

B.M. YAVORSKI, A.A. PINSKI

**FUNDAMENTOS
DE
FÍSICA**

II



Б. М. ЯВОРСКИЙ, А. А. ПИНСКИЙ

**ОСНОВЫ
ФИЗИКИ**

ТОМ II

**КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.
КВАНТОВАЯ ФИЗИКА**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

B. M. Yavorski, A. A. Pinski

**FUNDAMENTOS
DE
FISICA**

II

OSCILACIONES Y ONDAS.
FÍSICA CUÁNTICA

Traducido del ruso por el ing.
Antonio Molina García
y por el ing.
Antonio Ballesteros Elías

EDITORIAL «MIR»
MOSCÚ

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, I Rizhski per., 2, 129820, Moscú, 1-110, GSP, URSS.

Impreso en la URSS

На испанском языке

© Издательство «Наука», 1981

© Traducción al español. Editorial Mir, 1983

INDICE

Prólogo	13
---------	----

SEXTA PARTE

OSCILACIONES Y ONDAS

Capítulo 49. Oscilaciones armónicas	15
-------------------------------------	----

§ 49.1. Oscilador armónico (15). § 49.2. Frecuencia y período de las oscilaciones (17). § 49.3. Energía de un oscilador armónico (18). § 49.4. Registro de las oscilaciones (19). § 49.5. Composición de oscilaciones de la misma frecuencia (21). § 49.6. Diagramas vectoriales (29).

Capítulo 50. Análisis armónico	24
--------------------------------	----

§ 50.1. Composición de oscilaciones con frecuencias próximas (24). § 50.2. Oscilaciones moduladas (26). § 50.3. Composición de oscilaciones con frecuencias múltiples (27). § 50.4. Desarrollo de Fourier. Espectro (29).

Capítulo 51. Oscilaciones libres	91
----------------------------------	----

§ 51.1. Péndulo de resorte (31). § 51.2. Grado de amortiguamiento. Factor de calidad (32). § 51.3. Péndulo matemático (34). § 51.4. Péndulo físico (36). § 51.5. Circuito oscilante (37). § 51.6. Energía, frecuencia propia y factor de calidad del circuito (39). § 51.7. Enfoque único en el estudio de las oscilaciones (40).

Capítulo 52. Autooscilaciones	42
-------------------------------	----

§ 52.1. Sistema autooscilante (42). § 52.2. El reloj (44). § 52.3. Generador de tubo termoiónico (45). § 52.4. Autoexcitación de las autooscilaciones (46).

Capítulo 53. Oscilaciones forzadas	48
------------------------------------	----

§ 53.1. Fuerza excitatriz sinusoidal (48). § 53.2. Resonancia (49). § 53.3. Resonancia y análisis armónico (51). § 53.4. Semianchura de la curva de resonancia. Selectivi-

dad (52). § 53.5. Proceso de estabilización de las oscilaciones forzadas (53). § 53.6. Estabilización de las oscilaciones durante la resonancia (54). § 53.7. Relación de indeterminación para la frecuencia y el tiempo (55).

Capítulo 54. Corriente alterna 56

§ 54.1. Generador sincrónico de corriente alterna (56). § 54.2. Circuito de corriente alterna (58). § 54.3. Resistencia óhmica (59). § 54.4. Valores eficaces de la corriente y la tensión (60). § 54.5. Capacitancia (61). § 54.6. Inductancia (63). § 54.7. Ley de Ohm para los circuitos de corriente alterna (63). § 54.8. Potencia de la corriente alterna (65). § 54.9. Transformador (66). § 54.10. Transmisión de la energía a distancia (68).

Capítulo 55. Ondas elásticas 68

§ 55.1. Ondas transversales y longitudinales (68). § 55.2. Velocidad de las ondas elásticas (70). § 55.3. Energía e intensidad de una onda (72). § 55.4. Amortiguamiento de las ondas (72).

Capítulo 56. Ecuación de onda 74

§ 56.1. Longitud de onda (74). § 56.2. Ecuación de la onda plana (76). § 56.3. Ecuación de la onda esférica (78). § 56.4. Efecto Doppler en acústica (79). § 56.5. Reflexión y refracción de las ondas (80). § 56.6. Coeficientes de reflexión y de transparencia (83).

Capítulo 57. Interferencia y difracción 84

§ 57.1. Principio de superposición (84). § 57.2. Ondas estacionarias (84). § 57.3. Frecuencias propias (87). § 57.4. Interferencia (89). § 57.5. Interferencia producida por dos fuentes (90). § 57.6. Interferencia producida por varias fuentes (93). § 57.7. Intensidad de los máximos principales (95). § 57.8. Difracción (97). § 57.9. Difracción por una rendija rectangular (98). § 57.10. Refracción de las ondas e Interferencia (100).

Capítulo 58. Elementos de acústica 103

§ 58.1. Características del sonido (103). § 58.2. Fuentes de sonido (105). § 58.3. Transductores ultrasónicos (107). § 58.4. Receptores de sonido (109). § 58.5. Oído (110). § 58.6. Peculiaridades de los infra y ultrasonidos (112).

Capítulo 59. Ondas electromagnéticas	116
§ 59.1. Velocidad de las ondas electromagnéticas (116). § 59.2. Onda sinusoidal plana (116). § 59.3. Presión de la luz (118). § 59.4. Radiación de ondas electromagnéticas por una carga en movimiento acelerado (120). § 59.5. Radiación de una carga y un dipolo oscilantes (121). § 59.6. Radiación de una carga circulante (123). § 59.7. Radiación de Vavilov — Cherenkov (125). § 59.8. Efecto Doppler óptico (126).	
Capítulo 60. Elementos de radiotecnia	128
§ 60.1. Radiocomunicación (128). § 60.2. Radiodifusión (130). § 60.3. Televisión (132). § 60.4. Amplificador termoiónico (132). § 60.5. Detección (desmodulación) (134).	
Capítulo 61. Interferencia de la luz	136
§ 61.1. Escala de las ondas electromagnéticas (136). § 61.2. Tren de ondas. Vector luz (138). § 61.3. Relaciones de indeterminación (139). § 61.4. Monocromaticidad (141). § 61.5. Interferencia de la luz (144). § 61.6. Coherencia (146). § 61.7. Distancia entre los máximos de interferencia (148). § 61.8. Interferómetro de Michelson (150). § 61.9. Aplicaciones de la interferencia (152).	
Capítulo 62. Difracción de la luz	153
§ 62.1. Difracción por un orificio (153). § 62.2. Red de difracción (155). § 62.3. Anchura angular del máximo principal (156). § 62.4. Poder resolutorio de una red (157). § 62.5. Difracción de rayos X (159). § 62.6. Difracción en una red tridimensional (160). § 62.7. Análisis espectral por refracción de rayos X (161). § 62.8. Difusión de la luz (164).	
Capítulo 63. Dispersión y absorción	166
§ 63.1. Índice de refracción de la luz (166). § 63.2. Factores de reflexión y transparencia (168). § 63.3. Dispersión (169). § 63.4. Dispersión y descomposición espectral (171). § 63.5. Teoría electrónica de la dispersión (172). § 63.6. Dispersión normal y anómala (174). § 63.7. Absorción de la luz (176). § 63.8. Velocidad de fase y velocidad de grupo (177). § 63.9. Medida de la velocidad de la luz (179).	
Capítulo 64. Polarización de la luz	183
§ 64.1. Luz polarizada y natural (183). § 64.2. Analizador. Ley de Malus (184). § 64.3. Doble refracción (186).	

§ 64.4. Causa de la doble refracción (188). § 64.5. Dicroísmo (190). § 64.6. Polaroides (polarizador y analizador) (191). § 64.7. Rotación del plano de polarización (192). § 64.8. Actividad óptica de la naturaleza viva (194).

Capítulo 65. Óptica geométrica

196

§ 65.1. Leyes fundamentales de la óptica geométrica. Haz y rayo (196). § 65.2. Refracción de la luz. Reflexión total (198). § 65.3. Prisma (200). § 65.4. Lente (204). § 65.5. Construcción de las imágenes que da una lente delgada (208). § 65.6. Defectos de las lentes (211). § 65.7. Espejo esférico (213). § 65.8. Enfoque de haces electrónicos (215).

Capítulo 66. Instrumentos ópticos

217

§ 66.1. Fotometría (217). § 66.2. Ojo humano (222). § 66.3. Acomodación. Visión binocular (223). § 66.4. Ángulo de visión. Poder separador del ojo (225). § 66.5. Lupa (226). § 66.6. Microscopio (227). § 66.7. Telescopio (228). § 66.8. Poder separador de un instrumento óptico (231). § 66.9. Microscopio electrónico (233). § 66.10. Aparatos de proyección (235). § 66.11. Proyector iónico (236). § 66.12. Aparatos espectrales (238). § 66.13. Holografía (240).

SEPTIMA PARTE

FUNDAMENTOS DE LA FÍSICA CUÁNTICA DE LOS ÁTOMOS, MOLÉCULAS Y CUERPOS SÓLIDOS

Capítulo 67. Radiación térmica

245

§ 67.1. Radiación térmica (245). § 67.2. Leyes de la radiación del cuerpo negro (248). § 67.3. Idea de Planck. Fórmula de Planck para la radiación térmica (250).

Capítulo 68. Fundamentos de la óptica cuántica

252

§ 68.1. Efecto fotoeléctrico (252). § 68.2. Leyes del efecto fotoeléctrico externo (253). § 68.3. Noción de la naturaleza cuántica de la luz. Explicación cuántica de las leyes del efecto fotoeléctrico externo (256). § 68.4. Acción fotoquímica de la luz (260). § 68.5. Masa e impulso del fotón. La presión luminosa desde el punto de vista cuántico (262). § 68.6. Noción del efecto Compton (265). § 68.7. Dualidad ondulatorio-corpúscular de las propiedades de la luz (269).

Capítulo 69. Propiedades ondulatorias de las partículas de sustancia	273
<p>§ 69.1. Dualidad ondulatorio-corpúscular de las propiedades de las partículas de sustancia (273). § 69.2. Propiedades ondulatorias de los neutrones, átomos y moléculas (279). § 69.3. Sentido físico de las ondas de De Broglie (282).</p>	
Capítulo 70. Noción de mecánica cuántica	285
<p>§ 70.1. Noción de función de onda (285). § 70.2. Relaciones de indeterminación (de incertidumbre) de Heisenberg (287). § 70.3. Movimiento de una partícula libre (294). § 70.4. Partícula en un pozo de potencial rectangular (297). § 70.5. El oscilador lineal armónico en mecánica cuántica (301). § 70.6. Paso de la partícula a través de una barrera de potencial (306).</p>	
Capítulo 71. Sistemas hidrogenoides según Bohr	310
<p>§ 71.1. Modelo nuclear del átomo de Rutherford (310). § 71.2. Dificultades para explicar clásicamente el modelo nuclear del átomo (314). § 71.3. Espectro de rayas del átomo de hidrógeno (317). § 71.4. Postulados de Bohr (320). § 71.5. Cuantización de la energía y cálculo de la constante de Ridberg en la teoría de Bohr (323). § 71.6. Experiencias de Franck y Hertz (326).</p>	
Capítulo 72. Sistemas hidrogenoides en la mecánica cuántica	329
<p>§ 72.1. Cuantización de la energía del electrón del átomo de hidrógeno (329). § 72.2. Cuantización del momento de impulso (332). § 72.3. Sentido físico de las órbitas de Bohr (333). § 72.4. Cuantización espacial (334). § 72.5. Más sobre el espín del electrón (336). § 72.6. Estructura fina de las rayas espectrales (340). § 72.7. Sentido mecanocuántico de los postulados de Bohr (342). § 72.8. Emisión espontánea de luz (343). § 72.9. Concepto de radiación inducida de la luz (347).</p>	
Capítulo 73. Átomos con dos o más electrones	350
<p>§ 73.1. Principio de Pauli (350). § 73.2. Sistema periódico de los elementos de Mendelíev (353). § 73.3. Rayos X de deceleración (359). § 73.4. Rayos X característicos (361)</p>	

Capítulo 74. Estructura de las moléculas y sus espectros

366

§ 74.1. Característica general de los enlaces químicos (366).
§ 74.2. Moléculas iónicas (368). § 74.3. Moléculas con enlace químico covalente (370). § 74.4. Noción de los espectros moleculares (373).

Capítulo 75. Conductibilidad eléctrica de los metales en la teoría moderna

377

§ 75.1. Defectos de la teoría clásica de la conductibilidad eléctrica de los metales (377). § 75.2. Cuantización de la energía de los electrones en el metal (380). § 75.3. Nivel de Fermi para los electrones del metal (381). § 75.4. Concepto de espacio de impulsos de los electrones en el metal (384). § 75.5. Concepto de electrones degenerados en el metal (385). § 75.6. Distribución de los electrones en el metal por energías a la temperatura de cero absoluto (389). § 75.7. Influencia de la temperatura sobre la distribución de los electrones por energías (390). § 75.8. Capacidad calorífica del gas electrónico degenerado (393). § 75.9. Concepto de la teoría cuántica de la conductibilidad en los metales (395). § 75.10. Fenómeno de la superconductibilidad (399).

Capítulo 76. Elementos de teoría de las bandas en los cristales

403

§ 76.1. Concepto de la teoría de las bandas en los sólidos (403). § 76.2. Distribución de los niveles de energía de los electrones de valencia e internos en los átomos de un sólido (406). § 76.3. Disposición de las bandas de energía en el sólido. Transiciones electrónicas dentro de una banda y entre ellas (409). § 76.4. Metales y dieléctricos en la teoría de las bandas (411).

Capítulo 77. Propiedades eléctricas de los semiconductores

414

§ 77.1. Conductibilidad intrínseca por electrones de los semiconductores (414). § 77.2. Conductibilidad intrínseca por huecos de los semiconductores (417). § 77.3. Semiconductores extrínsecos por exceso (o del tipo *n*) (418). § 77.4. Semiconductores extrínsecos por defecto (o del tipo *p*) (420).

Capítulo 78. Procesos físicos que tienen lugar en los dispositivos semiconductores 423

§ 78.1. Fenómenos de contacto en el límite de los metales (423). § 78.2. Rectificación en el límite metal-semiconductor (426). § 78.3. Rectificación en el límite de una unión electrón-hueco (428). § 78.4. Triodos semiconductores (transistores (430)). § 78.5. Fotorresistencias y fotodiodos semiconductores (431).

Capítulo 79. Algunas propiedades ópticas de la sustancia 434

§ 79.1. Dispersión de combinación de la luz (434). § 79.2. Luminiscencia (437). § 79.3. Absorción negativa de la luz (441). § 79.4. Generadores ópticos cuánticos (445).

OCTAVA PARTE

**PRINCIPIOS DE FÍSICA DEL NÚCLEO
Y PARTICULAS ELEMENTALES**

Capítulo 80. Propiedades fundamentales y estructura de los núcleos atómicos 454

§ 80.1. Carga y masa de los núcleos atómicos (454). § 80.2. Espín y momento magnético del núcleo (456). § 80.3. Composición del núcleo (459). § 80.4. Energía de enlace del núcleo. Defecto de masa (463). § 80.5. Fuerzas nucleares (467). § 80.6. Dimensiones de los núcleos (474). § 80.7. Modelo nuclear de la gota líquida (475).

Capítulo 81. Radiactividad natural 479

§ 81.1. Generalidades acerca de las radiaciones radiactivas (479). § 81.2. Reglas de desplazamiento durante las transformaciones radiactivas (482). § 81.3. Ley fundamental de la desintegración radiactiva (484). § 81.4. Actividad y su medición (487). § 81.5. Cómo hacer uso de la ley de desintegración radiactiva (489). § 81.6. Carácter estadístico de la desintegración radiactiva (490). § 81.7. Empleo del fenómeno de la radiactividad para medir el tiempo en geología y arqueología (491). § 81.8. Métodos experimentales de estudio de las radiaciones y partículas radiactivas (494). § 81.9. Concepto de la teoría de la desintegración α radiactiva (499). § 81.10. Rayos γ (502). § 81.11. Efecto Mössbauer (505). § 81.12. Noción acerca de las regularidades de la desintegración β (511).

Capítulo 82. Transformaciones artificiales de los núcleos atómicos

517

§ 82.1. Transformación del nitrógeno en oxígeno. Descubrimiento del neutrón (517). § 82.2. Fenómenos de la radiactividad artificial (521). § 82.3. Surgimiento y destrucción de los pares electrón-positrón (523). § 82.4. Núcleo compuesto. Característica general de las reacciones nucleares (526). § 82.5. Concepto de interacción de los neutrones con la sustancia (529). § 82.6. Elementos transuránicos (531). § 82.7. Fisión nuclear (532). § 82.7. Energía de activación de la fisión. Fisión espontánea de los núcleos (538). § 82.9. Reacción de fisión en cadena (541). § 82.10. Reactores nucleares (543). § 82.11. Bomba atómica (547). § 82.12. Reacciones term nucleares (547). § 82.13. Contracción y confinamiento del plasma (554).

Capítulo 83. Partículas elementales

560

§ 83.1. Dos enfoques de la estructura de las partículas elementales (560). § 83.2. Nociones de los rayos cósmicos y sus propiedades (562). § 83.3. Muones y sus propiedades. Leptón τ (566). § 83.4. Piones (mesones π) y sus propiedades (570). § 83.5. Clasificación de las interacciones en la física nuclear (575). § 83.6. Kaones (mesones K) e hiperones (577). § 83.7. Antipartículas (581). § 83.8. Concepto de la estructura de los nucleones (591).

Conclusión (594)

Índice alfabético (595)

PRÓLOGO

El primer tomo de este libro se ha consagrado principalmente a los problemas de la física clásica. En él se ha procurado demostrar la íntima relación y la continuidad que existe entre las ideas clásicas, las relativistas y las cuánticas, pero las representaciones cuánticas se han empleado relativamente poco y no sistemáticamente (capacidad calorífica de los gases y cristales, temperatura de degeneración, conductibilidad eléctrica de los sólidos). Esto no se debe a que las representaciones cuánticas tengan poca importancia, sino a que el conjunto de los temas que constituyen dicho tomo permite en lo fundamental dar a estos problemas de la física una interpretación clásica.

En este segundo tomo, basándose en el estudio profundo de las leyes de las oscilaciones y las ondas, las ideas cuánticas se introducen de un modo consecuente y se aplican al problema de la interacción de la radiación electromagnética con la sustancia, así como al estudio de la estructura y de las propiedades de la sustancia a diversos niveles de unión de las partículas y de sus partes «elementales»: átomos, moléculas, sólido, núcleo atómico y partículas elementales. A la vez se desarrollan y precisan muchos conceptos enunciados en el tomo primero a nivel clásico: conductibilidad eléctrica y conductibilidad y capacidad calorífica de los sólidos, fuerzas intermoleculares, propiedades de los semiconductores, trabajo de salida y potenciales de contacto, etc.

Como es natural, en este tomo se ha procurado evitar los cálculos mecanocuánticos, pero se han expuesto las ideas cuánticas más importantes cualitativa y, en muchos casos, también cuantitativamente, y su aplicación. Al mismo tiempo se han utilizado ampliamente las relaciones de indeterminación de Heisenberg como formalismo matemático eficaz para apreciar las magnitudes mecanocuánticas.

Lo mismo que en el tomo primero, aquí se han representado con suficiente amplitud las ideas de la teoría de la

relatividad, necesarias tanto en algunas partes de la óptica como en la física del núcleo y de las partículas elementales.

Para el lector de este segundo tomo quedará clara la existencia de profundas relaciones internas y de continuidad entre la física clásica y la moderna. Esto encuentra su expresión en el *principio de correspondencia*, importante desde el punto de vista metodológico, según el cual, entre el desarrollo ulterior de las partes de la física y su contenido anterior existe una relación regular: en determinados casos extremos los cálculos según las nuevas teorías conducen a los mismos resultados que los efectuados de acuerdo con las antiguas. En el principio de correspondencia se refleja la enseñanza del materialismo dialéctico acerca de la relación entre la verdad relativa y la absoluta.

Recomendamos al lector que preste atención al papel que desempeñan las leyes de conservación en la física moderna —tanto las leyes clásicas de conservación de la energía, el impulso, el momento de impulso y la carga eléctrica, como las leyes específicas de conservación en el micromundo y en el mundo de las partículas elementales (conservación del espín, de la carga bariónica y leptónica, etc.). En la universalidad de la acción de las leyes de conservación se ven reflejados los principios de la unidad del mundo y de la diversidad de los fenómenos de la naturaleza.

Tenemos la esperanza de que el estudio de los dos tomos de «Fundamentos de física» ayudará al lector a comprender la compleja, pero interesante y fascinadora imagen física moderna del mundo que nos rodea.

Los autores

Sexta parte

OSCILACIONES Y ONDAS

Capítulo 49

OSCILACIONES ARMÓNICAS

§ 49.1. Oscilador armónico

1. En el § 8.4 se estudió el movimiento de un punto material de masa m sometido a la acción de una fuerza elástica $F = -kx$. Suponiendo que en el instante inicial el desplazamiento del punto $x_0 = 1$ y su velocidad inicial $v_0 = 0$, y valiéndonos de los métodos numéricos hallamos la ley del movimiento del punto en la forma

$$x = \cos \omega t, \text{ en la que } \omega = \sqrt{k/m}.$$

La velocidad instantánea del punto resultó ser $v = -\omega \sin \omega t$.

Se puede demostrar que también es correcta la conclusión inversa, es decir, si el punto material se mueve de acuerdo con la ley

$$s = A \cos (\omega t + \varphi), \quad (49.1)$$

su velocidad instantánea y su aceleración se expresarán así:

$$v = -\omega A \sin (\omega t + \varphi), \quad (49.2)$$

$$a = -\omega^2 A \cos (\omega t + \varphi) = -\omega^2 s. \quad (49.3)$$

Para esto hay que recordar las definiciones de velocidad instantánea (1.5) y de aceleración (4.4) y derivar dos veces la expresión (49.1).

2. En la fórmula (49.1) la magnitud s se llama *elongación*. La elongación es la distancia desde el punto que oscila hasta su posición de equilibrio en un instante arbitrario. La elongación máxima del punto es A , puesto que el coseno no puede ser mayor que la unidad. La magnitud A se denomina *amplitud de la oscilación*:

$$S_m = A, \quad (49.4)$$

donde el subíndice «m» significa el valor máximo. Por su sentido, la amplitud es una magnitud esencialmente positiva.

Por (49.2) es fácil convencerse de que la *amplitud de la velocidad*

$$V_m = \omega A. \quad (49.5)$$

3. Valiéndonos de la segunda ley de Newton hallamos la fuerza que actúa sobre el cuerpo:

$$F = ma = -m\omega^2 s. \quad (49.6)$$

Vemos que esta fuerza es semejante a una fuerza elástica, es decir, es proporcional a la elongación y tiene signo contrario (§ 5.3). Por esto se le da el nombre de *fuerza cuasielástica* (casi elástica).

4. La variable $\omega t + \varphi$ es el argumento del coseno y se llama *fase de la oscilación* (o vibración); el parámetro φ es la *fase inicial*. Junto con la amplitud, la fase inicial define la posición y la velocidad del punto oscilante en el instante inicial. En efecto, de (49.1) y (49.2), si $t = 0$, obtenemos los valores de la elongación inicial s_0 y de la velocidad inicial v_0 :

$$s_0 = A \cos \varphi, \quad v_0 = -\omega A \sin \varphi. \quad (49.7)$$

De aquí se deduce que la amplitud y la fase de la oscilación viene determinada por las condiciones iniciales (véase el cap. 8):

$$A = \sqrt{s_0^2 + (v_0/\omega)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -v_0/\omega s_0. \quad (49.8)$$

5. Si la ley del movimiento de un punto material se expresa en forma de función sinusoidal del tiempo (49.1), se dice que este punto realiza *oscilaciones armónicas*. Un sistema que efectúa oscilaciones armónicas se denomina *oscilador armónico* (del latín *oscillum*, oscilación).

Las gráficas de la elongación, velocidad y aceleración del oscilador armónico se representan en la fig. 49.1. Debe prestarse atención al hecho de que la velocidad difiere en

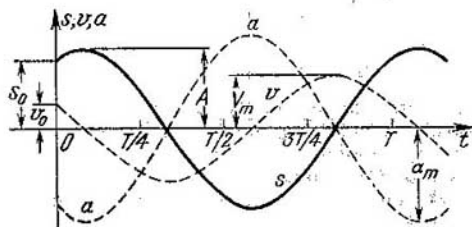


Fig. 49.1.

fase de la elongación en $\pi/2$, y la aceleración, en π . Recomendamos al lector que construya las gráficas de la elongación para $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ y $\varphi = -3\pi/2$.

§ 49.2. Frecuencia y período de las oscilaciones

1. El parámetro ω que figura en la expresión de la elongación y en todas las expresiones siguientes, se denomina *frecuencia angular* o *circular*. La magnitud

$$v = \omega/2\pi \quad (49.9)$$

se llama *frecuencia*. En electrotecnia y radiotécnica, en vez de v se suele escribir f . Para aclarar el sentido físico de estas magnitudes las expresaremos mediante el período de oscilación.

2. Se da el nombre de *período de oscilación* T al intervalo de tiempo al cabo del cual se repite la oscilación, es decir, el punto oscilante vuelve a pasar por la misma posición en el mismo sentido. De esta definición se sigue que

$$s(t + nT) = s(t), \quad (49.10)$$

donde n es un número entero cualquiera. Esto significa que al cabo de un número entero arbitrario de períodos, el punto se moverá exactamente lo mismo que en el instante dado. Sustituyendo (49.1) en (49.10), se obtiene:

$$A \cos [\omega(t + nT) + \varphi] = A \cos [\omega t + \varphi].$$

Pero los cosenos de dos argumentos son iguales si estos argumentos difieren en $2n\pi$ (2π es el período del coseno y del seno, y n es un número entero), por consiguiente, $\omega t + \varphi + n\omega T + \varphi = \omega t + \varphi + 2n\pi$.

3. De esto se infiere la relación buscada entre el período y la frecuencia:

$$\omega = 2\pi/T, \quad \nu = 1/T. \quad (49.11)$$

Así, la frecuencia circular ω indica cuántas oscilaciones completas se efectúan en 2π segundos, y la frecuencia ν , cuántas oscilaciones se cumplen en un segundo.

De unidad de frecuencia sirve el *hertzi* (Hz). La frecuencia $\nu = 1$ Hz cuando el período de oscilación $T = 1$ s. La frecuencia circular se mide en radianes por segundo, lo mismo que la velocidad angular.

4. Comparando la expresión de la fuerza elástica $F = -ks$ con la (49.6), tenemos que $-ks = -m\omega^2 s$, de donde se deduce que

$$\omega = \sqrt{k/m}. \quad (49.12)$$

Así, pues, si una oscilación armónica se produce por la acción de una fuerza elástica, la frecuencia de oscilación no depende de las condiciones iniciales y viene determinada únicamente por la elasticidad y la masa del sistema o sea, por las propiedades del oscilador mismo. Por esta razón dicha frecuencia se llama *frecuencia circular* (o *angular*) *propia* del oscilador y se designa por ω_0 . El período propio

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (49.13)$$

§ 49.3. Energía de un oscilador armónico

1. La energía cinética (§ 16.2) es:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (49.14)$$

La energía potencial (§ 18.6)

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi). \quad (49.15)$$

Teniendo en cuenta que $k = m\omega^2$ (véase (49.12)), tenemos que

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi). \quad (49.16)$$

Es sabido que $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. Sumando (49.14) y (49.16), obtenemos la expresión para la energía mecánica total del oscilador:

$$W = K + U = \left(\frac{1}{2}\right) m\omega^2 A^2. \quad (49.17)$$

Las gráficas de las energías potencial, cinética y total se han representado en la fig. 49.2. En esta gráfica se ve que

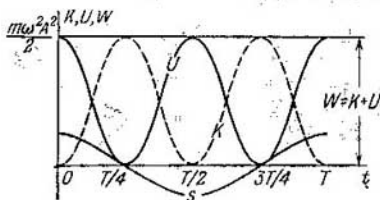


Fig. 49.2.

el período de variación de la energía cinética o potencial es dos veces menor que el período de oscilación. Esto también se deduce de la relación $2 \cos^2 \omega t = 1 + \cos 2\omega t$.

2. El oscilador armónico es un sistema conservativo (§ 19.1). Su energía total no varía durante el proceso de oscilación, sólo se produce la transformación de la energía potencial en cinética y viceversa, conservándose su magnitud total. Como puede demostrarse (fig. 49.2), el valor medio de la energía cinética es igual al valor medio de la energía potencial e igual a la mitad de la energía total:

$$\bar{K} = \bar{U} = \left(\frac{1}{2}\right)W = \left(\frac{1}{4}\right)m\omega^2 A^2. \quad (49.18)$$

Aquí la rayita superpuesta indica el valor medio de la magnitud sobre la cual se encuentra.

§ 49.4. Registro de las oscilaciones

1. El procedimiento más fácil de registrar las oscilaciones es el que representa la fig. 49.3. En el papel se obtiene la inscripción de las oscilaciones u *oscilograma* (del latín *oscillum*, oscilación, y el griego *γραμμά*, escritura).

En muchos casos resulta más conveniente transformar la oscilación que se estudia en señales eléctricas, las cuales son

después más fáciles de registrar. Para este fin se puede utilizar, por ejemplo, el fenómeno de la inducción electromagnética. Si al cuerpo que oscila se fija un cuadro de alambre y éste se sitúa en un campo magnético, al oscilar el cuadro se producirá en él una corriente inducida (§§ 43.1—43.3) cuyas

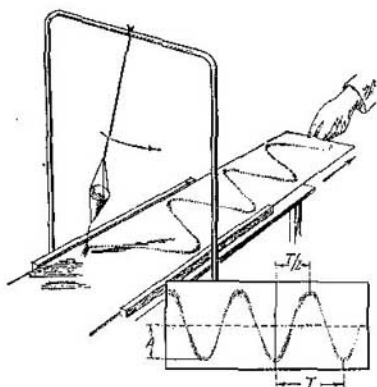


Fig. 49.3.

oscilaciones corresponderán exactamente a las del oscilador que se investiga. Las oscilaciones de la corriente que se producen en el cuadro se registran por medio de oscilógrafos bifilares o de rayos catódicos.

2. La parte fundamental de un oscilógrafo de rayos catódicos es el tubo catódico (§ 47.4). La oscilación que se analiza se hace llegar en forma de señales eléctricas a los terminales de entrada del amplificador vertical. Una vez amplificada, la señal se transmite a los electrodos de desviación vertical del haz electrónico, con lo cual dicho haz traza en la pantalla una recta vertical (fig. 49.4, izquierda).

Para conseguir el oscilograma hay que hacer que, al mismo tiempo que se desplaza verticalmente, el haz electrónico se mueva uniformemente en sentido horizontal. Para esto se aplica a los electrodos de desviación horizontal una tensión, de las llamadas de diente de sierra, procedente de

un generador de barrido especial (fig. 49.5). Bajo la influencia de esta tensión, el haz electrónico se mueve por la pantalla primero uniformemente de izquierda a derecha, y

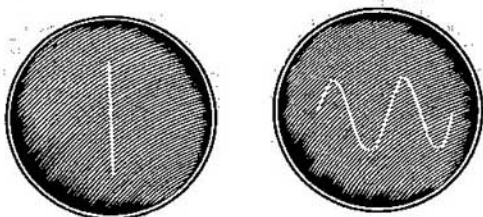


Fig. 49.4.

después salta bruscamente hacia atrás, al extremo izquierdo de aquélla.

Cuando actúan conjuntamente la desviación vertical y el barrido horizontal del haz electrónico, se observa en la

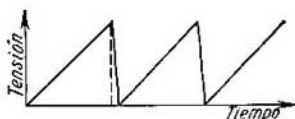


Fig. 49.5.

pantalla el oscilograma (fig. 49.4, derecha). Para que la figura que se obtiene sea estable hay que elegir correctamente la frecuencia de barrido y sincronizarla con la señal que se estudia. Con este fin, la conexión del generador de barrido la efectúa la señal misma, y el período del barrido se elige de manera que sea múltiplo del de la señal.

§ 49.5. Composición de oscilaciones de la misma frecuencia

1. Supongamos que sobre un cuerpo actúan dos fuerzas: $F_1 = -k_1 s_1$ y $F_2 = -k_2 s_2$. Bajo la influencia de cada una de estas fuerzas el cuerpo debería efectuar las oscilaciones

$$s_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{y} \quad s_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Intentemos esclarecer cómo se mueve el cuerpo sometido simultáneamente a la acción de ambas fuerzas.

Resulta que, en el caso general, las oscilaciones que se producen aquí *no son sinusoidales*, es decir, *no son armónicas*. De esto podemos cerciorarnos sacando el oscilograma de la oscilación compuesta. Solamente en un caso, en el que las fuerzas recuperadoras tienen la misma rigidez ($k_1 = k_2 = k$) y, a consecuencia de esto, son iguales las frecuencias propias de las oscilaciones que se componen ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$), la oscilación resultante es armónica y tiene la misma frecuencia. Este caso es el que vamos a estudiar en este párrafo.

2. Así, pues, supongamos que las oscilaciones que se componen tienen la misma frecuencia y distintas amplitudes y fases:

$$s_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad s_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (49.19)$$

La oscilación resultante tiene la misma frecuencia, pero una nueva amplitud A y una nueva fase inicial φ :

$$s = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (49.20)$$

Para hallar esta amplitud y fase tendremos en cuenta que si las oscilaciones tuvieran lugar en una línea recta, las elongaciones se sumarían algebraicamente: $s = s_1 + s_2$, o

$A \cos(\omega t + \varphi) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Esta igualdad deberá cumplirse idénticamente, es decir, en cualquier instante. Suponiendo $\omega t = 0$ (o a π , 2π , etc.), obtenemos

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2.$$

Y suponiendo $\omega t = \pi/2$ (o a $3\pi/2$, $5\pi/2$, etc.), obtenemos

$$A \operatorname{sen} \varphi = A_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \operatorname{sen} \varphi_2.$$

De estas dos últimas igualdades se pueden deducir las magnitudes A y φ que buscamos. Dividiendo la segunda igualdad por la primera se obtiene

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \operatorname{sen} \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (49.21)$$

Y elevando ambas igualdades al cuadrado y sumándolas, tenemos que

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2).$$

Pero la expresión entre paréntesis es igual al coseno de la diferencia de los dos argumentos: $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2$. Por lo tanto

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (49.22)$$

§ 49.6. Diagramas vectoriales

1. La amplitud y la fase inicial de una oscilación resultante se pueden calcular por las fórmulas (49.21) y (49.22). Pero también se puede utilizar el método gráfico (fig. 49.6).

Para esto se traza un eje horizontal. Se construye el vector A_1 , formando el ángulo φ_1 con dicho eje. Desde el extremo de este vector A_1 se traza el vector A_2 , formando el ángulo φ_2 con el eje. Entonces, el módulo del vector A , cuyo origen coincide con el de A_1 y su extremo con el de A_2 , es la amplitud buscada de la oscilación resultante, y el ángulo φ que forma el vector A con el eje es igual a la fase inicial buscada.

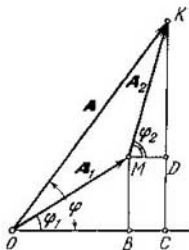


Fig. 49.6.

Para demostrar esto recurrimos a la fig. 49.6. Aquí $OB = A_1 \cos \varphi_1$, $BC = MD = A_2 \cos \varphi_2$, $DC = MB = A_1 \operatorname{sen} \varphi_1$ y $KD = A_2 \operatorname{sen} \varphi_2$. De aquí se sigue que $OC = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2$, $KC = A_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \operatorname{sen} \varphi_2$. Pero $\operatorname{tg} \varphi = KC/OC$, y $(OK)^2 = (OC)^2 + (KC)^2$. Sustituyendo estas magnitudes por sus valores y haciendo las operaciones matemáticas obtenemos las expresiones (49.21) y (49.22) como queríamos demostrar.

2. Este método gráfico de composición de oscilaciones se denomina método de los *diagramas vectoriales*. Conviene emplearlo especialmente en aquellos casos en que hay que componer varias oscilaciones y el cálculo analítico resulta muy complicado.

Como ejemplo consideremos el problema siguiente: hallar la amplitud resultante de la composición de N oscilaciones

de igual amplitud y frecuencia cuyas fases forman una progresión aritmética:

$$s_1 = A \cos(\omega t + \varphi), \quad s_2 = A \cos(\omega t + \varphi + \alpha),$$

$$s_3 = A \cos(\omega t + \varphi + 2\alpha), \dots,$$

$$\dots, \quad s_N = A \cos[\omega t + \varphi + (N - 1)\alpha].$$

El diagrama vectorial para $N = 5$ se da en la fig. 49.7.

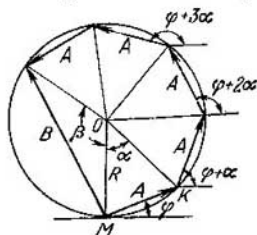


Fig. 49.7. 5

Como este diagrama es un trozo de quebrada regular, se puede inscribir en una circunferencia de radio R . En la figura puede verse que la amplitud de la oscilación resultante $B = 2R \sin(\beta/2)$.

Del triángulo MOK tenemos que $R = \frac{A}{2 \sin(\alpha/2)}$. El ángulo $\beta = 2\pi - N\alpha$, por consiguiente, $\sin(\beta/2) = \sin(\pi - N\alpha/2) = \sin(N\alpha/2)$. Haciendo

las sustituciones en la expresión de la amplitud resultante obtenemos en definitiva:

$$B = A \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}. \quad (49.23)$$

Esta expresión la necesitaremos más adelante (§ 57.6). Conviene advertir que la obtención por vía analítica de la fórmula (49.23) es bastante difícil, mientras que por el método de los diagramas vectoriales se consigue resolver el problema valiéndose de representaciones geométricas simples.

Capítulo 50

ANÁLISIS ARMÓNICO

§ 50.1. Composición de oscilaciones con frecuencias próximas

1. Hallemos la resultante de dos oscilaciones armónicas cuyas frecuencias difieran un poco entre sí: $\omega_1 = \omega - \Delta\omega$, $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$, siendo $\Delta\omega \ll \omega$. Para simplificar el cálculo

supondremos que las amplitudes de las oscilaciones que se componen son iguales:

$$s_1 = A \cos \omega_1 t, \quad s_2 = A \cos \omega_2 t. \quad (50.1)$$

La oscilación resultante será

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 = 2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1) t}{2} \cos \frac{(\omega_2 + \omega_1) t}{2} = \\ &= 2A \cos(\Delta\omega \cdot t) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (50.2)$$

Su gráfica se representa en la fig. 50.1.

2. Como puede verse, la oscilación resultante no es armónica. Pero con la condición de que la diferencia de frecuencias sea pequeña se puede considerar como oscilación «casi sinusoidal» con «período convencional»

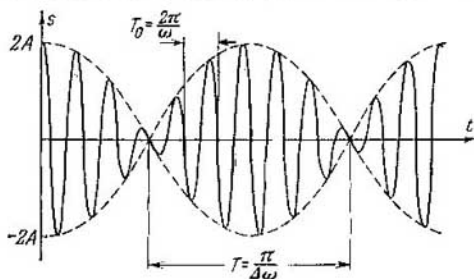


Fig. 50.1.

«casi sinusoidal» con «período convencional»

$$T_0 = 2\pi/\omega \quad (50.3)$$

y «amplitud» lentamente variable

$$B = |2A \cos(\Delta\omega \cdot t)|. \quad (50.4)$$

En la fig. 50.1 esta «amplitud variable» se indica con línea de trazos. La palabra «amplitud» la ponemos aquí entre comillas porque, según la definición inicial, la amplitud es factor constante del coseno. Del mismo modo, la magnitud $T_0 = 2\pi/\omega$ sólo se puede denominar período convencionalmente: esta es el intervalo de tiempo entre dos valores nulos correspondientes de la función, y no el período en el sentido inicial de esta palabra (§ 49.2).

3. Las variaciones periódicas de la «amplitud» de la forma antes descrita se llaman *pulsaciones*. El período de pulsación

$$T = \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (50.5)$$

La frecuencia de las pulsaciones es igual a la diferencia entre las frecuencias de las oscilaciones que se componen:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1. \quad (50.6)$$

§ 50.2. Oscilaciones moduladas

1. Hallemos el resultado de la composición de tres oscilaciones armónicas:

$$s_1 = A \cos \omega t, \quad s_2 = a \cos (\omega + \Omega) t, \\ s_3 = a \cos (\omega - \Omega) t. \quad (50.7)$$

Teniendo en cuenta que $\cos (\omega + \Omega) t + \cos (\omega - \Omega) t = 2 \cos \omega t \cos \Omega t$, después de hacer transformaciones elementales, se obtiene que

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = A \left(1 + \frac{2a}{A} \cos \Omega t \right) \cos \omega t. \quad (50.8)$$

Si suponemos que $\Omega \ll \omega$ y $k = 2a/A < 1$, la gráfica de la oscilación tendrá la forma que representa la fig. 50.2.

2. Como se ve en la figura, en este caso la oscilación resultante también se puede considerar como «casi sinusoidal» de «amplitud variable»

$$B = A (1 + k \cos \Omega t) \quad (50.9)$$

y «período convencional»

$$T_0 = 2\pi/\omega, \quad (50.10)$$

El período de variación de la «amplitud»

$$T = 2\pi/\Omega. \quad (50.11)$$

Y como partimos de la condición $\Omega \ll \omega$, será $T \gg T_0$.

3. Las oscilaciones representadas en la fig. 50.2 se llaman *moduladas*. En general, se da el nombre de moduladas a las

oscilaciones «casi sinusoidales» que se producen con alta frecuencia ω y cuya «amplitud» varía lentamente con período $T = 2\pi/\Omega$. La alta frecuencia ω se denomina *frecuencia portadora*.

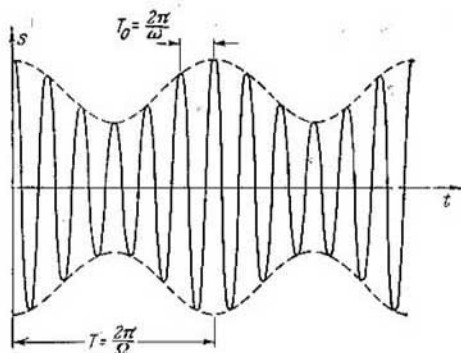


Fig. 50.2.

tadora, la baja frecuencia Ω , *frecuencia de modulación*, y el factor k , *profundidad* o *grado de modulación*.

Las oscilaciones moduladas se utilizan en radiotécnica para transmitir el sonido o las imágenes por medio de ondas electromagnéticas (§ 60.2). En este caso la modulación no se efectúa con una señal sinusoidal, sino con otra más compleja.

§ 50.3. Composición de oscilaciones con frecuencias múltiples

1. Intentemos esclarecer el carácter de la oscilación resultante de la composición de dos o más oscilaciones armónicas de frecuencias múltiples. Como ejemplo vamos a considerar la composición de dos oscilaciones cuyas frecuencias angulares sean $\omega_1 = \omega$ y $\omega_2 = 3\omega$ y sus amplitudes, $A_1 = A$ y $A_2 = A/2$:

$$s_1 = A \operatorname{sen} \omega t, \quad s_2 = (A/2) \operatorname{sen} 3\omega t. \quad (50.12)$$

La oscilación con la frecuencia mínima se llama *primera armónica* (en acústica, tono fundamental), y las oscilaciones con frecuencias múltiples de la primera armónica se denominan *armónicas superiores* (en acústica, sobretonos).

2. La composición de las oscilaciones la haremos gráficamente. Para esto hay que construir las gráficas de las oscila-

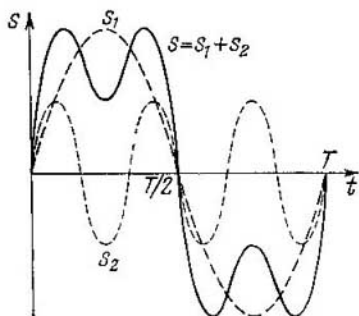


Fig. 50.3.

ciones componentes y luego medir los valores de las elongaciones s_1 y s_2 en cada instante y sumarlas aplicando la regla general de la suma de desplazamientos, es decir, teniendo en cuenta el signo. Como se ve en la fig. 50.3, el resultado de la composición de las oscilaciones armónicas con frecuencias múltiples es una *oscilación periódica no sinusoidal*. El período de la oscilación compleja coincide con el del tono fundamental (primera armónica).

De frecuencia de la oscilación compleja no puede hablarse, ya que a una oscilación no sinusoidal corresponde no una frecuencia, sino un conjunto de ellas; el concepto de «frecuencia» sólo tiene sentido cuando se trata de una oscilación armónica.

3. Las peculiaridades de una onda no sinusoidal se caracterizan por la forma de su gráfica, y ésta viene determinada a su vez por el número de armónicas y por las relaciones entre sus amplitudes, frecuencias y fases. Elijiendo conveniente-

mente las armónicas respectivas se pueden obtener oscilaciones cuyas gráficas tengan prácticamente la forma de cualquier curva periódica. Como ejemplo, en la fig. 50.4 se han representado las gráficas de oscilaciones que tienen el mismo tono fundamental, pero distintas armónicas:

$$a) s_1 = 2 \operatorname{sen} \omega t + 1,5 \operatorname{sen} 2\omega t, \quad (50.13)$$

$$b) s_2 = 2 \operatorname{sen} \omega t + 3 \operatorname{sen} 2\omega t + 1,5 \operatorname{sen} 3\omega t.$$

§ 50.4. Desarrollo de Fourier. Espectro

1. En los párrafos precedentes se ha demostrado con una serie de ejemplos que cuando se componen oscilaciones armónicas de frecuencias distintas las oscilaciones que se obtienen no son sinusoidales. Ahora se plantea el problema de si es posible el proceso inverso, o sea, si existe un método que permita descomponer una oscilación no sinusoidal en sus componentes armónicas.

Este procedimiento existe. Lo propuso a principios del siglo XIX Jean Fourier, que demostró que toda función periódica $f(t)$ de período T se puede descomponer en sus armónicas componentes:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + a_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) + \dots \quad (50.14)$$

Aquí $\omega = 2\pi/T$ y las amplitudes y fases se pueden calcular por medio de reglas determinadas que se estudian en los cursos de matemáticas superiores. La expresión (50.14) se

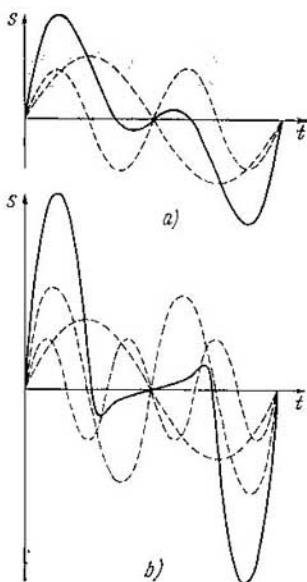


Fig. 50.4.

conoce con el nombre de desarrollo de una función $f(t)$ en serie de Fourier o simplemente desarrollo de Fourier.

Por lo general las amplitudes decrecen con bastante rapidez a medida que crece el número de la armónica y en la práctica es posible limitarse a varios de los primeros sumandos del desarrollo de Fourier.

2. En muchos problemas de física sólo desempeñan papel las amplitudes de las armónicas, y sus fases, aunque influyen

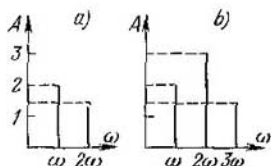


Fig. 50.5.

en la forma de la oscilación compleja, carecen de importancia. Así ocurre, por ejemplo, en el caso en que no nos interesan tanto las armónicas como sus energías, las cuales, de acuerdo con (49.17), dependen únicamente de las amplitudes y de las frecuencias, pero no de las fases.

En este caso nos interesan

solamente las frecuencias de las oscilaciones componentes y las amplitudes que les corresponden. La descomposición de una oscilación no sinusoidal en armónicas sinusoidales (sin tener en cuenta sus fases), recibe el nombre de *descomposición espectral*. El diagrama representativo de la dependencia de cada armónica respecto de su frecuencia, se llama *espectro* de la oscilación no sinusoidal.

3. La fig. 50.5 representa los espectros de las oscilaciones cuyo desarrollo en serie de Fourier viene expresado por las fórmulas (50.13), y cuyas gráficas representa la fig. 50.4. Con las letras a y b se designan en las figuras y fórmulas las mismas oscilaciones. Se recomienda al lector que construya el espectro de la onda modulada y de las pulsaciones.

Advertimos que el valor del espectro de una oscilación no sinusoidal es insuficiente para determinar la forma de dicha oscilación y trazar su gráfica. Pero esto suele ser innecesario. A diferencia del oscilógrafo, que reacciona a los valores instantáneos de la oscilación que se analiza, los aparatos registradores que se emplean frecuentemente para estudiar los procesos oscilatorios tienen bastante inercia. Por esta razón, reaccionan solamente a las variaciones del valor medio de la energía durante un intervalo de tiempo mucho mayor que el período de las oscilaciones. En este caso el valor del espectro resulta ser suficiente, ya que con

él se puede determinar la energía de cada armónico y, por lo tanto, la energía media de la oscilación total. Precisamente por esto, la descomposición espectral desempeña un papel de extraordinaria importancia en el estudio de las oscilaciones.

Capítulo 51

OSCILACIONES LIBRES

§ 51.1. Péndulo de resorte

1. Un sistema oscilatorio efectúa oscilaciones *libres* si una vez sacado de su posición de equilibrio se abandona a la acción de las fuerzas internas. Vamos a estudiar las propiedades de las oscilaciones libres valiéndonos del ejemplo de un péndulo de resorte. Las partes fundamentales de éste son: un peso de masa m y un muelle, cuya rigidez es k , unidos como se muestra en la fig. 51.1. El oscilograma de la oscilación se registra sobre una cinta de papel, que se mueve uniformemente, con una pluma sujeta al peso. La experiencia demuestra que las oscilaciones libres del péndulo de resorte se amortiguan, es decir, las desviaciones del peso de su posición de equilibrio disminuyen con el tiempo (fig. 51.2).

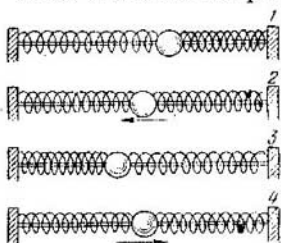


Fig. 51.1.

Como las oscilaciones amortiguadas no son armónicas, los conceptos de amplitud y período, con su sentido inicial, no se les pueden aplicar. Pero cuando el amortiguamiento es pequeño, porque la fuerza de rozamiento es mucho menor que la fuerza de la elasticidad, las oscilaciones amortiguadas se pueden considerar como casi sinusoidales con «amplitud decreciente» y «período convencional» T_0 . La amplitud decreciente se indica en la fig. 51.2 con línea de trazos.

La experiencia demuestra que los valores de la amplitud decreciente al cabo de períodos de tiempo iguales forman una progresión geométrica. El período convencional es el intervalo de tiempo entre dos desviaciones máximas del peso hacia el mismo lado de su posición de equilibrio.

2. Resulta que, aunque el rozamiento influye mucho en el carácter de la disminución de la amplitud, prácticamente no

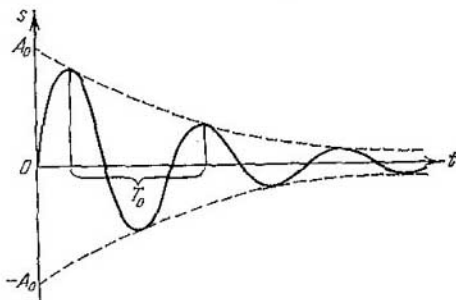


Fig. 51.2.

ejerce influencia sobre el período de las oscilaciones. Por esto, el «período» de las oscilaciones amortiguadas T_0 se puede calcular por la fórmula (49.13), que sirve para el cálculo del período propio del oscilador armónico (siempre que el amortiguamiento no sea muy grande).

Así, pues, cuando el amortiguamiento es pequeño, el «período» y la «frecuencia» de las oscilaciones libres coinciden prácticamente con el período propio y la frecuencia propia del oscilador armónico.

§ 51.2. Grado de amortiguamiento. Factor de calidad

1. Determinemos qué debe entenderse por amortiguamiento intenso o débil de las oscilaciones. Para esto vamos a introducir una característica cuantitativa del amortiguamiento de las oscilaciones del sistema, su factor de calidad.

La causa de que se amortigüen las oscilaciones del péndulo de resorte es la fuerza de rozamiento y relacionada con el rozamiento la disipación de la energía, es decir, la transfor-

mación de la energía de oscilación en energía interna (§ 19.2). De aquí se sigue que, cuanto menor sea el rozamiento, tanto más débil será el amortiguamiento.

Pero, ¿qué quiere decir «rozamiento pequeño»? ¿Con qué se puede comparar? Como la causa fundamental de que se produzcan las oscilaciones es la elasticidad del muelle, es lógico comparar la fuerza de rozamiento con la fuerza de la elasticidad. Conviene advertir que estas dos fuerzas son magnitudes variables, por lo que compararemos el valor máximo de la una con el valor máximo de la otra. El valor máximo de la fuerza de la elasticidad $F_m^{\text{elast}} = kA$, donde A es la amplitud y k , la rigidez. A las velocidades relativamente pequeñas con que oscila el péndulo, la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad (§ 11.8): $F_m^{\text{roz}} = hV_m = h\omega_0 A$, donde ω_0 es la frecuencia angular propia; $V_m = \omega_0 A$, la amplitud de la velocidad (véase (49.6)), y h , el coeficiente de rozamiento.

2. Se llama *factor de calidad* Q de un sistema oscilante, el número que indica cuántas veces es mayor la fuerza de la elasticidad que la de rozamiento:

$$Q = \frac{F_m^{\text{elast}}}{F_m^{\text{roz}}} = \frac{k}{h\omega_0}. \quad (51.1)$$

Teniendo en cuenta que $k = m\omega_0^2$ (véase (49.12)), obtenemos que

$$Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{V\sqrt{mk}}{h}. \quad (51.2)$$

Cuanto menor sea la fuerza de rozamiento comparada con la de la elasticidad, tanto más débilmente se amortiguarán las oscilaciones. Por lo tanto, al aumentar el factor de calidad del sistema oscilatorio, las oscilaciones libres se amortiguan menos y tienden más a ser oscilaciones armónicas.

3. Demostremos que el factor de calidad de un sistema oscilatorio es la medida de la disipación relativa de la energía. Para esto compararemos la energía del oscilador (49.17) con la pérdida de energía en rozamiento durante un cuarto de período. En este tiempo el peso recorre un camino

igual a una amplitud y la fuerza de rozamiento realiza el trabajo

$$\Delta W_{\text{cal}} = A_{\text{roz}} = F_{\text{med}}^{\text{roz}} A \approx \frac{hV_m}{2} A = \frac{h\omega_0 A^2}{2}.$$

Esta es la energía perdida en el cuarto de período. La razón de la energía inicial a la magnitud de esta pérdida

$$\frac{W}{\Delta W_{\text{cal}}} = \frac{m\omega_0^2 A^2 \cdot 2}{2 \cdot h\omega_0 A^2} = \frac{m\omega_0}{h} = Q. \quad (51.3)$$

Basándose en (51.3) se puede dar otra definición de esta magnitud: el factor de calidad de un sistema oscilatorio es igual a la relación entre la energía total y la magnitud de la pérdida de energía durante cuarto de período, debida a la disipación.

4. Calculemos el tiempo de relajación τ de las oscilaciones libres. Este tiempo es igual a la energía W del sistema dividida por la potencia media de las pérdidas $P_{\text{med}} = \Delta W/\Delta t$. Suponiendo $\Delta t = T_0/4$ y la pérdida de energía, de acuerdo con (51.3), $\Delta W = W/Q$, obtenemos

$$P_{\text{med}} = \frac{4W}{QT_0} = \frac{4W}{Q} \frac{\omega_0}{2\pi} \approx \frac{W\omega_0}{Q}.$$

Por lo tanto,

$$\tau = \frac{W}{P_{\text{med}}} \approx \frac{Q}{\omega_0}. \quad (51.4)$$

§ 51.3. Péndulo matemático

1. Se llama *péndulo simple o matemático* un sistema oscilatorio formado por un punto material suspendido de un hilo inextensible de longitud l . En la práctica es una bolita cuyas dimensiones son mucho menores que la longitud del hilo y cuya masa es mucho mayor que la masa de éste (fig. 51.3).

Vamos a considerar las oscilaciones pequeñas, en las cuales el ángulo θ no excede de varios grados. En este caso $\sin \theta \approx \theta$, y el arco A y la cuerda a coinciden prácticamente, de manera que, en primera aproximación, se puede suponer que el movimiento del peso es rectilíneo y que las oscilaciones son armónicas. El factor de calidad del péndulo matemático

es muy grande, por lo que sus oscilaciones se amortiguan débilmente, de lo cual es fácil cerciorarse registrándolas (véase la fig. 49.3, pág. 20; el peso del péndulo se hace en forma de embudo con orificio estrecho y se llena de arena fina; las oscilaciones se inscriben sobre una tira de papel engomado o recién humedecido).

2. Partiendo de la condición de equilibrio de la energía, calculamos la frecuencia propia y el período de las oscilaciones del péndulo matemático. El valor máximo de la energía potencial

$$U_m = mgh = mgl(1 - \cos \theta) = 2mgl \operatorname{sen}^2(\theta/2).$$

Para los ángulos pequeños $\operatorname{sen}(\theta/2) \approx \theta/2$, de donde

$$U_m = (1/2)mgl\theta^2.$$

La energía cinética máxima

$$K_m = \frac{mV_m^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2},$$

donde ω_0 es la frecuencia angular propia, y A , la amplitud. En la fig. 51.3 se ve que $A = l\theta$. Por consiguiente,

$$K_m = (1/2)ml^2\theta^2\omega_0^2.$$

Si se desprecia el amortiguamiento, de acuerdo con la ley de conservación de la energía, los valores medios (y máximos) de las energías cinética y potencial deben coincidir. Igualando ambas expresiones y haciendo las simplificaciones correspondientes, obtenemos que

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}. \quad (51.5)$$

3. El período de las oscilaciones del péndulo matemático

$$T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (51.6)$$

Como puede verse, el período no depende de la masa del péndulo ni de la amplitud de las oscilaciones (cuando las elongaciones son pequeñas).

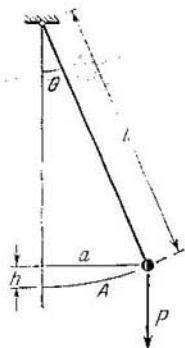


Fig. 51.3.

La fórmula (51.6) se puede utilizar para determinar la aceleración de caída libre en cualquier punto de la Tierra, ya que la longitud del péndulo y su período de oscilación se pueden medir con gran exactitud.

