = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}$. Pero eso conduce a que la tensión en el secundario satisfará la condición (51.24) para el transformador cargado.

Hay que prestar atención en que los flujos $\Phi^{(1)}$ y $\Phi^{(2)}$ no son los flujos totales Φ_1 y Φ_2 que abarcan el primario y secundario. Los flujos $\Phi^{(1)}$ y $\Phi^{(2)}$ son os flujos abarcados por una espira de cada uno de los devanados, originados



Fig. 210

Diagrama vectorial del transformador durante la marcha en vacío

en el núcleo por las corrientes I_1 e I_2 , respectivamente. Los flujos totales que abarcan el primario y secundario, son $\Phi_1 = N_1 (\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)})$, $\Phi_2 = N_2 (\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)})$.

La fig. 211 representa el diagrama vectorial del transformador cargado. Las intensidades de las corrientes I_1 e I_2 son considerablemente mayores que la

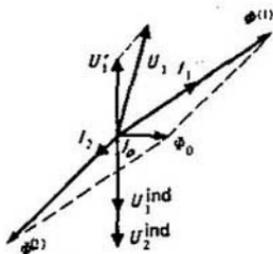


Fig. 211
Diagrama vectorial del transformador cargado

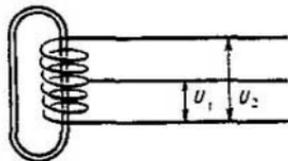


Fig. 212
Autotransformador

intensidad de la corriente I_0 en vacío, por eso los flujos $\Phi^{(1)}$ y $\Phi^{(2)}$, originados por ellas, son mucho mayores que el flujo Φ_0 . Puesto que $\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} = \Phi_0$ (números complejos),

$$\Phi^{(1)} \approx -\Phi^{(2)}, \quad |\Phi^{(1)}| \approx |\Phi^{(2)}|. \quad (51.25)$$

Tomemos en consideración las igualdades

$$|\Phi^{(1)}| = \text{const} |I_1| N_1, \quad |\Phi^{(2)}| = \text{const} |I_2| N_2, \quad (51.26)$$

que serán obvias si se tiene en cuenta que $\Phi^{(1)}$ y $\Phi^{(2)}$ son flujos, creados por cada uno de los devanados. Entonces (51.25) adquiere la forma de igualdad

$$|I_1| N_1 = |I_2| N_2, \quad (51.27)$$

que es más cómodo escribirla así

$$\left| \frac{I_2}{I_1} \right| = \frac{N_1}{N_2}, \quad (51.28)$$

lo que, como debe de ser, coincide con (51.17).

Los primeros transformadores fueron confeccionados por P.N. Yáblochkov (1847—1894) en 1877 y F.I. Usaguin (1855—1919) e 1882.

Autotransformador. El autotransformador, mostrado en la fig. 212, es de construcción muy económica que ayuda a ahorrar los hilos de bobinado. Los principios físicos del funcionamiento del autotransformador y las fórmulas son análogos a los examinados más arriba. La diferencia funcional consiste en que el primario y secundario del autotransformador se encuentran en contacto eléctrico entre sí y los devanados del transformador están aislados. Por esta

razón, por ejemplo, las cargas eléctricas estáticas pueden pasar del primario del autotransformador al secundario y en el transformador eso se excluye. Dichas peculiaridades de los transformadores y autotransformadores en algunos casos se tienen que tomar en consideración.

Transformador como elemento del circuito. La intensidad de la corriente del circuito secundario (fig. 209)

$$I_2 = U_2/R. \quad (51.29)$$

Teniendo en cuenta que $I_1 N_1 = I_2 N_2$, $U_1/N_1 = U_2/N_2$, de (51.29) obtenemos

$$\frac{N_2}{N_1} I_1 = \frac{1}{R} \frac{N_2}{N_1} U_1. \quad (51.30)$$

Por lo tanto, la resistencia en el secundario del transformador se representa por parte de la entrada mediante la resistencia efectiva

$$R_{\text{ef}} = \frac{U_1}{I_1} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R. \quad (51.31)$$

Ello significa que *el transformador puede utilizarse para la adaptación de la fuente de potencia a la carga con el fin de obtener el máximo rendimiento energético*

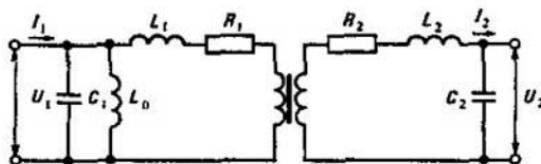


Fig. 213
Esquema de un transformador real

[véase (49.34)]. Verbigracia, con su ayuda puede adaptarse la gran resistencia interna del amplificador a la pequeña resistencia del altavoz. Las impedancias complejas se transforman de la misma manera que (51.31).

Transformador real. De (51.31) se ve que un transformador ideal por parte del primario se presenta simplemente en forma de una resistencia pura. La inductancia del primario no se manifiesta de ninguna manera, lo que está condicionado por la aniquilación mutua de los flujos magnéticos, originados por las corrientes en el primario y secundario, es decir, el transformador en el circuito participa como un convertidor de la resistencia efectiva que no posee inductancia propia.

Las relaciones citadas son válidas para un transformador ideal. El transformador real posee tanto inductancia, como capacidad. Su circuito equivalente se da en la fig. 213. Las inductancias L_1 y L_2 de primario y secundario están determinadas por la disipación del flujo magnético, debido a la cual no hay compensación completa de los flujos magnéticos, creados por las corrientes del primario y secundario. Las resistencias R_1 y R_2 son resistencias óhmicas

de los conductores de los devanados. La inductancia L_0 en el primario se determina por el flujo magnético, correspondiente a la corriente en vacío en el primario. Las capacidades C_1 y C_2 en los devanados surgen a causa del acoplamiento capacitivo entre las espiras de los conductores de dichos devanados.

Del circuito equivalente del transformador concluye que a frecuencias muy bajas, el transformador cesa de funcionar porque la inductancia ωL_0 se hace muy pequeña y la mayor parte de la corriente pasa a través de la inductancia L_0 . A frecuencias suficientemente grandes, el transformador tampoco funciona, ya que la corriente circula principalmente por la capacidad C_1 , pasando de largo las espiras del transformador. En la característica técnica del transformador se indican siempre los límites de su funcionamiento normal

¿Cuáles son las condiciones físicas de la ejecución de las resonancias en paralelo y en serie?

¿Qué relación existe entre los parámetros que caracterizan un circuito oscilante con resistencia, capacidad e inductancia, y los parámetros de un sistema oscilante mecánico con fricción?

¿Cuál es el sentido físico de las condiciones de adaptación de la carga al generador? Enumérense los casos cuando las corrientes de Foucault desempeñan un papel útil y cuando son indeseables.

¿Por qué el núcleo del autotransformador debe ser cerrado?

¿Cuáles son las ventajas principales y los defectos de los motores sincrónicos y asíncrónicos?

¿Cuál es el papel del «patinaje» en el motor asíncrono? ¿De qué depende?

¿Cómo debe conectarse el transformador para efectuar la adaptación del generador y la carga si la resistencia de la carga es muy pequeña?

¿En qué se diferencia un transformador real del ideal?

§ 52. Corriente trifásica

Se describen los fenómenos físicos principales en los circuitos de corriente trifásica.

Definición. La corriente que se examinó hasta ahora se caracterizaba por la amplitud y fase y se llamaba monofásica. El conjunto de tres corrientes monofásicas iguales, desfasadas una respecto a la otra en un tercio de período, se denomina corriente trifásica.

Obtención de la corriente trifásica. Examinemos un generador de corriente alterna con tres devanados aislados, en los que se genera corriente y que se encuentran bajo un ángulo de 120° uno con respecto a otro (fig. 214). El campo magnético giratorio que surge como consecuencia de la rotación de un imán permanente, origina en los devanados del generador tensiones iguales, pero en desfasaje:

$$U_1 = U_0 \operatorname{sen} \omega t, \quad U_2 = U_0 \operatorname{sen} (\omega t + 2\pi/3), \quad U_3 = U_0 \operatorname{sen} (\omega t - 2\pi/3). \quad (52.1)$$

Los devanados del generador es cómodo mostrarlos en forma esquemática de la fig. 215.

Conexión en estrella de los devanados del generador. Si los tres devanados del generador se usan sin unirlos entre sí, el generador de corriente trifásica se convierte simplemente en un conjunto de tres generadores aislados de corriente monofásica y no contiene ningunos elementos nuevos. Por ejemplo, para transmitir la energía eléctrica al consumidor se requieren tres pares de hilos.

Pero si los devanados se unen entre sí de una manera determinada, la corriente trifásica manifiesta propiedades específicas que son muy útiles para las aplicaciones técnicas. Existen dos tipos de acoplamiento de los devanados del generador: la conexión en estrella y en delta.

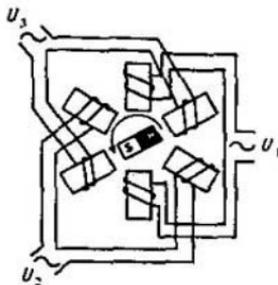


Fig. 214
Generador de corriente trifásica



Fig. 215
Representación esquemática de los devanados del generador de corriente trifásica

El circuito de conexión en estrella y el diagrama vectorial de las tensiones en los devanados se muestran en la fig. 216 a, b. En este caso existe un punto común O del mismo potencial. La tensión en cada uno de los devanados se denomina de fase. El conductor, unido con el punto común de potencial común, se llama neutro. Los conductores, unidos con los extremos libres de los devanados se denominan hilos de fase. Así pues, *las tensiones de fase son tensiones entre los hilos neutro y de fase*. La tensión entre los hilos de fase se llama lineal. Del diagrama vectorial se ve que las amplitudes de U_{o1} y U_{of} de las tensiones de fase y lineales están en la siguiente relación:

$$U_{o1} = 2U_{of} \sin 60^\circ = U_{of} \sqrt{3}. \quad (52.2)$$

En particular, si $U_{of} = 127$ V, $U_{o1} = 220$ V. La corriente I_f que circula por los devanados se llama de fase, mientras que la corriente I_l que circula por la línea, se denomina corriente de línea. Durante la conexión en estrella las corrientes de fase son iguales a las de líneas ($I_f = I_l$). Si a cada uno de los devanados se le conecta una misma carga R , la intensidad sumaria de la co-

riente a través del hilo neutro es nula, puesto que

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{R} (U_1 + U_2 + U_3) = 0, \quad (52.3)$$

ya que del diagrama vectorial se ve que $\sum U_i = 0$.

La conexión en estrella de los devanados del generador permite utilizar para la transmisión de energía en lugar de seis hilos, sólo cuatro, lo que representa una gran ventaja.

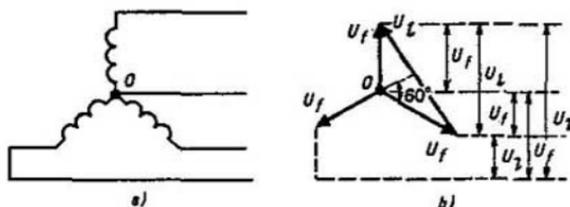


Fig. 216
Conexión en estrella de los devanados del generador trifásico (a); diagrama vectorial correspondiente de tensiones (b)

Conexión en delta de los devanados del generador. El circuito de semejante conexión y el diagrama vectorial se dan en la fig. 217 a, b. En este caso $U_{of} =$

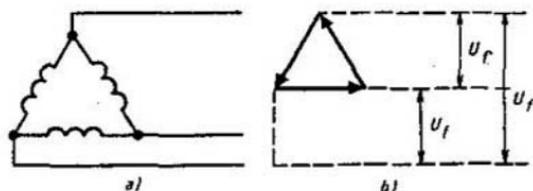


Fig. 217
Conexión en delta de los devanados del generador trifásico (a); diagrama vectorial correspondiente de tensiones (b)

$= U_{o1}$. Basándose en el diagrama vectorial de las corrientes (fig. 218), hallamos para las mismas cargas de las fases:

$$I_{o1} = 2I_{of} \cos 30^\circ = I_{of} \sqrt{3}. \quad (52.4)$$

$$I_{11} + I_{21} + I_{31} = I_l. \quad (52.5)$$

Al conectar en delta los devanados del generador sin carga, la corriente de cierre en los devanados está ausente. Pero eso es correcto sólo para el primer armónico. Las corrientes de los armónicos superiores que se excitan siempre debido a las oscilaciones no lineales, están presentes en los devanados. Por

eso los devanados de los generadores potentes, por regla general, no se conectan en delta.

Conexión de las cargas. Las cargas pueden conectarse entre sí también en estrella y en delta y luego unir las a un generador trifásico, cuyos devanados están acoplados entre sí en estrella o en delta. Así, existen cuatro posibilidades de unir el generador con las cargas (figs. 219—222).

Cada una de esas conexiones tiene sus peculiaridades.

Durante la conexión estrella—estrella (fig. 219) en todas las cargas existe distinta tensión. Siendo las cargas aproximadamente iguales y conforme

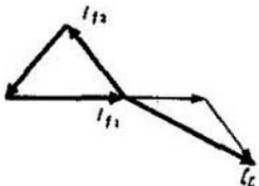


Fig. 218
Diagrama vectorial de las corrientes durante la conexión en delta de los devanados



Fig. 219
Conexión estrella — estrella

a (52.3), la intensidad de corriente en el hilo neutro es muy pequeña. A pesar de ello, no se puede prescindir de dicho hilo, ya que sin él sobre cada uno de los pares de carga actúa una tensión lineal $U_{01} = U_{0f}\sqrt{3}$ que se distribuye entre

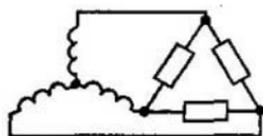


Fig. 220
Conexión estrella — triángulo

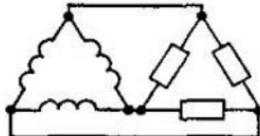


Fig. 221
Conexión triángulo — triángulo

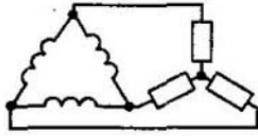


Fig. 222
Conexión triángulo — estrella

las cargas de acuerdo con sus resistencias. En cambio, semejante dependencia de las tensiones respecto a las cargas es inadmisibles. Por eso es necesario conservar siempre el hilo neutro, sin introducirle fusibles.

Durante la conexión estrella—triángulo (fig. 220) sobre cada carga actúa una tensión lineal $U_{01} = U_{0f}\sqrt{3}$ independientemente de la resistencia de la carga.

En el caso de conexión triángulo—triángulo (fig. 221) sobre todas las cargas actúa una tensión de fase independientemente de la resistencia de las cargas.

Durante la conexión triángulo—estrella (fig. 222) la tensión en cada carga es igual a $U_{0f}/\sqrt{3}$.

Obtención de un campo magnético giratorio. Si a los devanados del generador (véase la fig. 214) se les suministra una corriente trifásica, en el espacio entre ellos surge un campo magnético giratorio, correspondiente al campo del imán giratorio que genera la corriente. Si en lugar del imán se coloca un rotor cortocircuitado, éste empieza a girar, es decir, el generador funcionará como motor asincrónico. Así pues, *al utilizar la corriente trifásica, la construcción de los motores eléctricos se simplifica considerablemente, lo que representa una gran ventaja.*

El primero en obtener el campo magnético giratorio con ayuda de la corriente trifásica fue M. O. Dolivo-Dobrovolski (1862—1919). En 1889 el confeccionó el primer motor asincrónico y luego realizó la transmisión de la energía eléctrica mediante la corriente trifásica a gran distancia. La corriente trifásica aseguró una aplicación efectiva y amplia de la corriente en la técnica.

¿Cuáles son las ventajas principales al emplear la corriente trifásica en comparación con la monofásica?

Trácese los esquemas de conexión de las cargas y los generadores en estrella y en delta, asimismo enumérense las relaciones entre las tensiones y corrientes lineales y de fase.

§ 53. Efecto pelicular

Se analizan el cuadro físico de la aparición y la teoría elemental del efecto pelicular y sus consecuencias. Se da el concepto sobre el efecto pelicular anómalo.

Esencia del fenómeno. La corriente constante se distribuye uniformemente por la sección transversal del conductor rectilíneo. Para la corriente alterna merced a la interacción de inducción de diversos elementos de la corriente entre sí, transcurre la redistribución de la densidad de la corriente por la sección transversal del conductor, debido a lo cual la corriente se concentra principalmente en la capa superficial del conductor. La concentración de la corriente alterna en las inmediaciones de la superficie del conductor se denomina efecto pelicular.

Cuadro físico de la aparición. Examinemos un conductor cilíndrico por el cual circula corriente (fig. 223). Alrededor del conductor con corriente existe un campo magnético, cuyas líneas de fuerza son circunferencias concéntricas con centro en el eje del conductor. Como consecuencia del aumento de la intensidad de la corriente, crece la inducción del campo magnético, mientras que la forma de las líneas de fuerza permanece siendo la misma. Por eso en cada punto dentro del conductor la derivada $\partial B/\partial t$ está orientada a lo largo de la tangente respecto a la línea de inducción del campo magnético y, por lo tanto, las líneas $\partial B/\partial t$ son también circunferencias que coinciden con las líneas de inducción del campo magnético. El campo magnético variable, según la ley de la inducción electromagnética

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t \quad (53.1)$$

crea un campo inducido eléctrico, cuyas líneas de fuerza son en sí curvas cerradas alrededor de la línea de inducción del campo magnético (fig. 223). El vector de intensidad del campo inducido en las regiones más próximas al eje del conductor está dirigido en sentido contrario al vector de la intensidad del campo eléctrico que crea la corriente, y en las regiones más alejadas, coincide con él. Como consecuencia, la densidad de la corriente disminuye en las regiones próximas al eje y aumenta cerca de la superficie del conductor, o sea, surge el efecto pelicular.

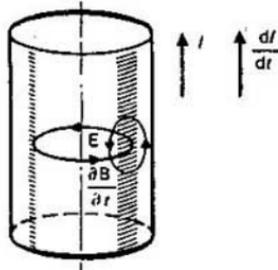


Fig. 223
Cuadro físico de la aparición del efecto pelicular

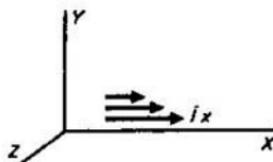


Fig. 224
Efecto pelicular en un conductor infinito con frontera plana

Teoría elemental. Ante todo es necesario obtener la ecuación que describa el efecto pelicular. Partimos de la ecuación de Maxwell:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad (53.2)$$

y la ecuación (53.1). Sustituyendo la expresión para \mathbf{j} según la ley de Ohm en (53.2)

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} \quad (53.3)$$

y diferenciando los dos miembros de la ecuación obtenida con relación al tiempo, hallamos

$$\text{rot } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (53.4)$$

o teniendo en cuenta (53.1)

$$-\text{rot rot } \mathbf{E} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (53.5)$$

Dado que

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (53.6)$$

y $\text{div } \mathbf{E} = 0$, en definitiva tenemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\gamma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (53.7)$$

Para simplificar la solución de esta ecuación supongamos que la corriente circula por un conductor homogéneo infinito que ocupa el semiespacio $y > 0$ a lo largo del eje X (fig. 224). La superficie del conductor es el plano $Y = 0$.

De esta manera,

$$j_x = j_x(y, t), \quad j_y = j_z = 0, \quad (53.8)$$

$$E_x = E_x(y, t), \quad E_y = E_z = 0. \quad (53.9)$$

Entonces [véase (53.7)]

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \gamma \mu \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (53.10)$$

Ya que todas las magnitudes en (53.10) dependen armónicamente de t , puede suponerse que

$$E_x(y, t) = E_0(y) e^{i\omega t}. \quad (53.11)$$

Después de sustituir (53.11) en (53.10) y reducir los dos miembros de la ecuación por $\exp(i\omega t)$, obtenemos la ecuación para $E_0(y)$:

$$\frac{d^2 E_0}{dy^2} = i\gamma \mu \omega E_0. \quad (53.12)$$

La solución general de la ecuación (53.12) es así:

$$E_0 = A_1 e^{-\lambda y} + A_2 e^{\lambda y}. \quad (53.13)$$

Teniendo en cuenta que

$$k = \sqrt{i\gamma \mu \omega} = \alpha(1 + i), \quad \alpha = \sqrt{\gamma \omega \mu / 2}, \quad (53.14)$$

hallamos

$$E_0(y) = A_1 e^{-\alpha y} e^{-i\alpha y} + A_2 e^{\alpha y} e^{i\alpha y}. \quad (53.15)$$

Al alejarse de la superficie del conductor ($y \rightarrow \infty$), el segundo sumando en (53.15) crece ilimitadamente, lo que es inadmisibles desde el punto de vista físico. Por consiguiente, en (53.15) $A_2 = 0$ y a título de solución físicamente accesible queda sólo el primer sumando. Entonces, la solución del problema, teniendo en cuenta (53.11), tiene la forma

$$E_x(x, t) = A_1 e^{-\alpha y} e^{i(\omega t - \alpha y)}. \quad (53.16)$$

Tomando la parte real de esta expresión y pasando con ayuda de la relación $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ a la densidad de la corriente, obtenemos

$$j_x(y, t) = \gamma A_1 e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \alpha y). \quad (53.17)$$

Tomando en consideración que $j_x(0, 0) = j_0$ es la amplitud de la densidad de la corriente en la superficie del conductor, llegamos a la siguiente distribución de la densidad volumétrica de la corriente en el conductor:

$$j_x(y, t) = j_0 e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \alpha y). \quad (53.18)$$

Grosor de la capa superficial de corriente. La densidad volumétrica de corriente es máxima cerca de la superficie del conductor. Al alejarse de la superficie, disminuye y a una distancia $\Delta = 1/\alpha$ se hace e veces menor. Por eso prácticamente toda la corriente está concentrada en una capa Δ denominada grosor

de la capa superficial de corriente. Basándose en (53.14), éste es

$$\Delta = [2/(\gamma\mu\omega)]^{1/2}. \quad (53.19)$$

Es obvio que a una frecuencia bastante alta ω , el grosor de la capa superficial de corriente puede ser muy pequeño. Por ejemplo, para un buen conductor tipo cobre $\gamma = 10^7 \Omega^{-1} \times \text{m}^{-1}$ y para $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$ el grosor es $\Delta = 4 \text{ mm}$. Si la frecuencia aumenta 100 veces, hasta el valor $\omega = 10^6 \text{ s}^{-1}$, el grosor de la capa superficial de corriente disminuye 10 veces ($\Delta \approx 0,4 \text{ mm}$). Eso significa que para una frecuencia bastante alta en conductores no muy finos toda la corriente circula únicamente en una parte pequeña de la sección transversal del conductor, en la proximidad de su superficie. Por esta razón, nada cambia si se retira el material conductor de la región cilíndrica dentro del conductor, dejando sólo su envoltura cilíndrica de un grosor igual a la capa superficial de corriente. Si el conductor es bastante grueso y la frecuencia no muy alta, la corriente circula por toda la sección transversal, disminuyendo un poco sólo hacia su eje. Por ejemplo, para la corriente técnica de 50 Hz de frecuencia el efecto pelicular en los conductores ordinarios se manifiesta débilmente.

Dependencia entre la resistencia óhmica del conductor y la frecuencia. Puesto que el área efectiva de la sección transversal que recorre la corriente, disminuye al aumentar la frecuencia, *la resistencia del conductor crece al elevar la frecuencia.*

Dependencia entre la inductancia del conductor y la frecuencia. La energía del campo magnético que recorre la corriente, es igual a

$$W_m = 1/2 LI^2. \quad (53.20)$$

Si la corriente circula por un cilindro vacío, el campo fuera de éste es el mismo que origina la corriente que circula por un cilindro continuo y en la cavidad del cilindro no hay campo. Por eso la energía del campo de una corriente que recorre un cilindro vacío, es inferior a la energía del campo de la misma corriente que circula por un cilindro continuo. Esto significa que debido al efecto pelicular, la energía del campo magnético W_m disminuye. De aquí, basándose en (53.20), se desprende que *al aumentar la frecuencia, la inductancia de los conductores disminuye.*

Temple de los metales con corrientes de alta frecuencia. Merced al efecto pelicular, a frecuencias altas el calor de Joule se libera principalmente en la capa superficial. Eso permite calentar al rojo el conductor en una capa superficial fina sin variar esencialmente la temperatura de las regiones internas. Dicho fenómeno se utiliza en la industria para el temple de los metales que es un método muy importante desde el punto de vista tecnológico.

Efecto pelicular anómalo. El mecanismo de aparición del efecto pelicular expuesto supone que en su movimiento el electrón pierde continuamente la energía para superar la resistencia óhmica del conductor, debido a lo cual sucede la liberación del calor de Joule.

Está claro que semejante idealización es posible sólo cuando el movimiento de los electrones transcurre en las zonas, cuyas dimensiones lineales son mucho

mayores que la longitud media del recorrido libre del electrón entre las colisiones con los átomos de la substancia. Por esta razón, *la teoría expuesta es válida únicamente para la condición de que el grosor de la capa superficial de corriente sea mucho mayor que la longitud media del movimiento libre del electrón*. Semejante relación entre ellos se observa en límites bastante amplios. Por ejemplo, incluso a una frecuencia de 10 GHz y temperatura de 300 K, el grosor de la capa superficial de corriente en el cobre es igual aproximadamente a $1 \mu\text{m}$, y la longitud del recorrido libre es de unos $0,01 \mu\text{m}$. No obstante, *a temperatura muy baja, la situación cambia bruscamente, ya que la conductividad aumenta intensamente y, por tanto, crece la longitud de recorrido y libre y disminuye el grosor de la capa superficial de corriente*. Verbigracia, a la temperatura del helio líquido (4,2 K), la conductividad del cobre puro aumenta aproximadamente 10^4 de veces. Eso conduce al incremento de la longitud media del recorrido libre de los electrones en 10^4 de veces y a la disminución del grosor de la capa superficial de corriente en $\sqrt{10^4} = 10^2$ veces. Así pues, la longitud de recorrido libre y el grosor de la capa superficial se hacen iguales, respectivamente, a 100 y $0,01 \mu\text{m}$. Para estas condiciones el mecanismo que conduce a la formación del efecto pelicular, ya no actúa. *El grosor efectivo de la capa en que se concentra la corriente, varía. Este fenómeno recibe el nombre de efecto pelicular anómalo.*

En condiciones del efecto pelicular anómalo en los límites de una capa superficial normal de corriente durante todo el recorrido libre pueden moverse sólo los electrones, cuyas velocidades son casi paralelas a la superficie del conductor. Todos los demás electrones durante el movimiento libre tienen tiempo de abandonar la capa superficial «normal» de corriente y cambiar considerablemente la dirección de movimiento. Debido a eso, disminuye la conductividad del material y cambia el grosor «anómalo» efectivo Δ' de la capa superficial de corriente. Para que se pueda estimar aproximadamente, puede considerarse que una parte de los electrones tiene el orden de Δ'/l respecto al número de electrones que realizarían la conductividad en los márgenes del efecto pelicular «normal» (l es la longitud media del recorrido libre de los electrones). La disminución de esta parte conduce a la reducción de la conductividad que se tiene en cuenta con una sustitución aproximada en las fórmulas $\gamma \rightarrow \beta\gamma$ (Δ'/l), donde β es un coeficiente numérico del orden de la unidad. Haciendo esta sustitución en la fórmula (53.19), hallamos

$$\Delta' = [2l/(\rho\gamma\mu\omega)]^{1/2}. \quad (53.21)$$

Merced a la interacción inducida de distintos elementos de la corriente, en la corriente alterna tiene lugar la redistribución de la densidad de corriente por la sección transversal del conductor, debido a lo cual la corriente se concentra principalmente en la capa superficial del conductor.

¿En qué consiste la causa física de la dependencia de la resistencia e inductancia del conductor respecto a la frecuencia de la corriente alterna?

¿Para cuales condiciones surge el efecto pelicular?

§ 54. Cuadripolos

Se exponen la terminología y los conceptos principales de la teoría de los cuadripolos.

Definición. Se llama *cuadripolo* a un circuito eléctrico con dos terminales de entrada y dos de salida, por el que se transmite la energía eléctrica. Su representación simbólica se muestra en la fig. 225. Como ejemplos de cuadripolos pueden citarse los convertidores de las amplitudes de oscilaciones, los filtros de frecuencias, los transformadores, etc. Se necesita encontrar la relación entre las tensiones y las intensidades de las corrientes en la salida y entrada del cuadripolo. Si en éste no hay fuentes de energía, se denomina red pasiva, si están presente, cuadripolo activo. Se supone que la intensidad de la corriente que sale del terminal 2 es igual a la intensidad de la corriente que entra en el terminal 1 y de manera análoga, que la intensidad de la corriente que sale del terminal 3 es igual a la intensidad de la corriente que entra en el terminal 4.

Ecuaciones. Sea que en el cuadripolo hayan circuitos independientes. Entonces para ellos pueden formarse n ecuaciones para las corrientes de contorno tipo (48.27):

$$\sum_{i=1}^n Z_{1i} I_i = U_1, \quad \sum_{i=1}^n Z_{2i} I_i = -U_2, \quad \sum_{i=1}^n Z_{ki} I_i = 0 \quad (k=3, 4, \dots, n). \quad (54.1)$$

El signo menos en la segunda de las ecuaciones (54.1) en U_2 apareció debido a que al escribir estas ecuaciones para la dirección elegida del recorrido positivo de la tensión, U_1 y U_2 pasan en direcciones contrarias (véase la fig. 225). La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} U_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} U_2, \\ I_2 &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta} U_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} U_2, \end{aligned} \quad (54.2)$$

donde Δ y Δ_{ij} son el determinante y los complementos correspondientes del sistema de ecuaciones (54.1). Por consiguiente, entre las intensidades de las corrientes y las tensiones de la red pasiva existen dependencias lineales tipo (54.2), que es más cómodo escribirlas así:

$$\begin{aligned} I_1 &= B_{11} U_1 + B_{12} U_2, \\ I_2 &= B_{21} U_1 + B_{22} U_2. \end{aligned} \quad (54.3)$$

Los coeficientes B_{ij} tienen la dimensión de las conductancias. Por eso (54.3) se denominan *ecuaciones del cuadripolo con coeficientes en forma de conductancias*.

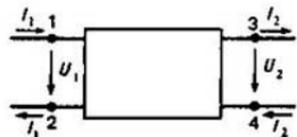


Fig. 225
Cuadripolo

No es difícil resolver las ecuaciones (54.3) respecto a las tensiones:

$$\begin{aligned}U_1 &= A_{11}I_1 + A_{12}I_2, \\U_2 &= A_{21}I_1 + A_{22}I_2,\end{aligned}\quad (54.4)$$

donde los coeficientes A_{ij} tienen la dimensión de resistencias (impedancias). Las ecuaciones (54.4) se llaman *ecuaciones del cuádrupolo con coeficientes en forma de resistencias*.

Teorema de la reciprocidad. Dado que los coeficientes z_{ij} para la red pasiva en las ecuaciones (54.1) son simétricos véase (48.30):

$$Z_{ij} = Z_{ji}. \quad (54.5)$$

puede mostrarse que los coeficientes A_{ij} en (54.4) son en este caso también simétricos:

$$A_{12} = A_{21}. \quad (54.6)$$

De aquí se desprende que

$$(U_2/I_1)I_\alpha = 0 = (U_1/I_2)I_1 = 0, \quad (54.7)$$

es decir, *la tensión de salida, en el par abierto de terminales para la intensidad prefijada de la corriente de entrada no cambia si los terminales de entrada y de salida del cuádrupolo se cambian de lugar* (teorema de la reciprocidad para la red pasiva).

Resistencia de cuádrupolo. La resistencia A_{21} se denomina resistencia recíproca del cuádrupolo, puesto que para el circuito abierto de salida ($I_2 = 0$) de la segunda ecuación de (54.4) se desprende que

$$A_{21} = U_2/I_1. \quad (54.8a)$$

Para esta misma condición la primera ecuación de (54.4) nos ofrece:

$$A_{11} = U_1/I_1. \quad (54.8b)$$

Esto significa que A_{11} es la resistencia de entrada del cuádrupolo para el circuito abierto de salida. El mismo sentido tienen los coeficientes A_{12} y A_{22} de acuerdo con el teorema de la reciprocidad.

Cuádrupolos elementales. Aplicado las ecuaciones (54.3) y (58.4), la tensión y la intensidad de la corriente en la entrada del cuádrupolo pueden relacionarse con las mismas magnitudes en la salida:

$$U_1 = D_{11}U_2 + D_{12}I_2, \quad I_1 = D_{21}U_2 + D_{22}I_2, \quad (54.9)$$

donde D_{ij} se expresan fácilmente por medio de B_{ij} y A_{ij} que entran en las ecuaciones (54.3) y (54.4); el coeficiente D_{12} tiene la dimensión de resistencia, D_{21} , de conductividad y los coeficientes D_{11} y D_{22} son adimensionales.