§ 51.4. Péndulo físico

1. Recibe el nombre de *péndulo compuesto o físico*, un sólido cualquiera capaz de oscilar en un plano alrededor de cierto punto de suspensión situado a una distancia l de centro de masas (fig. 51.4). Si se saca el péndulo de su posición de equilibrio y se le da después la posibilidad de oscilar por la acción de la gravedad, empezará a realizar oscilaciones libres cuyo amortiguamiento es relativamente débil. Razonamientos análogos a los utilizados para hallar la expresión de la frecuencia y el período del péndulo matemático, permiten determinar las expresiones correspondientes para el péndulo físico.

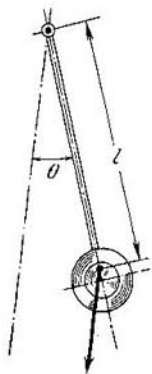


Fig. 51.4.

De un modo análogo a como la amplitud de la velocidad se expresa por medio de la amplitud de la oscilación (véase (49.5)), tenemos para la amplitud de la velocidad angular que $\Omega_m = \omega_0 \theta$. El valor máximo de la energía cinética (§ 22.2) se expresa así:

$$K_m = (1/2)J\Omega_m^2 = (1/2)J\omega_0^2\theta^2.$$

Como los valores de la amplitud de la energía potencial y de la cinética son iguales, tenemos que

$$(1/2)mgl\theta^2 = (1/2)J\omega_0^2\theta^2,$$

de donde se sigue que

$$\omega_0 = \sqrt{mgl/J}.$$

El período de las oscilaciones libres del péndulo físico

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{J/mgl}. \quad (51.7)$$

2. Advertimos que la expresión (51.6) se infiere de la (51.7) como caso particular. En efecto, el momento de inercia

del péndulo matemático $J = ml^2$ (§ 22.2). Sustituyendo en (51.7) este valor del momento de inercia, obtenemos la expresión del período del péndulo matemático.

3. El período del péndulo físico se suele calcular por la fórmula

$$T_0 = 2\pi \sqrt{L/g}. \quad (51.8)$$

que se parece a la expresión del período del péndulo matemático. En esta fórmula la magnitud

$$L = J/ml \quad (51.9)$$

se llama *longitud reducida* del péndulo físico. Esta magnitud es igual a la longitud del hilo del péndulo matemático que tiene el mismo período que el físico.

§ 51.5. Circuito oscilante

1. Un circuito eléctrico formado por una bobina de inductancia L , un condensador de capacidad C y una resistencia R , se denomina *circuito oscilante* (fig. 51.5). En la resistencia R se incluye también la resistencia del devanado de la bobina.

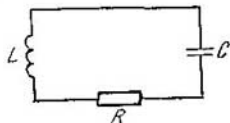


Fig. 51.5.

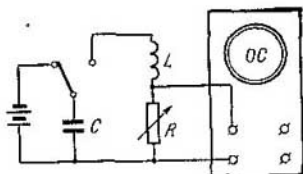


Fig. 51.6.

La experiencia demuestra que si se carga el condensador y luego se cierra el circuito, en éste se producen oscilaciones eléctricas libres.

Para estudiar estas oscilaciones se monta el circuito representado en la fig. 51.6. Cuando la palanca del conmutador está en la posición izquierda, el condensador se conecta a la fuente y se carga. Si la palanca se pasa a la posición derecha, el condensador se pone en contacto con la bobina y en el circuito se producen las oscilaciones, las cuales se pueden apreciar en el oscilograma. Como es natural, en el

dispositivo práctico no se utiliza el conmutador de palanca, sino un circuito electrónico que realiza la función de aquél. Un oscilógrafo conectado según es esquema de la fig. 51.6 registra la diferencia de potencial en la resistencia, que de acuerdo con la ley de Ohm (véase (39.19)) es proporcional a



Fig. 51.7.

la corriente que pasa por el circuito. Si el oscilógrafo se conecta directamente a las bornas del condensador, registra la diferencia de potencial en el condensador y con esto, según (37.20), la carga del mismo.

2. Hagamos el experimento empleando un oscilógrafo de doble haz conectado de tal forma que a una de las entradas lleguen las oscilaciones de la corriente y a la otra, las oscilaciones de la carga. Los dos oscilogramas que se obtienen se

muestran en la fig. 51.7. Como era de esperar, en el circuito oscilante las oscilaciones libres se amortiguan. Variando la resistencia podemos convencernos de que al aumentar ésta se refuerza el amortiguamiento.

Pero el resultado más importante es la existencia del desplazamiento de fases entre las oscilaciones de la corriente y de la carga. En efecto, como se ve en el oscilograma, en los instantes en que la corriente es nula, la carga del condensador es máxima, y viceversa, a la corriente máxima corresponde la carga nula del condensador.

3. La relación entre la corriente y la carga (véase (39.14)) $i = dq/dt$ es completamente análoga a la relación entre la velocidad y la elongación $v = ds/dt$. Por consiguiente, si la carga del condensador varía según la ley

$$q = q_m \cos \omega_0 t, \quad (51.10)$$

la corriente en el circuito variará según la ley

$$i = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin \omega_0 t = I_m \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (51.11)$$

Este desplazamiento de fases se observa precisamente en la pantalla del oscilógrafo. Entre los valores de la amplitud

de la carga y de la corriente resulta que existe la relación

$$I_m = \omega_0 q_m, \quad (51.12)$$

análoga a la relación (49.5) entre las amplitudes de la oscilación y de la velocidad.

§ 51.6. Energía, frecuencia propia y factor de calidad del circuito

1. De acuerdo con (37.23) la energía del campo eléctrico en el condensador $W^{el} = q^2/2C$, y la energía del campo magnético en la bobina, según (43.19), $W^{magn} = Li^2/2$. Como al valor máximo de la corriente corresponde el valor nulo de la carga y viceversa, una relación semejante resulta ser correcta para las energías de los campos eléctrico y magnético. De aquí se deduce que en el circuito oscilante tiene lugar un proceso periódico de transformación de la energía del campo eléctrico del condensador en energía del campo magnético de la bobina y viceversa. Esto es completamente análogo al proceso de transformación de la energía en el péndulo de resorte.

2. El valor máximo de la energía del campo en el condensador

$$W_m^{el} = q_m^2/2C. \quad (51.13)$$

Análogamente, para el campo magnético de la bobina

$$W_m^{magn} = LI_m^2/2 = Lq_m^2\omega_0^2/2. \quad (51.14)$$

Igualando estas magnitudes y haciendo las simplificaciones correspondientes, obtenemos la expresión para la frecuencia angular propia de las oscilaciones del circuito:

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC}. \quad (51.15)$$

El período propio

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (51.16)$$

3. En los cálculos precedentes hemos despreciado la disipación de la energía. Pero las oscilaciones se amortiguan en el circuito, ya que parte de la energía se transforma irreversiblemente en calor de Joule. Para calcular el factor de calidad hay que comparar las pérdidas térmicas con la energía total del circuito. Sin embargo, aprovechando la

analogía con el péndulo de resorte (§ 51.2), se puede hallar la relación entre la amplitud de la tensión en el condensador y la amplitud de la caída de tensión en la resistencia óhmica:

$$Q = \frac{u_m^{(C)}}{u_m^{(R)}} = \frac{u_m}{CR I_m} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (51.17)$$

En un circuito con factor de calidad pequeño, por lo general, no se producen oscilaciones. Efectivamente, si las pérdidas térmicas resultan ser del mismo orden que la energía inicial del condensador, toda la energía de la descarga se transforma en calor de Joule, la energía del campo magnético resulta ser nula y el condensador no se recarga. Así, pues, si el factor de calidad del circuito se aproxima a la unidad, las pérdidas térmicas son del mismo orden que la energía del circuito y la descarga del condensador a través de la bobina y de la resistencia se produce casi lo mismo que si fuera a través de la resistencia sin la bobina (§ 39.8).

§ 51.7. Enfoque único en el estudio de las oscilaciones

1. Si se comparan los procesos que se desarrollan en un péndulo de resorte y en un circuito oscilante se pone de manifiesto la asombrosa analogía que existe entre estos fenómenos que a primera vista no tienen nada común. ¿Qué puede tener común el movimiento de un peso sometido a la acción de un muelle deformado, con el movimiento de los electrones durante la carga de un condensador? Desde este punto de vista está claro que nos encontramos con fenómenos diferentes que deberían estudiarse en distintas partes de este curso: los fenómenos que se producen en el péndulo de resorte, en la mecánica, y los que tienen lugar en el circuito oscilante, en el electromagnetismo. Pero si planteamos el problema de otro modo, prestando la atención principal no a qué es lo que oscila, sino a *por qué* y *cómo* oscila, resulta inmediatamente que la física del proceso oscilatorio es la misma en ambos sistemas y que éstos procesos se describen por iguales conceptos y ecuaciones. Todo esto conduce a la idea de la conveniencia de utilizar un *enfoque único* en el estudio de las oscilaciones de distinta naturaleza física, así como de la ventaja de utilizar ampliamente su analogía.

La idea de aprovechar la analogía al estudiar las oscilaciones no es nueva. Huygens y Lomonósov utilizaron ya la analogía entre las oscilaciones sonoras y luminosas. El enfoque único en el estudio de las oscilaciones mecánicas y electromagnéticas fue utilizado por J.W. Rayleigh, A.G. Stolétov, P.N. Lébedev y otros. Pero sólo en los trabajos de L.I. Mandelshtam y sus discípulos se convirtió el enfoque único en el estudio de las oscilaciones en instrumento empleado sistemáticamente tanto en la teoría como en los experimentos. Este método resultó ser muy fructuoso y con su ayuda se consiguió resolver una serie de problemas complejos de la teoría de las oscilaciones. A ellos pertenece la elaboración de la teoría de las oscilaciones no lineales, incluidas las autooscilaciones (A.A. Andrónov y otros), el descubrimiento y creación de la teoría de la difusión de combinación de la luz (L.I. Mandelshtam y G.S. Landsberg, § 79.1), el descubrimiento de la resonancia paramétrica y la creación de los generadores paramétricos (L.I. Mandelshtam y N.D. Papaleksi), etc.

2. El enfoque único en el estudio de las oscilaciones permite aplicar las leyes obtenidas al estudiar un tipo de oscilaciones, a oscilaciones de otra naturaleza. Por esto, en adelante vamos a estudiar los fenómenos únicamente en un sistema oscilatorio cualquiera y, después, los resultados obtenidos los trasladaremos por analogía a las otras oscilaciones.

Esto también se refiere a los experimentos. En muchos casos es más fácil medir magnitudes eléctricas que mecánicas. Así, es difícil medir la velocidad instantánea de un cuerpo oscilante, mientras que no ofrece dificultad registrar el valor instantáneo de una corriente valiéndose de un oscilógrafo de rayos catódicos. También es más fácil crear una fuerza electromotriz variable en un circuito, que una fuerza variable en un sistema mecánico. Finalmente, es mucho más fácil montar un circuito eléctrico, formado por condensado-

Tabla 51.1

Sistema mecánico	Circuito eléctrico
Masa m	Inductancia L
Rigidez k	Magnitud inversa a la capacidad eléctrica, $1/C$
Coefficiente de rozamiento h	Resistencia R
Fuerza F	F.e.m. \mathcal{E}
Elongación s	Carga q
Velocidad v	Corriente i

res, bobinas y resistencias, y efectuar el experimento correspondiente, que crear un sistema mecánico complejo de pesos y muelles, con fuerzas de rozamiento regulables y hacer experiencias con él. Por esta razón, en los trabajos de investigación se suele preferir no hacer los experimentos con sistemas oscilatorios mecánicos, sino con sus análogos eléctricos, utilizando ampliamente los oscilogramas. Las magnitudes análogas se dan en la tabla 51.1.

Capítulo 52

AUTOOSCILACIONES

§ 52.1. Sistema autooscilante

1. Las oscilaciones del péndulo de resorte se amortiguan a causa del rozamiento. Pero si se compensan sistemáticamente las pérdidas de energía, las oscilaciones dejan de amortiguarse. Como ejemplo, consideremos el mecanismo de producción de oscilaciones entretenidas en el dispositivo que

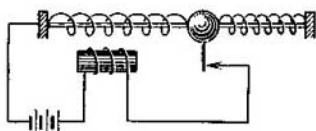


Fig. 52.1.

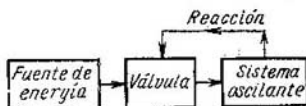


Fig. 52.2.

representa la fig. 52.1. Una laminilla flexible, que va sujeta al peso, toca periódicamente el contacto y cierra el circuito del electroimán por cierto tiempo. Durante este tiempo el electroimán atrae el peso y hace que aumente su energía cinética. De este modo, en cada período las pérdidas de energía debidas al rozamiento se compensan con el trabajo de la fuerza de atracción que sobre el peso ejerce el electroimán, y el funcionamiento de este último está regido, mediante el contacto interruptor, por el mismo cuerpo que oscila. Este dispositivo es el representante típico de una

clase muy difundida de sistemas oscilantes que realizan oscilaciones entretenidas a expensas de la acción de una fuente de energía que no posee propiedades oscilatorias. Estos sistemas se llaman *autooscilantes*.

Todo sistema autooscilante consta de las cuatro partes siguientes (fig. 52.2):

a) un *sistema oscilante* (en el dispositivo de la fig. 52.1, el peso con el resorte);

b) una *fuerza de energía*, a expensas de la cual se compensan las pérdidas (en nuestro ejemplo, la fuente de corriente);

c) una *válvula*, es decir, un órgano que regula el suministro de energía al sistema oscilante en porciones determinadas y en el instante preciso (en el dispositivo de la fig. 52.1, el contacto interruptor);

d) una *reacción*, muy característica de todos los sistemas autooscilantes, que consiste en la acción contraria del sistema oscilante sobre la válvula, o sea, en el gobierno del funcionamiento de la válvula a expensas de los procesos que tienen lugar en el propio sistema oscilante (en nuestro dispositivo la reacción se efectúa por medio del electroimán, que atrae el peso y con ello abre el contacto).

2. Las autooscilaciones están muy difundidas en la naturaleza y en la técnica. Son sistemas autooscilantes los timbres eléctricos, los zumbadores, las máquinas de vapor y los motores de combustión interna, los martillos de picar, etc. Realizan autooscilaciones las cuerdas bajo la acción del arco (violín, violoncelo), las columnas de aire en los tubos (instrumentos musicales de viento), las lengüetas en las armónicas (acordeones) y las cuerdas bucales al hablar o cantar.

Hay que advertir que en muchos sistemas autooscilantes el mecanismo de reacción está oculto y dividir el sistema en sus partes principales es a veces muy difícil.

3. Para el funcionamiento de un sistema autooscilante desempeña un papel primordial la elección de la fase de la reacción. Es necesario que, durante el intervalo de tiempo en que la fuerza actúa sobre el sistema, coincidan las direcciones de la fuerza y de la velocidad. En estas condiciones la fuente de energía realiza sobre el sistema oscilante un trabajo positivo, es decir, le comunica energía. Si la dirección de la fuerza es distinta de la dirección de la velocidad, el trabajo será negativo, la fuente absorberá energía del sistema oscilante y, con esto, reforzará el amortiguamiento.

En el primer caso se dice que en el sistema actúa una reacción positiva, en el segundo, una reacción negativa. La reacción positiva se utiliza para excitar las autooscilaciones; la negativa, para suprimir las autooscilaciones indeseables allí donde no hacen falta.

En el dispositivo representado en la fig. 52.1 está asegurada la reacción positiva, por lo que en él se excitan y mantienen las autooscilaciones entretenidas. Si el contacto se

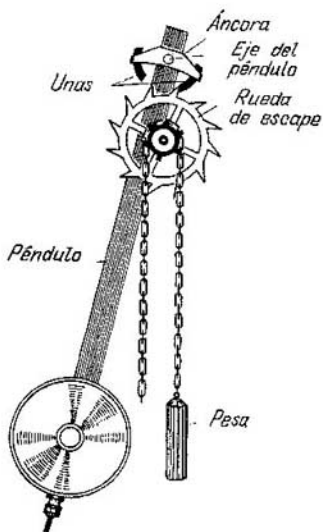


Fig. 52.3.

apoya la cadena con la pesa. Al extremo superior del péndulo va sujeta el áncora con sus dos uñas, que son dos plaquitas de rubí o de otro material duro, curvadas en forma de arcos de circunferencia con centro en el eje del péndulo. En los relojes de bolsillo, en vez de pesa, se utiliza un muelle espiral (muelle real) y, en vez del péndulo, un balancín o volante sujeto a otro muelle espiral (pelo); el balancín realiza oscilaciones torsionales alrededor de su eje.

colocara a la izquierda de la laminilla, el peso sería atraído por el electroimán y se pararía. E incluso si el sistema se obligara a oscilar, sus oscilaciones se amortiguarían pronto, es decir, con mucha más rapidez que en ausencia del electroimán. Así, pues, la introducción en el sistema de la reacción negativa hace que se interrumpan las autooscilaciones y suprimen las oscilaciones libres.

§ 52.2. El reloj

1. Un reloj es un sistema autooscilante. En la fig. 52.3 se representa un mecanismo de reloj con escape de áncora. La rueda de escape o rueda catalina, de dientes oblicuos, está unida rígidamente al tambor dentado en que se

Aquí el sistema oscilatorio es el péndulo o el balancín; la fuente de energía, la pesa elevada o el muelle tenso; la válvula es el áncora, que permite que la rueda de escape gire un diente cada semiperíodo, y la reacción se produce durante la interacción del áncora con la rueda de escape.

2. En los instantes en que el péndulo pasa por la posición de equilibrio y tiene la velocidad máxima, un diente de la rueda de escape entra en breve contacto con el extremo de una de las uñas. El diente, al rozar con la uña, empuja el péndulo, es decir, le comunica energía en forma de impulso. Al mismo tiempo la pesa desciende un eslabón de la cadena. Así la energía potencial de la pesa (o del muelle real) se va transmitiendo al péndulo y compensa la pérdida por rozamiento.

§ 52.3. Generador de tubo termoiónico

1. Montemos un circuito eléctrico según el esquema representado en la fig. 52.4, y conectémoslo con la entrada de un oscilógrafo catódico. Cuando se cierra el interruptor se producen en el circuito oscilaciones entretenidas, como puede verse en la pantalla del oscilógrafo.

Este dispositivo se llama *generador de tubo termoiónico*, de oscilaciones eléctricas entretenidas y es un sistema auto-oscilante eléctrico. Aquí la fuente de energía es una batería anódica; el sistema oscilante, el circuito oscilante introducido en el circuito de placa;

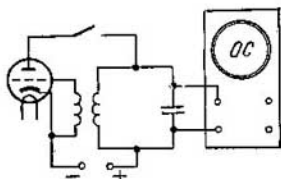


Fig. 52.4.

el papel de válvula lo desempeña la rejilla del triodo, que controla la magnitud de la corriente anódica (§ 47.3), y la bobina de reacción, unida por sus extremos con el cátodo y la rejilla del triodo y por inducción, con la bobina del circuito oscilante, ejerce el control de la reacción del sistema oscilatorio sobre la válvula.

2. Suele ocurrir que cuando se cierra el circuito no se producen oscilaciones. Pero si los extremos de la bobina de reacción se sueldan al contrario, las oscilaciones se producen inmediatamente. Esto significa que en primer caso la fase de la reacción se eligió mal.

§ 52.4. Autoexcitación de las autooscilaciones

1. Conectemos el barrido lento del oscilógrafo al mismo tiempo que cerramos el circuito oscilante en el generador de tubo termoiónico representado en la fig. 52.4. El oscilograma que se obtiene en estas condiciones se muestra en la fig. 52.5. Como se ve, el circuito oscilante se autoexcita, es decir, cuando se conecta la fuente de energía, la amplitud de

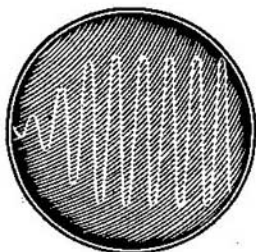


Fig. 52.5.

las oscilaciones crece desde cero hasta una magnitud estacionaria. La autoexcitación, también llamada «intensificación» de las oscilaciones, es una de las peculiaridades más importantes de todo sistema autooscilante.

El mecanismo de la autoexcitación del generador de tubo termoiónico es el siguiente. Las oscilaciones débiles de la corriente que se producen en el circuito oscilante al cerrar el circuito de placa, van acompañadas de una variación del

campo magnético en la bobina del primero. A expensas de la variación del flujo magnético se induce f.e.m. en la bobina de reacción (§ 43.7) y el potencial de la rejilla se hace unas veces mayor y otras menor que el potencial del cátodo. Las oscilaciones del potencial de la rejilla van acompañadas a su vez de la variación de la corriente en el circuito de placa, lo que, si la fase de la reacción ha sido bien elegida, hace que se intensifiquen las oscilaciones en el circuito oscilante. Este proceso hace por su parte que aumenten las oscilaciones del potencial de la rejilla, con lo cual vuelven a intensificarse las oscilaciones en el circuito oscilante.

2. ¿A qué se debe entonces que el proceso de intensificación mutua de las oscilaciones en los circuitos de la rejilla y de la placa se interrumpa? ¿Cómo se establece en el sistema autooscilante el régimen estacionario, independiente de las condiciones iniciales?

Resulta que en el generador de tubo termoiónico cesa la «intensificación» a causa de que la característica del triodo no es lineal (§ 47.3). Como se ve en la fig. 47.8 (T. I) la corriente en el circuito de placa aumentará a medida que

aumenta el potencial de la rejilla, únicamente en la parte lineal de la curva característica; precisamente en esta región es donde se observa el proceso de crecimiento de las amplitudes de las oscilaciones. A partir del instante en que la corriente en el tubo se aproxima a la corriente de saturación, el crecimiento de las autooscilaciones cesa. Se puede demostrar que en todo sistema autooscilante existe necesariamente un elemento no lineal cualquiera. En un sistema lineal son imposibles las autooscilaciones estacionarias.

3. La amplitud de las autooscilaciones estacionarias se determina partiendo de la condición de balance de la energía: la aportación de energía durante un período $W = k_1 I_m \xi T$ debe ser igual a las pérdidas $\Delta W_{\text{term}} = k_2 I_m^2 R T$, donde k_1 y k_2 son coeficientes de proporcionalidad. De $W = \Delta W_{\text{term}}$ se sigue que

$$I_m^{\text{est}} = \frac{k_1 \xi}{k_2 R} = K \frac{\xi}{R}.$$

La fig. 52.6 representa las gráficas de ambas funciones: la función lineal de la amplitud de la corriente para la aportación de energía, y la cuadrática, para las pérdidas. La amplitud estacionaria se halla por el punto de intersección de las gráficas. Como puede verse, cuando las amplitudes de la corriente son menores que la estacionaria, la aportación de energía es mayor que las pérdidas, por lo que la amplitud aumenta. Si, por el contrario, la amplitud de las autooscilaciones es mayor que la estacionaria, las pérdidas de energía son mayores que la aportada por la fuente. Esto hace que las oscilaciones empiecen a amortiguarse hasta que su amplitud resulte ser igual a la estacionaria.

Se recomienda al lector que, basándose en la analogía, analice por sí mismo el mecanismo de balance de la energía en un sistema autooscilante mecánico.

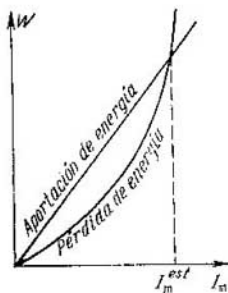


Fig. 52.6.

OSCILACIONES FORZADAS

§ 53.1. Fuerza excitatriz sinusoidal

1. Si sobre un sistema oscilante, en el que no existen autooscilaciones, actúa una fuerza exterior periódica, en el sistema se establecen oscilaciones entretenidas que reciben el nombre de *forzadas*.

Como toda oscilación se puede descomponer en armónicos sinusoidales (§ 50.4), nos limitaremos principalmente a estudiar las oscilaciones forzadas debidas a la acción de una fuerza excitatriz *sinusoidal*

$$F = F_m \cos \omega t, \quad (53.1)$$

en la que F_m es la amplitud de la fuerza, y ω , su frecuencia angular.

Además de la fuerza excitatriz, en el sistema oscilatorio (por ejemplo, en el péndulo de resorte) actúan las fuerzas de la elasticidad y del rozamiento. De acuerdo con la ley fundamental de la dinámica (§ 7.1), tenemos que

$$F + F_{el} + F_{roz} = ma, \quad (53.2)$$

o bien

$$F_m \cos \omega t - ks - hv = ma. \quad (53.3)$$

2. La experiencia demuestra que cuando sobre el péndulo de resorte actúa una fuerza excitatriz sinusoidal, el peso realiza oscilaciones armónicas estacionarias con la frecuencia de esta fuerza. Análogamente, si en un circuito oscilante se conecta una f.e.m. sinusoidal, en el circuito se establecen oscilaciones forzadas de la corriente cuya frecuencia coincide con la de la f.e.m. excitatriz. Esto último se puede comprobar fácilmente valiéndose de un oscilógrafo de doble haz, haciendo llegar a una de sus entradas las oscilaciones de la fuerza electromotriz y a la otra, las oscilaciones de la corriente (§ 49.4).

Por lo tanto, las oscilaciones forzadas se cumplen según la ley

$$s = A \cos (\omega t + \varphi). \quad (53.4)$$

3. Para hallar la amplitud A y la fase inicial φ de las oscilaciones forzadas sustituimos en (53.3) los valores de la elongación, la velocidad y la aceleración de acuerdo, respectivamente, con (53.4), (49.2) y (49.3). Obtenemos que

$$F_m \cos \omega t - kA \cos(\omega t + \varphi) + h\omega A \sin(\omega t + \varphi) = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi). \quad (53.5)$$

La ecuación (53.5) se simplifica si el sistema tiene factor de calidad grande: en este caso se puede omitir el término correspondiente a la fuerza de rozamiento. Entonces se obtiene que

$$F_m \cos \omega t - kA \cos(\omega t + \varphi) = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi). \quad (53.6)$$

Esta igualdad debe cumplirse en cualquier instante, lo que sólo es posible si $\varphi = 0, \pi$ o $-\pi$.

4. En el primer caso la ecuación (53.6) toma la forma

$$F_m - kA = -m\omega^2 A. \quad (53.7)$$

Teniendo en cuenta la rigidez $k = m\omega_0^2$, obtenemos que la amplitud

$$A = F_m/m (\omega_0^2 - \omega^2). \quad (53.8)$$

Como la amplitud es una magnitud esencialmente positiva, la expresión (53.8) tiene sentido cuando la frecuencia angular de la fuerza excitatriz ω es menor que la frecuencia angular propia del sistema ω_0 . En este caso las oscilaciones del sistema estarán en la misma fase que las oscilaciones de la fuerza. Si, en cambio, la frecuencia de la fuerza excitatriz es mayor que la frecuencia propia del sistema, las oscilaciones de éste estarán en oposición de fase con las de la fuerza ($\varphi = -\pi$) y para la amplitud deberá tomarse el módulo de la expresión (53.8).

§ 53.2. Resonancia

1. Cuando la frecuencia de la fuerza excitatriz ν coincide con la frecuencia propia del sistema ν_0 (o $\omega = \omega_0$), la expresión (53.8) deja de tener sentido, ya que es imposible dividir por cero. Pero si $\omega \rightarrow \omega_0$, $A \rightarrow \infty$, lo que carece de sentido físico. Esto significa que, en este caso, es imposible en principio desprestigiar el amortiguamiento.

El caso en que la frecuencia de la fuerza excitatriz es la misma que la frecuencia propia del sistema oscilante se conoce con el nombre de *resonancia*. Para calcular la amplitud y la fase de resonancia sustituimos en (53.5) el valor $\omega = \omega_0$. Y como $k = m\omega_0^2$, la ecuación (53.5) toma la forma

$$F_m \cos \omega_0 t + h\omega_0 A_{res} \sin(\omega_0 t + \varphi) = 0. \quad (53.9)$$

Esta expresión debe cumplirse idénticamente en cualquier instante. Esto sólo es posible en el caso en que $\varphi = -\pi/2$. La amplitud de resonancia

$$A_{res} = \frac{F_m}{h\omega_0} = \frac{F_m}{m\omega_0^2} \frac{m\omega_0}{h} = Q A_{est}, \quad (53.10)$$

en la que $A_{est} = F_m/k = F_m/m\omega_0^2$ es la desviación debida a la acción de la fuerza constante.

En la fig. 53.1 se representa la gráfica de la dependencia de la amplitud de la oscilación respecto de la frecuencia de

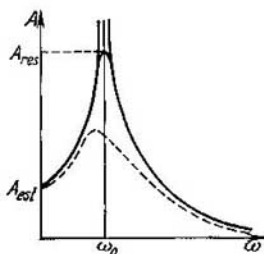


Fig. 53.1

la fuerza excitatriz, es decir, la llamada *curva de resonancia*. Lejos de la resonancia la gráfica se construye por la fórmula (53.8); a frecuencias próximas a la propia, la amplitud A se aproxima a la de resonancia A_{res} . El «pico de resonancia» agudo de la fig. 53.1 caracteriza un sistema con gran factor de calidad. La curva de resonancia para un sistema con factor de calidad pequeño se muestra en esta misma figura con línea de trazos.

Se recomienda al lector que deduzca la fórmula de la amplitud de la velocidad (véase (49.6)) para la resonancia y otras frecuencias y que construya la gráfica de esta dependencia, es decir, la curva de resonancia para la amplitud de la velocidad.

2. El crecimiento de la amplitud de las oscilaciones durante la resonancia en un sistema con gran factor de calidad puede ocasionar su destrucción. Se conocen muchos casos de destrucción de construcciones a causa del funcionamiento de motores de poca potencia, pero cuya frecuencia era igual que la propia de la construcción. Por esta misma causa se

rompen a veces los cigüeñales, las hélices, los rotores y árboles de las turbinas no equilibrados, etc.

Al mismo tiempo, la resonancia se aprovecha en la construcción de una serie de aparatos y dispositivos en mecánica, acústica y radiotécnica. Algunas de estas aplicaciones se estudiarán más adelante.

§ 53.3. Resonancia y análisis armónico

1. El fenómeno de la resonancia se puede utilizar para el análisis armónico de una fuerza oscilatoria no sinusoidal. Con este fin hay que formar un sistema de *resonadores*, que

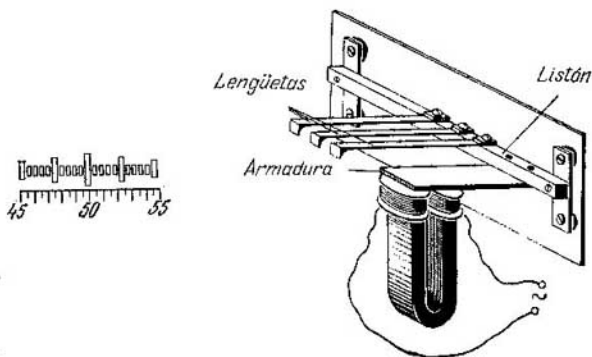


Fig. 53.2.

abarquen la región de frecuencias que nos interesa, y someterlo a la acción de la fuerza. Oscilaciones intensas se producirán únicamente en aquellos resonadores cuyas frecuencias coincidan con las de los armónicos correspondientes a la magnitud que se investiga.

Como ejemplo vamos a considerar un frecuencímetro de láminas vibrantes (fig. 53.2). Este instrumento consiste en un conjunto de «lengüetas» en forma de láminas elásticas terminadas en unos pesitos y sujetas con tornillos a un listón metálico común. A este mismo listón va sujeta la armadura de un electroimán situada sobre un polo de éste.

Si por el devanado del electroimán pasa una corriente alterna, la armadura empieza a vibrar y hace que al mismo tiempo oscile el listón y las lengüetas.

Este sistema puede registrar también oscilaciones mecánicas. Para esto no hay más que sujetarlo al sistema mecánico cuyas oscilaciones se desea estudiar.

2. La masa de los pesitos que hay al final de las lengüetas y la longitud de las láminas elásticas se eligen de tal modo, que la frecuencia de las láminas vecinas difieran entre sí en la misma magnitud, por ejemplo, en 0,5 Hz. Entonces, un sistema de 25 lengüetas abarcará un intervalo de frecuencias de 12 Hz.

Si al devanado del electroimán se hace llegar una corriente sinusoidal, sólo oscilará apreciablemente la lengüeta cuya frecuencia propia coincide con la de la corriente. Pero si la corriente no es sinusoidal, el resultado que se obtiene es otro: se excitan varias lengüetas. Por ejemplo, en la fig. 53.2, a la izquierda, se muestra la escala del frecuencímetro en el caso en que son tres las lengüetas excitadas —las de frecuencias 47,5; 50 y 52,5 Hz—, siendo diferentes las amplitudes de sus oscilaciones.

§ 53.4. Semianchura de la curva de resonancia. Selectividad

Un resonador con curva de resonancia aguda posee buena selectividad, es decir, de dos oscilaciones con frecuencias próximas puede fácilmente discriminar una cuya frecuencia coincide con la propia del oscilador. Por el contrario, un resonador con curva de resonancia suave reaccionará aproximadamente lo mismo ante ambas oscilaciones.

Cuantitativamente, la selectividad de un resonador se caracteriza por la *semianchura de su curva de resonancia* $\Delta\omega$. Se da este nombre a la diferencia entre la frecuencia de resonancia ω_0 y la frecuencia ω_1 con la cual la energía de las oscilaciones forzadas en el resonador resulta ser dos veces menor que la frecuencia propia (a igual amplitud de la fuerza excitatriz). Partiendo de la expresión para la energía de las oscilaciones (49.17), obtenemos que

$$\frac{1}{2} m\omega_1^2 A^2 = \frac{1}{4} m\omega_0^2 A_{res}^2, \quad (53.11)$$

o, teniendo en cuenta (53.8) y (53.10),

$$\omega_1^2 / (\omega_0^2 - \omega_1^2) = Q/2. \quad (53.12)$$

Cuando el factor de calidad del resonador es grande, ω_1 y ω_0 difieren poco entre sí, de manera que $\Delta\omega = |\omega_0 - \omega_1| \ll \omega_0$, y $\omega_1 + \omega_0 \approx$

$\approx 2\omega_0$. Haciendo las sustituciones en (53.12), obtenemos en definitiva que

$$\Delta\omega \approx \omega_0/Q. \quad (53.13)$$

Por consiguiente, a medida que aumenta el factor de calidad del resonador, disminuye la semianchura de su curva de resonancia y crece su selectividad.

§ 53.5. Proceso de estabilización de las oscilaciones forzadas

1. Hasta ahora hemos estudiado las oscilaciones forzadas ya estabilizadas. Aquí vamos a ocuparnos del proceso mismo de la estabilización, es decir, de la «intensificación» de las oscilaciones del sistema desde su estado de reposo. Para simplificar despreciaremos el amortiguamiento.

Al conectar la fuerza se producen simultáneamente oscilaciones libres de frecuencia angular ω_0 y oscilaciones forzadas de frecuencia angular ω . La oscilación resultante tiene la forma

$$s = A \cos \omega t + B \cos \omega_0 t. \quad (53.14)$$

La velocidad y la aceleración del sistema se pueden obtener derivando dos veces (53.14):

$$v = -A\omega \sin \omega t - B\omega_0 \sin \omega_0 t, \quad (53.15)$$

$$a = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega_0^2 \cos \omega_0 t. \quad (53.16)$$

2. Para calcular las amplitudes A y B utilizamos las condiciones iniciales: cuando $t = 0$, la elongación $s_0 = 0$, la velocidad $v_0 = 0$, la aceleración $a_0 = F_m/m$. Sustituyendo en (53.14) y (53.16) y después de hacer unos cálculos sencillos, se obtiene que

$$B = -A, \quad A = \frac{F_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (53.17)$$

Definitivamente la expresión (53.14) toma la forma

$$s = \frac{F_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \quad (53.18)$$

Vemos que ésta no es una oscilación sinusoidal. Si ω y ω_0 tienen valores próximos entre sí, en el sistema se producen pulsaciones (§ 50.1).

3. A primera vista parece que el resultado obtenido contradice la experiencia, según la cual, en el sistema sometido

a la acción de una fuerza excitatriz sinusoidal se producen oscilaciones armónicas de frecuencia igual a la de la fuerza (§ 53.4). Pero esta contradicción ha surgido por no tomar en consideración el fenómeno del amortiguamiento de las oscilaciones libres. Por consiguiente, son correctos los resultados de ambos párrafos, o sea, tanto del § 53.4 como de éste, pero están referidos a distintos instantes: el primero es correcto para las oscilaciones estabilizadas; el segundo caracteriza el proceso mismo de la estabilización.

Así, pues, la fórmula (53.14) y su consecuencia —la fórmula (53.18)— se pueden utilizar durante un corto intervalo de tiempo al comenzar el movimiento, mientras se puede despreciar aún el amortiguamiento de las oscilaciones libres, o más exactamente, cuando $t < \tau \approx Q/\omega_0$ (véase (51.4)). Para $t \gg \tau$ las oscilaciones libres se extinguen prácticamente y en el sistema se establecen oscilaciones sinusoidales de igual frecuencia que la de la fuerza excitatriz (véase (53.4)).

§ 53.6. Estabilización de las oscilaciones durante la resonancia

1. Para determinar el carácter de la estabilización de las oscilaciones durante la resonancia hay que pasar al límite en (53.18) con la condición de que ω tiende a ω_0 . Una vez transformados el numerador y el denominador en (53.18), teniendo en cuenta que el seno de un ángulo pequeño no difiere de la medida en radianes de dicho ángulo, obtenemos que

$$s = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{2F_m \operatorname{sen} \frac{(\omega + \omega_0)t}{2} \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} =$$

$$= \frac{F_m t}{2m\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t \cdot \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\operatorname{sen} \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}}{(\omega_0 - \omega)t/2}.$$

El último límite es igual a la unidad. Por lo tanto, la intensificación de las oscilaciones durante la resonancia se produce según la ley

$$s = \frac{F_m t}{2m\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t. \quad (53.19)$$

De este modo, si sobre un sistema oscilatorio en reposo, de factor de calidad grande, empieza a actuar una fuerza excitatriz cuya frecuencia coincide con la propia del sistema (resonancia), la amplitud de las oscilaciones aumentará de un modo directamente proporcional al tiempo:

$$A = F_m t / 2m\omega_0. \quad (53.20)$$

2. En ausencia de rozamiento en el sistema oscilante, durante la resonancia se observaría un crecimiento ilimitado de la amplitud. Pero en realidad este crecimiento sólo se mantiene hasta que el trabajo de la fuerza de rozamiento equilibra el trabajo de la fuerza excitatriz (fig. 53.3). Esta condición es la que determina la amplitud de resonancia estacionaria (53.10). Para valorar el tiempo que tarda en estabilizarse la amplitud de resonancia, igualamos (53.10) y (53.20) y obtenemos:

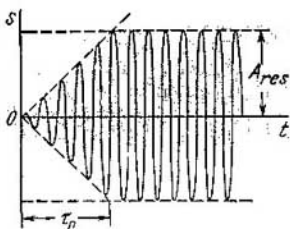


Fig. 53.3.

$$\frac{F_m}{h\omega_0} = \frac{F_m \tau_p}{2m\omega_0}, \quad \text{ó } \tau_p = \frac{2m}{h} = \frac{2Q}{\omega_0} = 2\tau. \quad (53.21)$$

Por lo tanto, el tiempo durante el cual aumentan las oscilaciones en resonancia es dos veces mayor que el tiempo de relajación de las oscilaciones libres (véase (51.4)). Debe tenerse en cuenta que estas dos expresiones dan solamente el orden de las magnitudes que nos interesan.

§ 53.7. Relación de indeterminación para la frecuencia y el tiempo

1. El resonador con el cual se analiza, o incluso simplemente se registra, un proceso oscilatorio determinado, introduce cierta indeterminación en el proceso de medición tanto de la frecuencia como del tiempo. La causa de esto consiste en que la frecuencia no se puede determinar con una exactitud mayor que la semianchura de la curva de resonancia, y el tiempo, con una exactitud mayor que el tiempo de intensificación de las oscilaciones del resonador.

La indeterminación de la frecuencia se puede valorar por la fórmula (53.13) y la indeterminación del tiempo, por la fórmula (53.21):

$$\Delta\omega \sim \omega_0/Q, \quad \Delta t \sim Q/\omega_0.$$

2. Como se puede ver, variando el factor de calidad del resonador se logra disminuir la indeterminación de una de las magnitudes, pero entonces la indeterminación de la otra magnitud aumenta en la misma proporción. El "producto" de las indeterminaciones de las dos magnitudes conjugadas —frecuencia y tiempo— no depende de las propiedades del resonador:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 1. \quad (53.22)$$

Esta expresión es la relación de indeterminación para la frecuencia y el tiempo. Volveremos a necesitarla cuando estudiemos los elementos de mecánica cuántica (§ 70.2).

Capítulo 54

CORRIENTE ALTERNA

§ 54.1. Generador sincrónico de corriente alterna

1. La vista general de un generador se muestra en la fig. 54.1. El cuerpo fijo, *estator*, se hace de chapas de acero de pequeña fuerza coercitiva, es decir, con bucle de histéresis estrecho. En el estator hay un devanado o arrollamiento. Dentro del estator gira el *rotor*, que es un electroimán (o imán permanente en los generadores de poca potencia). Al girar el rotor, junto con él gira su campo magnético y el flujo magnético que pasa a través del arrollamiento varía continuamente.

En cierta posición el arrollamiento es atravesado por el flujo magnético máximo; al cabo de un cuarto de vuelta, el flujo que pasa a través del arrollamiento es nulo; un cuarto de vuelta después, el flujo volverá a ser máximo por su módulo, pero su signo será otro, ya que la posición de los polos del imán se habrá invertido. Elijiendo de un modo

especial las piezas polares, se puede conseguir que el flujo magnético varíe según la ley del coseno:

$$\Phi = \Phi_m \cos \omega t, \quad (54.1)$$

en la que ω es la velocidad angular de giro del rotor.

2. A expensas de la variación del flujo magnético, en el arrollamiento del estator se induce una f.e.m. que, de acuerdo

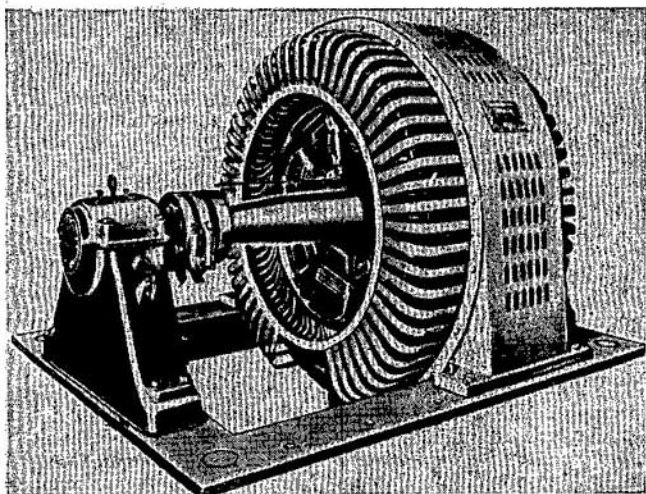


Fig. 54.1.

con la ley de inducción de Faraday (véase (43.10)), tiene la forma

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega\Phi_m \sin \omega t = \mathcal{E}_m \sin \omega t. \quad (54.2)$$

El valor máximo de la f.e.m. (amplitud \mathcal{E}_m) es igual al producto de la velocidad angular de giro del rotor ω por el valor de la amplitud del flujo magnético Φ_m :

$$\mathcal{E}_m = \omega\Phi_m. \quad (54.3)$$

3. El generador representado en la fig. 54.1 se llama *generador sincrónico de corriente alterna* porque la variación de la f.e.m. se produce simultáneamente (sincrónicamente) con el giro del rotor y sus frecuencias coinciden. La energía mecánica necesaria para hacer girar el rotor se toma de un *motor primario*, que puede ser una turbina o una máquina térmica. Por lo general, el rotor del generador se fija en el mismo árbol que el rotor del motor primario, el cual suele ser una turbina de vapor en los turbogeneradores de las centrales térmicas o una turbina hidráulica en los generadores de las centrales hidroeléctricas.

Los generadores más grandes del mundo se fabrican en la Unión Soviética. Las fábricas «Metálica» y «Electrosila» de Leningrado fabrican generadores hidráulicos de más de 500 MW y turbogeneradores de más de 800 MW en un solo grupo.

4. La corriente eléctrica que se produce por la acción de una f.e.m. que varía según la ley sinusoidal, recibe el nombre de *corriente alterna*. En esencia, esto son oscilaciones forzadas de la corriente en los circuitos eléctricos y, por eso, les aplicamos todos los resultados obtenidos en el cap. 53 al analizar las oscilaciones forzadas en los sistemas oscilatorios mecánicos. Para traducir las fórmulas allí obtenidas del «lenguaje mecánico» al «lenguaje de los circuitos eléctricos» se debe emplear la tabla 51.1.

No obstante, aquí conviene hacer una advertencia de principio. En el cap. 53 nos limitamos al estudio de las oscilaciones forzadas en sistemas con gran factor de calidad. Pero los circuitos de corriente alterna suelen tener un factor de calidad muy pequeño y que frecuentemente se aproxima a cero. A este tipo de circuitos pertenecen, por ejemplo, una resistencia con un condensador, una resistencia con una bobina, una resistencia independiente, etc. En estos circuitos son imposibles las oscilaciones libres, pero las forzadas se producen, como lo demuestra la experiencia. En este capítulo vamos a tratar principalmente de este tipo de circuitos.

§ 54.2. Circuito de corriente alterna

1. Conectemos en serie una lámpara de incandescencia cuya resistencia sea R , una batería de condensadores de capacidad C y una bobina de gran inductancia L (fig. 54.2). Si este circuito se conecta a los bornes de un generador de

corriente alterna, la lámpara se encenderá, lo que pone de manifiesto que por el circuito pasa corriente.

En este circuito actúan tres campos eléctricos alternativos. En primer lugar está el campo creado por la fuente exterior, es decir, el generador; este campo se caracteriza por la f.e.m. $e = \varepsilon_m \sin \omega t$ (véase (54.2)). En segundo lugar actúa el campo de la autoinducción, caracterizado por la f.e.m.

$e_L = -L \frac{di}{dt}$ (véase (43.16)). Y

finalmente actúa el campo de las cargas que se concentran en las placas del condensador; éste se caracteriza por la diferencia de potencial. Basándonos en la ley de Ohm para un trozo de circuito heterogéneo (véase (39.29)), tenemos

$$iR = e + e_L + \varphi_2 - \varphi_1. \quad (54.4)$$

2. Esta expresión se puede reducir a la forma

$$e = iR + (\varphi_1 - \varphi_2) - e_L = u_R + u_C + u_L. \quad (54.4)$$

Aquí la tensión en la resistencia óhmica

$$u_R = iR, \quad (54.6)$$

en la capacitancia

$$u_C = \varphi_1 - \varphi_2 = q/C \quad (54.7)$$

y en la inductancia

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}. \quad (54.8)$$

De este modo hemos modificado el carácter de la interpretación de los fenómenos en los circuitos de corriente alterna. En vez de la acción de tres campos sobre una resistencia óhmica, consideramos la acción de un campo exterior sobre tres resistencias: una óhmica R y dos reactancias—la capacitancia X_C y la inductancia X_L . Este modo de abordar el análisis de los fenómenos en los circuitos de corriente alterna es muy conveniente.

§ 54.3. Resistencia óhmica

1. Examinemos un circuito en el que la tensión en las reactancias sea mucho menor que la tensión en la resistencia óhmica. Esto es un circuito con resistencia óhmica. Omi-

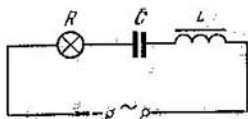


Fig. 54.2.

tiendo en (54.5) las magnitudes u_C y u_L , sustituimos e por su valor (54.2) y obtenemos

$$iR = \mathcal{E}_m \text{sen } \omega t. \quad (54.9)$$

Por consiguiente, las oscilaciones de la corriente se cumplen según la ley

$$i = I_m \text{sen } \omega t, \quad (54.10)$$

donde la amplitud de la corriente

$$I_m = \mathcal{E}_m/R. \quad (54.11)$$

2. Vemos que en el circuito con resistencia óhmica, bajo la acción de una f.e.m. sinusoidal, se producen oscilaciones armónicas de la corriente que tienen la frecuencia y la fase de las oscilaciones de la f.e.m. Las gráficas de las oscilaciones de la corriente y de la f.e.m. en este circuito se muestran en la fig. 54.3.

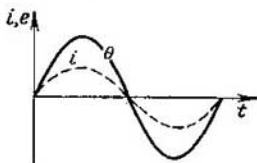


Fig. 54.3.

§ 54.4. Valores eficaces de la corriente y la tensión

1. En el circuito con resistencia óhmica tiene lugar una transformación irreversible de energía de la corriente eléctrica en energía interna del conductor, es decir, se desprende calor de Joule (§ 39.7). La potencia instantánea es el producto de los valores instantáneos de la corriente y de la f.e.m.:

$$p = ie = I_m^2 R \text{sen}^2 \omega t. \quad (54.12)$$

La gráfica de esta función se representa con línea continua en la fig. 54.4. Como término de comparación, en esta misma figura se muestra con línea de trazos la gráfica de la corriente. La amplitud de la potencia

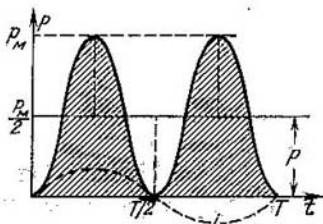


Fig. 54.4.

$$P_m = I_m^2 R. \quad (54.13)$$

2. Calculemos la potencia media por período de la corriente alterna. Con este fin hay que dividir por el período el trabajo realizado durante este tiempo (o sea, el calor de Joule que se desprende). Para calcular el trabajo utilizaremos la fig. 54.4.

De la definición de potencia (§ 16.5) se sigue que el trabajo elemental $\Delta A = p\Delta t$; el trabajo total viene representado por el área de la superficie limitada por la gráfica. De las propiedades de la senoide se deduce que el área de la superficie rayada debajo de la gráfica es igual al área del rectángulo cuya base es igual al período y su altura es la mitad de la amplitud de la potencia. Por lo tanto, el trabajo por período

$$A = (1/2) P_m T = (1/2) I_m^2 R T. \quad (54.14)$$

Y la potencia media

$$P = A/T = (1/2) P_m = (1/2) I_m^2 R. \quad (54.15)$$

3. Comparando la expresión (54.15) con la fórmula para el cálculo de la potencia de la corriente continua $P = I^2 R$, obtenemos que $I^2 R = 1/2 I_m^2 R$. De esto se desprende que

$$I = I_m / \sqrt{2}. \quad (54.16)$$

Por consiguiente, una corriente alterna de amplitud I_m es equivalente por su acción térmica (o mecánica) a una corriente continua $I = I_m / \sqrt{2}$. Esta magnitud se denomina *valor eficaz* de la corriente alterna. Respectivamente, las magnitudes

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m / \sqrt{2} \quad \text{y} \quad U = U_m / \sqrt{2}$$

se llaman valores efectivos de la f.e.m. y de la tensión.

§ 54.5. Capacitancia

1. Montemos un circuito análogo al representado en la fig. 54.2, pero sin bobina ($u_L = 0$), en el que la capacidad de la batería de condensadores y la resistencia de la lámpara de incandescencia estén elegidas de tal modo, que $u_C \gg u_R$. En este caso tendremos un circuito con capacitancia. La experiencia demuestra que las oscilaciones de la corriente en un circuito con capacitancia son armónicas y tienen la frecuencia de la f.e.m. excitatriz. Pero a diferencia del circuito con resistencia óhmica, en el que coinciden las fases

de las oscilaciones de la corriente y de la f.e.m., aquí las oscilaciones de la corriente se producen según la ley

$$i = I_m \text{ sen } (\omega t + \varphi). \quad (54.17)$$

Omitiendo en (54.5) u_L y u_R , por ser magnitudes pequeñas en comparación con u_C , y sustituyendo el valor de la f.e.m. externa en (54.2), obtenemos que $u_C = e = \mathcal{E}_m \text{ sen } \omega t$. Y comparando esto con (54.7), obtenemos la ley de las oscilaciones de la carga en las placas del condensador:

$$q = C\mathcal{E}_m \text{ sen } \omega t.$$

Derivando, se obtiene la ley de las oscilaciones de la corriente en el circuito:

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = C\omega\mathcal{E}_m \cos \omega t = C\omega\mathcal{E}_m \text{ sen } \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= I_m \text{ sen } \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

2. Vemos que en el circuito con capacitancia pura las oscilaciones de la corriente adelantan en fase a las oscilacio-

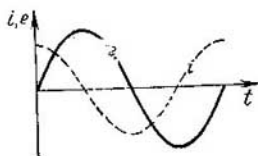


Fig. 54.5.

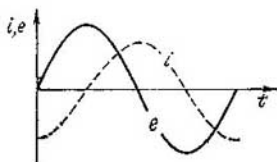


Fig. 54.6.

nes de la f.e.m. externa en $\varphi = \pi/2$. Está claro que, con la misma razón, se puede afirmar que las oscilaciones de la f.e.m. (y de la tensión en la capacitancia) se retrasan en fase en el mismo ángulo respecto de las oscilaciones de la corriente (fig. 54.5).

La relación entre las amplitudes de las oscilaciones de la corriente y de la f.e.m. se expresa así:

$$I_m = C\omega\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m/X_C, \quad (54.18)$$

donde la capacitancia

$$X_C = 1/C\omega. \quad (54.19)$$

§ 54.6. Inductancia

1. Si en el dispositivo de la fig. 54.2 se cortacircuita la batería de condensadores, obtenemos un circuito con inductancia ($u_C = 0$, $u_L \gg u_R$). Según el oscilograma, en este circuito las oscilaciones de la corriente sufren un retraso de fase φ con respecto a las oscilaciones de la tensión (fig. 54.6). Los valores instantáneos de la corriente se expresan así:

$$i = I_m \operatorname{sen} (\omega t + \varphi). \quad (54.20)$$

Omitiendo en (54.5) u_C y u_R , por ser magnitudes pequeñas en comparación con u_L , obtenemos que $u_L = e = \mathcal{E}_m \operatorname{sen} \omega t$. Sustituyendo este valor de u_L en (54.8) y derivando (54.20), se obtiene

$$\mathcal{E}_m \operatorname{sen} \omega t = L\omega I_m \cos (\omega t + \varphi).$$

2. Esta igualdad se satisfará idénticamente (es decir, en cualquier instante) si $\mathcal{E}_m = L\omega I_m$ y $\varphi = -\pi/2$. Por consiguiente, en un circuito con inductancia pura las oscilaciones de la corriente presentan un retraso de fase $\varphi = -\pi/2$ respecto de las oscilaciones de la f.e.m. externa (o de la tensión en la inductancia).

La amplitud de la intensidad de la corriente

$$I_m = \mathcal{E}_m / L\omega = \mathcal{E}_m / X_L, \quad (54.21)$$

donde la inductancia

$$X_L = L\omega. \quad (54.22)$$

§ 54.7. Ley de Ohm para los circuitos de corriente alterna

1. Volvamos a considerar el circuito completo de corriente alterna (véase la fig. 54.2). En él la corriente es la misma en las tres resistencias conectadas en serie: $i = I_m \operatorname{sen} \omega t$. Las tensiones en estas resistencias son:

$$u_R = iR = I_m \operatorname{sen} \omega t,$$

$$u_C = I_m X_C \operatorname{sen} \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -I_m X_C \cos \omega t, \quad (54.23)$$

$$u_L = I_m \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I_m X_L \cos \omega t.$$

De acuerdo con (54.5), la f.e.m. $e = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \varphi)$ es la suma de las oscilaciones de las tensiones (54.23). Pero

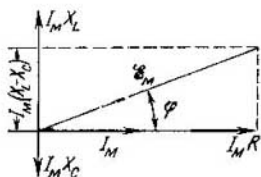


Fig. 54.7.

como estas oscilaciones difieren en fase, para su composición conviene utilizar el diagrama vectorial (§ 49.6). El diagrama vectorial de las tensiones se da en la fig. 54.7.

2. Aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos

$$\mathcal{E}_m = \sqrt{I_m^2 R^2 + I_m^2 (X_L - X_C)^2} \quad (54.24)$$

Como se ve, entre las amplitudes de las oscilaciones de la corriente y de la f.e.m. existe la relación

$$I_m = \mathcal{E}_m / Z, \quad (54.25)$$

en la que la magnitud

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (54.26)$$

recibe el nombre de *impedancia* del circuito de corriente alterna. La expresión (54.25) se llama *ley de Ohm para los circuitos de corriente alterna*. Dividiendo el primero y el segundo miembro de esta expresión por \sqrt{Z} , resulta que esta ley también es correcta para los valores eficaces de la corriente y de la f.e.m.

3. El desfase entre las oscilaciones de la corriente y de la f.e.m. se puede hallar por medio del diagrama vectorial. De la fig. 54.7 se sigue:

$$\cos \varphi = I_m R / \mathcal{E}_m = R / Z. \quad (54.27)$$

4. De (54.26) se deduce que la amplitud de la corriente depende de la frecuencia de las oscilaciones de la f.e.m. La amplitud máxima de la corriente se alcanza con la condición de mínimo de la impedancia; o sea, cuando $L\omega - 1/(C\omega) = 0$. La frecuencia correspondiente a esto $\omega = \sqrt{1/CL} = \omega_0$ es igual a la frecuencia propia del circuito. Por lo tanto, la amplitud máxima de la corriente se obtiene en la resonancia.

§ 54.8. Potencia de la corriente alterna

1. En un circuito completo de corriente alterna las transformaciones irreversibles de la energía sólo se producen en la resistencia óhmica R , mientras que la impedancia Z limita la magnitud de la amplitud de la corriente. Para calcular la potencia activa, es decir, la potencia media de las transformaciones irreversibles de la energía en el circuito de corriente alterna, utilizaremos la expresión (54.15). Haciendo la sustitución $I_m = \mathcal{E}_m/Z$ (54.25), se obtiene

$$P = \frac{1}{2} I_m \frac{\mathcal{E}_m}{Z} R = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}} \frac{R}{Z}.$$

Pero los dos primeros factores son los valores eficaces de la corriente y de la f.e.m. (§ 54.4), y el último factor $R/Z = \cos \varphi$ (véase (54.27)). Por consiguiente, la potencia activa

$$P = I\mathcal{E} \cos \varphi. \quad (54.28)$$

2. El factor $R/Z = \cos \varphi$ se llama *factor de potencia* y desempeña un papel importante en electrotecnia. En efecto, si en el circuito existe un desfase grande entre las oscilaciones de la corriente y de la f.e.m., el factor de potencia será pequeño y la carga consumirá poca potencia activa del generador. Pero el generador debe producir la potencia total.

$$S = I\mathcal{E}. \quad (54.29)$$

Esta misma potencia tiene que comunicarle al generador el motor primario. Por lo tanto, cuando el factor de potencia es bajo, la carga sólo consume una parte de la energía que produce el generador. La energía restante se transvasa periódicamente del generador al consumidor y viceversa y se disipa en las líneas de transporte de energía.