El cuádrupolo se denomina simétrico longitudinal si al cambiar de lugar los terminales de entrada y de salida, la intensidad de las corrientes y la tensión en los circuitos, acoplados a los terminales, no varían. Partiendo de la posibilidad de semejante cambio con ayuda de (54.9), obtenemos para los cuádrupolos simé-

tricos

$$D_{11} = D_{22}. \quad (54.10)$$

Los cuadripolos (circuitos) simétricos elementales en π y en T se muestran en las figs. 226 y 227 y los asimétricos, en las figs. 228 y 229. Los coeficientes D_{ij} para el cuadripolo se pueden hallar con más facilidad aplicando el método de las corrientes de contorno. Para eso se compone un sistema de ecuaciones y luego se excluyen las intensidades de las corrientes de contorno para los cir-

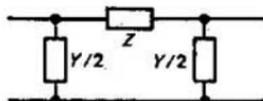


Fig. 226
Cuadripolo simétrico-longitudinal en forma de pi

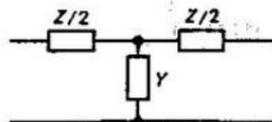


Fig. 227
Circuito en T simétrico longitudinal

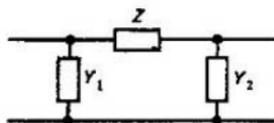


Fig. 228
Circuito en pi asimétrico

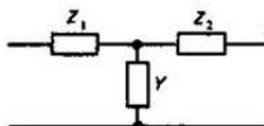


Fig. 229
Circuito en T asimétrico

cuitos internos. Las dos ecuaciones restantes, en las que participan U_1 , U_2 e I_1 , I_2 se transforman a la forma (54.9) y, comparándola con (54.9), se obtienen inmediatamente los coeficientes D_{ij} .

Para el circuito en pi simétrico longitudinal (fig. 226) hallamos:

$$D_{11} = 1 + ZY/2, \quad D_{12} = Z, \quad D_{21} = Y(1 + ZY/4). \quad (54.11)$$

Para el circuito en T simétrico longitudinal (fig. 227) tenemos:

$$D_{11} = 1 + ZY/2, \quad D_{12} = Z(1 + ZY/4), \quad D_{21} = Y. \quad (54.12)$$

Comprobando directamente, nos cercioramos de que

$$D_{11}^2 - D_{12}D_{21} = 1, \quad (54.13)$$

es decir, el determinante de los coeficientes de transformación (54.9) es igual a la unidad para los circuitos en pi y en T simétricos longitudinales.

Las expresiones de los coeficientes para los circuitos asimétricos son más complejos y por eso aquí no se citan.

Resistencias de entrada y de salida. Para un cuadripolo éstas se determinan como relaciones entre las tensiones y las intensidades de corriente correspon-

dientes:

$$Z_{en} = U_1/I_1, \quad Z_{sa1} = U_2/I_2. \quad (54.14)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (54.10)–(54.13), de (54.9) hallamos

$$Z_{en} = \frac{Z_{sa1} + D_{12}/D_{11}}{1 + Z_{sa1}D_{21}/D_{11}}. \quad (54.15)$$

Así pues, *el cuadripolo transforma la resistencia de salida en resistencia de entrada*. Al cortocircuitar la salida ($Z_{sa1} = 0$), la resistencia de entrada del cuadripolo es igual a

$$Z_{0\ en} = D_{12}/D_{11} \quad (54.16)$$

y para la salida abierta ($Z_{sa1} = \infty$), se determina por la expresión

$$Z_{\infty\ en} = D_{11}/D_{21}. \quad (54.17)$$

Relación de transferencia. La transformación de las tensiones y las intensidades de las corrientes se caracteriza por la relación entre sus valores en la salida y los valores en la entrada. De manera análoga a (54.15), obtenemos:

$$U_2/U_1 = Z_{sa1}/(Z_{sa1}D_{11} + D_{12}), \quad (54.18)$$

$$I_2/I_1 = 1/(D_{11} + Z_{sa1}D_{21}). \quad (54.19)$$

Si el cuadripolo funciona sin transformar las resistencias, es decir, *cuando las resistencias de entrada y de salida son iguales, se dice que la resistencia de salida se adapta al sistema*. Poniendo el valor de la resistencia en (54.15)

$$Z_x = Z_{en} = Z_{sa1}, \quad (54.20)$$

hallamos su valor

$$Z_x = \sqrt{D_{12}/D_{21}}. \quad (54.21)$$

Esta magnitud se llama **impedancia característica (de onda)** del cuadripolo. Por lo tanto, el cuadripolo está adaptado a la línea de transmisión si sus resistencias de entrada y de salida son iguales a la impedancia característica. En este caso las relaciones (54.18) y (54.19) toman el aspecto:

$$U_2/U_1 = 1/(D_{11} + \sqrt{D_{12}D_{21}}), \quad (54.22)$$

$$I_2/I_1 = 1/(D_{11} + \sqrt{D_{12}D_{21}}). \quad (54.23)$$

Con ayuda de la relación

$$\operatorname{ch} g = D_{11} \quad (54.24)$$

determinemos la relación de transferencia g . Entonces, basándose en (54.13), obtenemos

$$\operatorname{sh} g = \sqrt{\operatorname{ch}^2 g - 1} = \sqrt{D_{12}D_{21}}. \quad (54.25)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (54.24) y (54.25), transformemos las fórmulas (54.22) y (54.23) así

$$U_2 = U_1 e^{-g}, \quad (54.26)$$

$$I_2 = I_1 e^{-g}. \quad (54.27)$$

Señalemos que las expresiones (54.26) y (54.27) son válidas sólo en condiciones de una adaptación total. Al no haber adaptación, es necesario utilizar las fórmulas (54.18) y (54.19).

Aplicando la relación de transferencia y la impedancia característica, las fórmulas (54.18) y (54.19) pueden representarse de la siguiente manera:

$$U_2/U_1 = Z_{\text{sat}}(Z_{\text{sat}} \operatorname{ch} g + Z_x \operatorname{sh} g), \quad (54.28)$$

$$I_2/I_1 = Z_x(Z_x \operatorname{ch} g + Z_{\text{sat}} \operatorname{sh} g). \quad (54.29)$$

Lo mismo que todas las magnitudes en las fórmulas (54.26)–(54.29), la relación de transferencia en una magnitud compleja:

$$g = \alpha + i\beta. \quad (54.30)$$

Como se ve de las ecuaciones (54.26) y (54.27) en las condiciones de adaptación la parte real de la relación de transferencia determina la variación de las amplitudes de la tensión y de las intensidades de las corrientes en la salida del cuádrupolo en comparación con sus valores de entrada, mientras que la parte imaginaria, la variación de las fases. La parte real de la relación de transferencia, es simplemente, el logaritmo de la relación entre las amplitudes:

$$\alpha = \ln(U_1/U_2). \quad (54.21)$$

Dado que g es función de la frecuencia, cuando por el cuádrupolo pasa la señal que incluye en sí muchas frecuencias, su composición espectral y, por lo tanto, la forma varían. El carácter de la variación del espectro de fase y de frecuencia puede hallarse mediante las fórmulas obtenidas en el presente párrafo.

§ 55. Filtros

Se describen el principio de funcionamiento y las propiedades de los filtros.

Definición. Se denomina **filtro** el dispositivo que varía la amplitud de oscilaciones en función de su frecuencia. Si el filtro se confecciona en forma de un cuádrupolo, la relación de transferencia debe cambiar esencialmente con la frecuencia.

Filtro de paso bajo. Examinemos el cuádrupolo en T representado en la fig. 230. Comparándolo con la fig. 227, se ve que en las fórmulas obtenidas es necesario hacer:

$$Z = i\omega L, \quad Y = i\omega C. \quad ((55.1))$$

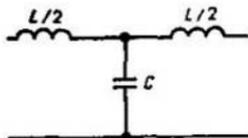


Fig. 230
Filtro de paso bajo

La impedancia característica, a base de (54.24) y (54.11), es igual a

$$Z_x = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \sqrt{1 + \frac{ZY}{4}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}. \quad (55.2)$$

Para la relación de transferencia g [véase (54.24)] teniendo en cuenta (54.11), hallamos

$$\operatorname{ch} g = 1 - \omega^2 LC/2. \quad (55.3)$$

Teniendo presente para g su expresión (54.30), escribamos de nuevo la ecuación (55.3) como

$$\operatorname{ch}(\alpha + i\beta) = \operatorname{ch} \alpha \cos \beta + i \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sen} \beta = 1 - \omega^2 LC/2, \quad (55.4)$$

de donde

$$\operatorname{ch} \alpha \cos \beta = 1 - \omega^2 LC/2, \quad (55.5)$$

$$\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sen} \beta = 0. \quad (55.6)$$

La ecuación (56.1) tiene las siguientes soluciones:

$$\beta = \pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (55.7)$$

para las cuales $\cos \beta = \pm 1$. En cambio, el coseno hiperbólico es siempre mayor o igual a la unidad, o sea, $\operatorname{ch} \alpha \geq 1$. Por eso de (55.5) se desprende que $\cos \beta = -1$ y puede considerarse que $\beta = \pi$. Para estas condiciones la ecuación (55.5) adquiere el aspecto

$$1 + \operatorname{ch} \alpha = \omega^2 LC/2. \quad (55.8)$$

Dado que $\operatorname{ch} \alpha \geq 1$, (55.8) tiene solución sólo para frecuencias bastante altas

$$\omega \geq \omega_1, \quad (55.9)$$

donde

$$\omega_1 = 2\sqrt{LC} \quad (55.10)$$

es la frecuencia límite. Teniendo en cuenta (55.9) y partiendo de la ecuación (55.2), sacamos la conclusión de que la impedancia característica es un número puramente imaginario:

$$Z_{\text{sal}} = i \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\omega^2 LC}{4} - 1} = i \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1}. \quad (55.11)$$

La parte real de la relación de transferencia se determina de la ecuación (55.8). Se ve que al crecer la frecuencia, ella aumenta rápidamente. Pero eso significa (basándose en (54.26) y (54.27)) que las amplitudes de oscilaciones en la salida del cuadripolo para $\omega \geq \omega_1$ disminuyen con rapidez al aumentar la frecuencia.

La otra solución de la ecuación (55.6) tiene la forma:

$$\operatorname{sh} \alpha = 0, \quad \alpha = 0. \quad (55.12)$$

Entonces la ecuación (55.5) tiene el aspecto

$$\cos \beta = 1 - \omega^2 LC/2. \quad (55.13)$$

Ella tiene solución únicamente para $\cos \beta \geq -1$, es decir, para las frecuencias

$$\omega \leq \omega_1 = 2/\sqrt{LC}, \quad (55.14)$$

para las cuales la primera solución no daba resultados. La impedancia característica en este caso es real:

$$Z_x = \sqrt{L/C} \sqrt{1 - \omega^2/\omega_1^2}. \quad (55.15)$$

Puesto que aquí $\alpha = 0$, las frecuencias $\omega \leq \omega_1$ se dejan pasar sin amortiguarse según la amplitud. En cambio, existe el defasaje que depende de la frecuencia y que se determina por la ecuación (55.13).

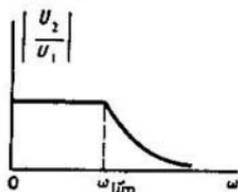


Fig. 231
Característica del filtro de paso bajo

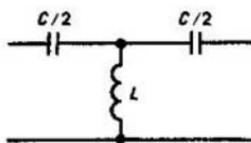


Fig. 232
Filtro de paso alto

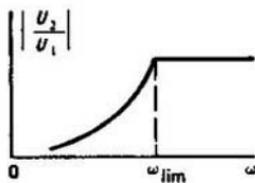


Fig. 233
Característica del filtro de paso alto

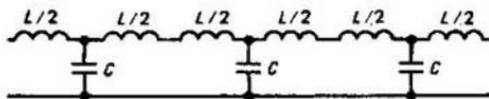


Fig. 234
Filtro en escala de eslabones en T

La dependencia entre la amplitud de oscilaciones en la salida y la amplitud en la entrada se expone en la fig. 231. El cuadripolo en cuestión es en sí un filtro que deja pasar las frecuencias bajas, inferiores a cierta frecuencia límite ω_1 . Las frecuencias que superan la frecuencia límite se amortiguan rápidamente. Para frecuencias mucho mayores que la límite, dicho filtro funciona como un obturador. La zona de frecuencias $\omega \leq \omega_1$ se denomina banda pasante.

Filtro de paso alto. El cuadripolo, mostrado en la fig. 232, se calcula de la misma manera que el caso anterior y funciona como un filtro de paso alto con una característica (respuesta) de frecuencia que se da en la fig. 233.

Cadena de filtros. Si a los terminales de salida del cuadripolo mostrado en la fig. 230, se conectan los terminales de entrada de semejante cuadripolo y se continúa ese proceso, se obtiene el cuadripolo representado en la fig. 234.

Para estudiarlo, pueden aplicarse los mismos métodos. No obstante, también sin un cálculo detallado se pueden aclarar sus propiedades fundamentales, ya que las células sucesivas de las que consta, tienen las mismas impedancias características y funcionan en modo de adaptación para cada frecuencia dada. La frecuencia límite de todas las células es igual. Por tanto, ese cuadripolo tendrá la misma banda pasante $\omega \leq \omega_1$ y el amortiguamiento de las frecuencias $\omega \geq \omega_1$ será más intenso. La característica de frecuencia tiene el aspecto semejante a la fig. 231, pero con un decrecimiento más abrupto para $\omega > \omega_1$ (fig. 235).

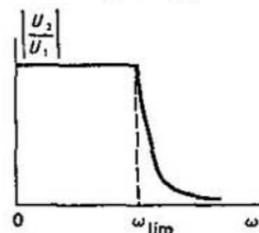


Fig. 235
Característica del filtro en
escala de eslabones en T

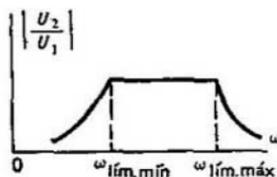


Fig. 236
Característica del filtro de
banda

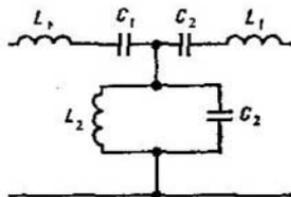


Fig. 237
Filtro de banda

Filtro de banda. Se llama filtro de banda al que deja pasar sólo la banda de frecuencias entre cierta frecuencia máxima y cierta frecuencia mínima:

$$\omega_{1,\text{mín}} \leq \omega \leq \omega_{1,\text{máx}}. \quad (55.16)$$

Su respuesta de frecuencia se muestra en la fig. 236.

En principio, semejante filtro puede confeccionarse en forma de sucesión de filtros de paso alto y de paso bajo. El filtro de paso alto debe eliminar todas las frecuencias, inferiores a $\omega_{1,\text{mín}}$ y dejar pasar las frecuencias altas, mientras que el de paso bajo debe dejar pasar todas las frecuencias, inferiores a $\omega_{1,\text{máx}}$ y eliminar todas las demás que superen $\omega_{1,\text{máx}}$.

En cambio, en la práctica por lo general se utilizan circuitos más complicados (véase, por ejemplo, la fig. 237). Este filtro es también un cuadripolo y puede estudiarse por los mismos métodos.

§ 56. Betatrón

Se examinan el principio de funcionamiento del betatrón y los conceptos principales de la teoría de la estabilidad del movimiento de los electrones en él. Se analiza el límite de energías que puede alcanzarse en el betatrón.

Destinación. El betatrón es un ejemplo de dispositivo en el que el campo eléctrico giratorio inducido actúa sobre los electrones libres en el vacío. Está desti-

nado para acelerar los electrones hasta energías muy elevadas del orden de varias centenas de megaelectrón-voltios. Las pérdidas de energía en la radiación de deceleración que surge a causa del movimiento de los electrones con aceleración por orbitales circulares, impiden la aceleración hasta energías más considerables. El mecanismo de aceleración, usado en el betatrón, no está en condición de compensar dichas pérdidas y el ciclo de aceleración cesa.

Principio de funcionamiento. La idea principal es elegir tales condiciones para las que el electrón en un campo magnético creciente se acelere por medio del campo eléctrico giratorio y al mismo tiempo se retenga por el campo magnético en la orbital circular de radio constante.

Resulta que semejante condición es realizable y se denomina condición de betatrón.

Condición de betatrón. Escribamos la ecuación del movimiento del electrón por una circunferencia de radio constante en un campo magnético creciente considerando que semejante movimiento es posible. La solución nos ofrece las condiciones para las que dicho movimiento puede efectuarse.

Designemos por r_0 el radio de la órbita; p , el impulso del electrón, dirigido todo el tiempo por la tangente respecto a la orbital circular (fig. 238). Para definir la intensidad del campo eléctrico en la órbita la ley de la inducción electromagnética nos da la ecuación

$$2\pi r_0 E = - d\Phi/dt. \quad (56.1)$$

Por otra parte, la ecuación del movimiento tiene la forma

$$dp/dt = eE. \quad (56.2)$$

De las fórmulas (56.1) y (56.2) se deduce que

$$dV/dt = - \frac{e}{2\pi r_0} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (56.3)$$

Dado que $r_0 = \text{const}$, los dos miembros de la ecuación pueden integrarse respecto a t desde 0 hasta t :

$$p_t - p_0 = - [e/(2\pi r_0)] (\Phi_t - \Phi_0), \quad (56.4)$$

donde los índices t y 0 significan el valor de las magnitudes correspondientes en el momento de tiempo t y en el momento inicial $t = 0$. La ecuación de Newton para la aceleración centrípeta se escribe como

$$mv^2/r_0 = - eVB, \quad (56.5)$$

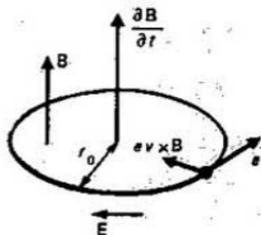


Fig. 238
Para deducir la condición de betatrón

donde m es la masa relativista. De la ecuación (56.5) se desprende que $p = mv = -eBr_0$. Entonces [véase (56.4)]

$$B_t - B_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_t}{\pi r_0^2} - \frac{\Phi}{\pi r_0^2} \right). \quad (56.6)$$

Puesto que el vector de inducción \mathbf{B} está dirigido perpendicularmente al plano de la órbita y el flujo de inducción magnética es igual a

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (56.7)$$

($S = \pi r_0^2$ es el área limitada por la órbita),

$$\Phi / (\pi r_0^2) = \langle B \rangle \quad (56.8)$$

es la inducción media del campo en el área S que abarca la órbita. Considerando que en el momento inicial el campo está ausente ($B_0 = 0$, $\Phi_0 = 0$), de la fórmula (56.6) teniendo en cuenta (56.8), hallamos

$$B_t = 1/2 \langle B_t \rangle. \quad (56.9)$$

Esto es la condición de betatrón: *la inducción magnética en la órbita de electrones es igual a la mitad de la magnitud de la inducción magnética media que abarca*

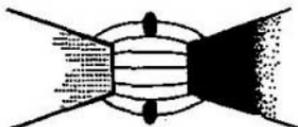


Fig. 239
Esquema del betatrón

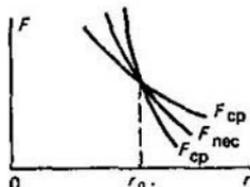


Fig. 240
Para deducir la condición de estabilidad radial de los electrones en el betatrón

la órbita. Por consiguiente, es necesario hacer que la inducción del campo magnético sea decreciente desde el centro hacia la órbita según cualquier ley a causa de que se cumpla la condición (56.9). Para ello es indispensable elegir de una manera correspondiente la forma de los polos de los imanes electromagnéticos que originan el campo magnético (fig. 239). Ya que para la forma prefijada de los polos de los imanes, el aspecto de las líneas de fuerza no depende de la intensidad de la corriente y de la inducción del campo magnético, la condición (56.9) resulta cumplida para cualquier intensidad de la corriente en el imán eléctrico. Pero eso significa que no es necesario preocuparse de la ley de variación de la intensidad de la corriente. La única cuestión que queda en blanco es la estabilidad del movimiento; si por cualesquiera causas el electrón deja de moverse estrictamente por la circunferencia de radio r_0 , surgirán las fuerzas que tienden a man-

tenerlo en el régimen de aceleración en las proximidades de la circunferencia o perderá la aceleración y desaparecerá.

Existen dos posibilidades de desviación del electrón de la órbita: o bien según el radio, o bien según la vertical del plano de su movimiento.

Estabilidad radial. La inducción del campo magnético en la zona de la órbita se acostumbra a presentar como

$$B = \text{const}/r^n \quad (56.10)$$

y caracterizar la velocidad de su variación por la magnitud n . La fuerza centrípeta F_c^{nec} , necesaria para asegurar que el electrón se mueve por una circunferencia de radio r , y la fuerza centrípeta F_c que surge realmente a la misma distancia r respecto al centro, se dan por las expresiones

$$\begin{aligned} F_c^{\text{nec}} &= mv_1^2/r = A_1/r, \\ F_c &= evB = A_2/r^n, \end{aligned} \quad (56.11)$$

donde A_1 y A_2 son constantes ($v = \text{const}$). Las gráficas de estas magnitudes para $n > 1$ y $0 < n < 1$ se muestran en la fig. 240. Para $r = r_0$ se cumple la igualdad (56.6) y se realiza el movimiento por la circunferencia de radio r_0 . Si por alguna causa surge un desplazamiento del electrón en un radio $r > r_0$, para $n > 1$ la fuerza centrípeta $F_c < F_c^{\text{nec}}$. Esto significa que aparecen factores que tienden a apartar el electrón de la órbita de radio r_0 . Por eso para $n > 1$ el movimiento resulta ser inestable. Para $n < 1$ la fuerza centrípeta $F_c > F_c^{\text{nec}}$ y aparecen factores que tienden a hacer regresar el electrón a la órbita de radio r_0 , debido a lo cual se logra la estabilidad radial. El examen del caso $r < r_0$ conduce a la misma conclusión. Por consiguiente, la condición de la estabilidad radial del movimiento tiene el aspecto

$$0 < n < 1. \quad (56.12)$$

Estabilidad vertical. Se asegura siempre durante el decrecimiento de la inducción del campo magnético hacia la periferia ($n > 0$), puesto que en este caso las líneas de fuerza son convexas hacia afuera (fig. 241) y al desviarse el electrón respecto a su plano surge la componente de la fuerza de Lorentz que tiende a volverlo al plano (fig. 241). Así pues, al cumplirse la condición (56.12), se asegura también la estabilidad vertical del movimiento, o sea, la desigualdad (56.12) es la condición general de la estabilidad del movimiento del electrón en el betatrón.

Oscilaciones de betatrón. Para pequeñas desviaciones respecto a la órbita de equilibrio ($r = r_0$) los electrones efectúan cerca de ella unas oscilaciones armónicas pequeñas tanto en dirección radial, como en dirección vertical. Estas oscilaciones se denominan de betatrón. Su amplitud determina la sección de

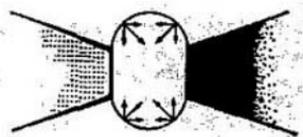


Fig. 241
Esquema de aseguramiento de la estabilidad vertical del movimiento de los electrones en el betatrón

la cámara anular de vacío en la que se realiza el movimiento del electrón. Por lo general, las dimensiones lineales de la sección transversal de dicha cámara son aproximadamente un 5% del radio de la órbita.

Límite de energías que se logran en el betatrón. Como ya se ha dicho, ese límite se determina por las pérdidas de energía de los electrones en la radiación de deceleración (véase el capítulo 10). En la práctica en los betatrones se pueden obtener energías máximas que no superan 300 MeV.

Explíquense los procesos físicos que son la base de la acción de los filtros de pasos bajo y alto.

¿Cuál es la estructura del filtro de banda?

Problemas

- Calcular la inductancia de la sección de longitud l de una línea bifilar, menospreciando la inductancia interior de los hilos. Los radios de los hilos son los mismos e iguales a r_0 , la distancia entre ellos es igual a d .
- Por un conductor cilíndrico circular infinito y recto circula una corriente de densidad J . El conductor posee una cavidad cilíndrica de sección circular. Los ejes del cilindro y la cavidad son paralelos (véase la fig. 98). Hallar la inducción del campo magnético dentro de la cavidad ($\mu = \mu_0$). Indicación: véase el problema 2.9.
- Existe un solenoide muy largo con densidad de devanado de n espiras por 1 m de longitud. El área de la sección transversal del solenoide es S . A través del devanado del solenoide circula una corriente de intensidad I . Por las dos partes del solenoide se introducen barras de hierro muy largas que poseen una permeabilidad magnética μ . Las barras se encuentran pegadas densamente al devanado del solenoide. Entre las barras dentro del solenoide existe un espacio muy diminuto. Determinar la fuerza con que las barras se atraen.
- El imán eléctrico en U posee un devanado de n espiras. El área de la sección transversal, la longitud, la permeabilidad magnética del material del imán y la distancia entre los polos son, respectivamente, S , l , μ y d . La intensidad de la corriente que circula por el devanado del imán es I . A los polos del imán se ha aplicado una franja del mismo material y con la misma sección transversal que el imán. Determinar la fuerza con que la franja se atrae al imán.
- Una barra metálica horizontal gira alrededor de un eje vertical que pasa a la distancia $1/k$ de su longitud respecto a uno de sus extremos, con una frecuencia ν . La longitud de la barra es igual a l . Determinar la diferencia de potencial entre los extremos de la barra si ella gira en un campo magnético homogéneo vertical con inducción B . Considerar que $k = 3$; $l = 1,2$ m; $\nu = 6$ s⁻¹ y $B = 10^{-2}$ T.
- Entre los polos redondos de un imán eléctrico grande que se alimenta de corriente alterna con frecuencia $\nu = 1$ kHz, se forma un campo magnético que varía de manera sinusoidal con el tiempo y posee una amplitud de inducción $B_0 = 0,5$ T. Considerando que el campo magnético es homogéneo, determinar la intensidad máxima del campo eléctrico en el espacio entre los polos del imán a la distancia $r = 0,1$ m del centro.
- Un solenoide de radio b con n espiras, cerrado en sí mismo, gira con una velocidad angular ω alrededor del diámetro de una de las espiras en un campo magnético homogéneo con inducción B . El eje de rotación es perpendicular al vector de inducción. La resistencia e inductancia del solenoide son R y L , respectivamente. Determinar la intensidad de la corriente que circula por el solenoide, como función del tiempo.
- Un anillo superconductor que puede moverse sólo en sentido vertical, yace en la mesa sobre una espira del conductor. A través de la espira del conductor comienza a circular una corriente de intensidad I . Como consecuencia de eso, el anillo superconductor se levanta. La inducción mutua de la espira y el anillo, elevado a una altura x , es igual a $L_{12}(x)$. La inductancia del anillo superconductor es L_{11} , la masa del anillo, m , y la aceleración de caída libre, g . Determinar la altura h , a la que se levanta el anillo superconductor.

- 8.9. A través de una bobina A_1 se deja pasar una corriente de intensidad I_0 sen ωt . En la bobina A_2 se induce la correspondiente intensidad de corriente. Las inductancias e inductancia mutua son iguales a L_1 , L_2 y L_{12} . La resistencia de la bobina A_2 es R_2 . Sea ξ_1 cierta coordenada generalizada que caracteriza la posición de la bobina A_2 . Hallar la fuerza media generalizada F_1 que está relacionada con la coordenada generalizada ξ_1 .
- 8.10. En el plano yacen un conductor rectilíneo infinitamente largo y un conductor en forma de cierta circunferencia de radio a (fig. 242). La distancia entre el centro del conductor anular hasta el del rectilíneo es igual a d . Hallar la inducción mutua.

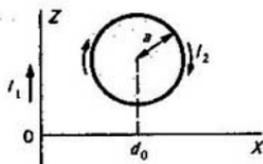


Fig. 242
Disposición mutua de las corrientes circular y directa que están en interacción

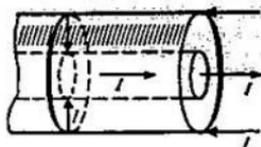


Fig. 243
Cable con diafragma móvil

- 8.11. Los conductores circular y rectilíneo, descritos en el problema 8.10, son recorridos por corrientes de intensidades I_1 e I_2 . ¿Qué fuerza actúa sobre el conductor anular?
- 8.12. Hallar la inducción mutua del devanado de un toroide (fig. 195) y de un conductor rectilíneo de longitud infinita que coincide con el eje axial de simetría del toroide.
- 8.13. Hallar la inductancia del devanado del toroide de una sección circular de radio r y con n espiras. El radio mayor del toroide es igual a R .
- 8.14. Un cable coaxial, cuyo alma y envoltura tienen una conductibilidad infinita y los radios son r_1 y r_2 , está cortocircuitado mediante un diafragma móvil (fig. 243). Hallar la fuerza que ejerce sobre el diafragma móvil cuando por el cable circula una corriente de intensidad I .
- 8.15. Un cilindro vacío de radio r_2 y un conductor cilíndrico, coaxial con él, de radio r_1 que posee una conductibilidad muy elevada, se sumergen en un magnético líquido conductor con una permeabilidad magnética μ y una densidad de masa ρ (fig. 244). El circuito es recorrido por una corriente de intensidad I . Hallar la altura a la que sube el magnético líquido en el cilindro.
- 8.16. Un cilindro dieléctrico de radio a gira alrededor de su eje con una velocidad angular ω , paralelamente a la cual está dirigido el vector de inducción B de un campo magnético continuo. Hallar la polarización del cilindro y la densidad superficial de la carga ligada. La constante dieléctrica de la substancia del cilindro es igual a ϵ .
- 8.17. Un disco conductor fino con conductividad γ se encuentra en un campo magnético alternativo, cuya inducción es $B = B \cos(\omega t + \varphi)$ y está dirigida perpendicularmente al plano del disco. Hallar la densidad de las corrientes de Foucault inducidas en el disco.
- 8.18. Hallar la inductancia del devanado de un toroide de n espiras de sección cuadrada con lado a . El radio mayor del toroide es igual a R .

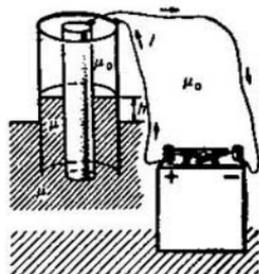


Fig. 244
Arrastre del magnético hacia el espacio entre los conductores coaxiales con corriente

- 8.19. Un bucle redondo de radio a gira alrededor de su diámetro con una velocidad angular constante ω en un campo magnético homogéneo de inducción B . Su resistencia óhmica es R y el eje de rotación es perpendicular a B . Hallar la intensidad de la corriente $I(t)$, el momento de las fuerzas que frenan la rotación del cuadro $M(t)$ y la potencia media $\langle P \rangle$ que se gasta en mantener constante la velocidad angular de rotación del cuadro. A título de punto de referencia $t=0$ tómese el momento en que el plano del bucle es perpendicular a B .
- 8.20. La sección de un circuito consta de dos tubos cilíndricos coaxiales de radios a_1 y a_2 ($a_2 > a_1$) y de longitud l . En uno de los extremos los tubos se unen mediante una placa plana conductora. Hallar la inductancia de la sección del circuito.
- 8.21. Dos espiras de alambre circulares planas cerradas de radios a_1 y a_2 yacen en un plano a una distancia d la una de la otra. Considerando que la distancia d es bastante grande y que se puede hacer uso de la aproximación dipolar, hallar la inductancia mutua de los circuitos.
- 8.22. La inducción magnética B_0 entre los polos paralelos planos de un imán eléctrico puede considerarse constante y homogénea. En el espacio entre los polos se introduce una placa de área S hecha de material paramagnético con susceptibilidad magnética χ_p . Sus superficies son paralelas a las superficies de los polos del imán eléctrico. Hallar la fuerza que actúa sobre la placa.
- 8.23. Hallar la fuerza radial que actúa sobre el toroide, cuyos datos se citan en el problema 8.13, si por él circula una corriente de intensidad I .
- 8.24. Dos circuitos idénticos con inductancias $L = L_{11} = L_{22}$ se encuentran de tal manera que su inductancia mutua $L_{12}^{(0)} = 0$. Los circuitos son recorridos por corrientes superconductoras de intensidad I_0 . Después de eso cambia la posición recíproca de los circuitos, como consecuencia de lo cual su inductancia mutua se hace igual a L_{12} . Hallar la intensidad de corrientes en el estado final.
- 8.25. Un circuito eléctrico consta de cuatro nudos. Tres de ellos coinciden con los vértices de un triángulo equilátero y el cuarto, con su centro (el punto de intersección de las medianas o bisectrices). Entre los vértices del triángulo las capacidades de las secciones son iguales a C ($R = 0, L = 0$) y entre los vértices del triángulo y su centro se conectan inductancias L ($R = 0, C = 0$). Hallar la frecuencia de resonancia del sistema.

Respuestas

- 8.1. $L = \frac{\mu_0}{\pi} l \ln \frac{d}{r_0}$. 8.2. $B = (\mu_0/2) j \times r$. 8.3. $F = \frac{S}{2} \frac{(\mu - \mu_0)}{\mu_0} n^2 I^2$. 8.4. $F = \frac{S}{(l+d)} \times \frac{\mu^2}{\mu_0} n^2 I^2$. 8.5. $U = \pi v l^2 \frac{k-2}{k} B = 9.1 \text{ B}$. 8.6. $E = B_0 \omega r/2 = 156 \text{ V/m}$. 8.7. $I = \pi b^2 n B \omega \times (R_1 t \omega^2 L^2)^{-1/2} \sin(\omega t + \varphi_0)$. 8.8. $h = \frac{1}{2} \frac{I^2}{mg} \frac{1}{L_{11}} \{ [L_{12}(0)]^2 - [L_{12}(h)]^2 \}$. 8.9. $F_1 = -\frac{1}{2} \frac{I_0^2 \omega^2 L_1 L_{12}}{R^2 + \omega^2 L_1^2} \frac{\partial L_{12}}{\partial \xi_1}$. 8.10. $L_{12} = \mu_0 (d - \sqrt{d^2 - a^2})$. 8.11. $F_x = -\mu_0 I_1 I_2 \times \left(\frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}} - 1 \right)$. 8.12. $L_{12} = \frac{\mu_0 n d}{2\pi} \ln(r_2/r_1)$. 8.13. $L = \mu_0 n^2 (R - \sqrt{R^2 - r^2})$. 8.14. $F = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln(r_2/r_1)$. 8.15. $h = \frac{(\mu - \mu_0) I^2 \ln(r_2/r_1)}{4\pi^2 \rho g (r_2^2 - r_1^2)}$. 8.16. $P = (\epsilon - \epsilon_0) B \omega r$, $\sigma_{1lg} = (\epsilon - \epsilon_0) B \omega a$. 8.17. $j = (1/2) \gamma \omega B_0 \times r \sin(\omega t + \varphi)$. 8.18. $L = \frac{\mu_0 n^2 a}{2\pi} \ln \left(\frac{2R+a}{2R-a} \right)$. 8.19. $I(t) = \frac{\pi a^2 \omega B}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi)$, $\text{tg } \varphi = \omega L/R$; $M(t) = -\frac{\pi^2 a^4 B^2 \omega}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi)$; $\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{1}{2} \frac{(\pi a^2 \omega B)^2}{R^2 + \omega^2 L^2} R$. 8.20. $L = [\mu_0 l / (2\pi)] \ln(a_2/a_1)$. 8.21. $L_{12} = \mu_0 \pi a_1^2 a_2^2 / (4d^3)$. 8.22. $F = \chi_p S B_0^2 / [2\mu_0 (1 + \chi_p)]$. 8.23. $F = \mu_0 I^2 n^2 (R / \sqrt{R^2 - r^2} - 1)$. 8.24. $I = I_0 L / (L + L_{12})$. 8.25. $\omega_0 = (3LC)^{-1/2}$.

Ondas electromagnéticas

El campo magnético variable engendra un campo eléctrico variable que, a su vez, origina el campo magnético variable que, a su vez, engendra el campo eléctrico variable, etc. En definitiva, se forman los campos magnético y eléctrico, enlazados entre sí, que componen la onda electromagnética. Esta se "desprende" de las cargas y corrientes que la originan. El procedimiento de la existencia de la onda electromagnética hace imposible su inmovilidad en el espacio y la constancia de las intensidades de sus campos con el tiempo.

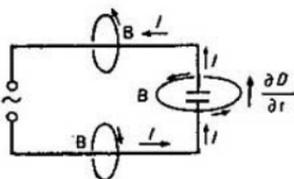
§ 57. Corriente de desplazamiento

Se examina el contenido físico de la corriente de desplazamiento. Se realiza la consideración de la corriente de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell.

Esencia del proceso. La corriente continua no recorre el circuito con condensador, mientras que la corriente alterna sí. La intensidad de la corriente estacionaria de conducción en todos los elementos, acoplados en serie, del circuito es la misma. En el condensador no puede existir la corriente de conducción, relacionada con el movimiento de los electrones, ya que las armaduras del condensador están separadas por un dieléctrico. Por esta razón, es necesario sacar la conclusión de que en el condensador transcurre cierto proceso que como si cerrara la corriente de conducción, es decir, en cierto sentido garantiza el intercambio de carga entre las armaduras del condensador sin transferir la carga entre ellas. Dicho proceso se denomina **corriente de desplazamiento**.

Examinemos un circuito de corriente alterna que posee un condensador plano (fig. 245). Entre las armaduras del condensador existe un campo eléctrico con intensidad $E = \delta/\epsilon$, donde δ es la densidad de la carga en la armadura y ϵ , la constante dieléctrica de la substancia entre las armaduras. El desplazamiento eléctrico entre las armaduras del condensador es igual a $D = \delta = Q/S$, donde Q es la carga en cada una de las armaduras y S , el área de la armadura. La intensidad de la corriente en el circuito es $I = \partial Q/\partial t$. De aquí se desprende que

$$I_{des} = S \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (57.1)$$



o sea, el proceso que cierra la corriente de conducción en el circuito es la variación del despla-

Fig. 245
Corriente de desplazamiento

zamiento eléctrico entre las armaduras del condensador, con la particularidad de que en la fórmula (57.1) la magnitud I se da con el índice «des» («desplazamiento»), para mostrar que no es la corriente de conducción la que existe entre las armaduras, a pesar de que $I = I_{des}$. La densidad de corriente de desplazamiento en el espacio entre las armaduras es igual a $j_{des} = I_{des}/S = \partial D/\partial t$. Teniendo en cuenta que la dirección de j_{des} en cada punto entre las armaduras del condensador plano coincide con la dirección de $\partial D/\partial t$, en lugar de (57.1) puede escribirse la siguiente relación diferencial:

$$j_{des} = \partial D/\partial t. \quad (57.2)$$

Partiendo del carácter local de esta relación es de esperar su independencia del modelo no local (el condensador plano), en cuyos márgenes se obtiene. En efecto, es así. La fórmula (57.2) determina la densidad volumétrica de la corriente de desplazamiento j_{des} . En 1864 Maxwell enunció teóricamente el postulado sobre la existencia de la corriente de desplazamiento. En lo sucesivo otros científicos lo demostraron experimentalmente.

¿Por qué la velocidad de variación del vector de desplazamiento se denomina densidad de corriente? La igualdad matemática de por sí misma de la magnitud $S\partial D/\partial t$ que caracteriza el proceso entre las armaduras del condensador, y las intensidades de las corrientes de conducción fuera de las armaduras del condensador, es decir, la igualdad de dos magnitudes, pertenecientes a distintas zonas del espacio y que poseen distinta naturaleza física, no contiene en general, ninguna ley física. Por eso sólo formalmente se puede denominar «corriente» a la expresión $S\partial D/\partial t$. Para que este nombre adquiera sentido físico; es necesario demostrar que $S\partial D/\partial t$ posee las propiedades más características de la corriente, a pesar de que no representa el movimiento de las cargas eléctricas como la corriente de conducción. La propiedad principal de la corriente de conducción es su capacidad de engendrar el campo magnético. Por eso, la cuestión decisiva es de si origina la corriente de desplazamiento un campo magnético como lo engendra la corriente de conducción, o si mejor dicho, origina la magnitud (57.2) un campo magnético, semejante al que crea la densidad volumétrica de la corriente de conducción, igual a ella. Maxwell dio una respuesta afirmativa.

La verificación experimental de la corrección de esta respuesta consiste en lo siguiente. Según la ley de la corriente total, la circulación del vector B por el contorno que abarca la corriente, es igual a $\mu_0 I$. La circulación puede medirse con ayuda de la espiral de Rogowski. Desplazándola a lo largo del contorno, vemos que la circulación no varía incluso entonces cuando la espiral de Rogowski la abarca el condensador. Pero eso significa precisamente que la corriente de desplazamiento origina en el condensador un campo magnético, semejante al que crea la correspondiente corriente de conducción. No obstante, la afirmación más obvia de que la corriente de desplazamiento origina un campo magnético es la existencia de las ondas electromagnéticas. De no crear la corriente de desplazamiento un campo magnético, no podrían existir las ondas electromagnéticas.

Ecuación de Maxwell con corriente de desplazamiento. La generación del campo magnético por medio de la corriente de conducción se describe mediante la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}. \quad (57.3)$$

Teniendo en cuenta la creación del campo mediante la corriente de desplazamiento, es necesario generalizar dicha ecuación así

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{des}}. \quad (57.4)$$

Entonces, tomando en consideración (57.2), obtenemos definitivamente la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t, \quad (57.5)$$

que es una de las ecuaciones de Maxwell.

Naturaleza relativista de la corriente de desplazamiento. Al transformar los campos de un sistema de coordenadas a otro, los campos eléctrico y magnético se determinan mutuamente (véase el § 11). Si en cierto sistema de coordenadas existe un campo magnético heterogéneo, en el otro sistema de coordenadas dicho campo es alternativo respecto al tiempo y al mismo tiempo aparece el campo eléctrico. Pero esto es precisamente lo que testimonia el hecho de que el campo eléctrico alternativo engendra el campo magnético. No obstante, de aquí no se desprende que la creación del campo magnético mediante el campo eléctrico alternativo no es un nuevo fenómeno fundamental en la física de la electricidad y el magnetismo. Aquí la situación es semejante a la que fue examinada con detalle en los §§ 45, 46 con relación a la inducción electromagnética. *La originación del campo magnético por el campo eléctrico alternativo es un fenómeno fundamental de la naturaleza.*

La igualdad formal de la corriente de desplazamiento en el condensador y la corriente de conducción en los hilos, conectados a sus armaduras, no contiene ninguna ley física. La nueva ley física consiste en que la corriente de desplazamiento crea un campo magnético, igual que el que origina la corriente de conducción, correspondiente a ella.

Ejemplo 57.1. *Entre las armaduras de un condensador plano hay dos capas de material que es débil conductor y posee las conductividades γ_1 y γ_2 y las constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_2 . Los grosores de las capas son respectivamente iguales a a_1 y a_2 (fig. 246). Las áreas de las armaduras del condensador son S . Investigar el proceso de establecimiento de la intensidad de la corriente en el circuito si en el momento $t = 0$ a las armaduras del condensador se les aplica una diferencia de potencial constante U_0 . Examinar los procesos que surgen al desconectar el circuito y al poner en derivación la fuente de fem exteriores.*

Al conectar la tensión, en la superficie de separación de las capas no puede surgir instantáneamente la carga superficial. Por eso inicialmente el sistema en cuestión se comporta como si la conductividad de la substancia entre las placas fuese nula, es decir, se comporta como un condensador ideal. Por esta razón, en el espacio

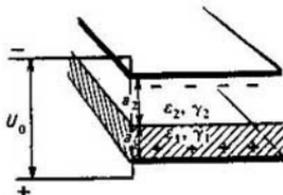


Fig. 246
Condensador plano de dos capas de fuga

entre las placas aparece el desplazamiento

$$D = \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2, \quad (57.6)$$

donde E_1 y E_2 son las intensidades del campo eléctrico en la primera y segunda capas, respectivamente. Ya que la diferencia de potencial entre las placas es U_0 ,

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = a_1 E_1 + a_2 E_2 = U_0, \quad (57.7)$$

donde en calidad de camino de integración de la primera placa a la segunda se toma el camino por la normal a las placas. De las fórmulas (57.6) y (57.7) se desprende que

$$D = \epsilon_1 \epsilon_2 U_0 / (\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2). \quad (57.8)$$

Toda la corriente en el momento inicial es corriente de desplazamiento. Es igual a la infinidad, ya que la diferencia de potencial se conecta instantáneamente y D crece rápidamente desde 0 hasta el valor, determinado por la fórmula (57.8). La densidad superficial de la carga en las placas también aumenta espontáneamente desde 0 hasta $\sigma_1 = -\sigma_2 = D$.

Las variaciones instantáneas del desplazamiento desde 0 hasta un valor finito se determinan por una velocidad muy grande de surgimiento de la polarización de la substancia bajo la influencia del campo exterior. La polarización aparece en el transcurso de tiempo, característico para los procesos intermoleculares.

En los siguientes momentos de tiempo, después de la conexión, la intensidad de la corriente de conducción comienza a crecer y al pasar un lapso suficiente ($t \rightarrow \infty$) se establece el valor equilibrado de la densidad de la corriente:

$$j = \gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2 = \gamma_1 \gamma_2 U_0 / (\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2), \quad (57.9)$$

donde se tuvo en cuenta la relación (57.7). Dado que la conductividad es heterogénea, en la superficie de separación de las capas existe una carga con densidad superficial

$$\sigma = D_{2n} - D_{1n} = \epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = (\epsilon_2 \gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2) U_0 / (\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2), \quad (57.10)$$

donde se hizo uso de la condición de frontera (17.36), ya que la intensidad del campo eléctrico no depende del tiempo.

En el régimen transitorio hasta lograr los valores estacionarios (57.9) y (57.10), las corrientes de conducción en la primera y segunda capas son diferentes y la densidad de la carga en la superficie de separación de las capas aumenta con el tiempo. La suma de las densidades volumétricas de las corrientes de conducción y de desplazamiento, denominada densidad volumétrica total de la corriente

$$j_t = \gamma_1 E_1 + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_1 E_1) = \gamma_2 E_2 + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_2 E_2), \quad (57.11)$$

tiene el mismo valor en ambas capas en el régimen transitorio. Después de excluir E_2 de (57.11), con ayuda de (57.7) obtenemos la ecuación para E_1 :

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{E_1}{\tau} = \frac{\gamma_2 U_0}{\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2}, \quad (57.12)$$

donde

$$\tau = (\epsilon_1 a_2 + \epsilon_2 a_1) / (\gamma_1 a_2 + \gamma_2 a_1). \quad (57.13)$$

Una ecuación analógica se obtiene también para E_2 .

La solución de estas ecuaciones para la condición inicial (57.8) es así:

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U_0}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} (1 - e^{-t/\tau}) + \frac{\epsilon_2 U_0}{\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2} e^{-t/\tau}, \quad (57.14)$$

$$E_2 = \frac{\gamma_1 U_0}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} (1 - e^{-t/\tau}) + \frac{\epsilon_1 U_0}{\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2} e^{-t/\tau}. \quad (57.15)$$

Para $t \rightarrow \infty$ estas soluciones, así como debe de ser, adquieren la forma (57.9).

La densidad superficial de la carga entre las capas varía según la ley

$$\sigma = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} (1 - e^{-t/\tau}) U_0. \quad (57.16)$$

Para $t = 0$ la densidad superficial de la carga $\sigma = 0$ y para $t \rightarrow \infty$, ella, como era de esperar, tiende a (57.10).

La densidad total de corriente se encuentra de la expresión (57.11), teniendo en cuenta (57.14), y (57.15):

$$j_t = \gamma_1 E_1 + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_1 E_1) = \gamma_2 E_2 + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_2 E_2) = \left[\frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2)} + \left(\gamma_1 - \frac{\varepsilon_1}{\tau} \right) \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 a_1 + \varepsilon_1 a_2} - \frac{\gamma_2}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} \right) e^{-t/\tau} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 a_1 + \varepsilon_1 a_2} \delta(t) \right] U_0, \quad (57.17)$$

donde $\delta(t)$ es la función delta. Ella surge a causa de que el desplazamiento D para $t = 0$ crece instantáneamente desde 0 hasta (57.8). Con otras palabras, al calcular la derivada respecto al tiempo en (57.17), tenemos

$$\frac{\partial (\varepsilon_1 E_1)}{\partial t} = \varepsilon_1 \frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 U_0}{\varepsilon_2 a_1 + \varepsilon_1 a_2} \delta(t), \quad (57.18)$$

y al calcular $\partial E_1 / \partial t$ en la fórmula (57.18), hacemos uso de la expresión (57.14), válida para todos $t > 0$.

El análisis realizado muestra que la distribución de las tensiones por diversas secciones del circuito al conectar la tensión exterior, puede diferenciarse esencialmente de la distribución en el régimen establecido. Esta circunstancia debe tomarse en consideración cuando se calculan los circuitos.

Al abrir el circuito, $j_t = 0$ y, por lo tanto, las ecuaciones (57.11) adquieren la forma:

$$\gamma_1 E_1 + \frac{\partial (\varepsilon_1 E_1)}{\partial t} = 0, \quad \gamma_2 E_2 + \frac{\partial (\varepsilon_2 E_2)}{\partial t} = 0. \quad (57.19)$$

Los campos se descomponen independientemente. En el régimen establecido, como se ve de las ecuaciones (57.14) y (57.15),

$$E_{10} = \gamma_2 U_0 / (\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2), \quad (57.20)$$

$$E_{20} = \gamma_1 U_0 / (\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2).$$

La solución de las ecuaciones (57.19) para las condiciones iniciales (57.20) tiene el aspecto:

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U_0}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} e^{-t/\tau_1}, \quad E_2 = \frac{\gamma_1 U_0}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} e^{-t/\tau_2}, \quad (57.21)$$

donde $\tau_1 = \varepsilon_1 / \gamma_1$, $\tau_2 = \varepsilon_2 / \gamma_2$.

La diferencia de potencial entre los terminales abiertos varía de la manera siguiente:

$$U = a_1 E_1 + a_2 E_2 = \frac{U_0}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} [\gamma_2 a_1 e^{-t/\tau_1} + \gamma_1 a_2 e^{-t/\tau_2}], \quad (57.22)$$

La densidad superficial de la carga en la superficie de separación de las capas en el condensador se determina por la fórmula

$$\sigma = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{U_0}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} [\varepsilon_2 \gamma_1 e^{-t/\tau_2} - \varepsilon_1 \gamma_2 e^{-t/\tau_1}]. \quad (57.23)$$

Al shuntar la fuente de las fem exteriores, $U_0 = 0$ y las ecuaciones (57.7) y (57.12) toman la forma:

$$-a_1 E_1 + a_2 E_2 = 0, \quad (57.24)$$

$$\frac{dE_1}{dt} + \frac{E_1}{\tau} = 0, \quad (57.25)$$

donde τ se define mediante la expresión (57.13). La condición inicial para $t = 0$ se halla de la expresión (57.10) teniendo en cuenta (57.24):

$$\varepsilon_2 E_{20} - \varepsilon_1 E_{10} = - \left(\frac{\varepsilon_2 a_1}{a_2} + \varepsilon_1 \right) E_{10} = \frac{\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} U_0. \quad (57.26)$$

La solución de la ecuación (57.25) con el valor inicial de E_{10} que se desprende de (57.26) es la siguiente:

$$E_1 = -E_2 a_2 / a_1 = - \frac{(\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2) a_2 U_0}{(\varepsilon_2 a_1 + \varepsilon_1 a_2) (\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2)} e^{-t/\tau}. \quad (57.27)$$

La intensidad de la corriente en el circuito y la densidad superficial de la carga entre las capas son iguales a:

$$I = \left[\frac{(\gamma_1 \varepsilon_2 - \gamma_2 \varepsilon_1)}{(\varepsilon_1 a_2 + \varepsilon_2 a_1)} \right]^2 \frac{a_1 a_2 U_0}{(\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2)} e^{-t/\tau} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 U_0}{\varepsilon_1 a_2 + \varepsilon_2 a_1} \delta(t) S, \quad (57.28)$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} U_0 e^{-t/\tau}. \quad (57.29)$$

El término con la función δ en (57.28) a causa de que en el momento del shuntado de la fuente de fem exteriores, el desplazamiento D cambió a salto desde el valor, correspondiente a la fórmula (57.9) para el régimen establecido, hasta el valor, correspondiente a las condiciones normales para $t = 0$ según la fórmula (57.26).

§ 58. Sistema de ecuaciones de Maxwell

Se examinan el sentido físico, las condiciones de aplicación, la completitud y compatibilidad del sistema de ecuaciones de Maxwell.

Sistema de ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones (57.5), (46.5), (36.4) y (17.30), obtenidas en los párrafos anteriores como consecuencia de la generalización de los hechos experimentales, forman el sistema de ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t, & \text{(I)} & \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, & \text{(III)} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t, & \text{(II)} & \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho. & \text{(IV)} \end{aligned} \quad (58.1a)$$

Estas ecuaciones, denominadas de campo, son aplicables para describir todos los fenómenos electromagnéticos macroscópicos. Al examinar una situación concreta es necesario tener en cuenta las propiedades electromagnéticas de los medios materiales. En muchos casos eso se logra usando las relaciones (17.31), (38.24) y (16.5):

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} \quad (V), \quad (58.1b)$$

llamadas por lo general, ecuaciones materiales. Sin embargo, existe una cantidad de fenómenos cuando las ecuaciones materiales tienen otro aspecto (por ejemplo, los fenómenos no lineales) y su composición representa una tarea científica independiente.

Sentido físico de las ecuaciones. La ecuación (I) expresa la ley por la que el campo magnético se origina por las corrientes de conducción y de desplazamiento, que son las dos fuentes posibles del campo magnético.

La ecuación (II) es la ley de inducción electromagnética e indica que el campo magnético variable puede ser una de las fuentes posibles que engendran el campo eléctrico. La segunda fuente del campo eléctrico son las cargas eléctricas, la creación del campo por las cuales se describe mediante la ecuación (IV) que expresa la ley de Coulomb. El sentido físico de la ecuación (III) se discute detalladamente con relación a (36.4).

Las ecuaciones materiales (I) son las relaciones entre los vectores del campo y de las corrientes que tienen en cuenta las propiedades del medio material. La consideración de las propiedades dieléctricas que se describen desde el punto de vista fenomenológico mediante la polarización, está en la constante dieléctrica ϵ ; la consideración de las propiedades magnéticas que se describen fenomenológicamente por la imanación, se encuentra en la permeabilidad magnética μ y la consideración de las propiedades conductoras del medio, en la conductividad γ .

Las ecuaciones del campo son lineales, que tienen en cuenta el principio de superposición que es un hecho experimental independiente.

Condiciones de aplicación de las ecuaciones. Durante la argumentación de las ecuaciones (58.1) se ve que son válidas para las siguientes condiciones:

- 1) los cuerpos materiales en el campo son inmóviles;
- 2) las constantes materiales ϵ , μ , γ pueden depender de las coordenadas, pero no deben ser funciones del tiempo y de los vectores del campo;
- 3) en el campo están ausentes los imanes permanentes y los cuerpos ferromagnéticos.

Para tener en cuenta el movimiento del medio lo más sencillo es obrar de esta manera. La presencia del medio en los fenómenos magnéticos y eléctricos se reduce, a fin de cuentas, a la existencia de cargas en el medio y su movimiento. Por eso puede partirse de las ecuaciones de Maxwell para el vacío ($\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$), y tener en cuenta el medio de la misma manera que se hizo en los §§ 17 y 38, pero tomando en consideración el movimiento de las cargas. En definitiva resulta que las ecuaciones del campo (58.1) se conservan sin cambiar de aspecto y toda la consideración del movimiento del medio se reduce a la modificación de las ecuaciones materiales (58.1b) que se hacen dependientes de la velocidad del medio y se complican considerablemente. Entonces terminan de ser relaciones entre dos magnitudes (por ejemplo, entre D y E , etc.), sino que «se agarran» una de otra. Verbigracia, la densidad de la corriente de conducción comienza a depender de la inducción del campo magnético, mientras que antes era función sólo de la intensidad del campo eléctrico, etc.

El campo fuera de los imanes permanentes y las sustancias ferromagnéticas, suponiendo que se conoce su imanación, puede describirse con ayuda de las ecuaciones de Maxwell. Pero resolver el problema en presencia de materiales ferromagnéticos en el espacio cuando, por ejemplo, se prefijan las corrientes, no se puede mediante las ecuaciones de Maxwell. Son inaplicables para este caso.

Completitud y compatibilidad del sistema de ecuaciones. Aplicando las ecuaciones materiales (58.1b) de las ecuaciones de campo (58.1a) pueden excluirse las magnitudes D , H y j , como consecuencia de lo cual se convierten en ecuaciones respecto a los vectores E y B , o sea, respecto a seis componentes independientes incógnitas de estas magnitudes. Por otra parte, la cantidad de ecuaciones escalares en (58.1a) es igual a ocho. Resulta que existen ocho ecuaciones para seis magnitudes incógnitas, es decir, la cantidad de ecuaciones supera el número de incógnitas, lo que es inadmisibile, ya que el sistema de ecuaciones aparenta estar repleto.

En cambio, en realidad el sistema no está repleto y no surge ninguna dificultad. Eso se determina por el hecho de que las ecuaciones (I) y (IV), (II) y (III) tienen los mismos corolarios diferenciales y por eso están ligadas entre sí, a pesar de que no se puede decir que algunas de ellas sean consecuencias de las otras.

Para demostrar que los corolarios diferenciales de las ecuaciones (II) y (III) son iguales, apliquemos a los dos miembros de la ecuación (II) la operación div y ambos miembros de la ecuación (III) diferenciamoslos respecto al tiempo. En los dos casos resulta una misma ecuación $\partial \text{div } B / \partial t = 0$.

Demostremos que teniendo en cuenta el principio de conservación de la carga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } j = 0 \quad (58.2)$$

la ecuación (IV) puede considerarse como corolario diferencial de la ecuación (I). Para ello apliquemos la operación div a los dos miembros de la ecuación (I):

$$\text{div } j + \partial \text{div } D / \partial t = 0, \quad (58.3)$$

donde $\text{div } \text{rot } H = 0$. Comparando (58.3) y (58.2), vemos que debe cumplirse la igualdad

$$\text{div } D = \rho, \quad (58.4)$$

que coincide con la ecuación (IV). Así queda demostrado que (IV) es un corolario diferencial de la ecuación (I), teniendo en cuenta el principio de conservación de la carga.

La presencia de dos enlaces diferenciales entre las ecuaciones (I — IV) hace este sistema compatible. Un análisis más detallado muestra que el sistema de ecuaciones es completo y su solución es unívoca para las condiciones iniciales y de frontera prefijadas. La demostración de la unicidad de la solución se reduce, en rasgos generales, a lo siguiente. Si existen dos distintas soluciones, su diferencia debido al carácter lineal de las ecuaciones de Maxwell, es también una solución, pero para las cargas y corrientes nulas, así como para las condiciones iniciales y de frontera nulas. De aquí, haciendo uso de la expresión para la energía del campo electromagnético y del principio de conservación de la energía, saca-

mos la conclusión de que la diferencia de las soluciones es idénticamente igual a cero, es decir, las soluciones son iguales. Así queda demostrada la unicidad de la solución de las ecuaciones de Maxwell.

§ 59. Principio de conservación de la energía del campo electromagnético. Flujo de energía

Se da la enunciación matemática del principio de conservación de la energía y se examina el concepto de flujo de energía electromagnética.

Enunciación. La energía del campo magnético y eléctrico se define mediante las fórmulas (18.16) y (47.27). En los §§ 19 y 39 se investigaron las fuerzas en los campos magnético y eléctrico, bajo cuya influencia se efectúa el trabajo. En el § 49 se determinó el trabajo de la corriente alterna y en el § 27 se estudió el efecto térmico de la corriente. El principio de conservación de la energía requiere que todos esos procesos sean enunciados en forma de principio de conservación y transformación mutua de distintas formas de energía. Puesto que en este caso las fuentes de producción de la energía electromagnética están separadas en el espacio de los lugares de su consumo, surge la idea sobre el movimiento de la energía que se caracteriza por su flujo.

Examinemos cierto volumen V cerrado en el que existen el campo electromagnético y las corrientes (fig. 247). El calor de Joule que se desprende por las corrientes en este volumen es

$$P = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (59.1)$$

Para simplificar el cálculo, se supone que no hay transformaciones algunas de energía en el volumen. Poniendo en (59.1) la expresión para \mathbf{j} de la ecuación (58.1a), obtenemos

$$P = \int_V \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} dV - \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV. \quad (59.2)$$

Según la fórmula (A.15), tenemos

$$\text{div } \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} \quad (59.3)$$

y, por lo tanto,

$$P = - \int_V \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} dV - \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV - \int_V \text{div } \mathbf{E} \times \mathbf{H} dV, \quad (59.4)$$

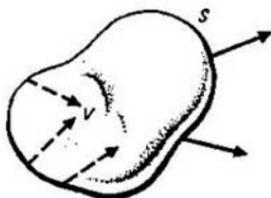


Fig. 247
Para la enunciación del principio de conservación de la energía

donde $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$. Teniendo en cuenta que $\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})}{\partial t}$ y $\frac{\mathbf{E} \cdot \partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})}{\partial t}$, y transformando la última integral en (59.4) por el teorema de Gauss—Ostrogradski en integral respecto a la superficie σ , que limita el volumen V , en definitiva obtenemos

$$P = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \right] - \int_{\sigma} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\sigma. \quad (59.5)$$

Aquí la superficie se designa por σ para conservar la letra S con el fin de denotar la densidad del flujo de la energía electromagnética.

Flujo de energía.

La magnitud

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \quad (59.6)$$

caracteriza la energía electromagnética, incluida en el volumen V . La magnitud

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}} \quad (59.7)$$

es la densidad del flujo de energía a través de la superficie que limita el volumen V y se denomina vector de Poynting. Fue obtenida por J. H. Poynting (1852—1914) en 1884. Pero diez años antes, en 1874, N. A. Umov (1846—1915) realizó una investigación general del movimiento de la energía en los cuerpos, que se caracterizaba por el correspondiente flujo de energía. Por esta razón el vector (59.7) se llama también vector de Umov—Poynting. La igualdad (59.4) es más cómodo escribirla así

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t} = -P - \int_{\sigma} \mathbf{S} \cdot d\sigma}, \quad (59.8)$$

es decir, el cambio de la energía del campo electromagnético en el volumen transcurre debido al trabajo de las corrientes de conducción en dicho volumen y del flujo de energía que atraviesa la superficie que limita el volumen. Si la energía del campo eléctrico no varía, $\partial W / \partial t = 0$, entonces [véase (59.8)]

$$P = - \int_{\sigma} \mathbf{S} \cdot d\sigma. \quad (59.9)$$

Por consiguiente, todo el trabajo que se efectúa en un volumen cerrado se realiza a cuenta del flujo de energía electromagnética que atraviesa la superficie que limita el volumen.

La igualdad (59.8) expresa el principio de conservación de la energía del campo electromagnético.

Es necesario subrayar que (59.8) es precisamente la expresión del principio de conservación de la energía, pero de ninguna manera su demostración.

Al confeccionar la teoría de la electricidad y el magnetismo se supone que está prefijado el principio de conservación de la energía como una ley general de la naturaleza. Partiendo del principio de conservación de la energía como ley general, puede hallarse la expresión matemática para la densidad volumétrica de la energía de los campos eléctrico y magnético y la densidad de la energía de los campos eléctricos y magnéticos y la densidad del flujo de energía electromagnética. También se establece la relación entre ellas que expresa la idea del movimiento de la energía electromagnética. En la fórmula (59.8) la magnitud física P toma en consideración la posibilidad de transformar mutuamente las diversas formas de energía.

§ 60. Movimiento de la energía electromagnética a lo largo de las líneas de transporte

Se examinan el cuadro físico del movimiento de la energía a lo largo de las líneas de transporte y las características principales de las líneas de transporte.

Mecanismo de compensación de las pérdidas de energía en calor de Joule. Examinemos una parte del conductor de sección circular de radio r , a lo largo del cual

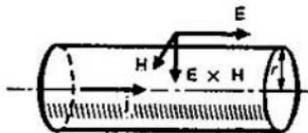


Fig. 248
Mecanismo de compensación de las pérdidas de corriente en liberar el calor de Joule

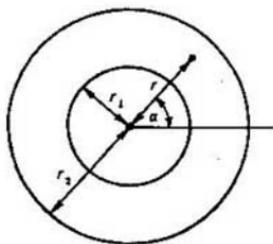


Fig. 249
Transmisión de la energía electromagnética con ayuda de la corriente por un cable

pasa una corriente continua de densidad volumétrica j (fig. 248). Según la ley de Ohm en forma diferencial la intensidad del campo eléctrico, paralela al eje del conductor es igual a

$$E = j/\gamma. \quad (60.1)$$

Debido a la condición de frontera respecto a la continuidad de las componentes tangenciales de la intensidad del campo eléctrico, un campo semejante existe fuera del conductor en las inmediaciones de su superficie.

Calculemos por la fórmula (59.9) el flujo de energía electromagnética que atraviesa la superficie cerrada del cilindro, cuya superficie lateral coincide con

la superficie del conductor de longitud l y de bases sirven las secciones circulares del conductor.

La intensidad del campo magnético en la superficie del conductor está dirigida por la tangente a la superficie, perpendicular al eje del conductor (y al vector \mathbf{j}) (fig. 248) y es igual a

$$H = j\pi r^2/(2\pi r) = j/(2r). \quad (60.2)$$

De esta manera, el vector de Poynting (59.7) está orientado por el radio respecto al eje del conductor y es igual a

$$S = EH = j^2 r/(2\gamma). \quad (60.3)$$

Eso significa que la energía electromagnética confluye en el conductor del espacio circundante a través de su superficie lateral. El flujo de energía a través de las bases del cilindro está ausente. En la parte del conductor de longitud l en el transcurso de t s confluye la energía

$$P = S \cdot 2\pi r l = (j^2/\gamma) \cdot \pi r^2 l. \quad (60.4)$$

Según la ley de Joule—Lenz, en la longitud l del conductor durante t s se desprende una cantidad de calor

$$P' = (j^2/\gamma) \pi r^2 l. \quad (60.5)$$

La comparación de (60.4) y (60.5) muestra que toda la energía que se libera en forma de calor en el conductor, al recorrerlo una corriente eléctrica, ingresa del espacio circundante a través de la superficie lateral del conductor. Por lo tanto, la energía que se transmite mediante la corriente eléctrica, se mueve en el espacio que rodea el conductor. Los cables desempeñan el papel de guías, a lo largo de los cuales se mueve la energía electromagnética, con la particularidad de que la densidad del flujo de energía en cualquier punto del espacio se determina por el vector de Poynting.