3. De la expresión (54.28) se sigue que el máximo de energía de la fuente de f.e.m. excitatriz lo consume un sistema con reglaje de resonancia. Efectivamente, en este caso $\cos \varphi = 1$ y la amplitud de la corriente resulta ser máxima. El mismo resultado lo hubiéramos obtenido haciendo el cálculo para un sistema oscilatorio mecánico.

§ 54.9. Transformador

1. Con frecuencia es necesario alimentar de una misma fuente de corriente alterna aparatos calculados para tensiones diferentes. Por ejemplo, cuando un televisor se conecta a la red de 220 V de tensión, el caldeo de las válvulas debe

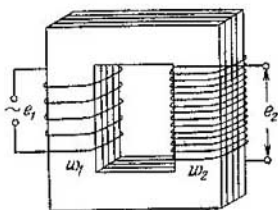


Fig. 54.8.

funcionar con una tensión de 6,3 V, los ánodos con tensiones de 200 a 500 V, y el tubo de rayos catódicos requiere 15 000 V. Por consiguiente, en el televisor hay que instalar uno o más transformadores—aparatos que sirven para variar la tensión de la corriente alterna.

La estructura de un transformador se muestra en la fig. 54.8. El núcleo del transformador está hecho de láminas

de acero especial para transformadores, cuya fuerza coercitiva es pequeña. Sobre el núcleo se monta un arrollamiento primario, con número de espiras w_1 , y un arrollamiento secundario, con número de espiras w_2 (o varios arrollamientos secundarios).

2. Se dice que el transformador funciona en vacío cuando el secundario está desconectado. En este caso, si el transformador está bien construido, por el arrollamiento primario pasa una corriente de marcha en vacío muy pequeña; el transformador consume una potencia de funcionamiento en vacío P_{xx} pequeña, que prácticamente coincide con la potencia que se gasta en reimanar el núcleo. Estas son pérdidas en histéresis, llamadas, también pérdidas en el hierro P_h . Así.

$$P_{xx} \approx P_h. \quad (54.30)$$

3. Calculemos la tensión en los arrollamientos. A expensas de la corriente de funcionamiento en vacío se produce la reimanación del núcleo; por consiguiente, ambos arrollamientos son atravesados por el flujo magnético alternativo Φ ; según la ley de Faraday (véase (43.10)),

$$e_1 = -w_1 \frac{d\Phi}{dt},$$

$$e_2 = -w_2 \frac{d\Phi}{dt},$$

de donde se sigue que las f.e.m. inducidas son proporcionales al número de espiras de los arrollamientos:

$$e_1/e_2 = w_1/w_2 = k. \quad (54.13)$$

Aquí $k = w_1/w_2$ es la relación de transformación. En los transformadores elevadores el número de espiras del secundario es mayor que el número de espiras del primario: $w_2 > w_1$, por consiguiente, del arrollamiento secundario se saca una tensión mayor que la que se aplica al primario.

4. Cuando el secundario se conecta a una carga activa, en él se produce una corriente cuyo valor eficaz designaremos por I_2 ; la tensión en los bornes del arrollamiento será igual a U_2 , y el desfase, φ_2 . Por la ley de Lenz, la corriente del secundario se opone a que varíe el flujo magnético en el núcleo. Como resultado de esto disminuye la inductancia del primario y aumenta la corriente en él. El valor eficaz de la corriente en el primario del transformador con carga es mayor que la corriente de funcionamiento en vacío: $I_1 > I_{xx}$.

Por la ley de conservación de la energía tenemos que

$$P_2 = P_1 - P_{\text{cob}} - P_{\text{h}}. \quad (54.32)$$

Aquí $P_2 = I_2 U_2 \cos \varphi_2$ es la potencia que se consume del secundario; $P_1 = I_1 U_1 \cos \varphi_1$, la potencia de la red que consume el primario; $P_{\text{cob}} = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2$ son las «pérdidas en el cobre», es decir, en calor de Joule en los arrollamientos, cuyas resistencias óhmicas son r_1 y r_2 , y, finalmente, P_{h} son las «pérdidas en el hierro», o sea, en la reimanación del núcleo.

El rendimiento del transformador

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_{\text{cob}} + P_{\text{h}}}. \quad (54.33)$$

5. Cuando las cargas están próximas al valor nominal, el rendimiento de los transformadores es muy elevado—del orden del 90—95%— y el desfase es casi nulo. La tensión en los bornes difiere poco de la f.e.m., ya que las resistencias óhmicas de los arrollamientos son relativamente pequeñas. En estas condiciones la igualdad (54.31), correcta para la

f.e.m., resulta ser aproximadamente correcta para las tensiones en los bornes de los arrollamientos:

$$U_1/U_2 \approx w_1/w_2 = k. \quad (54.34)$$

§ 54.10. Transmisión de la energía a distancia

1. Al transmitir la energía eléctrica del generador al consumidor, las pérdidas en calentamiento de los conductores son inevitables. Veamos las vías que existen para disminuir estas pérdidas.

Sea U la tensión con que trabaja el consumidor de energía (carga), $\cos \varphi$ el factor de potencia, y P la potencia de la carga. La longitud de la línea de transporte de energía (LTE) es l , y la sección de los conductores, S ; entonces la resistencia de la línea bifilar será $R = 2\rho l/S$. La pérdida de potencia en los conductores $\Delta P = I^2 R$. Y, como quiera que $I = P/(U \cos \varphi)$,

$$\Delta P = \frac{2\rho l P^2}{S U^2 \cos^2 \varphi}. \quad (54.35)$$

2. Vemos que para una potencia dada P de la carga y una longitud determinada l de la línea de transporte, las pérdidas se pueden disminuir principalmente aumentando la tensión y el factor de potencia. En efecto, el material de los conductores viene dado prácticamente (cobre o aluminio) y el aumentar la sección de éstos no es conveniente, ya que acarrearía dificultades de construcción y mayores gastos de metal, es decir, encarecería la LTE.

La elevación del factor de potencia es muy eficaz. Así, su aumento de $\cos \varphi_1 = 0,63$ a $\cos \varphi_2 = 0,88$ permite reducir las pérdidas a la mitad. Pero el método más eficiente de disminuir las pérdidas en calor de Joule en las LTE es la elevación de la tensión de consumo, como se puede ver en la expresión (54.35). Por eso en las LTE largas se utilizan altas tensiones —de decenas a centenares de kilovoltios. Así, el transporte de energía desde la central hidroeléctrica «Lenin» de Kuibishev hasta Moscú se efectúa por una LTE de 400 kV de tensión, y desde la central hidroeléctrica «XXII Congreso del PCUS» de Volgogrado, a la tensión de 500 kV.

Capítulo 55

ONDAS ELÁSTICAS

§ 55.1. Ondas transversales y longitudinales

1. Las oscilaciones que se producen en un punto cualquiera de un medio elástico se transmiten a los puntos vecinos, los cuales también empiezan a oscilar. El proceso de transmisión de las oscilaciones de un punto a otro es característico no solamente de los medios elásticos, sino también del campo electromagnético (cap. 59).

Se llaman *ondas* las perturbaciones del estado de una substancia o de un campo que se propagan en el espacio. Las oscilaciones de la substancia originan una *onda elástica*; las del campo electromagnético, una *onda electromagnética*.

2. En un tubo largo, lleno de un gas o de un líquido, introducimos un émbolo que realiza oscilaciones armónicas (fig. 55.1). Las oscilaciones de este émbolo, en virtud de la



Fig. 55.1.

acción de las fuerzas de la elasticidad, se transmiten al gas, con lo que a lo largo del tubo se propaga una onda elástica. Esta onda constituye un sistema de regiones de compresión y enrarecimiento del medio que cambian periódicamente su estado: si en cierto instante se observa en un punto cualquiera del medio una compresión y en el vecino un enrarecimiento, al cabo de medio período en la primera región se producirá el enrarecimiento y en la segunda, la compresión y así sucesivamente.

Advertimos que en este caso las oscilaciones de las partículas del medio elástico se efectúan en la misma dirección en que se transmiten las oscilaciones de capa en capa, es decir, a lo largo de la dirección en que se propaga la onda. Cuando las oscilaciones de las partículas se producen a lo largo de la dirección en que se propaga la onda, se dice que ésta es *longitudinal*.

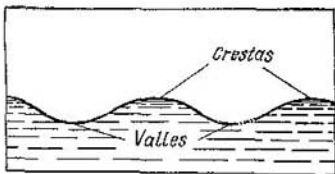


Fig. 55.2.

Las ondas que se producen en la superficie de un líquido no se deben a la elasticidad del medio, sino a las fuerzas de la tensión superficial o a la gravedad. La peculiaridad de estas ondas consiste en que las partículas del líquido oscilan en dirección vertical, mientras que la onda se propaga en un plano horizontal. La forma de las ondas en la superficie del líquido se muestra en la fig. 55.2. Cuando las oscilaciones de

las partículas del medio son perpendiculares a la dirección en que se propaga la onda, ésta recibe el nombre de *transversal*.

En los sólidos son posibles tanto las ondas longitudinales como las transversales. La onda longitudinal se produce como resultado de una deformación por compresión o enrarecimiento, lo mismo que en los gases y en los líquidos. La onda transversal se debe a una deformación por cizallamiento. Los gases y los líquidos carecen de elasticidad al cizallamiento y en ellos no se producen ondas transversales.

3. Se llama *superficie* o *frente de onda* el lugar geométrico de los puntos que oscilan siempre igual, es decir, en una misma fase. Si las superficies de onda son planos perpendiculares a la dirección en que se propaga la onda, las ondas se llaman *planas*.

De ejemplo de ondas *esféricas* pueden servir las ondas que se producen en el aire alrededor de una pequeña fuente isotropa de sonido, verbigracia, en torno a una campanilla.

4. *Rayo* es la línea cuya tangente en cada uno de sus puntos coincide con la dirección de propagación de la onda, es decir, con la dirección del transporte de energía. En un medio homogéneo el rayo es una recta perpendicular al frente de onda.

Así, por ejemplo, si la onda es excitada por una fuente puntual, el frente de onda tiene forma de esfera y los rayos son rectas radiales.

§ 55.2. Velocidad de las ondas elásticas

1. Las ondas elásticas de gran amplitud se llaman *ondas de choque*; las de amplitud pequeña (u ondas de perturbaciones pequeñas), ondas *sonoras* o *acústicas*. En el § 30.5 se obtuvieron para la velocidad de las ondas acústicas en los gases las expresiones (30.13) y (30.18):

$$a = \sqrt{dp/d\rho} = \sqrt{\gamma RT/M}. \quad (55.1)$$

En el aire

$$a = 20\sqrt{T}. \quad (55.2)$$

Para $T = 273 \text{ K}$ se obtiene $a = 330 \text{ m/s}$, y para $T = 293 \text{ K}$ tenemos $a = 343 \text{ m/s}$, lo que concuerda bien con los resultados experimentales.

2. La velocidad de las ondas sonoras en los sólidos y en los líquidos depende de la compresibilidad (elasticidad) y de la densidad de éstos. Para demostrarlo utilizaremos los datos del § 31.1. De las fórmulas (31.3) y (31.4) obtenemos la expresión de la velocidad de propagación de la onda *longitudinal* elástica (onda *P*):

$$a_P = \sqrt{dp/d\rho} = \sqrt{1/\beta\rho} = \sqrt{K/\rho}. \quad (55.3)$$

Utilizando los valores que da la tabla 31.1, se obtiene: en el agua $a = 1430$ m/s, en el cobre $a = 3910$ m/s, en el aluminio $a = 4880$ m/s, etc.

3. Para calcular la velocidad de la onda *transversal* (onda *S*) en los sólidos, en (55.3) se debe sustituir el módulo de compresibilidad K por el módulo de rigidez G :

$$a_S = \sqrt{G/\rho}. \quad (55.4)$$

El módulo de rigidez es, aproximadamente, 2—4 veces menor que el de compresibilidad, por lo que la velocidad de las ondas transversales es, aproximadamente, 1,5 veces menor que la velocidad de las ondas longitudinales. La experiencia confirma este resultado. Así, en el granito, la velocidad de la onda longitudinal $a_P = 5400$ m/s y la de la transversal $a_S = 3300$ m/s; en el basalto $a_P = 6300$ m/s y $a_S = 3700$ m/s.

En esta diferencia de velocidades se basan los métodos de prospección sísmica de minerales. En un barreno practicado en el subsuelo se hace explotar una carga; el instante inicial de la explosión se registra por medio de un captador. Las ondas reflejadas en distintas regiones del terreno se registran en un conjunto de sismógrafos, desde los cuales se transmiten las oscilaciones a una estación sísmica. En ésta se amplifican y, junto con las señales de tiempo, se inscriben en una cinta. El análisis de los sismogramas permite formarse una idea de cómo están distribuidos los minerales. Este método se utiliza mucho en la prospección del petróleo, gas, minerales, etc.

4. Si la onda longitudinal se propaga por una varilla, y no en un medio de extensión ilimitada, en la expresión (55.3) hay que sustituir el módulo de compresibilidad K por el de Young E :

$$a_P = \sqrt{E/\rho}. \quad (55.5)$$

Para el acero, por ejemplo, $E = 21,0 \cdot 10^{10}$ Pa, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ kg/m³ y, por consiguiente, $a_P = 5100$ m/s.

§ 55.3. Energía e intensidad de una onda

1. Aislamos mentalmente cierta región de un medio elástico, de volumen V , en el cual se propague una onda de amplitud A y frecuencia ω . La energía en este volumen $W = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$ (véase (49.17)). Dividiéndola por el volumen, obtenemos la expresión de la densidad media de la energía de la onda:

$$\bar{w} = \bar{W}/V = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2, \quad (55.6)$$

donde ρ es la densidad del medio.

2. Se llama *intensidad de una onda* la magnitud igual a la energía que por término medio transporta la onda a través de la unidad de superficie en la unidad de tiempo:

$$I = \frac{\Delta W}{S \Delta t} = \frac{P}{S}, \quad (55.7)$$

siendo P la potencia de la onda. Supongamos que $\Delta t \gg T$, donde T es el período de las oscilaciones. Durante el tiempo Δt pasará a través de la superficie la energía contenida en el volumen $\Delta V = Su \Delta t$, en el que u es la velocidad de la onda; la energía $\Delta W = \bar{w} \Delta V = \bar{w} S u \Delta t$. Sustituyendo en (55.7), y después de hacer simplificaciones, se obtiene

$$I = \bar{w} u = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2. \quad (55.8)$$

3. La magnitud igual al producto de la densidad del medio por la velocidad del sonido en él

$$z = \rho u, \quad (55.9)$$

se llama *impedancia acústica* y caracteriza las propiedades ondulatorias de éste (§ 56.6).

§ 55.4. Amortiguamiento de las ondas

1. Las ondas elásticas siempre son absorbidas por la substancia, con la particularidad de que el grado de absorción depende de muchos factores. Deduzcamos la ley de la absorción de las ondas planas (de rayos paralelos). Para la luz esta ley fue descubierta y fundamentada por P. Bouguer en 1729.

Supongamos que la onda plana pasa por una capa de substancia cuyo espesor es x . La intensidad de la onda varía desde la magnitud I_0 hasta $I < I_0$. Llamaremos *transparen-*

cia D de la capa dada de substancia para esta onda a la razón de la intensidad de la onda transmitida a la intensidad inicial:

$$D = I/I_0. \quad (55.10)$$

Admitamos que la transparencia de la capa dada de substancia sólo depende de su espesor, y no de la intensidad de la onda:

$$D = f(x). \quad (55.11)$$

Supongamos ahora que la onda pasa a través de dos láminas, cuyos espesores sean x_1 y x_2 , apretadas una contra otra de tal

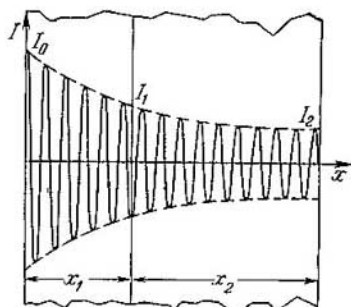


Fig. 55.3.

modo que pueda despreciarse la reflexión en el límite de separación entre ellas (fig. 55.3). Al salir de la primera lámina, la onda tendrá la intensidad $I_1 = I_0 f(x_1)$, y después de salir de la segunda, la intensidad

$$I_2 = I_1 f(x_2) = I_0 f(x_1) f(x_2). \quad (55.12)$$

Pero este sistema de láminas se puede considerar como una sola lámina de espesor $x = x_1 + x_2$. Por consiguiente,

$$I_2 = I_0 f(x_1 + x_2). \quad (55.13)$$

Comparando ambas igualdades obtenemos la ecuación funcional

$$f(x_1) f(x_2) = f(x_1 + x_2). \quad (55.14)$$

No es difícil comprobar que esta ecuación funcional puede ser satisfecha por la función exponencial $f(x) = a^{\alpha x}$. Elija-
mos como base el número $a = 2$. Teniendo en cuenta que $f(x)$ es una función decreciente, vemos que el coeficiente α que figura en el exponente debe ser un número negativo: $\alpha = -1/L$. Entonces la función buscada toma la forma

$$f(x) = 2^{-x/L}. \quad (55.15)$$

2. La ley del amortiguamiento de las ondas planas (ley de Bourguier) se escribe así:

$$I = I_0 \cdot 2^{-x/L}. \quad (55.16)$$

o, de otro modo,

$$I = I_0 e^{-\mu x}. \quad (55.17)$$

La magnitud L se llama *capa de semiabsorción*. En efecto, si la onda atraviesa una capa de espesor $x = L$, $I = I_0 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2} I_0$, es decir, la intensidad de la onda se reduce a la

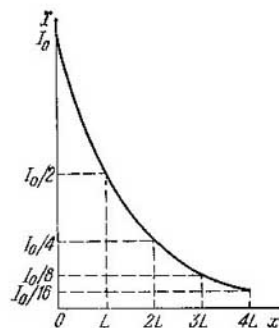


Fig. 55.4.

mitad. El coeficiente lineal de absorción $\mu = 0,69/L$. La gráfica de la ley de absorción se muestra en la fig. 55.4.

La suposición de que la transparencia de la capa del medio es independiente de la intensidad de la onda desempeña un papel importante en la deducción de la ley de la absorción. En el caso en que la transparencia depende de la intensidad, la ley de la absorción no se expresa ya por la fórmula (55.16). Esto ocurre principalmente con las ondas de choque.

Capítulo 56

ECUACIÓN DE LA ONDA

§ 56.1. Longitud de onda

1. Montemos el dispositivo representado en la fig. 56.1. La tensión sinusoidal del generador de ondas acústicas se hace llegar al altavoz electrodinámico y, al mismo tiempo, a una de las entradas del oscilógrafo de doble haz, en cuya

pantalla se ve el oscilograma de esta oscilación. Las oscilaciones del difusor del altavoz excitan una onda elástica en el aire. La onda elástica plana que se produce llega al micrófono y hace que oscile su membrana. Las oscilaciones acústicas se transforman en eléctricas y se transmiten a la segunda

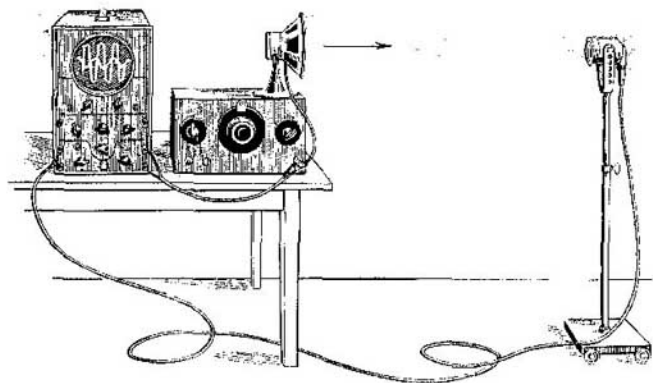


Fig. 56.1.

entrada del oscilógrafo. En su pantalla aparece un segundo oscilograma, correspondiente a las oscilaciones del frente de onda cerca del micrófono. Trasladando el micrófono se puede estudiar el carácter de las oscilaciones en cada frente de onda.

La experiencia demuestra que las frecuencias de ambas oscilaciones coinciden, como se ve en el oscilograma, pero la fase de las oscilaciones del frente de onda difiere de la fase de las oscilaciones del difusor. Supongamos que la temperatura del aire $t \approx 17^\circ \text{C}$, la velocidad del sonido $a \approx 340 \text{ m/s}$ y que el generador funciona con la frecuencia $\nu = 500 \text{ Hz}$. En este caso resulta que si la distancia entre el difusor y el micrófono $x_1 = 17 \text{ cm}$, el desfase entre las oscilaciones del difusor y de la onda junto al micrófono $\Delta\varphi_1 = \pi/2$, y si $x_2 = 34 \text{ cm}$, se obtiene el desfase $\Delta\varphi_2 = \pi$, es decir, la fase pasa a ser oposición de fase. Finalmente, cuando $x_3 = 68 \text{ cm}$, la diferencia de fase $\Delta\varphi_3 = 2\pi$, o sea,

las oscilaciones del frente de onda y del difusor se producen siempre en concordancia de fase. Si se sigue alejando el micrófono, el fenómeno se repite, por ejemplo, cuando $x_4 = 136$ cm, el desfase $\Delta\varphi_4 = 4\pi$, es decir, otra vez las oscilaciones de la fuente y del frente de onda estarán en concordancia de fase y así sucesivamente.

2. Este fenómeno se explica por el valor finito de la velocidad de la onda. En efecto, si el frente de onda se encuentra a la distancia x del difusor, las oscilaciones en esta región se originan con el retraso

$$\Delta t = x/u, \quad (56.1)$$

donde u es la velocidad de la onda sinusoidal. Este retraso se conserva todo el tiempo en forma de retardo de fase $\Delta\varphi$. Su valor se puede hallar teniendo en cuenta que durante un período T la fase varía en 2π :

$$\Delta\varphi/\Delta t = 2\pi/T.$$

Sustituyendo el valor Δt de (56.1), obtenemos que

$$\Delta\varphi = 2\pi x/uT = 2\pi x/\lambda, \quad (56.2)$$

3. La magnitud

$$\lambda = uT = u/v = 2\pi u/\omega \quad (56.3)$$

se llama *longitud de onda*. Si en (56.2) se supone $x = \lambda$, obtenemos que $\Delta\varphi = 2\pi$. Por consiguiente, si la distancia entre dos puntos oscilantes (o dos frentes de onda) es igual a la longitud de onda, estos puntos oscilan en la misma fase.

Así, pues, *recibe el nombre de longitud de onda la distancia entre los dos puntos más próximos que oscilan todo el tiempo en la misma fase* (es decir, con un desfase $\Delta\varphi = 2\pi$). Más concreto, *la longitud de onda es el período espacial*, análogo al período de tiempo T .

§ 56.2. Ecuación de la onda plana

1. Supongamos que las oscilaciones del difusor se definen por la ecuación

$$s_0 = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (56.4)$$

Entonces las oscilaciones del frente de onda, que se encuentra del difusor a la distancia x , se expresarán así: $s = A \cos[\omega(t - \Delta t) + \varphi]$. Aquí hemos omitido el amorti-

guamiento de la onda. Sustituyendo el valor Δt de (56.1), obtenemos

$$s = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]. \quad (56.5)$$

Esta es la ecuación de la onda sinusoidal plana que se propaga a lo largo del eje de abscisas.

2. La magnitud

$$k = \omega/u \quad (56.6)$$

se llama *número de onda*. Comparándola con (56.3), obtenemos

$$k = 2\pi/\lambda \quad (56.7)$$

El número de onda indica cuántas longitudes de onda entran en una distancia igual a 2π metros. Esto es análogo a la

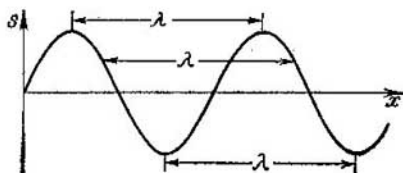


Fig. 56.2.

frecuencia angular ω que indica cuántos períodos entran en un intervalo de tiempo igual a 2π segundos (§ 49.2).

3. Abriendo paréntesis en (56.5) y tomando en consideración (56.6), obtenemos la ecuación de la onda sinusoidal plana de una forma más simétrica:

$$s = A \cos (\omega t - kx + \varphi). \quad (56.8)$$

De esta ecuación se desprende:

a) La ley de la elongación para un punto determinado ($x = x_0 = \text{const}$) en distintos instantes; se obtiene la oscilación armónica

$$s = A \cos (\omega t + \alpha), \text{ en la que } \alpha = \varphi - kx_0.$$

b) El carácter de la distribución de las elongaciones de todos los puntos en un instante determinado ($t = t_0 = \text{const}$); se obtiene la expresión

$$s = A \cos(kx + \beta), \text{ en la que } \beta = -(\omega t_0 + \varphi).$$

La gráfica de esta función para $\beta = -\pi/2$ se muestra en la fig. 56.2.

§ 56.3. Ecuación de la onda esférica

1. Supongamos que en el aire se propaga una onda esférica excitada por una fuente pequeña (cuya forma es preferible que sea esférica). Admitamos que el radio de la fuente es r_0 ; la distancia desde su centro hasta el micrófono, $r > r_0$; la amplitud de las oscilaciones de la onda en la superficie de la fuente, A_0 , y la amplitud de la onda junto al micrófono, A .

Trasladando el micrófono de un punto a otro obtenemos que el carácter de la variación de la fase es el mismo que en el caso de la onda plana. Pero si en la experiencia con la onda plana la amplitud prácticamente no variaba, aquí la amplitud decrece en proporción inversa a la distancia de la fuente al micrófono, aunque la absorción por el aire se puede despreciar en este caso.

2. El resultado obtenido está de acuerdo con la ley de conservación de la energía. Para demostrarlo calcularemos la energía total que la onda transporta por segundo a través de una superficie esférica de radio r . Según (55.9) y (55.10) tenemos que

$$P = \frac{W}{t} = IS = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2 \cdot 4\pi r^2. \quad (56.9)$$

En la superficie de la fuente

$$P = 2\pi r_0 u \omega^2 A_0^2 r_0^2.$$

Igualando estas expresiones de la potencia, obtenemos que

$$A = A_0 r_0 / r. \quad (56.10)$$

La ecuación de la onda esférica tiene la forma

$$s = A \cos(\omega t - kr + \varphi) = \frac{A_0 r_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi). \quad (56.11)$$

3. La expresión de la intensidad de la onda esférica la obtenemos sustituyendo (56.10) en (55.8):

$$I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 \frac{A_0^2 r_0^2}{r^2} = \frac{I_0 r_0^2}{r^2}. \quad (56.12)$$

Aquí $I_0 = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A_0^2$ es la intensidad de la onda en la superficie de la fuente esférica. Vemos que la intensidad de la onda esférica disminuye en proporción inversa al cuadrado de la distancia a la fuente.

§ 56.4. Efecto Doppler en acústica

1. Hasta ahora hemos considerado que la frecuencia de las oscilaciones de la fuente ω_0 , la frecuencia de la onda ω y la frecuencia de las oscilaciones ω' registrada por el receptor (por ejemplo, el micrófono) eran iguales entre sí: $\omega = \omega' = \omega_0$. Por eso no distinguíamos dichas frecuencias y las designábamos simplemente por ω . Pero resulta que esto sólo es correcto cuando la fuente y el receptor están en reposo con respecto al medio en que se propaga la onda. Si la fuente o el receptor se mueven con respecto al medio $\omega \neq \omega_0$ ó $\omega' \neq \omega_0$. Este fenómeno fue descubierto por Christian Doppler en 1842.

2. Supongamos que la fuente de ondas se mueve con respecto al medio y que el receptor está en reposo. A la velocidad de la fuente con respecto al medio la llamaremos v ; ésta debe ser menor que la velocidad de la onda ($v < u$), ya que de lo contrario se complica el fenómeno a causa de las ondas de choque. El movimiento de la fuente hace que varíe la longitud de onda: en el sentido del movimiento, disminuye y es igual a $\lambda = (u - v) T$; en el sentido contrario, aumenta en comparación con la longitud de la onda que emitiría la fuente si estuviera en reposo, y es igual a $\lambda = (u + v) T$ (véase el § 30.7, fig. 30.4). La velocidad de la onda viene determinada únicamente por las propiedades elásticas del medio (§ 55.4), el movimiento de la fuente no influye en ella.

La relación entre la longitud de onda λ en el sentido del movimiento de la fuente, y la longitud de la onda λ_0 que emite la fuente en reposo, se expresa así:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{u - v}{u}. \quad (56.13)$$

Para la longitud de onda en sentido contrario al del movimiento de la fuente

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{u + v}{u}. \quad (56.14)$$

De acuerdo con (56.3) tenemos que $\lambda = 2\pi u/\omega$ y $\lambda_0 = 2\pi u/\omega_0$. Sustituyendo en (56.13) y (56.14) obtenemos la expresión para la frecuencia angular que el receptor en reposo con respecto al medio registra en el caso en que se mueve la fuente:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega_0}{1 - v/u} \quad (\text{cuando la fuente se acerca}), \\ \omega &= \frac{\omega_0}{1 + v/u} \quad (\text{cuando la fuente se aleja}). \end{aligned} \quad (56.15)$$

3. Si la fuente está en reposo y el receptor se mueve respecto del medio con la velocidad v , también se observa que la frecuencia varía, pero por otra causa. En este caso la longitud de onda no cambia, puesto que la fuente está en reposo: $\lambda = \lambda_0$. Pero la velocidad de la onda w con respecto al receptor que se mueve es igual a la suma algebraica de

la velocidad de la onda u y la velocidad del receptor respecto del medio v :

$$\begin{aligned} w &= u + v \text{ (cuando el receptor se acerca),} \\ w &= u - v \text{ (cuando el receptor se aleja).} \end{aligned} \quad (56.16)$$

De acuerdo con (56.3) tenemos para la frecuencia angular que registra el receptor

$$\omega' = 2\pi w/\lambda. \quad (56.17)$$

Comparándola con (56.16) y teniendo en cuenta que $\omega_0 = 2\pi u/\lambda$ (puesto que $\lambda = \lambda_0$), obtenemos que

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega_0 (1 + v/u) \text{ (cuando el receptor se acerca),} \\ \omega' &= \omega_0 (1 - v/u) \text{ (cuando el receptor se aleja).} \end{aligned} \quad (56.18)$$

4. Vemos que, al moverse, la fuente y el receptor ocasionan distintas variaciones de la frecuencia registrada. Esto se aprecia especialmente cuando la velocidad de la fuente o del receptor se aproxima a la velocidad de la onda.

Sea, por ejemplo, $v = 0,9u$. Entonces, si la fuente se aproxima al receptor en reposo, de (56.15) obtenemos que $\omega = 10\omega_0$; en cambio, cuando el receptor se acerca a la fuente en reposo, de (56.18) resulta que $\omega' = 1,9\omega_0 \approx 3\omega_0$, es decir, ω' es cinco veces menor que ω .

A primera vista puede parecer que esto contradice el principio de la relatividad: ¿qué más da que lo que se mueva sea la fuente o el receptor? Pero es que aquí lo que influye no es el movimiento relativo entre la fuente y el receptor, sino el de estos respecto del medio elástico en que se produce la onda y al cual está asociado el sistema de referencia. Más adelante estudiaremos el efecto Doppler para las ondas electromagnéticas (§ 59.8) y veremos cómo entonces el fenómeno se desarrolla exactamente lo mismo cuando se mueve la fuente que cuando se mueve el receptor.

§ 56.5. Reflexión y refracción de las ondas

1. La experiencia demuestra que en el límite de separación de dos medios (dióptrico) una onda se divide en dos, una reflejada y otra refractada. Veamos las direcciones que toman las ondas reflejada y refractada en el caso en que la onda incidente llega oblicuamente al límite de separación.

En la fig. 56.3 se muestran dos medios en los cuales la velocidad de la onda es igual a u_1 y u_2 respectivamente. Aquí el ángulo de incidencia α_1 , el ángulo de reflexión α_{refl} y el ángulo de refracción α_2 son los ángulos que forman los rayos respectivos (§ 55.1) con la normal al límite de separación.

2. Escribamos las ecuaciones de las tres ondas:

$$s_1 = A_1 \cos (\omega t - k_1 r_1),$$

$$s_2 = A_2 \cos (\omega t - k_2 r_2),$$

$$s_{\text{refl}} = A_{\text{refl}} \cos (\omega t - k_{\text{refl}} r_{\text{refl}} + \varphi) = \pm A_{\text{refl}} \cos (\omega t - k_{\text{refl}} r_{\text{refl}}). \quad (56.19)$$

La aparición en la onda reflejada del desplazamiento de fase φ se debe a que en la reflexión puede variar la fase de la onda. Como aquí pueden ocurrir dos casos, $\omega = 0$ y $\varphi = \pi$, hemos tenido esto en cuenta poniendo dos signos a la amplitud de la onda reflejada. Como se ve en la fig. 56.3, para un punto arbitrario M del rayo incidente es correcta la relación

$$MN = MK + KN.$$

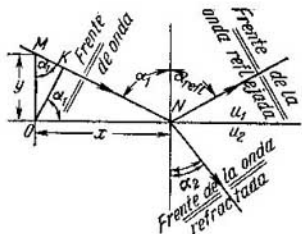


Fig. 56.3.

Pero $MN = r_1$, $MK = y \cos \alpha_1$ y $KN = x \sin \alpha_1$, por consiguiente, $r_1 = x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1$. Esta condición sirve también tanto para el rayo reflejado como para el refractado. Así,

$$r_1 = x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1,$$

$$r_2 = x \sin \alpha_2 + y \cos \alpha_2, \quad (56.20)$$

$$r_{\text{refl}} = x \sin \alpha_{\text{refl}} + y \cos \alpha_{\text{refl}}.$$

Las ecuaciones de las tres ondas toman la forma

$$s_1 = A_1 \cos (\omega t - k_1 x \sin \alpha_1 - k_1 y \cos \alpha_1),$$

$$s_2 = A_2 \cos (\omega t - k_2 x \sin \alpha_2 - k_2 y \cos \alpha_2), \quad (56.21)$$

$$s_{\text{refl}} = A_{\text{refl}} \cos (\omega t - k_{\text{refl}} x \sin \alpha_{\text{refl}} - k_{\text{refl}} y \cos \alpha_{\text{refl}}).$$

3. En el límite de separación, donde la onda se divide en reflejada y refractada, debe cumplirse la condición de igualdad de las elongaciones en cualquier punto de dicho límite, llamada también *condición de continuidad*:

$$s_1 + s_{\text{refl}} = s_2, \quad (56.22)$$

es decir, la elongación de un punto en la onda refractada (s_2) es igual a la suma algebraica de las elongaciones provocadas por las ondas incidente (s_1) y reflejada (s_{refl}). Sustituyendo los valores de las elongaciones (56.21) en la condición de continuidad (56.22) y teniendo en cuenta que en el límite de separación de los dos medios la ordenada $y = 0$, obtenemos:

$$A_1 \cos(\omega t - k_1 x \sin \alpha_1) \pm A_{\text{refl}} \cos(\omega t - k_{\text{refl}} x \sin \alpha_{\text{refl}}) = A_2 \cos(\omega t - k_2 x \sin \alpha_2). \quad (56.23)$$

La relación obtenida se debe cumplir en cualquier instante t y para cualquier punto del límite, o sea, para cualquier abscisa x . Esto sólo es posible en el caso en que los argumentos de los cosenos sean iguales en los tres miembros de la igualdad:

$$\omega t - k_1 x \sin \alpha_1 = \omega t - k_{\text{refl}} x \sin \alpha_{\text{refl}} = \omega t - k_2 x \sin \alpha_2,$$

o, después de hacer las simplificaciones,

$$k_1 \sin \alpha_1 - k_{\text{refl}} \sin \alpha_{\text{refl}}, \quad k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2. \quad (56.24)$$

4. Como los rayos incidente y reflejado se hallan en el mismo medio, sus números de onda coinciden: $k_{\text{refl}} = k_1 = \omega/u_1$ (véase (56.6)). Con esto, de la primera igualdad de (56.24) se sigue que $\sin \alpha_{\text{refl}} = \sin \alpha_1$. Y como ambos ángulos son agudos, la igualdad de los senos sólo es posible en el caso en que los ángulos sean iguales:

$$\alpha_{\text{refl}} = \alpha_1. \quad (56.25)$$

Hemos obtenido la *ley de la reflexión de las ondas*: los rayos reflejado, incidente y la normal al límite de separación de los dos medios están en el mismo plano; el ángulo de reflexión α_{refl} es igual al ángulo de incidencia α_1 .

5. Transformemos la segunda igualdad de (56.24) expresando, según (56.6), los números de onda por medio de la frecuencia y de la velocidad de la onda. Advertimos que, al pasar de un medio a otro, la frecuencia de las oscilaciones no varía, porque, la frecuencia de las oscilaciones forzadas es igual a la frecuencia de la fuerza que las excita (§ 53.1). Sustituyendo $k_1 = \omega/u_1$ y $k_2 = \omega/u_2$ en (56.24), y después de hacer simplificaciones, tenemos

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{u_1}{u_2}. \quad (56.26)$$

Esta es la ley de la refracción de las ondas: los rayos refractado e incidente y la normal al límite de separación de los dos medios están en un mismo plano; los senos de los ángulos de incidencia y de refracción son proporcionales a las velocidades de propagación de las ondas en dichos medios.

§ 56.6. Coeficientes de reflexión y de transparencia

1. Supongamos que la onda incide perpendicularmente al límite de separación. En este caso $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = \pi$. La ecuación (56.23) toma la forma

$$A_1 \pm A_{\text{refl}} = A_2. \quad (56.27)$$

El signo más corresponde a la reflexión sin cambio de fase ($\varphi = 0$) y el signo menos a la inversión de fase ($\varphi = \pi$). Para concretar, elegiremos el signo más.

2. De la ley de conservación de la energía se sigue que la intensidad de la onda transmitida es igual a la diferencia entre las intensidades de la onda incidente y la reflejada:

$$I_1 - I_{\text{refl}} = I_2 \quad (56.28)$$

Sustituyendo los valores de las intensidades de (55.8) y después de simplificar, tenemos:

$$A_1 + A_{\text{refl}} = A_2, \quad \rho_1 u_1 (A_1^2 - A_{\text{refl}}^2) = \rho_2 u_2 A_2^2. \quad (56.29)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos

$$A_{\text{refl}} = A_1 \frac{\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2}{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2}, \quad A_2 = A_1 \frac{2\rho_1 u_1}{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2}. \quad (56.30)$$

Así, si $\rho_1 u_1 > \rho_2 u_2$, es decir, si la onda se refleja en el medio con menor resistencia acústica, la amplitud de la onda reflejada tiene signo positivo, lo que está de acuerdo con el sentido de este concepto; la fase no cambia en la reflexión. Cuando $\rho_1 u_1 < \rho_2 u_2$, la amplitud de la onda reflejada es negativa, lo que significa que, al reflejarse la onda, su fase se invierte.

3. La intensidad de la onda reflejada la obtenemos elevando al cuadrado (56.30):

$$I_{\text{refl}} = I_1 R, \quad (56.31)$$

donde el coeficiente de reflexión

$$R = \left(\frac{\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2}{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2} \right)^2. \quad (56.32)$$

Si las resistencias acústicas de los dos medios difieren poco, $R \approx 0$ y la onda pasa prácticamente en su totalidad de un medio al otro. Cuando la diferencia entre los valores de las resistencias acústicas

es grande, el coeficiente de reflexión tiende a la unidad ($R \approx 1$), la onda se refleja prácticamente en su totalidad y no pasa al segundo medio. El coeficiente de transparencia

$$T = \frac{I_2}{I_1} = \frac{I_1 - I_{refl}}{I_1} = 1 - R.$$

Teniendo en cuenta (56.32), obtenemos

$$T = \frac{4\rho_1 u_1 \rho_2 u_2}{(\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2)^2}. \quad (56.33)$$

Capítulo 57

INTERFERENCIA Y DIFRACCIÓN

§ 57.1. Principio de superposición

1. Si con dos varillas se toca simultáneamente la superficie del agua, cada una de ellas originará una onda circular que «pasará» a través de la otra como si ésta no existiera. Análogamente se propagan las ondas acústicas, radioeléctricas y luminosas. En efecto, si al mismo tiempo suenan dos instrumentos musicales (u otras fuentes de sonido), cada una de las ondas se propaga independientemente de la otra y a cada una la percibimos independientemente de la otra; exactamente del mismo modo se propagan sin depender unas de otras las ondas radioeléctricas procedentes de dos o más emisoras de radio, las ondas luminosas de varios focos de luz, etc.

Así la experiencia demuestra que las ondas no interactúan entre sí y que se propagan independientemente unas de otras.

2. Como las ondas no interactúan, cada región del espacio por donde pasan dos o más ondas participará en las oscilaciones producidas por cada onda individualmente. Para hallar la elongación resultante en un punto dado de este espacio hay que determinar la elongación debida a cada onda, y después sumarlas vectorialmente, si tienen lugar en distintas direcciones, o escalarmente (algebraicamente), si se producen a lo largo de una misma recta.

Esta regla para hallar la elongación resultante recibe el nombre de *principio de superposición de las ondas*.

3. El principio de superposición sólo es aplicable a las ondas de poca intensidad. Ondas elásticas de esta intensidad son las ondas acústicas; a las ondas electromagnéticas de este tipo pertenecen las radioeléctricas y las luminosas de los focos de luz ordinarios.

A las ondas de choque no se les puede aplicar el principio de superposición. En efecto, al pasar la onda de choque cambian de golpe los parámetros del medio elástico, es decir, su densidad, presión y temperatura; esto hace que varíen las velocidades de propagación de las otras ondas y sus intensidades, con lo que se infringe el principio de la superposición.

Un resultado análogo se observa en la óptica, donde el principio de superposición sólo es aplicable a las ondas luminosas de poca intensidad. Acerca de que el principio de superposición puede infringirse cuando las ondas luminosas son de gran intensidad escribió ya S. I. Vávílov hace más de 30 años. Pero en aquel tiempo no se pudo descubrir este fenómeno por no existir entonces fuentes potentes de luz. En la actualidad, valiéndose de los generadores de luz coherente, láseres (§ 79.4), se logra obtener haces luminosos de potencias tan grandes, que con ellos se infringe el principio de superposición. La parte de la óptica que estudia estos efectos se llama *óptica no lineal*. Aunque estos fenómenos empezaron a estudiarse hace relativamente poco tiempo, ya se han obtenido resultados importantes y de gran interés.

§ 57.2. Ondas estacionarias

1. Atemos un cordón de goma a un soporte y agitamos rítmicamente su extremo libre (fig. 57.1). Para una frecuencia de oscilación determinada, el cordón tomará la forma que se ve en la fotografía de la izquierda; cuando la frecuencia sea dos veces mayor, adoptará la de la fotografía de la derecha.

Las ondas representadas en la fig. 57.1 se llaman *estacionarias*. A diferencia de la onda progresiva, móvil o viajera, cuyos puntos efectúan oscilaciones de la misma amplitud pero con retardo de fase (§§ 56.1 y 56.2), todos los puntos de la onda estacionaria oscilan al mismo tiempo pero con amplitudes diferentes. Las regiones que se hallan en reposo (de amplitud nula) se llaman *nodos* de la onda estacionaria,

y las que oscilan con la amplitud máxima, *vientres* o *antinodos*.

2. La onda estacionaria se produce como resultado de la composición de dos ondas que se mueven en sentidos opuestos. Una de ellas es la onda excitada por la fuente, que avanza siguiendo el eje de abscisas; su ecuación es: $s_1 = A \cos(\omega t - kx)$. La otra onda surge a consecuencia de la reflexión de la primera en un obstáculo. Como esta onda se mueve en el sentido de los valores negativos del eje de abscisas, en (56.8) hay que cambiar el signo correspondiente a la coordenada. Debe tenerse en cuenta además, que en la reflexión puede cambiar la fase de la onda. Por consiguiente, la ecuación de la onda reflejada tiene la forma $s_2 = A \cos(\omega t + kx + \varphi)$.

La ecuación de la onda estacionaria se escribe así:

$$s = s_1 + s_2 = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx + \varphi).$$

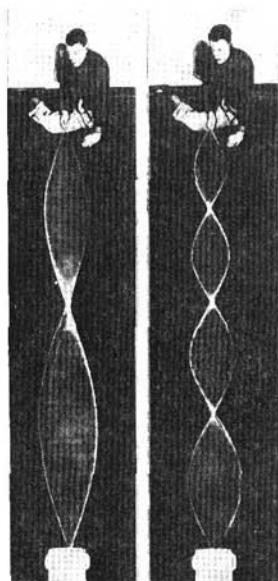


Fig. 57.1.

Al hacer algunas transformaciones elementales, tenemos

$$s = 2A \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) = B \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right), \quad (57.1)$$

donde la amplitud de la onda estacionaria es

$$B = 2A \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right). \quad (57.2)$$

3. Como se ve, la amplitud de la onda estacionaria es función de la coordenada. Para concretar, consideremos el caso en que la onda se refleja en un medio con mayor re-

sistencia acústica (o «más denso», como a veces se dice no muy correctamente). En este caso en la reflexión se invierte la fase: $\Delta\varphi = -\pi$ (§ 56.6). Esto se llama reflexión «con pérdida de media onda», ya que a la distancia $\Delta x = \lambda/2$ la variación de la fase $\Delta\varphi = \pm\pi$. Sustituyendo $\varphi = -\pi$ en (57.1) y (57.2), se obtiene:

$$s = B \operatorname{sen} \omega t, \quad (57.3)$$

donde

$$B = 2A \operatorname{sen} kx. \quad (57.4)$$

Suponiendo en (57.4) $B = 0$, hallamos las coordenadas de los nodos. De la condición $\operatorname{sen} kx = 0$ se sigue que $kx = m\pi$, en la que el número entero $m = 0, 1, 2, \dots$. Teniendo en cuenta que $k = 2\pi/\lambda$ (véase (56.7)), tenemos para las coordenadas de los nodos

$$x_{\text{nodo}} = m \frac{\lambda}{2} = 2m \frac{\lambda}{4}. \quad (57.5)$$

Las coordenadas de los vientres las hallamos partiendo de la condición $B = \pm 2A$; el signo negativo de la amplitud significa que, al pasar por un nodo, la fase de la onda se invierte. Así, pues, para los vientres $\operatorname{sen} kx = \pm 1$, por consiguiente, $kx = (2m + 1)\pi/2$. Expresando de nuevo el número de onda por medio de la longitud de onda, se obtiene

$$x_{\text{vientres}} = (2m + 1) \frac{\lambda}{4}. \quad (57.6)$$

Por lo tanto, la distancia entre dos nodos vecinos o entre dos vientres vecinos es igual a media longitud de onda, y la distancia entre un nodo y un vientre vecinos es igual a un cuarto de la longitud de onda.

4. Se recomienda al lector que demuestre que en la reflexión sin «pérdida de media onda» los nodos y los vientres cambian de sitio entre sí en comparación con el caso antes estudiado.

§ 57.3. Frecuencias propias

1. Al principio del párrafo anterior dijimos que la onda estacionaria no se produce en un cordón o en un tubo de longitud determinada a cualquier frecuencia de oscilación, sino únicamente a ciertas frecuencias determinadas. Trataremos de calcular estas frecuencias.

Figurémonos una varilla sujeta por sus extremos (fig. 57.2, a). Esta puede ser, por ejemplo, una cuerda o una columna de aire en un tubo cerrado por ambos extremos, o una viga sobre dos apoyos, etc. Supongamos que la longitud de la varilla es l y que la velocidad de la onda en ella es u . Cuando se excitan oscilaciones en la varilla se origina

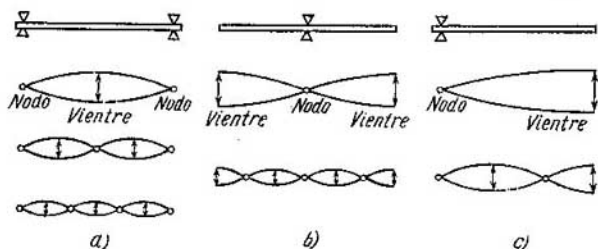


Fig. 57.2.

una onda estacionaria; en los extremos de la varilla se obtienen necesariamente nodos, y entre ellos hay uno o varios vientres. Pero la distancia entre dos nodos es igual a la mitad de la longitud de la onda, por consiguiente, en la longitud de la varilla entra un número entero de semiondas:

$$l = m\lambda/2 \quad (\text{donde } m = 1, 2, 3, \dots). \quad (57.7)$$

Expresando la longitud de onda por medio de la frecuencia de las oscilaciones y de la velocidad de propagación de la onda (véase (56.3)), obtenemos el valor de las frecuencias propias

$$\omega = m \frac{\pi u}{l}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = m \frac{u}{2l}. \quad (57.8)$$

2. Los resultados (57.7) y (57.8) tienen esencial importancia. Indican que en un sistema al que se imponen determinadas *condiciones de contorno* (por ejemplo, que las elongaciones del principio y del fin de la varilla sean nulas), sólo son posibles determinados valores *discretos* de las frecuencias. Este resultado, como se verá en el cap. 70, se utiliza en la mecánica cuántica.

3. Se recomienda al lector que calcule por su cuenta las frecuencias propias de las oscilaciones de una varilla de la

misma longitud que la anterior, pero sujeta por su punto medio (fig. 57.2, b). En particular debe demostrar que la primera armónica tiene la misma frecuencia que en el problema anterior, pero que las armónicas superiores son diferentes: en el primer caso se excitan cualesquiera armónicas de frecuencia par, en el segundo, sólo armónicas impares.

Calcule también las frecuencias propias de las oscilaciones de la misma varilla sujeta por un extremo (fig. 57.2, c) Demuestre que la frecuencia de su primera armónica es igual a la mitad que en el caso anterior, y que las armónicas superiores sólo son impares (compárese con (57.8)).

§ 57.4. Interferencia

1. La intensidad de una onda progresiva es la misma en todos los puntos, ya que aquí todos los puntos oscilan con la misma amplitud. Naturalmente, las fases en que se encuentran estos puntos son distintas, pero esto no influye en la intensidad de la onda, la cual es independiente de la fase, como se deduce de (55.8). Designemos esta intensidad por I_0 :

$$I_0 = (1/2)\rho u \omega^2 A^2. \quad (57.9)$$

Para obtener la expresión de la intensidad de la onda estacionaria sustituimos la expresión de su amplitud (57.4) en (55.8); obtenemos

$$I = (1/2)\rho u \omega^2 B^2 = 4I_0 \text{sen}^2 kx. \quad (57.10)$$

La gráfica de esta dependencia se muestra en la fig. 57.3.

2. Como se ve en la gráfica, en los nodos de la onda estacionaria (puntos cuyas coordenadas son $x_{\text{nod}} = 2m\lambda/4$) la intensidad de la onda es nula durante todo el tiempo de observación; en los vientres ($x_{\text{vient}} = (2m + 1)\lambda/4$) la intensidad de la onda $I_{\text{vient}} = 4I_0$. No obstante, la onda estacionaria se produce como resultado de la composición de una onda progresiva y otra reflejada que tienen la misma

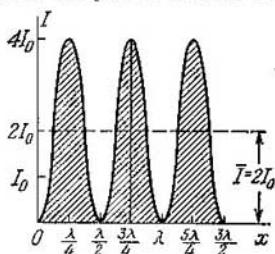


Fig. 57.3.

intensidad $I_1 = I_2 = I_0$. Por consiguiente, su intensidad total es igual a $2I_0$.

Así resulta que el surgimiento de la onda estacionaria va acompañada de una redistribución de la energía en el espacio; ocurre algo así como si la energía se trasladase de los nodos a los vientres. La energía de la oscilación en cada punto de la onda estacionaria *no es igual* a la suma de las energías de las dos ondas: en los nodos la energía es nula, en los vientres es dos veces mayor que la suma de dichas energías.

Solamente la energía media de la onda estacionaria resulta ser igual a la suma de las energías de las ondas que se componen, lo que está en completo acuerdo con la ley de conservación de la energía. En efecto, como se ve en la fig. 57.3, la intensidad media de la onda

$$\bar{I} = 2I_0 = I_1 + I_2. \quad (57.11)$$

3. Consideremos una región del espacio en la que se compongan dos o más ondas. Si la intensidad de la oscilación resultante en cualquier punto es igual a la suma de las intensidades de las ondas, se dice que aquí no hay interferencia. En cambio, si resulta que al superponerse las ondas se produce la redistribución de la energía, de manera que la intensidad en unos puntos es mayor y en otros menor que la suma de sus intensidades, se dice que aquí se observa la interferencia. Así, pues, *se llama interferencia el fenómeno de la redistribución de la energía que se produce en ciertas condiciones determinadas como resultado de la composición de las amplitudes de dos o más ondas.*

La figura, estable con el tiempo, de la redistribución de la intensidad que se produce como resultado de la interferencia, se llama *figura de interferencia*.

Como se ve, la formación de una onda estacionaria es un ejemplo del fenómeno de la interferencia; un sistema estable de nodos y vientres es un ejemplo típico de figura de interferencia.

§ 57.5. Interferencia producida por dos fuentes

4. Supongámonos que sobre la superficie del agua de un baño de ondas oscilan dos esferitas sujetas a una varilla. Cada esferita excita una onda; las ondas interfieren al encontrarse y sobre la superficie del agua se observa una figura de interferencia típica (fig. 57.4).

El mecanismo de producción de las interferencias se puede explicar valiéndose de la fig. 57.5. En ella S_1 y S_2 son dos focos de ondas esféricas, la distancia $S_1S_2 = d$. El punto K se encuentra en el centro de esta distancia; la distancia desde el punto K hasta la pantalla, $KO = l$. Calculemos la intensidad de las oscilaciones en un punto arbitrario M de la pantalla; la distancia $MO = y$, $KK' = r$, y el ángulo de observación $MKO \angle = \theta$.

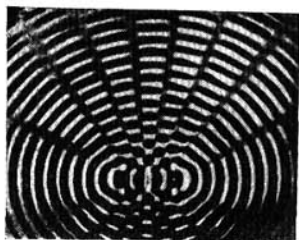


Fig. 57.4.

2. Para que en la pantalla se observe una figura de interferencia estable es necesario que ambas ondas tengan la misma frecuencia. En efecto, sólo en este caso la amplitud de las oscilaciones en cualquier punto de la pantalla no dependerá del tiempo (§ 49.5). Si, por el contrario, las ondas tienen distintas frecuencias, la figura de interferencia estable

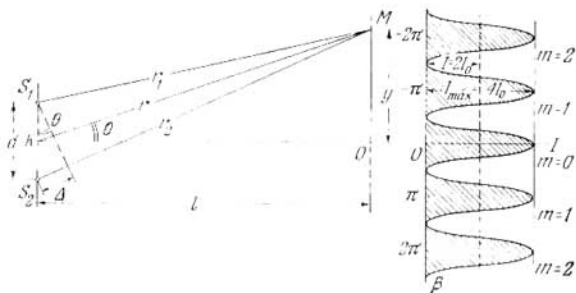


Fig. 57.5.

no se produce, sino que se observan pulsaciones (§ 50.1). Así, pues, la condición necesaria para que se produzca la figura de interferencia es que las frecuencias de las ondas sean iguales. *La interferencia se produce cuando se componen ondas de la misma frecuencia.* Si las dos ondas se propagan

en un mismo medio, de la igualdad de las frecuencias se sigue la igualdad de sus longitudes y de sus números de onda.

3. Escribamos las ecuaciones de ambas ondas:

$$\begin{aligned} s_1 &= A_1 \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1), \\ s_2 &= A_2 \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2). \end{aligned} \quad (57.12)$$

La diferencia de marcha $\Delta = r_2 - r_1$ es mucho menor que cada uno de los radios vectores; por consiguiente $r_2 \approx r_1$. Entonces, de acuerdo con (56.10), las amplitudes también son iguales: $A_1 = A_2 = A$. La oscilación resultante en el punto M será:

$$s = s_1 + s_2 = 2A \cos \left[\frac{k(r_2 - r_1)}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right] \cos \left[\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right]. \quad (57.13)$$

Esta expresión también se puede escribir de la forma

$$s = B \cos(\omega t + \delta), \quad (57.14)$$

en la que la nueva amplitud

$$B = 2A \cos \left[\frac{k(r_2 - r_1)}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right], \quad (57.15)$$

y la nueva fase inicial

$$\delta = - \frac{k(r_1 + r_2)}{2} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Como a nosotros nos va a interesar la distribución de las intensidades en la figura de interferencia, y la intensidad no depende de la fase, en adelante prestaremos atención principalmente a la amplitud de la oscilación resultante.

4. Si los focos emiten ondas rigurosamente sinusoidales, las fases iniciales φ_1 y φ_2 son magnitudes constantes y la diferencia de fase también es una magnitud constante. Sin limitar la comunidad de razonamientos, suponemos $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ (o $m\pi$). Por otra parte, la elección de otro valor de esta diferencia $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$ sólo hace que la figura de interferencia se desplace en la pantalla sin que varíe el carácter de la distribución de las intensidades. Con esta condición, la amplitud resultante toma la forma

$$B = 2A \cos \frac{k(r_2 - r_1)}{2}. \quad (57.16)$$

Tomando en consideración que $k = 2\pi/\lambda$, tenemos

$$B = 2A \cos \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}. \quad (57.17)$$

La intensidad de la onda, de acuerdo con (55.8), se expresa así: $I_1 = I_2 = I_0 = (1/2)\rho u \omega^2 A^2$; y la intensidad de la oscilación resultante

$$I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 B^2 = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}. \quad (57.18)$$

5. La diferencia entre las distancias desde los puntos de la pantalla que nos interesan hasta los focos

$$\Delta = r_2 - r_1 = d \sin \theta \quad (57.19)$$

se llama *diferencia de marcha*. Si la diferencia de marcha contiene un número par de semiondas ($\Delta = r_2 - r_1 = 2m\lambda/2$), entonces $\cos^2 \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = \cos^2 m\pi = 1$. Por consiguiente, en este caso en el punto M se produce un máximo de interferencia cuya intensidad $I_{\text{máx}} = 4I_0$. En cambio, si la diferencia de marcha contiene un número impar de semiondas ($\Delta = (2m + 1)\lambda/2$), $\cos^2 \frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = \cos^2 (2m + 1)\pi/2 = 0$ y se produce un mínimo. Resumiendo, las condiciones de los máximos y los mínimos se escriben así:

$$\begin{aligned} \Delta = 2m \frac{\lambda}{2} \text{ es un máximo, } I_{\text{máx}} &= 4I_0; \\ \Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \text{ es un mínimo, } I_{\text{mín}} &= 0. \end{aligned} \quad (57.20)$$

Lo mismo que en la onda estacionaria, aquí tiene lugar una redistribución de la energía entre los mínimos y los máximos. La intensidad media en la pantalla, como se ve en la fig. 57.5, es igual a la suma de las intensidades de las ondas: $\bar{I} = 2I_0 = I_1 + I_2$, lo que está de acuerdo con la ley de conservación de la energía.