Movimiento de la energía a lo largo del cable. Por el cable central la corriente se mueve en una dirección, mientras que por la envoltura del cable, en dirección contraria (fig. 249). Entre el alma central y la envoltura se encuentra un dieléctrico. Para simplificar los cálculos supongamos que la resistencia de los hilos del cable es insignificante, por lo que se puede menospreciar, o sea, puede considerarse que la energía se transporta sin pérdidas. Entonces el potencial a lo largo del alma central y la envoltura es constante y la variación del potencial entre ellos transcurre en el consumidor de la energía y en la fuente (fem exterior). Sea la caída del potencial en el consumidor de energía igual a U . Eso significa que la diferencia de potencial entre el alma y la envoltura es U . Por lo tanto, entre ellos existe un campo eléctrico. Debido a la simetría axial del problema y a que la corriente circula a lo largo del cable sin resistencia alguna, la intensidad de dicho campo está dirigida por el radio, mientras que la componente tangencial E_{α} está ausente. El eje Z del sistema de coordenadas cilíndricas coincide con el eje del cable. Las líneas de fuerza del campo magnético son circunferencias concéntricas con centro en el eje del cable. La intensidad del campo difiere de cero sólo en el espacio entre el alma y la envoltura.

pués fuera del cable es nula. La componente radial del vector de Poynting es nula. La ecuación de Maxwell $\text{div } D = \rho$ para el espacio entre el alma y la envoltura adquiere el aspecto

$$\text{div } D = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) = 0, \quad (60.6)$$

donde se utilizó la escritura de la operación de la divergencia en coordenadas cilíndricas y se tomó en consideración que las componentes tangencial y axial del vector E no existen. De la expresión (60.6) obtenemos

$$E_r = a_0/r, \quad (60.7)$$

donde a_0 es la constante de integración, definida por las condiciones del problema. La diferencia de potencial entre el alma y la envoltura es

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = a_0 \ln(r_2/r_1), \quad (60.8)$$

que permite hallar el valor de la constante $a_0 = U/\ln(r_2/r_1)$. Teniendo en cuenta este valor, la fórmula (60.7) adquiere la forma

$$E_r = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r}. \quad (60.9)$$

La intensidad del campo magnético en el cable es

$$H_\alpha = I/(2\pi r), \quad (60.10)$$

como se desprende directamente de la ley de la corriente total, teniendo presente la simetría axial del campo. De las fórmulas (60.9) y (60.10) obtenemos

$$S_z = E_r H_\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{UI}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r^2}. \quad (60.11)$$

Esta magnitud representa en sí la densidad del flujo de energía electromagnética, dirigido paralelamente al eje del cable en el espacio entre el alma y la envoltura. Fuera del cable, así como en el alma central y en la envoltura no existe ningún flujo de energía, ya que ahí prácticamente no hay campo eléctrico para la suposición tomada de que no existe resistencia alguna. Durante 1 s la energía electromagnética que atraviesa la sección transversal del cable, es

$$P = \int_0^{2\pi} S_z d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \cdot \frac{UI}{\ln(r_2/r_1)} = UI. \quad (60.12)$$

Para la intensidad de la corriente I que recorre la carga a una diferencia de potencial U , se disipa una potencia

$$P_c = IU. \quad (60.13)$$

La comparación de las fórmulas (60.12) y (60.13) muestra que *toda la energía que utiliza el consumidor, se mueve a lo largo del cable en el espacio entre el alma y la envoltura en forma de energía electromagnética.*

En el sentido principal no cambia nada para la corriente alterna de frecuencia no muy alta. Si la corriente en el cable cambia su dirección por la contraria, las componentes E_r y H_α de los vectores del campo cambian también de dirección, permaneciendo el sentido del vector de Poynting invariable. Por eso, a pesar de que la dirección de la corriente varía por la contraria, el sentido del movimiento de la energía electromagnética se conserva: ésta se mueve todo el tiempo de la fuente al consumidor.

En otras líneas de transporte el cuadro del movimiento de la energía, en el sentido principal, no cambia, únicamente se complica la configuración de los campos y los caminos, por los que se mueve la energía.

Línea de transporte de la corriente alterna. Para frecuencias no muy altas y distancias bastante pequeñas, cuando puede considerarse cumplidas las condiciones casiestacionarias, las corrientes en la línea se describen totalmente por

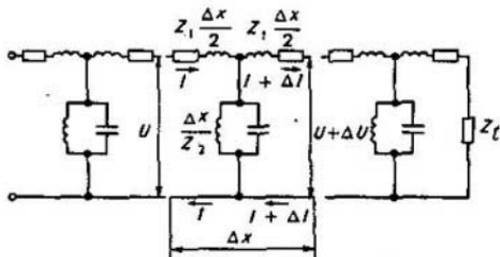


Fig. 250
Circuito equivalente de la línea de transmisión de corrientes
alternas

los métodos expuestos en el capítulo 8. Al no observarse las condiciones casiestacionarias, el cuadro se complica, lo que es obvio ya de la circunstancia de que la intensidad de la corriente en un mismo momento de tiempo es distinta en diferentes partes de la línea de transporte. Cualquier parte del conductor posee ciertas inductancia y capacidad, lo que convierte toda la línea de transporte en un circuito eléctrico con resistencias, capacidades e inductancias distribuidas continuamente.

Ecuaciones para la intensidad de la corriente y la tensión. Ante todo es necesario hallar la ley, por la que la intensidad de la corriente y la tensión entre los conductores varía a lo largo de la línea. La fig. 250 muestra el circuito equivalente de la distribución de la inductancia, capacidad y resistencia. Designemos la inductancia, capacidad y resistencia, correspondientes a 1 m de longitud de la línea, por L , C y R . Las impedancias Z_1 y Z_2 se dan también respecto a 1 m de longitud. La parte Δx de la línea posee una impedancia, acoplada en serie que representa una resistencia compleja

$$Z_1 \Delta x = (R_1 + i\omega L) \Delta x, \quad (60.14)$$

y con la impedancia Z_2 , conectada en paralelo, que ofrece una conductividad compleja

$$\frac{1}{Z_2} \Delta x = \left(\frac{1}{R_2} + i\omega C \right) \Delta x. \quad (60.15)$$

Supongamos que al comienzo de la parte de la línea Δx se aplica una tensión U y la intensidad de la corriente es I . Al final de esa parte dichas magnitudes son, respectivamente, iguales a $U + \Delta U$, $I + \Delta I$. Las pérdidas a través del aislamiento aquí y en lo sucesivo no se tienen en cuenta.

Apliquemos la regla de Kirchhoff para el circuito exterior de toda la parte, tomando como dirección positiva, el recorrido en sentido dextrógiro:

$$-Z_1 \frac{\Delta x}{2} (I + \Delta I) - Z_1 \frac{\Delta x}{2} I = U + \Delta U - U. \quad (60.16)$$

Después de dividir (60.16) por Δx , obtenemos

$$-Z_1 \Delta I / 2 - Z_1 I = \Delta U / \Delta x. \quad (60.17)$$

Si $\Delta x \rightarrow 0$, el primer sumando en el primer miembro de la fórmula (60.17) tiende a cero ($\Delta I \rightarrow 0$). Entonces,

$$\frac{dU}{dx} = -Z_1 I. \quad (60.18)$$

De manera análoga, la regla de Kirchhoff, aplicada al circuito izquierdo que contiene la impedancia $Z_2/\Delta x$, nos da

$$\frac{Z_2}{\Delta x} \Delta I - Z_2 \frac{\Delta x}{2} I = -U, \quad (60.19)$$

de donde para $\Delta x \rightarrow 0$ obtenemos

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{1}{Z_2} U. \quad (60.20)$$

Al diferenciar los dos miembros de la expresión (60.18) respecto a x y expresar dI/dx con ayuda de la fórmula (60.20), hallamos la siguiente ecuación para U :

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{Z_1}{Z_2} U. \quad (60.21)$$

Análogamente, la diferenciación de la fórmula (60.20) respecto a x y el uso de (60.18), conduce a la ecuación para la intensidad de la corriente:

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = \frac{Z_1}{Z_2} I. \quad (60.22)$$

Las ecuaciones (60.21) y (60.22) se denominan **ecuaciones de la línea de transporte**.

Impedancia característica y constante de propagación. La solución general de las ecuaciones de las líneas de transporte tiene la forma (por ejemplo, para U):

$$U = A e^{-\alpha x} + B e^{\alpha x}, \quad (60.23)$$

con la particularidad de que para α , denominada constante de propagación, después de poner (60.23) en (60.21), hallamos la expresión:

$$\alpha = \sqrt{Z_1/Z_2}. \quad (60.24)$$

El mismo aspecto tiene la solución de la ecuación (60.22):

$$I = A_1 e^{-\alpha x} + B_1 e^{\alpha x}. \quad (60.25)$$

Poniendo las soluciones de (60.23) y (60.25) en (60.18) y (60.20), encontramos el enlace entre las constantes A , B , A_1 , B_1 :

$$A_1 = A/Z_1, \quad B_1 = -B/Z_1, \quad (60.26)$$

donde

$$Z_1 = \sqrt{Z_1 Z_2} \quad (60.27)$$

es la impedancia característica de la línea. Para aclarar su sentido, supongamos que la línea de longitud l termina con una carga, cuya impedancia es igual a la característica (fig. 250). Basándose en las igualdades (60.23)–(60.27) para la tensión en la salida de la línea, es decir, en la carga Z_1 , puede escribirse:

$$U_c = I_c Z_1, \quad (60.28)$$

o bien

$$A e^{-\alpha l} + B e^{\alpha l} = Z_1 \left(\frac{A}{Z_1} e^{-\alpha l} - \frac{B}{Z_1} e^{\alpha l} \right). \quad (60.29)$$

De aquí se desprende que $B = 0$, $A = U_{en}$, donde U_{en} es la tensión en la entrada de la línea para $x = 0$. Así pues, la tensión y la intensidad de la corriente en la línea se determinan por las expresiones:

$$U = U_{en} e^{-\alpha x}, \quad I = U_{en} e^{-\alpha x} / Z_1. \quad (60.30)$$

Por lo tanto, la impedancia de entrada de la línea es igual a la característica:

$$Z_{en} = U_{en} / I_{en} = Z_1. \quad (60.31)$$

Esto significa que si la línea termina con una carga que posee una impedancia característica, su impedancia de entrada es igual a la característica independientemente de la longitud, es decir, en este caso la corriente se transmite por la línea sin cambiar la relación entre la tensión y la intensidad de la corriente.

Resistencia característica. En la mayoría de los casos importantes las resistencias óhmicas de los elementos de las líneas son mucho menores que las inductancias y capacitancias correspondientes ($R_1 \ll \omega L$, $1/R_2 \ll \omega C$) y se pueden menospreciar. Entonces la impedancia característica para esta condición es:

$$Z_1 = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{\frac{R_1 + i\omega L}{1/R_2 + i\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (60.32)$$

es una magnitud real, es decir, es una resistencia, llamada resistencia característica.

La resistencia característica depende de la forma y las dimensiones de los conductores, de la distancia entre ellos y otros factores, de los que dependen la capacidad y la inductancia de las partes de la línea. Verbigracia, la resistencia característica de los conductores cilíndricos paralelos de radio a , la distancia entre cuyos ejes es D , es igual a

$$Z_1 = 276 \log (D/a). \quad (60.33)$$

Se considera que los conductores se encuentran en un medio, cuya constante dieléctrica es próxima a la unidad (vacío, aire, etc.).

Velocidad de propagación. Más arriba se examinó el caso de distribución de la intensidad de la corriente y de la tensión a lo largo de la línea en cierto momento de tiempo. Si en la entrada la intensidad de la corriente y la tensión varían periódicamente con una frecuencia ω , en todas las partes de la línea ellas cambian con la misma frecuencia. Para las condiciones cuando la impedancia característica es una magnitud real (60.32), la constante α [véase (60.24)] es puramente imaginaria:

$$\alpha = i\omega \sqrt{LC}. \quad (60.34)$$

Por eso, tomando la dependencia de las magnitudes respecto al tiempo en forma de $\exp i\omega t$, se puede, basándose en (60.30), escribir:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= U_0 \exp [i(\omega t - \omega \sqrt{LC} x)], \\ I(x, t) &= (U_0 / \sqrt{LC}) \exp [i(\omega t - \omega \sqrt{LC} x)]. \end{aligned} \quad (60.35)$$

La fórmula (60.35) describe la onda con una frecuencia que se propaga a lo largo del eje X con una velocidad

$$v = 1/\sqrt{LC}. \quad (60.36)$$

Recordemos que en esta fórmula L y C son la capacidad y la inductancia de la línea de transporte, correspondientes a 1 m de longitud. Para dos conductores cilíndricos finos de radios a que se encuentran en el vacío a una distancia D el uno del otro, las capacidades e inductancias por 1 m de longitud de la línea son iguales a:

$$C = \epsilon_0 / [2 \ln (D/a)], \quad L = 2\mu_0 \ln (D/a) \quad (60.37)$$

y por eso la velocidad de propagación de la onda es

$$v = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = c. \quad (60.38)$$

Reflexión. Si la resistencia de la carga es igual a la característica, toda la energía que se transporta por la línea, se absorbe por la carga. Se dice que la carga y la línea de transporte están adaptadas entre sí. *Si no existe tal adaptación, parte de esa energía se refleja de la carga y se mueve por la línea al encuentro del flujo inicial de energía.*

Examinemos como ejemplo una línea de transporte, cortocircuitada en el extremo, o sea, cuando $U_c = 0$. Las ecuaciones (60.23) y (60.25) adquieren el

aspecto:

$$0 = Ae^{-i\beta l} + Be^{i\beta l}, \quad (60.39)$$

$$I = Ae^{-i\beta l/\rho} - Be^{i\beta l/\rho}, \quad (60.40)$$

donde para simplificar la escritura de las fórmulas se introducen las designaciones: $\beta = \omega\sqrt{LC}$ y $\rho = \sqrt{L/C}$. Después de resolver estas ecuaciones con respecto a A y B , obtenemos

$$A = I_0 \rho e^{i\beta l/2}, \quad B = -I_0 \rho e^{-i\beta l/2}. \quad (60.41)$$

Por eso las expresiones (60.23) y (60.25) para la tensión y la intensidad de la corriente a lo largo de la línea de transporte se escriben de la siguiente manera:

$$U = I_0 \frac{\rho}{2} [e^{-i\beta(x-l)} - e^{i\beta(x-l)}], \quad (60.42)$$

$$I = \frac{I_0}{2} [e^{-i\beta(x-l)} + e^{i\beta(x-l)}]. \quad (60.43)$$

Puesto que la dependencia de las magnitudes respecto al tiempo se caracteriza por el factor $\exp(i\omega t)$, puede sacarse la conclusión de que los primeros sumandos en el segundo miembro de estas fórmulas describen la onda que se propaga en sentido positivo del eje X y los segundos, en sentido negativo (es decir, describen la onda reflejada del extremo cortocircuitado de la línea). De aquí puede deducirse que no sólo la imposibilidad de transportar toda la energía a la carga en ausencia de la adaptación a la línea dicta la necesidad de la adaptación. Si las señales se transmiten en forma de impulsos, las reflexiones sucesivas de la carga y luego de nuevo de la entrada, provocan una distorsión tan fuerte de la señal, que llega a la carga, que resulta difícil trabajar con ella.

La energía que se transmite por la corriente eléctrica, se mueve en el espacio que rodea a los conductores. Estos últimos desempeñan el papel de guías, a lo largo de los cuales se mueve la energía electromagnética. El calor de Joule en el conductor se desprende a causa de la energía electromagnética que se suministra al conductor mediante su superficie del espacio circundante.

¿Qué significa la impedancia característica de la línea y la constante de propagación? Describanse los procesos físicos que conducen a la reflexión de la energía de la carga.

¿Para qué condición la reflexión está ausente y toda la energía transmitida por la línea se absorbe por la carga?

§ 61. Emisión de las ondas electromagnéticas

Se da la solución del problema sobre la emisión de un oscilador lineal. La solución obtenida se generaliza para el caso de un electrón no relativista acelerado al azar. Se examina la reacción de la emisión.

Ecuación para el potencial vectorial. La inducción y la intensidad de los campos alternativos se expresan mediante las fórmulas (46.8) y (46.12) por medio

de los potenciales vectorial y escalar, para encontrar los cuales es necesario tener ecuaciones.

Partimos de la ecuación de Maxwell (58.1, I) que es más cómodo escribirla así

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (61.1)$$

donde para simplificar se supone que μ y ε no dependen de las coordenadas. Poniendo (46.8) y (46.12) en (61.1), obtenemos

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu \mathbf{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (61.2)$$

Tomando en consideración que $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$, transformemos (61.2) a la forma

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (61.3)$$

Utilizando que los potenciales son multiformes y están definidos con una precisión de la transformación de calibración (46.13), se puede imponerles cierta condición. Para simplificar al máximo las ecuaciones (61.3) esta condición se elige en forma de igualdad

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (61.4)$$

denominada condición de Lorentz. En definitiva, [véase (61.3)], obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} \quad (61.5)$$

la ecuación de d'Alembert.

Elección de la función de calibración χ . Al imponer sobre los potenciales las condiciones de Lorentz (61.4), la función con cuya ayuda se efectúa la transformación de calibración de los potenciales (46.13), no puede elegirse al azar. Es necesario que la condición de Lorentz (61.4) se conserve durante las transformaciones de calibración. Tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A}' + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi'}{\partial t} &= \operatorname{div} (\mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi) + \\ &+ \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\varphi - \partial \chi / \partial t) = \operatorname{div} \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\nabla^2 \chi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

De esta manera, la condición de Lorentz es invariante sólo para las transformaciones de calibración con la función χ que satisface la ecuación

$$\nabla^2 \chi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \quad (61.6)$$

La ecuación de este tipo se denomina ecuación de onda o ecuación homogénea de d'Alembert.

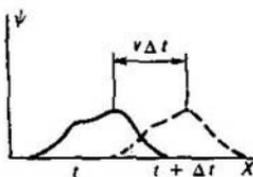


Fig. 251

Variación con el tiempo de la solución para la ecuación unidimensional de la onda

Ecuación para el potencial escalar. Poniendo (46.12) en la ecuación de Maxwell (58.11), hallamos

$$\operatorname{div} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (61.7)$$

Al excluir de aquí $\operatorname{div} \mathbf{A}$ con ayuda de (61.4), obtenemos en definitiva la siguiente ecuación para el potencial escalar:

$$\nabla^2 \varphi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (61.8)$$

Así pues, para las proyecciones cartesianas del potencial vectorial (61.5) y para el escalar se obtiene una misma ecuación tipo

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -f(\mathbf{r}, t), \quad (61.9)$$

donde en lugar de Φ pueden ponerse A_x, A_y, A_z, φ y en lugar de $f, \mu_j, \mu_j, \mu_j, \rho/\epsilon$, respectivamente. Aclaremos el sentido de $\epsilon\mu = 1/v^2$.

Solución de la ecuación de onda. Ante todo examinemos las soluciones de la ecuación (61.9) para $f = 0$, es decir, de una ecuación homogénea. Tomemos el caso unidimensional $\Phi = \Phi(x)$. La ecuación (61.9) tiene la forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (61.10)$$

Comprobando directamente nos cercioramos de que la solución de la ecuación (61.10) es cualquier función Φ del argumento $t - x/v$ ó $t + x/v$. Comprobemos eso, por ejemplo, para la función $\Phi(t - x/v)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi', \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \Phi'', \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{1}{v} \Phi', \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \Phi'', \quad (61.11)$$

donde Φ' es la derivada respecto al argumento de la función. De (61.11) se desprende que la función arbitraria $\Phi(t - x/v)$ satisface en realidad la ecuación (61.10). Análogamente se demuestra que la función $\Phi(t + x/v)$ también satisface esta ecuación.

El sentido de estas soluciones es muy sencillo. La función $\Phi(t - x/v)$ es en sí una onda que se mueve en dirección de los valores positivos del eje X con una velocidad v . En efecto,

$$t - x/v = t + \Delta t - (x + \Delta x)/v \quad (61.12)$$

para $\Delta x/\Delta t = v$. Esto significa que si en el momento de tiempo t la función $\Psi(t - x/v)$ se representa como cierta curva (fig. 251), en el momento de tiempo $t + \Delta t$ se da mediante la misma curva pero desplazada en dirección de los valores positivos del eje X en $v \Delta t$, o sea, es una onda que se mueve en dirección de los valores positivos del eje X con una velocidad v . Por esta razón se introdujo la designación $\epsilon\mu = 1/v^2$.

De la misma manera se muestra que la función $\Phi(t + x/v)$ es de por sí una onda que se propaga con una velocidad v en dirección de los valores negativos del eje X .

Examinemos la solución de la ecuación de onda para el caso esféricamente simétrico, es decir, considerando que en (61.9) $f = 0$ y $\Phi = \Phi(r)$ donde r es la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto en cuestión. En este caso Φ no depende de los ángulos y el operador de Laplace tiene la forma

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi). \quad (61.13)$$

Por eso la ecuación de onda para Φ se escribe como

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\Phi) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2} = 0. \quad (61.14)$$

La solución de esta ecuación para $r\Phi$, lo mismo que en el caso anterior, son las funciones arbitrarias de los argumentos $t - x/v$ y $t + x/v$, es decir, la expresión general para Φ es así:

$$\Phi(r, t) = \frac{\Psi_1(t - r/v)}{r} + \frac{\Psi_2(t + r/v)}{r}. \quad (61.15)$$

La función $\Psi_1(t - r/v)$ es una onda que se mueve en sentido radial desde el origen de coordenadas con una velocidad v . La forma de la onda no varía, mientras que la amplitud disminuye como $1/r$. Esta onda se denomina *divergente*. La función $\Psi_2(t + r/v)$ representa una onda, convergente hacia el origen de coordenadas.

Volviendo a las ecuaciones (61.5) y (61.8) vemos que los potenciales del campo y, por lo tanto, los propios campos se propagan en un espacio libre ($\rho = 0$) con una velocidad $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. En el vacío $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$, por eso la velocidad de propagación de los campos es igual a la velocidad de la luz $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Así pues, *las ondas electromagnéticas y todas las variaciones de los campos magnético y eléctrico se propagan en el vacío con la velocidad de la luz*. Pero eso significa que las interacciones electromagnéticas se propagan con la velocidad de la luz. Por ejemplo, si dos cargas puntuales están en reposo a una distancia r y una de las cargas en cierto momento de tiempo se desplaza de su sitio, la otra carga «siente» este desplazamiento al cabo de un tiempo $\tau = r/c$.

Potenciales de avance y retardados. Teniendo en cuenta las propiedades de las soluciones de la ecuación de onda, es de esperar que la solución de las ecuaciones (61.5) y (61.8) para los potenciales de campos variables se diferencie de las soluciones de las ecuaciones (37.11a) y (14.35) para los potenciales de los campos constantes solamente en que es necesario tomar en consideración la velocidad finita de propagación de las interacciones electromagnéticas. Con otras palabras, *la carga en movimiento y el elemento de la corriente alterna crean en cada punto del espacio circundante un mismo potencial como si la carga fuese inmóvil y la corriente continua, pero diferenciándose en que dicho potencial en cada punto se origina no en el mismo momento de tiempo, sino más tarde, en el tiempo de retardo, es decir, en el tiempo, necesario al campo electromagnético*

para propagarse desde la fuente hasta el punto de observación. Por esta razón, para las cargas y corrientes que se encuentran en la zona finita del espacio en lugar de las fórmulas (37.11a) y (14.35) obtenemos las siguientes fórmulas:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{j(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (61.16)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (61.17)$$

donde $v = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu}$; $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ es la distancia entre el punto en que se calcula el potencial y el elemento dV' del volumen de integración.

En el momento de tiempo dado en el punto dado el potencial no se determina por la posición y el valor de la carga y de las intensidades de la corriente en el momento de tiempo dado, sino que por sus posiciones y valores en los momentos antecedentes de tiempo que se definen teniendo en cuenta la velocidad de propagación del campo electromagnético. Verbigracia, sea que cierta carga eléctrica se aproxime a cualquier punto. El potencial escalar, creado por la carga en el punto no se determina por la distancia entre la carga y el punto en dicho momento de tiempo, sino que por la distancia en un momento de tiempo anterior, es decir, por una distancia mayor. Si la velocidad de la carga es próxima a la velocidad de la luz, la diferencia entre las distancias puede ser bastante considerable.

Aquí no se cita la verificación formal de que las fórmulas (61.16) y (61.17) satisfacen las ecuaciones (61.5) y (61.8). En principio, eso se hace de la misma manera que para las soluciones de (14.35) y (37.11a).

Los potenciales tipo (61.16) y (61.17) se denominan retardados, porque describen los potenciales en un momento de tiempo t más tardío en comparación con el momento de tiempo $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$ para las cargas y corrientes que han creado el mencionado potencial. Formalmente, las soluciones de las ecuaciones (61.5) y (61.8) son también las soluciones análogas a (61.16) y (61.17), pero sustituyendo los argumentos de tiempo $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$ por $t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$, lo que corresponde a dos signos posibles en los argumentos de las soluciones (61.15) de la ecuación de onda. La solución con el signo «+» en el argumento carece de un sentido físico claro, ya que corresponde formalmente a la situación en la que se crea primero el potencial y luego aparecen las cargas y corrientes que le corresponden, es decir, el potencial avanza las cargas y corrientes. Por esta razón, se le da el nombre de potencial de avance. Con el fin de obtener las soluciones de los problemas con condiciones de frontera mediante el potencial de avance, se tiene que utilizar a la par con el potencial retardado. Esto puede comprenderse de lo siguiente. Supongamos que es necesario hallar el campo electromagnético que satisfaga ciertas condiciones en la superficie de separación. Está claro que en los puntos dentro del volumen el campo debe ser tal, que al alcanzar la frontera en un momento de tiempo más tardío, poder tener valores, dados por las condiciones de frontera. Es obvio que al resolver semejantes problemas es necesario guiarse no sólo del pasado, sino que tomar en consideración lo que debe suceder en el futuro, o sea, es indispensable hacer uso de los potenciales de avance. Pero eso no significa de ninguna manera la perturbación del principio de causalidad como se ve directamente del razonamiento, expuesto antes. Desde el

punto de vista físico eso es simplemente la respuesta a la pregunta de qué debe suceder en el pasado para que en la actualidad sea como es para las leyes conocidas de desarrollo.

Dipolo hertziano. Este es un dipolo eléctrico, cuyo momento varía con el tiempo. De prototipo real del dipolo hertziano sirve un conjunto de dos bolas metálicas (fig. 252) unidas por un conductor. Si a las bolas se les comunican cargas iguales, pero de signo contrario y se abandona el sistema a su suerte, tendrá lugar un proceso oscilante de la transferencia de cargas entre las bolas.

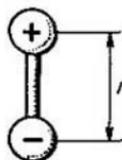


Fig. 252
Modelo de un dipolo

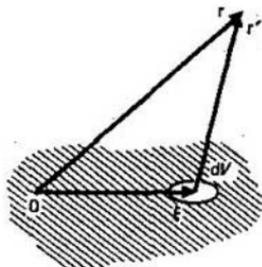


Fig. 253
Para calcular el potencial del dipolo

Las oscilaciones de la corrientete serán amortiguadas. Si la resistencia de los conductores es pequeña, así como las pérdidas en la emisión durante un período, en el transcurso de una cantidad bastante grande de períodos puede prescindirse del amortiguamiento. Entonces a distancias, mucho mayores que l , el sistema puede examinarse como un dipolo, cuyo momento varía con el tiempo. Hertz hizo uso de semejante dipolo, obteniendo por primera vez por vía experimental las ondas electromagnéticas. Por esta razón, recibió el nombre de dipolo hertziano.

Potencial escalar del dipolo que varía con el tiempo. El potencial del dipolo se determina por la fórmula (61.17) que es más cómodo escribirla como

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\xi, t - r'/c)}{r'} dV_\xi, \quad (61.18)$$

donde se supone que el dipolo se encuentra en el vacío ($\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$). Al calcular (61.18) el origen de coordenadas es útil colocarlo en la zona de propagación de la carga. La posición del origen en los márgenes de la zona de propagación de la carga no tiene importancia, ya que las dimensiones del dipolo se suponen tan pequeñas, como se quiera en comparación con las distancias hasta los puntos en que se estudia su campo. La posición del punto en que se calcula el potencial del campo se caracteriza por el radio vector \mathbf{r} ; ξ es el radio vector del elemento de volumen dV_ξ r' es la distancia entre el elemento de volumen dV_ξ y el punto de observación (fig. 253).

Examinemos el potencial a grandes distancias del dipolo ($\xi/r \ll 1$). Teniendo en cuenta que

$$r' = r - \xi, \quad r' = \sqrt{r^2 - 2r \cdot \xi + \xi^2}, \quad (61.19)$$

se puede la expresión para r' desarrollar en serie respecto a ξ/r y limitarnos con el término lineal del desarrollo:

$$r' = r \left(1 - 2 \frac{r \cdot \xi}{r^2} - \frac{\xi^2}{r^2} \right)^{1/2} = r - \frac{r \cdot \xi}{r} + \dots \quad (61.20)$$

Haciendo uso de esta fórmula, descompongamos el integrando en (61.18) en serie de Taylor en el punto r :

$$\frac{\rho(\xi, t-r'/c)}{r'} = \frac{\rho(\xi, t-r/c)}{r} - \frac{r \cdot \xi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\rho(\xi, t-r/c)}{r} \right] + \dots \quad (61.21)$$

Poniendo (61.21) en (61.18), hallamos

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho dV_\xi - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \int \xi \rho dV_\xi, \quad (61.22)$$

donde se toma en consideración que durante la integración r es una magnitud constante. Como consecuencia de la neutralidad eléctrica del sistema, la primera integral en el segundo miembro de (61.22) es nulo y la segunda es en sí el momento del dipolo [véase (17.2)]

$$\int \xi \rho(t-r/c) dV_\xi = \mathbf{p}(t-r/c). \quad (61.23)$$

Por eso, en definitiva, el potencial del dipolo que varía con el tiempo se determina por la fórmula

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\mathbf{p}(t-r/c)}{r} \right]. \quad (61.24)$$

Haciendo uso de la expresión para la divergencia en coordenadas esféricas, la fórmula (61.24) puede representarse así

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{div} \frac{\mathbf{p}(t-r/c)}{r}. \quad (61.25)$$

Potencial vectorial. Se calcula desarrollando el integrando de (61.16) en la serie tipo (61.21):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{p}(t-r/c)}{r} \right]. \quad (61.26)$$

Campos eléctrico y magnético. Para simplificar la escritura de las siguientes fórmulas, introduzcamos la designación

$$\Pi = \frac{\mathbf{p}(t-r/c)}{r} = \mathbf{p}_0 \Phi(t, r), \quad (61.27)$$

donde \mathbf{p}_0 es un vector constante que caracteriza la dirección de las oscilaciones del dipolo. Partiendo de las fórmulas (61.25) y (61.26), obtenemos:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot } \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi, \quad (61.28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad div } \Pi - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\text{grad div } \Pi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{rot rot } \Pi, \end{aligned} \quad (61.29)$$

donde se toma en consideración que $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ y se tiene en cuenta la fórmula (A.10) y el vector Π satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \Pi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 0. \quad (61.30)$$

El valor de $\text{rot } \Pi$ se calcula mediante la fórmula (A.16):

$$\text{rot } \Pi = \text{rot } \mathbf{p}_0 \Phi = \text{grad } \Phi \times \mathbf{p}_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{p}_0. \quad (61.31)$$

Los cálculos posteriores es más cómodo realizarlos en el sistema de coordenadas esféricas. Dirijamos el eje polar Z a lo largo del vector \mathbf{p}_0 , colocándolo en el origen de coordenadas en el centro del dipolo. Los ángulos acimutal y polar se denotan por θ y α , respectivamente, (fig. 254). Es obvio que

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_0)_r = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_0)_\theta = 0, \quad (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_0)_\alpha = -r p_0 \sin \theta, \quad (61.32)$$

por eso

$$\text{rot}_r \Pi = \text{rot}_\theta \Pi = 0, \quad \text{rot}_\alpha \Pi = -\sin \theta \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (61.33)$$

De aquí, basándose en la fórmula (61.28), obtenemos:

$$B_r = B_\theta = 0, \quad B_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}_\alpha \Pi = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sin \theta \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}. \quad (61.34)$$

Las proyecciones del vector \mathbf{E} se calculan aplicando la fórmula para el rotor en el sistema de coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \text{rot}_\alpha \Pi) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \\ E_\theta &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \text{rot}_\alpha \Pi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (61.35)$$

Las fórmulas (61.34) y (61.35) muestran que el vector de intensidad del campo eléctrico yace en los planos meridionales y el vector de inducción del campo magnético es perpendicular al plano meridional, trazado por el punto correspondiente, con la particularidad de que las líneas magnéticas de fuerza coinciden con las li-

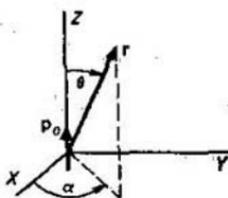


Fig. 254 Elección del sistema esférico de coordenadas para calcular el campo del dipolo

neas paralelas del sistema de coordenadas esféricas en cuestión. Los vectores de los campos magnético y eléctrico en cada punto son mutuamente perpendiculares.

Las fórmulas (61.34) y (61.35) son válidas para una dependencia arbitraria de la función $\Phi(t, r)$ en (61.27) respecto al tiempo. Considerando que el momento del dipolo varía por una ley armónica,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}, \quad (61.36)$$

obtenemos

$$\Pi = p_0 \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r}. \quad (61.37)$$

Después de efectuar las correspondientes diferenciaciones en las fórmulas (61.34) y (61.35), hallamos las expresiones para las proyecciones diferentes de cero:

$$B_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega \sin \theta \left(\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c} \right) \Pi, \quad E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} \right) \Pi, \quad E_\theta = \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Pi. \quad (61.38)$$

El campo en la proximidad inmediata al dipolo a distancias, inferiores a la longitud de onda $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$, es semejante al campo de un dipolo estático y corriente. A distancias mucho mayores que la longitud de onda, el campo del oscilador se diferencia en principio del campo de un dipolo permanente y corriente. La zona correspondiente se denomina zona de onda.

Campo del oscilador en la zona de onda. La distancia r hasta los puntos de la zona de onda satisface, según la definición, la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}. \quad (61.39)$$

Por eso en las fórmulas (61.38) pueden menospreciarse $1/r$ y $1/r^2$ en comparación con ω/c y ω^2/c^2 . En definitiva, obtenemos las siguientes expresiones para las proyecciones de los vectores del campo:

$$B_\alpha = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{c} \Pi \sin \theta, \quad B_r = B_\theta = 0; \quad (61.40)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \Pi \sin \theta, \quad E_r = E_\alpha = 0. \quad (61.41)$$

En estas fórmulas a título de Π puede tomarse o bien la parte real de la expresión (61.37) o bien la imaginaria, por ejemplo:

$$\Pi = \frac{p_0 \cos \omega(t-r/c)}{r}. \quad (61.42)$$

Por esta razón, en definitiva, la intensidad y la inducción del campo electromagnético en la zona de onda del oscilador pueden representarse de la siguiente manera:

$$E_\theta = cB_\alpha = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\sin \theta}{r} p_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right), \\ E_r = E_\alpha = 0, \quad B_r = B_\theta = 0. \quad (61.43)$$

Estas fórmulas muestran que en la zona de onda los vectores magnético y eléctrico son mutuamente perpendiculares y perpendiculares al radio vector r . Los vectores E , B , r forman en cada punto un sistema de mano derecha de vectores. La intensidad del campo disminuye inversamente proporcional al primer grado de la distancia. La onda que se presenta por la fórmula (61.43) se denomina esférica. Ella se propaga en dirección del radio vector. Las superficies de fase constante de dicha onda son esferas. La velocidad de la onda (de fase) es igual a la velocidad de la luz. Dado que $E_0 = cB_0$, los pequeños sectores de la superficie de la onda esférica pueden considerarse como ondas electromagnéticas planas.

Potencia emitida por el oscilador. La densidad del flujo de la energía electromagnética se caracteriza por el vector de Poynting (59.7). Por eso el flujo de energía electromagnética P que atraviesa la superficie S de la esfera de radio r que rodea el oscilador, es igual a

$$\begin{aligned} P &= \int_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S E_0 H_0 dS = \\ &= \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\alpha = \\ &= \frac{1}{6\pi \epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned} \quad (61.44)$$

Esto es el potencial del flujo, es decir, la energía de emisión del oscilador en 1 s. La potencia de emisión, media durante un período de emisión, es igual a

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{12\pi \epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3}. \quad (61.45)$$

Esta fórmula muestra que la potencia de emisión del oscilador depende en gran medida de la frecuencia y es proporcional al cuarto grado de ésta. Ello significa que para aumentar la potencia de emisión es útil pasar a longitudes más cortas de ondas.

Puesto que el vector de Poynting disminuye inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, y el área de la superficie de la esfera crece directamente proporcional al cuadrado de la distancia, el flujo total de energía, que atraviesa la superficie de la esfera, no cambia con la distancia, por lo tanto, la energía se transporta sin pérdidas del oscilador a las partes alejadas del espacio en forma de ondas electromagnéticas. La densidad del flujo de emisión disminuye al crecer la distancia inversamente proporcional al cuadrado de las distancias. Merced a la pérdida de energía en la emisión, las vibraciones del oscilador deben ser amortiguadas. Para obtener vibraciones no amortiguadas del oscilador es necesario continuamente suministrarle de afuera cierta energía. El oscilador es el emisor más sencillo de ondas electromagnéticas.

Emisión de un cuadro con corriente. Otro de los emisores elementales de las ondas electromagnéticas es un cuadro con corriente que se caracteriza por

el momento magnético $p_m = IS$ (fig. 255). Su emisión es semejante a la emisión de un dipolo. Citemos sólo el resultado. El momento magnético del cuadro con corriente varía según la ley

$$p_m = p_{m0} \cos \omega t. \quad (61.46)$$

Coloquemos el origen del sistema de coordenadas esféricas en el centro del cuadro y el eje Z dirijémoslo a lo largo del momento magnético, es decir, en la fig. 254 hay que imaginarse que la corriente circula en el plano $z = 0$ y el mo-

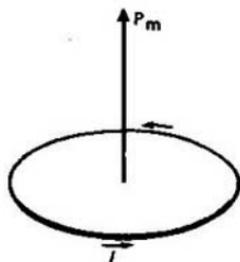


Fig. 255
Cuadro con corriente

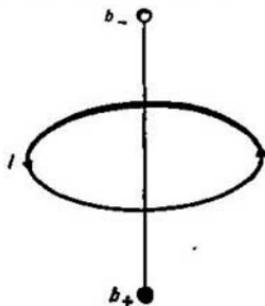


Fig. 256
Relación entre el desplazamiento de las cargas eléctricas que originan el momento eléctrico dipolar, y la corriente en el cuadro que crea el momento magnético

mento magnético de la corriente p_m se sitúa como p . Para el campo de la emisión del cuadro con corriente se obtienen las siguientes fórmulas:

$$E_\alpha = -cB_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^3}{c} \frac{\text{sen } \theta}{r} p_{m0} \cos \omega(t-r/c), \quad (61.47)$$

$$E_r = E_\theta = 0, \quad B_r = B_\alpha = 0.$$

La comparación de las fórmulas (61.47) y (61.43) muestra que si entre el momento magnético p_{m0} de la corriente y el momento dipolar p_0 se observa la relación (fig. 256)

$$p_{m0} = cp_0, \quad (61.48)$$

la intensidad del campo eléctrico y la inducción magnética de la emisión del dipolo son iguales según el módulo a los módulos correspondientes de los vectores del campo de emisión del cuadro con corriente, sólo cambian su dirección en el espacio. El dipolo posee una intensidad del campo eléctrico, dirigida por las meridianas y el cuadro tiene la intensidad perpendicular a los planos meridionales por las líneas paralelas. De manera correspondiente varía también la orientación de los vectores del campo magnético. Como se ve de (61.47) y (61.43),

los vectores del campo de emisión del dipolo y del cuadro con corriente se encuentran entre sí en la siguiente relación:

$$\begin{aligned} E_{\alpha} \text{ (del cuadro)} &= -cB_{\alpha} \text{ (del dipolo)} \\ cB_{\theta} \text{ (del cuadro)} &= E_{\theta} \text{ (del dipolo)}. \end{aligned} \quad (61.49)$$

La potencial de emisión del cuadro con corriente se determina por las fórmulas (61.44) y (61.45), sustituyendo en ellas el momento dipolar por el momento magnético según la fórmula (61.48).

El oscilador y el cuadro con corriente son emisores elementales de las ondas electromagnéticas. La emisión de sistemas más complejos puede reducirse a los elementales con ayuda del principio de superposición.

Emisión de un electrón en movimiento acelerado. Coloquemos imaginariamente una carga positiva, igual por el valor a la carga del electrón en el origen de coordenadas. Dicha carga es inmóvil y, según la ley de Coulomb, crea en el espacio circundante un campo eléctrico, constante con el tiempo, y con una intensidad que decrece inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. El conjunto del electrón en movimiento y la carga positiva inmóvil forman un dipolo, cuyo momento varía con el tiempo. Los vectores del campo de emisión del dipolo son alternativos y disminuyen inversamente al cuadrado del primer grado de la distancia. Está claro que el campo eléctrico constante de la carga inmóvil se compensa por el campo eléctrico del electrón y no puede tener relación alguna con el campo de emisión, es decir, el campo de emisión es el campo de emisión del electrón oscilante. La carga positiva se ubica en el origen de coordenadas sólo mentalmente, lo que permite hacer uso de las fórmulas obtenidas antes para la emisión del dipolo con momento variable con el tiempo.

El momento dipolar que surge al desviarse el electrón del origen de coordenadas a $z(t)$, es igual a

$$p(t) = -|e| z(t) i_z, \quad (61.50)$$

donde i_z es el versor a lo largo del eje Z . El signo menos surge a causa de que el momento complementario está dirigido de la carga negativa a la positiva. Considerando que

$$z = b \cos \omega t, \quad (61.51)$$

donde b es la amplitud de oscilación del electrón, para el momento dipolar (61.50) obtenemos

$$p = -i_z |e| b \cos \omega t. \quad (61.52)$$

La comparación de (61.22) con la parte real de (61.36) para el dipolo muestra que en la fórmula (61.36) p_0 está ligado con las magnitudes que caracterizan el movimiento del electrón, mediante las relaciones:

$$p_0 = -i_z |e| b, \quad p_0 = |e| b. \quad (61.53)$$

La fórmula (61.43) que caracteriza los vectores del campo de emisión, adquiere ahora el aspecto:

$$E_{\theta} = cB_{\alpha} = -\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin\theta}{r} |e| b \cos \omega \left(\tau - \frac{r}{c} \right), \quad (61.54)$$

$$E_{\alpha} = E_r = 0, \quad B_r = B_{\theta} = 0, \quad (61.54)$$

donde τ es el tiempo de llegada de la onda al punto de observación en la esfera de radio r . La variable $t = \tau - r/c$ se reserva para el tiempo que caracteriza el movimiento del electrón. De la fórmula (61.51) se desprende que

$$\ddot{z} = -\omega^2 b \cos \omega t, \quad (61.55)$$

y por eso (61.54) puede escribirse de nuevo así:

$$E_{\theta}(r, \tau) = cB_{\alpha}(r, \tau) = \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin\theta}{r} \ddot{z} \Big|_{t=\tau-r/c} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin\theta}{r} \ddot{z} \Big|_{t=\tau-r/c}, \quad (61.56)$$

donde se tiene en cuenta que la carga del electrón es negativa. La fórmula (61.44) para la potencia de emisión adquiere la siguiente forma:

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}^2, \quad (61.57)$$

es decir, *la potencia de emisión es proporcional al cuadrado de la aceleración del electrón. La carga en movimiento uniforme no emite.*

Las fórmulas (61.56) y (61.57) se recibieron para el modelo del electrón oscilante. No obstante, ellas dependen sólo de la aceleración del electrón en cualquier momento dado de tiempo. Por consiguiente, el campo de emisión que describen, no depende de cómo se movía el electrón hasta el momento prefijado y de qué manera se moverá después de este momento. Por esta razón, las fórmulas mencionadas son siempre aplicables y representan las expresiones para la intensidad y la inducción del campo de emisión y de la potencia de emisión en dependencia de la aceleración, cualquiera que sea el movimiento. En cambio, en este caso las velocidades del electrón deben ser pequeñas, por eso, hablando estrictamente, estas fórmulas son para el electrón en reposo que posee cierta aceleración, lo que es obvio partiendo de la definición del dipolo que ocupa una zona infinitésima del espacio y que se encuentra en reposo en ella.

Sin embargo, no cuesta gran trabajo generalizar estas fórmulas para velocidades arbitrarias. Para eso hay que sencillamente pasar al sistema de coordenadas donde el electrón se mueve con una velocidad arbitraria y hacer uso de las fórmulas de transformación de los campos y aceleraciones. En definitiva, se obtienen fórmulas, válidas para las velocidades y aceleraciones arbitrarias de la carga. En el presente libro no se citan.

Fuerza de deceleración por radiación. Merced a la emisión, el electrón pierde su energía y se decelera, o sea, sobre él actúa una fuerza de deceleración. Hallémosla. Es obvia, que la ecuación de las oscilaciones del electrón, teniendo

en cuenta las fuerzas de deceleración, tiene la forma

$$m\ddot{z} + m\omega^2 z = F, \quad (61.58)$$

donde ω es la frecuencia de las oscilaciones libres en ausencia de la fuerza de deceleración. Multiplicando los dos miembros de esta ecuación por \dot{z} , obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{m\omega^2}{2} z^2 \right) = F\dot{z}. \quad (61.59)$$

En el segundo miembro de (61.59) se encuentra el trabajo de la fuerza de deceleración por radiación, respecto al tiempo. Según la definición, él es igual a la potencia de emisión [véase (61.57)], por eso

$$F\dot{z} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}^2. \quad (61.60)$$

La igualdad (61.60) expresa el principio de conservación de la energía durante la emisión. De ella no se puede hallar en general las fuerzas F en forma de función de z y de sus derivadas. Eso se puede hacer únicamente de modo aproximado, suponiendo que:

1) la emisión y, por lo tanto, el amortiguamiento de las oscilaciones no son muy grandes, de manera que en el transcurso de cierta cantidad de períodos el movimiento puede considerarse prácticamente periódico;

2) partiendo del principio de conservación de la energía para valores medios, referentes a una cantidad pequeña de períodos, puede sacarse la conclusión de la igualdad de los valores instantáneos de dichas magnitudes.

Partimos de la igualdad evidente:

$$\ddot{z}^2 = -\ddot{z}\dot{z} + (\dot{z}\ddot{z}). \quad (61.61)$$

Tomando el valor medio de $(\dot{z}\ddot{z})$ por un período y haciendo uso de la primera suposición, tenemos

$$\langle (\dot{z}\ddot{z}) \rangle = \frac{1}{T} [(\dot{z}\ddot{z})_{t=T} - (\dot{z}\ddot{z})_{t=0}] = 0. \quad (61.62)$$

Entonces (61.60), teniendo en cuenta (61.61) y (61.62), adquiere el aspecto

$$\langle F\dot{z} \rangle = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \langle \ddot{z}^2 \rangle. \quad (61.63)$$

Basándose en la segunda suposición, hallamos

$$F = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}. \quad (61.64)$$

Esta fórmula determina la fuerza de deceleración por radiación. La ecuación de las oscilaciones del electrón, teniendo en cuenta la fuerza de deceleración, tiene la forma

$$m\ddot{z} + m\omega^2 z - [e^2/(6\pi\epsilon_0 c^3)] \ddot{z} = 0. \quad (61.65)$$

En la electrodinámica la expresión para la fuerza de deceleración se generaliza para el movimiento arbitrario. Ahí la fuerza se describe también por la tercera derivada respecto al tiempo propio de las magnitudes correspondientes que caracterizan el movimiento del electrón. La ecuación que se recibe en este caso es invariante desde el punto de vista relativista. Durante largo tiempo se consideraba que dicha ecuación describe correctamente la reacción de radiación. En cambio, hace poco se realizó un cálculo, aplicando el ordenador, de unos cuantos casos sencillos de movimiento y fueron obtenidos resultados absurdos de antemano. Por eso la cuestión sobre la descripción clásica invariante desde el punto de vista relativista del movimiento del electrón, teniendo en cuenta la reacción de emisión no puede considerarse resuelta en la actualidad.

La existencia de la fuerza de deceleración se confirmó experimentalmente en los aceleradores. Como ya se ha dicho, las partículas cargadas en el acelerador sufren pequeñas oscilaciones armónicas cerca de la órbita equilibrada, denominadas oscilaciones de betatrón (véase el § 56). Además, en su movimiento la carga emite intensivamente. La fuerza de deceleración por radiación provoca el amortiguamiento de las oscilaciones de betatrón.

§ 62. Propagación de las ondas electromagnéticas en los dieléctricos

Se examinan las propiedades principales y las peculiaridades de la propagación de las ondas electromagnéticas en los dieléctricos.

Ondas planas. La onda electromagnética se denomina plana si los vectores de la onda poseen una misma magnitud en todos los puntos de cualquier plano, perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Claro está que dichos vectores varían de plano a plano. Puede decirse que los planos, perpendiculares a la dirección de propagación son superficies de fase constante en la onda plana. La onda se llama monocromática si los vectores de la onda cambian con el tiempo según la ley armónica con una frecuencia determinada. Por ejemplo, si una onda electromagnética plana se propaga a lo largo del eje Z, los vectores del campo de la onda tienen la forma:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}(z) e^{i\omega t}; \quad \mathbf{B}(z, t) = \mathbf{B}(z) e^{i\omega t}. \quad (62.1)$$

Si las superficies de la fase constante coinciden con las de la amplitud constante, la onda se denomina homogénea.

Ecuaciones para los vectores del campo de la onda. No vamos a partir de los potenciales, como en el § 61, sino que directamente de los vectores del campo. Examinemos el caso de un medio ilimitado homogéneo $\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$. La conductividad del dieléctrico $\gamma = 0$. Las ecuaciones de Maxwell

tienen la forma:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (62.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (62.3)$$

Al diferenciar los dos miembros de la ecuación (62.2) respecto al tiempo y excluyendo en el primer miembro de la igualdad obtenida la derivada $\partial \mathbf{B} / \partial t$ con ayuda de (62.3), recibimos

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (62.4)$$

Haciendo uso de la fórmula (A.10) y teniendo en cuenta que $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, ya que las cargas libres están ausentes, hallamos la ecuación para \mathbf{E} :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (62.5)$$

De la misma manera encontramos la ecuación para \mathbf{B} :

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (62.6)$$

Así, pues, los vectores del campo satisfacen la ecuación de la onda en la que la velocidad de propagación es igual a

$$v = 1/\sqrt{\epsilon \mu} = c/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}. \quad (62.7)$$

La fórmula (62.7) muestra que en el dieléctrico la velocidad de propagación de las ondas es menor que en el vacío.

Vectores de onda. Hagamos coincidir el eje Z y la dirección de propagación de la onda electromagnética. Los vectores del campo se determinan por las fórmulas tipo (62.1). Poniendo en (62.5) la expresión para \mathbf{E} [véase (62.1)] y reduciendo los dos miembros de la ecuación por $e^{i\omega t}$ después de diferenciar, hallamos para $\mathbf{E}(z)$ la ecuación

$$d^2 \mathbf{E}(z) / dz^2 + k^2 \mathbf{E}(z) = 0, \quad (62.8)$$

donde $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$. La solución general de esta ecuación es la siguiente:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_{01} e^{-ikz} + \mathbf{E}_{02} e^{ikz}, \quad (62.9)$$

donde \mathbf{E}_{01} y \mathbf{E}_{02} son constantes. Poniendo (62.9) en la fórmula (62.1), encontramos que

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_{01} e^{i(\omega t - kz)} + \mathbf{E}_{02} e^{i(\omega t + kz)}. \quad (62.10)$$

El primer sumando del segundo miembro de (62.10) representa una onda que se propaga en dirección de los valores positivos del eje Z , y el segundo, en dirección de los valores negativos [véase (61.12)].

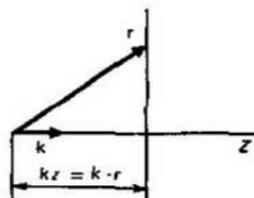


Fig. 257
Superficie de la fase constante de la onda plana

De la misma manera hallamos la solución para B. Admitamos que la onda se propaga en dirección positiva del eje Z. Entonces,

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)}; \quad \mathbf{B}(z, t) = B_0 e^{i(\omega t - kz)}. \quad (62.11)$$

Semejante onda es plana, monocromática y homogénea.

Velocidad de fase (de propagación). Las fórmulas (62.11) muestran que las ondas planas en un dieléctrico homogéneo se propagan sin variar la amplitud, o sea, sin absorción. La velocidad de movimiento del plano de la fase constante se denomina **velocidad de fase**. Se halla diferenciando las condiciones de constancia de la fase respecto al tiempo:

$$\omega t - kz = \text{const.}, \quad (62.12)$$

que proporciona

$$\omega - k \frac{dz}{dt} = 0, \quad (62.13)$$

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}. \quad (62.14)$$

Las fórmulas (62.11) están escritas para una elección especial del sistema de coordenadas cuando el eje Z coincide con la dirección de propagación de la onda. De esta restricción puede liberarse con ayuda del vector de onda \mathbf{k} , dirigido a lo largo de la propagación de las ondas y se determina por el módulo mediante la expresión (61.8). Según la definición de onda plana, que se propaga en dirección del vector \mathbf{k} , los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} en cualquier punto del plano, perpendicular a esta dirección, en el caso dado al eje Z, son los mismos. Sea r el radio vector de cierto punto en semejante plano de fase constante.

Es obvio que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kz$ (fig. 257) y en lugar de (62.11) puede escribirse:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}; \quad (62.15a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}.$$

Longitud de onda. Según la definición, es la distancia a la que se desplaza cierto punto de fase constante durante un período de oscilaciones:

$$\lambda = vT = \omega T/k = 2\pi/k, \quad (62.15b)$$

donde

$$k = 2\pi/\lambda \quad (62.15c)$$

es el número de onda o también se llama constante de longitud.

Propiedades de las ondas. Para investigar las propiedades de las ondas planas sustituyamos las expresiones (62.15a) en las (62.2) y (62.3). Para simplificar los cálculos es útil hacer uso de la representación simbólica operacional de las operaciones vectoriales. En calidad de inicial sirve el operador vectorial

de habla:

$$\nabla = i_x \frac{\partial}{\partial x} + i_y \frac{\partial}{\partial y} + i_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (62.16)$$

donde i_x , i_y , i_z son versores en dirección de los ejes de coordenadas.

No es difícil comprobar que mediante este operador las operaciones principales del análisis vectorial se representan así:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi, \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad \text{rot} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (62.17)$$

donde $\nabla \cdot \mathbf{A}$ y $\nabla \times \mathbf{A}$ son los productos vectorial y escalar del operador ∇ por el vector \mathbf{A} . Tengamos en cuenta que

$$\nabla e^{-ik \cdot r} = -ik e^{-ik \cdot r}. \quad (62.18)$$

Aplicando las ecuaciones de Maxwell y las expresiones (62.15a), pueden investigarse las propiedades de las ondas planas. La ecuación de Maxwell $\text{div } \mathbf{E} = 0$ nos da

$$\text{div } \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = -ik \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (62.19)$$

Esto significa que el vector de intensidad \mathbf{E} de la onda es perpendicular a \mathbf{k} , es decir, es perpendicular a la dirección de su propagación. Análogamente, la ecuación de Maxwell

$$\text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = -ik \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (62.20)$$

muestra que \mathbf{B} es también perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Poniendo las expresiones (62.15a) en (62.2) y (62.3), hallamos:

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{B} = \varepsilon \mu \omega \mathbf{E}, \quad (62.21)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}. \quad (62.22)$$

Sea \mathbf{n} un versor dirigido en el sentido de la propagación de la onda. Entonces, basándose en (62.8) puede escribirse

$$\mathbf{k} = n\omega \sqrt{\varepsilon \mu} = n\omega/v. \quad (62.23)$$

Por eso [véase (62.22)]

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = v\mathbf{B}. \quad (62.24)$$

Con ayuda de (62.19) y (62.20) se mostró que los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} son perpendiculares a \mathbf{n} . Las fórmulas (62.21), (62.22) y (62.24) muestran que estos vectores son también perpendiculares uno a otro. Tomando en los dos miembros de la igualdad (62.24) los módulos de las magnitudes, hallamos

$$E = vB. \quad (62.25)$$

Partiendo de la relación (62.24) puede sacarse la conclusión de que en un dieléctrico homogéneo los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} varían en una misma fase. Todas las fórmulas de este párrafo son válidas para el vacío si se supone que $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ y $v = c$ es la velocidad de la luz. La variación de los vectores de la onda plana en el espacio se muestra en la fig. 258.

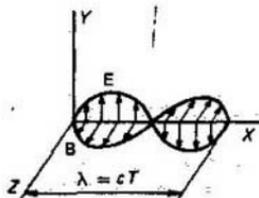


Fig. 258
Onda electromagnética plana armónica

Densidad del flujo de energía. Ésta se determina por el vector de Poynting, cuyo módulo en el caso de onda plana es igual a

$$|S| = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = |\mathbf{E}| |\mathbf{H}| = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu^2} B^2 \right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}), \quad (62.26a)$$

donde $1/\sqrt{\epsilon\mu} = v$ es la velocidad de propagación de la onda y

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (62.26b)$$

es la densidad volumétrica de la energía en ella. La expresión para el flujo de energía puede representarse como

$$\mathbf{S} = w \mathbf{v}. \quad (62.27)$$

Eso significa que *la velocidad de transporte de la energía de la onda plana en un dieléctrico homogéneo es igual a la velocidad de fase de la onda.*

Las ondas electromagnéticas se emiten sólo por las corrientes alternas y por las cargas eléctricas que se mueven con aceleración. Las corrientes continuas y las cargas en movimiento uniforme y rectilíneo no emiten.

¿En qué consisten los procesos físicos que conducen a la posibilidad de existencia de las ondas electromagnéticas?

¿Cuál es la estructura de la onda plana y cuál es la velocidad de su propagación en el vacío?

§ 63. Propagación de las ondas electromagnéticas en medios conductores

Se examinan las propiedades principales y las peculiaridades de la propagación de las ondas electromagnéticas en los medios conductores.

Constante dieléctrica compleja. Se estudia el caso de un medio homogéneo: $\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$ ($\gamma \neq 0$, es decir, el medio es conductor). Entonces las ecuaciones de Maxwell tienen el aspecto:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \gamma \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (63.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (63.2)$$

donde se utilizaron las designaciones simbólicas de las operaciones vectoriales y se tuvo en cuenta que $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$. Sustituyendo en estas ecuaciones las expresio-

nes (62.15a), para los vectores del campo hallamos:

$$-\mathbf{k}_\omega \times \mathbf{B} = \omega\mu [\varepsilon + \gamma/(i\omega)] \mathbf{E}, \quad (63.3)$$

$$\mathbf{k}_\omega \times \mathbf{E} = \omega\mathbf{B}, \quad (63.4)$$

con la particularidad de que \mathbf{k}_ω en (62.15a) se denota por $\mathbf{k}_\omega = \mathbf{k}^{(0)}k_\omega$, donde $\mathbf{k}^{(0)}$ es el versor.

La ecuación (63.3) pasa a ser la ecuación (62.21) para los dieléctricos en el caso de $\gamma = 0$. La ecuación (63.4) no se diferencia de la ecuación correspondiente para los dieléctricos. De esta manera, el medio conductor en sentido matemático se diferencia del dieléctrico sólo en que en vez de la constante dieléctrica ε para el medio entra la constante dieléctrica compleja

$$\varepsilon_\omega = \varepsilon + \gamma/(i\omega) = \varepsilon - i\gamma/\omega. \quad (63.5)$$

Todos los cálculos posteriores coinciden con los cálculos para los dieléctricos, únicamente que es necesario utilizar ε_ω en lugar de ε . Así pues, en vez del número de onda real k aparece la magnitud compleja k_ω , con la particularidad de que

$$k_\omega^2 = \omega^2 \varepsilon_\omega \mu = \omega^2 \varepsilon \mu - i\omega\gamma\mu. \quad (63.6)$$

Representando k_ω en forma de un número complejo:

$$k_\omega = k - is, \quad (63.7)$$

escribamos la igualdad (63.6) en la forma

$$k^2 - 2iks - s^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - i\omega\gamma\mu. \quad (63.8)$$

Al igualar las partes reales e imaginarias de (63.8), hallamos:

$$k^2 - s^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \equiv a, \quad (63.9)$$

$$2ks = \omega\gamma\mu \equiv b. \quad (63.10)$$

La solución de este sistema algebraico de las ecuaciones es así:

$$k^2 = \frac{a}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + 1 \right) = \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\varepsilon \omega} \right)^2} + 1 \right), \quad (63.11)$$

$$s^2 = \frac{a}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - 1 \right) = \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\varepsilon \omega} \right)^2} - 1 \right). \quad (63.12)$$

Profundidad de penetración. Investiguemos la amplitud de la onda que se propaga en dirección de los valores positivos del eje Z :

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kx)} = E_0 e^{-sx} e^{i(\omega t - kx)}. \quad (63.13)$$

De esta manera, la amplitud de la onda durante la propagación disminuye, es decir, en el medio conductor la onda electromagnética se propaga amortiguándose la amplitud. En el camino

$$\Delta = 1/s \quad (63.14)$$

la amplitud de la intensidad del campo de la onda disminuye e veces, por lo que Δ adquiere el nombre de **profundidad de penetración** de la onda plana en un medio conductor.

Estimemos la profundidad de penetración de las ondas de diversa longitud. Para la luz visible la longitud de onda es igual a

$$\lambda = (0,4 \dots 0,75) \cdot 10^{-6} \text{ m}, \quad (63.15)$$

lo que corresponde a la frecuencia ω del orden de $5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$. La conductividad de los metales tiene el orden de $10^7 \Omega^{-1} \times \text{m}^{-1}$ y el valor de ϵ puede tomarse igual a ϵ_0 . Así pues,

$$\gamma/(\epsilon\omega) \approx 2 \cdot 10^3 \gg 1. \quad (63.16)$$

Para longitudes de ondas mayores que la de la luz, dicha desigualdad aumenta. Por eso en la fórmula (63.12) puede menospreciarse la unidad en comparación con $\gamma/(\epsilon\omega)$ y escribirse la expresión para s de esta forma

$$s = \sqrt{\omega\gamma\mu/2}. \quad (63.17)$$

Por consiguiente, la profundidad de penetración es igual a

$$\Delta = 1/s = \sqrt{2/(\omega\gamma\mu)}. \quad (63.18)$$

Puesto que la longitud de onda λ está enlazada con la frecuencia ω mediante la relación $\omega = 2\pi/(\lambda\sqrt{\epsilon\mu})$, la fórmula (63.18) puede escribirse de nuevo

$$\Delta = \sqrt{\lambda/\pi\gamma} \sqrt{\epsilon/\mu}, \quad (63.19)$$

donde $\sqrt{\mu/\epsilon}$ tiene dimensión de resistencia y es una resistencia característica del medio. Para el vacío es igual a

$$\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377\Omega. \quad (63.20)$$

Examinemos, por ejemplo, el cobre para el cual $\gamma = 5 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu \approx \mu_0$, $\epsilon \approx \epsilon_0$. Para $\lambda = 1 \text{ m}$ la profundidad de penetración es igual a $\Delta \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Por eso en realidad no se puede ni hablar de que la onda penetre en un medio conductor, simplemente existe la absorción en una capa superficial muy pequeña. Incluso para ondas muy cortas dicha conclusión queda siendo válida. Verbigracia, para longitudes de ondas del orden de las ondas luminosas ($\lambda \approx 10^{-6} \text{ m}$) la profundidad de penetración es $\Delta \approx 4 \cdot 10^{-9} \text{ m}$.

Causa física de la absorción. La causa física de tal rápido amortiguamiento de las ondas electromagnéticas en un medio conductor es la transformación de la energía electromagnética de la onda en calor de Joule: *la intensidad del campo electromagnético de la onda excita en el medio conductor las corrientes de conducción que, según la ley de Joule—Lenz, calientan la substancia del medio.*

Interpretación del efecto pelicular. Ahora puede interpretarse el efecto pelicular. La fórmula (63.19) para el espesor de penetración de la corriente coincide con la fórmula (63.18) para la profundidad de penetración de la onda electromagnética en el conductor, lo que posee una base física profunda.

La energía, transportada por la corriente, se mueve en el espacio alrededor de los conductores en forma de energía electromagnética. Parte de ella atraviesa la superficie del conductor y penetra dentro de éste para mantener el movimiento de los electrones y allí se transforma en energía cinética de los electrones, la cual, a su vez, se convierte en calor de Joule. Por esta razón, la corriente puede mantenerse sólo en aquellas partes del conductor a donde se suministra del espacio circundante la energía electromagnética. Ya que esta energía puede penetrar al conductor sólo a la profundidad Δ [véase (63.18)], únicamente en los márgenes de semejante profundidad en las inmediaciones de la superficie del conductor puede existir la corriente, es decir, Δ es espesor de la penetración de la corriente.

Velocidad de fase y longitud de onda en un medio conductor. La fórmula (62.14), teniendo en cuenta (63.13) y (63.11), adquiere el aspecto:

$$v = \frac{\omega}{k} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left\{ \frac{2}{(1 + [\gamma/(\omega\epsilon)]^2)^{1/2} + 1} \right\}^{1/2}. \quad (63.21)$$

Esta velocidad es inferior a la velocidad de las ondas en un medio no conductor para los mismos valores de μ y ϵ , o sea, la presencia de la conductividad del medio reduce la velocidad de fase. La longitud de onda en un medio conductor es igual a

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}} \left\{ \frac{2}{(1 + [\gamma/(\omega\epsilon)]^2)^{1/2} + 1} \right\}^{1/2}, \quad (63.22)$$

es decir, disminuye en comparación con la longitud de onda en un medio no conductor con las mismas magnitudes de μ y ϵ .

La fórmula (63.22) muestra que en el medio conductor la velocidad de fase es función de la frecuencia, es decir, se observa el fenómeno de dispersión. Por esta razón, el medio conductor es siempre de dispersión. La peculiaridad más esencial de la propagación de las señales en los medios de dispersión es la variación de su forma durante la propagación.

Relación entre las fases de las oscilaciones de los vectores del campo. La magnitud compleja k_ω en (63.7) es más cómodo representarla en forma exponencial:

$$k_\omega = |k_\omega| e^{i\varphi}. \quad (63.23)$$

La fórmula (63.4) puede representarse como

$$\mathbf{B} = \frac{|k_\omega|}{\omega} e^{i\varphi} \mathbf{k}^{(0)} \times \mathbf{E}, \quad (63.24)$$

donde $\mathbf{k}^{(0)}$ es el versor en dirección de la propagación de la onda, en el presente caso en dirección del eje Z . Los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} son perpendiculares a este eje.

Sea que la intensidad del campo eléctrico de la onda, conforme a (63.13), se da mediante la fórmula

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kx)}, \quad (63.25)$$

donde, sin limitar la generalidad, puede considerarse que el vector \mathbf{E}_0 es real, ya que la elección del punto de referencia del tiempo t es siempre arbitrario.

Poniendo (6.5) en (63.24), hallamos

$$\mathbf{B} = \frac{|k_\omega|}{\omega} \mathbf{k}^{(0)} \times \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kx + \varphi)}. \quad (63.26)$$

Después de determinar las partes reales de las expresiones (63.25) y (63.26), hallamos las fórmulas para las oscilaciones reales de los vectores del campo en una onda plana que se propaga en un medio conductor:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz), \\ \mathbf{B} &= \frac{|k_\omega|}{\omega} \mathbf{k}^{(0)} \times \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz + \varphi). \end{aligned} \quad (63.27)$$

Por lo tanto, las fases de las oscilaciones de los vectores magnético y eléctrico de la onda plana se diferencian. De (63.7) hallamos

$$\operatorname{tg} \varphi = -s/k = \sqrt{\epsilon\mu/\gamma} - \sqrt{1 + (\epsilon\mu/\gamma)^2}, \quad (63.28)$$

es decir, el ángulo φ es negativo. Esto significa que la fase \mathbf{B} alcanza cierto valor más tarde que la fase \mathbf{E} . Eso se manifiesta mediante dos vías.