§ 57.6. Interferencia producida por varias fuentes

1. Sea un sistema formado por N fuentes iguales situadas a lo largo de una recta y separadas entre sí por una distancia d . Hallemos la intensidad de las oscilaciones en cierto

punto tan lejano, que los rayos que unan dicho punto con cada fuente se puedan considerar prácticamente paralelos. El problema se reduce con esto al caso de la composición de N oscilaciones armónicas de amplitudes iguales, cuyas fases forman una progresión aritmética (§ 49.6). Sólo nos queda hallar la diferencia de fase de las ondas emitidas por las fuentes vecinas. La diferencia de marcha $\Delta = d \operatorname{sen} \theta$ (57.19). La diferencia de fase

$$\alpha = k\Delta = kd \operatorname{sen} \theta. \quad (57.21)$$

Sustituyendo en (49.23), obtenemos la expresión para la amplitud resultante:

$$A = a \frac{\operatorname{sen} (1/2 Nkd \operatorname{sen} \theta)}{\operatorname{sen} (1/2 kd \operatorname{sen} \theta)}, \quad (57.22)$$

en la que a es la amplitud de la onda que emite una fuente, e $i_0 = ka^2$ es su intensidad.

2. Si se introduce el ángulo auxiliar

$$\beta = \frac{1}{2} kd \operatorname{sen} \theta = \frac{\pi d \operatorname{sen} \theta}{\lambda}, \quad (57.23)$$

la expresión de la amplitud (57.22) toma la forma

$$A = a \frac{\operatorname{sen} N\beta}{\operatorname{sen} \beta}. \quad (57.24)$$

Y como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la intensidad de la oscilación resultante se expresa así:

$$I = i_0 \frac{\operatorname{sen}^2 N\beta}{\operatorname{sen}^2 \beta}. \quad (57.25)$$

3. En los razonamientos anteriores hemos considerado que el punto de observación se hallaba lejos del sistema de fuentes. Aclare-

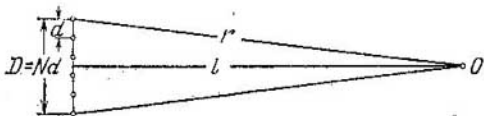


Fig. 57.6.

mós qué sentido dábamos a la palabra «lejos». Para esto vamos a valer-nos de la fig. 57.6.

Supusimos que los rayos que partían de las fuentes eran prácticamen-te paralelos. En realidad no lo eran, sino que se encontraban en

cierto punto O . Pero el error resultante del cálculo será insignificante si al calcular la diferencia de marcha el error máximo es mucho menor que una semionda, lo que significaría que el error en el cálculo de la fase es mucho menor que π y que las fases prácticamente coinciden. Así, pues, el cálculo sigue siendo válido si $r - l \ll \lambda/2$. Pero $r = \sqrt{l^2 + D^2/4}$, donde $D = Nd$ es la longitud de la «red» que forman las fuentes. Sustituyendo este valor de r en la desigualdad indicada, obtenemos

$$\sqrt{l^2 + D^2/4} - l \ll \lambda/2. \quad (57.26)$$

Multiplicando los dos miembros de la desigualdad (57.26) por $l + \sqrt{l^2 + D^2/4} \approx 2l$, obtenemos que $l^2 + (D^2/4) - l^2 \ll 2l\lambda/2$. O, definitivamente,

$$D^2 \ll 4\lambda l. \quad (57.27)$$

Por lo tanto, podremos considerar que el punto de observación está lejos de las fuentes si

$$l \gg D^2/4. \quad (57.28)$$

Esta es la condición con la cual es correcta la relación (57.25) y todas sus consecuencias.

§ 57.7. Intensidad de los máximos principales

1. La dirección de la intensidad máxima de una onda se obtiene partiendo de la condición

$$\beta = m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (57.29)$$

En efecto, si ε es un número muy pequeño, $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$; cuando $\beta = m\pi + \varepsilon$ tenemos que $\sin \beta = \sin (m\pi + \varepsilon) = \pm \sin \varepsilon \approx \pm \varepsilon$, y $\sin N\beta = \sin (Nm\pi + N\varepsilon) = \pm \sin N\varepsilon \approx \pm N\varepsilon$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta} = \frac{N^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2} = N^2.$$

Sustituyendo en (57.25), obtenemos que en los máximos principales la intensidad es N^2 veces mayor que la intensidad de una onda:

$$I_{\text{máx}} = N^2 i_0. \quad (57.30)$$

Si no hubiera interferencia, la intensidad en cualquier dirección sería igual a la suma de las intensidades de las ondas, es decir, $I = Ni_0$. Por consiguiente, aquí, a expensas

del fenómeno de la interferencia, se produce una redistribución de la energía (fig. 57.7): en ciertas direcciones la energía es mucho mayor que la suma de las energías de cada fuente; en otras, en cambio, la energía no se propaga.

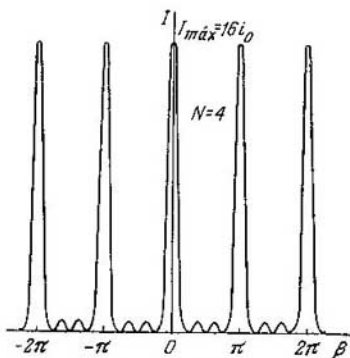


Fig. 57.7.

Pasando en (57.29), con ayuda de (57.23), del ángulo auxiliar β al ángulo de observación θ , obtenemos que $(\pi d \sin \theta) / \lambda = m\pi$, o $\sin \theta_{\text{máx}} = m\lambda / d$. (57.31)

Esta es la condición de los máximos principales para el ángulo de observación.

2. Entre dos máximos contiguos (fig. 57.7) se encuentran varios mínimos y máximos secundarios, cuyas intensidades

son mucho menores que las de los máximos principales. Los mínimos se producen cuando se da la condición de que el numerador de la expresión (57.25) se anula, mientras que el denominador no es igual a cero. Como es fácil ver, esto es posible si

$$N\beta = n\pi, \quad (57.32)$$

donde n no es múltiplo de N (o sea, $n \neq mN$), ya que cuando $n = mN$ volvemos a la condición (57.29) y obtenemos un máximo principal. En particular, entre los máximos nulo y primero el número n toma los valores desde 1 hasta $N - 1$, es decir, se obtienen $N - 1$ mínimos y $N - 2$ máximos secundarios.

Como el seno no puede ser mayor que la unidad, de (57.31) se puede hallar el número de máximos principales; de $m\lambda / d \leq 1$ se sigue que

$$m \leq d / \lambda. \quad (57.33)$$

§ 57.8. Difracción

1. Valiéndonos de una lámina oscilante larga excitamos en la superficie del agua una onda plana y observamos cómo esta onda pasa a través del orificio de una pantalla opaca. La experiencia demuestra que si la anchura del orificio D es menor que la longitud de la onda ($D < \lambda$), el orificio emite ondas esféricas (fig. 57.8) como si fuera una fuente puntual. Al aumentar las dimensiones del orificio, detrás de él se observa una figura de interferencia típica, es decir,

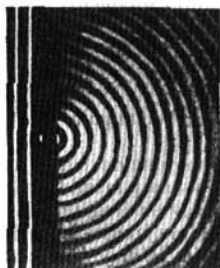


Fig. 57.8.

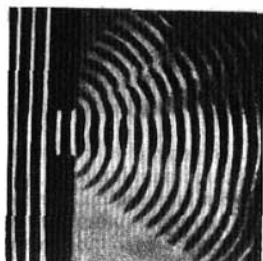


Fig. 57.9.

vemos un máximo central principal y otros máximos laterales más débiles (fig. 57.9). Y únicamente en el caso en que las dimensiones del orificio son mucho mayores que la longitud de onda ($D \gg \lambda$), la inflexión de la onda detrás del borde de la pantalla, a distancias pequeñas de él, se manifiesta muy débilmente.

El fenómeno de la inflexión de las ondas detrás de los bordes de los obstáculos opacos, se llama *difracción*. En un sentido más general se entiende por difracción la dispersión de las ondas en las heterogeneidades bruscamente manifiestas del medio.

2. La solución rigurosa del problema de la difracción tropieza con grandes dificultades matemáticas. Por lo general, para calcular la intensidad de la figura de interferencia que se produce en la difracción se utiliza el *principio de Huygens-Fresnel*. La esencia de este principio consiste en lo

siguiente: para cada problema concreto, el frente de onda se divide, por un procedimiento especial, en zonas (zonas de Fresnel) que se consideran como fuentes de ondas independientes iguales; la amplitud (y la intensidad) de la onda en el punto de observación se determina como el resultado de la interferencia de las ondas creadas aparentemente por las zonas aisladas. La figura de interferencia calculada por este procedimiento concuerda muy bien con los resultados de la experiencia si las dimensiones del orificio son mucho mayores que la longitud de onda. La aplicación de este método se explicará con más detalle cuando se estudie la difracción de la luz (véase (cap. 62)). Aquí solamente examinaremos un ejemplo, la difracción de una onda plana por una rendija.

§ 57.9. Difracción por una rendija rectangular

1. Supongamos que una onda plana incide sobre una rendija rectangular larga y estrecha en una pantalla opaca. Sea D la anchura de la rendija y $L \gg D$ su longitud. Esta rendija la dividimos en zonas en forma de franjas estrechas paralelas a los lados largos de la rendija; la anchura de una zona $d = D/N$, siendo N el número de zonas.

Supongamos que el punto de observación se halla lejos de la rendija, o más exactamente, a la distancia $l \gg D^2/4\lambda$ (véase (57.28)). Entonces el cálculo de la figura de interferencia se reduce al problema de la interferencia de N fuentes iguales examinado en el § 57.6.

Para calcular la amplitud de la onda A en el punto de observación se debe utilizar la expresión (57.22), suponiendo que la amplitud de las oscilaciones de una zona aislada es $a = A_0/N$, donde A_0 es la amplitud de la onda en la rendija. Sustituyendo en (57.22), obtenemos

$$A = \frac{A_0}{N} \frac{\sin\left(\frac{1}{2} kD \sin \theta\right)}{\sin\left(\frac{kD \sin \theta}{2N}\right)}. \quad (57.34)$$

Introducimos el ángulo auxiliar

$$\alpha = \frac{1}{2} kD \sin \theta = \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda}. \quad (57.35)$$

Entonces la expresión de la amplitud de la onda en el punto de observación toma la forma

$$A = \frac{A_0}{N} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen}(\alpha/N)} \quad (57.36)$$

2. La solución del problema será tanto más exacta cuanto mayor sea el número de zonas en que se divida el frente de onda. Pero si los valores de N son grandes, el seno

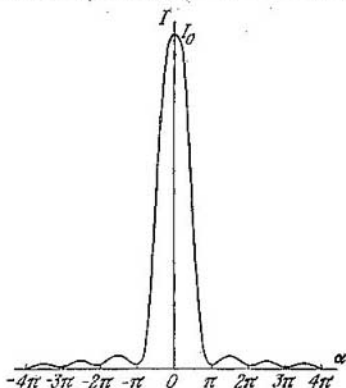


Fig. 57.10.

del ángulo pequeño no diferirá prácticamente de la medida en radianes de este ángulo, es decir, $\text{sen}(\alpha/N) \approx \alpha/N$. Sustituyendo en (57.36), se obtiene la expresión de la amplitud

$$A = A_0 \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \quad (57.37)$$

y de la intensidad de la onda en el punto de observación

$$I = I_0 \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\alpha^2} \quad (57.38)$$

3. En el centro de la figura de interferencia (fig. 57.10) se observa el máximo de orden cero o principal. En efecto,

cuando $\theta \approx 0$, también el ángulo auxiliar $\alpha \approx 0$, por consiguiente, aquí $\sin \alpha \approx \alpha$ e $I = I_0$. Con la condición

$$\alpha = m\pi \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (57.39)$$

el numerador de (57.38) se anula, mientras que el denominador no es igual a cero. Por lo tanto, la condición (57.39) o su equivalente

$$\sin \theta = m\lambda/D \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (57.40)$$

determina las direcciones de los mínimos, es decir, las direcciones en que la intensidad de la onda es nula.

Advertimos que la expresión (57.40) sólo tiene sentido cuando $D > \lambda$, ya que el valor del seno no puede ser mayor que la unidad. Por consiguiente, si $D \leq \lambda$ este cálculo no sirve. Como demuestra la experiencia (véase la fig. 57.8), en este caso no existen realmente mínimos y el orificio radia ondas en todas las direcciones.

§ 57.10. Refracción de las ondas e interferencia

1. En el § 56.5 estudiamos el comportamiento de las ondas en el límite de separación de dos medios utilizando un método muy general de la teoría de propagación de las ondas, el método de las condiciones de contorno. Sobre esta base dedujimos las leyes de la reflexión y refracción de las ondas (56.25) y (56.26). Ahora vamos a demostrar que exactamente el mismo resultado se puede obtener utilizando el método de la interferencia.

Supongamos que una onda plana incide sobre el límite de separación de dos medios. El frente de onda en el primer medio lo designaremos por XY , y en el segundo, por PQ (fig. 57.11). El ángulo de incidencia es el ángulo α_1 entre un rayo y la normal al límite de separación o el ángulo entre el frente de onda y el mismo límite; estos ángulos son iguales, puesto que sus lados son perpendiculares entre sí.

Las partículas de substancia que hay en el límite de separación XQ realizan oscilaciones forzadas y, por lo tanto, se convierten en fuentes secundarias que emiten ondas en todas las direcciones posibles, tanto en el primer medio como en el segundo. Pero eso no significa que la intensidad de las ondas difundidas sea igual en todas las direcciones. Al contrario, en virtud de la interferencia de las ondas difundidas se produce una redistribución de la energía y la inten-

sidad, tanto de la onda reflejada como de la refractada, resulta ser máxima únicamente en ciertas direcciones determinadas. Vamos a demostrar que los máximos de interferencia principales se producen precisamente en aquellas direcciones que determinan las leyes de la reflexión y refracción.

2. Calculamos la amplitud (y la intensidad) de la onda en el segundo medio, en una dirección arbitraria determinada

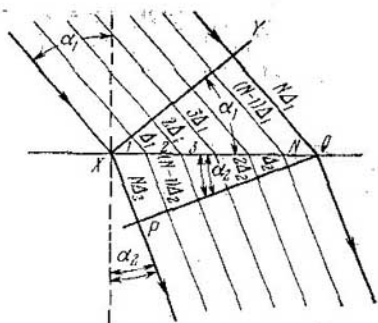


Fig. 57.11.

por el ángulo α_2 . Para resolver el problema aplicamos el principio de Huygens—Fresnel, estudiado en los párrafos anteriores.

El trozo $XQ = D$ lo dividimos en N zonas de anchura $d = D/N$ cada una, escribimos la ecuación de la onda que emite en esta dirección cada zona y después componemos estas ondas. Vamos a considerar que el punto de observación se encuentra a la distancia l del punto X y tan lejos, que es correcta la condición (57.28).

Supongamos que la amplitud de la onda refractada es igual a A_0 , entonces la amplitud de la onda que pasa a través de una zona será igual a A_0/N . La ecuación de onda para la primera zona se escribe así:

$$s_1 = \frac{A_0}{N} \cos(\omega t - k_2 l).$$

La onda emitida por la segunda zona recorre en el primer medio la distancia adicional $\Delta_1 = d \sin \alpha_1$. En cambio, en

onda refractada se observa en la dirección determinada por la condición

$$k_2 \operatorname{sen} \alpha_2 - k_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = 0. \quad (57.44)$$

Sustituyendo los números de onda por sus valores, de acuerdo con (56.6), $k_1 = \omega/u_1$ y $k_2 = \omega/u_2$, llegamos a la ley de la refracción de las ondas (56.26).

5. Se recomienda al lector que haga por su cuenta estos mismos razonamientos para con la onda reflejada y que obtenga la ley correspondiente (56.25). Formalmente esta ley se deduce automáticamente de (57.44). En efecto, como la onda reflejada se propaga en el mismo medio que la incidente, $k_1 = k_2$. De aquí se sigue que $\operatorname{sen} \alpha_2 = \operatorname{sen} \alpha_1$ y $\alpha_2 = \alpha_1$.

Capítulo 58

ELEMENTOS DE ACÚSTICA

§ 58.1. Características del sonido

1. Con anterioridad hemos utilizado varias veces el concepto de sonido como una onda elástica de pequeña intensidad. Sin embargo, en un sentido más estrecho sólo se entiende por sonido el *sonido audible*, es decir, las ondas elásticas perceptibles por el oído humano. La experiencia demuestra que nuestro oído percibe como sonido las oscilaciones cuyas frecuencias se encuentran entre los límites de 20 Hz a 20 kHz. Las ondas elásticas con frecuencias inferiores a 20 Hz se llaman *infrasonido*, y las de frecuencias superiores a 20 kHz, *ultrasonido*. A veces las ondas elásticas con frecuencias de 10^{10} Hz y mayores, correspondientes a las ondas térmicas de Debye en los líquidos y en los sólidos (§ 45.3), reciben el nombre de *hipersonido*.

En dependencia de la estructura del espectro (§ 50.4) se hace distinción entre los *ruidos* y los *sonidos musicales*. Los ruidos son oscilaciones aperiódicas. Su espectro es continuo, o sea, está formado por un conjunto de frecuencias que llenan de un modo continuo cierto intervalo. Los sonidos musicales tienen espectro de rayas con frecuencias múltiples y, por consiguiente, son oscilaciones periódicas.

2. Cada onda sonora sinusoidal es un *tono simple*. La altura de un tono depende de la frecuencia de las oscilaciones. La escala de frecuencias adoptada actualmente en la música está compuesta del modo siguiente. Cada octava se divide en doce intervalos; en el piano, a estos intervalos corresponden siete teclas blancas y cinco negras; las últimas se indican en la escritura musical con el signo *diés*. Dentro de los límites de una octava la frecuencia aumenta en dos veces, y en los límites de un intervalo, en $\sqrt[12]{2} \approx 1,06$ veces.

A los sonidos musicales complejos corresponde un *tono fundamental* (primer armónica, véase el § 50.4) y un conjunto de *sobretonos* (armónicas superiores). Si dos sonidos musicales tienen el mismo tono fundamental pero distintos sobretonos (es decir, diferente espectro), se dice que se diferencian por su *timbre*. Precisamente por el timbre distinguimos los sonidos emitidos por distintos instrumentos musicales y las voces humanas.

3. Además de por el tono y el timbre, los sonidos se distinguen por su *intensidad*. En el caso general la intensidad del sonido depende de la intensidad de la onda sonora, pero debido a que la sensibilidad del oído no es igual para todos los sonidos de frecuencias diferentes, esta dependencia resulta ser muy compleja. La sensibilidad máxima de nuestro oído corresponde a los sonidos de 700 a 6000 Hz de frecuencia. En este intervalo de frecuencias el oído puede percibir sonidos con la intensidad de, aproximadamente, $10^{-11} - 10^{-12}$ W/m².

La intensidad mínima de una onda acústica que nuestro oído es aún capaz de percibir, se llama *umbral de audición*. El umbral de audición normal se toma igual a $I_0 = 10^{-12}$ W/m² para la frecuencia $\nu_0 = 1$ kHz.

La intensidad máxima de una onda acústica que aún podemos percibir como sonido, y no como sensación dolorosa, recibe el nombre de *umbral doloroso*. Para distintas frecuencias es diferente el umbral doloroso, variando desde 0,1 W/m² para 6000 Hz hasta 10 W/m² para las frecuencias bajas y altas.

4. Como se ve, la sensibilidad de nuestro oído es muy grande —el intervalo de intensidades desde el umbral de audición hasta el umbral doloroso es de cerca de 10^{13} a 10^{15} W/m². Con este intervalo tan enorme conviene utilizar

una escala logarítmica. Para este fin se introduce la magnitud llamada *nivel de intensidad*.

$$L = 10 \lg (I/I_0), \quad (58.1)$$

en la que I es la intensidad del sonido que se investiga e I_0 , el umbral de audición normal. La unidad de nivel de intensidad del sonido es el *decibelio*: $L = 1$ dB si $I = 1,26I_0$ (en este caso $\lg(I/I_0) = \lg 1,26 = 0,1$).

Para que se puedan comparar, en la tabla 58.1 se indican las intensidades y los niveles de intensidad de algunos sonidos comparados con el umbral de audición normal. La distancia desde la fuente del sonido hasta el oído se da en metros.

Tabla 58.1

Fuente de sonido	l , m	I , W/m ²	L , dB
Murmullo	1	10^{-12}	0
Caída de gotas de agua	1	10^{-10}	20
Conversación a media voz	1	10^{-8}	40
Automóvil pasando por carretera asfaltada	5—10	10^{-6}	60
Orquesta sinfónica	3—5	10^{-4}	80
Martillo picador	1	10^{-2}	100
Motor de avión	10	1	120

§ 58.2. Fuentes de sonido

1. En principio, todo cuerpo capaz de oscilar en el intervalo necesario de frecuencias puede servir de fuente de sonido. Pero en la práctica sólo se utilizan aquellas fuentes que pueden satisfacer determinadas condiciones. En primer lugar, la fuente debe emitir bien, es decir, la energía de sus vibraciones debe transmitirse bien al medio circundante. Para esto, ante todo, se debe emplear, si es posible, el mismo medio para excitar las oscilaciones. Además, las dimensiones del cuerpo oscilante deben ser conmensurables con la longitud de onda.

Un diapason, por ejemplo, emite muy mal incluso cuando sus ramas vibran con una amplitud considerable. Pero si se coloca sobre una caja de madera, abierta por una de sus

caras, cuyas dimensiones sean tales que la longitud de la columna de aire dentro de ella sea igual a la cuarta parte de la longitud de la onda que emite el diapasón, escucharemos un sonido fuerte (fig. 58.1). Esto se debe a que, en virtud de la resonancia, el diapasón excita la columna de aire, acordada a su frecuencia propia que hay en la caja de resonancia, y las paredes de ésta.

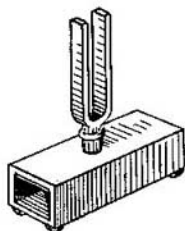


Fig. 58.1.

La columna de aire y las paredes de la caja transmiten mejor la energía al medio circundante, o sea, al aire, que las ramas del diapasón.

También suena muy poco una cuerda tensa entre dos paredes. Pero si esta misma cuerda se tensa sobre una caja de resonancia, o mejor aún sobre la caja de un violín o guitarra, oiremos un sonido claro. En este caso el sonido no lo

emite la cuerda, sino la tabla de armonía y la columna de aire acordadas en resonancia con el tono emitido con la cuerda. He aquí por qué la calidad del instrumento musical depende más de la calidad de la tabla de armonía que de las cuerdas.

2. La segunda condición que suele imponerse a una fuente de sonido es que sea capaz de reproducir sin deformaciones considerables un amplio intervalo de frecuencias. Así debe funcionar, por ejemplo, el altavoz dinámico o el teléfono.

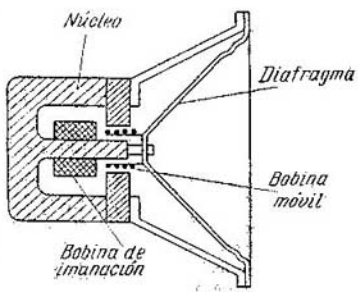


Fig. 58.2.

La fig. 58.2 representa el corte de un altavoz electrodinámico (dinámico). Su diafragma de papel, en forma de cono truncado, va pegado a una armazón cilíndrica sobre la que se arrolla la «bobina móvil», formada por varias espiras de alambre delgado cuyos terminales se sujetan a dos con-

tactos. La bobina móvil se encuentra en el entrehierro de un fuerte imán o electroimán. Las oscilaciones eléctricas de frecuencia sonora, procedentes del amplificador, llegan a la bobina móvil, y como sobre el conductor con corriente actúa en el campo magnético la fuerza de Amperé, la bobina móvil realiza oscilaciones forzadas junto con el diafragma. Las oscilaciones de este último se transmiten al aire, en el cual, en virtud de esto, se excita la onda sonora. Para intensificar la radiación, el altavoz se monta sobre una pantalla (baffle); el papel de ésta puede hacerlo la caja de un receptor de radio o de un televisor.

Para que el altavoz no deforme los sonidos debe reproducir con la misma fidelidad oscilaciones de frecuencias desde varios centenares hasta varios millares de hertzios. El sistema móvil del altavoz tiene su frecuencia propia, y si la frecuencia del sonido que reproduce coincide con ella, se producen fenómenos de resonancia indeseables.

Para evitar esto, se hace que la frecuencia propia de la parte móvil del altavoz sea lo más baja posible (inferior a cien hertzios) y, además, se disminuye su factor de calidad. Esto permite, por una parte, salir a la región casi horizontal de la curva de resonancia y, por otra, disminuir el tiempo de estabilización de las oscilaciones (§ 53.6).

3. Si el radiador de sonido funciona a una sola frecuencia, al contrario, se tiende a aproximar lo posible la frecuencia propia del radiador a la frecuencia de la onda que hay que emitir. En este caso, en virtud de la resonancia, aumenta mucho la potencia de radiación y el rendimiento del radiador. Con frecuencias de resonancia funcionan los *transductores ultrasónicos*, que son aparatos que transforman la energía de las oscilaciones electromagnéticas de frecuencia ultraacústica en ondas ultrasonoras.

En la actualidad los transductores que más se utilizan son los de *electrostricción* y *magnetostricción*.

§ 58.3. Transductores ultrasónicos

1. En algunos cristales (como el cuarzo) se observa el efecto de *electrostricción*. Consiste este efecto en que si se crea un campo eléctrico dirigido a lo largo del eje x (fig. 58.3), el cristal se contrae o se alarga en esta dirección, y a lo largo del eje y , al contrario, se alarga o se contrae. En el sentido del eje z no varían las dimensiones del cristal.

La fig. 58.4 representa el esquema de un transductor ultrasónico. En él sirve de elemento radiante una lámina de cuarzo 1, cortada, como muestra la fig. 58.3, perpendicularmente al eje cristalográfico (§ 32.1), es decir, según el llamado corte x ; las láminas de acero 2 y 3 sirven de armaduras; a ellas se conecta la tensión alternativa de un generador de ultrasonido, por medio del cable 4. Sobre la lámina 2 [se encuentra el aire, en el cual la onda ultrasonora se refleja prácticamente por completo (§ 56.6). Toda la radiación está dirigida hacia el agua.

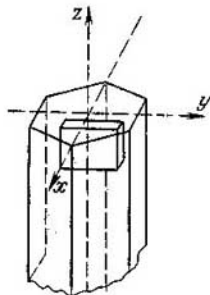


Fig. 58.3.

Para obtener una radiación de gran potencia con carácter dirigido, el diámetro del radiador se debe hacer lo más grande posible. En este caso no se utiliza un monocristal, sino un mosaico de varias láminas de espesores y tipo de corte rigurosamente iguales.

2. Las láminas funcionan a la frecuencia de resonancia, lo que permite obtener la amplitud máxima de las oscilaciones. La frecuencia de una lámina viene determinada por su espesor y por la velocidad de propagación del sonido en ella (§ 57.3). En efecto, en el espesor de la lámina cabe un número de semiondas, por lo que sus frecuencias propias se pueden calcular por la fórmula (57.8).

En los transductores de electrostricción, además del cuarzo, se utiliza la cerámica policristalina de titanato de bario (BaTiO_3). Con este fin se cultivan cristales minúsculos, de cerca de un milímetro de dimensión; estos cristales se mezclan con una pequeña cantidad de material cementante (sal de bario) y, calentando la mezcla hasta $1300-1400^\circ\text{C}$, se cuecen. Esto permite obtener muestras de dimensiones y formas cualesquiera. La cerámica se polariza en un campo eléctrico de cerca de 10^6 V/m de intensidad. Después de

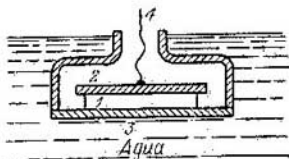


Fig. 58.4.

eliminar el campo polarizante, en los ferroeléctricos (a los cuales pertenece el titanato de bario) se conserva la polarización remanente, de un modo análogo a la imanación remanente en los ferromagnéticos.

Resulta, que si a una muestra policristalina previamente polarizada se le aplica un campo eléctrico alternativo en la dirección del campo polarizante, en esta dirección se producen oscilaciones longitudinales análogas a las del corte x del cuarzo.

3. En la práctica se utilizan mucho los transductores magnetostrictivos (§ 42.6) de níquel o permándur (aleación de un 49% de Fe, un 49% de Ni y un 2% de V); también se emplean las ferritas de manganeso-zinc (ferroxcub A) y de níquel-zinc (ferroxcub B). Los transductores se componen de láminas, para que las corrientes de Foucault sean menores; por el devanado pasa corriente de alta frecuencia procedente del generador.

El efecto de magnetostricción no es grande: en los campos de la intensidad que ordinariamente se utiliza (de alrededor de $5 \cdot 10^4$ A/m) el alargamiento relativo del permándur es $e = \Delta l/l \approx 5 \cdot 10^{-5}$. Para la altura ordinaria del paquete $l = 65$ mm (con la frecuencia de 25 kHz), el alargamiento Δl es aproximadamente de 3μ . Por eso los magnetostrictores funcionan siempre a la frecuencia propia, que, por lo general, es de 25 kHz y, raras veces, de 50 y 100 kHz. A frecuencias más altas las pérdidas en la remagnetización resultan ser tan grandes, que la utilización de los magnetostrictores es ineficaz.

§ 58.4. Receptores de sonido

1. Todo radiador de sonido o ultrasonido puede servir también de receptor. En efecto, la onda, al incidir sobre el órgano oscilante del radiador, hace que éste se mueva. En este caso las oscilaciones elásticas se transforman en eléctricas.

El micrófono electrodinámico, tan utilizado en la práctica, consta de las mismas partes que el altavoz dinámico, sólo que, en vez del diafragma, en el micrófono se emplea una membrana ligera. La onda, al llegar a la membrana, la hace vibrar; junto con la membrana oscila la bobina móvil, situada en el entrehierro de un fuerte imán permanente. En

la bobina, al oscilar en el campo magnético, se produce una corriente inducida que va a parar al amplificador.

En el micrófono de condensador la membrana y la placa fija forman el condensador, cuya capacidad eléctrica varía al separarse más o menos la una de la otra (§ 37.6). La onda sonora hace que vibre la membrana y que con esto varíe la capacidad del condensador, lo que produce una tensión alterna en la resistencia de carga. La frecuencia de esta tensión es igual a la frecuencia de la onda y su amplitud es proporcional a la amplitud de la onda.

En el micrófono de carbón la membrana comprime periódicamente el polvo de carbón, por lo que varían su resistencia y la corriente en el circuito. El aumento de la presión hace que disminuya la resistencia y, por lo tanto, que aumente la corriente, y la disminución de la presión conlleva la disminución de la corriente. Lo mismo que en los tipos de micrófonos antes citados, las débiles oscilaciones de la corriente (o tensión) se intensifican por medio de amplificadores termoiónicos.

2. Conviene advertir que, en todos los tipos de micrófonos, la frecuencia propia del sistema móvil debe diferir mucho de la frecuencia de las oscilaciones que percibe, para evitar que, debido a la resonancia, se destaque una de las frecuencias del espectro total percibido. Los receptores de ultrasonido, por el contrario, funcionan con la frecuencia de resonancia. Lo más frecuente, en este caso, es que un mismo transductor sirva alternativamente de radiador y de receptor.

§ 58.5. Oído

1. El órgano del oído de los mamíferos, y del hombre entre ellos (fig. 58.5), tiene una estructura muy compleja. El oído externo lo forman el pabellón de la oreja y el conducto auditivo. La membrana del tímpano 1 separa el oído externo del oído medio, pequeña cámara 2 que contiene tres huesecillos: el martillo, el yunque y el estribo. El martillo está en contacto con la membrana del tímpano; el estribo, con la ventana oval 3, que sirve de entrada al oído interno. El oído medio se comunica con la nasofaringe por medio de la trompa de Eustaquio.

El oído interno está formado por una serie de canales comunicantes que constituyen el laberinto. De este laberinto

sólo el caracol 4, unido al nervio auditivo, tiene relación con el oído. Tres canales semicirculares forman el órgano del equilibrio.

Dentro del caracol 4 hay unos canales llenos de líquido (linfa). En el canal de enmedio se halla el receptor auditivo u órgano de Corti, que consta de cinco filas de células de las cuales sobresalen unos cilios o pestañas; las células ciliadas

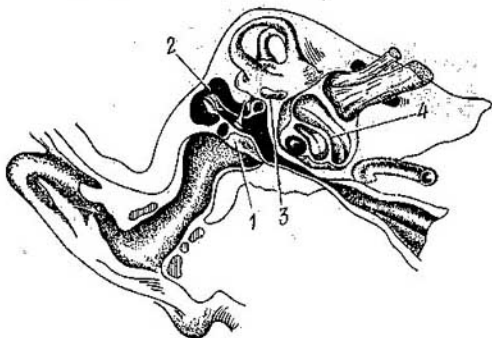


Fig. 58.5.

se extienden a todo lo largo de la espiral del caracol. Constituyen en total cerca de 4800 fibras que contienen cinco células cada una. Estas células forman la membrana basilar, en la cual las fibras tienen distinta longitud: en la base del caracol son más cortas y en el vértice, más largas.

2. La percepción del sonido se efectúa del modo siguiente. La onda sonora pasa por el conducto auditivo externo, llega a la membrana del tímpano 1 y provoca en ella oscilaciones forzadas. Estas oscilaciones se transmiten a través de los huesecillos del oído medio 2, que hacen las veces de amplificador, y alcanzan la ventana oval 3. La ventana oval produce oscilaciones en la linfa y, por medio de ella, oscilaciones de las fibras del caracol. La excitación más fuerte la experimentan las fibras cuya frecuencia propia coincide con la frecuencia del sonido. Precisamente por esto podemos distinguir los tonos y percibimos la diferencia de timbre. De hecho el órgano de Corti hace el análisis espectral de las

ondas sonoras que llegan al oído y transmite al cerebro la información correspondiente.

3. El hecho de que tengamos dos oídos nos da la posibilidad de determinar la dirección en que se encuentra la fuente de un sonido (*efecto binaural*). Si dicha fuente se halla directamente delante del observador, el sonido llega simultáneamente a ambos oídos, pero si está a un lado

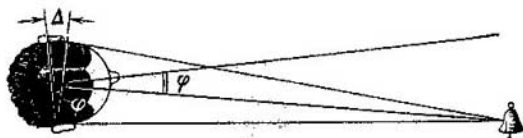


Fig. 58.6.

(fig. 58.6), el sonido llega antes a un oído que al otro y percibimos este retraso como una diferencia de fases.

Si la fuente está desviada en un ángulo φ , la diferencia de marcha $\Delta = d \sin \varphi$, donde $d \approx 20$ cm es la distancia entre las orejas. El retraso en tiempo $\tau = \Delta/u = d \sin \varphi / u \approx 5,9 \cdot 10^{-4} \sin \varphi$. Podemos distinguir con seguridad los retrasos de tiempo correspondientes a 0,1 período (desfasaje de $0,2\pi$); para las frecuencias de cerca de 1000 Hz esto constituye un tiempo $\tau_{\min} \approx 10^{-4}$ s. Entonces el ángulo mínimo φ_{\min} se determina partiendo de la condición $\sin \varphi_{\min} \approx 10^{-4} / 5,9 \cdot 10^{-4} = 0,17$. A este seno corresponde un ángulo $\varphi_{\min} \approx 10^\circ$.

§ 58.6. Peculiaridades de los infra y ultrasonidos

1. La experiencia demuestra que los infrasonidos se amortiguan débilmente. Por eso la debilitación de una onda infrasonora sólo puede deberse a la redistribución de la energía por el frente de onda creciente, si la onda es aproximadamente esférica. Cuando la fuente son las olas de viento del mar, en las que la longitud del frente de onda es de centenares de metros, la intensidad de la onda infrasonora varía poco con la distancia.

Por lo visto, los peces y los animales marinos pueden percibir los infrasonidos, con lo cual sienten como se aproxima

man los temporales. Las poderosas ondas infrasonoras que se producen durante la tempestad se propagan por el mar, prácticamente sin amortiguarse, a distancias de centenares y millares de kilómetros y anuncian su aproximación.

2. Las ondas ultrasonoras se caracterizan por tener dos particularidades; una intensidad considerable y la posibilidad de obtener una radiación dirigida.

La intensidad de la onda ultrasonora $I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2$. La alta frecuencia permite obtener ondas de hasta $100 \text{ W/cm}^2 = 10 \text{ kW/m}^2$ de intensidad utilizando transductores de titanato de bario; en la práctica se emplea una potencia mucho menor, de $10-20 \text{ W/cm}^2$. Con estas intensidades tan grandes la onda ultrasonora influye en las propiedades de la substancia y en la marcha de los procesos tecnológicos.

Así, las ondas ultrasonoras potentes hacen que se fraccionen las substancias (dispersión), lo que se aprovecha para obtener polvos muy finos, eliminar la herrumbre y las películas de grasa de la superficie de los metales, y para limpiar los tejidos de manchas y suciedad tenaces. Valiéndose de soldadores ultrasónicos se ha conseguido estañar y soldar el aluminio y algunos otros metales; el ultrasonido destruye la película de óxido que hay sobre la superficie del aluminio y la soldadura se une firmemente al metal. Introduciendo un transductor ultrasónico en un recipiente en que haya dos líquidos inmiscibles (por ejemplo, agua y aceite), al cabo de cierto tiempo se obtiene una emulsión homogénea cuyas partículas tienen dimensiones que oscilan entre fracciones de micra y varias micras. Este efecto se puede utilizar para fabricar nuevos tipos de medicamentos por emulsión acuosa de substancias medicinales inmiscibles.

3. Por medio del ultrasonido se pueden maquinarse materiales, es decir, cortarlos, rectificarlos, taladrarlos, etc. El proceso de corte consiste en que unas partículas abrasivas vibran junto con la herramienta de corte y arrancan partículas de material de la pieza que se trabaja. Según la forma de la herramienta, en las piezas se obtienen distintos orificios.

4. Por lo general las dimensiones del transductor son varias veces mayores que la longitud de onda en el medio en que se radia la onda ultrasonora. En virtud de esto, la onda emitida tiene la forma de un cono más o menos estrecho, cuya abertura viene determinada por la fórmula $\text{sen } \theta \approx \lambda/D$ (véase (57.31)).

En esto se basa el empleo del ultrasonido en los sondadores acústicos y en los detectores submarinos (sonares). En el fondo del buque se monta un transductor que emite cortos impulsos ultrasonoros, cuya duración es del orden de 0,1 s. La onda llega hasta el fondo del mar, se refleja en él y es captada por el mismo transductor, durante los intervalos de tiempo entre las emisiones, o por un receptor especial. Los impulsos reflejados se registran en una cinta y, mediante una escala previamente establecida, se mide la profundidad en metros.

Las vejigas natatorias de los peces están llenas de aire, que dispersa bien las ondas ultrasonoras. Esto permite

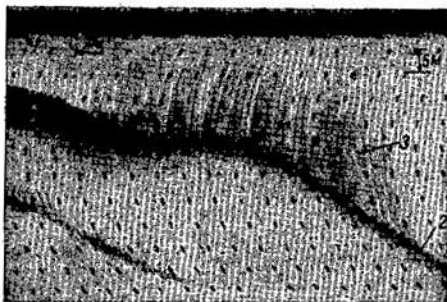


Fig. 58.7.

descubrir con los sondadores acústicos los bancos de peces. La fig. 58.7 representa el «ecograma» de un banco de jureles 3; la franja oscura 1 es la superficie del agua y la franja oblicua 2, el fondo del mar.

5. En la práctica se usan mucho los defectoscopios ultrasónicos, que funcionan con régimen de impulsos. Un defectoscopio de este tipo, propuesto por S. Ya. Sokolov, se muestra en la fig. 58.8. En él un generador emite impulsos cortos de varios megahertzios de frecuencia. La señal se transmite a un transductor de titanato de bario (o de cuarzo) y se radía en la pieza que se desea comprobar. Al mismo tiempo se observa el impulso (diente) en la pantalla de un oscilógrafo. La onda, al llegar a la cara inferior de la pieza,

se refleja y es captada por el transductor. En la pantalla del oscilógrafo aparece un segundo diente. Si en el camino que recorre el haz ultrasonoro hay un defecto, por ejemplo, un rechupe de fundición, la onda se refleja en él y el diente que corresponde al rayo reflejado se desplaza. Así, con los defectoscopios ultrasónicos se comprueba la calidad de las piezas de fundición, las costuras soldadas, etc.

6. Del ultrasonido se sirven también algunos animales. Los murciélagos se orientan mientras vuelan y cazan valiéndose del método de la localización ultrasonora (sonar).

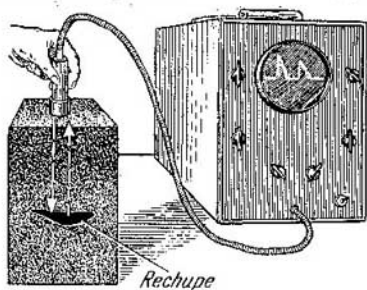


Fig. 58.8.

Su aparato fónico emite cortos impulsos ultrasónicos de 20 a 60 kHz de frecuencia; los impulsos reflejados en los obstáculos son percibidos por sus grandes orejas, con lo que el animal determina en qué dirección y a qué distancia se halla el obstáculo.

También se valen de la localización ultrasónica los delfines, las ballenas y, posiblemente, otros animales marinos. Es el caso, que, incluso en el agua del mar transparente, la luz sufre una fuerte absorción y el radio de visibilidad se limita a varios metros. La absorción del ultrasonido es mucho menor; para una frecuencia de 50 kHz el espesor de la capa de semiabsorción es igual, aproximadamente, a 2,5 km, y para 100 kHz, del orden de 100 m. Por eso los delfines, por medio de los impulsos ultrasónicos, se pueden orientar bien incluso cuando el agua está turbia, descubrir los bancos de peces, evitar todos los obstáculos que encuentran y hasta «hablar» entre sí.

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 59.1. Velocidad de las ondas electromagnéticas

1. Por los años de 1864 a 1873 se dedicó Maxwell a elaborar la teoría del electromagnetismo. Consiguió escribir la ecuación del campo electromagnético, sistema de ecuaciones diferenciales que expresan la relación entre los vectores del campo y sus fuentes: las cargas y las corrientes. Basándose en estas ecuaciones llegó a la conclusión de que en el vacío y en los dieléctricos las excitaciones arbitrarias del campo electromagnético se propagan en forma de onda electromagnética.

En 1887—1889 Heinrich Hertz hizo una serie de experimentos con los cuales demostró la existencia de las ondas electromagnéticas, y que sus propiedades son las que se deducen de la teoría de Maxwell.

2. Maxwell demostró que la velocidad de las ondas electromagnéticas en los dieléctricos se expresa por medio de la permitividad ϵ y de la permeabilidad magnética μ :

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (59.1)$$

donde $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ es la velocidad de la luz en el vacío (§ 40.4) Sobre esta base llegó a la conclusión de que la luz es también una onda electromagnética.

Para todas las substancias, excepto las ferromagnéticas, la permeabilidad magnética difiere poco de la unidad (§§ 42.4 y 42.5). Por esto, suponiendo en (59.1) que $\mu = 1$, obtenemos la expresión de la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en un dieléctrico:

$$u = c/\sqrt{\epsilon}. \quad (59.2)$$

§ 59.2. Onda sinusoidal plana

1. Lejos de una fuente que realice oscilaciones sinusoidales de frecuencia angular ω , la onda se puede considerar plana. Supongamos que la onda se propaga a lo largo del

eje de abscisas. Entonces la ecuación de la onda se escribe así:

$$\begin{aligned} E_x = 0, E_y = E_0 \cos(\omega t - kx), E_z = 0; \\ H_x = 0, H_y = 0, H_z = H_0 \cos(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (59.3)$$

Aquí el número de onda $k = \omega/u$ véase (56.6)), y u es la velocidad de la onda (véase (59.2)). La gráfica de esta onda se muestra en la fig. 59.1.

2. Como puede verse, a lo largo del eje de abscisas, según el cual se propaga la onda, no efectúan oscilaciones los

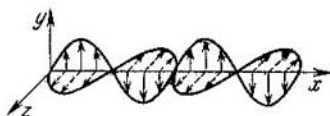


Fig. 59.1.

vectores del campo ($E_x = H_x = 0$). Esto significa que la onda electromagnética es *transversal*. En esto se diferencia esencialmente de las ondas elásticas, en las que siempre existe prácticamente la componente longitudinal.

Con anterioridad a los trabajos de Maxwell ya se sabía que la luz es una onda transversal pura (§ 64.4). Esto ocasionó dificultades enormes a la teoría ondulatoria de la luz de Huygens—Young—Fresnel, que considera la luz como un proceso en un medio elástico: era imposible comprender por qué causa no existían en la luz componentes longitudinales. La teoría electromagnética de la luz eliminó estas dificultades.

3. De las ecuaciones de Maxwell se sigue que, en la onda electromagnética, entre los módulos de los vectores del campo E y H existe la relación

$$\mu\mu_0 H^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E^2. \quad (59.4)$$

Por consiguiente, las densidades espaciales de la energía de cada una de las componentes de la onda electromagnética coinciden: $w_e = w_m$ (§ 43.11).

Si dos magnitudes son iguales entre sí, cada una de ellas es igual a la raíz cuadrada de su producto. Así,

$$w_e = w_m = \sqrt{w_e \cdot w_m} = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} \cdot \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}} = \frac{EH}{2} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}. \quad (59.5)$$

Tomando en consideración la expresión (59.1) de la velocidad de la onda, obtenemos que

$$w_e = w_m = EH/2u. \quad (59.6)$$

4. La densidad de la energía de la onda

$$w = w_e + w_m = EH/u. \quad (59.7)$$

De acuerdo con la definición (§ 55.3), la intensidad de la onda $I = P/S = \overline{wu}$, en la que \overline{w} es el valor medio de la densidad de la energía. Teniendo en cuenta (59.7), se obtiene

$$I = \overline{EH}. \quad (59.8)$$

Así, pues, la intensidad de la energía de la onda electromagnética es igual al valor medio del producto de los módulos de los vectores del campo.

La onda electromagnética, lo mismo que la elástica, es portadora de energía, cuyo transporte se efectúa, con carácter dirigido, en el sentido

de la propagación de la onda. De aquí se deduce inevitablemente que la onda electromagnética también debe tener impulso y, por lo tanto, ejercer presión sobre los cuerpos. Maxwell llegó a esta conclusión en su tratado «Electricidad y magnetismo» (1873).

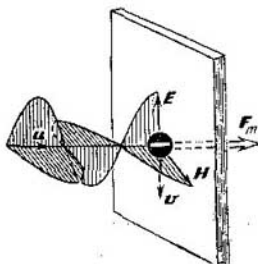


Fig. 59.2.

§ 59.3. Presión de la luz

1. El origen de la presión de la luz se puede explicar con el ejemplo de la acción de una onda electromagnética

sobre una hoja de metal (fig. 59.2). Bajo la acción de la componente eléctrica del campo, el electrón se mueve en sentido inverso al del vector intensidad del campo eléctrico.

co E , con la velocidad $v = \frac{\gamma}{en} E$ (véase (39.25)), en la que γ es la conductividad del metal y n , la concentración de electrones de conducción. La componente magnética del campo actúa sobre el electrón en movimiento con la fuerza de Lorentz (véase (41.1)): $F_m = evB = \mu_0 evH$. Como puede verse, el campo electromagnético ejerce sobre cada electrón una fuerza $F_m = \frac{\mu_0 \gamma}{n} EH$, que de acuerdo con (59.7) es proporcional a la densidad de la energía del campo. La presión de la onda sobre la lámina es igual al producto de la fuerza media \bar{F}_m por el número de electrones n_1 que hay en la unidad de superficie:

$$p = \bar{F}_m n_1 = \frac{\mu_0 \gamma n_1}{n} \overline{EH} = \frac{\mu_0 \gamma n_1}{n} \bar{w}u = K\bar{w}, \quad (59.9)$$

donde K es una constante característica de la substancia dada.

2. Maxwell demostró que la presión de la onda electromagnética

$$p = (1 + R) \bar{w}, \quad (59.10)$$

donde R es el factor de reflexión. Para una superficie especular $R_{\text{esp}} = 1$ y $p_{\text{esp}} = 2\bar{w}$; para una superficie negra, que absorbe la radiación totalmente, $R_{\text{neg}} = 0$ y $p_{\text{neg}} = \bar{w}$. La fórmula (59.10) se deducirá en el § 68.5.

Así, aunque la expresión (59.9) fue obtenida por medio de razonamientos elementales, interpreta correctamente la dependencia de la presión de la luz respecto de la densidad espacial de la energía de la onda.

3. La conclusión a que llegó Maxwell acerca de la existencia de la presión de la luz fue recibida con desconfianza por toda una serie de grandes científicos. Se planteó la necesidad de comprobar experimentalmente dicho resultado. P.N. Lébedev hizo en 1900 el experimento decisivo, mediante el cual no sólo reveló la presión de la luz sobre los sólidos, sino que además consiguió medirla. En 1907—1910 descubrió también la existencia de la presión luminosa sobre los gases.

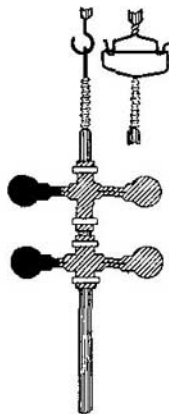


Fig. 59.3.

El aparato de Lédbev consiste en una balanza de torsión muy sensible, cuya parte móvil es una varilla ligera provista de «aletas», discos reflectores (brillantes) y absorbentes (negros) de 0,1 a 0,01 mm de espesor (fig. 59.3). Como la presión sobre el disco negro es casi dos veces menor que la presión sobre el disco brillante, sobre el sistema móvil actúa un momento de rotación que se puede medir por el ángulo de torsión del hilo. La densidad de la energía la midió Lédbev por medio de un calorímetro minúsculo, especialmente construido, sobre el cual dirigía un haz de luz durante un tiempo determinado y registraba la elevación de la temperatura. Lédbev llegó a la conclusión de que, dentro de los límites del error experimental, la magnitud de la presión de la luz está de acuerdo con la fórmula (59.10).

Las experiencias de Lédbev desempeñaron un papel histórico en la confirmación de las ideas de Maxwell y, en particular, de su deducción de que la luz es una onda electromagnética. Lédbev conquistó fama mundial y sus experiencias pasaron a la historia de la física como ejemplo de experimento físico extraordinariamente delicado.

§ 59.4. Radiación de ondas electromagnéticas por una carga con movimiento acelerado

1. Si las cargas están en reposo o en movimiento uniforme rectilíneo respecto de un sistema inercial, no radían ondas electromagnéticas. Solamente constituye una excepción la radiación de Vavílov—Cherenkov (§ 59.7).

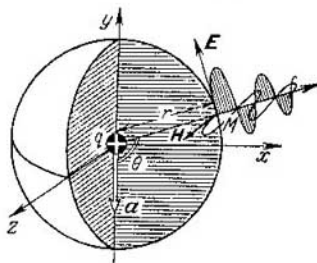


Fig. 59.4.

En efecto, si la carga está en reposo respecto del sistema de referencia, alrededor de ella se produce un campo coulombiano que no varía con el tiempo. Si la carga está en movimiento uniforme, además de la componente eléctrica surge la componente magnética

del campo (§§ 40.3 y 40.4). Pero el movimiento inercial de las cargas no va acompañado de la radiación de ondas electromagnéticas. Las fuentes de las ondas electromagnéticas son las cargas que se mueven con aceleración. Para simplificar los cálculos consideraremos que las cargas se mueven en el vacío.

2. Supongamos que la carga q se encuentra en cierto instante en el origen de coordenadas y se mueven con la

aceleración a dirigida en el sentido negativo del eje de ordenadas (fig. 59.4). Entonces, desde el origen de coordenadas, lo mismo que de un foco puntual, se propaga una onda esférica en la cual los vectores del campo son funciones del tiempo y de la distancia a la fuente de la onda.

De las ecuaciones de Maxwell se sigue que la intensidad del campo eléctrico en el punto M tiene dos componentes. Una es la intensidad ordinaria del campo coulombiano $E_{\text{coul}} = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. La otra se pone de manifiesto como resultado del movimiento acelerado de la carga; esta componente, como se puede demostrar, tiene la forma $E_{\text{ond}} = \mu_0 q a \sin\theta / (4\pi r)$ y describe el proceso ondulatorio. El vector intensidad de la componente coulombiana del campo E_{coul} está dirigido en el sentido del radio vector ($q > 0$), y el vector E_{ond} está dirigido perpendicularmente a él; este vector se encuentra en el plano que pasa por el radio vector y el vector aceleración (véase la fig. 59.4).

3. Como E_{ond} disminuye, al aumentar la distancia, mucho más lentamente que E_{coul} , habrá una distancia r_0 a la cual $E_{\text{ond}} \gg E_{\text{coul}}$ o

$$\frac{\mu_0 q a}{4\pi r_0} \gg \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}.$$

De aquí se deduce que

$$r_0 \gg \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 a} = \frac{c^2}{a}. \quad (59.11)$$

La región del espacio que se halla a la distancia $r \geq r_0$ de la fuente del campo, se llama *zona de onda*. En la zona de onda se puede despreciar el campo coulombiano de la carga y escribir los vectores del campo de la carga irradiante en la forma siguiente:

$$E = \frac{\mu_0 q a \sin\theta}{4\pi r}, \quad H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E = \frac{q a \sin\theta}{4\pi r}. \quad (59.12)$$

§ 59.5. Radiación de una carga y un dipolo oscilantes

1. Supongamos que la carga q realiza en el origen de coordenadas oscilaciones armónicas $y = A \cos \omega t$; la aceleración $a = -A \omega^2 \cos \omega t$ (§ 49.1). El punto M se encuentra a la distancia r del origen de coordenadas, siendo $r \geq r_0$

(véase la fig. 59.4). Para escribir la ecuación de las oscilaciones del campo en el punto M en el instante t , en las fórmulas (59.12) hay que tomar la aceleración en el instante $\tau = t - \frac{r}{c}$; entonces $\omega\tau = \omega(t - \frac{r}{c}) = \omega t - kr$, y las expresiones para el campo toman la forma

$$E = \frac{\mu_0 q A \omega^2 \sin \theta}{4\pi r} \cos(\omega t - kr + \pi), \quad H = \frac{q A \omega^2 \sin \theta}{4\pi c r} \cos(\omega t - kr + \pi). \quad (59.13)$$

Las ecuaciones (59.13) describen el campo E y H de una onda esférica (§ 56.3) cuya frecuencia coincide con la de la carga oscilante.

2. La condición (59.11) toma en este caso la forma $r_0 \gg c/\omega^2 (\omega^2 A)$. Teniendo en cuenta que $c/\omega = \lambda/2\pi$, obtenemos que

$$r_0 \gg \lambda^2/(4\pi^2 A). \quad (59.14)$$

3. La potencia total radiada por la carga oscilante se calcula del modo siguiente. Primero, por la fórmula (59.8), se halla la intensidad de la onda en la dirección dada; después se multiplica dicha intensidad por un elemento de área de la esfera y se hace la suma extendiéndola a toda la superficie. Con una exactitud de hasta el factor numérico obtenemos

$$P \sim \overline{EHS} \sim \frac{\mu_0 q A \omega^2}{4\pi r} \cdot \frac{q A \omega^2}{4\pi c r} \cdot 4\pi r^2 \sim \frac{\mu_0 q^2 A^2 \omega^4}{4\pi c}. \quad (59.15)$$

El cálculo exacto da

$$P = \mu_0 q^2 A^2 \omega^4 / (12\pi c). \quad (59.16)$$

Como se ve, la potencia P de la radiación es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia. Por eso, cuando las frecuencias son bajas, la radiación de energía es insignificante por su pequeñez, pero al crecer la frecuencia de las oscilaciones la potencia de la radiación aumenta muy rápidamente.

4. Las expresiones (59.13) sirven también en el caso en que las ondas electromagnéticas las radia un dipolo cuyo momento eléctrico $p_e = ql$ efectúa oscilaciones armónicas: $p_e = p_0 \cos \omega t$. Sustituyendo en (59.13) y (59.16)

$qA = p_0$, obtenemos las ecuaciones para los campos de ondas y la expresión para la potencia total que radia el dipolo oscilante.

Un ejemplo de dipolo de este tipo es el *oscilador de Hertz* (fig. 59.5). Un carrito de Ruhmkorff, que es un transformador de alta frecuencia, carga las varillas del dipolo hasta que en el espacio entre ellas salta la chispa o descarga de alta frecuencia. Durante este tiempo el oscilador emite una onda cuya longitud es $\lambda = 2l$, y su frecuencia angular $\omega = 2\pi c/\lambda = \pi c/l$ (§ 57.3). De receptor de la onda sirve un dipolo resonador igual que el emisor. Con este aparato demostró Hertz la existencia de las ondas electromagnéticas y estudió sus propiedades.

El oscilador de Hertz tenía una longitud de 2,5 a 1 m, a la que corresponden ondas de 5 a 2 m de longitud. En 1895 hizo P.N. Lébedev unas experiencias muy interesantes. Consiguió crear un oscilador de cerca de 2,5 mm de longitud y con él obtuvo ondas de aproximadamente 6 mm de longitud. En 1922 A.A. Glagóleva-Arkádieva, valiéndose de un generador especial (emisor de masa), logró obtener ondas electromagnéticas de 1 cm a 0,35 mm, con lo cual se cerraron las gamas de las ondas radioeléctricas y de los rayos infrarrojos.

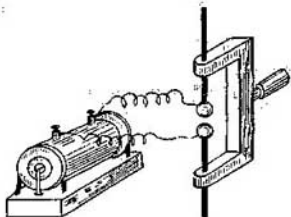


Fig. 59.5.

§ 59.6. Radiación de una carga circulante

1. Si una carga eléctrica se mueve por una circunferencia de radio R con la velocidad constante v , tiene una aceleración centrípeta (normal) $a_n = \omega^2 R$, en la que $\omega = v/R$ es la velocidad angular (§ 4.8). Y como todo movimiento acelerado de las cargas va acompañado de radiación de ondas electromagnéticas, la carga circulante también debe radiar.

Este efecto se observa en la realidad durante el movimiento de las partículas en los aceleradores cíclicos de grandes energías. Como la radiación de las cargas circulantes se observó por primera vez durante el movimiento de los electrones en el sincrotrón, recibió el nombre de *radiación sincrotrónica*. Cuando las energías del electrón son de cerca de 100 MeV, se irradian ondas en la gama de frecuencias del espectro visible, es decir, se observa el llamado *electrón luminoso*.