Si se examinan las oscilaciones de los vectores de la onda en un punto fijo, junto al cual pasa la onda, \mathbf{B} alcanza su valor, diríamos, máximo, más tarde que \mathbf{E} , o sea, \mathbf{B} como función del tiempo se retrasa de \mathbf{E} .

Si se examina una onda en el momento de tiempo fijo, \mathbf{B} alcanza, por ejemplo, su valor máximo para valores de z menores que \mathbf{E} , es decir, \mathbf{B} como función de z avanza a \mathbf{E} .

Estas afirmaciones se complementan mutuamente y hallan su unicidad en el hecho de que la onda electromagnética progresiva se mueve en dirección de su propagación (en el caso dado en dirección de los valores positivos de Z).

Relación entre las amplitudes de los vectores del campo. De las fórmulas (63.25) y (63.26) se desprende que

$$\frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|} = \frac{|k_\omega|}{\omega} = \sqrt{\mu\epsilon} (1 + [\gamma/(\epsilon\mu)]^2)^{1/4}. \quad (63.29)$$

Comparando las expresiones (63.29) y (63.25), vemos que en el medio conductor $|\mathbf{B}|$ respecto a $|\mathbf{E}|$ es mayor que en un medio no conductor siendo los parámetros μ y Σ los mismos.

§ 64. Invariancia de la onda plana

Se discuten las invariantes de las transformaciones del campo electromagnético y las consecuencias del análisis de las invariantes.

Transformación de los campos. Al pasar de un sistema inercial de referencia a otro, las intensidades de los campos cambian. Las igualdades (11.15) son las fórmulas de transformación.

Puede resultar que en un sistema inercial de referencia existen los campos magnético, y eléctrico, mientras que en el otro, sólo el campo eléctrico, etc.

La onda electromagnética plana se caracteriza bien por sus propiedades definidas: los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} son mutuamente perpendiculares y sus módulos están enlazados mediante la relación: $E = cB$. Se pregunta: ¿se conservan estas propiedades de los vectores del campo al pasar a otro sistema inercial de referencia? Si se conservan, el concepto de la onda electromagnética plana es invariante desde el punto de vista relativista que refleja todas las propiedades internas del campo electromagnético de la onda plana. Pero si no, dicho concepto depende de la elección hecha al azar de un sistema inercial de referencia u otro y no determina el objeto físico que existe objetivamente. Con ayuda de las fórmulas (11.15) es fácil verificar que los vectores de las intensidades del campo electromagnético que satisfacen la condición de la onda plana en un sistema de coordenadas, satisfacen estas mismas condiciones en otro sistema de coordenadas, es decir, *la onda plana es un concepto invariante desde el punto de vista relativista que determina el objeto físico que existe imparcialmente*. En lugar de la verificación directa de una afirmación particular sobre la invariancia de la onda plana es útil analizar una cuestión más amplia sobre las invariantes de las transformaciones del campo electromagnético y la afirmación sobre la invariancia de la onda plana argumentarla como una deducción particular, a la par con la cual, sin embargo, se obtienen otras muchas deducciones muy importantes.

Invariantes de las transformaciones del campo electromagnético. Se llaman invariantes de las transformaciones del campo electromagnético a las magnitudes, compuestas de vectores del campo que no cambian su valor al pasar de un sistema inercial de referencia a otro. Los vectores del campo en distintos sistemas de coordenadas están enlazados entre sí mediante las transformaciones (11.15).

Existen procedimientos de búsqueda de las invariantes de transformaciones. Aplicando las fórmulas (11.15) y calculando directamente, puede comprobarse que al pasar de un sistema inercial de referencia a otros las siguientes invariantes no cambian su valor:

$$I_1 = c^2 B^2 - E^2, \quad I'_1 = H^2 - c^2 D^2; \quad (64.1)$$

$$I_2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}, \quad I'_2 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}; \quad (64.2)$$

$$I_3 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \quad (64.3)$$

Comprobemos, por ejemplo, que la magnitud I_2 es invariante. Según las fórmulas (11.15) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E}' &= B'_x E'_x + B'_y E'_y + B'_z E'_z = B_x E_x + \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{B_y + (v/c^2) E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \\ &+ \frac{E_z + v B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{B_z - (v/c^2) E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} = B_x E_x + B_y E_y + B_z E_z = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (64.4)$$

De manera análoga se demuestra la invariancia de las demás magnitudes.

La onda plana se determina por la igualdad a cero de las invariantes $I_1 = 0$ e $I_2 = 0$, y su invariancia no requiere una posterior demostración, ya que I_1 e I_2 son invariantes. Sin embargo, la invariancia de las magnitudes de (64.1) —

(64.3) permite deducir otras cosas muy importantes sobre el comportamiento de los campos electromagnéticos al pasar de un sistema de referencia a otro.

Análisis de los invariantes del campo. Partiendo de la invariancia de las magnitudes de (64.1)–(64.3), pueden sacarse las siguientes conclusiones:

1) si en cierto sistema inercial de referencia $c^2 B^2 > E^2$ y $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$, puede elegirse un sistema inercial de referencia en el que el campo eléctrico esté ausente y el magnético sea diferente de cero. Pero si \mathbf{B} no es perpendicular a \mathbf{E} , semejante sistema inercial de referencia no existe;

2) si en cierto sistema inercial de referencia $c^2 B^2 < E^2$ y $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$, puede elegirse un sistema inercial de referencia en el que el campo magnético esté ausente y el eléctrico sea diferente de cero. Si \mathbf{B} no es perpendicular a \mathbf{E} , semejante sistema inercial de referencia no existe;

3) si en cierto sistema inercial de referencia existe sólo el campo eléctrico o sólo el magnético, al pasar a otro sistema inercial de referencia, en general, existen tanto el campo eléctrico, como el magnético que son mutuamente perpendiculares;

4) la onda plana, para la cual $E = cB$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, en todos los sistemas inerciales de referencia permanece siendo plana.

§ 65. Presión de las ondas electromagnéticas. Impulso del fotón

Se describe el mecanismo de aparición de la presión de las ondas electromagnéticas. Se calcula la densidad volumétrica del impulso de la onda electromagnética y se determina el impulso del fotón.

Mecanismo de surgimiento de la presión. Si una onda plana se propaga en un medio conductor, su campo eléctrico excita en el medio una densidad volumétrica de la corriente de conducción según la ley de Ohm:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (65.1)$$

Sobre el elemento de corriente $\mathbf{j} dV$ actúa por parte del campo magnético de la onda una fuerza (fig. 259):

$$d\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV = \gamma \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV, \quad (65.2)$$

dirigida por el vector $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, es decir, hacia la propagación de la onda. Designando por \mathbf{n} el vector en dirección de la propagación de la onda, puede escribirse:

$$d\mathbf{F} = \gamma \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV = n \gamma E B dV = n j E dV / v = n dP / v, \quad (65.3)$$

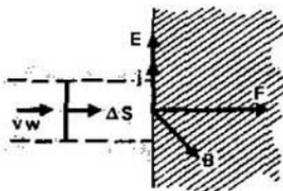


Fig. 259
Diagrama de la aparición de la presión en una onda electromagnética

donde se ha hecho uso de la relación entre los módulos de los vectores de la onda plana ($E = vB$) y se ha tomado en consideración la ley de Joule-Lenz $dP = jE dV$. Es necesario prestar atención a que en la fórmula (65.3) la magnitud dP es la energía absorbida con respecto al tiempo.

Presión. Sea que del vacío incide sobre el medio conductor un flujo de energía de las ondas electromagnéticas que se absorbe por completo. En el transcurso de t s sobre el elemento superficial dS incide, conforme a la fórmula (62.27), una cantidad de energía

$$dP = vw dS, \quad (65.4)$$

que se absorbe y crea en la normal a la superficie una fuerza (65.3) que, a base de (65.4), es igual a

$$dF = nw dS. \quad (65.5)$$

Por eso la presión a lo largo de la normal a la superficie es

$$P_p = \frac{dF}{dS} = nw. \quad (65.6)$$

La magnitud

$$w = 1/2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (65.7)$$

es la densidad volumétrica de la energía de las ondas electromagnéticas.

Impulso del tren de ondas electromagnéticas. Supongamos que la energía W , que se encuentra en cierto volumen en el tren de ondas electromagnéticas, se absorbe en cierto volumen de un cuerpo conductor durante un lapso Δt . Entonces, de acuerdo con (65.3), sobre este volumen del cuerpo actúa la fuerza

$$\mathbf{F} = n \frac{W}{\Delta t} \frac{\mathbf{1}}{v}. \quad (65.8)$$

Según la ley de Newton, la fuerza que actúa sobre el volumen, está enlazada con el impulso que adquiere el volumen, mediante la relación

$$\mathbf{F} = p/\Delta t. \quad (65.9)$$

Poniendo (65.9) en (65.8), obtenemos

$$\mathbf{p} = n \frac{W}{v}. \quad (65.10)$$

La fórmula (65.10) contiene una afirmación fundamental: *el tren de ondas electromagnéticas que posee una energía W y se mueve con una velocidad v , tiene un impulso \mathbf{p} , ligado con la energía mediante la relación (65.10). El impulso está dirigido hacia la propagación de las ondas.*

Densidad volumétrica del impulso de las ondas electromagnéticas. Después de dividir los dos miembros de (65.10) por el volumen que abarca la energía W , obtenemos para la densidad volumétrica del impulso de las ondas electromagnéticas la siguiente fórmula

$$\mathbf{G} = \mathbf{p}/V = n\mathbf{w}/v, \quad (65.11)$$

donde $w = W/V$ es la densidad de la energía electromagnética en la onda plana. Con ayuda de la fórmula (62.27), la expresión (65.11) puede escribirse así

$$G = S/v^2, \quad (65.12)$$

donde S es el vector de Poynting y v , la velocidad de movimiento de las ondas.

La presión de las ondas electromagnéticas puede calcularse por la variación de su impulso. Verbigracia, si las ondas electromagnéticas inciden por la normal a la superficie y se absorben totalmente, la presión, conforme a la fórmula (65.12), es igual a

$$p_p = vG = S/v = w, \quad (65.13)$$

lo que, claro está, coincide con (65.6). Pero si la onda se refleja totalmente, al cuerpo se le transmite un impulso doble y la presión es

$$p_p = 2vG = 2w. \quad (65.14)$$

De la misma manera puede calcularse la presión durante una absorción parcial, durante la incidencia oblicua sobre la superficie, etc.

Fue el científico ruso P. N. Lébedev (1866—1912) quien por primera vez descubrió experimentalmente en 1900 la presión de las ondas luminosas. Como se ve de (65.14), la presión es muy pequeña. Por ejemplo, para el flujo de $1,4 \text{ kW/m}^2$, lo que aproximadamente es igual al flujo de la energía solar en la órbita de la Tierra, la presión de la luz es de unos $5 \text{ }\mu\text{Pa}$. Por eso se necesitó la elaboración de unos métodos muy precisos de medición.

Impulso del fotón. Conforme a las representaciones cuánticas, la luz es en sí un conjunto de cuantos de energía, denominados fotones. La energía del fotón está ligada con la frecuencia de la luz mediante la relación de Einstein:

$$\boxed{\varepsilon = \hbar\omega}, \quad (65.15)$$

donde \hbar es la constante de Planck. *La existencia de la presión de la luz obliga a reconocer que los fotones poseen también impulso.* De acuerdo con (65.10), el impulso del fotón es

$$p = \hbar\omega/c, \quad (65.16)$$

donde c es la velocidad de propagación de la luz en el vacío. Escribamos de nuevo la fórmula (65.16), teniendo en cuenta (62.23):

$$\boxed{p = \hbar k}. \quad (65.17)$$

La relación (65.17) es, a la par con (65.15), la ecuación fundamental de la teoría cuántica de la luz.

La intensidad del campo eléctrico de una onda plana excita en el medio conductor las corrientes de conducción, debido a cuya interacción con la inducción del campo magnético de la onda surge la fuerza de Lorentz que se manifiesta como presión de la onda electromagnética.

¿Qué representa en sí en el modelo clásico la fuerza que conduce al surgimiento de la presión durante la absorción de la onda electromagnética en el medio conductor?

¿Qué es lo que determina la densidad de impulso de la onda electromagnética?

Ejemplo 65.1. Determinar la fuerza con que los fotones, cuya densidad volumétrica de la energía es S , actúan sobre una esfera de reflexión absoluta y de radio r (fig. 260).

Debido a la simetría axial de la distribución de la presión, sólo la componente de la fuerza en dirección del flujo inicial de los fotones se diferencia de cero. De acuerdo con la fórmula (65.13), sobre el elemento superficial $d\sigma$ (fig. 260) actúa una fuerza $dF = (2S/c) \cos\theta d\sigma$ dirigida hacia el centro de la esfera, y la componente de dicha fuerza en dirección del eje Z es

$$dF_z = -(2S/c) \cos^2\theta d\sigma.$$

El área del elemento superficial en el sistema de coordenadas esféricas $d\sigma = r^2 \sin\theta \times \alpha d\theta d\alpha$, donde α es el ángulo axial en el plano perpendicular al eje Z . Para la fuerza total a lo largo del eje Z obtenemos

$$F_z = -\left(\frac{2S}{c}\right) r^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{4\pi}{3} \frac{S}{c} r^2,$$

es decir, la fuerza es $4/3$ veces mayor que para el caso cuando toda la energía del flujo se absorbe por la esfera.

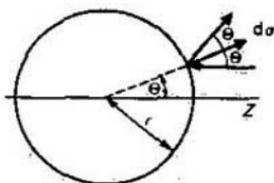


Fig. 260
Para calcular la presión de la radiación electromagnética sobre la esfera absolutamente reflectora

§ 66. Guías de ondas y resonadores

Se describen las características fundamentales de las guías de ondas y las peculiaridades de propagación de las ondas electromagnéticas en ellas. Se da la clasificación de las ondas en las guías de ondas. Se examina el principio de funcionamiento del resonador.

Sección del circuito. Cualquier sección del circuito posee resistencia óhmica, capacidad e inductancia. El esquema equivalente de la sección del circuito se muestra en la fig. 261, a. La resistencia óhmica R existe siempre porque los cables la poseen. La capacidad surge como consecuencia de que en la sección del circuito existen siempre cargas volumétricas o superficiales y campos eléctricos en los que se acumula la energía del campo eléctrico. Al pasar la corriente por la sección del circuito, se excita un campo magnético en el que se acumula la energía. Por lo tanto, la sección del circuito posee también inductancia. El papel relativo de R , C , L depende de las propiedades concretas de la sección del circuito y de la frecuencia.

Sección del conductor. A una sección rectilínea pequeña de conductor le corresponden una carga superficial bastante pequeña y una energía del campo

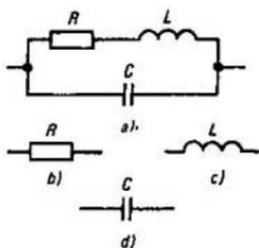


Fig. 261

Circuitos equivalentes para la sección del circuito con diferentes frecuencias

magnético. Esto significa que su capacidad e inductancia son bastante pequeñas. Por esta razón, a pequeñas frecuencias la capacitancia de la sección resulta mayor que la resistencia óhmica y la inductancia, menor, es decir, tiene lugar la desigualdad $1/(\omega C) \gg R \gg \omega L$. Por eso en el circuito, dado en la fig. 261, a la corriente circula principalmente por la sección R, L , mientras que la capacidad aparenta estar desconectada. Dado que $\omega L \ll R$, la inductancia no tiene un valor esencial y la sección del conductor a pequeñas frecuencias se representa así como se muestra en la fig. 261, b.

Al aumentar la frecuencia, la resistencia R crece. Ya que el espesor de penetración de la corriente disminuye como $1/\sqrt{\omega}$, puede considerarse

que la resistencia aumenta como $\sqrt{\omega}$. La inductancia L , al crecer la frecuencia, disminuye poco y por eso la inductancia ωL crece como ω . Por consiguiente, al aumentar la frecuencia, el papel relativo de la inductancia de la sección del conductor crece y ya no se le puede considerar simplemente como una sección con resistencia óhmica. Con el aumento de la frecuencia la capacitancia $1/(\omega C)$ disminuye. Por eso a frecuencias suficientemente grandes, una parte considerable de la corriente aparece en forma de corrientes de desplazamiento. Eso significa que a frecuencias grandes, el esquema equivalente de la sección del conductor tiene la forma mostrada en la fig. 261, a, con la particularidad de que tanto R , como L y C tienen que tomarse en consideración. Su papel relativo depende de la frecuencia. Para frecuencias extremadamente altas, el papel decisivo lo desempeña la capacidad.

Bobina de inductancia. A frecuencias bajas la bobina tiene $1/(\omega C) \gg \omega L \gg R$. La corriente circula principalmente a través de R y L (fig. 261, a) y dado que $R \ll \omega L$, el esquema equivalente de la bobina de inductancia a pequeñas frecuencias tiene la forma dada en la fig. 261, c.

Al crecer la frecuencia, la inductancia de la bobina aumenta y la capacitancia disminuye. Por eso una parte cada vez mayor de la corriente pasa en forma de corriente de desplazamiento a través de las capacidades que existen entre las espiras aisladas de la bobina. A la par con la resistencia óhmica y la inductancia, la capacidad comienza a desempeñar un papel importante. En definitiva, el esquema equivalente de la bobina de inductancia se convierte en un circuito, mostrado en la fig. 261, a, con la particularidad de que el papel relativo de R, L y C depende de la frecuencia. Para una frecuencia muy elevada casi toda la corriente pasa en forma de corriente de desplazamiento, como si saltase de una espira a otra, y la inductancia como si se desconectase del circuito.

Condensador. A frecuencias bajas, la capacitancia del condensador es inferior a la resistencia óhmica y la inductancia [$1/(\omega C) \ll R, 1/(\omega C) \ll \omega L$]. Como consecuencia, en el circuito (fig. 261, a) la sección R, L como si se desco-

nectase y el esquema equivalente del condensador tiene el aspecto que muestra la fig. 261, *d*.

Al aumentar la frecuencia, la situación cambia. Para aclarar qué sucede en ese caso, examinemos como ejemplo un condensador plano.

Al crecer la frecuencia en el condensador plano, aumenta la desviación del campo eléctrico con respecto al homogéneo. La causa de ello es la interacción entre la inducción electromagnética y las corrientes de desplazamiento. A primera vista parece que el cuadro del fenómeno debe ser análogo al que conduce a la aparición del efecto pelicular (fig. 223), pero eso no es así. La diferencia se determina por otras relaciones de fase entre los vectores de los campos.

Examinemos el diagrama vectorial de los campos y las corrientes en caso del efecto pelicular (fig. 223). La inducción del campo magnético se encuentra en fase con la intensidad de la corriente e intensidad del campo eléctrico que la origina. La derivada de la inducción del campo magnético las adelanta en $\pi/2$, mientras que la intensidad ΔE , engendrada por la variación del campo magnético, de un campo eléctrico complementario que conduce directamente al efecto pelicular, retarda en $\pi/2$ de la intensidad E del campo. Por eso siendo el enfoque más estricto, en la fig. 223 debería tomarse en consideración no sólo la distribución espacial de los campos, sino las fases de la variación de las intensidades.

El diagrama vectorial de aparición del efecto pelicular se muestra en la fig. 262, *a*.

Las fórmulas de cálculo tienen en cuenta automáticamente la relación entre las fases de los vectores.

En el condensador (fig. 262, *b*) la relación entre las fases de los vectores del campo es otra. Dado que el campo magnético se origina por las corrientes de desplazamiento, según la ley

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

su inducción está en fase con $\partial E/\partial t$ y, por lo tanto, adelanta en $\pi/2$ la intensidad E (fig. 262, *c*). Por eso la intensidad ΔE que surge según la ley de la inducción electromagnética y que conduce a la redistribución de la intensidad del campo E en el condensador, se encuentra en fase con la intensidad E (fig. 262, *c*). La diferencia principal respecto a los fenómenos que tienen lugar al aparecer el efecto pelicular, consiste en una relación distinta de fases entre E y B : al surgir

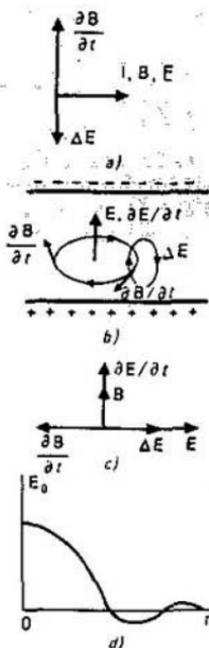


Fig. 262
Relación entre las intensidades de los campos en el condensador a frecuencias altas

el efecto pelicular, sus fases coinciden, mientras que en el condensador la inducción del campo magnético adelanta en fase la intensidad del campo eléctrico en $\pi/2$. Por eso, verbigracia, para el campo eléctrico nulo, en el cuadro del efecto pelicular la inducción del campo magnético es nula y en el condensador posee un valor máximo. Al crecer la intensidad E del campo durante el efecto pelicular desde el valor nulo, la inducción del campo magnético aumenta y la línea $\partial B/\partial t$ forma con E un sistema de mano derecha (fig. 223), mientras que en el condensador dicha intensidad disminuye, por eso las líneas $\partial B/\partial t$ forman con E un sistema de mano izquierda (fig. 262, b). Por consiguiente, la intensidad ΔE del campo eléctrico rotacional está dirigida de manera que aumenta la intensidad del campo eléctrico en el centro del condensador y debilita éste en la periferia, o sea, en el condensador el campo se debilita desde el centro a la periferia. A cierta distancia del centro la intensidad se anula, cambiando posteriormente su dirección en contraria (fig. 262, d).

La característica cuantitativa de este fenómeno puede obtenerse debido a la solución de la ecuación para la intensidad E del campo, partiendo de la fórmula (62.5). En el caso dado existen una componente de E y la simetría axial del problema, es decir, $E = E(r)$, donde r es la distancia desde el eje del condensador hasta el punto en el que se determina la intensidad. Suponiendo, como de costumbre,

$$E(r, t) = E_0(r) e^{i\omega t}$$

y considerando para definitud que entre las armaduras del condensador $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, obtenemos para $E_0(r)$ la ecuación

$$\frac{d^2 E_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_0}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2} E_0 = 0,$$

escrita en coordenadas cilíndricas. Esta ecuación lleva el nombre de ecuación de Bessel con índice nulo, cuya solución se escribe en forma de $J_0(\omega r/c)$. Las funciones de Bessel están bien estudiadas. La fig. 262, d muestra la marcha de la función $J_0(\omega r/c)$. Las raíces mínimas de la función con índice nulo son $\xi_1 = 2,40$; $\xi_2 = 5,52$; $\xi_3 = 8,65$; . . . Tendremos en cuenta que $\omega/c = 2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de la onda electromagnética con frecuencia ω en el vacío. Por eso las distancias en las que la intensidad de corriente en el condensador se anula, son $r_1 = \lambda \xi_1 / (2\pi)$.

Por ejemplo, la primera vez la intensidad se reduce a cero a la distancia $r_1 = \lambda \xi_1 / (2\pi) = 0,38\lambda$. Merced a este comportamiento de la intensidad, el condensador cesa de ser una capacidad pura. Está claro que los campos magnéticos en el condensador se hacen esenciales, pero eso significa que comienza a desempeñar su papel la inductancia. Con otras palabras, el condensador pierde también a frecuencias elevadas sus funciones iniciales de capacidad.

Radiación. En el § 61 se mostró que la potencia de emisión del oscilador crece proporcionalmente al cuarto grado de la frecuencia ($\sim \omega^4$), es decir, con gran rapidez. Pero ello significa que al pasar las corrientes de alta frecuencia por los cables, tiene lugar una radiación intensa de la energía electromagnética. A una frecuencia alta, las pérdidas se hacen tan considerables que resulta inútil

transmitir la energía por cables. Es necesario hallar otros procedimientos para transportar la energía electromagnética de alta frecuencia, ya que los métodos elaborados para las frecuencias bajas, de generación y transporte de las oscilaciones electromagnéticas son inaplicables para frecuencias muy altas.

Guías de ondas. La idea principal de la guía de ondas es dirigir las ondas electromagnéticas por cierto canal, reduciendo al mínimo las pérdidas posibles durante la propagación. Con este fin, por lo visto, es necesario excluir en lo posible la excitación de las corrientes de conducción, así como excluirla penetración de la energía electromagnética a través de la pared del canal. De modelo más sencillo de guía de ondas sirve un tubo vacío, dentro del cual se propagan las ondas electromagnéticas. Examinemos las peculiaridades principales de estas ondas electromagnéticas en el ejemplo más simple: en una guía de ondas rectilínea rectangular.

Guía de ondas rectangular. Las paredes de este dispositivo se consideran completamente conductoras, sus dimensiones y la posición del sistema de coordenadas se dan en la fig. 263. En general, en las guías de ondas pueden propagarse muchos tipos de ondas. Examinemos uno de ellos.

Supongamos que el vector eléctrico de la onda esté orientado a lo largo del eje Y . Para simplificar la situación tomemos la longitud de la guía de ondas infinita a lo largo del eje Y . Esto nos libera de tener en cuenta las condiciones de frontera para el vector E en las superficies de la guía de ondas, paralelas al plano XZ y facilita considerablemente la solución de la tarea. Además, para la extensión infinita de la guía de ondas en dirección del eje Y el problema puede examinarse con el método de representaciones, lo que permite aclarar la situación física y la esencia de los procesos que transcurren al propagarse las ondas en la guía de ondas.

Así pues, la tarea se reduce a dos mediciones. La ecuación de onda para la intensidad del campo eléctrico tiene el aspecto

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (66.1)$$

donde $E = E_y(x, z, t)$.

Ya que las paredes de la guía de ondas son completamente conductoras, la condición de frontera para E es así

$$E(x, 0, t) = 0, \quad E(x, a, t) = 0. \quad (66.2)$$

Busquemos la solución de la ecuación como

$$E = E_0 \operatorname{sen} k_z z e^{i(\omega t - k_x x)}, \quad (66.3)$$

con la particularidad de que para satisfacer las condiciones de frontera (66.2) es necesario hacer

$$k_z a = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (66.4)$$

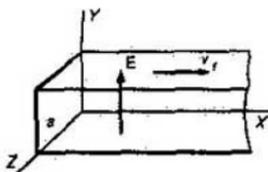


Fig. 263
Guía de ondas rectangular

Es obvio que la solución (66.3) satisface la condición de ausencia de cargas libres en la guía de ondas: $\text{div } \mathbf{E} = \partial E_y / \partial y = 0$, $E_x = E_z = 0$. Poniendo (66.3) en (66.1), obtenemos

$$(-k_x^2 - k_z^2 + \omega^2/c^2) E = 0. \quad (66.5)$$

Esta igualdad puede satisfacerse sólo a condición de que

$$-k_x^2 - k_z^2 + \omega^2/c^2 = 0, \quad (66.6)$$

de la que se desprende que

$$k_x = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2 n^2/a^2}. \quad (66.7)$$

Frecuencia límite. La onda electromagnética se propaga en la guía de ondas sin amortiguación si en la fórmula (66.3) la magnitud k_x es real. Esto significa que en la expresión (66.7) el radicando no debe ser negativo. De aquí obtenemos la condición para la cual en la guía de ondas se propagan las ondas:

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \geq 0 \quad (66.8)$$

o bien

$$\omega \geq \frac{\pi c}{a} n. \quad (66.9)$$

Así pues, para el valor prefijado de n , que caracteriza la forma de la onda en dirección del eje Z , existe una **frecuencia límite**. Las ondas electromagnéticas con menor frecuencia no pueden propagarse en la guía de ondas. El valor de esta frecuencia se obtiene de (66.9) para $n = 1$:

$$\omega_0 = \pi c/a. \quad (66.10)$$

La presencia de la frecuencia límite significa, con otras palabras, la existencia de la onda con longitud máxima de onda que puede propagarse en la guía de ondas. Teniendo en cuenta que $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$, obtenemos para la longitud límite de onda

$$\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 = 2a. \quad (66.11)$$

Esta igualdad posee un sentido geométrico muy claro: *en la guía de ondas en cuestión pueden propagarse sólo las ondas, cuya longitud de onda es inferior a la sección transversal doble de la guía de ondas.*

La presencia de la frecuencia límite es un rasgo característico de todas las guías de ondas, a pesar de que su valor concreto es distinto para diversas guías de ondas.
Velocidad de fase. Conforme a la expresión (66.3), esta velocidad se encuentra de la condición

$$\omega t - k_x x = \text{const}, \quad (66.12)$$

de donde

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2/a^2}} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \pi^2 c^2/a^2}} > c, \quad (66.13)$$

es decir, *la velocidad de fase de las ondas electromagnéticas en la guía de ondas supera la velocidad de la luz. Eso es también un rasgo característico de las guías*

de ondas, aunque el valor concreto de la velocidad de fase depende de las propiedades de la guía de ondas y los tipos de ondas.

Teniendo en cuenta las expresiones (66.10) y (66.11), la fórmula (66.13) es cómodo representarla como

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_0/\omega)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}} \quad (66.14)$$

Por consiguiente, $\omega \geq \omega_0$, $\lambda \leq \lambda_0$, ya que en caso contrario la velocidad de fase se hace imaginaria, es decir, no puede haber propagación de las ondas.

Longitud de ondas en la guía de ondas. Según la definición de longitud de onda, tenemos

$$\lambda_0 = v_1 T = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda)^2}} > \lambda, \quad (66.15)$$

donde $\lambda = cT$. La longitud de onda en la guía de ondas es siempre superior a la longitud de onda en el espacio libre. Elevando los dos miembros de (66.15) al cuadrado y tomando sus recíprocas, obtenemos

$$1/\lambda_0^2 = 1/\lambda^2 - 1/\lambda_0^2 \quad (66.16)$$

La relación (66.16) es válida para las guías de ondas de cualquier forma, a pesar de ser deducida para un caso particular.

Aplicación del método de representaciones al análisis de las guías de ondas. Para aclarar con más precisión el cuadro físico de la propagación de las ondas en la guía de ondas y el sentido de las relaciones obtenidas analicemos el ejemplo por el método de representaciones. A título de emisor elemental tomemos un conductor recto infinito, recorrido por la corriente alterna de frecuencia ω . Este emisor, análogamente al oscilador (dipolo) de Hertz, emite ondas, cuyo vector eléctrico está dirigido paralelamente al conductor. Por lo visto, en caso de un conductor infinitamente largo las ondas serán cilíndricas. Sin embargo, a una distancia suficientemente grande respecto al emisor se las puede considerar planas.

La fig. 264 muestra las proyecciones de las paredes de la guía de ondas sobre el plano XZ. El vector eléctrico de las ondas está orientado perpendicularmente al plano del diseño. Coloquemos el primer emisor en el medio de la guía de ondas a la distancia de $a/2$ de cada una de sus paredes perpendiculares al plano del diseño. La fase de las oscilaciones del emisor se denota por un punto, es decir, la corriente en el momento dado fluye hacia nosotros. El emisor radia ondas por todas las direcciones y por eso en las paredes de la guía de ondas la intensidad del campo es diferente de cero. La tarea consiste en elegir el sistema de emisores de manera que la intensidad sumaria de sus campos en las paredes de la guía de ondas durante todo el tiempo sea nula. El campo que satisfaga

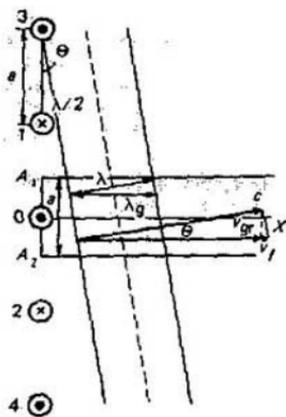


Fig. 264
Estudio del guía de ondas rectangular aplicando el método de representaciones

esta condición será precisamente el campo buscado en la guía de ondas. Claro que cuando las ondas se propagan de emisores imaginarios y las paredes de la guía de ondas se consideran también imaginarias, las ondas imaginarias las atraviesan sin obstáculos.

Para que en la pared A_1 de la guía de ondas se liquide el campo, engendrado por el emisor O , es necesario colocar a la distancia $a/2$ de ella el emisor I que oscile con un desplazamiento de las oscilaciones en un semiperíodo respecto al emisor O . Por lo tanto, el emisor I debe oscilar en una fase contraria al emisor O , lo que se indica con el signo $(-)$ («la corriente parte de nosotros»). Las ondas del emisor I llegan a los puntos de la pared A_1 de la guía de ondas durante el mismo lapso que del emisor O . Ya que las fases de la onda desde O y I en la pared A_1 se diferencian en π , la suma de las intensidades de estas ondas es nula. De la misma manera el emisor 2 apaga en la pared A_2 la emisión O .

En cambio, el emisor I crea un campo en la pared A_2 y el emisor 2 , en la pared A_1 . Es necesario añadir los siguientes emisores que apaguen dichos campos. Para suprimir la emisión del 1 en la pared A_2 , es indispensable coger el emisor 4 y para suprimir la emisión del 2 en la pared A_1 sirve el emisor 3 , etc., hasta el infinito. La intensidad del campo originado por un sistema infinito de semejantes emisores, es nula en las paredes A_1 y A_2 . Por consiguiente, el campo obtenido satisface las ecuaciones de Maxwell siendo la superposición de los campos, cada uno de los cuales satisface estas ecuaciones y es en sí una onda electromagnética en la guía de ondas. El campo fuera de la guía de ondas tiene un significado auxiliar, por lo que no nos interesa.