2. La potencia radiada por un electrón en la unidad de tiempo la hallamos por la fórmula (59.16), sustituyendo en ella la amplitud por el radio de la órbita:

$$P = \mu_0 e^2 R^2 \omega^4 / (12\pi c) = \mu_0 e^2 v^4 / (12\pi c R^2). \quad (59.17)$$

Expresando el radio de la órbita por medio de la inducción del campo magnético (véase (41.5),) se obtiene

$$P = \mu_0 e^4 v^2 B^2 / (12\pi c m^2). \quad (59.18)$$

La pérdida de potencia en radiación sincrotrónica se compensa con la aportación de energía en el espacio de aceleración (§§ 41.4—41.6).

3. Vamos a aplicar estos mismos razonamientos a un electrón que circula en un átomo. Este electrón también debe radiar ondas electromagnéticas y, por lo tanto, su energía tendrá que disminuir. El tiempo durante el cual la carga circulante pierde su energía en la radiación es aproximadamente igual al cociente de dividir la energía cinética por la potencia de radiación:

$$\tau \approx \frac{K}{P} = \frac{mv^2 \cdot 12\pi c R^2}{2 \cdot \mu_0 e^2 v^4} = \frac{6\pi c m R^2}{\mu_0 e^2 v^2}. \quad (59.19)$$

Teniendo en cuenta que en el movimiento del electrón alrededor del núcleo la fuerza coulombiana de atracción sirve de fuerza centrípeta, y suponiendo que la carga del núcleo es igual en módulo a la carga del electrón, se obtiene que

$$mv^2/R = e^2/(4\pi\epsilon_0 R^2).$$

De aquí obtenemos la expresión de la velocidad:

$$v^2 = e^2/(4\pi\epsilon_0 m R).$$

Sustituyendo en (59.19), tenemos el siguiente valor del tiempo buscado:

$$\tau \approx \frac{24\pi^2 \epsilon_0 c m^2 R^3}{\mu_0 e^4}. \quad (59.20)$$

Todas las magnitudes que figuran en esta fórmula son conocidas: $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F/m}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $R \approx 10^{-10} \text{ m}$. El cálculo da

$$\tau = \frac{24\pi^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 83 \cdot 10^{-52} \cdot 10^{-30}}{36\pi \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6,6 \cdot 10^{-76}} \approx 6 \cdot 10^{-10} \text{ s}.$$

4. Hemos obtenido de hecho un resultado absurdo: el electrón, al cabo de 10^{-10} s, aproximadamente, debería perder en la radiación toda su energía y pararse. Entonces, por la acción de la fuerza coulombiana, el electrón caería en el núcleo y el átomo se destruiría. Esto está en contradicción con la experiencia, que nos convence de que la estabilidad de los átomos es enorme.

Así, pues, a base de la teoría clásica es imposible en general obtener una descripción correcta de los fenómenos que ocurren en el átomo. La teoría correcta del átomo sólo se logró estructurar sobre la base de las representaciones cuánticas.

§ 59.7. Radiación de Vavílov — Cherenkov

1. Estudiando la luminosidad de diversos líquidos sometidos a la acción de radiaciones radiactivas, P. A. Cherenkov descubrió en 1934 que los rayos β (electrones relativistas) producen una luminosidad azulina muy débil en los líquidos puros. Esta luminosidad resultó ser muy singular y el académico S. I. Vavílov, que dirigía en aquel tiempo los trabajos de Cherenkov, expresó la hipótesis, confirmada después, de que era producida por el movimiento de los electrones libres en la substancia. La teoría de esta radiación fue propuesta en 1937 por los académicos I. E. Tamm y I. M. Frank. El premio Nobel de física del año 1958 fue concedido a Cherenkov, Tamm y Frank por el descubrimiento y la interpretación teórica de este fenómeno.

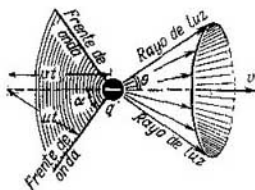


Fig. 59.6.

2. Resulta que la radiación de Vavílov—Cherenkov se produce cuando una carga se mueve uniformemente en la substancia, si su velocidad es mayor que la de la onda electromagnética: $v > u$. Este fenómeno es análogo a la formación de la onda de choque (cono de Mach) cuando un cuerpo se mueve a velocidad mayor que la del sonido (§§ 30.7 y 30.8). Efectivamente, la luminosidad de Cherenkov se

propaga también en forma de cono (fig. 59.6) cuyo ángulo de abertura se determina por la condición (30.21):

$$\cos \theta = \operatorname{sen} \alpha = \frac{u}{v} = \frac{c}{v\sqrt{\epsilon}}. \quad (59.21)$$

Midiendo experimentalmente este ángulo se puede determinar la velocidad de las partículas ultrarrelativistas.

3. La radiación de Vavílov—Cherenkov es el único caso en que una carga que se mueve uniformemente emite ondas electromagnéticas. A primera vista parece que este fenómeno contradice la teoría de la relatividad, según la cual la velocidad de un cuerpo no puede ser mayor que la velocidad de la luz (§ 12.6). Pero es que este enunciado así escrito no es exacto. En el § 12.6 se indica claramente que la velocidad de un cuerpo no puede ser mayor que la velocidad de la luz *en el vacío* (o sea, que siempre $v < c$), pero no se dice en ninguna parte que no pueda ser mayor que la velocidad de la luz en una substancia $u = c/\sqrt{\epsilon} < c$. La radiación de Vavílov—Cherenkov se produce para la condición $c/\sqrt{\epsilon} < v < c$, lo que no contradice en modo alguno la teoría de la relatividad.

§ 59.8. Efecto Doppler óptico

1. Lo mismo que en acústica (§ 56.4), en óptica, cuando se mueve el observador o la fuente, la frecuencia de las ondas electromagnéticas percibida ω difiere de la emitida por la fuente ω_0 . Pero los fenómenos que se producen en el medio elástico se diferencian esencialmente de los que tienen lugar en el campo magnético. El medio elástico puede servir de sistema de referencia, por lo que los casos de movimiento de la fuente o del receptor respecto del medio se distinguen y describen por fórmulas diferentes, (56.15) y (56.18). El campo electromagnético, en cambio, no puede servir de sistema de referencia y para el caso de las ondas electromagnéticas se habla solamente del movimiento relativo de la fuente y el receptor.

En el § 14.1 se demostró que el efecto Doppler longitudinal es consecuencia de la transformación relativista del tiempo al pasar de un sistema inercial de referencia a otro. Examinemos ahora un caso más general.

2. Supongamos que en un sistema de referencia $x_0y_0z_0$ se encuentra una fuente que emite ondas electromagnéticas de frecuencia ω_0 . Hallemos la frecuencia ω que registra un observador situado en el sistema xyz respecto del cual la fuente se mueve a lo largo del eje de abscisas con la velocidad v (fig. 59.7). Llamemos θ el ángulo entre el rayo y la dirección del movimiento de la fuente en el sistema de referencia

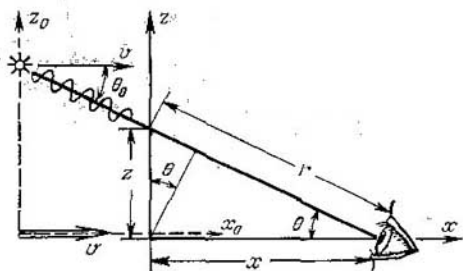


Fig. 59.7.

asociado al observador, y θ_0 , el ángulo entre el rayo y la dirección del movimiento del observador en el sistema de referencia asociado a la fuente.

En la ecuación de onda (56.10) la fase es invariante, por consiguiente, $\omega t - kr = \omega_0 t_0 - k_0 r_0$. En la fig. 59.7 se ve que $r = x \cos \theta + z \sin \theta$, y por la definición de número de onda (56.6) sabemos que $k = \omega/c$. Expresiones análogas son correctas para k_0 y r_0 . Sustituyendo en la expresión para la fase, obtenemos

$$\begin{aligned} \omega \left(t - \frac{x}{c} \cos \theta - \frac{z}{c} \sin \theta \right) &= \\ &= \omega_0 \left(t_0 \frac{x_0}{c} \cos \theta_0 - \frac{z_0}{c} \sin \theta_0 \right). \end{aligned} \quad (59.22)$$

De acuerdo con las transformaciones de Lorentz

$$x = \frac{x_0 + vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad z = z_0, \quad t = \frac{t_0 + vx_0/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Sustituimos estos valores en la igualdad (59.22) y tenemos en cuenta que x , z y t son variables independientes, por lo

tanto, la igualdad (59.22) será correcta si los factores de las variables son iguales. Después de hacer transformaciones fáciles pero largas, obtenemos que

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}}. \quad (59.23)$$

Esta es la expresión del efecto Doppler óptico.

3. De esta fórmula se deduce la expresión para el efecto Doppler longitudinal: cuando $\theta = 0$, la fórmula (14.4) para el caso en que la fuente y el observador se aproximan entre sí, y cuando $\theta = \pi$, la fórmula (14.3) para el caso en que se alejan mutuamente. Si se da la condición $v \ll c$ estas expresiones coinciden prácticamente con las (56.15) y (56.18).

Pero de la teoría de la relatividad se sigue la existencia del efecto Doppler *transversal* para el caso en que la fuente se mueve perpendicularmente al rayo, es decir, $\theta = \pi/2$:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (59.24)$$

Para las ondas elásticas no existe el efecto Doppler transversal.

4. En los años 1938—1941 H. Ives y G. Stilwell hicieron una serie de experimentos para observar el efecto Doppler transversal y obtuvieron una coincidencia magnífica entre los resultados de la experiencia y la teoría. De hecho estos experimentos fueron la comprobación experimental de la ley relativista de la transformación del tiempo expresada por las transformaciones de Lorentz.

Capítulo 60

ELEMENTOS DE RADIOTECNICA

§ 60.1. Radiocomunicación

1. En 1895, A. S. Popov informó a la Sociedad Físico-Química Rusa del descubrimiento, hecho por él, de un registrador de tormentas, aparato que permitía registrar las ondas electromagnéticas producidas durante las descargas eléctricas atmosféricas. En realidad, este aparato era el

primer receptor de radio. Un año después Popov, en una asamblea de la antedicha sociedad, demostró una sesión de radiocomunicación. Desde un edificio fue transmitido a otro, que se hallaba a 250 m de distancia, un radiograma que decía: «Heinrich Hertz». Por este mismo tiempo también se ocupaba de los problemas de la radiocomunicación G. Marconi, que hizo mucho por introducir el empleo de la radio. Ahora, cuando la comunicación por radio y televisión se realiza entre la Tierra y las naves espaciales que se encuentran cerca de Venus o de Marte, la noticia acerca de una transmisión a 250 m o incluso a varios kilómetros de distancia nos parece insignificante. Pero no hay que olvidar que estos fueron los primeros pasos de la humanidad en una rama nueva, inexplorada, de la ciencia y la técnica.

2. Para que una antena (un oscilador de Hertz, por ejemplo) de longitud l emita una potencia apreciable, deben producirse en ella oscilaciones de alta frecuencia. En efecto, según (59.16), la potencia radiada

$$P = \frac{\mu_0 l^2 \omega^2}{12\pi c} I_m^2, \quad (60.1)$$

en la que $I_m = q\omega$ es la amplitud de las oscilaciones de la corriente. Sean $l \approx 10$ m la longitud de la antena, e $I_m \approx 10$ A, y calculemos la frecuencia necesaria para radiar una potencia $P \approx 100$ W. Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior, obtenemos que $\omega \approx 10^7$ s⁻¹; a esta frecuencia corresponde una longitud de onda $\lambda = 2\pi c/\omega \approx 200$ m.

En los albores de la radiotecnica para obtener oscilaciones de alta frecuencia se utilizaba la descarga por chispas de alta frecuencia. Este procedimiento tenía una serie de inconvenientes. En primer lugar, toda la energía se consumía prácticamente en calor, y no en la radiación, de manera que el rendimiento del generador era muy pequeño y el alcance de la emisión de sólo unas decenas de kilómetros. Por otra parte, con la descarga por chispas no se conseguían ondas sinusoidales, sino una serie de impulsos amortiguados. Con ellos sólo era posible efectuar la comunicación radiotelegráfica y no la transmisión del sonido, ya que los impulsos amortiguados no se pueden modular.

3. El descubrimiento del tubo electrónico (triódico (§ 47.3)) y de sus modificaciones, las modernas válvulas multirrejilla, representó una verdadera revolución en la radiotecnica. Con

estas lámparas se consiguieron crear circuitos para generar oscilaciones electromagnéticas no amortiguadas (§ 52.3), para amplificarlas (§ 60.4), modularlas y detectarlas (§ 60.5).

A partir de los años cincuenta, las lámparas de radio empezaron a ser sustituidas en muchos circuitos por dispositivos semiconductores (transistores (§ 78.4)), los cuales poseen una serie de importantes ventajas. Pero la sustitución de la lámpara por el transistor no cambia la esencia del fenómeno, por lo que en adelante dibujaremos los esquemas con lámparas, debiendo tener en cuenta el lector que éstas se pueden sustituir por transistores.

§ 60.2. Radiodifusión

1. La base de un transmisor de radio moderno (fig. 60.1, a) es el generador de oscilaciones no amortiguadas, de lámparas o de transistores. El generador produce las oscilaciones de

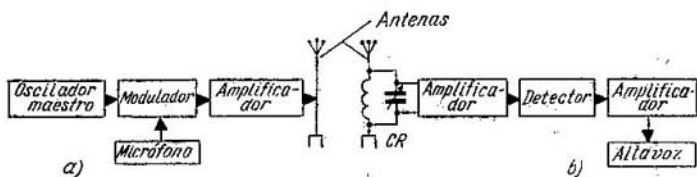


Fig. 60.1.

alta frecuencia (frecuencia portadora ω) que representa la fig. 60.2, a.

Las oscilaciones sonoras (fig. 60.2, b) penetran en el micrófono y en él se transforman en oscilaciones eléctricas. En el modulador tiene lugar el proceso de transformación de las oscilaciones sinusoidales no amortiguadas en oscilaciones moduladas (fig. 60.2, c). Una vez amplificadas, las oscilaciones moduladas llegan a la antena, que sirve para radiar las ondas electromagnéticas.

2. Estas ondas son recibidas por la antena del receptor y producen oscilaciones en el circuito resonante CR (fig. 60.1, b). Las débiles oscilaciones de alta frecuencia entra en un amplificador y luego en el detector (§ 60.5).

De las oscilaciones detectadas (fig. 60.2, *d*) se separa la componente de baja frecuencia (acústica) (fig. 60.2, *e*), que después de amplificada se transmite al altavoz dinámico.

3. El circuito resonante del receptor consta de una bobina y un condensador de capacidad variable, lo que da la posibilidad de sintonizarlo con la frecuencia de la onda que emite una u otra emisora.

Si se recibieran ondas sinusoidales sería conveniente tener un circuito resonante con factor de calidad muy grande, lo que permitiría elevar su selectividad, es decir, su capacidad para distinguir las señales de dos emisoras de frecuencias portadoras próximas (§ 53.4). Pero el circuito resonante debe recibir oscilaciones moduladas, que no tienen una frecuencia, sino una banda de frecuencias (§ 50.4) que llenan cierto intervalo del espectro. Para que la señal no se distorsione es necesario reproducir sin distorsión toda la banda de frecuencias, lo cual se consigue con una curva de resonancia muy achatada. Esto sólo es posible en el caso en que el factor de calidad del circuito es pequeño.

Así, pues, las condiciones de alta selectividad y buena reproducibilidad se contradicen y en la práctica hay que llegar a un compromiso razonable.

Advertimos también que cuanto mayor es la frecuencia portadora, tanto más amplio es el intervalo de frecuencias que puede reproducirse sin distorsión. Esta es una de las causas por las que cada vez se utiliza más la gama de ondas cortas y ultracortas.

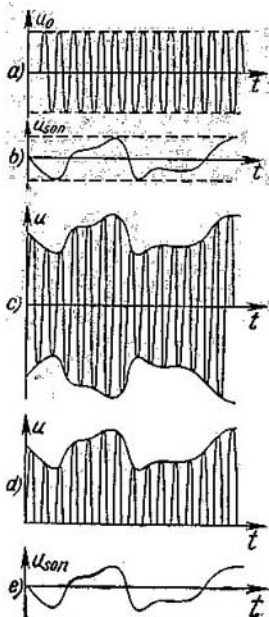


Fig. 60.2.

§ 60.3. Televisión

1. El esquema de la televisión coincide en rasgos generales con el de la radiodifusión. La emisora se distingue en que aquí las oscilaciones de la frecuencia portadora se modulan no sólo por la señal acústica, sino también por la señal de imagen, procedente de unos tubos transmisores especiales (iconoscopios o superorticones). Finalmente, en el volumen de la modulación entran además las señales para sincronizar la exploración del haz electrónico del iconoscopio, en cuya pantalla se reproduce la imagen (§ 47.4).

En el receptor de televisión la señal de alta frecuencia se vuelve a dividir en tres: la señal de imagen (videoseñal), el acompañamiento sonoro y las señales de mando. Una vez amplificadas, estas señales van a parar a sus respectivos canales, en los cuales se utilizan debidamente.

2. Las señales de mando hacen que el haz electrónico efectúa la exploración horizontal, a lo largo de las líneas, y que pase de una línea a otra. En total, en $1/30$ de segundo, el haz traza 625 líneas que constituyen un cuadro. Si durante este tiempo no hay señal de imagen, la pantalla se verá iluminada uniformemente.

La video señal amplificada se hace llegar al electrodo de mando del cañón electrónico, debido a que varía la intensidad del haz de electrones y, en consecuencia, el brillo de un punto dado de la pantalla. A expensas de estas variaciones se produce la imagen.

3. Debido al gran volumen de información que tiene que llevar la señal de televisión, ésta ocupa una banda de frecuencias del orden de 4—5 MHz (en los receptores de radiodifusión es de cerca de 10 kHz). Esto significa que la frecuencia portadora de las ondas electromagnéticas también debe ser muy alta. La frecuencia que se utiliza es de 50 a 900 MHz (la longitud de onda, de 6 m a 30 cm). Las ondas que se emplean en la radiodifusión son mucho más largas y van desde 1,5 km hasta unas decenas de metros.

§ 60.4. Amplificador termoiónico

1. Como el receptor se suele encontrar a distancias muy grandes de la emisora, a su antena llega una parte insignificante de la energía radiada por ésta. Se plantea el problema de amplificar la potencia de las oscilaciones débiles. Este problema se resuelve utilizando amplificadores de lámparas termoiónicas o de transistores. El circuito de un amplificador muy sensible de un triodo se representa en la fig. 60.3. Veamos para qué sirven y cómo funcionan en principio los grupos fundamentales de este circuito.

2. A los electrodos de la rejilla se hace llegar la débil tensión alternativa u_g , que hay que amplificar. La resistencia R_g une la rejilla con el menos de la batería anódica. Como resultado, el potencial de la rejilla oscila de un modo insignificante respecto de este potencial negativo.

La resistencia R_1 y el condensador C_1 en el circuito del cátodo originan la llamada «polarización catódica», a expensas de la cual el potencial φ_g de la rejilla resulta ser inferior que el potencial φ_h del cátodo. En efecto, dentro del triodo la corriente va del ánodo al cátodo y después, a través de la resistencia R_1 , al menos de la batería del ánodo. Juzgando por la dirección de la corriente, nos convencemos de que $\varphi_h > \varphi_g$. En dependencia de la tensión anódica

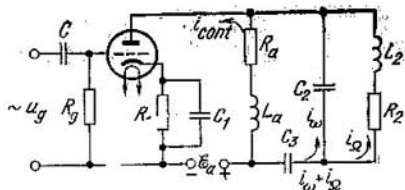


Fig. 60.3.

y de la resistencia R_1 varía la diferencia de potencial entre el cátodo y la rejilla, lo que permite elegir el «punto de trabajo» O del amplificador bien en la parte lineal de la característica (fig. 60.4, a), o bien en su inflexión (fig. 60.4, b). El condensador C_1 , de varias decenas de microfaradios de capacidad acumula carga eléctrica y con esto atenúa las pulsaciones del potencial del cátodo.

3. Si el amplificador funciona en la parte lineal de la característica (fig. 60.4, a), como se ve en la gráfica, las oscilaciones del potencial de la rejilla proporcionan oscilaciones de la corriente, de la misma forma exactamente, en el circuito del ánodo. La amplitud de las oscilaciones de la tensión u_a en la resistencia de carga R_a , cuando la pendiente de la característica es grande, puede resultar mucho mayor que en la rejilla.

Verdad es que la tensión se puede elevar por medio de un transformador, pero entre éste y el amplificador existe una diferencia esencial. En el transformador el aumento de la tensión acarrea la correspondiente disminución de la corriente; el transformador no puede aumentar la potencia de la señal, porque carece de una fuente adicional de energía. En cambio, en el amplificador, precisamente, la potencia

de las oscilaciones en el circuito del ánodo es considerablemente mayor que su potencia en el circuito de la rejilla; el flujo de energía lo asegura la batería anódica \mathcal{E}_a (véase

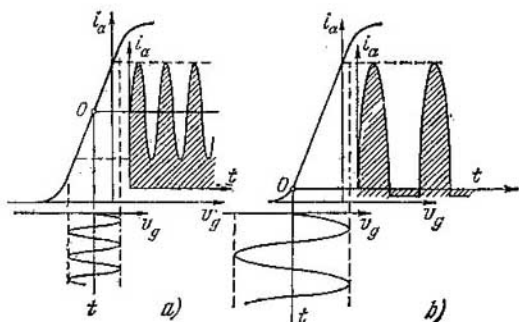


Fig. 60.4.

la fig. 60.3). Así, pues, el amplificador termoiónico funciona en régimen de amplificación de la potencia de la señal, y no sólo de su tensión.

§ 60.5. Detección (desmodulación)

1. Ya hemos dicho que al receptor llegan oscilaciones moduladas de alta frecuencia (véase la fig. 60.2, c). Para poder oír el sonido hay que separar de la señal modulada la componente de baja frecuencia (acústica). El proceso de separación de la componente de baja frecuencia se llama *desmodulación*. La desmodulación se efectúa con un *detector*, es decir, con un conductor de conductividad unilateral. Su papel puede desempeñarlo, por ejemplo, una válvula de dos electrodos (§ 47.2), un diodo cristalino (§ 78.3) y, en general, cualquier conductor no lineal, o sea, que no cumpla la ley de Ohm.

Para explicar el papel esencial de la no linealidad recurriremos al esquema de la fig. 60.3, con la condición de que el punto de trabajo se ha elegido en la inflexión de la característica (véase la fig. 60.4, b). En este caso se hace llegar a la

rejilla una señal sinusoidal, y en el circuito del ánodo se producen pulsaciones de la corriente.

En primera aproximación se puede considerar que, en su parte de trabajo, la característica tiene la forma de parábola y que en el circuito anódico la corriente no es una función lineal, sino cuadrática de la tensión en la rejilla:

$$i_a = i_0 + \alpha u_g + \beta u_g^2, \quad (60.2)$$

donde α y β son unas constantes.

2. Supongamos que a la rejilla se hace llegar la tensión modulada $u_g = A(1 + k \cos \Omega t) \cos \omega t$, en la que $k < 1$ es la profundidad o grado de modulación; Ω , la frecuencia de modulación, y $\omega \gg \Omega$, la frecuencia portadora (§ 50.2, fig. 50.2).

La corriente en el circuito del cátodo se expresa así:

$$i_a = i_0 + \alpha A (1 + k \cos \Omega t) \cos \omega t + \\ + \beta A^2 (1 + 2k \cos \Omega t + k^2 \cos^2 \Omega t) \cos^2 \omega t. \quad (60.3)$$

Aprovechando que $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$, se puede demostrar que la corriente anódica (60.3) es la suma de tres sumandos: la corriente continua i_{cont} , la componente de alta frecuencia i_ω , con las frecuencias ω y 2ω y la componente de baja frecuencia i_Ω , con las frecuencias Ω y 2Ω :

$$i_\Omega = \frac{\beta A^2}{2} \left(1 + 2k \cos \Omega t + \frac{k^2}{2} \cos 2\Omega t \right). \quad (60.4)$$

Como se ve, la componente de baja frecuencia de la corriente, prácticamente, reproduce bien la ley de la variación de la magnitud de la oscilación modulada, es decir, de la señal acústica. Verdad es que durante la detección surge una componente con doble frecuencia de modulación ($k^2/2$) $\cos 2\Omega t$, pero cuando $k \ll 1$ se puede despreciar.

3. Aclaremos cómo se consigue separar la señal de baja frecuencia i_Ω , que nos interesa, de las otras dos componentes. Recurriremos otra vez a la fig. 60.3. Aquí, la impedancia de la bobina del altavoz dinámico $Z = \sqrt{R_2^2 + L_2^2 \Omega^2}$. Paralelamente a esta bobina se conecta el condensador C_2 .

La componente continua de la oscilación detectada no puede pasar por el condensador separador C_3 y pasa a través de la bobina de choque L_a , la resistencia R_a y la válvula. Las componentes i_ω e i_Ω , al contrario, pasan libremente a través del condensador separador C_3 (cuya capacitancia

$X_{C_2} = 1/(C_2\omega)$ es pequeña) y no pasan por la bobina de choque L_a , cuya inductancia $X_L = L_a\omega$ es grande (§§ 54.5 y 54.6).

La señal de alta frecuencia i_ω , con las frecuencias ω y 2ω , pasa después por el condensador C_2 , ya que, cuando la frecuencia es alta, la capacitancia $X_{C_2} = 1/(C_2\omega)$ es mucho menor que la inductancia $X_{L_2} = L_2\omega$. Para la señal acústica de baja frecuencia, de frecuencia $\Omega < \omega$, evidentemente, es correcta la relación inversa, en virtud de la cual pasa a través de la bobina vocal.

4. En la práctica no se utiliza la modulación cuadrática, sino otras formas de modulación. La señal modulante tampoco es sinusoidal. Sin embargo, el ejemplo recién examinado da una idea correcta del fenómeno de la desmodulación de la señal de alta frecuencia por medio del detector.

Capítulo 61

INTERFERENCIA DE LA LUZ

§ 61.1. Escala de las ondas electromagnéticas

1. Para medir la longitud de onda de las ondas luminosas y de las ondas próximas a la banda óptica (infrarrojas, ultravioletas y de rayos X) se utilizan las siguientes unidades de medición:

$$1 \mu\text{m (micrómetro)} = 10^{-6} \text{ m};$$

$$1 \text{ nm (nanómetro)} = 10^{-9} \text{ m};$$

$$1 \text{ \AA (angstrom)} = 10^{-10} \text{ m}.$$

2. La *luz visible* son ondas electromagnéticas que se encuentran en la banda de longitudes de onda que va desde $\lambda_r = 7800 \text{ \AA} = 780 \text{ nm}$ (luz roja) hasta $\lambda_v = 4000 \text{ \AA} = 400 \text{ nm}$ (luz violeta).

Pero la luz visible, por su naturaleza física, no se distingue en nada de las demás ondas electromagnéticas, o sea, de las radioeléctricas, infrarrojas, ultravioletas y de los rayos X y gamma. Por eso, hablando de luz, este término suele aplicarse con sentido amplio a las ondas electromagnéticas en general. Con esto ocurre lo mismo que con el término «onda acústica»,

que se utiliza para denominar cualesquiera ondas elásticas de pequeña frecuencia, y no sólo el sonido audible. En particular, cuando se habla de la velocidad de la luz en el vacío c , nos referimos no sólo a la luz visible, sino de hecho a todas las ondas electromagnéticas.

3. En la fig. 61.1 se representa la escala de las ondas electromagnéticas. Estas abarcan una enorme gama de frecuencias, desde varias oscilaciones por segundo hasta 10^{23} Hz.

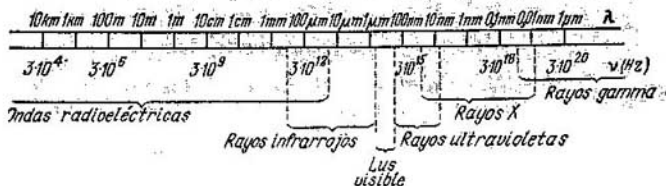


Fig. 61.1.

(a las que corresponden respectivamente longitudes de onda desde centenares de millares de kilómetros hasta 10^{-6} nm).

1. Las ondas radioeléctricas abarcan las longitudes de onda comprendidas entre 10^6 m y 50μ m; en ellas se distinguen las bandas de ondas largas (de más de 1 km), de ondas medias (desde 1 km hasta 100 m), de ondas cortas (desde 100 m hasta 10 m), y de ondas ultracortas (de menos de 10 m).

La banda de las radioondas ultracortas enlaza con la zona de los rayos infrarrojos. El límite entre ellas es puramente convencional y viene determinado por el procedimiento de obtención: las radioondas ultracortas se logran por medio de generadores especiales (método radiotécnico), mientras que los rayos infrarrojos son emitidos por los cuerpos calentados.

Más allá de la zona visible del espectro se encuentran los rayos ultravioleta; su longitud de onda va desde 400 nm hasta 10 nm. Los rayos ultravioleta se consiguen mediante descarga luminiscente (§ 48.6), por lo general, en vapor de mercurio.

Con el límite de onda corta de la zona ultravioleta empalma la zona correspondiente a los rayos X (§ 73.3). Estos abarcan la gama de longitudes de onda comprendida entre

10 nm y 0,01 nm. A continuación va la zona de los rayos gamma (§ 81.10), con longitudes de onda menores que 0,1 nm. Las zonas de los rayos X y gamma se superponen parcialmente y estas ondas hay que distinguirlas también no por sus propiedades, sino por el método con que se producen: los rayos X se obtienen en tubos especiales (§ 73.3) y los rayos gamma son emitidos por los núcleos radioactivos de algunos elementos.

§ 61.2. Tren de ondas. Vector luz

1. El mecanismo de la radiación de la luz visible y de los rayos infrarrojos, ultravioleta y X se estudiará detenidamente en los cap. 67—74. Resulta que un átomo excitado, que posee exceso de energía, pasa a un estado de energía

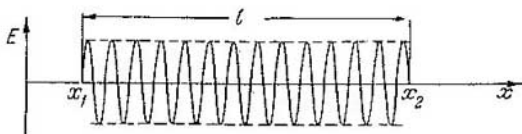


Fig. 61.2.

menor y, al hacerlo, radía una onda electromagnética. El proceso de transición dura $\tau \approx 10^{-8}$ s, este mismo tiempo dura la radiación. Por lo tanto, el átomo emite un trozo de senoide que recibe el nombre de *tren de ondas* (fig. 61.2). La longitud de un tren de ondas en el vacío $l = x_2 - x_1 = c\tau \approx 3$ m, y la longitud de la onda luminosa es de cerca de 10^{-6} m, por consiguiente, en el tren de ondas caben varios millones de longitudes de onda.

2. La fig. 61.2 representa únicamente las oscilaciones del vector intensidad de la componente eléctrica de la onda electromagnética; la componente magnética no está representada. En adelante representaremos solamente una componente de la onda electromagnética, sobreentendiendo la existencia de las oscilaciones de la otra componente en el plano perpendicular a la primera (véase la fig. 59.1). La causa por la cual se ha elegido como *vector luz* el vector E , y no el H , consiste en que la componente eléctrica de la onda electromagné-

tica actúa sobre los electrones libres y de conducción mucho más intensamente que la magnética.

En efecto, de (59.4) se sigue que, en el vacío, los vectores de la onda se relacionan entre sí por la fórmula $H = E\sqrt{\epsilon_0/\mu_0}$, de donde tenemos para el vector inducción $B = \mu_0 H = E\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = E/c$. La fuerza eléctrica $F_e = eE$ y la magnética $F_m = evB = eEv/c = F_e v/c$. Pero la velocidad de los electrones es menor que la de la luz, por lo que la fuerza magnética es mucho menor que la eléctrica.

3. Las experiencias confirman este cálculo. Resulta que el efecto fotoeléctrico (§ 68.1), las reacciones fotoquímicas (§ 68.4), la acción de la luz sobre el ojo, la fotoluminiscencia (§ 79.2), etc. son determinadas por la acción del vector E . Sin embargo, no hay que olvidar que los dos vectores del campo (E y H) están ligados indisolublemente en la onda electromagnética y que en ningunas condiciones es posible obtener una onda en la cual sólo haya una componente del campo.

§ 61.3. Relaciones de indeterminación (de incertidumbre) para la coordenada y el número de onda

1. Un tren de ondas es una onda no sinusoidal. En este sentido el tren se parece a un impulso sinusoidal (§ 53.7) y, aproximadamente, se puede representar por pulsaciones (§ 50.1). Con este fin vamos a representar el tren de ondas de longitud l en forma de suma de dos ondas sinusoidales de frecuencias angulares próximas ($\omega_1 = \omega - \Delta\omega$, $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$) y, respectivamente, con números de onda también próximos ($k_1 = k + \Delta k$, $k_2 = k - \Delta k$):

$$E_1 = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi), \quad (61.1)$$

$$E_2 = E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi).$$

La onda resultante (§ 50.1) tendrá la forma de onda «casi sinusoidal»:

$$E = B \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (61.2)$$

en la que la «amplitud variable» es

$$B = 2E_0 \cos(\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x). \quad (61.3)$$

2. Eligiendo un instante determinado cualquiera, obtenemos la «amplitud», que depende únicamente de la coordenada:

$$B = 2E_0 \cos(\Delta k \cdot x) = B_0 \cos(\Delta k \cdot x). \quad (61.4)$$

Esta onda es un conjunto de «pulsaciones espaciales», cuya forma en cierto instante se representa en la fig. 61.3, a.

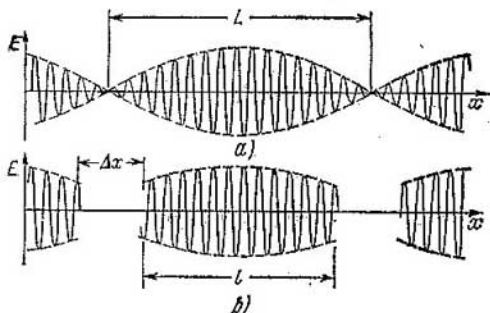


Fig. 61.3.

Las coordenadas de los «nodos» las obtenemos suponiendo que en (61.4) $\cos(\Delta k \cdot x) = 0$, de donde se sigue que $\Delta k \cdot x_m = (2m + 1) \pi/2$. Por lo tanto,

$$x_m = (2m + 1) \frac{\pi}{2\Delta k}. \quad (61.5)$$

La longitud de una «pulsación», es decir, la distancia entre los nodos más próximos, es

$$L = x_{m+1} - x_m = \pi/\Delta k. \quad (61.6)$$

Esta expresión es análoga a la del «período de pulsación» (§ 50.1).

3. Una pulsación espacial no es un tren de ondas, pero la diferencia entre ellos es menor que lo que parece. El hecho es que todo instrumento de medición tiene un límite determinado de sensibilidad, y si la «amplitud de pulsación» es menor que el límite de sensibilidad del instrumento, éste deja de percibir la onda. De ese modo, el instrumento

registrator percibirá «trozos de pulsaciones» (fig. 61.3, b) que, prácticamente, no difieren ya en nada del tren de ondas.

Valoremos la indeterminación de la coordenada Δx del tren de ondas. Consideremos que un «trozo de pulsación» refleja satisfactoriamente las propiedades del tren si la amplitud en el extremo de este trozo no es más de dos veces menor que la amplitud máxima: $B/B_0 \approx 0,5$. Advertimos que en este caso la intensidad disminuye no más de cuatro veces ($I/I_0 = B^2/B_0^2 = 0,25$). Aplicando (61.4), tenemos que

$$B/B_0 = \cos(\Delta k \cdot \Delta x) \approx 1/2.$$

De aquí se deduce que $\Delta k \cdot \Delta x \approx \pi/3 \approx 1$. Así, pues,

$$\Delta k \cdot \Delta x \approx 1. \quad (61.7)$$

Esta es la relación de indeterminación para la coordenada y el número de onda.

4. Esta relación tiene el sentido siguiente. Como el tren de ondas no es una senoide infinita, sino un trozo de senoide, no le corresponde un número de onda determinado, sino un intervalo de números de onda de anchura Δk . Por otra parte, la longitud del tren de ondas también tiene la indeterminación Δx . Esto significa que la posición del tren de ondas en el espacio no se puede hallar con una exactitud mayor que la indeterminación Δx .

Las indeterminaciones de la coordenada y del número de onda, según (61.7), son inversamente proporcionales una a otra. Por consiguiente, cuanto mayor sea la exactitud con que se mida el número de onda (o la longitud de onda), tanto más indeterminada resultará la posición del tren sobre el eje de coordenadas. Y al contrario, cuanto más exactamente se localice el tren de ondas, tanto más indeterminado resultará el número de onda (y la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$).

La relación (61.7) desempeña un papel de extraordinaria importancia en la mecánica cuántica (véase § 70.2 y siguientes).

§ 61.4. Monocromaticidad

1. La luz que emiten las fuentes ordinarias es una onda no sinusoidal. En el cap. 50 se demostró que toda onda no sinusoidal se puede descomponer en un espectro (§ 50.4), es decir, representar en forma de una suma de armónicas sinusoidales. Más adelante estudiaremos los métodos físicos

con los cuales se puede realizar la descomposición espectral de una onda luminosa (§§ 61.8, 61.9, 62.2, 66.12).

La luz a la cual corresponde una frecuencia determinada (y, respectivamente, una determinada longitud de onda), se llama *monocromática* (del griego *μόνος*, único y *χρώμας*, color). En cualquier aparato espectral su espectro tiene la forma de una raya estrecha.

2. En realidad el proceso de radiación dura un tiempo finito $\tau \approx 10^{-8}$ s, como resultado de lo cual a una *raya espectral dada corresponde una gama de longitudes de onda de anchura $\Delta\lambda$* (y, respectivamente, una gama de frecuencias de anchura $\Delta\nu$).

Se llama anchura natural de una raya espectral la gama de longitudes de onda (o de frecuencias) cuya anchura viene determinada por el tiempo finito de radiación. La anchura natural se determina partiendo de la relación de indeterminación del tiempo y la frecuencia $\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 1$ (véase (53.22)). Como la indeterminación del tiempo Δt es aproximadamente igual al tiempo de radiación τ , de (53.22) se deduce que

$$\Delta\omega \approx 1/\tau \approx 10^8 \text{ s}^{-1}. \quad (61.8)$$

3. De característica más conveniente del grado de ensanchamiento de una raya espectral sirve su *anchura relativa*. Esta es igual a la razón de la anchura de la raya a la longitud (o, respectivamente, a la frecuencia) correspondiente a la intensidad máxima de la raya espectral. Demostremos que $\Delta\omega/\omega = \Delta\nu/\nu = \Delta\lambda/\lambda$.

En efecto, si a la frecuencia ν corresponde la longitud de onda $\lambda = c/\nu$, a la frecuencia $\nu_1 = \nu - \Delta\nu$ le corresponderá la longitud de onda $\lambda_1 = \lambda + \Delta\lambda = c/(\nu - \Delta\nu)$, y a la frecuencia $\nu_2 = \nu + \Delta\nu$, la longitud de onda $\lambda_2 = \lambda - \Delta\lambda = c/(\nu + \Delta\nu)$. La igualdad $\lambda_1\nu_1 = \lambda_2\nu_2 = c$ podemos escribirla así:

$$(\lambda + \Delta\lambda)(\nu - \Delta\nu) = (\lambda - \Delta\lambda)(\nu + \Delta\nu).$$

Abriendo los paréntesis y reduciendo los términos semejantes, obtenemos la igualdad buscada para la anchura relativa, calculada por la longitud de onda o por la frecuencia. Sustituyendo los valores de $\Delta\omega \approx 1/\tau \approx 10^8 \text{ s}^{-1}$ y $\omega \approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$, obtenemos

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 10^{-7}. \quad (61.9)$$

4. El ensanchamiento de las rayas espectrales se debe también a otros factores, entre los cuales señalaremos el movimiento térmico de los átomos (ensanchamiento Doppler) y las colisiones entre los átomos (ensanchamiento de «choque»). Este último se debe a que en los gases a presión considerable (20-20 at) y temperatura de 500—600 K se producen intensas colisiones entre los átomos. A expensas de estas colisiones disminuye el tiempo τ durante el cual radia el átomo y, respectivamente, se ensancha la raya espectral.

5. Como se demostró en el § 59.8, el movimiento de la fuente de luz va acompañado de la variación de la frecuencia de la onda luminosa. La onda de frecuencia máxima, $\nu_1 = \nu + \Delta\nu$ la emiten los átomos que se mueven hacia el observador, y la de frecuencia mínima, $\nu_2 = \nu - \Delta\nu$, los átomos que se mueven en sentido opuesto.

La velocidad media del movimiento térmico de los átomos se determina partiendo de la fórmula $\bar{e} = m_0 \bar{v}^2 / 2 = = \frac{3}{2} kT$ (§ 26.5):

$$\bar{v} = \sqrt{3kT/m_0} = \sqrt{3RT/M}.$$

Aquí M es la masa molar del gas y R la constante universal de los gases (§ 26.9). La mayor velocidad térmica la tendrán los átomos de hidrógeno, cuya masa molar es $M = 1$ kg/kmol. A $T = 6000$ K, que corresponde a la temperatura de la superficie del Sol, $\bar{v} = \sqrt{3 \cdot 8,3 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^3 / 1} = 1,2 \cdot 10^4$ m/s. Esta velocidad es mucho menor que la de la luz en el vacío ($v/c \approx 10^{-4}$), lo que permite utilizar para el cálculo de la variación de la frecuencia la fórmula aproximada $\nu' = = \nu (1 \pm v/c)$. De aquí se deduce que

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu' - \nu}{\nu} = \pm \frac{v}{c}. \quad (61.10)$$

Para los átomos de hidrógeno en la superficie del Sol el ensanchamiento Doppler de la raya espectral es:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} = \frac{1,2 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^8} \approx 10^{-4}.$$

Este ensanchamiento es mil veces mayor que la anchura natural.

Como se ve, la luz rigurosamente monocromática no es posible obtenerla. La luz, por principio, es una onda no monocromática (es decir, no sinusoidal).

6. Durante mucho tiempo se pensó que la anchura natural de una raya espectral no se podía disminuir. Pero con los generadores ópticos cuánticos (láseres) se ha conseguido luz monocromática en alto grado, cuya raya espectral tiene menor anchura que la natural (§§ 79.3, 79.4).

§ 61.5. Interferencia de la luz

1. En el § 57.5 se estudió el caso de la interferencia de ondas *sinusoidales*. Se demostró que si dos fuentes emiten ondas sinusoidales de igual frecuencia, en el sitio en que se encuentran se produce una figura de interferencia. Pero si este mismo experimento se hace con dos fuentes indepen-

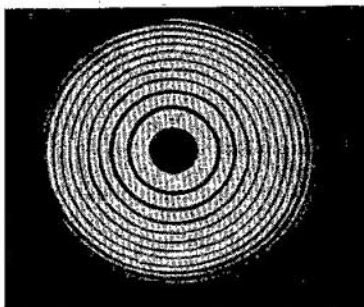


Fig. 61.4.

dientes que emitan la misma luz, la figura de interferencia no aparece y en el lugar del encuentro de ambas ondas sólo se observa una suma de las intensidades de la luz.

2. De esto no se deduce, sin embargo, que sea imposible conseguir la interferencia de la luz. En el año 1675 Newton logró ya observar dicha interferencia en un dispositivo especial hecho por él (los llamados «anillos de Newton» fig. 61.4), pero no pudo explicar el origen de los máximos y mínimos de luz.

Tomás Young observó en 1801 la interferencia de la luz valiéndose del dispositivo que reproduce esquemáticamente

la fig. 61.5. En él, un foco intenso de luz C ilumina la rendija estrecha S . La onda luminosa rodea los bordes de esta rendija (difracción) e ilumina las dos rendijas estrechas S_1 y S_2 . En virtud de la difracción, de ambas rendijas parten dos ondas que se superponen parcialmente. En la zona en que se superponen se produce la interferencia y en la pantalla M se ve un sistema de máximos y mínimos de interferencia que

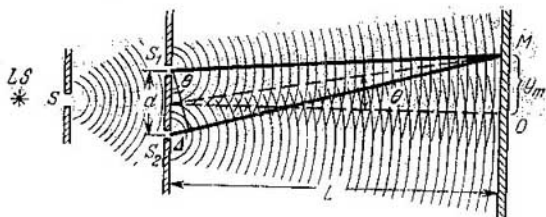


Fig. 61.5.

tienen la forma de franjas brillantes y oscuras. Young explicó correctamente el origen de estas franjas como un fenómeno de interferencia de ondas y calculó la longitud de onda, obteniendo el valor $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7}$ m.

Además del dispositivo de Young existe una serie de otros en los cuales se produce la interferencia de la luz. Algunos de estos dispositivos se estudiarán más adelante.

3. Si en el dispositivo de Young se elimina la pantalla con la rendija S , el foco luminoso ilumina directamente las rendijas S_1 y S_2 . En este caso desaparece la figura de interferencia. Pero al eliminar la rendija S no cambia la característica de frecuencia de la luz y las dos rendijas S_1 y S_2 dejan pasar ondas luminosas de igual frecuencia.

Así, vemos que si la condición de igualdad de las frecuencias era suficiente para que se produjese la interferencia por composición de las ondas sinusoidales, en el caso de las ondas luminosas esta condición es insuficiente. La causa de que esto sea así consiste en que las ondas luminosas son no sinusoidales, lo que para la interferencia tiene esencial importancia (véase el punto 4 del párrafo siguiente).

§ 61.6. Coherencia

1. Ya hemos dicho que la onda luminosa está formada por trenes de ondas aislados. Y como distintos átomos radian independientemente unos de otros, los distintos trenes difieren en fase. Esto significa que la luz es una onda casi sinusoidal cuya fase varía desordenadamente. En otras palabras, en la expresión $s = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$ la fase inicial φ no es una magnitud constante (como en la onda sinusoidal), sino que varía de un modo casual con el tiempo.

2. En el § 57.5 se obtuvo la expresión (57.15) de la amplitud de la oscilación resultante que se produce al componer dos ondas de igual frecuencia. Teniendo en cuenta que la intensidad de la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud y llamando a las intensidades de las ondas componentes $I_1 = I_2 = I_0 = \alpha A^2$ y a la intensidad de la onda de la oscilación resultante $I = \alpha B^2$, en la que α es un coeficiente de proporcionalidad, obtenemos

$$I = 4I_0 \cos^2 \left[\frac{k(r_2 - r_1)}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right] = \\ = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{k\Delta}{2} + \frac{\delta}{2} \right), \quad (61.11)$$

donde $\Delta = r_2 - r_1$ es la diferencia de marcha y $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$, la diferencia de fases.

En las ondas sinusoidales las fases φ_1 y φ_2 son magnitudes constantes, $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$ también es una magnitud constante y la intensidad de la onda resultante se determina únicamente por la diferencia de marcha $\Delta = r_2 - r_1$ (§ 57.5).

3. En el caso de la composición de ondas luminosas la cuestión se complica mucho porque φ_1 y φ_2 varían fortuitamente con el tiempo. Son posibles dos casos diferentes en principio:

a) Ambas fases varían según una misma ley; entonces la diferencia de fase $\delta = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ y volvemos al caso estudiado en el § 57.5.

Las ondas de igual frecuencia en que la diferencia de fase $\delta = \text{const}$ (generalmente $\delta = 0$), se llaman *coherentes*. Las ondas luminosas coherentes producen figura de interferencia.

b) Las fases de ambas ondas varían casual e independientemente una de otra, con lo que también varía de un modo casual la diferencia de fase $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$. Estas ondas se

dice que son *incoherentes*: Demostremos que cuando se encuentran ondas incoherentes no se produce interferencia.

La radiación de un tren de ondas dura $\tau \approx 10^{-8}$ s, por consiguiente, la fase de la onda varía de un modo casual más de cien millones de veces por segundo. Los dispositivos que perciben la luz (el ojo, la célula fotoeléctrica, la película fotográfica, etc.) tienen cierta inercia, por lo que sólo registran el valor medio de la intensidad de la luz durante un intervalo de tiempo $t \gg \tau$:

$$\bar{I} = 4I_0 \overline{\cos^2 \left(\frac{k\Delta}{2} + \frac{\delta}{2} \right)}.$$

Por la trigonometría sabemos que $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$. Y como el argumento del coseno ($\alpha = k\Delta + \delta$) varía de un modo casual, el valor medio del coseno durante un intervalo de tiempo grande es igual a cero: $\overline{\cos(k\Delta + \delta)} = 0$. De donde se sigue que el valor medio del cuadrado del coseno es igual a un medio:

$$\overline{\cos^2 \left(\frac{k\Delta}{2} + \frac{\delta}{2} \right)} = \frac{1}{2} [1 - \overline{\cos(k\Delta + \delta)}] = \frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, la intensidad media de la oscilación resultante

$$\bar{I} = 4I_0 \overline{\cos^2 \left(\frac{k\Delta}{2} + \frac{\delta}{2} \right)} = 2I_0 = I_1 + I_2.$$

4. Así, cuando se componen ondas incoherentes no hay interferencia; la intensidad media de la onda en cualquier punto es igual simplemente a la suma de las intensidades de las ondas que se componen.

La figura de interferencia sólo se produce cuando se componen ondas luminosas coherentes.

Esto da la posibilidad de comprender para qué hace falta en el experimento de Young la rendija S (véase la fig. 61.5). En este dispositivo las dos rendijas S_1 y S_2 se hallan en un mismo frente de onda y son excitadas por un tren de ondas común que parte de la rendija S . Por eso de ambas rendijas salen ondas luminosas de igual fase, es decir, ondas coherentes que producen en la pantalla una figura de interferencia. Si se elimina la rendija S , las S_1 y S_2

serán excitadas por trenes de ondas diferentes, que proceden de distintos puntos del foco luminoso. Las ondas que parten de ambas rendijas resultan ser incoherentes y la figura de interferencia desaparece.

§ 61.7. Distancia entre los máximos de interferencia

1. En el párrafo anterior se ha demostrado que, cuando se componen ondas coherentes, para el cálculo de la figura de interferencia se pueden utilizar los resultados válidos para las ondas sinusoidales: de la fórmula (57.18) ($I = I_0 \cos^2(\pi \Delta/\lambda)$) para la intensidad, y la expresión (57.20) para determinar las condiciones de máximo ($\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}$) y de mínimo ($\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$) de la misma.

No obstante, debe tenerse en cuenta que si la diferencia de marcha de dos ondas sinusoidales puede ser tan grande como se quiera, la constancia de la diferencia de fase de las ondas luminosas sólo se puede asegurar en el caso en que esta diferencia se encuentre dentro de los límites de un tren de ondas.

2. Por diferencia de marcha se entendía en el § 57.5 la diferencia de distancias desde los focos hasta el punto en que se investiga la figura de interferencia: $\Delta = r_2 - r_1$. Pero esta forma de abordar la cuestión sólo tiene sentido en el caso en que la onda se mueve en el vacío con la velocidad c . Si la onda no se propaga en el vacío, sino en una sustancia, hay que cambiar el concepto de diferencia de marcha, ya que puede ocurrir que las ondas se muevan según r_1 con distinta velocidad que según r_2 .

La velocidad de la luz en un cuerpo $u = c/\sqrt{\epsilon}$ (§ 59.1). Tomemos $n = \sqrt{\epsilon}$ y llamémosle *índice de refracción* (§ 63.1); tendremos que $u = c/n$. Los números de onda en cada medio serán: $k_1 = \omega/u_1 = \omega n_1/c$ y $k_2 = \omega n_2/c$. La expresión de la oscilación resultante (57.16) tomará la forma

$$B = 2A \cos \frac{k_2 r_2 - k_1 r_1}{2} = 2A \cos \frac{\omega}{2c} (n_2 r_2 - n_1 r_1).$$

Comparándola con (57.17) obtenemos la expresión de la diferencia de marcha óptica

$$\Delta = n_2 r_2 - n_1 r_1. \quad (61.12)$$

3. Para calcular la distancia entre los máximos (o los mínimos) de interferencia recurriremos a la fig. 61.5 pág. 145. En ella L es la distancia desde las fuentes hasta la pantalla; d , la distancia entre las dos fuentes; y_m , la distancia desde el centro de la figura de interferencia hasta el máximo número m , y θ , el ángulo de observación.

Es evidente que en el punto O se observa el llamado *máximo nulo*, ya que a este punto llegan las ondas de ambas fuentes en la misma fase. En otros puntos de la pantalla el máximo se produce con la condición (57.20): $\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}$, donde m es el número del máximo. Cuando $L \gg d$ y los ángulos de observación son pequeños, tenemos $\Delta = d \sin \theta$ e $y_m = L \operatorname{tg} \theta \approx L \sin \theta$, por lo tanto, $\Delta/y_m \approx d/L$. Sustituyendo el valor de la diferencia de marcha, obtenemos

$$y_m = m\lambda L/d. \quad (61.13)$$

La fórmula (61.13) expresa la distancia desde el máximo nulo (principal) hasta el máximo número m . La distancia entre dos máximos vecinos

$$b = y_{m+1} - y_m = \lambda L/d. \quad (61.14)$$

Todas las magnitudes que figuran en (61.14), excepto la longitud de onda, se pueden medir directamente. Esto permite medir, valiéndose del dispositivo de Young, la longitud de la onda luminosa. Así, en uno de los experimentos se obtuvieron: $L = 3$ m, $d = 1$ mm y $b = 2,1$ mm. Para el experimento se utilizó luz roja. La longitud de su onda

$$\lambda = bd/L = 1/3 \cdot 2,1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} = 7 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 700 \text{ nm}$$

4. De (61.13) se sigue que la posición de un máximo de interferencia depende de la longitud de onda. Esto significa que durante la interferencia se produce la descomposición espectral de la onda luminosa no monocromática (no sinusoidal) en sus componentes sinusoidales (véase el cap. 50).

En efecto, si en el dispositivo de Young la fuente emite luz blanca, solamente el máximo nulo (principal) será blanco; todos los demás máximos estarán coloreados. Como la zona anaranjada-roja del espectro corresponde a las ondas más largas ($\lambda_r \approx 780-600$ nm) y la azul-violeta, a las más cortas ($\lambda_v \approx 480-420$), de acuerdo con (61.13) estas ondas se desvían a ángulos diferentes.

Finalmente, indicaremos que la distribución angular de los máximos y los mínimos en la figura de interferencia no depende de la intensidad de la luz y, por consiguiente, de la iluminación de la pantalla. Si un mismo dispositivo lo iluminamos con un haz de luz muy brillante y fotografiamos la figura de interferencia con un tiempo de exposición pequeño y después disminuimos la intensidad de la luz y hacemos una nueva fotografía aumentando la exposición en la misma proporción en que se redujo la intensidad de la luz, las dos fotografías serán exactamente iguales. Con esta propiedad de la interferencia volveremos a encontrarnos en el § 68.7, al estudiar las propiedades cuánticas de la luz.

§ 61.8. Interferómetro de Michelson

1. El esquema de la estructura del interferómetro de Michelson se representa en la fig. 61.6. Aquí S es un foco de luz de alta monocromaticidad; P_1 y P_2 , dos láminas de vidrio de igual espesor con las superficies perfectamente rectificadas; sobre la lámina P_1 se ha pulverizado una tenue capa de plata,

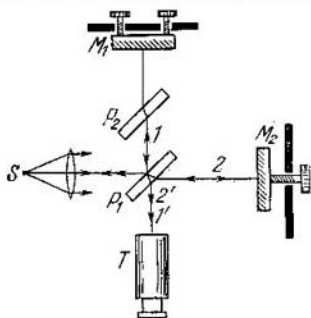


Fig. 61.6.

sobre la lámina P_1 se ha pulverizado una tenue capa de plata, calculada de tal modo que deja pasar la mitad de la luz que sobre ella incide y refleja la otra mitad (lámina semitransparente); M_1 y M_2 son dos espejos metálicos que se pueden desplazar por medio de tornillos micrométricos, y T es un anteojo. La luz del foco S incide sobre la lámina P_1

y se desdobra. La mitad de su energía se refleja hacia el espejo M_1 , vuelve a reflejarse en él, atraviesa de nuevo las láminas P_2 y P_1 y penetra en el anteojo. La otra mitad de la energía del haz luminoso atraviesa la capa de plata semitransparente, llega al espejo M_2 , se refleja en él, vuelve a pasar por la lámina P_1 y, después de reflejarse en la capa semitransparente, penetra en el anteojo.

En la capa semitransparente el tren de ondas se divide en dos partes iguales y las dos ondas que llegan al anteojo son

coherentes. El ojo del observador ve en el anteojo una figura de interferencia en forma de franjas de interferencia nítidas.

2. La diferencia de marcha es igual al duplo de la diferencia de distancias desde el centro de la lámina P_1 hasta los espejos M_1 y M_2 ; así, $\Delta = 2(l_1 - l_2)$. Como se ve, el interferómetro de Michelson funciona con una gran diferencia de marcha, lo que requiere que la luz sea altamente monocromática.

Si el espejo M_1 se desplaza una distancia igual a la cuarta parte de la longitud de onda, la diferencia de marcha varía media onda y en la figura de interferencia el máximo se desplaza al puesto que ocupaba el mínimo y viceversa. Este corrimiento de las franjas lo ve claramente el observador. De hecho, en un buen interferómetro se puede registrar un corrimiento del máximo de interferencia de 0,1 de la distancia entre las franjas, lo que corresponde a desplazar el espejo M_1 a una distancia $l = \lambda/20 \approx 500 \text{ nm}/20 = 25 \text{ nm}$.

Así, valiéndose del interferómetro de Michelson se pueden hacer mediciones precisas de longitud con una exactitud no menor de 20—30 nm. En particular, la unidad de longitud, el metro, se determina actualmente por medio de los métodos de interferencia con una exactitud de nueve cifras significativas. De acuerdo con la definición adoptada en el SI, 1 metro es una longitud igual a 1 650 763,73 longitudes de onda en el vacío de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles $2p_{10}$ y $5d_5$ (luz anaranjada) del isótopo del criptón de masa atómica 86.

3. En 1881 A. A. Michelson y en 1887 el mismo, en colaboración con E. W. Morley hicieron un experimento con el cual intentaron hallar la diferencia de velocidades de propagación de la luz a lo largo de la dirección del movimiento orbital de la Tierra y transversalmente a esta dirección.

La idea del experimento consistía en que un brazo del interferómetro se orientaba a lo largo de la trayectoria de la Tierra y el otro, transversalmente a esta dirección, y desplazando el espejo móvil M_1 se ponía a cero la figura de interferencia. Después se hacía girar el interferómetro 90° , cambiando con esto la orientación de sus brazos. Como todos los físicos de su tiempo, Michelson estaba convencido de que a la luz podía aplicarse la ley clásica de la composición de las velocidades (§ 2.5) y que la velocidad de propagación de la luz a lo largo de los dos brazos del interferómetro sería distinta. En estas condiciones, el poner a cero la figura

de interferencia sólo sería posible siendo distintas las longitudes de los brazos del instrumento, por lo que el giro de 90° del dispositivo debería ir acompañado de un corrimiento de las franjas de interferencia.