Carácter discreto de las direcciones de propagación de las ondas planas que provienen de un sistema de emisores. De un emisor individual las ondas planas se propagan en todas las direcciones. Pero de un sistema de emisores las ondas planas pueden propagarse sólo en direcciones bien determinadas, pero no cualesquiera. Semejantes direcciones pueden ser sólo aquellas, en las cuales las ondas planas de emisores aislados se amplifican mutuamente. Eso puede ocurrir sólo cuando la diferencia de los recorridos de las ondas, emitidas por los emisores vecinos, sea igual a un número entero de longitudes de ondas con una mitad, ya que los emisores vecinos radian las ondas en oposición de fase. Como consecuencia resulta que en la dirección en cuestión de todos los emisores se propagan ondas con una diferencia de fases de un número entero de períodos y, por lo tanto, estas ondas se amplifican. En la fig. 264 la dirección de propagación de las ondas se caracteriza por el ángulo θ . La condición de amplificación mutua de las ondas tiene el aspecto

$$a \sin \theta = \lambda (m + 1/2) \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (66.17)$$

La condición análoga puede escribirse para las ondas que se propagan por la otra parte respecto al eje de la guía de ondas, es decir, para los ángulos θ negativos.

Longitud de onda de corte. La condición (66.17) muestra que para cada longitud de onda existe un ángulo de propagación, mínimo respecto al eje, que se alcanza para $m = 0$, así como el valor máximo del número m para el que el ángulo es igual a $\theta = \pi/2$, o sea, la onda se propaga perpendicularmente a la

longitud de la guía de ondas. Siendo la longitud de onda bastante grande, ya $m = 0$ nos lleva a la condición $\sin \theta = 1$, es decir, esta onda puede propagarse sólo perpendicularmente al eje de la guía de ondas. Eso significa que las ondas con dicha longitud de onda y mayores no pueden propagarse en la guía de ondas. Esto es precisamente la longitud de onda de corte λ_0 que se determina por la fórmula (66.17) para $\sin \theta = 1$ y $m = 0$:

$$a = \lambda_0/2, \quad (66.18a)$$

lo que coincide con (66.11). A esta longitud de onda le corresponde la frecuencia límite de (66.10).

Longitud de onda y velocidad de fase en la guía de ondas. La velocidad de fase es la velocidad de los puntos de la superficie de fase constante de la onda en dirección de la guía de ondas, es decir, la velocidad del punto de intersección del frente de la onda plana y las paredes de la guía de ondas. De la fig. 264 se ve que es igual a

$$v_t = c/\cos \theta. \quad (66.18b)$$

Tomando en la fórmula (66.17) la onda con $m = 0$, obtenemos $\sin \theta = \lambda/(2a)$ y representemos la expresión (66.18b) como

$$v_t = \frac{c}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{c}{\sqrt{1 - [\lambda/(2a)]^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_0/\omega)^2}}, \quad (66.19)$$

lo que coincide con (66.14). Así pues, *la velocidad de fase no está ligada con el movimiento en el espacio de cualquier objeto físico y la energía.* Puede imaginarse que en la fig. 264 el eje X representa el borde de la mesa de escribir y la línea que muestra el frente de la onda, es una regla. Entonces, para un ángulo θ , bastante próximo a $\pi/2$, las velocidades pequeñas de desplazamiento de la regla perpendicularmente a su longitud, conducen a las velocidades del punto de contacto entre la regla y el borde de la mesa que superan la velocidad de la luz. Está claro que la existencia de esta velocidad no está en contradicción con la restricción que pone la teoría de la relatividad sobre la velocidad del movimiento de los objetos físicos y la propagación de las interacciones.

La longitud de onda λ_0 se determina también como consecuencia de la construcción geométrica en la fig. 264:

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{\cos \theta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}}, \quad (66.20)$$

lo que coincide con (66.15). De la fórmula (66.20) se desprende también la expresión (66.16).

Velocidad de grupo. Está claro que la velocidad de fase no representa la velocidad de movimiento de la energía de la onda a lo largo de la guía de ondas. La energía en la onda plana se mueve en el vacío con una velocidad c perpendicularmente al frente de onda. En dirección del eje de la guía de ondas la velocidad de movimiento de la energía se determina por la proyección de la velocidad c sobre el eje. Esta velocidad se denomina de **grupo**. Como se ve de la

fig. 264, es igual a

$$v_g = c \cos \theta = c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}. \quad (66.21)$$

La velocidad de grupo es siempre inferior a la velocidad de la luz. Su nombre lo recibió debido a que es igual a la velocidad de la cresta de la amplitud sumaria del grupo de ondas con frecuencias próximas que se propagan con distintas velocidades de fase, dependientes de la frecuencia. El conjunto de ondas con diferentes frecuencias en la guía de ondas forma un grupo de ondas, cuya dependencia de las velocidades de fase respecto a la frecuencia se determina por la fórmula (66.14). La propiedad física más importante de la velocidad de grupo ya se anunció: es la velocidad de movimiento de la energía, relacionada con las ondas.

Relación entre las velocidades de fase y de grupo. Multiplicando término por término las fórmulas (66.21) y (66.19), obtenemos

$$v_f v_g = c^2. \quad (66.22)$$

Esta relación es fundamental en la teoría de propagación de las ondas y tiene carácter universal, a pesar de que se obtuvo para un ejemplo particular y aplicando un método especial.

Campo magnético. La inducción del campo magnético de la onda plana es perpendicular a la intensidad de su campo eléctrico. Por eso los vectores de inducción magnética se encuentran en planos, paralelos al plano de la fig. 264. Dado que las ondas planas se propagan bajo un ángulo al eje de la guía de ondas, la inducción del campo magnético de cada una de las ondas planas posee componentes a lo largo del eje de la guía de ondas y perpendicularmente a ella.

Lo mismo puede decirse de la inducción del campo magnético de la superposición de las ondas planas que forman una onda en la guía de ondas. Esto significa que las ondas electromagnéticas que se mueven en la guía de ondas no son puramente transversales: tienen una componente de inducción del campo magnético en dirección de la propagación. En otros casos pueden haber tipos de ondas cuando existe la componente de la intensidad del campo eléctrico a lo largo de la dirección de la propagación, etc. Es necesario señalar que las ondas en la guía de ondas, en general, no son homogéneas.

Clasificación de las ondas en la guía de ondas. La siguiente clasificación de las ondas en las guías de ondas se considera general:

1. Las ondas transversales magnéticas (ondas T.M.) que se determinan por la exigencia $H_x = 0$, es decir, por la ausencia de la componente de la intensidad del campo magnético en dirección de la propagación de las ondas. Puede mostrarse que en este caso todas las características de las ondas se expresan sólo a través de E_x .

2. Las ondas transversales eléctricas (ondas T.E.), definidas por la exigencia $E_x = 0$. En este caso las soluciones se expresan sólo mediante H_x .

3. Ondas transversales electromagnéticas (ondas T.E.M.), determinadas por las exigencias $E_x = 0$, $H_x = 0$.

4. Ondas híbridas cuando al mismo tiempo $H_x \neq 0$ y $E_x \neq 0$. Ellas surgen cuando las condiciones de frontera requieren que E_x y H_x sean distintos de cero simultáneamente, lo que se realiza en las guías de ondas reales, cuya conductividad de las paredes es finita.

Resonadores. Examinemos un condensador, cuya gráfica de variación de la intensidad del campo en frecuencias altas se da en la fig. 262, d. En la superficie cilíndrica de radio r_1 , el campo eléctrico está ausente. Esto significa que el vector de Poynting en dicha superficie es nulo y, por lo tanto, no hay movimiento de energía a través de ella. Consideremos que esta superficie cilíndrica es un conductor ideal que une las armaduras del condensador. El campo eléctrico en su superficie, como siempre, permanece nulo. El campo magnético no es igual a cero y sus líneas de fuerza son circunferencias, concéntricas con los puntos del eje del cilindro. A lo largo del conductor cilíndrico circulan las corrientes de una placa del condensador a otra, como se desprende de la condición de frontera (38.35) para la componente tangencial del vector \mathbf{H} . Ahora todo el volumen cerrado cilíndrico, limitado por las paredes completamente conductoras, puede ser aislado y abandonado a su suerte. El campo eléctrico en él oscilará con una frecuencia ω y con esta misma frecuencia tendrá lugar la recarga de las placas del condensador. El volumen cerrado, dentro del cual suceden las oscilaciones del campo electromagnético, se denomina resonador. En ausencia de pérdidas de energía electromagnética la frecuencia de las oscilaciones del campo se llama frecuencia propia (o natural) del resonador. Semejante resonador se denomina cilíndrico. En el resonador, lo mismo que en la guía de ondas, pueden existir oscilaciones y ondas estacionarias de distintos tipos. Ellas poseen diferentes frecuencias de resonancia. Para el tipo de oscilaciones en el condensador cilíndrico, examinado ahora mismo, las frecuencias de resonancia ω_l de las oscilaciones son iguales a $\omega_l = \xi_l c / r_0$, donde ξ_l son las raíces de la función de Bessel con índice nulo. Así pues, el resonador para este tipo de oscilaciones tiene no una frecuencia de resonancia, sino una cantidad inmensa. Para otros tipos posibles de oscilaciones se obtienen otras frecuencias de resonancia. En el resonador real existen pérdidas de energía y las oscilaciones resultan ser amortiguadas. La terminología y los conceptos, relacionados con las oscilaciones en los resonadores, coinciden totalmente con los que se utilizan al estudiar las vibraciones mecánicas.

La peculiaridad característica de cualquier guía de ondas es la existencia de la frecuencia límite. En cualquier guía de ondas la velocidad de fase de las ondas electromagnéticas es mayor que la velocidad de la luz.

Problemas

- 9.1. Determinar la potencia media de emisión para el cuadro con corriente $I = I_0 \cos \omega t$. El área del cuadro es σ . Considerar que $I_0 = 10$ A, $\sigma = 100$ cm² y $\omega = 10^8$ s⁻¹.
- 9.2. Haciendo uso de los datos del problema 9.1, hallar la densidad máxima del flujo de emisión en el plano del cuadro con corriente a la distancia de 200 m de él.
- 9.3. Determinar el brazo del dipolo si la potencia de su emisión es igual a la potencia de emisión del cuadro con corriente, dado en el problema 9.1. La frecuencia de las oscilaciones del dipolo es igual a la frecuencia de las oscilaciones de la intensidad de la corriente en el cuadro y cada una de las cargas del dipolo es igual a $|q| = 10^{-4}$ C.

- 9.4. A una intensidad del campo eléctrico $E \approx 30$ kV/cm, tiene lugar la descarga disruptiva en el aire. ¿Pará qué densidad del flujo de energía de las ondas electromagnéticas planas de una frecuencia no muy alta transcurre la descarga disruptiva en el aire?
- 9.5. Una onda electromagnética polarizada plana con frecuencia angular $\omega = 10^8$ s⁻¹ incide de la arista sobre el cuadro de conductor, con la particularidad de que el vector de inducción de la onda está dirigido perpendicularmente al plano del cuadro. Las dimensiones lineales del cuadro son pequeñas en comparación con la longitud de onda. El área del cuadro $\sigma = 100$ cm², la densidad media del flujo de energía en la onda $\langle S \rangle = 1$ W/m². Hallar la fem máxima de inducción en el circuito.
- 9.6. En la órbita de la Tierra el flujo de energía solar de radiación es aproximadamente igual a $S = 1,4$ kW/m². Hallar el radio de una partícula esférica que es radiador completo y posee una densidad $\rho = 5$ g/cm³ y para la cual la presión de la luz en el espacio interplanetario es igual a la atracción solar. La masa del Sol es $m_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg y la constante de gravitación $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ N·m²/kg². La distancia entre la Tierra y el Sol es $R = 150 \cdot 10^6$ km.
- 9.7. Un condensador plano con placas redondas de radio a se conecta a una fuente continua de fem exteriores \mathcal{E}_{ext} . La distancia entre las placas varía lentamente por la ley armónica $d = d_0 + \Delta \sin \omega t$. Hallar la intensidad del campo magnético, originado por las corrientes de desplazamiento.
- 9.8. Un cuadro de n espiras que abarca un área S , yace en el plano XZ . En dirección del eje X se propaga una onda electromagnética plana, cuyo vector eléctrico es paralelo al eje Y : $E_y = E_0 \cos(\omega t - kz)$. Hallar la fuerza electromotriz, inducida en el cuadro. La longitud de onda es mucho mayor que las dimensiones lineales del cuadro.
- 9.9. El flujo de energía solar en la órbita de la Tierra es $S = 1340$ W/m². ¿Cuáles son las amplitudes de E_0 y B_0 de una onda electromagnética plana con semejante densidad de flujo de energía?
- 9.10. Como se desprende de la fórmula (65.14), la presión de la onda electromagnética sobre una superficie idealmente reflectora para un ángulo de incidencia θ es igual a $p_\theta = 2w \cos^2 \theta$, donde w es la densidad de la energía electromagnética en la onda incidente. Supongamos que sobre la superficie incide una radiación isotrópica, o sea, la densidad de los flujos de energía que llegan de todas las direcciones posibles, es la misma. Hallar la presión de la onda sobre la superficie.
- 9.11. Hallar la amplitud de la intensidad del campo eléctrico de la emisión de un dipolo eléctrico en el plano que atraviesa el dipolo perpendicularmente a su dirección, a una distancia de 10 km del dipolo, siendo la potencia de emisión del dipolo de 10 kW.
- 9.12. El medio entre las armaduras del condensador plano posee una constante dieléctrica ϵ y una conductividad pequeña γ (un dieléctrico no ideal). La capacidad del condensador es C . A las armaduras del condensador se les aplica una diferencia de potencial U , después de lo cual se aíslan. Hallar la ley de variación de la magnitud de la carga con el tiempo en cada una de las armaduras del condensador y la corriente de desplazamiento que circula por el condensador.

Respuestas

- 9.1. $\langle P \rangle = \mu_0 \omega^4 I_0^2 \sigma^2 / (12\pi c^3) = 0,124$ W. 9.2. $S_{\text{máx}} = \mu_0 \omega^4 I_0^2 \sigma^2 / (16\pi^2 c^3 r^2) = 0,47 \times 10^{-8}$ W/m². 9.3. $l = I_0 \sigma / (|q| c) = 3,3 \cdot 10^{-4}$ m = 0,33 mm. 9.4. $\langle S \rangle = [\epsilon_0 / (4\mu_0)]^{1/2} E_0^2 = 1,2 \cdot 10^3$ kW/cm² = 12 GW/m². 9.5. $\mathcal{E}_{\text{máx}}^{\text{ind}} = \sqrt{2 \langle S \rangle} \mu_0 (\epsilon_0 \mu_0)^{1/4} \sigma \omega = 9$ mV.
- 9.6. $r = \frac{3SR^2}{4Gm_{\text{sp}}} = 0,5 \cdot 10^{-7}$ m. 9.7. $H_\phi = -e_0 \mathcal{E}_{\text{ext}} \omega \Delta r \cdot \cos \omega t / [2 (d_0 + \Delta \sin \omega t)^2]$.
- 9.8. $\mathcal{E}^{\text{ind}} = nkSE_0 \sin \omega t$. 9.9. $E_0 = 1005$ V/m, $B_0 = 3,35 \cdot 10^{-6}$ T. 9.10. $p = w_{\text{tot}}/3$.
- 9.11. $E_0 = 0,095$ V/m. 9.12. $Q = CUe^{-\gamma t/\epsilon}$, $I_{\text{des}} = -(\gamma/\epsilon) CU \cdot e^{-\gamma t/\epsilon}$.

Fluctuaciones y ruido

Los ruidos en un circuito con corriente se determinan por el carácter discreto de los portadores de la carga y las fluctuaciones de la corriente. Los ruidos en principio son iliminables por completo, pero se pueden reducir. En condiciones determinadas pueden detectarse las señales útiles más abajo del nivel de los ruidos.

§ 67. Fluctuaciones en un circuito con corriente. Ruido de resistencia

Se analizan las causas físicas que determinan la existencia del ruido y se examinan las características cuantitativas del ruido en los circuitos con corriente.

Teorema de la equipartición de la energía respecto al grado de libertad. En la física estadística un gran papel lo desempeña la teoría acerca de que en estado de equilibrio termodinámico a cada grado de libertad del sistema le corresponde una misma energía, igual a $kT/2$ (k es la constante de Boltzmann y T , la temperatura termodinámica). La manifestación evidente de la validez de dicha afirmación es el movimiento browniano. La energía cinética media del movimiento de traslación $\langle mv^2/2 \rangle$ de la partícula browniana satisface la relación $\langle mv^2/2 \rangle = 3kT/2$, ya que existen tres grados de movimiento de traslación. **Aplicación del teorema de equipartición de la energía respecto a un galvanómetro de espejo.** Si en un hilo elástico se suspende libremente un espejito, según el teorema de equipartición de la energía, él no puede ser absolutamente inmóvil. Como consecuencia de la interacción del espejito y el movimiento térmico de las moléculas del aire, se excitan sus vibraciones de torsión y a cada grado de libertad debe corresponderle una energía $kT/2$. Recordemos que el teorema de equipartición de la energía por los grados de libertad se refiere no sólo a la energía cinética, sino también a la energía potencial del oscilador.

Designemos el módulo de torsión del hilo por D y el ángulo de desviación del espejo respecto a su posición de equilibrio por φ (fig. 265). La ecuación de las vibraciones de torsión tiene la forma

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi, \quad (67.1)$$

donde J es el momento de inercia del espejo respecto al eje de torsión. Multiplicando los dos miembros de (67.1) por $\dot{\varphi}$ e integrando la expresión obtenida, hallamos el principio de conservación de la energía:

$$1/2 J \dot{\varphi}^2 + 1/2 D \varphi^2 = \text{const.} \quad (67.2)$$

Puesto que a cada grado de libertad le corresponde una energía $kT/2$, de la fórmula (67.2) obtenemos

$$\langle 1/2 J \dot{\varphi}^2 \rangle = \langle 1/2 D \varphi^2 \rangle = 1/2 kT \quad (67.3)$$

y por lo tanto,

$$\langle \varphi^2 \rangle = kT/D. \quad (67.4)$$

Esto significa que el espejo no puede encontrarse en posición de equilibrio, sino que oscila alrededor de esta posición con el cuadrado medio del ángulo de



Fig. 265
Fluctuaciones de las vibraciones de torsión

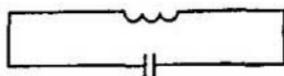


Fig. 266
Fluctuaciones en un circuito oscilante

desviación (67.4). De esta manera, la expresión (67.4) caracteriza la desviación del ángulo respecto al valor medio, es decir, describe las fluctuaciones. Está claro que si existe cierta vibración de torsión, según el principio de superposición, puede concluirse que la fórmula (67.4) caracteriza la fluctuación del cuadrado de la amplitud.

Fluctuaciones en un circuito oscilante. En un circuito oscilante (fig. 266) ocurren oscilaciones con la frecuencia $\omega = 1/\sqrt{LC}$, cuya esencia física consiste en la transformación mutua de la energía del campo eléctrico en el condensador y la energía del campo magnético en la inductancia. El principio de conservación de la energía tiene la forma

$$Q^2/(2C) + LI^2/2 = \text{const}, \quad (67.5)$$

donde Q es la carga en las armaduras del condensador e I , la intensidad de la corriente en el circuito.

Es imposible imaginarse un circuito que no tenga corrientes y un condensador en cuyas armaduras no surjan cargas. Hablando con mayor precisión, semejante situación puede crearse únicamente a la temperatura de 0 K. Para una temperatura, diferente de 0 K, el movimiento térmico de los electrones conduce a la aparición de cargas en las armaduras del condensador y de corrientes en el circuito. Según el teorema de equipartición, tenemos

$$\langle Q^2/(2C) \rangle = \langle LI^2/2 \rangle = kT/2. \quad (67.6)$$

Por consiguiente, el cuadrado medio de la carga en las armaduras del condensador y el cuadrado medio de la intensidad de la corriente son igua-

les a

$$\langle(Q)^2\rangle = kTC, \quad \langle(I)^2\rangle = kT/L. \quad (67.7)$$

Partiendo del principio de superposición, puede decirse que las expresiones (67.7) son en sí las fluctuaciones cuadráticas medias de las magnitudes de la carga e intensidad de la corriente en un circuito oscilante.

Distribución de las fluctuaciones respecto a las frecuencias. La fórmula (69.7) nos da sólo la magnitud media cuadrática completa de las fluctuaciones, sin decirnos de qué manera se distribuye respecto a las frecuencias. Para responder a esta pregunta es necesario resolver la ecuación de oscilaciones para el circuito, sobre el que actúan fuerzas aleatorias, representándolas en forma de una serie (integral) de Fourier respecto a las frecuencias:

$$U = \sum_{\omega} U_{\omega} e^{i\omega t}. \quad (67.8)$$

La ecuación (50.10) para las oscilaciones de la carga adquiere el aspecto

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = \sum_{\omega} U_{\omega} e^{i\omega t}, \quad (67.9)$$

de donde

$$Q = \sum_{\omega} \frac{U_{\omega} e^{i\omega t}}{-L\omega^2 + iR\omega + 1/C}, \quad (67.10)$$

lo que se comprueba diferenciando. Para el cuadrado medio de la amplitud $\langle |QQ^*| \rangle = \langle |Q|^2 \rangle$, de aquí hallamos

$$\langle |Q|^2 \rangle = \langle QQ^* \rangle = \left\langle \sum_{\omega, \omega'} \frac{U_{\omega} U_{\omega'}^* e^{i\omega t} e^{-i\omega' t}}{(-L\omega^2 + iR\omega + 1/C)(-L\omega'^2 - iR\omega' + 1/C)} \right\rangle. \quad (67.11)$$

Las fuerzas electromotrices que excitan las oscilaciones de diferentes frecuencias, son independientes y no correlacionadas entre sí. Por eso, al promediar, en la fórmula (67.11) desaparecen los términos con $\omega \neq \omega'$ y nos queda

$$\langle Q^2 \rangle = \langle |Q|^2 \rangle = \sum_{\omega} \frac{\langle U_{\omega}^2 \rangle}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2}, \quad (67.12)$$

donde $\langle Q^2 \rangle$ y $\langle U_{\omega}^2 \rangle$ son los valores medios de los cuadrados reales de las amplitudes de las magnitudes correspondientes.

Ahora pasemos al espectro continuo de frecuencias, ya que los cálculos anteriores se efectuaron para el espectro discreto sólo para simplificar los cálculos. El espectro real es continuo. Es necesario pasar de las magnitudes medias cuadráticas para las frecuencias del espectro discreto a las densidades de las magnitudes correspondientes.

El cuadrado medio de la carga total se forma de las contribuciones de las frecuencias aisladas. Por eso

$$\langle Q^2 \rangle = \int_0^{\infty} \frac{d \langle Q_{\omega}^2 \rangle}{d\omega} d\omega, \quad (67.13a)$$

donde $d \langle Q_{\omega}^2 \rangle / d\omega$ es la densidad de los cuadrados de las amplitudes de las oscilaciones de la carga y $d \langle Q_{\omega}^2 \rangle$, el cuadrado medio de la amplitud de las oscilaciones de la carga, correspondiente al intervalo de frecuencias $(\omega, \omega + d\omega)$. Bajo el signo de la suma en la fórmula (67.12) sustituyamos:

$$\langle U_{\omega}^2 \rangle \rightarrow \frac{d \langle U_{\omega}^2 \rangle}{d\omega} d\omega, \quad (67.13b)$$

comprendiendo por $d \langle U_{\omega}^2 \rangle / d\omega$ la densidad de la distribución de los cuadrados de las amplitudes de las tensiones respecto a las frecuencias. Después de semejante sustitución se puede en la fórmula (67.12) pasar de la suma a la integral. En definitiva obtenemos

$$\langle Q^2 \rangle = \int_0^{\infty} \frac{[d \langle U_{\omega}^2 \rangle / d\omega] d\omega}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2} = \int_0^{\infty} \frac{d \langle Q_{\omega}^2 \rangle}{d\omega} d\omega, \quad (67.14)$$

de donde

$$d \langle Q_{\omega}^2 \rangle = \frac{d \langle U_{\omega}^2 \rangle}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2}. \quad (67.15)$$

Ruido de resistencia. La energía media de las oscilaciones armónicas es proporcional al cuadrado de la amplitud. Por eso *la densidad del cuadrado medio de la amplitud de las oscilaciones caracteriza la densidad de su energía*. El análisis posterior se fundamenta en la suposición de que la densidad media de los cuadrados de las amplitudes $\left(\frac{d \langle U_{\omega}^2 \rangle}{d\omega} = A \right)$ no depende de la frecuencia. La argumentación de su validez se basa en el carácter aleatorio de las fuerzas electromotrices. Por eso la fórmula (67.14) puede escribirse así:

$$\langle Q^2 \rangle = A \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2}, \quad (67.16)$$

$$A = \frac{d \langle U_{\omega}^2 \rangle}{d\omega}.$$

La integral se calcula por los métodos elementales y nos lleva a la igualdad

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2} = \frac{\pi C}{2R}. \quad (67.17)$$

De la expresión (67.7), teniendo en cuenta las fórmulas (67.16) y (67.17), hallamos

$$d \langle U_{\omega}^2 \rangle = (2/\pi) kRT d\omega. \quad (67.18)$$

De aquí, basándose en la expresión (67.15), se desprende que

$$d \langle Q_{\omega}^2 \rangle = \frac{(2/\pi) kTR d\omega}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2}. \quad (67.19)$$

Es necesario prestar atención a que $\frac{d \langle U_{\omega}^2 \rangle}{d\omega}$ determina la densidad del cuadrado medio de la amplitud, referente al intervalo de las frecuencias circulares ω . Con mucha frecuencia se utiliza la densidad del cuadrado medio de la amplitud, no referente a la frecuencia circular $\omega = 2\pi/T$, sino que simplemente a la frecuencia $\nu = 1/T$, es decir, a la magnitud $d \langle U_{\nu}^2 \rangle / d\nu$. Teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi\nu$, $d\omega = 2\pi d\nu$, hallamos

$$\frac{d \langle U_{\omega}^2 \rangle}{2\omega} = \frac{1}{d\pi} \frac{d \langle U_{\nu}^2 \rangle}{d\nu}. \quad (67.20)$$

Entonces, [véase (67.18)]

$$d \langle U_{\nu}^2 \rangle = 4kTR d\nu, \quad (67.21)$$

es la fórmula de Nyquist: *el cuadrado medio de la amplitud de la tensión de las fluctuaciones es proporcional al intervalo de las frecuencias y depende sólo de la resistencia en el circuito y de la temperatura*. La existencia experimental de semejantes fluctuaciones fue descubierta por Johnson, por eso ellas se denominan ruido de Johnson o ruido de las resistencias.

Generador equivalente de ruido. Las fluctuaciones, determinadas por la resistencia R , cuyo cuadrado medio de la tensión se define por la fórmula (67.21), pueden representarse como el resultado de la acción del generador de fem U_{ν} y la resistencia interna R . El generador equivalente de corriente está shuntado por la resistencia R y se caracteriza (conforme a la ley de Ohm) por el cuadrado medio de la intensidad de la corriente:

$$d \langle I_{\nu}^2 \rangle = 4kT d\nu/R. \quad (67.22)$$

Potencia del ruido del generador. La antena, con cuya ayuda se reciben las radioseñales que a continuación se dirigen al receptor, es equivalente, por su papel en el circuito, a un generador con la correspondiente impedancia interna. Su adaptación al receptor consiste en hacer que la suma de las componentes reactivas de las impedancias de la antena y el receptor sean nulas y sus resistencias óhmicas iguales entre sí (véase el § 49). Entonces la potencia máxima que el generador (antena) puede entregar al receptor [(véase (49.35)], es igual a

$$P_{c.máx} = \langle U^2 \rangle / (4R), \quad (67.23)$$

donde $\langle U^2 \rangle$ es el cuadrado medio de la fem de la antena y R , su resistencia interna, igual a la resistencia de la carga.

Supongamos que la resistencia de carga R no efectúa por sí misma ningún ruido y es, por ejemplo, la resistencia óhmica que se mantiene en la cercanía de la temperatura de 0 K. Podemos imaginarnos en calidad de carga un receptor ideal que por sí mismo no posee ningún ruido interno. A pesar de ello, la señal que se recibe de la antena, va a contener un ruido, cuya potencia, de acuerdo

con las fórmulas (67.23) y (67.24), es igual a

$$dP_r = \frac{d\langle U_v^2 \rangle}{4R} = kT dv. \quad (67.24)$$

Este ruido en los auriculares se oír para una amplificación suficiente, y ningunos perfeccionamientos del receptor podrán eliminarlo. También se puede ver en la pantalla del oscilógrafo. El aumento del factor de amplificación del receptor eleva proporcionalmente en la salida del receptor tanto la señal útil, como también el ruido (67.24), suministrado a su entrada, sin cambiar la relación entre ellos.

Sensibilidad máxima. La señal puede detectarse si su potencia es mayor que la potencia del ruido. Por eso de la expresión (67.24) para la potencia mínima de la señal detectada (o demodulada) se obtiene la fórmula

$$dP_0 = kT dv, \quad (67.25)$$

válida para un receptor ideal. Esta potencia representa el umbral de sensibilidad del receptor.

La única posibilidad de aumentar la sensibilidad (para una temperatura fija) es la reducción de la anchura de la banda de frecuencias utilizadas dv . Pero en este caso disminuye la cantidad de información que la señal lleva en sí, y en cada caso existe su nivel inferior hasta el que se puede reducir la banda. Por ejemplo, para transmitir la voz por la radio mediante la modulación de amplitud sin gran distorsión es necesario tener una banda del orden de $dv = 10$ kHz. A temperatura ambiente ($T = 290$ K) eso nos da para la potencia detectada mínima:

$$dP_0 = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290 \cdot 10^4 \text{ W} = 4 \cdot 10^{-17} \text{ W}. \quad (67.26)$$

Para transmitir las imágenes de televisión la anchura de la banda debe ser del orden de 4 MHz, ya que la capacidad de información para restablecer la imagen es mucho mayor que para restituir la voz. Para estas condiciones la potencia mínima de la señal, suministrada a un receptor ideal, es de $1,6 \cdot 10^{-14}$ W. **Temperatura equivalente de ruido del receptor.** En realidad el propio receptor es una fuente de ruidos complementarios que se superponen a los ruidos de la antena. Por eso la potencia dP_1 de la señal mínima, que puede detectarse, es mayor que dP_0 en dP_{rec} del ruido interno del receptor:

$$dP_1 = dP_0 + dP_{rec}. \quad (67.27)$$

La potencia dP_{rec} del ruido interno del receptor se acostumbra a expresarse por la fórmula (67.25) mediante la temperatura equivalente de ruido T_e en forma

$$dP_{rec} = kT_e dv. \quad (67.28)$$

El receptor ideal posee $T_e = 0$ K. No obstante, en la práctica no hay necesidad de acercarse mucho a este límite. Es suficiente que la temperatura equivalente sea unas diez veces inferior a la temperatura correspondiente del generador (antena) para que el ruido complementario del receptor sea prácticamente insignificante.

Coefficiente de ruido. A temperatura ambiente, conforme a la fórmula (67.27), a un intervalo de frecuencias $dv = 1$ Hz le corresponde una potencia $dP_{01} = 4 \cdot 10^{-21}$ W. La característica de ruido del receptor se describe por el coeficiente de ruido

$$F = \frac{dP_1}{dP_{01}} \quad (67.29)$$

Por lo general se expresa en decibelios.

Relación señal/ruido. La señal se detecta con tanto mayor fiabilidad, cuanto más supera el nivel del ruido, lo que es muy importante, por ejemplo, para la transmisión cualitativa y la reproducción de las obras musicales. Esta característica de los dispositivos de recepción y reproducción se determina por la relación de la amplitud de la tensión de la señal respecto a la amplitud de la tensión del ruido. Ya que esta razón en condiciones corrientes es un número muy grande, se expresa en decibelios, según la fórmula

$$N = 20 \log \frac{U_s}{U_r} = 10 \log \frac{U_s^2}{U_r^2} \quad (67.30)$$

donde U_s y U_r son las amplitudes de la tensión de la señal y el ruido, respectivamente.

Examinemos como ejemplo la relación señal/ruido para un triodo a vacío (fig. 267). La señal se suministra a la entrada del circuito entre la rejilla y el cátodo. La fuente de la señal se caracteriza por la fuerza electromotriz U_g y la resistencia interna R_1 . La potencia del ruido de la resistencia del generador, a base de la expresión (67.21), es igual a

$$4kT dv = U_{r1}^2 / R_1 \quad (67.31)$$

donde U_{r1} es la fem del generador equivalente de ruido que se conecta en el circuito en serie con R_1 y el generador U_g .

Otra fuente de ruido es la resistencia R_2 , de la que se toma la tensión. La potencia de ruido de esta fuente es

$$4kT dv = U_{r2}^2 / R_2 \quad (67.32)$$

donde U_{r2} es la fem del generador equivalente de ruido.

Para calcular la potencia de ruido en la rejilla tomemos en consideración que la carga para el generador de ruido U_{r1} es la resistencia R_2 y para el generador de ruido U_{r2} , la resistencia R_1 . Está claro que los generadores de ruido funcionan independientemente y por eso el cuadrado medio de la tensión del ruido total es igual a la suma de los cuadrados medios de las tensiones de ruidos, creados por cada uno de los generadores.