A pesar de todas las esperanzas, el experimento no reveló ningún corrimiento de las franjas de interferencia. El perfeccionamiento introducido posteriormente en la experiencia (por R. J. Kennedy y E. M. Thorndike en 1932) llevó a la conclusión de que, si para la luz fuera correcta la ley clásica de composición de las velocidades, el corrimiento de las franjas de interferencia se observaría ya a la velocidad $v = 2$ km/s (la velocidad orbital de la Tierra es igual a 30 km/s). Pero el corrimiento de las franjas no se produjo. El resultado negativo de la experiencia de Michelson y de los que la continuaron sirvió de base experimental para reconocer el hecho de que la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales. Como ya se dijo (véase el cap. 12), este postulado, junto con el principio de la relatividad, fue sentado por Einstein como fundamento de la teoría de la relatividad.

§ 61.9. Aplicaciones de la interferencia

1. Además de las mediciones precisas de longitud, de que se ha hablado en el párrafo anterior, los métodos interferenciales se utilizan mucho en toda una serie de ramas de la ciencia y la técnica.

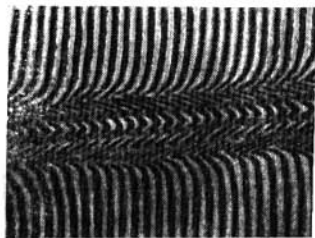


Fig. 61.7.

En primer lugar, con los interferómetros se puede comprobar la calidad de las superficies rectificadas. El microinterferómetro de V. P. Línnik es un interferómetro muy pequeño acoplado a un microscopio. Su estructura no difiere en esencia de la del inter-

ferómetro de Michelson, pero en vez de uno de los espejos se utiliza la superficie que se controla. Si la superficie está rayada o tiene alguna concavidad, esto hace que las franjas de interferencia se tuerzan (fig. 61.7). Por el carácter

§ 62.2. Red de difracción

1. Se llama *red de difracción* un sistema de N trazos o rayas paralelas grabadas sobre una lámina de vidrio. En la fig. 62.2 se muestra la vista lateral de un trozo de red muy aumentado. A veces se utilizan redes de reflexión, que se hacen trazando, sobre la superficie pulida de una lámina de metal, rayas paralelas con una cuchilla de diamante muy fina. De las láminas así grabadas se sacan copias en gelatina o plástico (llamadas réplicas) que se utilizan como redes baratas de segunda calidad. Las buenas redes de reflexión, cuya longitud total $l \approx 150$ mm y cuyo número total de trazos $N \approx 10^5$ (la densidad de los trazos $n = 600$ trazos por mm) se fabrican en el Instituto Óptico del Estado.

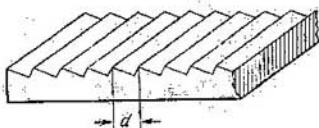


Fig. 62.2.

Las características principales de una red son: el número total de trazos N , la densidad de estos n (número de trazos por milímetro) y el período de la red $d = 1/n$ (o sea, la constante de la red).

2. Como la red se ilumina por un frente de onda, sus N franjas transparentes se pueden considerar como N fuentes coherentes. Apliquémosles la teoría de la interferencia producida por muchas fuentes iguales, que se estudió en los §§ 57.6 y 57.7.

La intensidad de la luz se expresa, de acuerdo con (57.25), así:

$$I = i_0 \frac{\text{sen}^2 N\beta}{\text{sen}^2 \beta}, \text{ donde } \beta = \frac{\pi d \text{sen } \theta}{\lambda}. \quad (62.1)$$

Aquí i_0 es la intensidad de la luz que pasa por una rendija.

Los máximos principales se producen con la condición (57.31):

$$\text{sen } \theta_m = m\lambda/d \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (62.2)$$

La intensidad de la luz en los máximos principales

$$I_m = N^2 i_0. \quad (62.3)$$

la figura de difracción producida por un orificio de diámetro $D \approx 2$ mm cuando la luz es verde, $\lambda = 500 \text{ nm} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, la vemos nítidamente a distancias del orden de $l \approx \frac{4 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 2 \text{ m}$. Es natural que la difracción también se produzca en objetos de dimensiones mucho mayores, pero observarla sólo es posible a distancias muy grandes de dichos objetos.

2. La difracción se puede observar a simple vista practicando en un papel negro opaco un pequeño orificio con una

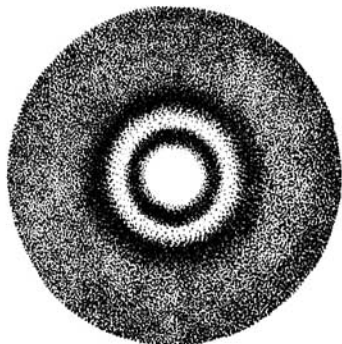


Fig. 62.1.

hoja de afeitar o pinchándolo con una aguja. El papel debe colocarse a 1,5–2 m de distancia de una lámpara brillante (de 100–200 W), y el ojo a una distancia del orden de 0,5–1 m del papel. La figura de difracción producida por un orificio circular tiene la forma que representa la fig. 62.1.

La posición de los mínimos de difracción (anillos oscuros) se puede calcular por la fórmula (57.40): $\text{sen } \theta = m\lambda/D$, en la que θ es el ángulo de observación y D , el diámetro del orificio. Es cierto que la fórmula (57.40) se dedujo para una rendija rectangular, pero, con un error pequeño, sirve también para un orificio circular.

de la distorsión se puede juzgar la profundidad de la rayadura.

2. Valiéndose de los interferómetros se pueden medir los coeficientes de dilatación lineal de los sólidos, así como la variación de las dimensiones de los materiales ferromagnéticos en un campo magnético o de los ferroeléctricos en un campo eléctrico (efectos de magnetostricción y electrostricción). En efecto, la variación de las dimensiones debida a estos efectos es muy pequeña y únicamente por medio de los métodos interferenciales es posible medirla con seguridad.

3. Utilizando los métodos interferenciales se comprueba la calidad del rectificado de las lentes y los espejos, que tiene gran importancia para la fabricación de instrumentos ópticos; se miden los índices de refracción de los cuerpos, en particular de los gases; se miden concentraciones pequeñísimas de impurezas en los gases y líquidos. En astronomía los métodos interferenciales permiten valorar el diámetro angular de las estrellas. Es de lamentar que el volumen de este libro no permita estudiar las aplicaciones indicadas del fenómeno de la interferencia y otras muy importantes.

Capítulo 62

DIFRACCIÓN DE LA LUZ

§ 62.1. Difracción por un orificio

1. Ya que la luz es una onda, debe observarse el fenómeno de la difracción de la luz, es decir, la desviación de las ondas luminosas por detrás de los bordes de los obstáculos opacos (§§ 57.8 y 57.9). Pero observar la difracción de la luz es difícil a causa de la extraordinaria pequeñez de la longitud de onda luminosa en comparación con las dimensiones de los objetos en cuyos bordes se produce.

Para evaluar la distancia l a que debe hallarse el observador cuando las dimensiones del objeto son D y la longitud de onda λ , se utiliza la expresión (57.28): $l \gg D^2/4\lambda$. Así,

3. De (62.2) se deduce la conveniencia de hacer las redes con período pequeño. Esto da la posibilidad de obtener grandes ángulos de dispersión de los rayos y, como consecuencia, una amplia figura de difracción.

Así, si $d = 1/600$ mm y la longitud de onda $\lambda = 600$ nm = $6 \cdot 10^{-4}$ mm, el primer máximo de interferencia se obtiene con la condición $\sin \theta_1 = \lambda/d = 6 \cdot 10^{-4} \cdot 600 = 0,36$, es decir, bajo un ángulo $\theta_1 \approx 21^\circ$; el segundo máximo, con $\sin \theta_2 = 2\lambda/d = 0,72$, o sea, bajo el ángulo $\theta_2 = 46^\circ$. Los máximos de orden superior no se producen, porque cuando $m \geq 3$, el número $m\lambda/d > 1$.

4. De (62.2) se sigue también que la red de difracción efectúa la descomposición espectral, ya que la luz de distintas longitudes de onda se desvía en ángulos diferentes en cualquier máximo, excepto en el nulo. Si la red se ilumina con luz blanca, sólo el máximo nulo tiene color blanco; los demás máximos tendrán todos los colores del espectro. Por ejemplo, en las condiciones del problema anterior, en el primer máximo los rayos rojos ($\lambda_r \approx 760$ nm) se desvían en un ángulo $\theta_r = 27^\circ$, y los violetas ($\lambda_v \approx 400$ nm), en un ángulo $\theta_v = 14^\circ$.

Vemos, pues, que valiéndose de una red de difracción se puede medir la longitud de onda de una u otra luz. Para esto hay que conocer el período de la red y medir el ángulo en que se desvía el rayo correspondiente a la luz dada. Después de esto, por la fórmula (62.2) se puede calcular la longitud de onda.

§ 62.3. Anchura angular del máximo principal

1. Cuando el número de trazos N es grande, la intensidad de la luz en los máximos principales aumenta mucho, ya que, de acuerdo con (62.3), es proporcional a N^2 . Pero el aumento de la energía en los máximos principales debe ir acompañado inevitablemente de una disminución de la energía en las demás zonas del espectro, para que la energía total se conserve. Esto sólo es posible en el caso en que al crecer N se estrechan los máximos principales (véase la fig. 57.7).

Llamamos *anchura angular* γ de un máximo principal al ángulo sólido entre los dos mínimos más próximos a él. Para simplificar el cálculo nos referiremos al máximo principal nulo ($m = 0$). Suponiendo en (57.32) $n = 1$, obtenemos el valor del ángulo auxiliar que determina la posición del

mínimo: $\beta_1 = \pi/N$. A este ángulo auxiliar corresponde el ángulo sólido $\theta = \gamma/2$. Sustituyendo en (57.23), se obtiene

$$\frac{\pi}{N} = \frac{nd \sin(\gamma/2)}{\lambda}, \text{ de donde } \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\lambda}{Nd}.$$

2. Como se ve, al crecer N disminuye la anchura angular del máximo principal. Cuando $Nd \gg \lambda$, lo que siempre ocurre en la luz, $\sin(\gamma/2) \approx \gamma/2$. Así,

$$\gamma = 2\lambda/Nd. \quad (62.4)$$

En la red de que antes hablábamos, para la luz verde ($\lambda = 500 \text{ nm}$) obtenemos

$$\gamma = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-8} \cdot 600}{10^6} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ (rad)} = \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 180 \cdot 3600}{\pi} \approx 1,2''.$$

§ 62.4. Poder resolutivo de una red

1. El estrechamiento de los máximos de interferencia eleva el *poder resolutivo* o *separador* de la red, es decir, su capacidad para dar imágenes separadas de dos rayas espectrales cuyas longitudes de onda sean λ_1 y λ_2 .

En espectroscopia se dice que un instrumento *separa* dos rayas espectrales si sus imágenes se ven separadamente; si se confunden en una, se dice que el instrumento no las separa.

2. En la fig. 62.3 se muestra la distribución de las intensidades cuando se superponen dos rayas espectrales próximas de longitudes de onda λ_1 y λ_2 al difractarse la luz en una

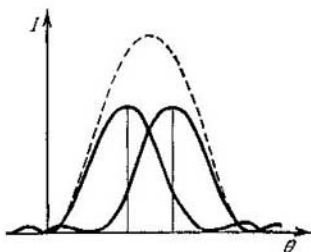


Fig. 62.3.

red con pequeño número total de trazos. La anchura del máximo principal es mucho mayor que la distancia angular entre los máximos de interferencia de ambas rayas. Esto significa que es imposible ver separadas las dos rayas y que éstas se confunden en una franja ancha. Si esta misma luz pasa a través de una red con gran número total de trazos,

surge la imagen que se ve en la fig. 62.4. En ella los máximos se han estrechado, son más brillantes y entre ellos existe un importante mínimo de intensidad, lo que permite registrar cada raya por separado.

Dos rayas estarán separadas si la distancia angular entre ellas no es menor que la semianchura de las rayas: $\theta_2 - \theta_1 \geq \gamma/2$. En otros términos esta condición se enuncia así: el máximo principal de una de las rayas no debe encontrarse más cerca que el primer mínimo de la otra (*criterio de Rayleigh*).

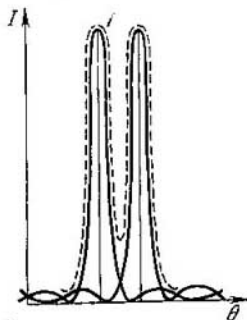


Fig. 62.4.

De (62.2) se sigue que

$$\text{sen } \theta_2 = m\lambda_2/d, \text{ sen } \theta_1 = m\lambda_1/d.$$

Si los ángulos son pequeños, $\theta_2 = m\lambda_2/d$ y $\theta_1 = m\lambda_1/d$. De acuerdo con la condición $\theta_2 - \theta_1 \approx \gamma/2$; por consiguiente

$$\gamma/2 \approx m\Delta\lambda/d. \quad (62.5)$$

Pero según (62.4), $\gamma = 2\lambda/Nd$, donde $\lambda = \lambda_1 \approx \lambda_2$. Sustituyendo en (62.5) se obtiene

$$\lambda/\Delta\lambda = mN. \quad (62.6)$$

3. La magnitud $A = \lambda/\Delta\lambda$ se llama *poder resolutivo* o *separador* del aparato espectral. Cuanto mayor sea el poder resolutivo de un instrumento, tanto más próximas serán las rayas espectrales que pueda separar.

Así, en el espectro del vapor de sodio hay una raya amarilla brillante, de longitud de onda $\lambda = 589$ nm. Cuando se crearon los aparatos espectrales de gran poder resolutivo ($A \geq 1000$) se consiguió descubrir que dicha raya es doble (es decir, un doblete) y que las longitudes de onda respectivas son $\lambda_1 = 589,0$ nm y $\lambda_2 = 589,6$ nm.

La red a que nos referimos en el § 62.2 es de un poder resolutivo muy alto. En efecto, tiene $N = 10^5$ y con ella se pueden observar espectros de primero y segundo orden ($m \leq 2$). Por consiguiente, su poder resolutivo máximo $A = mN = 2 \cdot 10^5$. Esto significa que en la zona verde del espectro ($\lambda \approx 500$ nm) esta red es capaz de separar rayas cuya diferencia de longitud de onda $\Delta\lambda = \lambda/A \approx 0,0025$ nm.

§ 62.5. Difracción de rayos X

1. En los capítulos 32 y 33 se estudió detenidamente la estructura de los cristales. Allí se indicó (§ 32.3) que los datos sobre la estructura de la red cristalina se obtienen por medio del análisis estructural por difracción de rayos X. Ahora vamos a considerar detalladamente el mecanismo de la difracción de los rayos X en los cristales.

En 1895 descubrió W. Roentgen un nuevo tipo de radiación a la que dio el nombre de rayos X. La naturaleza de estos rayos tardó mucho tiempo en esclarecerse. G. G. Stokes

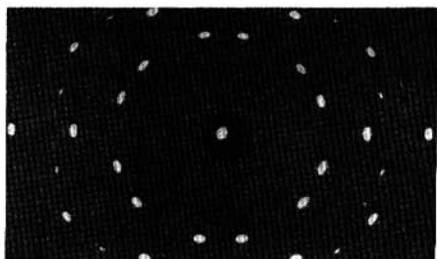


Fig. 62.5.

lanzó en 1897 la idea de que los rayos X son ondas electromagnéticas cortas que se producen por el enfrenamiento brusco de los electrones en la substancia, lo que está de acuerdo con la teoría de Maxwell (§ 59.4). Pero los intentos de Roentgen para revelar la interferencia y la difracción de los rayos X resultaron fallidos.

2. En 1912, Max Laue y sus discípulos consiguieron hacer una experiencia de difracción de rayos X haciendo pasar un estrecho haz de ellos por un monocristal. Los máximos de interferencia que se produjeron como resultado de la difracción en los nudos de la red cristalina se pudieron observar en una pantalla luminiscente y fotografiarse (fig. 62.5). Sabiendo que el período de la red cristalina era igual aproximadamente a 0,1 nm y que los ángulos de desviación fueron de $10-20^\circ$, por la fórmula (62.2) se puede valorar la longitud de onda de los rayos X, la cual también resultó ser igual,

aproximadamente, a 0,1 nm. Esto permitió comprender el por qué de los fracasos de las experiencias de Roentgen: la red de difracción que él utilizó era demasiado burda.

§ 62.6. Difracción en una red tridimensional

1. En la red tridimensional que forman los nudos de un cristal, los fenómenos difieren algo de los que se producen en la red unidimensional que se estudió en el § 62.2. En la red unidimensional los máximos de interferencia se producen cualquiera que sea la longitud de onda, y la dependencia entre esta longitud λ y el ángulo de dispersión θ

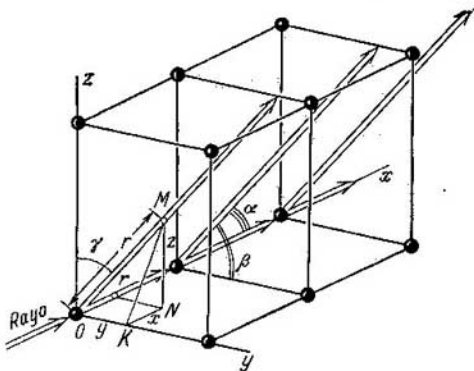


Fig. 62.6.

viene expresada por la fórmula (62.2): $\sin \theta = m\lambda/d$. En la red tridimensional sólo se observan los máximos de algunas longitudes de onda, entre los cuales y el período de la red existe una relación determinada.

Para simplificar los razonamientos vamos a considerar el fenómeno de la difracción en un cristal con red cúbica simple (fig. 62.6). La onda, al entrar en el cristal, es dispersada por los átomos y otras partículas que se hallan en los nudos de la red cristalina. Las ondas secundarias que se producen como resultado de la dispersión, son coherentes y, por lo tanto, interfieren.

2. Figurémonos que la onda incide sobre el cristal perpendicularmente a la cara yz . Investiguemos las ondas secundarias dispersas en la dirección que se indica en la fig. 62.6. Aquí los rayos forman con el eje de abscisas el ángulo α , con el eje de ordenadas, el ángulo β , y con el eje de coordenadas z , el ángulo γ . Vamos a hallar la condición con la cual las ondas dispersas en esta dirección dan un máximo de interferencia.

El sistema de nudos situados a lo largo del eje de ordenadas forma una red lineal de período d . Los máximos se producen de acuerdo con la condición (62.2), que nosotros transformaremos un poco, sustituyendo el ángulo θ , entre el rayo y la normal a la red, por el ángulo β entre el rayo y el eje de ordenadas. Pero $\beta = (\pi/2) - \theta$, por consiguiente, $\sin \theta = \cos \beta$ y la condición (62.2) se escribe así:

$$d \cos \beta = m_1 \lambda \quad (m_1 = 0, 1, 2, \dots) \quad (62.7)$$

Un resultado análogo da el sistema de nudos situados a lo largo del eje de coordenadas z :

$$d \cos \gamma = m_2 \lambda, \quad (m_2 = 0, 1, 2, \dots) \quad (62.8)$$

El sistema de nudos situados a lo largo del eje de abscisas constituye un sistema de fuentes puntuales como el estudiado en el § 57.6. En la fig. 62.6 puede verse que aquí la diferencia de marcha $\Delta = d - d \cos \alpha = d(1 - \cos \alpha)$. La condición de máximo toma la forma

$$\Delta = d(1 - \cos \alpha) = m_3 \lambda \quad (m_3 = 0, 1, 2, \dots) \quad (62.9)$$

3. El sistema de tres ecuaciones que acabamos de escribir no es siempre compatible, porque a ellas se les impone una condición más. Según la fig. 62.6, las proyecciones del radio vector r sobre los ejes de coordenadas se expresan así:

$$OT = x = r \cos \alpha, \quad OK = y = r \cos \beta, \quad MN = z = r \cos \gamma. \quad (62.10)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras es fácil convencerse de que $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Teniendo en cuenta (62.10), obtenemos que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (62.11)$$

4. Sustituyendo los valores $\cos \beta = m_1 \lambda / d$, $\cos \gamma = m_2 \lambda / d$ y $\cos \alpha = 1 - (m_3 \lambda / d)$ en la fórmula (62.11), y después de hacer algunas transformaciones simples, se obtiene

$$\lambda = 2m_3 d / (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2). \quad (62.12)$$

Así, pues, únicamente las ondas cuya longitud satisface la condición (62.12) son las que dan máximos de interferencia; las demás simplemente se dispersan en todas las direcciones. Y solamente en el máximo central (nulo), que satisface la condición $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, encontramos todas las ondas independientemente de sus longitudes.

5. En este principio se basa el método de Laue. Sobre el cristal se lanza un haz en el que hay un conjunto de ondas de todas las longitudes posibles, y únicamente aquellas cuyas longitudes satisfacen la condición (62.12), producen la figura de interferencia. Conociendo el período de la red se puede medir la longitud de la onda.

Este mismo método se puede utilizar para «monocromatizar» un haz de rayos X, es decir, para separar de un ancho espectro el haz correspondiente a una estrecha gama de longitudes de onda.

§ 62.7. Análisis espectral por refracción de rayos X

1. En la actualidad el método de Laue tiene solo interés histórico. Para los fines prácticos se utiliza el método del polvo o el método del cristal oscilante.

El método del polvo, que fue propuesto en 1926 por P. Debye y P. Scherrer (método de Debye—Scherrer), permite analizar la estructura de la red cristalina de una sustancia que se encuentre en estado policristalino (§ 32.2). Esto tiene mucha importancia, ya que producir monocristales de dimensiones considerables es un problema bastante complicado y frecuentemente es imposible obtener el monocristal necesario.

Por el método del cristal oscilante sólo se pueden estudiar los monocristales, lo cual es un inconveniente de este método.

Sin embargo, este procedimiento da la posibilidad de estudiar la estructura de la red mucho más detalladamente que con el método de Debye—Scherrer.

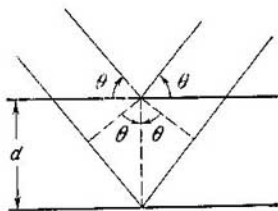


Fig. 62.7.

2. Supongamos que un haz monocromático de rayos X con longitud de onda λ incide sobre un cristal de tal modo, que el rayo forma con el plano del cristal el ángulo θ (fig. 62.7). Si la longitud de onda satisface la condición

(62.12), en ciertas direcciones se producirán máximos de interferencia. Como se ve en la fig. 62.7, la diferencia de marcha de los rayos reflejados que interfieren se expresa así:

$$\Delta = 2 d \operatorname{sen} \theta.$$

La condición de máximo es:

$$\Delta = 2d \operatorname{sen} \theta = m\lambda. \quad (62.13)$$

Esta condición fue establecida en 1913 por W. L. Bragg y el profesor de la Universidad de Moscú G. V. Wulff (condición de Wulff-Bragg).

3. El esquema del dispositivo con cristal oscilante se muestra en la fig. 62.8. El monocristal de la sustancia que

se analiza se coloca en una platina que, por medio de un mecanismo de relojería, oscila lentamente. Un delgado haz monocromático de rayos X pasa a través de los diafragmas D_1 y D_2 , incide sobre el cristal y se difracta. Los máximos de interferencia se registran en la placa fotográfica Φ .

Al girar el cristal se infringe la condición de máximo y disminuye la intensidad del haz dispersado. Pero la onda de menor intensidad será registrada ya en otro punto de la placa fotográfica, lo que en la fig. 62.8 se representa con línea de trazos. Con esto el método del cristal oscilante no sólo permite determinar las distancias interplanares (períodos de la red), sino también, por el carácter de la distribución de la intensidad, formarse una idea de las dimensiones de las partículas que hay en los nudos de la red cristalina.

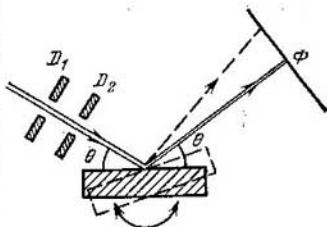


Fig. 62.8.

4. Para obtener el diagrama de Debye se dirige un estrecho haz monocromático de rayos X sobre una columnilla de polvo prensado de la substancia que se analiza (fig. 62.9). Como en la columnilla de polvo hay una multitud de cristales minúsculos orientados en completo desorden, siempre

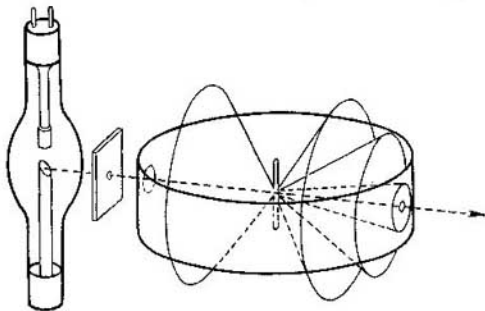


Fig. 62.9.

hay cristalitos orientados de tal modo que para ellos será correcta la condición de Wulff-Bragg; a expensas de ellos se producen los máximos de interferencia. El primer máximo se desvía del orden nulo en un ángulo 2θ ; el segundo, en un ángulo 4θ , y así sucesivamente. Y puesto que en la columna de polvo no hay direcciones privilegiadas, la condición $2d \sin \theta = m\lambda$ se cumple para todos los rayos que se encuentran en las superficies cónicas con ángulos de apertura 4θ , 8θ , etc. Al cortar la placa fotográfica estas superficies, surge un sistema de circunferencias concéntricas cuyo centro se halla en el máximo de orden nulo (fig. 62.9). El análisis de los diagramas de Debye permite juzgar acerca de la estructura, no sólo de los policristales, sino también de los compuestos de alto peso molecular—fibras, moléculas gigantes (del tipo de las albúminas) —, así como del carácter de la variación de la estructura de la sustancia en las transiciones de fase (véase el cap. 36).

§ 62.8. Difusión de la luz

1. En la fórmula (62.12) el período de la red cristalina debe ser mayor que la longitud de onda: $d > \lambda$. Si el período de la red es menor que la longitud de onda solamente se puede producir el máximo de interferencia de orden cero. En efecto, la igualdad (62.12) para $d < \lambda$ se puede cumplir únicamente en el caso cuando $m_1 = m_2 = m_3 = 0$. Recurriendo a las expresiones (62.7) — (62.9) vemos que de $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ se sigue que $\beta = \gamma = \pi/2$, y $1 - \cos \alpha = 0$, o sea, $\alpha = 0$. Esto significa que la onda, incidiendo sobre el cristal perpendicularmente a la cara yz , se propaga a lo largo del eje de abscisas sin dispersarse a los lados.

En este caso el cristal se comporta con respecto a la onda como un medio homogéneo carente de centros de difusión. Así, la desigualdad $d < \lambda$ es la *condición de homogeneidad óptica del cristal* de período d respecto de la onda de longitud λ .

Advertimos una vez más que un mismo cristal es homogéneo respecto de unas longitudes de onda y no lo es respecto de otras. Así, las distancias interplanares de los cristales son de varios angström. Por eso, para la luz visible, cuya longitud de onda es de, aproximadamente, 400—700 nm, un cristal es un medio ópticamente homogéneo. Pero para los

rayos X, que tienen una longitud de onda de 0,1—0,01 nm, aproximadamente, este mismo cristal es una red cristalina tridimensional con heterogeneidades periódicas muy manifiestas.

2. Por lo tanto, para la luz visible, un cristal perfecto es ópticamente homogéneo y la luz no debe sufrir difusión en él. Pero todo cristal real tiene una serie de defectos (§ 32.4) que infringen su homogeneidad. Las ondas difusas por estos defectos no son coherentes, por lo que se observan en todas las direcciones posibles. La teoría de la difusión de la luz en los medios ópticamente heterogéneos fue elaborada en 1907 por L. I. Mandelshtam.

Las heterogeneidades se producen también en la sustancia a expensas de las fluctuaciones de la densidad (§§ 28.10 y 28.11), y no sólo en los cristales, sino también en los líquidos y los gases. La difusión de la luz en estas fluctuaciones se denomina *difusión molecular*. La teoría de este fenómeno la crearon en 1908—1910 Smolujowski y Einstein.

La difusión también puede producirse en pequeñas partículas extrañas diseminadas en el medio; estas heterogeneidades pueden tener dimensiones de hasta $0,1\lambda$, siempre que la distancia entre ellas sea $d > \lambda$. En este caso las heterogeneidades pueden ser partículas de humo, pequeñas gotitas de grasa en el agua (leche), gotitas de agua en el aire (niebla), etc. El medio que contiene estas heterogeneidades se llama *turbio*.

3. La experiencia demuestra que las radiaciones de onda corta (rayos violeta y azules) se difunden más intensamente, y las de onda larga (luz anaranjada y roja), con menos intensidad. Este fenómeno lo explicó en 1899 Rayleigh. Para ello partió de que en los centros de difusión, bajo la acción de la onda electromagnética, se producen oscilaciones forzadas de la misma frecuencia que la onda. En estas condiciones el centro de difusión se puede considerar como un dipolo oscilante en miniatura, que emite ondas secundarias cuya intensidad, según (59.16), es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia, es decir, inversamente proporcional a la cuarta potencia de la longitud de onda (*ley de Rayleigh* para la difusión de la luz):

$$I_{\text{dif}} \sim \nu^4 \sim 1/\lambda^4. \quad (62.14)$$

Esto explica el color celeste del cielo y el escarlata de los crepúsculos. Cuando el Sol está alto sobre el horizonte y

miramos en otra dirección, no percibimos la luz directa, sino la difusa en las fluctuaciones de la densidad del aire, en las cuales, según la ley de Rayleigh, predomina la zona de onda corta del espectro (celeste—azul—violeta). Y al contrario, cuando observamos una puesta o salida de Sol, percibimos la luz directa. Su componente de onda corta está difusa y en la luz transmitida predominan las ondas largas (luz anaranjada y roja). A propósito, en la Luna, donde no hay atmósfera, el cielo es completamente negro y las puestas y salidas del Sol no tienen crepúsculo.

4. La ley de Rayleigh permite explicar por qué los cristales prácticamente no difunden las ondas acústicas y ultrasonoras, pero sí difunden muy intensamente las ondas hipersónicas correspondientes a la propagación del calor (§ 45.3). La longitud de las ondas sonoras es de más de 10 cm y la del ultrasonido, de más de 1 mm, lo que supera en mucho el período de la red cristalina e incluso la distancia entre los defectos del cristal. Por eso, para estas ondas el cristal es un medio homogéneo. El hipersonido, en cambio, tiene una longitud de onda del orden de 1—10 nm, conmensurable con el período de la red cristalina, por lo que se difunde intensamente.

Capítulo 63

DISPERSIÓN Y ABSORCIÓN

§ 63.1. Índice de refracción de la luz

1. Al deducir las leyes de la reflexión y refracción de las ondas (§ 56.5) nos basamos en la ecuación general de la onda (56.8) que también es válida para las ondas electromagnéticas. Por esto, las leyes de la reflexión y de la refracción que se obtuvieron (56.25) y (56.26) son aplicables a la luz. La experiencia confirma también que este razonamiento es justo.

Supongamos que una onda luminosa incide en el vacío sobre cierto dieléctrico, como se muestra en la fig. 63.1. La velocidad de la onda en el vacío es c , y en el dieléctrico,

$u < c$; de acuerdo con (56.26), tenemos que

$$\frac{\text{sen } \alpha_0}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{u}. \quad (63.1)$$

La razón del seno del ángulo de incidencia α_0 al seno del ángulo de refracción α cuando la luz pasa del vacío a una substancia, se llama *índice de refracción absoluto* de la substancia dada (§ 61.7). A veces se dice simplemente índice (coeficiente) de refracción de la substancia, pero debe recordarse que, en este caso, nos referimos precisamente al índice absoluto. Así,

$$\frac{\text{sen } \alpha_0}{\text{sen } \alpha} = n. \quad (63.2)$$

La expresión (63.2) se llama *ley de Snellius* (o *Snell*), aunque éste la formuló no mediante los senos, sino de las cosecantes. La ley de la refracción en la forma (63.2) fue enunciada en 1630 por Descartes, probablemente con independencia de Snellius, cuyo trabajo aún no se había publicado en aquel tiempo.

2. Comparando las expresiones (63.1) y (63.2), obtenemos

$$n = c/u. \quad (63.3)$$

Por lo tanto, el índice de refracción de una substancia es igual a la razón de la velocidad de la luz en el vacío a la velocidad de la luz en dicha substancia.

Teniendo en cuenta que, según (59.2), la velocidad de la luz en una substancia es $u = c/\sqrt{\epsilon}$, resulta que

$$n = \sqrt{\epsilon}. \quad (63.4)$$

Con esto hemos expresado el índice de refracción de la substancia por medio de su permitividad o constante dieléctrica (fórmula de Maxwell).

3. La disminución de la velocidad de la luz en un medio ópticamente homogéneo, en comparación con su velocidad en el vacío, se explica del modo siguiente. La onda electromagnética al entrar en la substancia excita oscilaciones forzadas en los electrones, los cuales, en virtud de esto,

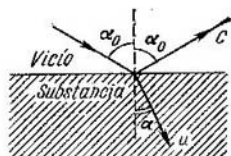


Fig. 63.1.

omiten ondas secundarias. Como en el medio ópticamente homogéneo la distancia entre las partículas es menor que la longitud de onda luminosa, serán coherentes la onda primaria y las secundarias. La interferencia entre ellas tiene por consecuencia la variación de la velocidad de la onda, dependiente de la frecuencia de la onda primaria.

Pero el cálculo de la figura de interferencia en este caso es muy difícil, por lo que en el § 63.5 estudiaremos la teoría de la dispersión, que es más fácil, aunque algo formal.

§ 63.2. Factores de reflexión y transparencia

1. Veamos cómo se redistribuye la energía entre las ondas reflejada y refractada. Para simplificar el cálculo nos limitaremos al caso en

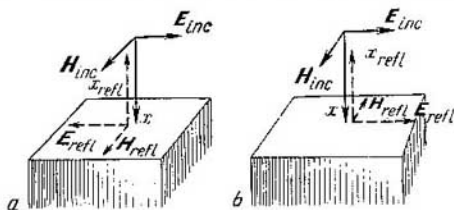


Fig. 63.2.

que la onda incide normalmente sobre la superficie de separación de dos medios con índices de refracción n_1 y n_2 . Se supone que ambos medios son dieléctricos.

Como los vectores del campo E y H son paralelos al límite de separación de ambos medios (fig. 63.2), en el límite mismo no experimentan «salto». La condición de continuidad se escribe así:

$$E_{inc} \pm E_{refl} = E_{refr}, \quad H_{inc} \mp H_{refl} = H_{refr}. \quad (63.5)$$

En otras palabras, la suma algebraica de los vectores intensidad de las ondas incidente (E_{inc}) y reflejada (E_{refl}) es igual a la intensidad del campo en la onda refractada (transmitida) (E_{refr}). Esto también es correcto para la componente magnética.

2. En la onda reflejada uno de los vectores del campo cambia de signo, lo que significa que esta componente de la onda reflejada cambia su fase por la opuesta. La causa de esto consiste en que los vectores del campo E y H forman con el sentido en que se propaga la onda (en la fig. 59.1, según el eje de abscisas) un sistema dextrógiro, y como en la reflexión cambia de signo el sentido en que se propaga la onda, tiene que cambiar también el signo de uno de los vectores del campo: el E (fig. 63.2, a) ó el H (fig. 63.2, b). Teniendo en cuenta la condición

(59.4), de la que se sigue que $H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0/\mu\mu_0}E$, escribimos la ecuación (63.5), así:

$$E_{\text{inc}} + E_{\text{refl}} = E_{\text{refr}}, \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}}(E_{\text{inc}} - E_{\text{refl}}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\mu_2\mu_0}}E_{\text{refr}}. \quad (63.6)$$

3. Para los dieléctricos $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ y $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$. Resolviendo el sistema de ecuaciones (63.6) para esta condición, obtenemos

$$E_{\text{refl}} = E_{\text{inc}} \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}, \quad H_{\text{refl}} = -H_{\text{inc}} \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}. \quad (63.7)$$

De acuerdo con (59.8) expresamos la intensidad de la onda reflejada $I_{\text{refl}} = E_{\text{refl}} H_{\text{refl}}$ por medio de la intensidad de la onda incidente $I_{\text{inc}} = E_{\text{inc}} H_{\text{inc}}$:

$$I_{\text{refl}} = I_{\text{inc}} \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2. \quad (63.8)$$

La intensidad de la onda transmitida (refractada) cuando la luz incide normalmente

$$I_{\text{refr}} = I_{\text{inc}} - I_{\text{refl}} = I_{\text{inc}} \frac{4n_2n_1}{(n_2 + n_1)^2}. \quad (63.9)$$

4. Introducimos los conceptos de factores de reflexión y transparencia:

$$R = \frac{I_{\text{refl}}}{I_{\text{inc}}} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2, \quad T = \frac{I_{\text{refr}}}{I_{\text{inc}}} = 1 - R = \frac{4n_2n_1}{(n_2 + n_1)^2}. \quad (63.10)$$

Las magnitudes obtenidas son completamente análogas a las que en el § 56.6 se introdujeron para las ondas elásticas.

§ 63.3. Dispersión

1. Una vez obtenida la relación (63.4), Maxwell no pudo comprobarla, porque en aquel tiempo la permitividad de la mayoría de las sustancias se desconocía o había sido medida con grandes errores. No obstante, comprobar esta relación era uno de los métodos que, junto con las experiencias de medida de la presión luminosa (§ 59.3), podían confirmar que la teoría de Maxwell era correcta. Las primeras mediciones sistemáticas de la permitividad las llevó a cabo L. Boltzmann en los años 1872—1874. Una serie de resultados interesantes fueron obtenidos por los discípulos de A. G. Stoiliétov: N. N. Shíller, en 1874, y P. A. Zilov, en 1875.

Tabla 63.1

Substancia	n	n^2	ϵ	ν
Aire	1,000292	1,000584	1,000576	—
Benceno	1,50	2,25	2,2336	—
Parafina (líquida)	1,48	2,19	2,2	—
Diamante	2,4195	5,855	5,68	—
Cuarzo fundido	1,4587	2,129	3,8	—
Sal gema	1,5412	2,374	6,0	—
Vidrio crown	1,5097	2,280	5,3	—
Vidrio flint	1,7004	2,890	6,9	—
Hielo (-5°C)	1,31	1,716	75 25 5	0 10 kHz 50 kHz
Agua (20°C)	1,333	1,773	80 44	Hasta 1 GHz 19 GHz
Vapor de agua	1,000252	1,0005	1,0060	30 GHz

2. En la tabla 63.1 se dan, para que puedan compararse, las permitividades y los índices de refracción de algunas sustancias. Para el agua y el hielo se indican las frecuencias con las cuales se midió la constante dieléctrica. Todos los índices de refracción se dan para la zona amarilla del espectro (raya del sodio $\lambda_D = 589,6$ nm o raya del helio $\lambda_d = 587,6$ nm, frecuencia $\nu = 5,1 \cdot 10^{14}$ Hz). En aquellos casos en que la frecuencia no se indica, los datos que figuran en la tabla son correctos prácticamente para todas las frecuencias.

3. Vemos que para el aire (que se cita como ejemplo de uno de tantos gases) la relación $n^2 = \epsilon$ se cumple muy bien. Esta relación también la cumplen bien los líquidos y sólidos con enlaces covalentes entre sus átomos (benceno, parafina, diamante y otros).

Las sustancias con red cristalina iónica ya cumplen mal la relación $n^2 = \epsilon$ (cuarzo, sal, vidrio). Las sustancias con moléculas polares (agua, hielo) presentan valores totalmente distintos de n^2 y ϵ . Pero esto no se debe considerar aún como

una contradicción de la teoría de Maxwell. El caso es que, en estas substancias, los valores de n^2 y ϵ se han medido con distintas frecuencias, y a causa de esto pueden no coincidir, como ya escribió Maxwell a propósito de esto.

4. La experiencia demuestra que tanto la permitividad como el índice de refracción dependen de la frecuencia de las oscilaciones de la onda luminosa y, por lo tanto, de la longitud de onda. Pero si el índice de refracción depende de la frecuencia, la velocidad de propagación de la luz en una substancia según (63.3) también depende de la frecuencia. *La dependencia de la velocidad de propagación de la onda respecto de su frecuencia se llama dispersión.* Por la misma razón se puede llamar dispersión la dependencia de la velocidad de la onda respecto de su longitud.

§ 63.4. Dispersión y descomposición espectral

1. La dispersión va acompañada de la descomposición espectral de la luz no monocromática (por ejemplo, blanca) en sus componentes sinusoidales. La causa de esto es que a cada frecuencia corresponde un índice de refracción, por lo que los rayos correspondientes a distintas frecuencias se desvían de la dirección inicial en ángulos diferentes.

Supongamos, por ejemplo, que sobre la superficie del agua incide un rayo de luz blanca procedente del aire; el ángulo de incidencia $\alpha = 80^\circ$. Hallamos el ángulo de refracción para la luz roja ($\lambda = 670,8$ nm, $n_r = 1,33$) y para la luz violeta ($\lambda = 404,7$ nm, $n_v = 1,34$). Aplicando la ley de la refracción (63.2), obtenemos los valores de los ángulos de refracción:

$$\text{sen } \alpha_r = (\text{sen } 80^\circ)/1,33 = 0,7405, \quad \alpha_r = 47^\circ 46';$$

$$\text{sen } \alpha_v = (\text{sen } 80^\circ)/1,34 = 0,7350, \quad \alpha_v = 47^\circ 19'.$$

Vemos que los rayos violeta se desvían más de la dirección inicial que los rayos rojos debido a lo que la luz blanca se descompone en los armónicos que la constituyen.

2. La aparición del espectro al refractarse la luz blanca en el vidrio es un fenómeno que, por lo visto, fue observado ya en la antigüedad remota. Pero hasta Newton nadie se ocupó seriamente de este problema. En 1666, Newton «consiguió un prisma triangular de vidrio para hacer con él experimentos sobre los célebres fenómenos de los colores».

según escribió él mismo en sus memorias «Nueva teoría de la luz y de los colores». Descomponiendo con el prisma la luz blanca en su espectro, Newton demostró que los colores «homogéneos» (ondas monocromáticas decimos ahora) no se descomponen ya en colores componentes.

La diferente «refringencia» de la luz de distinto color la explicó Newton suponiendo que la luz roja está formada por partículas (corpúsculos) grandes, y la violeta, por corpúsculos pequeños. Al ser atraídas por la substancia, las partículas violetas, menos pesadas, se desvían más que las rojas, cuya masa es mayor. Y aunque desde las posiciones actuales el fenómeno de la dispersión se explica de un modo totalmente distinto, no pueden menoscabarse los méritos de Newton en la rama de la óptica como científico descubridor e investigador de una serie de fenómenos nuevos, para explicar los cuales intentó crear una teoría armoniosa.

§ 63.5. Teoría electrónica de la dispersión

1. En el vacío todas las ondas electromagnéticas se propagan con la misma velocidad c independientemente de sus frecuencias; la dispersión se produce en la substancia. Por consiguiente, la dispersión, lo mismo que otras propiedades de la substancia, debe poder explicarse basándose en la estructura de ésta.

La teoría de la dispersión basada en la teoría electrónica clásica fue creada por el eminente científico H. A. Lorentz a finales del siglo XIX y principios del XX. Como base tomó las siguientes consideraciones.

2. Entre ϵ y n^2 sólo se observa una gran diferencia en las substancias que tienen moléculas polares, en el caso en que ϵ se mide con frecuencias que difieren mucho de las frecuencias de las ondas luminosas. Pero si se mide el índice de refracción de la substancia en la banda óptica (luz visible y regiones lindantes con ella de las zonas infrarroja y ultravioleta), éste será aproximadamente el mismo tanto en las substancias con moléculas polares como en las de moléculas no polares (véase la tabla 63.1). De aquí concluimos que la polarizabilidad dipolar, característica de las substancias de moléculas polares (§ 38.6), sólo tiene lugar en un campo estático o en campos alternativos de frecuencia relativamente pequeña. En los campos de alta frecuencia ya no tiene tiempo de girar el dipolo molecular, el grado de orientación

de estos dipolos disminuye y, respectivamente, disminuye también la permitividad; en el hielo, por ejemplo, disminuye en 15 veces al variar la frecuencia desde cero hasta 50 kHz (véase la tabla 63.1).

Así, en la gama de frecuencias ópticas, la presencia o ausencia de momento dipolar en las moléculas, así como la existencia de enlace iónico o covalente entre las partículas del cristal o del líquido, dejan de desempeñar papel y la polarización de la sustancia se produce únicamente a expensas de la deformación de la nube electrónica (§ 38.5).

3. Para explicar la dependencia del índice de refracción de la sustancia respecto de la frecuencia (es decir, la dispersión) vamos a analizar el mecanismo de la polarización del átomo o la molécula en el campo electromagnético de la onda luminosa. Supongamos que el vector luz (§ 61.2) efectúa las oscilaciones

$$E = E_0 \cos \omega t. \quad (63.11)$$

Bajo la acción de la fuerza eléctrica $F = eE = eE_0 \cos \omega t$, los electrones empiezan a realizar en los átomos oscilaciones forzadas (§ 53.4). La acción de la componente magnética, como se demostró en el § 61.2, se puede despreciar. Las oscilaciones forzadas de la nube electrónica se efectúan según la ley (§ 53.4)

$$l = A \cos \omega t = \frac{F_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \quad (63.12)$$

Aquí ω_0 es la frecuencia angular propia de las oscilaciones de la nube electrónica y ω , la frecuencia angular de las oscilaciones de la onda. La variación de la fase inicial de $\varphi_0 = 0$, cuando $\omega < \omega_0$, a $\varphi = \pi$, cuando $\omega > \omega_0$, la tenemos en cuenta introduciendo el signo en la amplitud.

4. El momento dipolar de la molécula inducido por el campo realiza oscilaciones siguiendo la misma ley:

$$p_e = el = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E. \quad (63.13)$$

Comparando esta expresión con la fórmula (38.18), obtenemos el valor de la polarizabilidad de la molécula:

$$\alpha = \frac{p_e}{e_0 E} = \frac{e^2}{m e_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (63.14)$$

La permitividad $\varepsilon = n^2$, de acuerdo con (38.20), será

$$n^2 = \varepsilon = 1 + n_0\alpha = 1 + \frac{e^2 n_0}{m\varepsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (63.15)$$

Esta es la *ley de la dispersión*. En ella la concentración de moléculas se designa por n_0 para diferenciarla del índice de refracción n .

5. La susceptibilidad eléctrica de los gases $\kappa = n_0\alpha$ es mucho menor que la unidad, lo que permite simplificar la expresión (63.15). En efecto, $n^2 - 1 = \kappa$, o $(n - 1)(n + 1) = \kappa$. Pero $n + 1 \approx 2$, por consiguiente, $n - 1 = \kappa/2$, o

$$n = 1 + \frac{\kappa}{2} = 1 + \frac{e^2 n_0}{2m\varepsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (63.15')$$

§ 63.6. Dispersión normal y anómala

1. La expresión (63.15) permite explicar el fenómeno de la dispersión. Como puede verse, el índice de refracción depende de la frecuencia angular de las oscilaciones del campo electromagnético en la onda luminosa.

Al deducir la ley de la dispersión sólo se tuvo en cuenta la acción del campo eléctrico sobre la nube electrónica de la molécula, y no se tomó en consideración la interacción entre las moléculas. Por lo tanto, la ley de la dispersión obtenida en el párrafo anterior sólo es de hecho correcta para los gases. Pero cualitativamente, para esclarecer el mecanismo del proceso (y no para los cálculos) vamos a utilizar también la fórmula (63.15) para los líquidos y los sólidos.

2. La gráfica de la ley de la dispersión (63.15') se muestra en la fig. 63.3 por medio de líneas de trazos. Vemos que cuando la frecuencia de la onda es menor que la frecuencia propia de las oscilaciones de la nube electrónica ($\omega < \omega_0$), el índice de refracción es mayor que la unidad. Cuando $\omega \rightarrow \omega_0$, el índice de refracción crece ilimitadamente. Pero si la frecuencia de la onda es mayor que la frecuencia propia ($\omega > \omega_0$), el índice de refracción es menor que la unidad, y cuando $\omega \rightarrow \omega_0$ dicho índice se convierte en una magnitud negativa, lo que carece de sentido.

Elégamos a la conclusión de que la expresión (63.15) sólo tiene sentido cuando se da la condición de que la frecuencia de la onda difiere considerablemente de la frecuencia propia de las oscilaciones de la nube electrónica. En el caso en que $\omega \approx \omega_0$ se obtiene un resultado absurdo. Esto

está de acuerdo totalmente con el análisis efectuado en el § 53.2, según el cual, durante la resonancia no se puede utilizar la expresión (63.12) ni su consecuencia (63.15). Aquí hay que tener en cuenta la existencia del amortiguamiento, cuya magnitud, expresada por el factor de calidad, determina la amplitud de las oscilaciones durante la resonancia.

3. Una teoría más exacta de la dispersión, que no vamos a exponer aquí, toma en consideración la existencia del amortiguamiento y conduce a la dependencia correcta del

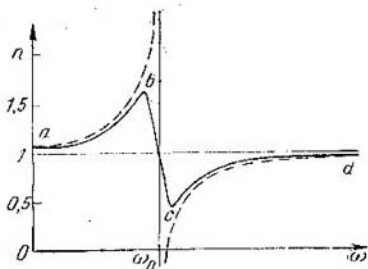


Fig. 63.3.

índice de refracción respecto de la frecuencia en toda la gama de frecuencias. La gráfica de esta función se muestra en la fig. 63.3 con línea continua. Esta gráfica recibe el nombre de *curva de dispersión*.

Como puede verse, en los trozos ab y cd , donde la frecuencia de la onda difiere mucho de la de resonancia, el índice de refracción crece al aumentar la frecuencia de la onda. Estos trozos se llaman zonas de dispersión *normal*. El trozo bc , próximo a la frecuencia de resonancia, se caracteriza porque, al crecer la frecuencia, el índice de refracción disminuye. Este trozo recibe el nombre de zona de dispersión *anómala*.

Advertimos que, desde el punto de vista de la teoría electrónica, en esto no hay nada anormal, la zona bc se manifiesta tan regularmente como las ab y cd . Lo que ocurre es que hasta mediados del siglo XIX no se habían observado estas zonas de la curva de dispersión, y los físicos, desde los tiempos de Newton, se habían acostumbrado a pensar que al crecer la frecuencia (o disminuir la longitud de onda),

el índice de refracción debe aumentar. Por esto, cuando, en el año 1862, F. P. Leroux descubrió en el vapor de yodo que con el crecimiento de la frecuencia decrecía el índice de refracción, dio a este fenómeno insólito el nombre de dispersión anómala.

§ 63.7. Absorción de la luz

1. En el § 55.4 se estudió el fenómeno del amortiguamiento de las ondas y se obtuvo la ley del amortiguamiento para una onda plana (ley de Bouguer) $I = I_0 e^{-\mu x}$ (véanse (55.16) y (55.17)). Al deducir

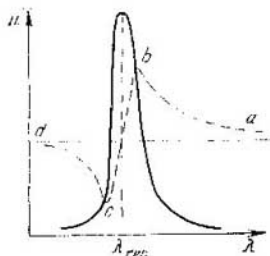


Fig. 63.4.

esta ley no se tuvo en cuenta en ninguna parte el mecanismo de propagación de la onda, por lo que la ley de Bouguer resulta ser correcta no sólo para las ondas elásticas, sino también para las electromagnéticas.

2. La experiencia demuestra que el coeficiente de absorción depende de la frecuencia de la onda, en otras palabras, a la vez que la dispersión del coeficiente de refracción existe la dispersión del coeficiente de absorción. En la fig. 63.4 se muestra la dependencia del coeficiente de absorción respecto de la longitud de onda $\lambda = 2\pi c/\omega$. En la misma figura, para que pueda compararse, se muestra con línea de trazos la relación de dispersión del índice de refracción sobre la escala de longitudes de onda. Las zonas de dispersión normal y anómala se indican con las mismas letras que en la fig. 63.3.

Vemos que la absorción máxima de las ondas luminosas tiene lugar en la zona de dispersión anómala bc . Este fenómeno es consecuencia de la propiedad general de las oscilaciones forzadas: el sistema absorbe la máxima potencia durante la resonancia (§ 54.8). El mecanismo de la absorción de la luz por los átomos y las moléculas se estudiará más detalladamente en la mecánica cuántica (véanse los cap. 71 y 72).

3. Los átomos y las moléculas no tienen una sola frecuencia propia, sino un conjunto de ellas (§ 74.4). En las proximidades de cada una de estas frecuencias aumenta bruscamente el coeficiente de absorción. La medida del coeficiente de absorción es el único método para determinar las frecuencias propias de los átomos, de las moléculas, de los cristales, etc.

En los sólidos o en las disoluciones, en virtud de la fuerte interacción entre los átomos o las moléculas, las zonas de dispersión anómala se ensanchan y convierten en franjas de absorción, entre las cuales se encuentra zona de frecuencias que se absorben débilmente. En esto se basa la acción de los *filtros ópticos*. Estos pueden ser láminas de vidrio con adición de distintas sales, películas de plástico que contienen colorantes orgánicos o disoluciones de colorantes en agua, alcohol u otros disolventes. En dependencia de su composición química, el filtro óptico deja pasar solamente una zona determinada de frecuencias y absorbe las demás.

§ 63.8. Velocidad de fase y de grupo

1. Ya hemos dicho que la luz no es una onda sinusoidal, sino un conjunto de trenes de ondas, y demostramos que un tren de ondas se puede representar, en primera aproximación, como un «trozo de pulsación» (§ 61.3). Pero al «trozo de pulsación», y por consiguiente al tren de ondas, corresponde un conjunto de frecuencias (y un conjunto de números de onda); por esto se plantea el problema de qué debe entenderse por velocidad de un tren de ondas en una substancia.

En efecto, mientras investigábamos la propagación del tren de ondas en el vacío, todo estaba claro, porque, independientemente de la frecuencia, todas las ondas luminosas se propagan en el vacío con la velocidad c , y ésta es también la velocidad del tren. Pero en la substancia, en virtud de la dispersión, las velocidades de las dos componentes sinusoidales del tren de ondas resultan ser distintas y es necesario determinar lo que se entiende por velocidad del tren.

2. La velocidad u de una onda sinusoidal se llamará en adelante *velocidad de fase*. De (56.6) se sigue que

$$u = \omega/k. \quad (63.16)$$

Llamaremos *velocidad de grupo* U de un tren (grupo o paquete) de ondas, a la velocidad de transporte de la energía por dicho tren.

Para determinar la velocidad de grupo recurrimos a las ecuaciones (61.2) y (61.3), que describen la ley de propagación del «trozo de pulsación» y, por consiguiente, del tren de ondas. De (61.3) se sigue que la amplitud de la pulsación se propaga en forma de una onda llamada *onda de amplitud*:

$$B = 2E_0 \cos(\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x). \quad (63.17)$$

La velocidad de propagación de la onda de amplitud es precisamente la velocidad de grupo. Por analogía con (63.16) obtenemos para la velocidad de grupo la expresión

$$U = \frac{d\omega}{dk} = \omega'(k). \quad (63.18)$$

Como la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, la velocidad de propagación de la energía será igual a la velocidad de la onda de amplitud, o sea, a la velocidad de grupo.

3. Siendo la velocidad de fase $u = c/n$ (véase (63.3)), en la región de las frecuencias grandes, donde $n < 1$ (véase la fig. 63.3), esta velocidad resulta ser mayor que la velocidad de la luz en el vacío. A primera vista puede parecer que, con esto, pueden existir señales cuya velocidad sea $u > c$, lo que contradice el postulado principal de la teoría de la teoría de la relatividad acerca del carácter de límite que tiene la velocidad de la luz en el vacío (§ 12.6).

Sin embargo, aquí no hay ninguna contradicción. *Toda onda portadora de información* (es decir, toda señal) *está modulada* (§ 50.2 y 60.2) y su propagación se caracteriza no por la velocidad de fase, sino por la velocidad de grupo. La expresión (63.18) se reduce a la forma

$$U = \frac{c}{n + \omega \cdot (dn/d\omega)}. \quad [(63.18)']$$

En la zona de dispersión normal $dn/d\omega > 0$, como puede verse en la fig. 63.3. Resulta entonces que aquí $n + \omega \cdot (dn/d\omega) > 1$ y, por consiguiente, $U < c$. Así, pues, en la zona de la dispersión normal, la velocidad de grupo es menor que la velocidad de la luz en el vacío, lo que está en completo acuerdo con la teoría de la relatividad.

En la zona de la dispersión anómala el concepto de velocidad de grupo pierde su sentido. Pero la teoría rigurosa demuestra que también en este caso la velocidad de la señal es menor que la de la luz en el vacío.

§ 63.9. Medida de la velocidad de la luz

1. Para determinar la velocidad de la luz hay que hallar el tiempo τ durante el cual recorre la luz una distancia l y dividir esta distancia por el tiempo. Pero debido a la enorme magnitud de la velocidad de la luz, hay que medir distancias astronómicas (si τ es grande) o intervalos de tiempo muy pequeños (si las distancias l son del orden de las escalas terrestres).

2. La primera medición de la velocidad de la luz por el método astronómico se debe a Ole Roemer (1676). Éste se dio cuenta de que los intervalos de tiempo entre dos eclipses consecutivos de uno de los satélites de Júpiter, Io, aumentan cuando la Tierra se aleja de Júpiter y disminuyen cuando Júpiter y la Tierra se aproximan. Roemer llegó a la conclusión correcta de que el retraso es igual al tiempo adicional que invierte la luz en recorrer la distancia a que se aleja la Tierra durante el eclipse.

Sean $T_1, T_2, T_3, \dots, T_N$ los intervalos de tiempo observados entre las fases iguales de dos eclipses consecutivos del satélite cuando la Tierra se aleja de Júpiter; T , el período de revolución del satélite, y N , el número de eclipses que se observan en medio año. Entonces

$$t_1 = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_N = NT + D/c.$$

Respectivamente, durante el otro medio año, en que la Tierra se acerca a Júpiter, tenemos:

$$t_2 = T'_1 + T'_2 + T'_3 + \dots + T'_N = NT - D/c.$$

Restando la segunda expresión de la primera eliminamos el período, desconocido por nosotros, de revolución del satélite. Así,

$$\tau = (t_1 - t_2)/2 = D/c. \quad (63.19)$$

Roemer halló que $\tau = 1320$ s. Conociendo el diámetro de la órbita de la Tierra $D = 298,9 \cdot 10^6$ km, obtenemos la

velocidad de la luz

$$c = \frac{D}{\tau} = \frac{298,9 \cdot 10^3}{1320} = 227 \cdot 10^3 \text{ km/s.}$$

Según medidas más exactas del retraso, efectuadas por Samison en 1909, el intervalo de tiempo $\tau = 997,6$ s, de donde se sigue que

$$c = \frac{D}{\tau} = \frac{298,9 \cdot 10^3}{997,6} \approx 300 \cdot 10^3 \text{ km/s.}$$

3. También fueron elaborados métodos de laboratorio para determinar la velocidad de la luz: por interrupción y con un espejo giratorio. Por el método de la interrupción (fig. 63.5) la luz del foco F se hace pasar a impulsos por el

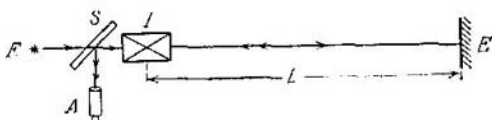


Fig. 63.5.

interruptor I , recorre cierta distancia L y, después de reflejarse en el espejo E , retorna al interruptor. Si éste funciona periódicamente y su período es T , la luz reflejada pasará por él si el tiempo transcurrido durante el movimiento de la señal $\tau = 2L/c$ es igual al período, es decir, $T = \tau = 2L/c$. En este caso la luz pasa por el interruptor, se refleja en el espejo semitransparente S y llega al anteojo A . La velocidad de la luz

$$c = 2L/\tau = 2L/T = 2Lv, \quad (63.20)$$

donde $v = 1/T$ es la frecuencia de las interrupciones.

En 1849, H. L. Fizeau utilizó como interruptor una rueda dentada giratoria. El resultado que obtuvo, $c = 313 \cdot 10^3$ km/s, es bueno para aquel tiempo. En la actualidad, como interruptores se emplean obturadores ópticos regulados por dispositivos radioelectrónicos complejos. Esto ha permitido elevar ostensiblemente la exactitud de las mediciones. En 1950, E. Bergstrand, utilizando $L = 7$ km, obtuvo para la velocidad de la luz en el vacío el valor

$$c = 299\,793,1 \pm 0,25 \text{ km/s.}$$

4. El método del espejo giratorio se utilizó por primera vez en el dispositivo de J. L. Foucault, en 1862. Se consiguió disminuir L hasta 4 m, comunicándole al espejo 800 revoluciones por segundo. Haciendo pasar la luz a través de un tubo lleno de agua, Foucault demostró que la velocidad de la luz en ella es menor que en el aire, lo que está en completo acuerdo con las deducciones de la teoría ondulatoria de la luz (véase (63.3)).

A. A. Michelson perfeccionó el método del espejo giratorio. El esquema de su dispositivo se muestra en la fig. 63.6.

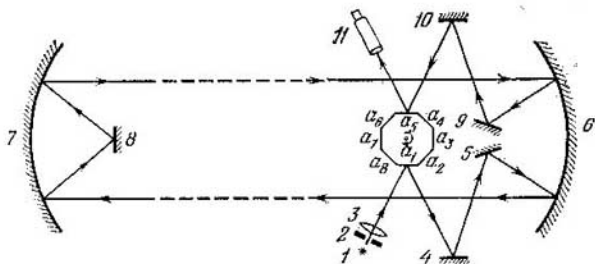


Fig. 63.6.

El haz de luz procedente del foco 1 pasa a través del diafragma 2 y del sistema de enfoque 3 e incide sobre la cara a_1 del espejo prismático octogonal giratorio. El haz reflejado en la cara a_1 va a parar al espejo 4 y luego, como se ve en la figura, se mueve siguiendo el sistema de espejos $5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10$ hasta llegar a la cara a_5 del espejo prismático octogonal. Después de reflejarse en esta cara, la luz penetra en el anteojo 11 .

Los espejos cóncavos 6 y 7 se situaron en dos montes separados entre sí por la distancia $L = 35\,373,21$ m. La velocidad de rotación del espejo prismático octogonal era $v = 528$ r.p.s. Durante el tiempo τ en que la luz recorría dos veces la distancia entre los montes, el espejo giraba $1/8$ de vuelta, de manera que en el lugar de la cara a_5 resultaba estar la cara a_6 y a través del anteojo 11 , se veía la luz. El tiempo que tardaba en efectuarse el octavo de vuelta

era $\tau = \frac{1}{8v} = \frac{1}{8 \cdot 528}$ s; la distancia recorrida por la luz era $l = 2L = 2 \cdot 35\,373,21$ m. La velocidad de la luz $c = l/\tau = 16 Lv$. Teniendo en cuenta el error experimental, Michelson obtuvo, en 1926, para la velocidad de la luz el valor

$$c = 299\,796 \pm 4 \text{ km/s.}$$

5. En todas las experiencias para medir la velocidad de la luz, la señal luminosa se divide en impulsos. En el método de Roemer las interrupciones se producen a expensas de los eclipses; en el método de Michelson, a expensas de la rotación del espejo, etc. Por consiguiente, en el experimento se mide la velocidad del paquete de ondas, es decir, la *velocidad de grupo*. La velocidad de fase de la luz en la misma substancia se puede calcular midiendo previamente el índice de refracción n y la dispersión $dn/d\omega$ por medio de algún interferómetro (§§ 61.8 y 61.9). Por la velocidad de fase y el índice de refracción se calcula después la velocidad de la luz en el vacío.

6. Un procedimiento nuevo de medir la velocidad de la luz ha sido posible después de crear los generadores cuánticos (§ 79.4). La idea de este procedimiento es muy sencilla: hay que medir, independientemente una de otra, la longitud de onda y la frecuencia y, luego, por la fórmula $c = \lambda\nu$ (véase (56.3)), calcular la velocidad de la luz.

Las medidas exactas de la longitud de onda conviene hacerlas en la banda óptica por medio de interferómetros (§ 61.8); las mediciones más exactas de la frecuencia se hacen en la banda radiotécnica, en la cual se toma como patrón de frecuencia la de la radiación del generador cuántico de cesio (cuya longitud de onda es de 3,27 cm). Después, mediante convertidores no lineales, análogos a un detector (§ 60.5), se compara la frecuencia de la radiación óptica con el patrón.

A finales del año 1972, por este procedimiento se midió la velocidad de la luz en el vacío con un grado de exactitud muy elevado:

$$c = 299\,792\,456,2 \pm 1,1 \text{ m/s.}$$

POLARIZACIÓN DE LA LUZ

§ 64.1. Luz polarizada y natural

1. A diferencia de la onda longitudinal elástica, en que las oscilaciones de las partículas se producen a lo largo del rayo, en la onda transversal las partículas oscilan en direcciones perpendiculares al rayo (§ 55.1). Si nos figuramos, por ejemplo, que el rayo está dirigido a lo largo del eje de abscisas, para la onda longitudinal todas las direcciones en el plano yz serán equivalentes, mientras que en la onda transversal existe una dirección prevaleciente a lo largo de la cual se producen las oscilaciones del vector luz, es decir, del vector intensidad del campo eléctrico (§ 61.2).

Habitualmente se llama *plano de oscilaciones* aquel en que oscila el vector de campo eléctrico E . Por razones históricas, el plano en que oscila el vector de campo magnético H se llama *plano de polarización*. El plano de oscilaciones de la onda que emite una carga oscilante o un dipolo (véase la fig. 59.4) pasa por el rayo y el vector aceleración. Dando el rayo y el plano de oscilaciones queda automáticamente dado también el plano de polarización.

2. Una onda electromagnética con las direcciones de oscilación de los vectores E y H rigurosamente fijas, se dice que es una *onda polarizada rectilíneamente*. A veces en lugar de este término se utiliza el de *onda polarizada plana*. Si se trata de ondas luminosas, se dice *luz polarizada rectilínea*.

3. Los átomos radian la luz por trenes de ondas separados (§ 61.2). Por eso la luz emitida por un cuerpo formado por multitud de átomos es la suma de un gran conjunto de trenes de ondas. Pero en la substancia no existe un mecanismo concordador de la radiación de los átomos aislados; al contrario, los átomos radian independientemente unos de otros y todo el proceso de radiación tiene carácter fortuito, estadístico.

En el § 61.6 se demostró que el mecanismo estadístico de la radiación de la luz ocasiona un cambio desordenado de la fase de la onda, a consecuencia del cual la luz, en general, no es coherente. El carácter estadístico de la ra-

diación de la luz hace también que cada tren de ondas tenga su plano de oscilaciones, y que la onda luminosa, como conjunto de dichos trenes, tenga un plano de oscilaciones que cambia desordenadamente.

Vemos, pues, que la onda que emiten las fuentes ordinarias de luz no está polarizada: sus vectores de campo no oscilan en una dirección fija, sino desordenadamente en todas las direcciones perpendiculares al rayo. Toda onda luminosa cuyo vector de campo eléctrico (y, respectivamente, magnético) oscile en una dirección caóticamente cambiante, de manera que para él sean igualmente probables todas las direcciones de oscilación en un plano perpendicular al rayo, se llama *luz natural* (no polarizada).

§ 64.2. Analizador. Ley de Malus

1. Figurémonos un cordón de goma por el cual avanza una onda transversal. Aunque el cordón fuera invisible, valiéndonos del dispositivo representado en la fig. 64.1

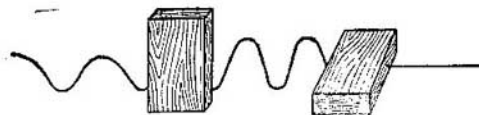


Fig. 64.1.

podríamos determinar la posición del plano de oscilaciones. Cuando el plano de oscilaciones coincide con el plano de la ranura formada por las dos tablas paralelas, la onda pasa a través del dispositivo; en cambio, si se hacen girar las tablas 90° , las oscilaciones se eliminan y la onda no pasa a través de la ranura.

Análogamente, si nos valemos de una antena de dipolo sintonizada en resonancia con la onda, se puede determinar la posición del plano de oscilaciones de una onda electromagnética polarizada rectilíneamente. Cuando el dipolo se coloca de manera que se encuentre en el plano de oscilaciones (fig. 64.2, a), la lámpara se enciende. En este caso las oscilaciones del vector de campo eléctrico, dirigido a lo largo del conductor, inducen en éste oscilaciones forzadas, es decir, corriente de alta frecuencia. La corriente pasa por

el filamento de la lámpara, lo pone incandescente, y hace que la lámpara se encienda. Si el dipolo se gira 90° , el vector intensidad del campo eléctrico resulta perpendicular al conductor (fig. 64.2, b). En estas condiciones no puede producirse corriente en el conductor y la lámpara se apaga.

Este mismo experimento se puede hacer con luz polarizada, como se verá en el § 64.6.

2. El dispositivo con el cual se puede hallar la posición del plano de oscilaciones de una onda polarizada se llama

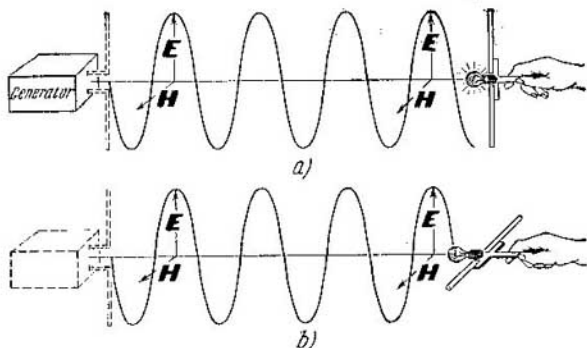


Fig. 64.2.

analizador. En la experiencia antes descrita con la onda elástica en el cordón, sirve de analizador el sistema formado por las dos tablas y la ranura. En el experimento con la onda electromagnética, el papel de analizador lo desempeña la antena en forma de dipolo. El principio de funcionamiento y la estructura del analizador en la banda óptica se estudiará en el § 64.6.

3. Si la antena-analizador del experimento representado en la fig. 64.2, se hace girar lentamente desde la posición *a* hacia la posición *b*, la luminosidad de la lámpara empezará a disminuir suavemente desde el máximo, en la posición *a*, hasta cero, en la posición *b*. Y si se sigue girando el dipolo, la intensidad de la luz volverá a aumentar y alcanzará el máximo cuando el dipolo haya girado 180° . Este fenómeno se explica del modo siguiente.

Supongamos que las oscilaciones del vector de campo eléctrico se producen en dirección vertical con la amplitud E_0 y que la dirección del dipolo-analizador forma un ángulo α con el plano de oscilaciones (fig. 64.3). El vector E_0 se descompone en dos componentes: una, E , a lo largo de la antena, y otra, E_{\perp} , perpendicular a ella. Como se ve en el dibujo,

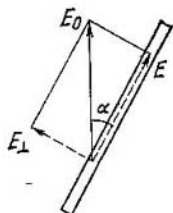


Fig. 64.3.

$$E = E_0 \cos \alpha, \quad E_{\perp} = E_0 \sin \alpha. \quad (64.1)$$

Las oscilaciones de la corriente en la antena sólo las provoca una de las componentes del campo, el vector E dirigido a lo largo de la antena. Bajo la acción del vector E_{\perp} no se producen ningunas oscilaciones en la antena.

4. Se recordará que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud (§ 55.3). Designando la intensidad de la onda por $I_0 = kE_0^2$ y la intensidad de las oscilaciones en la antena por $I = kE^2$, tenemos que

$$I/I_0 = E^2/E_0^2. \quad (64.2)$$

Comparando esta proporción con la primera igualdad del sistema (64.1), resulta que

$$I = I_0 \cos^2 \alpha. \quad (64.3)$$

Así, la intensidad de la onda que pasa por el analizador es proporcional al cuadrado del coseno del ángulo entre el plano de oscilaciones y el eje del analizador (*ley de Malus*).

§ 64.3. Doble refracción

1. Existe una serie de cristales en los cuales un rayo de luz, al refractarse, se divide en dos rayos con propiedades distintas. Estos cristales se llaman birrefringentes y a ellos pertenecen la calcita (CaCO_3 , llamada también espato de Islandia), el cuarzo y otros.

La calcita es un cristal con red hexagonal (§ 33.2); el eje de simetría del prisma hexagonal que forma su celdilla (véanse las figs. 33.4 y 32.3) se llama *eje óptico*.

2. De un cristal de calcita cortamos una lámina de tal modo, que sus caras sean perpendiculares al eje óptico

(fig. 64.4, a). La vista lateral de esta lámina y la dirección del eje óptico se muestran en la fig. 64.4, b. Hay que advertir que el eje óptico no es una línea, sino una dirección en el cristal. Cualquier recta $M'N'$ paralela a la dirección MN también será eje óptico.

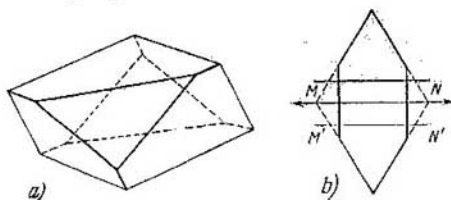


Fig. 64.4.

Llamaremos *plano principal* del cristal el plano que pasa por el rayo de luz y por el eje óptico del cristal.

3. Si un rayo de luz se dirige a lo largo del eje óptico en él no se produce ninguna variación en virtud de la total simetría de la estructura de la substancia respecto de esta

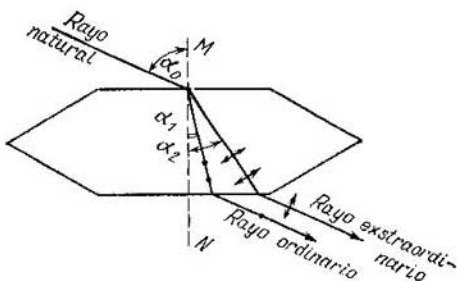


Fig. 64.5.

dirección. Pero si el rayo se dirige formando ángulo con el eje óptico, se divide en dos (fig. 64.5), uno de los cuales se llama *rayo ordinario* y el otro, *rayo extraordinario*. La causa de que así se llamen es la siguiente.

La ley de la refracción $\text{sen } \alpha_0 = n \text{ sen } \alpha$ (63.2) la cumplen de distinto modo estos dos rayos. El índice de refracción

del rayo ordinario no depende del ángulo de incidencia: $n_{ord} = 1,658$ para cualquier ángulo de incidencia. Por consiguiente, la velocidad de la luz a lo largo del rayo ordinario $u_{ord} = c/n_{ord}$ también es la misma en todas las direcciones.

En cuanto al rayo extraordinario, su índice de refracción n_{ext} depende de la dirección en que se propague la luz. Precisamente a lo largo del eje óptico coinciden los índices de refracción de los rayos extraordinario y ordinario ($n_{ext} = n_{ord} = 1,658$), pero en dirección perpendicular al eje óptico $n_{ext} = 1,486$.

De aquí se sigue que, a lo largo del eje óptico, la velocidad de la onda luminosa es la misma para los rayos ordinario y extraordinario, pero en otras direcciones la velocidad, en la calcita, de la onda extraordinaria es mayor que la de la ordinaria. La diferencia máxima entre las velocidades de ambas ondas se produce en la dirección perpendicular al eje óptico. Aquí la velocidad de la onda extraordinaria es un 11,5% mayor que la de la ordinaria.

4. Los datos citados anteriormente se refieren a la luz amarilla de longitud de onda $\lambda = 589,3$ nm. Los índices de refracción para otros largos de onda se dan en la tabla 64.1.

Tabla 64.1

Luz	λ , nm	Calcita		Cuarzo	
		n_{ord}	n_{ext}	n_{ord}	n_{ext}
Roja	670,8	1,6537	1,4843	1,5415	1,5505
Amarilla	589,3	1,6584	1,4864	1,5443	1,5534
Verde	508,6	1,6653	1,4895	1,5482	1,5575
Azul	480,0	1,6686	1,4911	1,5501	1,5594
Violeta	404,7	1,6813	1,4969	1,5572	1,5667

§ 64.4. Causa de la doble refracción

1. Determinemos con un analizador la dirección de las oscilaciones del vector luz (o sea, del vector de campo eléctrico E) de las ondas extraordinaria y ordinaria. Resulta que en la onda ordinaria el vector E oscila perpendicularmente al plano principal, lo que en la fig. 64.5 se indica con puntos sobre el rayo. En la onda extraordinaria el vector de campo eléctrico oscila en el plano principal del cristal, lo que se

indica en la fig. 64.5 con flechitas. La diferencia entre las velocidades de ambas ondas y por tanto de sus índices de refracción, se explica sobre esta base del modo siguiente:

En los cuerpos anisótropos (a excepción de los cristales con red cúbica) la fuerza de interacción entre la nube electrónica y la red es distinta en diferentes direcciones cristalográficas. Como resultado de esto, la frecuencia propia de las oscilaciones de la nube electrónica dependerá de la dirección en que empiecen a oscilar los electrones bajo la acción de la onda luminosa. Y esto, de acuerdo con la fórmula (63.15), hace a su vez que sean distintos índices de refracción y de la velocidad de la onda en direcciones diferentes.

2. Supongamos que las oscilaciones de la nube electrónica en el cristal son excitadas por una onda cuyas oscilaciones son perpendiculares al plano principal; en la fig. 64.5 esta es la onda ordinaria. Admitamos que en este caso la frecuencia propia de las oscilaciones de la nube electrónica no depende de la dirección de las oscilaciones. Entonces, según (63.15), el índice de refracción tampoco dependerá de la dirección del rayo. Vemos, pues, que en este caso la velocidad de propagación de la luz en todas las direcciones será la misma. Estas propiedades precisamente las tiene el rayo ordinario.

3. Supongamos ahora que las oscilaciones de la nube electrónica son excitadas por las oscilaciones que tienen lugar en el plano principal; en la fig. 64.5 ésta es la onda extraordinaria. La experiencia demuestra que en este caso el índice de refracción depende de la dirección del rayo; esto se puede explicar si se supone que la frecuencia propia de las oscilaciones de la nube electrónica depende de la dirección en que oscila el vector E que excita estas oscilaciones.

De la desigualdad de las frecuencias propias se deduce, de acuerdo con (63.15), la desigualdad de los índices de refracción: si $\omega_0^{\text{ext}} \neq \omega_0^{\text{ord}}$, también $n_{\text{ext}} \neq n_{\text{ord}}$; esto también se refiere a las velocidades de estas ondas. Vemos, pues, que basándose en las representaciones electrónicas se puede, por lo menos cualitativamente, explicar el principio de la doble refracción en los cristales.

4. El fenómeno de la doble refracción en la calcita fue descubierto por Erasmo Bartholin en 1669. Huygens, en 1690, propuso la teoría formal del fenómeno partiendo de la suposición de que los dos rayos tienen velocidades distintas, pero no pudo explicar la causa de esto. La idea de que la diferencia de velocidad de propagación de ambos

rayos es motivada por peculiaridades intrínsecas de los mismos rayos se debe a Newton y fue propuesta por él en su célebre «Optica» (1704). En 1808 resucitó Malus la idea de Newton y explicó las particularidades de los rayos que se producen en la doble refracción por sus propiedades «polares», análogas a los polos de un imán. En relación con esto introdujo el concepto de polarización de la luz.

Young y Fresnel, que, valiéndose de los fenómenos de la interferencia y difracción, fundamentaron la naturaleza ondulatoria de la luz, intentaron explicar el fenómeno de la polarización de la luz sobre la base de las representaciones ondulatorias. Ellos comprendieron que para esto había que considerar las ondas luminosas como transversales. Esta propiedad de las ondas luminosas fue establecida por Fresnel mediante una serie de experiencias y razonamientos. Pero crear la teoría del éter elástico, en el que se producen ondas transversales que no tienen componente longitudinal, fue imposible, ya que para esto habría que haber atribuido al éter propiedades contradictorias. Por lo tanto, el fenómeno de la polarización de la luz no encajaba de ningún modo en la teoría del éter elástico transmisor de la luz. Estas contradicciones sólo se lograron eliminar basándose en la teoría electromagnética de la luz, creada por Maxwell, que hizo innecesario el propio concepto de éter. Sin embargo, esto quedó claro únicamente después de la creación de la teoría de la relatividad.

§ 64.5. Dicroísmo

1. Existen cristales que absorben desigualmente los rayos ordinario y extraordinario. Así, si sobre un cristal de turmalina de varios milímetros de espesor se dirige un haz

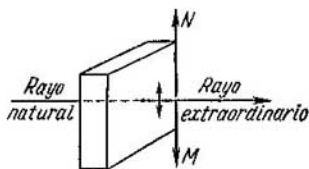


Fig. 64.6.

de luz natural perpendicularmente a la dirección del eje óptico, el rayo ordinario es absorbido totalmente y del cristal sólo emerge el rayo extraordinario (fig. 64.6).

El carácter distinto de la absorción de los rayos ordinario y extraordinario se llama *anisotropía de absorción* o *dicroísmo*.

2. Para explicar este fenómeno recordaremos que la absorción intensa de las ondas electromagnéticas se observa en la zona de dispersión anómala, es decir, cuando la frecuencia de las oscilaciones de la onda está próxima a la frecuencia propia de las oscilaciones de la nube electrónica (§ 63.7). Pero en el párrafo anterior se dijo que en las sustancias anisótropas $\omega_0^{\text{ord}} \neq \omega_0^{\text{ext}}$. Y de aquí se deduce que si, por ejem-

plo, la frecuencia de la onda está próxima a la frecuencia propia de las oscilaciones de la nube electrónica en la dirección perpendicular al plano principal (o sea, $\omega \approx \omega_0^{\text{ord}}$), la componente ordinaria de la onda es absorbida intensamente. La onda extraordinaria, para la cual $\omega \neq \omega_0^{\text{ext}}$, es absorbida mucho más débilmente.

Como se ve, sobre la base de las representaciones electrónicas hemos explicado cualitativamente no sólo la anisotropía de refracción (doble refracción), sino también la anisotropía de absorción (dicroísmo). Está claro que el dicroísmo deben poseerlo en mayor o menor grado todos los cristales birrefringentes, pero en distintas sustancias se manifiesta de distinto modo la anisotropía de absorción.

§ 64.6. Polaroides (polarizador y analizador)

1. Los dispositivos polarizadores (o, simplemente, *polarizadores*) transforman la luz natural en polarizada rectilínea. Todos ellos funcionan según el principio de la separación del rayo ordinario del extraordinario. De ejemplo de polarizador puede servir una lámina de turmalina (§ 64.5).

En la actualidad se utilizan mucho los *polaroides*. Para hacer un polaroide se pega, entre dos láminas de vidrio o de vidrio orgánico, una película de material dicroico que prácticamente absorbe por completo el rayo ordinario; todo este sistema se fija en una montura. La baratura de los polaroides y la posibilidad de fabricar láminas de gran superficie, han hecho que se emplean mucho en la práctica. No obstante, tienen inconvenientes: dan luz coloreada y, además, sólo funcionan bien en una banda espectral relativamente estrecha.

2. Valiéndose de un polaroide se puede analizar el carácter de la polarización de la luz; si resulta que la luz está rectilíneamente polarizada, se puede determinar la dirección en que oscila el vector de campo eléctrico (plano de oscilaciones).

Supongamos que una onda polarizada rectilínea incide sobre un polaroide de tal modo que la dirección de las oscilaciones del vector de campo eléctrico coincide con la dirección del eje óptico del polaroide (fig. 64.7, a); en otras palabras, el plano de oscilaciones coincide con el plano principal del cristal. Esto significa que en el cristal se propaga la onda extraordinaria (§ 64.4), que él absorbe débilmente.

La luz pasará a través del polaroide y será percibida por el ojo. Hacemos girar el polaroide 90° (fig. 64.7, b). Entonces esta misma onda resulta ser ordinaria, ya que el plano de oscilaciones es perpendicular al plano principal del cristal. Pero el polaroide absorbe intensamente la onda ordinaria y la luz no pasa a través de aquél.

3. Se recomienda al lector que analice por su cuenta el caso en que el plano de oscilaciones de la onda polarizada

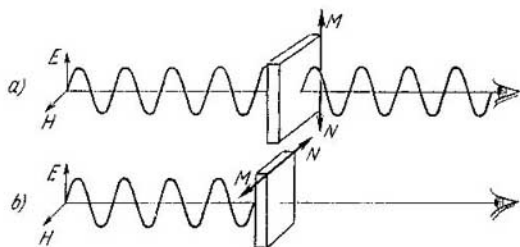


Fig. 64.7.

rectilínea forma un ángulo α con el plano principal del polaroide. Descomponiendo las oscilaciones de la onda en las componentes ordinaria y extraordinaria se puede deducir la ley de Malus para las ondas luminosas (§ 64.2). Por lo tanto, el polaroide puede servir no sólo de polarizador, sino también de analizador.

§ 64.7. Rotación del plano de polarización

1. Intercalemos en el camino que recorre un haz luminoso dos polaroides dispuestos de forma que sus ejes ópticos sean perpendiculares entre sí (polaroides «cruzados»). A través de este sistema de polaroides no pasará la luz: el primer polaroide transforma la luz natural en polarizada rectilínea, la cual es absorbida por el segundo polaroide (fig. 64.8). Coloquemos ahora en el trayecto del haz luminoso una cubeta que contenga una solución de azúcar. Veremos que el campo de visión se aclara. Haciendo girar uno de los polaroides hacia la derecha cierto ángulo α , conseguiremos que el campo de visión vuelva a oscurecerse totalmente.

De este modo llegamos a la conclusión de que, al pasar el haz de luz polarizada rectilínea a través de la solución de azúcar, la luz sigue siendo polarizada rectilínea, pero el plano de oscilaciones y, respectivamente, el plano de polarización (§ 64.1), giran cierto ángulo.

2. Las substancias que hacen girar el plano de polarización se llaman *ópticamente activas*. A los cristales ópticamente activos pertenece, por ejemplo, el cuarzo. Si un

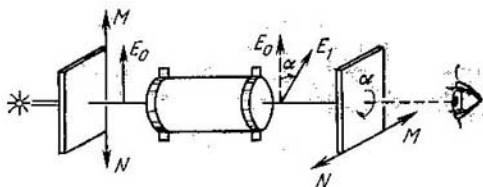


Fig. 64.8.

rayo de luz se propaga a lo largo del eje óptico de una lámina de cuarzo de 1 mm de espesor, el plano de polarización, para distintas longitudes de onda, gira los ángulos siguientes:

Luz	λ , nm	Rotación específica $[\alpha]$
Roja	656,3	17,32°
Amarilla	589,3	21,72°
Azul	486,1	32,76°
Violeta	434,0	41,92°

El ángulo total de rotación del plano de polarización es proporcional al espesor d de la lámina

$$\alpha = [\alpha] d. \quad (64.4)$$

3. La actividad óptica no sólo la manifiestan los cristales, sino también los líquidos (aguarrás, nicotina) e incluso las soluciones acuosas de una serie de substancias, como,

por ejemplo, la sacarosa ($C_{12}H_{22}O_{11}$), la glucosa ($C_6H_{12}O_6$), los ácidos tartárico, málico y mandélico; las soluciones alcohólicas de alcanfor, brucina, estricnina y otras. El ángulo de rotación del plano de polarización se determina por la fórmula

$$\alpha = [\alpha] cd, \quad (64.5)$$

donde c es la concentración, igual al número de gramos de sustancia ópticamente activa por 100 ml de solución.

Como el ángulo de rotación del plano de polarización es proporcional a la concentración de sustancia ópticamente activa en la solución, por medio de aparatos especiales (polarímetros o sacarímetros) se consigue, conociendo el ángulo de rotación, determinar rápida y exactamente dicha concentración.

4. Son ópticamente activas las sustancias cuyas moléculas carecen de centro o plano de simetría; a ellas pertenecen las moléculas de la mayoría de los compuestos orgánicos, las cuales, en mayor o menor grado, todas manifiestan actividad óptica. En este caso son ópticamente activos tanto los cristales de la sustancia dada como sus masas fundidas y sus soluciones.

Pero los cristales ópticamente activos pueden producirse también como resultado de la estructura en espiral de la red cristalina, y no a causa de las propiedades de las moléculas. En este caso sus masas fundidas y sus soluciones no serán ópticamente activas. Así, la actividad óptica del cuarzo sólo se manifiesta en las láminas talladas de monocristales; el cuarzo fundido (en estado amorfo) no es ópticamente activo.

§ 64.8. Actividad óptica en la naturaleza viva

1. Los cristales ópticamente activos siempre se encuentran en dos formas estructurales, una de las cuales es imagen especular de la otra. Al parecer, las sustancias orgánicas ópticamente activas también deberían existir en dos estados semejantes. Sin embargo, la experiencia demuestra que una solución de azúcar siempre hace que el plano de polarización gire hacia la derecha, es decir, en el sentido de las agujas del reloj, si se mira al encuentro del rayo. Esta propiedad no es exclusiva del azúcar, sino que la tienen también todos los demás productos de procedencia orgánica: las

substancias albuminóideas, los aminoácidos, los ácidos nucleicos, etc.

2. Si se hace sintéticamente una substancia análoga (por ejemplo, azúcar), ésta no será ópticamente activa. Sintéticamente se obtiene una mezcla que contiene igual cantidad de moléculas dextrógiras y levógiras. En general, en la naturaleza muerta todas las substancias con moléculas asimétricas existen en forma de mezclas de este tipo.

Si con una mezcla así interacciona un ser vivo, éste asimila solamente una de las estructuras, la que corresponde al carácter de la actividad óptica de los elementos de este ser. Por ejemplo, si en una solución de azúcar sintética se introducen bacterias que se nutren de azúcar, éstas sólo asimilarán el azúcar dextrógiro. Al cabo de cierto tiempo habrá en la solución mucho más azúcar levógiro que dextrógiro, como se puede descubrir por el giro del plano de polarización. Cuando las bacterias asimilan por fin todo el azúcar dextrógiro que hay en la mezcla, empiezan a ayunar, aunque en la solución queda aún mucho azúcar levógiro, porque el organismo de los seres vivos no puede asimilar este azúcar.

3. La asimetría de la actividad óptica es característica únicamente de las substancias biológicas y de los productos de procedencia orgánica. Así, por ejemplo, el hecho de que se haya descubierto que el petróleo es ópticamente activo sirve de argumento sólido en pro de la teoría de su origen orgánico.

La entropía del medio ópticamente activo es menor que la entropía de la mezcla. En efecto, a la distribución uniforme del número de moléculas levógiras y dextrógiras corresponde la máxima probabilidad termodinámica y, con ella, la entropía máxima (véase el cap. 28). En el carácter de la actividad óptica de las substancias biológicas influye la ley general de ordenación de la materia viva, que siempre se halla en estado de desequilibrio y cuya entropía dista mucho de ser máxima.

La causa de la asimetría de la actividad óptica en los seres vivos aún no se ha esclarecido por completo. Es posible que esta asimetría surgiera casualmente y que después se consolidara por medio del mecanismo hereditario.

ÓPTICA GEOMÉTRICA

§ 65.1. Leyes fundamentales de la óptica geométrica. Haz y rayo

1. Todos los problemas de óptica se pueden resolver basándose en las representaciones ondulatorias, como se demostró en los caps. 61—64. Pero esto requiere un formalismo matemático muy grande. Sin embargo, mucho antes de que fuera esclarecida la naturaleza ondulatoria de la luz, los científicos aplicaban ya los métodos geométricos para resolver los problemas de construcción de imágenes en los espejos y lentes y para calcular los instrumentos ópticos. Estos métodos constituyen el contenido de la *óptica geométrica* o *geometría de los rayos luminosos*.

2. La óptica geométrica se basa en tres leyes: la ley de la propagación rectilínea de la luz (en un medio homogéneo), la ley de la reflexión y la ley de la refracción. Las dos últimas son consecuencia de la naturaleza ondulatoria de la luz (§§ 56.5 y 63.1) y, por lo tanto, se pueden aplicar sin limitaciones. En cuanto a la propagación rectilínea de la luz en un medio homogéneo, este postulado sólo puede aplicarse con determinadas limitaciones.

Es el caso que en todos los instrumentos ópticos la luz pasa siempre a través de unos orificios (*diafragmas*), los cuales cortan del frente de onda una parte determinada. Y esto, como se sabe, va acompañado de fenómenos de difracción (§§ 57.8, 57.9 y 62.1). Por lo tanto, el fenómeno de la difracción establece el límite de aplicabilidad de la ley de propagación rectilínea de la luz y, con él, el límite de aplicabilidad de la óptica geométrica.

3. Los conceptos fundamentales de la óptica geométrica son: el de *haz* y el de *rayo*. El sentido de estos conceptos queda claro en la experiencia siguiente.

Tapemos con una hoja de cartón la ventana de una habitación y echemos un poco de humo en esta última. Si hecho esto practicamos varios orificios en el cartón, veremos que a través de ellos penetra la luz del Sol en forma de canales cilíndricos estrechos. Si la luz proviene de una lámpara pequeña colocada dentro de una caja opaca con agujero

ros, los canales serán cónicos. Estos canales, cilíndricos o cónicos, dentro de los cuales se propaga la luz, se llaman *haces luminosos*. Las líneas que indican el sentido en que se propaga la luz (incluidas las generatrices y los ejes de los haces), se denominan *rayos luminosos*.

4. En virtud de la difracción, la onda luminosa rodea un poco los bordes de la pantalla y la propagación rectilínea de la luz se infringe. En vez del haz con generatrices bien definidas, como era de esperar por las leyes de la óptica

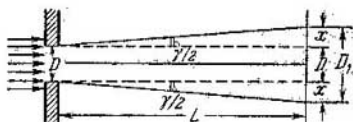


Fig. 65.1.

geométrica, se obtiene un haz que se ensancha y que no tiene un límite claro. Se observa luminosidad apreciable en un cono (fig. 65.1) cuyo ángulo de apertura es $\text{sen}(\gamma/2) \approx \lambda/D$ (véase el § 62.3), donde D es el diámetro del orificio en la pantalla opaca.

Así, pues, si existe diafragma (como ocurre en todos los instrumentos ópticos), la ley de propagación rectilínea de la luz no se cumple. Pero en una serie de casos el ensanchamiento del haz $x = (D_1 - D_2)/2$ (fig. 65.1) es pequeño en comparación con el diámetro del diafragma y, entonces, en primera aproximación, se puede desprestigiar la difracción.

En la fig. 65.1 se ve que $x = L \text{tg}(\gamma/2)$, pero cuando los ángulos son pequeños se puede suponer que $\text{tg}(\gamma/2) \approx \text{sen}(\gamma/2) \approx \lambda/D$. Así, $x \approx L\lambda/D$. La condición $x \ll D$ toma la forma $L\lambda/D \ll D$, de donde

$$D \gg \sqrt{L\lambda}. \quad (65.1)$$

Este es el *criterio de aplicabilidad* de la óptica geométrica.

5. Se dice a veces que la óptica geométrica es correcta si las dimensiones del diafragma son mucho mayores que la longitud de la onda luminosa. Pero vemos que este criterio es insuficiente, ya que no tiene en cuenta la distancia L desde la pantalla (punto de observación) hasta el diafragma. Cuando las distancias L son grandes, la condición (65.1) no se cumple y en el experimento se observa una figura que

difiere mucho de la que se calcula por medio de la óptica geométrica, aunque el orificio sea suficientemente grande. Supongamos, por ejemplo, que el diámetro del diafragma es $D = 1$ mm, es decir, 2000 veces mayor que la longitud de onda de la luz verde ($\lambda = 500$ nm = $5 \cdot 10^{-7}$ m). Vemos que $D \gg \lambda$. Sin embargo, de acuerdo con (65.1), las leyes de la óptica geométrica serán correctas para $L \ll 10^{-6}/5 \cdot 10^{-7}$ m, es decir, para $L \ll 2$ m. A distancias del diafragma del orden de 1 m se observa ya una figura de difracción y la óptica geométrica resulta ser inaplicable.

De aquí queda claro también que el rayo luminoso no se puede considerar como un haz estrecho obtenido por disminución del diafragma. Haces luminosos infinitamente estrechos no existen; la anchura de un haz de luz es siempre finita. El rayo es algo así como el eje del haz, pero no el haz mismo. El rayo luminoso es un concepto puramente geométrico que caracteriza la dirección en que se propaga la energía.

§ 65.2. Refracción de la luz. Reflexión total

1. En el § 63.1 se estudió la refracción de la luz al pasar del vacío a una sustancia cualquiera. Ahora vamos a generalizar esta ley para el caso en que la luz pasa de una sustancia a otra. Utilizaremos para ello la expresión (56.26), en la cual, sustituyendo el valor de la velocidad de la luz en la sustancia deducido de (63.3), se obtiene que

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{cn_2}{n_1 c} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \quad (65.2)$$

La magnitud

$$n_{21} = n_2/n_1 \quad (65.3)$$

se llama *índice de refracción relativo* del segundo medio respecto del primero.

2. La ecuación (65.2) también se puede escribir así:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2. \quad (65.4)$$

Esta forma de la ley de la refracción resulta muy cómoda para resolver problemas. La expresión (63.2) es un caso particular de la forma más general de la ley (65.4), suponiendo para el vacío $n_0 = 1$.

De dos medios en los cuales se propaga la luz con velocidades distintas, diremos que es ópticamente más denso aquel en que la velocidad de la luz es menor y el índice de refracción, mayor. Así, por ejemplo, el vidrio ($n = 1,5-1,7$) es un medio más denso ópticamente que el agua ($n = 1,33$).

3. En el límite de separación de los dos medios el haz se divide en dos, uno reflejado y otro refractado (§§ 56.6 y 63.2).

La suma de las intensidades de estos dos haces es igual a la intensidad del haz incidente. La intensidad de cada uno de ellos depende de un modo bastante complejo del ángulo de incidencia y del índice de refracción relativo y no vamos a deducir aquí las fórmulas correspondientes. Sólo nos detendremos

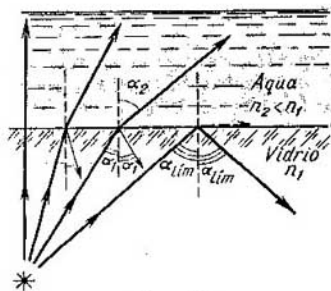


Fig. 65.2.

en el caso interesante en que la luz pasa del medio ópticamente más denso al ópticamente menos denso.

Si el ángulo de incidencia es pequeño (fig. 65.2), la intensidad de los haces reflejado y refractado se puede calcular aproximadamente por la fórmula (63.10). Como la relación entre los índices de refracción es por lo general menor que dos, la intensidad del rayo reflejado es mucho menor que el 12% y frecuentemente, cuando $n_1 \approx n_2$, la intensidad del haz reflejado es casi nula. Si aumenta el ángulo de incidencia, el ángulo de refracción crece mucho más. En este caso la intensidad del rayo reflejado aumenta y la del refractado disminuye.

4. Cuando el ángulo de incidencia α_1 empieza a aproximarse a cierto ángulo α_{lim} , el ángulo de refracción tiende a ser recto ($\alpha_2 \rightarrow \pi/2$) y la intensidad del haz refractado tiende muy rápidamente a cero. Para todos los ángulos de incidencia mayores que α_{lim} , llamado *ángulo límite*, no existirá haz refractado y la luz se reflejará totalmente en el límite de separación como si lo hiciera en un espejo ideal. Este fenómeno recibe el nombre de *reflexión total interna* o, simplemente, *reflexión total*.

5. Para calcular el ángulo límite, en la expresión (65.4) se supone $\alpha_1 = \alpha_{\text{lím}}$ y $\alpha_2 = \pi/2$; se obtiene que

$$\text{sen } \alpha_{\text{lím}} = n_2/n_1. \quad (65.5)$$

En el caso en que la luz pasa de una substancia con índice de refracción $n_1 = n$ al aire, en el que $n_2 = 1,000292 \approx 1$, la expresión (65.5) toma la forma

$$\text{sen } \alpha_{\text{lím}} = 1/n. \quad (65.5')$$

Advertimos que si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite, la ley de la refracción pierde su sentido. En efecto, de $\alpha_1 > \alpha_{\text{lím}}$ se sigue que $\text{sen } \alpha_1 > \text{sen } \alpha_{\text{lím}} = n_2/n_1$. Pero entonces, de (65.2) ó (65.4) se deduce que $\text{sen } \alpha_2 = \frac{n_1 \text{sen } \alpha_1}{n_2} > 1$, lo cual es imposible. Físicamente esto quiere decir que no existe haz refractado y que la luz se refleja totalmente.

6. La solución rigurosa de este problema, basada en las representaciones ondulatorias, da un resultado algo distinto. Resulta que la onda luminosa también puede penetrar en el medio menos denso en el caso en que el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite. Pero entonces la onda refractada se amortigua muy rápidamente y a una distancia de varias longitudes de onda del límite de separación su intensidad se anula prácticamente. Este resultado se confirma experimentalmente. Si se coloca un prisma de vidrio ($n_1 = 1,7$) sobre una solución de fluoresceína ($n_2 = 1,34$) y se dirige el haz bajo un ángulo mayor que el ángulo límite, se puede apreciar una leve luminosidad de la fluoresceína en una capa delgada del vidrio, aunque según las leyes de la óptica geométrica la luz no debería penetrar hasta aquí.

Con un fenómeno análogo de penetración de partículas en una región a la cual les está prohibido llegar por las leyes de la física clásica, nos encontraremos en el § 70.6.

§ 65.3. Prisma

1. Figurémonos que sobre la cara de un prisma incide un haz de luz paralelo. Supongamos que el prisma es de una substancia ópticamente más densa que el medio que la rodea, por ejemplo, un prisma de vidrio en el aire. Entonces, el haz, después de refractarse dos veces en el prisma, se desvía de su dirección inicial cierto ángulo ε hacia la base del prisma. La marcha de los rayos en este caso se representa en la fig. 65.3, a.

Si el prisma es de una substancia cuya densidad es menor que la del medio que lo rodea, el haz se desviará hacia el

vértice, como se ve en la fig. 65.3, *b*. Se recomienda al lector que compruebe esto haciendo los cálculos.

2. En lo anteriormente dicho hemos supuesto que el haz incidía sobre la segunda cara del prisma formando un ángulo β_2 menor que el ángulo límite. Si resulta que $\beta_2 \geq \alpha_{lim}$, la luz se reflejará totalmente en la segunda cara.

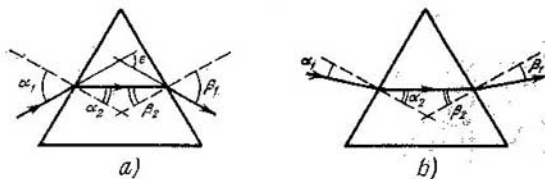


Fig. 65.3.

Los prismas de reflexión total se utilizan mucho en los instrumentos ópticos en vez de espejos. Como ejemplo, examinaremos la marcha del haz en el prisma de vidrio representado en la fig. 65.4, *a*. Sobre la primera cara el haz incide normalmente y, por lo tanto, no se refracta. El ángulo

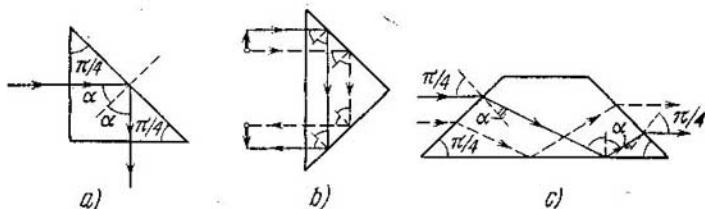


Fig. 65.4.

de incidencia sobre la segunda cara es $\alpha = 45^\circ$, mayor que el límite, ya que para el límite de separación vidrio-aire el ángulo límite, según (65.4), es $\alpha_m = \text{arc sen}(1/1,5) = 42^\circ$. Por consiguiente, sobre la segunda cara la luz se refleja totalmente y luego sigue como se indica en la figura.

El fenómeno de la reflexión total se utiliza en los prismas de inversión, en los cuales marchan los rayos como se

indica en las figs. 65.4, *b* y *c*. Se recomienda al lector que fundamente esta construcción.

3. Hallemos el ángulo ϵ en que un rayo de luz es desviado por un prisma de ángulo refringente φ en el vértice. Para simplificar el cálculo vamos a suponer que sobre la primera cara del prisma incide el rayo normalmente (fig. 65.5, *a*). En esta figura se ve que el ángulo de incidencia sobre la

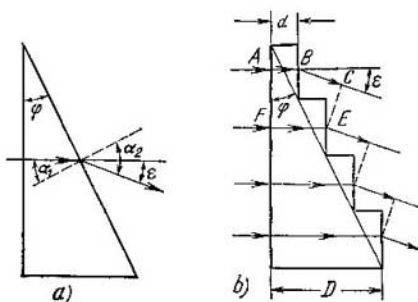


Fig. 65.5.

segunda cara es igual al ángulo refringente: $\alpha_1 = \varphi$. El ángulo de refracción $\alpha_2 = \varphi + \epsilon$. De la ley de la refracción (65.4) se sigue que

$$\text{sen}(\varphi + \epsilon) = n \text{sen} \varphi. \quad (65.6)$$

Demostremos que este mismo resultado se puede obtener por medio del cálculo interferencial.

4. Con este fin vamos a examinar el fenómeno en la escalera de Michelson, cuerpo escalonado que representa la fig. 65.5, *b*. Es evidente que si el número de escalones aumenta indefinidamente disminuyendo sus dimensiones, la escalera de Michelson se transforma en un prisma.

La luz, al pasar por los escalones aislados, se difunde en todas las direcciones posibles. Pero en virtud de la interferencia, su intensidad es distinta en diferentes direcciones. Para hallar la dirección del máximo de interferencia principal, volvemos a recurrir al método de cálculo de la interferencia producida por N fuentes coherentes, que utilizamos en los §§ 57.6—57.10.

Supongamos que la anchura total de la escalera es igual a D , la anchura de cada escalón, $d = D/N$, y su altura

$h = d \operatorname{ctg} \varphi$. Por analogía con la expresión (57.41), escribamos la fórmula para la amplitud de la onda luminosa en la dirección determinada por el ángulo ε :

$$A_{\varepsilon} = \frac{A_0}{N} \frac{\operatorname{sen}(1/2 Nk\Delta)}{\operatorname{sen}(1/2 k\Delta)}$$

Aquí Δ es la diferencia de marcha óptica entre los rayos ABC y FE . Lo mismo que en los §§ 57.9 y 57.10, la dirección del máximo principal viene determinada por la condición $\Delta = 0$. De acuerdo con (61.12), la diferencia de marcha óptica se expresa así:

$$\Delta = AB \cdot n + BC - FE \cdot n = BC - nd,$$

dónde n es el índice de refracción del vidrio. Es fácil ver que $BC = [d \operatorname{sen}(\varphi + \varepsilon)]/\operatorname{sen} \varphi$. Por lo tanto, la diferencia de marcha óptica

$$\Delta = \frac{d \operatorname{sen}(\varphi + \varepsilon)}{\operatorname{sen} \varphi} - nd = \frac{d}{\operatorname{sen} \varphi} [\operatorname{sen}(\varphi + \varepsilon) - n \operatorname{sen} \varphi] = 0.$$

Hemos llegado otra vez a la expresión (65.6).

5. De este modo, lo mismo que en el § 57.10, resulta que las leyes de la óptica geométrica son casos particulares de las leyes de la interferencia. Esto nos permite que, en adelante, al analizar la marcha de los rayos en una lente y, en general, en cualquier instrumento óptico, no tengamos que hacer cálculos interferenciales difíciles, sino que utilizemos las reglas de la óptica geométrica, que son más simples.

No obstante, siempre hay que tener presente que la óptica geométrica es un método simplificado de cálculo y que en realidad la imagen producida por todo instrumento óptico es de interferencia y no siempre se pueden despreciar los máximos secundarios. De esto se volverá a tratar en el § 66.8.

6. El ángulo ε , en que el rayo de luz es desviado por el prisma (véase la fig. 65.5), depende del índice de refracción. A su vez, como sabemos, el índice de refracción depende de la frecuencia (dispersión, véase el cap. 63). Por consiguiente, si sobre el prisma incide luz no monocromática (por ejemplo, blanca), los rayos correspondientes a las ondas de distinta frecuencia (diferente color) se desvían ángulos distintos. Este fenómeno fue descubierto por Newton en 1666. Este observó que un haz de luz blanca, que después de pasar por un orificio atravesaba un prisma de vidrio, se descomponía en el espectro: los rayos que menos se desviaban eran los rojos, y los que más se desviaban, los azules y los violetas.

§ 65.4. Lente

1. Una lente ordinaria es un cuerpo de vidrio limitado por dos de sus lados por superficies esféricas. Raras veces se utilizan lentes limitadas por superficies cilíndricas, parabólicas o de otro tipo, pero nosotros no vamos a estudiarlas.

La recta sobre la cual se encuentran los centros de las superficies que limitan la lente se llama *eje óptico principal*.

Vamos a estudiar únicamente las lentes delgadas, cuyo espesor $a = a_1 + a_2$ es mucho menor que los radios de curvatura de las superficies

esféricas que las forman: $a \ll R_2, R_1$ (fig. 65.6).

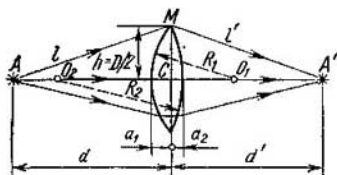


Fig. 65.6.

2. Supongamos que el punto A representa en la fig. 65.6 un foco de luz puntual que emite uniformemente ondas electromagnéticas en todas las direcciones posibles. La lente recorta de este flujo de radiación

un haz en forma de cono con vértice en el punto A ; las generatrices del cono pasan por los bordes de la lente.

Como el resto del flujo luminoso no pasa por la lente y no participa en la formación de la imagen, la lente actúa como un orificio en una pantalla opaca (§§ 57.9 y 62.1). Por consiguiente, detrás de la lente debe producirse una figura de difracción: en cierto punto A' , llamado *imagen* del punto A , se observará el máximo de orden cero (principal) y en torno a él, los máximos secundarios en forma de anillos circulares cuya intensidad disminuye muy rápidamente al crecer el número de orden del máximo (véanse las figs. 57.10 y 62.1).

La experiencia confirma lo acertado de nuestros razonamientos. En efecto, detrás de una lente cuyo índice de refracción sea mayor que el del medio circundante, descubrimos una pequeña mancha brillante A' que hace las veces de imagen real del punto A . Los máximos secundarios sólo se consiguen descubrir en el caso en que la imagen del punto se obtiene a una distancia d' que satisface la condición $d' > D^2/\lambda$, siendo D el diámetro de la lente y λ , la longitud de onda. En el caso contrario los máximos secundarios se

encuentran tan cerca del principal que, prácticamente, se confunden con él. De esto volverá a tratarse en el § 66.8.

3. Vamos a deducir la fórmula que expresa la relación entre las distancias desde la lente hasta el objeto y la imagen (es decir, d y d') y las características de la lente: los radios de curvatura de sus superficies R_1 y R_2 y el índice de refracción del vidrio n .

Como se sabe, el máximo de interferencia de orden nulo se forma en el punto en que la diferencia de marcha entre todas las ondas que parten del foco es igual a cero (véase (57.38)). Para esto es necesario que las ondas, cualquiera que sea la trayectoria que sigan desde el foco A hasta la imagen A' , tarden el mismo tiempo; en efecto, en este caso todas ellas llegarán al punto A' en la misma fase.

Para el cálculo vamos a limitarnos a comparar las trayectorias ópticas de dos ondas, una de las cuales pasa por el borde de la lente, y la otra, a lo largo del eje óptico principal. A lo largo de la trayectoria AMA' la onda se propaga en el aire con la velocidad c , y el tiempo que tarda en propagarse es

$$t_1 = \frac{AM + MA'}{c} = \frac{l}{c} + \frac{l'}{c}.$$

La onda que marcha a lo largo del eje óptico se mueve una parte del tiempo por el vidrio con la velocidad $u = c/n$, y su tiempo de propagación es

$$t_2 = \frac{AA' - a}{c} + \frac{a}{u} = \frac{d + d' - a}{c} + \frac{na}{c} = \frac{d + d' + (n-1)a}{c}.$$

Para que ambas ondas lleguen al punto A' en la misma fase debe cumplirse la igualdad $t_1 = t_2$, o

$$l + l' = d + d' + (n-1)a. \quad (65.7)$$

Así, cualquiera que sea la trayectoria de la onda que pasa a través de la lente, los caminos ópticos desde la fuente hasta la imagen deben ser iguales (véase (61.12)).

Aplicando el conocido teorema de geometría sobre la relación entre los segmentos de cuerda y los segmentos de diámetro, obtenemos

$$a_1(2R_1 - a_1) = h^2, \quad a_2(2R_2 - a_2) = h^2.$$

Teniendo en cuenta que sólo consideramos las lentes delgadas, en las cuales $a_1 \ll R_1$ y $a_2 \ll R_2$, en los paréntesis se

pueden despreciar los sustraendos, con lo que resulta que

$$2a_1R_1 = 2a_2R_2 = h^2,$$

de donde se sigue que

$$a = a_1 + a_2 = \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (65.8)$$

Como se ve en la fig. 65.6, la diferencia $l - d = \sqrt{d^2 + h^2} - d = \frac{h^2}{d + \sqrt{d^2 + h^2}}$. Vamos a limitarnos al caso en que la anchura del haz es igual al diámetro de la lente y mucho menor que los radios de curvatura de ésta; este haz se denomina *paraxial* o *paraxil*. En este caso $h \ll d$, de donde se sigue que $l - d = h^2/2d$; respectivamente, $l' - d' = h^2/2d'$. Sustituyendo en (65.7) y tomando en consideración (65.8), después de simplificar obtenemos

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (65.9)$$

Esta expresión se conoce con el nombre de *fórmula de la lente delgada*.

4. Supongamos que la fuente de luz se encuentra en el eje óptico e infinitamente lejos de la lente; su imagen sobre el oje óptico principal se obtendrá en el punto F , llamado *foco principal de la lente*. La distancia f desde el foco principal hasta la lente se denomina *distancia focal*. La magnitud $\Phi = 1/f$, recíproca de la distancia focal, recibe el nombre de *poder* o *potencia* (óptica) de la lente; la unidad de potencia óptica es la *dioptría* (D o 1/m) o potencia de una lente cuya distancia focal es igual a 1 m.

Suponiendo en la fórmula de la lente delgada (65.9) $d = \infty$ y $d' = f$, obtenemos que

$$\Phi = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (65.10)$$

Sustituyendo esta expresión en (65.9), damos a la fórmula de la lente una forma muy simple y conveniente:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}. \quad (65.11)$$

5. En la expresión (65.10) debe ponerse el valor de los radios teniendo en cuenta el signo. Cuando la superficie es convexa, el radio de curvatura es un número positivo, y cuando es cóncava, negativo; el plano debe considerarse

cómo una superficie de radio de curvatura infinito. Tomando en consideración esta regla de los signos, el lector puede demostrar fácilmente que la potencia de las lentes convexas es positiva y la de las lentes cóncavas, negativa. Por esto se dice que la lente cóncava tiene *foco virtual*. El enfoque de un haz paraxil por una lente convergente y otra divergente, cuyos índices de refracción son mayores que el del medio que las rodea, se representa en la fig. 65.7.

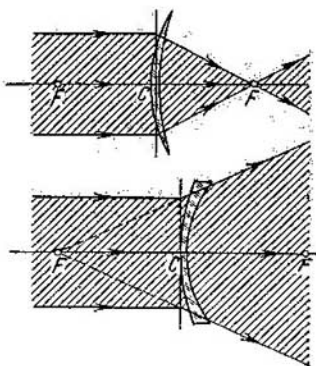


Fig. 65.7.

Se recomienda al lector comprobar por su cuenta que si la densidad óptica de la lente es menor que la del medio circundante, la potencia de la lente convergente será negativa, y la de la divergente, positiva.

6. La expresión de la potencia de una lente delgada se puede obtener valiéndose de las leyes de la óptica geométrica. Supongamos que sobre la lente incide un haz paraxil,

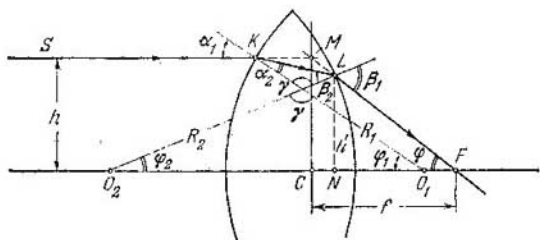


Fig. 65.8.

paralelo al eje óptico principal: después de refractarse en la lente, el haz convergerá en el foco principal de la lente. Como se ve en la fig. 65.8, el rayo SK se refracta primero

en el punto K , después en el punto L y, finalmente, pasa por el foco F . Prolonguemos los rayos SK y LF hasta su intersección en el punto M y tracemos por este punto un plano MC perpendicular al eje óptico principal. El plano MC recibe el nombre de *plano principal de la lente*. Cada lente tiene dos planos principales. Pero si la lente es suficientemente delgada, estos dos planos coinciden prácticamente. En adelante consideraremos únicamente lentes delgadas y construiremos en ellas un solo plano principal. El punto C de intersección del plano principal de una lente delgada con el eje óptico principal se denomina *centro* de la lente.