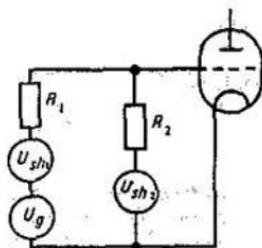


Fig. 267
Para calcular el ruido en la rejilla del triodo a vacío

Por esta razón, para el cuadrado medio de la tensión de ruido en la rejilla obtenemos

$$U_r^2 = \left(\frac{U_{r1}}{R_1 + R_2} R_2 \right)^2 + \left(\frac{U_{r2}}{R_1 + R_2} R_1 \right)^2 = \\ = 4kT \, dv \left[\frac{R_1 R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} + \frac{R_2 R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} \right] = 4kT \, dv \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (67.33)$$

Tomemos en consideración que el cuadrado medio de la amplitud de la señal en la rejilla es

$$U_s^2 = \left(\frac{U_g}{R_1 + R_2} R_2 \right)^2. \quad (67.34)$$

De las fórmulas (67.33) y (67.34) obtenemos la relación entre el cuadrado medio de la tensión de la señal y el cuadrado medio de la tensión de ruido en la rejilla:

$$\frac{U_s^2}{U_r^2} = \frac{U_g^2}{4kT \, dv} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{R_1} = \frac{P}{kT \, dv} \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (67.35)$$

donde $P = U_g^2/(4R_1)$ es la potencia máxima de la señal que entrega el generador al circuito exterior [véase (67.23)]. De la fórmula (67.35) se ve que *para la adaptación total de la carga al generador* ($R_2 = R_1$) *la relación señal/ruido no es la mejor. Al contrario, para la desadaptación, aumentando la resistencia de la carga* R_2 , *puede mejorarse dicha relación aproximadamente el doble.*

A esta misma conclusión puede llegarse estimando la sensibilidad. La potencia mínima de la señal del generador que en la rejilla aún se puede diferenciar del ruido, se obtiene de la fórmula (67.35) si $U_s^2/U_r^2 = 1$:

$$P_1 = kT \, dv \frac{R_1 + R_2}{R_2}. \quad (67.36)$$

Por lo visto, la potencia detectada mínima durante la adaptación de la carga al generador ($R_2 = R_1$) es igual a $2kT \, dv$ y durante la desadaptación ($R_2 \gg R_1$), a $kT \, dv$, es decir, *en el caso de desadaptación de la carga del generador la sensibilidad aumenta.*

Si en el circuito en cuestión de generador sirve la antena, todas estas conclusiones son aplicables para el sistema antena—receptor.

Durante la adaptación total de la carga al generador la relación señal/ruido no es la mejor. Se puede mejorar aproximadamente el doble si durante la desadaptación de la carga al generador se aumenta la resistencia de la carga R_2 . A esta misma conclusión puede llegarse mediante la estimación de la sensibilidad: durante la desadaptación de la carga al generador, aumentando la resistencia de la carga R_2 , la sensibilidad crece.

§ 68. Ruido de agitación térmica y ruido de corriente

Se examina la causa física de la aparición del ruido de agitación térmica y se analiza su distribución respecto a la frecuencia. Se citan las características fundamentales del ruido de corriente.

Fuente del ruido de agitación térmica. La corriente eléctrica es en sí un movimiento de cargas elementales discretas y no un flujo continuo de carga. Por eso nos da una sucesión de impulsos de corrientes, cada uno de los cuales se determina por la llegada de un electrón aislado al punto en cuestión. La corriente que atraviesa cierta superficie se parece a un flujo de perdigones menudos a través de ella, lanzados desde cierto dispositivo y distribuidos caóticamente respecto al tiempo. Está claro que la cantidad de perdigones menudos que intersecan la superficie en pequeños lapsos iguales consecutivos, sufrirá fluctuaciones considerables. De manera análoga, debido al carácter discreto de las cargas fluctuará la intensidad de la corriente. Dichas fluctuaciones se denominan **ruido de agitación térmica.**

Distribución del ruido según las frecuencias. La llegada de cada electrón equivale a un impulso de corriente, cuya duración es extremadamente pequeña. Para el electrón puntual es necesario considerarla nula y el impulso de corriente infinito, es decir, el impulso se representa por la función δ . Puesto que la carga que contiene el impulso de corriente es igual a la carga del electrón e , la corriente determinada por la llegada del electrón en el momento de tiempo t_1 , puede representarse en la forma

$$i(t) = e\delta(t - t_1). \quad (68.1)$$

Sea T un intervalo grande de tiempo, durante el cual llegan, en término medio, N electrones. La intensidad media de la corriente determinada por el acceso de un electrón en este intervalo de tiempo, es igual a $\langle i \rangle = e/T$ y la intensidad media de la corriente, definida por la llegada de N electrones, se da por la expresión $\langle I \rangle = N \langle i \rangle = Ne/T$. Pero los electrones acuden no uniformemente, como consecuencia de lo cual surgen las fluctuaciones de corriente que originan el ruido. Para determinar la composición espectral del ruido representemos la intensidad de la corriente $i(t)$ en forma de la serie de Fourier en el intervalo $(-T/2, T/2)$:

$$i(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (\omega = 2\pi/T), \quad (68.2)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(t) \cos n\omega t dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (68.3a)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(t) \sin n\omega t dt \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (68.3b)$$

Teniendo en cuenta la regla de integración con la función δ

$$\int f(t) \delta(t - t_1) dt = f(t_1),$$

de las fórmulas (68.3a) y (68.3b), considerando (68.1), obtenemos

$$a_n = \frac{2e}{T} \cos n\omega t_1, \quad b_n = \frac{2e}{T} \sin n\omega t_1. \quad (68.4)$$

Entonces, [véase (68.2)]

$$i(t) = \frac{e}{T} + \frac{2e}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega(t - t_1). \quad (68.5)$$

El valor medio del cuadrado de la intensidad de la corriente de la n -ésima componente es igual a

$$\langle i_n^2 \rangle = \frac{4e^2}{T^2} \left\langle \cos^2 \frac{2\pi n}{T} t \right\rangle = \frac{2e^2}{T^2}. \quad (68.6)$$

Puesto que los electrones aislados se mueven en desorden e incorrelacionadamente uno con otro, sus contribuciones en el desarrollo de la serie de Fourier para la intensidad de la corriente se diferenciarán por la fase. Al calcular el cuadrado de la fluctuación de la intensidad de la corriente, la promediación respecto a la fase anula todos los términos con frecuencias desiguales y en la serie quedarán sólo los términos con las mismas frecuencias. Por esta razón, para el cuadrado medio de fluctuaciones de la n -ésima componente de Fourier de la intensidad de la corriente para N electrones que acuden durante el tiempo T , tenemos

$$\langle T_n^2 \rangle = N \langle i_n^2 \rangle = 2e^2 N / T^2 = 2eI_0 / T, \quad (68.7)$$

donde $I_0 = eN/T$ es la intensidad media de la corriente.

La cantidad de componentes de la serie de Fourier, cuyas frecuencias están entre ν y $\nu + d\nu$, es igual a $T d\nu$, ya que estas componentes se encuentran la una de la otra a distancias de $1/T$ iguales según las frecuencias. El intervalo T puede considerarse muy grande y la distancia entre las frecuencias vecinas $[(n+1)/T] - (n/T) = 1/T$, muy pequeñas.

Al sumar las contribuciones de estas componentes en el intervalo de frecuencias $d\nu$, obtenemos, a base de la fórmula (68.7), para la fluctuación cuadrática media de la intensidad de la corriente la siguiente relación:

$$d \langle I^2 \rangle = \langle I_n^2 \rangle T d\nu = 2eI_0 d\nu. \quad (68.8)$$

Esta fórmula describe el ruido de agitación térmica.

La relación (68.8) se denomina fórmula de Schottky. Señalemos que si en el intervalo espectral de frecuencias ν se incluyen sus valores negativos, el factor 2 en la fórmula (68.8) desaparece. Así se hace, por lo general, al utilizar la forma exponencial de las series o integrales de Fourier.

Ruido de corriente. A frecuencias muy pequeñas, surgen ruidos acondicionados por diversas heterogeneidades de las resistencias. El cuadrado medio de las

amplitudes de tensiones de este ruido decrece inversamente proporcional a la frecuencia.

El estudio experimental de este ruido, denominado ruido de corriente, conduce a la fórmula

$$\langle (\Delta U)^2 \rangle = \alpha I_0^2 / \nu, \quad (68.9)$$

donde α es una constante empírica que depende de la geometría de la resistencia y su material. En conductores metálicos voluminosos el ruido prácticamente no existe. En distinto género de resistencias de composición el ruido es muy grande.

La naturaleza de este ruido en la actualidad aún no se aclaró hasta el final. En cambio, al aumentar la frecuencia, su papel en todos los casos se hace despreciablemente pequeño.

Métodos de reducción del ruido. Los ruidos distorsionan la forma de la señal útil y es deseable disminuirlos. Desde el punto de vista cuantitativo, la relación entre la señal y el ruido se caracteriza mediante la relación señal/ruido. La tarea consiste en aumentar dicha relación.

La amplificación de la señal no nos conviene para este fin, ya que el amplificador cambia en una misma cantidad de veces tanto la señal, como el ruido, que llegan a su entrada y, además, al pasar la señal, el amplificador le añade su ruido interno. Por eso la amplificación disminuye la relación señal/ruido, es decir, empeora este índice y no puede servir de método para reducir los ruidos.

El ruido de la resistencia puede disminuirse a causa de la reducción de la temperatura en la que funcionan los dispositivos correspondientes. Este método se aplica en gran escala, pero también tiene sus límites. Primero, complica considerablemente el funcionamiento y, segundo, al enfriarse intensamente, los elementos de los dispositivos cambian sus características eléctricas, con la particularidad de que a veces ese proceso es irreversible.

El ruido de agitación térmica y el de corriente se debilitan al disminuir la intensidad de la corriente. El ruido de corriente disminuye también al crecer la frecuencia de la señal. El aumento de la frecuencia de la señal se restringe por las características de alta frecuencia de los circuitos y los elementos del circuito.

Todos los tipos de ruidos disminuyen al reducir la banda pasante. No obstante, la anchura de la banda pasante se limita por las propiedades de la señal, ya que cualquier señal posee una anchura finita y la reducción de la banda pasante más bajo de esta anchura provoca distorsiones esenciales de la señal, es decir, introduce un ruido nuevo.

Así pues, el mejoramiento de las características técnicas de los dispositivos para recibir las señales permite elevar la relación señal/ruido, pero choca con restricciones de principio. Por eso se elaboraron métodos de recepción de la señal que permiten superar estas restricciones. Uno de los métodos difundidos consiste en lo siguiente.

Supongamos que existe una señal que se repite periódicamente y está deformada mucho por el fondo originado por ruidos (fig. 268, a). El período de señales puede determinarse con una precisión suficiente, ya que el ruido no efec-

túa distorsiones del período. Después de eso puede sincronizarse el momento de medición de la señal con la periodicidad de su variación, es decir, ejecutar la medición del valor de la señal múltiples de veces en un mismo punto de su período, por ejemplo, en el punto a en la fig. 268; a . Cada medición, a causa de la superposición del ruido, nos da un valor diferente, pero el valor medio de

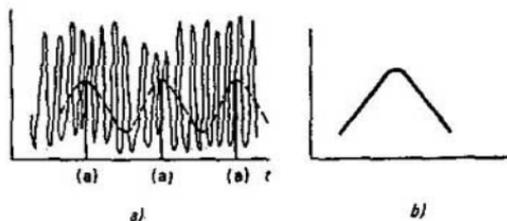


Fig. 268
Ilustración del proceso de separación de la señal en el fondo originado por ruidos fuertes.

una cantidad grande de mediciones conduce, con una precisión correspondiente, a la magnitud de la señal en este punto del período. En principio, esta precisión puede elevarse ilimitadamente, aumentando sólo de manera correspondiente la cantidad de mediciones. Después de realizar semejantes mediciones para distintos puntos del período, obtenemos la forma de la señal en un período sin distorsiones por ruido (fig. 268, b).

Apéndice

1. Unidades del SI utilizadas en el libro

Magnitud		Unidad		
Denominación	Designación	Dimensión	Denominación	Símbolo
Unidades básicas				
Longitud	<i>l</i>	L	metro	m
Masa	<i>m</i>	M	kilogramo	kg
Tiempo	<i>t</i>	T	segundo	s
Intensidad de la corriente	<i>I</i>	I	Amperio	A
Temperatura	<i>T</i>	Θ	Kelvin	K
Cantidad de substancia	<i>v</i>	N	mol	mol
Intensidad luminosa	<i>I</i>	J	Candela	cd
Unidades derivadas				
Velocidad	<i>v, u</i>	LT ⁻¹	metro por segundo	m/s
Aceleración	<i>a</i>	LT ⁻²	metro por segundo al cuadrado	m/s ²
Fuerza	<i>F</i>	LMT ⁻²	Newton	N
Presión	<i>p</i>	L ⁻² MT ⁻²	Pascal	Pa
Impulso	<i>p</i>	LMT ⁻¹	kilogramo-metro por segundo	kgm/s
Energía	<i>W, U, E</i>	L ² MT ⁻²	Julio	J
Potencia	<i>P</i>	L ² MT ⁻³	Vatio	W
Momento de inercia	<i>J</i>	L ² M	kilogramo-metro cuadrado	kg·m ²
Momento de fuerza	<i>M</i>	L ² MT ⁻²	Newton-metro	N·m
Momento de impulso	<i>L</i>	L ² MT ⁻¹	kilogramo-metro cuadrado por segundo	kg·m ² /s
Carga eléctrica	<i>Q, q</i>	TI	Culombio	C
Densidad volumétrica de la carga	<i>ρ</i>	L ⁻³ TI	culombio por metro cúbico	C/m ³
Densidad superficial de la carga	<i>σ</i>	L ⁻² TI	Culombio por metro cuadrado	C/m ²
Densidad lineal de la carga	<i>τ</i>	L ⁻¹ TI	Culombio por metro	C/m
Permitividad absoluta	<i>ε</i>	L ⁻² M ⁻¹ T ⁴ I ²	Faradio por metro	F/m
Constante eléctrica	<i>ε₀</i>	L ⁻² M ⁻¹ T ⁴ I ²	Faradio por metro	F/m
Permeabilidad relativa	<i>ε_r</i>		magnitud adimensional	
Intensidad del campo eléctrico	<i>E</i>	LMT ⁻² I ⁻¹	Voltio por metro	V/m
Flujo de intensidad del campo	<i>N</i>	L ² MT ⁻² I ⁻¹	Voltio-metro	V·m
Potencial del campo eléctrico	<i>φ</i>	L ² MT ⁻² I ⁻¹	Voltio	V
Momento eléctrico del dipolo	<i>p</i>	LTI	Culombio-metro	C·m
Polarización	<i>ρ</i>	L ⁻² TI	Culombio por metro cuadrado	C/m ²
Desplazamiento eléctrico	<i>D</i>	L ⁻² TI	Culombio por metro cuadrado	C/m ²
Flujo de desplazamiento eléctrico	<i>Ψ</i>	TI	Culombio	C
Capacidad eléctrica	<i>C</i>	L ⁻² M ⁻¹ T ⁴ I ²	Faradio	F
Densidad volumétrica de la energía de los campos magnético y eléctrico	<i>w</i>	L ⁻¹ MT ⁻²	Julio por metro cúbico	J/m ³
Tensión eléctrica	<i>U</i>	L ² MT ⁻² I ⁻¹	Voltio	V
Resistencia eléctrica	<i>R</i>	L ² MT ⁻² I ⁻²	Ohmio	Ω
Movilidad de los portadores electrificados	<i>b</i>	M ⁻¹ T ² I	Metro cuadrado por voltio-segundo	m ² /(V·s)

(Continuación del apéndice)

Magnitud			Unidad		
Denominación	Designación	Dimensión	Denominación	Símbolo	
Densidad de la corriente volumétrica	j	L^{-3}	Amperio por metro cuadrado	$A \cdot m^{-2}$	
Momento magnético del campo eléctrico	P_m	$L^3 I$	Amperio-metro cuadrado	$A \cdot m^2$	
Inducción magnética	B	$MT^{-2}T^{-1}$	Tesla	T	
Flujo magnético	Φ	$L^2 MT^{-2} I^{-1}$	Weber	Wb	
Intensidad del campo magnético	H	$L^{-1} I$	Amperio por metro	A/m	
Inductancia	L	$L^2 MT^{-2} I^{-2}$	Henry	H	
Permeabilidad magnética absoluta	μ	$LMT^{-2} I^{-2}$	Henry por metro	H/m	
Constante magnética	μ_0	$LMT^{-2} I^{-2}$	Henry por metro	H/m	
Permeabilidad magnética relativa	μ_r		magnitud adimensional		
Imanación	J	$L^{-1} I$	Amperio por metro	A/m	
Frecuencia de vibraciones	ν	T^{-1}	Hertzio	Hz	
Frecuencia angular de vibraciones	ω	T^{-1}	segundo a menos uno	s^{-1}	
Densidad del flujo de energía del campo electromagnético	S	MT^{-3}	Vatio por metro cuadrado	W/m^2	

II. Relación entre las fórmulas en el SI y el sistema Gauss (SGS)

A pesar de que en la actualidad ya se ha pasado al Sistema Internacional (SI), a veces aún se necesita saber transformar las fórmulas, escritas en un sistema de unidades a otro. Con este fin se utiliza la presente tabla:

Magnitud	SI	Sistema Gauss (SGS)	Magnitud	SI	Sistema Gauss (SGS)
Intensidad de la corriente	I	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} I$	Imanación	J	$(4\pi/\mu_0)^{1/2} J$
Densidad de la corriente	j	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} j$	Resistencia eléctrica	R	$(4\pi\epsilon_0)^{-1} R$
Carga eléctrica	Q	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} Q$	Momento dipolar eléctrico	p	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} p$
Densidad de la carga	ρ	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} \rho$	Momento magnético de la corriente	P_m	$(4\pi/\mu_0)^{1/2} P_m$
Conductividad	γ	$4\pi\epsilon_0 \gamma$	Potencial escalar	ϕ	$(4\pi\epsilon_0)^{-1/2} \phi$
Capacidad	C	$4\pi\epsilon_0 C$	Potencial vectorial	A	$[\mu_0/(4\pi)]^{1/2} A$
Intensidad del campo eléctrico	E	$(4\pi\epsilon_0)^{-1/2} E$	Velocidad de la luz	c	$(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2} c$
Desplazamiento eléctrico	D	$(\epsilon_0/4\pi)^{1/2} D$	Susceptibilidad magnética	χ	$4\pi\chi$
Intensidad del campo magnético	H	$(4\pi\mu_0)^{-1/2} H$	Susceptibilidad dieléctrica	κ	$4\pi\kappa$
Inducción magnética	B	$[\mu_0/(4\pi)]^{1/2} B$	Permitividad	ϵ	$\epsilon\epsilon_0$
Flujo de inducción magnética	Φ	$[\mu_0/(4\pi)]^{1/2} \Phi$	Permeabilidad magnética	μ	$\mu\mu_0$
Inductancia	L	$(4\pi\epsilon_0)^{-1} L$	Permitividad relativa	ϵ_r	ϵ/ϵ_0
Polarización	P	$4\pi\epsilon_0 P$	Permeabilidad magnética relativa	μ_r	μ/μ_0

Reglas para utilizar la tabla. Para transformar una relación, escrita en el SI, a la fórmula correspondiente en el sistema Gauss es indispensable cambiar el símbolo, que está en la columna «SI» por el de la columna «Sistema Gauss». Haciendo uso de esta regla en dirección inversa, puede pasarse de las fórmulas en el sistema Gauss a las fórmulas en el SI. Durante estos cambios las magnitudes mecánicas y otras no magnéticas y no eléctricas quedan invariables. Las derivadas respecto a las coordenadas y al tiempo también permanecen constantes.

Ejemplos de la utilización de la tabla.

1. Escribir la ecuación de Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t \quad (\text{«SI»})$$

en el sistema Gauss. Tenemos

$$\operatorname{rot} [(\epsilon_0 / 4\pi)^{-1/2} \mathbf{H}] = (\epsilon_0 / 4\pi)^{1/2} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\epsilon_0}{4\pi} \right)^{1/2} \mathbf{D} \right],$$

o sea,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

2. Escribir el vector de Poynting

$$\mathbf{S} = [c / (4\pi)] \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{sistema Gauss})$$

en el «SI». Tenemos

$$\mathbf{S} = \frac{(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}}{4\pi} [(\epsilon_0 / 4\pi)^{1/2} \mathbf{E} \times (\epsilon_0 / 4\pi)^{1/2} \mathbf{H}] = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Nota. La transformación de SI al sistema Gauss conduce siempre a un resultado correcto. Al pasar del sistema Gauss al SI pueden surgir errores si la fórmula en el sistema Gauss está escrita para el vacío. En este caso $D = E$, $B = H$ y una de las magnitudes en la fórmula puede resultar sustituida por otra y los coeficientes de transformación para estos valores son distintos. Por esta razón, antes de pasar la fórmula del sistema Gauss al SI es necesario hacer que esté escrita en forma correcta para el medio y no sólo para el vacío.

La transformación de los valores numéricos de las magnitudes de un sistema de unidades a otro se realiza con ayuda de las tablas, citadas en los libros de los sistemas de unidades.

III. Fórmulas del álgebra lineal y análisis

1. Propiedad del producto mixto de vectores

$$\Delta \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (\text{A.1})$$

2. Descomposición del producto vectorial doble

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{A.2})$$

3. Definición del operador vectorial de nábla

$$\nabla = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\text{A.3})$$

donde \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y , \mathbf{i}_z son versores del sistema cartesiano de coordenadas.

4. Definición de la operación de gradiente:

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi. \quad (\text{A.4})$$

5. Definición del operador de divergencia:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.5})$$

6. Definición de la operación de rotor:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{A.6})$$

7. Identidades vectoriales:

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla (\varphi \psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi, \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \varphi (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi, \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \times \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \times \mathbf{B}, \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \varphi) \times \mathbf{A}, \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{A.17})$$

8. Teoremas de Gauss: la superficie cerrada S rodea el volumen V . El vector dS del elemento superficial está dirigido por la normal exterior a él:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot dS, \quad (\text{A.18})$$

$$\int_V (\nabla \varphi) dV = \oint_S \varphi dS, \quad (\text{A.19})$$

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{A}) dV = \oint_S dS \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.20})$$

9. Teorema de Stokes: El circuito cerrado L limita la superficie S . El vector $d\mathbf{l}$ del elemento de contorno L coincide con la dirección del rodeo positivo que está relacionado con la dirección de la normal positiva respecto a la superficie S mediante la ley de Ampère:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot dS = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{A.21})$$

$$\int_S dS \times \nabla \varphi = \oint_L \varphi d\mathbf{l}, \quad (\text{A.22})$$

$$\int_S (dS \times \nabla) \times \mathbf{A} = \oint_L d\mathbf{l} \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.23})$$

10. Teoremas de Green:

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot dS, \quad (\text{A.24})$$

$$\int_V (\nabla \varphi \times \nabla \psi) dV = \frac{1}{2} \oint_S dS \times (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi), \quad (\text{A.25})$$

$$\int_S (\nabla \varphi \times \nabla \psi) \cdot dS = \frac{1}{2} \oint_L (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot dl. \quad (\text{A.26})$$

Índice alfabético

- Acumuladores 211
- Ampère 61
- Ángulo Hall 233
- Anisotropía 305
- Átomos 22
- Átomos no polares 139
- Átomos polares 139
- Autoinducción 339
- Autotransformador 368

- Betatrón 386
- Blindaje magnético 281

- Campo casiestacionario 338
 - de la corriente elemental 262
 - crítico 235
 - eléctrico 50, 416
 - de fuerzas de potencial 88, 92, 93
 - Hall 232
 - local 181
 - magnético 56, 59, 61, 66, 257, 416, 446
 - giratorio 357, 374
 - de potencial 205
 - de saturación 188
 - simétrico central 258
 - de un solenoide 329
- Capacidad 118
 - del condensador 125
 - conductor 135
- Carga 16, 29, 30, 31, 32, 46, 83, 85
 - inmóvil 81
 - ligada 149
 - superficial 144
 - de prueba 55
 - superficial 203
 - volumétrica 203
- Ciclo de histéresis 192, 300, 301
- Circuito cerrado 217
 - oscilante 362
- Circuitos derivados 218

- Concepción de la acción a corta distancia 50
 - — — a larga distancia 50
- Concentración de cargas 34
- Condensador 124, 125
- Condición de betatrón 386-390
 - de calibración del potencial 260
 - de frontera 148, 149
 - de Lorentz 411
- Conductancia 346
- Conductividad eléctrica 107
- Corriente alterna 343
 - automantenida 240, 242
 - casiestacionaria 338
 - de desplazamiento 393-395
 - monofásica 370
 - no automantenida 240
 - superficial 235
 - trifásica 370
- Corrientes de Foucault 359
- Cristales iónicos 192
- Cuadripolos 380

- Diamagnetismo 293
- Dieléctricos 25, 26, 141
 - anisótropos 141
 - isotropos 142
 - lineales 141
 - neutros 184
 - no lineales 141
 - polares 187
- Diferencia de potencial 94
 - — — de contacto 25, 26, 27
- Disociación 237
- Dipolo 129
 - hertziano 415
- Distribución de Boltzmann 21
- Divergencia 39
- Decremento logarítmico de amortiguamiento 363
- Densidad de corriente 35, 36, 201, 241
 - — — de desplazamiento 394
 - — — de saturación 242, 247

Densidad del dipolo 130
 — de la energía del campo eléctrico 159
 — — — — magnético 328
 — del flujo de energía 402, 428
 — — — superficial 272
 — de la fuerza de Ampère 231
 — superficial de la carga 34, 112, 114, 142, 203,
 — — de la fuerza 171, 173
 — volumétrica de la carga 33, 142, 142, 165
 — — de la corriente 338
 — — de los flujos 268, 269
 Dominios dieléctricos 195

Ecuación de d'Alembert 411, 412
 — de continuidad 44
 — del cuádrupolo 380
 — de Laplace 102
 — de la línea de transporte 407
 — para el potencial vectorial 260
 — Poisson 97, 102
 — Barnett 311
 Efecto Hall 231
 — Meissner 235
 — pelicular 374, 430
 — — anómalo 377
 — piezoeléctrico 198, 199
 Electrificación 27, 28
 Electroconductibilidad 216, 237, 238, 239
 Electrodo coaxial 222
 Electrolitos 239
 Electrón 17, 19
 Emisión termoiónica 244
 Energía del campo las de cargas superficiales 160
 — — — magnético 323, 324, 327
 — — — total 328
 — de carga 166, 157
 — de conductores con carga 160
 — de cuerpo dieléctrico 161
 — de dipolo 161
 — electromagnética 403
 — de Fermi 23
 — de interacción de campo 303
 — magnética 330, 331
 — de momento magnético 335
 — propia 157, 158, 163
 Ensayos Tolman y Stewart 229
 Estabilidad radial 389
 — vertical 389
 Espectro energético de los electrones 21, 22, 23
 Éter 50

Experimento de Einstein-Haas 310
 Experimentos de Millikan 28, 29
 Factor Q 363
 Fem exterior 206, 208
 Ferrimagnetismo 307
 Filtros 383
 Fluctuaciones 450
 Flujo del vector 39
 — molecular superficial 270
 Fórmula de Clausius-Mossotti 186
 — de Gauss-Ostrogradski 43, 44
 — de Nyquist 453
 — de Richardson-Dushman 248
 — de Stokes 91, 92
 — de Thomson 382
 Frecuencia de Larmor 291
 — límite 442
 Fuerza de Ampère 65
 — — interacción de las corrientes rectilíneas 70, 71
 — — Lorentz 64, 65, 74
 — superficial 169
 — volumétrica 165, 169, 173, 285, 334
 Función de Fermi-Dirac 24
 — — Langevin 188
 Cases densos 185, 190
 — rarificados 185, 189
 Generador de corriente alterna 319
 — equivalente de ruido 453
 Gradiente 93
 Grosor de la capa superficial de corriente 377
 Guías de ondas 441, 447
 Imanación 268
 — espontánea 304
 Imanes 274
 Impedancia 344
 Impulso del fotón 436
 — del tren de ondas electromagnéticas 435
 Inducción del campo de cambio 303
 — — — magnético 277, 303
 — electromagnética 313
 — — del campo 313
 — mutua 364
 Inductancia 324, 329
 — mutua 325, 326
 Intensidad del campo del dipolo 131
 — — — eléctrico 51, 110, 111, 112,

Intensidad del campo local 181
 — — — magnético 273, 278, 279
 — — — de saturación 189
 — de corriente 36
 — — — de saturación 246
 — de retardo 301
 Interacción spin-orbital 296

 Ley de Ampère 65
 — — Biot y Savart 67, 70, 262
 — — — y Laplace 68
 — — corriente total 252, 253, 254
 — — Coulomb 45, 48, 49, 50, 85, 100, 148
 — — Curie 297
 — — Curie-Weiss 194, 296, 304
 — — Child-Laungmuir 248
 — — inducción electromagnética 318, 320
 — — Joule-Lenz 213, 215
 — — Ohm 106, 107, 214
 Leyes de Kirchhoff 217, 345
 Líneas de fuerza 86, 87
 Líquidos polares 191

 Magnéticos 267
 Magnetorresistencias 233
 Medio heterogéneo 221, 222
 — homogéneo 221
 Método de Cavendish 46
 — — corrientes de contorno 346
 — — medidas de la carga por resistencia 29
 — — representaciones 131, 134, 151
 Momento dipolar 130, 138
 — de fuerzas 165
 — magnético 19, 263, 285, 296, 297
 Motores eléctricos 353
 — — asincrónicos 355, 357
 — — sincrónicos 355
 Movilidad de las cargas 243
 — — los electrones 234

 Neutrón 18
 Normalización del potencial 94
 Nube electrónica 139, 246, 247
 Número de onda 426

 Operador de Laplace 103
 Oscilaciones de betatrón 389

 Pantalla metálica 215
 Pila de Daniell 211
 — — Volta 208

Pilas eléctricas (elementos galvánicos) 207
 Piroeléctricos 199
 Polarización 139
 — dieléctrica 139
 — espontánea 194
 — iónica de red 140
 — de la pila 210
 Potencia de la corriente 212
 — — — alterna 349
 — del ruido del generador 453
 Potencial 93, 94, 95, 96, 97, 102
 — de avance 413, 414
 — del campo 412
 — — — del conductor 118
 — escalar 93, 94, 321, 412
 — retardado 413, 414
 — vectorial 260, 268, 321, 410, 411, 416
 Precesión de Larmor 293
 — magnética 290
 Presión de ondas electromagnéticas 434
 Principio de conservación de la carga 37, 38, 43
 — — — de la energía 210, 317
 — — — superposición 53, 54, 55
 Profundidad de penetración 429
 Protón 17
 Punto de Curie 194

 Quarks 19

 Regla de Lenz 339
 Relación giromagnética 309
 Remagnetización 306
 Resonadores 447
 Resonancia en paralelo 360, 361, 362
 — — serie 359, 360
 — ferromagnética 308
 — paramagnética 298
 Rotor 89
 Ruido de agitación 457
 — — corriente 459
 — — resistencia 452

 Sensibilidad máxima 454
 Spin 19
 Subred 307
 Sustancias antiferroeléctricas 196
 — antiferromagnéticas 306
 — diamagnéticas 267, 286, 287, 290
 — ferroeléctricas 192
 — ferromagnéticas 300,

Substancias paramagnéticas 267, 286,
 287, 295
 — piezoeléctricas 197, 198
 Superconductividad 234, 235
 Superconductores 235

Tensión 350
 — de paso 226
 Temperatura crítica 235
 — de Curie 194
 — — Curie-Weiss 194, 205, 307
 — — Néel 307
 Teorema de Earnshaw 96
 — — Gauss 82, 84, 85, 87, 101, 110

— — reciprocidad 120
 Teoría de bandas 230
 Tiempo de relajación 108
 Trabajo de la corriente 212
 — de salida termoiónico 24
 Transformador 365
 — real 369

Vector del desplazamiento 147
 — Poynting 402
 Velocidad de deriva 241
 — — fase 426, 430, 442, 445, 446
 — — grupo 445, 446

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, 1-110, GSP, URSS.

La editorial Mir publica:

Matvéev A.

FISICA MOLECULAR

En el trabajo que ofrecemos el autor al utilizar todo el aparato matemático accesible para los estudiantes de los primeros cursos de los centros de enseñanza superior, expone las nociones fundamentales y regularidades de la física estadística en el ejemplo de los sistemas moleculares. En el capítulo dedicado al gas fotónico y electrónico se analiza el contenido físico de diferentes estadísticas. Examinando las propiedades de los gases, líquidos y sólidos, el autor utiliza los métodos estadístico y termodinámico. Se dan nociones básicas acerca de la termodinámica de los procesos irreversibles.

El autor brinda muchos ejemplos que permiten al lector obtener hábitos de aplicación de la teoría para solucionar problemas concretos. Cada capítulo se acompaña con problemas a resolver, se dan las respuestas que permiten comprobar lo correcto de la resolución.

Además del texto básico se brindan breves formulaciones de algunas teorías fundamentales, así como problemas de control para elevar la eficacia del estudio y asimilación del material.

Esta obra está destinada para los estudiantes de las facultades de física de las universidades y otros centros de enseñanza superior.

Pávlov P., Joflov A.

FÍSICA DEL CUERPO SÓLIDO

Este libro reúne aspectos fundamentales de la física del cuerpo sólido.

Los autores examinan todos los elementos imprescindibles de la cristalografía estructural y los procedimientos de definición de estructuras cristalinas. Se analizan las reacciones interatómicas, los diferentes tipos de enlace en los cuerpos sólidos, los defectos estructurales, y se interpretan las propiedades mecánicas, térmicas, eléctricas, ópticas y magnéticas del cuerpo sólido, así como las propiedades físicas de los dieléctricos.

Se presta una atención especial a los problemas de la física de los sólidos amorfos que en la actualidad ha logrado un impetuoso desarrollo.

Recomendamos este trabajo a los estudiantes de las universidades y centros de enseñanza técnica superior. También puede ser interesante y útil para ingenieros y técnicos.