Si el haz es suficientemente estrecho ($h \ll R_1 \approx R_2$), los ángulos de incidencia y de refracción son muy pequeños y sus senos y tangentes no difieren en la práctica de sus medidas en radianes. En este caso la ley de la refracción se escribe así:

$$\alpha_1 = n_{21}\alpha_2, \quad \beta_1 = n_{21}\beta_2. \quad (65.12)$$

En la figura se ve que $\alpha_1 = \varphi_1$, como ángulos correspondientes entre rectas paralelas; $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma = \varphi_1 + \varphi_2 + \gamma = 180^\circ$, de donde se deduce que $\alpha_2 + \beta_2 = \varphi_1 + \varphi_2$; finalmente, $\beta_1 = \varphi_2 + \varphi$, como ángulo exterior del triángulo. Sustituyendo en (65.12) y sumando las igualdades se obtiene

$$\alpha_1 + \beta_1 = n_{21}(\alpha_2 + \beta_2) \quad \text{ó} \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi = n_{21}(\varphi_1 + \varphi_2),$$

de donde se sigue que

$$\varphi = (n_{21} - 1)(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (65.13)$$

Sustituyendo las magnitudes de los ángulos pequeños por los valores de su seno o tangente, tenemos,

$$\operatorname{tg} \varphi = \varphi = \frac{h}{f}, \quad \operatorname{sen} \varphi_1 = \varphi_1 = \frac{h}{R_1}, \quad \operatorname{sen} \varphi_2 = \varphi_2 = \frac{h'}{R_2} \approx \frac{h}{R_2}.$$

Sustituyendo en (65.13) y dividiendo por h , se obtiene por fin la expresión de la potencia de la lente delgada (65.10).

§ 65.5. Construcción de las imágenes que da una lente delgada

1. Supongamos que un punto A se halla a la distancia $d > 2f$ de una lente convergente delgada (fig. 65.9). De este punto sale un haz luminoso, del cual, la parte rayada

en la figura, es recortada por la lente. Este haz converge en el punto A' , imagen del punto A . Para hallar dónde se encuentra el punto A' elegimos dos rayos cuya marcha conocemos. Estos son, uno, el rayo AM , paralelo al eje óptico principal, que después de refractarse en la lente pasa por su foco trasero F' , y el otro, el rayo AN , que pasa por el foco delantero de la lente F y que después de refractarse resulta paralelo a su eje óptico principal. En la intersección de estos rayos se encuentra el punto A' .

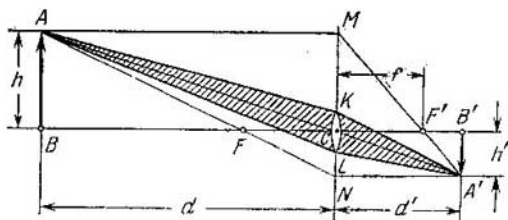


Fig. 65.9.

Se recomienda al lector demostrar que el rayo AC , que pasa por el centro de la lente, también pasa por la imagen A' . Para esto basta demostrar que las rectas AC y $A'C$ forman un mismo ángulo con el eje óptico.

2. Así, tenemos *tres rayos característicos* cuyas marchas conocemos: el rayo paralelo al eje óptico de la lente, que después de refractarse en ésta pasa por su foco; el rayo que pasa por el foco de la lente, que después de refractarse en ella sigue paralelo a su eje óptico principal, y el rayo que pasa por el centro de la lente delgada (*eje óptico secundario*), que sigue adelante sin refractarse. Con dos rayos cualesquiera de los tres característicos se puede construir la imagen de cualquier punto y, por lo tanto, de un objeto como conjunto de puntos.

Como se ve, para construir la imagen de un punto que da una lente, no hace falta conocer la posición de las superficies refractantes ni la marcha de los rayos por ella. Basta conocer la posición del plano principal y la de los focos de la lente. Es natural que la energía es transportada desde el punto A hasta el A' por el haz rayado en la figura, pero sin

la construcción adicional no estaría clara para nosotros la dirección que toman los rayos AK y AL después de refractarse en la lente.

Aprovechando la semejanza de los triángulos ABC y $A'B'C$ y de los triángulos MCF' y $A'B'F'$ (véase la fig. 65.9), el lector puede deducir fácilmente la fórmula de la lente delgada (65.11).

3. Vamos a construir la marcha de un rayo no característico es decir, de un rayo que incida sobre la lente de un modo arbitrario (fig. 65.10). Trazamos el eje óptico secundario KC , paralelo al rayo MN , y el plano focal ab que pasa por el foco principal y es perpendicular al eje óptico. Análogamente a como un haz paraxial, paralelo al

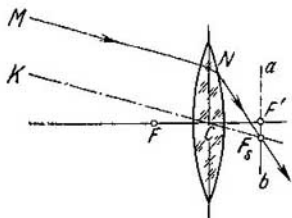


Fig. 65.10.

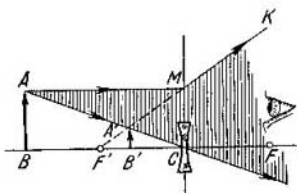


Fig. 65.11.

eje óptico principal, converge en el foco principal F' , el haz paralelo al eje óptico secundario KC converge en el foco secundario F_s , que se encuentra en el plano focal. Por consiguiente, el rayo MN , después de refractarse, pasa por el punto F_s .

Se recomienda al lector que utilice este método para construir la imagen de un punto que se encuentre en el eje óptico principal. Como ejercicio se recomienda construir también la marcha de un rayo que incida arbitrariamente sobre una lente divergente.

4. Construyamos ahora la imagen de un punto que da una lente divergente (fig. 65.11). El rayo AM , paralelo al eje óptico principal, después de refractarse sigue la dirección MK , de manera que su prolongación pasa por el foco. El segundo rayo AC (eje óptico secundario) pasa a través de la lente sin refractarse. Vemos que de la lente emerge el haz divergente rayado en la figura. Este haz divergente no da imagen, por lo tanto, con una lente divergente no se obtiene imagen. Pero si el ojo se coloca detrás de la lente, como se ve en el dibujo, nos parecerá que el haz divergente percibido por el ojo parte de un punto A' que se halla en la prolongación de los rayos. Este punto se llama *imagen virtual*

del objeto, para diferenciarla de la *imagen real* que se mostró en la fig. 65.9.

La diferencia entre estos dos tipos de imágenes consiste en lo siguiente. En el punto en que aparece la imagen real se produce la concentración de la energía de la onda luminosa y esto se puede comprobar objetivamente valiéndose, por ejemplo, de un elemento termoelectrico o fotoeléctrico, de un papel fotosensible o de algo semejante. La imagen virtual sólo tiene sentido subjetivo: nos parece que los rayos luminosos parten de cierto punto en el cual, objetivamente, no hay nada.

Se recomienda al lector que construya la imagen de un punto que se encuentre entre una lente convergente delgada y su foco.

5. Llamamos la atención sobre los signos de las magnitudes que figuran en (65.11). La distancia d se considera siempre magnitud positiva; la distancia focal será positiva en las lentes convergentes y negativa en las divergentes. Si la distancia d' se obtiene positiva, quiere decir que la imagen es real y se halla al otro lado de la lente; si d' es un número negativo, la imagen será virtual y se encontrará al mismo lado de la lente en que se halle el objeto. Se recomienda al lector comprobar esto en ejemplos concretos.

§ 65.6. Defectos de las lentes

1. Hasta ahora hemos estudiado la construcción de las imágenes en lentes ideales o perfectas. Al hacerlo hemos supuesto que la imagen de un punto, independientemente de donde se encuentre, es un punto. Pero la experiencia demuestra que esto dista mucho de ser así y que la imagen de un punto es siempre una mancha difusa.

Veamos las causas de algunos errores de los instrumentos ópticos, es decir, de sus *aberraciones*. Esto permite también encontrar la vía para eliminarlas o disminuirlas.

2. *Aberración esférica*. Al deducir la fórmula de la potencia de una lente (65.13) consideramos que sobre la lente incidía un haz paraxil cuya anchura h era mucho menor que el radio de curvatura de la lente: $h \ll R$. El haz paraxil es el único que converge en un punto, el foco. Pero si sobre la lente incide un haz ancho, el enfoque se infringe (fig. 65.12) y en vez de un punto se obtiene en la pantalla una mancha; la imagen resulta ser *astigmática*, o sea, no puntual (del griego α , privativo, y $\sigma\tau\gamma\mu\alpha$, punto). La aberración debida a que la anchura de los haces luminosos es finita, se llama *aberración esférica*.

Uno de los procedimientos para eliminar la aberración esférica consiste en limitar la anchura del haz, es decir, en diafragmar la lente. Sin embargo esto disminuye también la energía del haz luminoso, lo que no siempre es deseable. Un segundo medio de eliminar la aberra-

ción esférica se basa en que la aberración esférica de las lentes convergentes es opuesta a la de las lentes divergentes (véase la fig. 65.12). Se puede elegir una pareja de estas lentes de tal modo, que su potencia total no sea nula, pero cuya aberración esférica esté corregida en gran medida.

3. *Aberración cromática.* Este defecto de las lentes es consecuencia de la dispersión (cap. 63). En virtud de la dispersión el foco de los rayos rojos está más lejos de la lente que el foco de los violetas. A causa

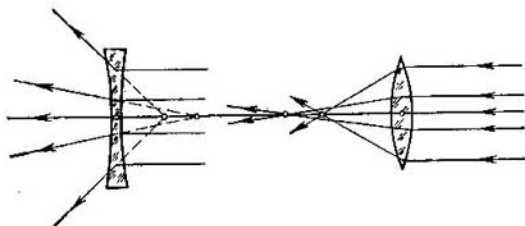


Fig. 65.12.

de la aberración cromática la imagen de un punto blanco tiene la forma de un punto rojo con una aureola azul-violácea, o de un punto violeta con una aureola amarilla-rojiza (en dependencia de donde se encuentre la pantalla).

La aberración cromática tiene carácter opuesto en las lentes convergentes y divergentes. Por lo tanto, en un sistema de dos lentes pegadas (fig. 65.13), de distintas clases de vidrio, de los índices de refracción y los radios de curvatura de las superficies, que se hayan elegido convenientemente resultarán corregidas en gran medida ambas aberraciones, la esférica y la cromática. Las lentes de este tipo se llaman *acromáticas*. Estas lentes se usan como objetivos en los telescopios, gemelos y otros instrumentos ópticos.

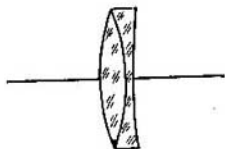


Fig. 65.13.

4. *Astigmatismo.* Supongamos que el punto se encuentra lejos del eje óptico. Entonces, para construir su imagen se utiliza un haz que forma un ángulo grande con el eje óptico principal. Y resulta que, en este caso, cualquiera que sea la posición de la pantalla, no se formará en ella una imagen puntual nítida del objeto. Sin embargo, existen dos posiciones de la pantalla en las cuales la imagen se obtiene en forma de rayitas rectas.

Así, incluso en las lentes en que se han corregido las aberraciones esférica y cromática, la imagen de un punto alejado del eje óptico no es un punto, sino dos rayitas perpendiculares entre sí que se encuentran en distintos planos. Esta aberración se conoce con el nombre de *astigmatismo*.

Para corregir el astigmatismo se construye un sistema óptico formado por varias lentes elegidas de manera que compensen el astigmatismo producido por cada una de ellas.

Estos sistemas ópticos se denominan *anastigmáticos*. Por ejemplo, son anastigmáticos los objetivos de las buenas cámaras fotográficas.

5. *Distorsión*. La aberración así llamada consiste en que se infringe la semejanza entre la imagen y el objeto. Por ejemplo, la imagen de la red cuadrada representada en la fig. 65.14, *a* puede tener la

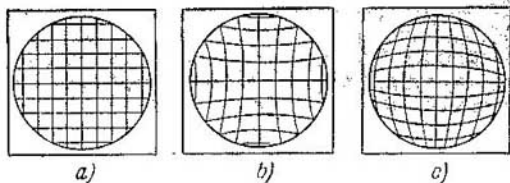


Fig. 65.14.

forma que muestra la fig. 65.14, *b* (distorsión en cojín) o la fig. 65.14, *c* (distorsión en barrilillo). Eligiendo un sistema de varias lentes cuyas distorsiones tengan carácter diferente, se puede corregir esta aberración. Los objetivos en que se ha corregido la distorsión se utilizan, por ejemplo, para la fotografía aérea.

§ 65.7. Espejo esférico

1. Sobre una superficie especular cóncava dirigimos un haz paraxil, paralelo al diámetro de la superficie esférica que pasa por el vértice *C* del espejo (fig. 65.15). La experiencia demuestra que este haz converge en el punto *F* como en un foco. Hallemos la distancia focal $CF = f$.

La normal al punto de incidencia del haz *KM* es el radio $OM = R$. Los ángulos de incidencia y reflexión son iguales: $\angle KMO = \angle OMF = \alpha$. Además, $\angle FOM = \angle KMO = \alpha$, como ángulos alternos internos entre rectas paralelas. Por consiguiente, el triángulo *OFM* es isósceles y el segmento $OF = \frac{OM}{2 \cos \alpha} = \frac{R}{2 \cos \alpha}$. De aquí se sigue que la distancia focal

$$f = CF = OC - OF = R - \frac{R}{2 \cos \alpha} = \frac{R}{2} \left(2 - \frac{1}{\cos \alpha} \right).$$

Teniendo en cuenta que $\text{sen } \alpha = h/R$, obtenemos on definitiva

$$f = \frac{R}{2} \left(2 - \frac{1}{\cos \alpha} \right) = \frac{R}{2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1 - h^2/R^2}} \right). \quad (65.14)$$

2. Vemos que en el espejo esférico también se produce la aberración esférica: la distancia focal es distinta para los rayos que se hallan a diferentes distancias del eje óptico. También se producen todos los demás tipos de aberración, excepto la cromática.

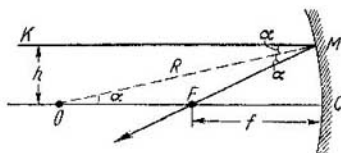


Fig. 65.15.

No obstante, cuando se trata de un haz paraxil ($h \ll R$) la condición de enfoque se cumple y la distancia focal del espejo cóncavo resulta ser

$$f = R/2, \quad (65.15)$$

y su potencia óptica

$$\Phi = 1/f = 2/R. \quad (65.16)$$

Se recomienda al lector comprobar que cuando $h \leq 0,1R$ las expresiones (65.15) y (65.16) son correctas con una exactitud no menor que el 0,5%.

3. Comparando las expresiones (65.16) y (65.10) vemos que el espejo cóncavo se puede considerar como una lente cuyo índice de refracción sea $n_{21} = -1$, el radio de una de sus superficies, infinitamente grande ($R_2 = \infty$), y el radio de la superficie cóncava, de acuerdo con la regla de los signos adoptada (§ 65.4), $R_1 = -R$. Obtenemos,

$$\Phi = (n_{21} - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (-1 - 1) \left(-\frac{1}{R} + 0 \right) = \frac{2}{R}.$$

De aquí se deduce que todas las reglas para construir las imágenes expuestas en el § 65.5 son válidas también para los espejos esféricos, si en vez de los rayos refractados se consideran los reflejados.

En este caso serán característicos los rayos siguientes (compárese con el § 65.5):

el rayo paralelo al eje óptico principal (diámetro OC en la fig. 65.15), que después de reflejarse pasa por el foco;

el rayo que pasa por el foco, que después de reflejarse sale paralelo al eje óptico;

el rayo que pasa por el centro de curvatura de la superficie esférica (eje óptico secundario), que se refleja y sale en sentido contrario siguiendo la misma recta.

4. Se recomienda al lector construir imágenes de objetos en un espejo cóncavo y otro convexo. Resulta que el espejo cóncavo funciona análogamente a como lo hace una lente convergente de material ópticamente más denso, y el espejo convexo, análogamente a como lo hace una lente divergente.

Utilizando los mismos razonamientos que en el § 65.5, el lector puede obtener sin dificultad la fórmula del espejo de la forma

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}. \quad (65.17)$$

Los valores negativos de d' corresponderán a una imagen virtual, y los positivos, a una imagen real.

§ 65.8. Enfoque de haces electrónicos

1. Uno de los métodos de enfoque de los haces electrónicos se estudió en el § 41.7. Allí nos cercioramos de que los electrones, emitidos por un cátodo de pequeñas dimensiones, que se mueven en un campo magnético uniforme, se enfocan a cierta distancia del cátodo (fig. 41.5, t. I). Por lo tanto, el campo magnético uniforme desempeña en este caso el papel de «lente magnética».

Conviene advertir que esta «lente» tiene los mismos defectos que una lente para enfocar la luz. En efecto, las condiciones de enfoque sólo se cumplen por los electrones lanzados bajo un ángulo pequeño α con las líneas de fuerza, es decir, por el haz *paraxil*, para el cual es correcta la condición $\cos \alpha \approx 1$. Un haz ancho se enfoca mal. Por lo tanto, tenemos aquí una analogía total con las condiciones de enfoque por una lente delgada (§ 65.4) y por un espejo esférico (§ 65.7). Este defecto de la lente magnética se llama, por analogía, aberración esférica.

También se infringe el enfoque a causa de que no todos los electrones salen del cátodo con la misma velocidad. Un

haz formado por electrones de distintas velocidades se denomina, por analogía con la luz, *no monocromático*, y el defecto de enfoque debido a esta diferencia de velocidades recibe el nombre de aberración cromática.

2. El enfoque de un haz electrónico también se puede efectuar por medio de una «lente electrostática». Para comprender el principio en que se basa el funcionamiento de esta «lente», consideremos el

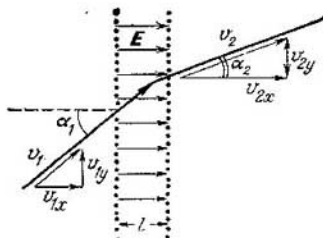


Fig. 65.16.

comportamiento de un electrón que cruza el espacio entre dos rejillas, en el cual se ha creado un campo eléctrico uniforme de intensidad E (fig. 65.16).

El electrón se mueve de izquierda a derecha con la velocidad v_1 e incide sobre la rejilla formando un ángulo α_1 . Del campo sale con la velocidad v_2 y formando un ángulo α_2 . Con esto no varía la componente de la velocidad a lo largo del eje de ordenadas, ya que en esta dirección no actúa sobre el electrón ninguna

fuerza: $v_{2y} = v_{1y}$. A lo largo del eje de abscisas actúa sobre el electrón la fuerza $F = eE$.

Según la ley de conservación de la energía tenemos para los electrones no relativistas, que $\frac{mv_1^2}{2} + eEl = \frac{mv_2^2}{2}$, o

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{2eEl}{mv_1^2}}.$$

Pero el trabajo de las fuerzas del campo $eEl = eu$, siendo u la diferencia de potencial entre los electrodos. Llamando $K = mv_1^2/2$ la energía cinética inicial del electrón, obtenemos en definitiva:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{eu}{K}}. \quad (65.18)$$

3. Para los senos de los ángulos de incidencia y refracción, como se ve en la fig. 65.16, tenemos

$$\text{sen } \alpha_1 = v_{1y}/v_1 \quad \text{y} \quad \text{sen } \alpha_2 = v_{2y}/v_2.$$

Pero como $v_{2y} = v_{1y}$, tomando en consideración (65.18), la ley de la refracción para el haz electrónico tiene la forma

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \alpha_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{eu}{K}}. \quad (65.19)$$

Esto es completamente análogo a la ley de refracción de la luz (65.2). Aquí también se observa la dispersión: el índice de refracción

$$n_{21} = \sqrt{1 + \frac{eu}{K}} \quad (65.20)$$

depende de la energía cinética de los electrones del haz. Por consiguiente, los electrones lentos se refractan más intensamente que los rápidos.

Este esquema tan simple no se utiliza para enfocar los haces electrónicos, tanto más si se tiene en cuenta que su realización experimental es muy difícil. Lo hemos dado a conocer solamente para, basándonos en él como ejemplo sencillo, estudiar el fenómeno de la refracción de un haz electrónico en un campo eléctrico.

4. En la práctica se utilizan lentes magnéticas y electrostáticas con campo fuertemente heterogéneo. El estudio de su estructura y principio de funcionamiento rebasa los límites de este libro.

Las lentes electrostáticas y magnéticas se emplean para enfocar los haces electrónicos en los oscilógrafos, televisores, microscopios electrónicos, etc.

Capítulo 66

INSTRUMENTOS ÓPTICOS

§ 66.1. Fotometría

1. El ojo humano sólo percibe una banda estrecha de toda la gama de ondas electromagnéticas, llamada luz visible (§ 64.1). La sensibilidad del ojo humano a la luz de distintas longitudes de onda no es la misma. El máximo de esta sensibilidad corresponde a $\lambda = 555$ nm (luz verde) y decrece rápidamente hasta cero al alejarse de este máximo. En la fig. 66.1 se ha trazado la gráfica de la sensibilidad espectral relativa K_λ del ojo, igual a la relación entre la sensibilidad a la longitud de onda dada y la sensibilidad a $\lambda = 555$ nm.

En virtud de estas peculiaridades del ojo humano nos vemos obligados a valorar las características cuantitativas de los haces luminosos no por la energía que transportan, sino por la sensación visual que producen. Vamos a estudiar las magnitudes correspondientes y sus unidades de medida.

2. Para la exposición que sigue vamos a necesitar un concepto geométrico, el de *ángulo sólido*, que es la medida

de la abertura de cierta superficie cónica. Recordamos que la medida de un ángulo plano α es la razón del arco de circunferencia l al radio de esta circunferencia r , es decir, $\alpha = l/r$ (fig. 66.2, a). De forma análoga se define el ángulo sólido Ω (fig. 66.2, b) como la razón de la superficie del segmento esférico σ al cuadrado del radio de la esfera:

$$\Omega = \sigma/r^2. \quad (66.1)$$

La unidad de ángulo sólido es el *estereorradian* (sr), que es el ángulo sólido cuyo vértice se encuentra en el centro de una esfera y que corta en la superficie de ésta un área igual al cuadrado del radio: $\Omega = 1$ sr si $\sigma = r^2$. Es

fácil comprobar que el ángulo sólido completo alrededor de un punto es igual a 4π estereorradianes; para esto hay que dividir la superficie de la esfera por el cuadrado de su radio.

Supongamos que un ángulo sólido pequeño $\Delta\Omega$ tiene por base cierta superficie pequeña ΔS , la normal a la cual for-

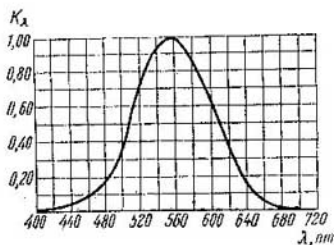


Fig. 66.1.

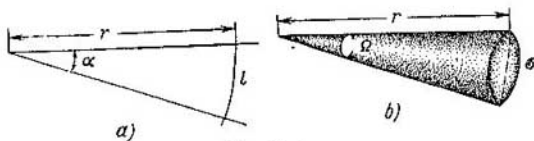


Fig. 66.2.

ma un ángulo φ con el rayo (fig. 66.3). Entonces el elemento de superficie esférica $\Delta\sigma = \Delta S \cdot \cos \varphi$, y el ángulo sólido

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\sigma}{r^2} = \frac{\Delta S \cdot \cos \varphi}{r^2}. \quad (66.2)$$

3. *Flujo luminoso.* Figurémonos que en el vértice de un ángulo sólido se encuentra una fuente puntual de luz, o sea,

una fuente cuyas dimensiones son mucho menores que la distancia desde ella hasta el punto de observación (fig. 66.3). Esta fuente radia ondas electromagnéticas en todas las direcciones posibles. Se llama flujo luminoso Φ la potencia de la parte visible de la radiación que se propaga dentro del ángulo sólido dado, valorado por la acción de esta radiación sobre un ojo normal. La unidad de flujo luminoso es el *lumen* (lm). Para la luz monocromática correspondiente al

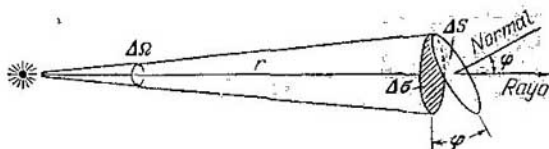


Fig. 66.3.

máximo de visibilidad ($\lambda = 555 \text{ nm}$), el flujo luminoso es igual a 683 lm si la potencia de la radiación es igual a 1 W. Para otras longitudes de onda la potencia se puede calcular valiéndose de la gráfica de la fig. 66.1.

Las lámparas de incandescencia, que omiten luz en un amplio intervalo espectral, tienen un rendimiento luminoso aproximado de 14 lm/W, y las de luz diurna, de cerca de 43 lm/W.

4. La *intensidad de la luz* I de una fuente puntual en una dirección determinada es igual a la razón del flujo luminoso $\Delta\Phi$ a la magnitud del ángulo sólido $\Delta\Omega$:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}.$$

El valor exacto de la intensidad de la luz se obtiene pasando al límite:

$$I = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega} = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \quad (66.3)$$

Si la fuente puntual radia uniformemente en todas las direcciones,

$$I = \Phi_{\text{tot}}/4\pi, \quad (66.4)$$

donde Φ_{tot} es el flujo luminoso total que radia la fuente.

La unidad de intensidad de la luz es la *candela* (cd) que se determina por medio de una fuente patrón especial.

En el SI la candela es una unidad fundamental. En este caso, según (66.3), tenemos que

$$1 \text{ cd} = 1 \text{ lm/1 sr.}$$

5. La *iluminación* E de una superficie es igual a la razón del flujo luminoso $\Delta\Phi$ a la magnitud de esta superficie ΔS :

$$E = \Delta\Phi/\Delta S. \quad (66.5)$$

Para obtener la iluminación en un punto hay que pasar al límite:

$$E = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta S} = \frac{d\Phi}{dS}. \quad (66.5')$$

La unidad de iluminación es el *lux* (lx) o iluminación de una superficie de 1 m^2 por la cual se distribuye uniformemente un flujo luminoso de 1 lumen:

$$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/1 m}^2.$$

6. Supongamos que una superficie está iluminada por una fuente puntual, entonces la iluminación de cada punto de la superficie puede ser distinta. Para calcularla sustituimos el valor del ángulo sólido (66.2) en (66.3) y obtenemos

$$I = \frac{d\Phi \cdot r^2}{dS \cdot \cos \varphi} = \frac{Er^2}{\cos \varphi},$$

de donde se deduce la *ley de la iluminación* por una fuente puntual:

$$E = (I \cos \varphi)/r^2. \quad (66.6)$$

Cuando la superficie es iluminada por un haz aproximadamente paralelo, su iluminación

$$E = E_0 \cos \varphi, \quad (66.7)$$

en la que E_0 es la iluminación que se produciría si los rayos luminosos incidieran normalmente sobre la superficie, y φ es el ángulo de incidencia de los rayos (ángulo entre el rayo y la normal a la superficie).

7. *Luminosidad y luminancia* (brillo). Si la fuente de luz no se puede considerar puntual, para determinarla se introducen las magnitudes llamadas luminosidad y luminancia o brillo que caracterizan la radiación de la unidad de área de la superficie luminosa (fig. 66.4).

La *luminosidad* R es igual a la razón del flujo luminoso $\Delta\Phi$ radiado por la superficie ΔS en todas las direcciones posibles (o sea, dentro de un ángulo sólido de 2π estereorradianes), a la magnitud de esta superficie:

$$R = \Delta\Phi / \Delta S. \quad (66.8)$$

La luminosidad de un punto la obtenemos pasando al límite:

$$R = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta S} = \frac{d\Phi}{dS}. \quad (66.8')$$

La unidad de luminosidad, lo mismo que la de iluminación, es el *lux*.

La *luminancia* (brillo) B en una dirección dada es igual a la razón de la intensidad de la luz dI dentro del ángulo

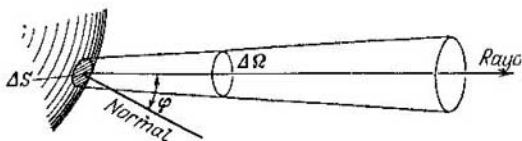


Fig. 66.4.

sólido elemental que descansa sobre la superficie dS , al área $d\sigma$ de la proyección de esta superficie sobre un plano perpendicular a la dirección del rayo:

$$B = \frac{dI}{d\sigma} = \frac{dI}{dS \cos \varphi}. \quad (66.9)$$

La luminancia de la mayoría de las fuentes es distinta en diferentes direcciones. Solamente el cuerpo negro (§ 67.2) y los difusores ideales del tipo de los vidrios mate tienen la misma luminancia en todas las direcciones. De estas fuentes se dice que se subordinan a la *ley de Lambert*:

$$B = R/\pi. \quad (66.10)$$

La unidad de luminancia es la *candela por metro cuadrado* (cd/m^2), que es la luminancia de una superficie que radia por cada metro cuadrado una candela en dirección perpendicular a la superficie.

§ 66.2. Ojo humano

1. El órgano de la vista es el ojo. Su constitución se representa esquemáticamente en la fig. 66.5.

La envoltura externa del globo del ojo la forma la esclerótica o córnea opaca 1, la cual protege el contenido del ojo y conserva su rigidez. En su parte anterior la esclerótica se transforma en la córnea delgada y transparente o simplemente córnea 2, a través de la cual penetra la luz en el ojo.

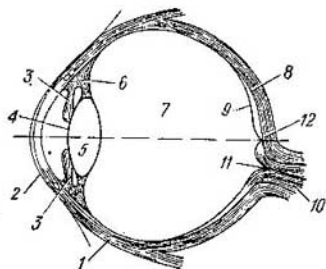


Fig. 66.5.

Detrás de la córnea está el iris 3 con su abertura, pupila, 4. El iris es un anillo muscular coloreado por un pigmento. Este anillo, contrayéndose y dilatándose hace que varíen las dimensiones de la pupila y con esto la magnitud del flujo luminoso que penetra en el ojo.

Detrás del iris se encuentra el cristalino 5 que es un cuerpo lenticular

elástico. Por medio del músculo ciliar 6, que puede tensarse y relajarse, varían los radios de curvatura de las superficies del cristalino y con ello su potencia óptica (65.11). La cavidad que hay entre la córnea y el cristalino está llena de humor acuoso; tras el cristalino se halla el cuerpo vítreo 7. La córnea, el humor acuoso, el cristalino y el cuerpo vítreo forman un sistema óptico análogo a una lente de potencia igual aproximadamente a 58,5 dioptrías ($f = 17,2$ mm). El centro óptico de este sistema se encuentra a 5 mm de distancia de la córnea; su eje óptico se representa en la fig. 66.5 por una línea de trazo y punto.

La retina 9 es una semiesfera constituida por células receptoras que tienen la forma de conos y bastoncillos. El ojo humano tiene en total 125 millones de bastoncillos y 6,5 millones de conos. Estas células fotosensibles se hallan en la superficie posterior de la retina que descansa sobre la membrana vascular 8. En cierto lugar, a un lado del eje óptico, las células nerviosas de la retina se juntan y forman el nervio óptico 10 que sale del ojo. En este lugar no hay

bastoncillos ni conos, por lo que aquí se origina el punto ciego 11, insensible a la luz. En el centro de la retina, sobre el eje óptico se encuentra la mácula lútea, mancha amarilla o fovea central 12, punto de máxima agudeza visual. En él se concentran los conos fotosensibles con los cuales el ojo percibe el color. En las demás partes de la retina se encuentran principalmente los bastoncillos.

2. Por la acción de la luz en los bastoncillos se produce la reestructuración de una substancia especial llamada púrpura visual (rodopsina). La rodopsina es un compuesto de una de las formas de vitamina A (retineno) con la proteína retinjiana (opsina). Bajo la influencia de la luz el retineno pasa de una forma a otra (de la forma *cis*-retineno a la *trans*-retineno). Esto hace que en la célula se genere un impulso nervioso que, a través del nervio óptico, se transmite al cerebro.

El impulso se genera a expensas de la energía acumulada en la célula receptora, la luz sólo desempeña el papel de «mecanismo de arranque» de la reacción. Esto explica la alta sensibilidad de los bastoncillos; cada bastoncillo es capaz de reaccionar a un cuanto de luz (§ 68.3).

Los bastoncillos efectúan la denominada visión nocturna o escotópica, con la cual se distinguen las dimensiones y la forma de los objetos, pero no su color.

3. La visión de los colores se debe a los conos y es posible si la imagen del objeto incide sobre la fovea central. Existen fundamentos serios para suponer que hay tres tipos de conos que reaccionan de forma diferente a la acción de distintas zonas del espectro. Uno de ellos reacciona mejor a la luz verde, otro, a la roja, y el tercero, a la azul. Los colores de transición son percibidos por excitación conjunta de dos o tres tipos de conos. En dependencia del grado de excitación de cada uno de estos tipos de conos, el cerebro recibe series distintas de impulsos nerviosos y los interpreta como colores diferentes.

§ 66.3. Acomodación. Visión binocular

1. El ojo debe ver bien tanto los objetos que están lejos como los que están cerca. Como quiera que varíe la distancia d desde el objeto hasta el ojo, sobre la retina debe obtenerse una imagen nítida. De acuerdo con la fórmula de la lente (65.13), esto es posible solamente en el caso en que al

mismo tiempo varíe la distancia focal f del sistema óptico. Como ya se dijo en el párrafo anterior, la variación de la potencia óptica del ojo y de su distancia focal $f = 1/\Phi$, se efectúa a expensas de la variación de los radios de curvatura de las superficies del cristalino. Este fenómeno se llama *acomodación*.

La acomodación se produce espontáneamente. En cuanto la mirada pasa de un objeto a otro, la imagen pierde nitidez, de lo cual llega una señal al cerebro. La señal de retorno,

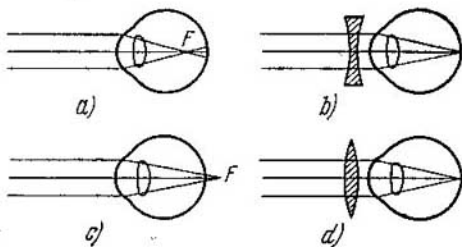


Fig. 66.6.

del cerebro al músculo ciliar, hace que éste se contraiga o dilate hasta que se obtiene una imagen clara. El punto que ve el ojo cuando el músculo ciliar está relajado se llama *punto remoto*, y el que ve cuando el esfuerzo es máximo *punto próximo*. Para un ojo normal el punto remoto se halla infinitamente lejos, y el próximo, a 15—20 cm de distancia.

2. Para un ojo miope el punto remoto se encuentra a una distancia finita, y si la miopía es fuerte, muy cerca del ojo. Respectivamente se acerca también el punto próximo, por esto los miopes, para ver mejor los objetos, los acercan a los ojos. La miopía se debe a un alargamiento del globo del ojo o a un espasmo del músculo ciliar. Este defecto del ojo se corrige usando lentes divergentes (fig. 66.6, *a* y *b*).

La *hipermetropía* (presbicia o vista cansada) se debe a un acortamiento del globo del ojo o a que la acomodación es débil. Esto hace que se aleje del ojo el punto próximo.

La hipermetropía se manifiesta en la vejez, cuando el cristalino pierde elasticidad, pero también se dan casos de hipermetropía congénita. Para corregir este defecto del ojo se usan lentes convergentes (fig. 66.6, *c* y *d*).

3. Mirando un objeto con los dos ojos obtenemos en la retina de cada uno de ellos una imagen algo distinta. Sin embargo, vemos un solo objeto, pero estereoscópicamente, o sea, en relieve. La apreciación de la profundidad del espacio se pone de manifiesto en virtud de que, cuando dirigimos la vista a un objeto, los músculos oculares hacen girar los ojos de forma que sus ejes ópticos se crucen en dicho objeto. El ángulo α entre los ejes se denomina *ángulo de convergencia*. La distancia entre los ojos (base) es $b = 5$ cm, y la distancia hasta el objeto $d > 25$ cm. Por consiguiente, el ángulo de convergencia $\alpha \approx b/d$ varía desde cero (punto remoto) hasta 10^8 (punto próximo).

El esfuerzo, simultáneo y espontáneo, de acomodación y convergencia permite apreciar la profundidad del espacio y la distancia hasta los objetos mucho mejor que la visión monocular. Aumentando artificialmente la base con gemelos o anteojos de antena, se puede apreciar la distancia hasta objetos lejanos con más exactitud que a simple vista.

§ 66.4. Ángulo de visión. Poder separador del ojo

1. El tamaño de la imagen de un objeto en la retina viene determinado exclusivamente por el ángulo de visión

$\varphi = h/f$ con el vértice en el centro óptico del ojo y los rayos dirigidos hacia los puntos límites del objeto (fig. 66.7). El ángulo de visión se puede aumentar acercando el objeto al ojo. Pero en este caso aumenta la tensión del músculo ciliar y el

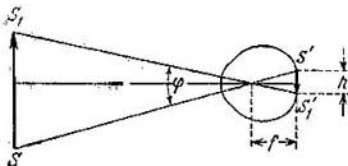


Fig. 66.7

ojo se cansa. Es particularmente difícil acomodar el ojo si el objeto está cerca del punto próximo.

Se llama *distancia de visión óptima o perfecta* aquella, desde el objeto hasta el ojo, con la cual el ángulo de visión resulta ser máximo, y la tensión de acomodación no excesivamente grande y el ojo no se cansa. Para un ojo normal la distancia de visión óptima es, aproximadamente, de 25 cm. A las personas miopes les es más fácil aproximar el ojo al objeto; esto les permite distinguir objetos bastante pequeños. En cambio, a las hipermétropes les es difícil distinguir los objetos pequeños, por ejemplo, las letras cuando leen.

2. Dos puntos de una imagen se percibirán separados si se encuentran en dos células fotosensibles diferentes de la retina. En el caso contrario sólo excitarán una célula. Se dice que el ojo no resuelve dos puntos distintos de un objeto

si sus imágenes se obtienen sobre un solo elemento fotosensible de la retina. El *poder separador del ojo* se valora por el *ángulo de visión mínimo* φ_0 bajo el cual, si la iluminación es buena, los dos puntos se ven separados.

3. La experiencia da para el ángulo de visión mínimo el valor de un minuto angular ($\varphi_0 \approx 1'$), si la iluminación del objeto es de alrededor de 5 lx. Esto corresponde al hecho experimental de que la distancia entre dos bastoncillos o conos contiguos es igual aproximadamente a cinco micras ($h_0 \approx 5 \mu\text{m} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$). En efecto, como se ve en la fig. 66.7, el ángulo de visión mínimo $\varphi_0 = h_0/f$, donde $f = 17,2 \text{ mm}$ es la distancia focal del sistema óptico del ojo. Tenemos que

$$\varphi_0 \approx \frac{h_0}{f} \approx \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 180 \cdot 60}{17,2 \cdot \pi} = 1'$$

Cuando la iluminación disminuye, el poder separador del ojo empeora o, como suele decirse, desciende la *agudeza visual*. Se entiende por agudeza visual la magnitud recíproca a la del ángulo resoluble mínimo, con una iluminación dada, expresado en minutos: $B = 1/\varphi_0$. La agudeza visual varía desde 0,3, cuando la iluminación es menor que 0,1 lx, hasta 1,3, si la iluminación es mayor que 100 lx.

§ 66.5. Lupa

1. El instrumento más simple para aumentar el ángulo de visión es la *lupa*, lente de foco corto que se interpone

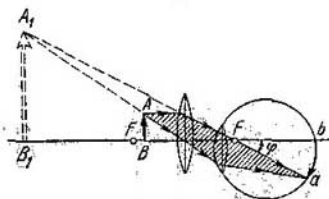


Fig. 66.8.

entre el objeto y el ojo como se muestra en la fig. 66.8. A simple vista observamos un objeto pequeño $AB=h$, situado a la distancia de visión óptima $D = 25 \text{ cm}$, bajo el ángulo de visión φ_0 , cuya tangente $\text{tg } \varphi_0 = h/D$. Si este mismo objeto se coloca cerca del foco de una lupa, el ojo

lo percibirá bajo un ángulo de visión φ que se determina por la condición $\text{tg } \varphi = h/f$, en la que f es la distancia focal de la lente. Como resultado, la imagen ab del objeto sobre

la retina del ojo que da la lupa es mayor que la imagen que se produce en ella cuando el objeto se mira a simple vista. Nos parece que vemos no el objeto pequeño AB , sino un objeto grande A_1B_1 .

2. Recibe el nombre de *aumento angular* γ de una lupa la razón de la tangente del ángulo φ , bajo el cual se ve el objeto con la lupa, a la tangente del ángulo φ_0 , bajo el cual se ve el objeto a simple vista a la distancia de visión óptima. Pero $\text{tg } \varphi = h/f$ y $\text{tg } \varphi_0 = h/D$, por consiguiente,

$$\gamma = \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \varphi_0} = \frac{D}{f}. \quad (66.11)$$

En la práctica se utilizan lupas con distancia focal desde 10 hasta 1 cm. Esto permite obtener aumentos γ desde 2,5 hasta 25. Debe advertirse que las lupas de foco corto deforman mucho la imagen a causa de la aberración esférica, el astigmatismo y la distorsión (§ 65.7). Por esta razón no se emplean para aumentos mayores de cinco o diez.

§ 66.6. Microscopio

1. Para conseguir grandes aumentos angulares (del orden de varias centenas) se utiliza el *microscopio*. Este instrumento

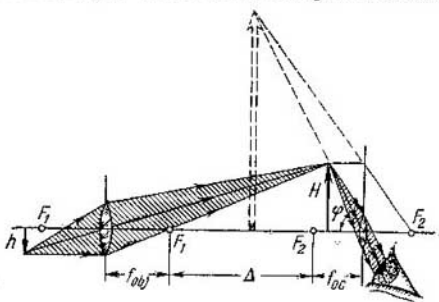


Fig. 66.9.

es una combinación de dos sistemas de foco corto: el objetivo y el ocular (fig. 66.9).

El objeto h se sitúa cerca del foco del objetivo F_1 ; la imagen real H se obtiene detrás del objetivo, cerca del foco

del ocular F_2 . De aquí se sigue que la distancia desde la primera imagen hasta el foco del objetivo coincide aproximadamente con la distancia entre los focos del objetivo y el ocular. Esto permite determinar el tamaño lineal de la primera imagen. Como se ve en la fig. 66.9,

$$\frac{H}{h} \approx \frac{\Delta}{f_{\text{obj}}}. \quad (66.12)$$

2. Vamos a hallar el aumento angular del microscopio por el mismo procedimiento que utilizamos para buscar el aumento angular de la lupa. Tenemos

$$\gamma = \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \varphi_0} = \frac{H}{f_{\text{oc}}} : \frac{h}{D} = \frac{h\Delta}{f_{\text{oc}} \cdot f_{\text{obj}}} : \frac{h}{D} = \frac{D\Delta}{f_{\text{oc}} \cdot f_{\text{obj}}}. \quad (66.13)$$

En los buenos microscopios modernos $f_{\text{obj}} \approx 2,5$ mm, $f_{\text{oc}} \approx 15$ mm y $\Delta \approx 160$ mm. Teniendo en cuenta que $D \approx 250$ mm, obtenemos

$$\gamma \approx 160 \cdot 250 / (2,5 \cdot 15) \approx 1000.$$

Como se demostrará en el § 66.8, la construcción de microscopios de más de 1000 aumentos no es conveniente y, por lo general, se utilizan para aumentos menores, del orden de 500–600.

§ 66.7. Telescopio

1. El telescopio sirve para aumentar el ángulo de visión cuando se observan detalles de objetos lejanos. Existen

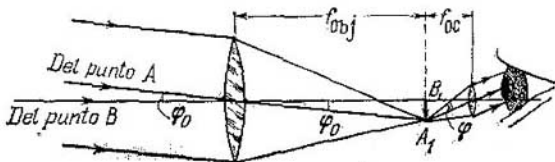


Fig. 66.10

diversas estructuras de telescopios; nosotros nos vamos a limitar a estudiar la marcha de los rayos en el antejo astronómico de Kepler (fig. 66.10).

Supongamos que un objeto AB se encuentra lejos del objetivo, cuya distancia focal es f_{obj} ; el punto B se halla en el eje óptico del sistema y el A sobre dicho eje. El objeto

se ve a simple vista bajo un ángulo de visión φ_0 . La imagen del objeto $A_1B_1 = h$ se obtiene prácticamente en el plano focal del objetivo.

El ocular, de distancia focal f_{oc} , lo disponemos de tal forma que su foco anterior coincida con el foco posterior del objetivo. En este caso el ocular se comportará como una lupa y al ojo llegará un haz de luz paralelo bajo un ángulo de visión $\varphi > \varphi_0$.

El aumento angular del telescopio es

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0} = \frac{h}{f_{oc}} : \frac{h}{f_{obj}} = \frac{f_{obj}}{f_{oc}}. \quad (66.14)$$

Para conseguir grandes aumentos, en los telescopios se utilizan objetivos de foco largo y oculares de foco corto.

2. Todo el flujo luminoso que sale del ocular debe llegar a la retina. Por consiguiente, hay que elegir los diámetros del objetivo y del ocular de tal modo, que el haz de luz que emerge del anteojo cubra toda la pupila del ojo o una parte de ella. Si el haz es más ancho que la pupila, parte de la energía será dispersada inútilmente por el iris del ojo y, de hecho, la imagen la dará no todo el objetivo, sino una parte de él solamente. El diámetro del ocular D_{oc} se puede tomar aproximadamente igual al diámetro de la pupila. Esto da, en las observaciones nocturnas, $D_{oc} \approx 6-8$ mm, y en las diurnas, 2-3 mm. De aquí hallamos el diámetro del objetivo. Como se ve en la fig. 66.10,

$$\gamma = \frac{f_{obj}}{f_{oc}} = \frac{D_{obj}}{D_{oc}}. \quad (66.15)$$

Por ejemplo, en el caso de un anteojo de veinte aumentos para observaciones nocturnas, el objetivo debe tener el diámetro $D = 20 \cdot 8 \text{ mm} = 160 \text{ mm}$. Como la distancia focal del ocular $f_{oc} \approx 20 \text{ mm}$, de (66.15) se sigue que $f_{obj} = \gamma f_{oc} = 20 \cdot 20 \text{ mm} = 400$. Así, la longitud total del anteojo será de 420 mm.

3. Los telescopios cuyos objetivos son lentes se llaman *refractores* (del latín *refractus*, refractado). El diámetro máximo del objetivo de los refractores es de un metro. La fabricación de lentes con diámetros mayores tropieza con enormes dificultades.

Es mucho más fácil hacer una pieza de vidrio fundido de gran diámetro para espejo. En este caso no es preciso que el vidrio sea ópticamente homogéneo y sólo hay que rectificar una superficie. En los espejos de gran diámetro, a la superficie reflectora no se da forma esférica, sino parabólica, con lo que se disminuye la aberración esférica. Después esta superficie se recubre en el vacío con una tenue capa de aluminio.

Los telescopios con objetivo especular se denominan *reflectores* (del latín *reflectere*, reflejar). El primer telescopio especular lo construyó Newton en 1671—1672. El esquema del telescopio de Newton se muestra en la fig. 66.11. El haz de luz paralelo procedente de la fuente lejana incide en el espejo *E*, se refleja en él, luego en el espejo auxiliar *C*, que hace que el haz gire 90° , y se enfoca en el punto *F*, donde se produce una imagen real. El ocular *O* funciona lo mismo que en el refractor.

Un reflector de 5 m de diámetro de espejo está instalado en el observatorio de Monte Palomar (EE.UU). El mayor



Fig. 66.11.

telescopio del mundo, con espejo de 6 m de diámetro, se ha construido y funciona actualmente en la URSS.

4. Por lo general, se dice con razón que el telescopio sirve para «aumentar». Precisemos qué es lo que aumenta en distintos casos. Resulta que si se observa un objeto terrenal lejano o un planeta, la acción del telescopio se reduce a aumentar el ángulo de visión, y esto, a su vez, conduce al aumento del poder separador. Así, si a simple vista distinguimos en la Luna varias manchas oscuras y Marte lo percibimos como un punto rojo, con un telescopio de 5 m de diámetro se pueden distinguir en la Luna detalles de hasta cerca de 1 m de tamaño, y en Marte, de cerca de 100 m. La luminancia de los objetos observados es la misma que cuando se miran a simple vista.

Un resultado totalmente distinto se obtiene cuando se observan las estrellas. Éstas se encuentran tan lejos, que, aún después de aumentado por el telescopio, el ángulo de visión resulta ser menor que el ángulo mínimo que pueda resolver el ojo $\varphi_0 \approx 1'$ (§ 66.4). En consecuencia, incluso con los telescopios más potentes, la imagen de la estrella incide sobre una sola célula nerviosa y la percibimos como un punto. Pero su luminancia resulta ser tantas veces mayor

que la que percibimos a simple vista, como veces mayor es la superficie del objetivo que la superficie de la pupila. Con el objetivo de 5 m y visión diurna el aumento es aproximadamente de $(5000 \text{ mm}/3 \text{ mm})^2 \approx 3 \cdot 10^8$, por lo que la iluminación de la retina es también varios millones de veces mayor. Esto da la posibilidad de observar con el telescopio estrellas muy débiles o tan alejadas que a simple vista no las percibimos.

§ 66.8. Poder separador de un instrumento óptico

1. Hasta ahora hemos supuesto implícitamente que la imagen de un punto luminoso dada por un instrumento óptico (por ejemplo, una lente) también es un punto. Sin embargo, esto no es rigurosamente cierto, incluso si se han corregido todas las aberraciones. En efecto, la lente recorta del frente de onda una parte determinada y la imagen de difracción del punto, que en virtud de esto se produce, tiene carácter complejo (§§ 57.8 y 57.9): en el centro se observa el máximo principal y a su alrededor se suceden anillos brillantes y oscuros. El primer mínimo se observa bajo un ángulo que viene determinado por la condición (57.40), si en ella se supone $m = 1$; así, obtenemos

$$\text{sen } \theta = \lambda/D, \quad (66.16)$$

donde λ es la longitud de la onda luminosa, y D , el diámetro de la lente.

Supongamos que sobre la lente incide luz de fuentes puntuales lejanas. Si la distancia angular entre dos fuentes es pequeña, las figuras de difracción de ambas fuentes se superponen parcialmente y puede suceder que no podamos distinguir las figuras pertenecientes a puntos diferentes (en la fig. 66.12 se reproducen las fotografías de tres fuentes, dos de ellas dan en la fig. 66.1, *a* una imagen confusa). En este caso se dice que la lente *no resuelve* (no permite distinguir) las imágenes de los dos puntos. Conviene advertir que el aumento ulterior de esta imagen no da nada; si las imágenes de dos o más puntos quedan sin resolver aunque sólo sea por una lente, todo el instrumento tampoco las resolverá. Pero si se aumenta el diámetro de la lente, su poder separador aumenta (fig. 66.12, *b* y *c*).

2. Para caracterizar cuantitativamente el poder separador del objetivo de un instrumento óptico se utiliza el crite-

rio de Rayleigh (§ 62.4): las imágenes de dos puntos se verán separadas si el máximo principal de una de ellas está más lejos que el primer mínimo de la otra. Así, el ángulo φ entre las direcciones a ambas fuentes puntuales no debe ser

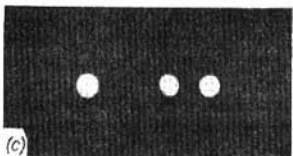
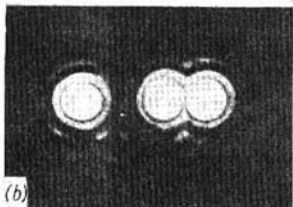
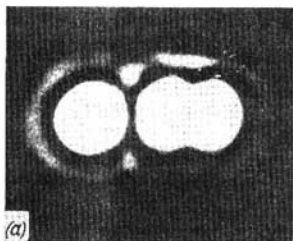


Fig. 66.12

mo, sino por la distancia ε entre los dos puntos más próximos que aún se ven separados. La teoría rigurosa no podemos exponerla aquí, pero aproximadamente se puede razonar del modo siguiente.

Supongamos que dos puntos M y N , que se hallen a la distancia ε el uno del otro, se encuentran cerca del plano focal del objetivo (fig. 66.13). Sus imágenes M' y N' se verán separadas si se cumple la condición (66.16). Designando la distancia desde el objeto hasta la lente por $MC = d$, tenemos

$$\varepsilon = d \operatorname{tg} \varphi > d \operatorname{sen} \varphi \geq \lambda d / D. \quad (66.18)$$

menor que el ángulo θ determinado por la condición (66.16); de aquí que $\operatorname{sen} \varphi \geq \operatorname{sen} \theta = \lambda / D$. Y como el diámetro de la lente es siempre mucho mayor que la longitud de la onda luminosa, los ángulos φ y θ son muy pequeños y el seno se puede sustituir por la medida en radianes del ángulo

$$\varphi \geq \theta \approx \lambda / D. \quad (66.17)$$

Como se ve, los telescopios de gran diámetro tienen más poder separador $A = 1/\varphi \approx D/\lambda$. Un telescopio con espejo de 5–6 m de diámetro tiene un ángulo separable mínimo $\varphi_{\min} \sim \sim 10^{-7} \text{ rad} \approx 0,02 \text{ segundos angulares}$. ¡Bajo este ángulo se ve una cerilla a 600 km de distancia! Pero esto es también insuficiente para resolver detalles aún en la estrella más próxima a la Tierra.

3. El poder separador de un microscopio se acostumbra caracterizar no por el ángulo mínimo

El ángulo $LMC = u$, bajo el cual se ve desde el punto M el radio de la lente, se llama *ángulo de apertura*. Como se ve en la figura, $R/d = \operatorname{tg} u$, siendo R el radio de la lente. Sustituyendo en (66.18), obtenemos

$$e \geq \lambda / (2 \operatorname{tg} u). \quad (66.19)$$

4. Según la teoría rigurosa, en el denominador no debe figurar la tangente, sino el seno del ángulo de apertura:

$$e \geq \lambda / (2 \operatorname{sen} u). \quad (66.20)$$

En los buenos microscopios modernos el objeto se coloca cerca del plano focal, es decir, $d \approx f = 2 \text{ mm}$; el radio del objetivo $R \approx \approx 2-3 \text{ mm}$. En este caso $\operatorname{sen} u \approx 0,9$; por lo tanto, en el microscopio se pueden resolver detalles de cerca de media onda de tamaño.

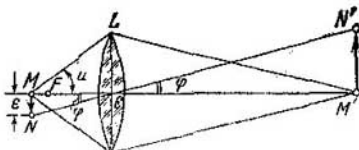


Fig. 66.13.

Si el espacio entre el objeto y la lente se llena del llamado *líquido de inmersión*, en el numerador de la expresión (66.20) la longitud de onda en el líquido $\lambda = \lambda_0/n$, en la que λ_0 es la longitud de la onda en el vacío, y n , el índice de refracción del líquido. En este caso

$$e \geq \lambda_0 / (2n \operatorname{sen} u). \quad (66.21)$$

Si $n = 1,5$ (aceite de cedro) y $\operatorname{sen} u = 0,9$, obtenemos $e \geq 0,37\lambda_0$. La sensibilidad máxima del ojo corresponde a la longitud de onda $\lambda = 555 \text{ nm}$ (§ 66.1); por consiguiente, $e \approx 200 \text{ nm}$. Como las dimensiones de una célula viva son mayores que 1000 nm , ésta se puede estudiar al microscopio. Los virus, cuyas dimensiones son de 275 a 10 nm , ya no se pueden ver con el microscopio óptico, para estudiarlos se utiliza el microscopio electrónico.

§ 66.9. Microscopio electrónico

1. Para aumentar el poder separador del microscopio hay que utilizar ondas más cortas. En ciertos casos se emplea el microscopio con óptica de cuarzo que funciona con luz ultravioleta (*ultramicroscopio*). En él la gama de longitudes de onda es de 250 nm ; aproximadamente, es decir, dos veces más corta que la longitud de onda de la luz visible, por lo tanto, su poder separador es dos veces mayor.

Un poder resolutivo mucho más grande se podría obtener utilizando los rayos X. Pero para estos rayos el índice de

refracción (véase (63.15) cuando $\omega \rightarrow \infty$) no difiere prácticamente de la unidad, por lo que no es posible hacer espejos ni lentes que sirvan para la gama de los rayos X.

2. Como se demostrará en el cap. 69, las partículas de la sustancia tienen propiedades ondulatorias. La onda asociada a estas partículas (onda de De Broglie) es muy peque-

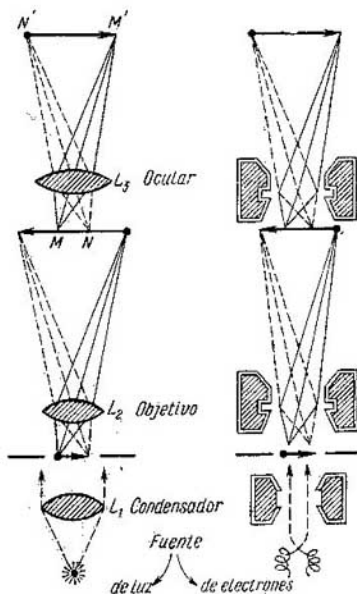


Fig. 68.14.

ña. Su longitud se determina por la fórmula $\lambda = h/mv$ (véase (69.2)), en la que h es la constante de Planck; m , la masa y v la velocidad de la partícula. Por ejemplo, a los electrones acelerados por un campo eléctrico de 1000 V de diferencia de potencial corresponde la longitud de onda $\lambda = 0,04$ nm, más corta que la longitud de onda de los rayos X. Además, los haces electrónicos, a diferencia de

los rayos X, se dirigen fácilmente y se pueden enfocar por medio de lentes magnéticas o eléctricas (§ 65.8). En este principio se basa el funcionamiento de los microscopios electrónicos.

3. En la fig. 66.14 se representa el esquema de un microscopio electrónico con enfoque magnético; para que pueda compararse con él, a su lado se reproduce el esquema del microscopio óptico. En el electrónico el ocular da una imagen real del objeto, la cual se puede fotografiar u observar sobre una pantalla luminiscente.

El ángulo de apertura del microscopio electrónico es mucho menor que el del óptico. Si en este último $\text{sen } u \approx \approx 0,9$, en el electrónico $\text{sen } u \approx 0,01-0,02$. Por consiguiente, con él se pueden distinguir detalles de hasta cerca de 1—2 nm de tamaño. Esto no permite ver los átomos o las moléculas pequeñas, pero sí las grandes moléculas albuminoideas, por ejemplo, los virus (véase la fig. 33.14).

§ 66.10. Aparatos de proyección

1. Valiéndose de una lente se puede obtener la imagen real de un objeto sobre una pantalla (véase la fig. 65.8).

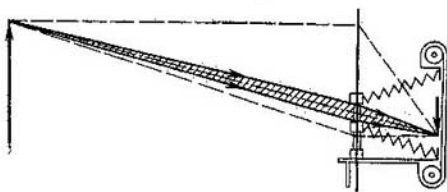


Fig. 66.15.

Esto se aprovecha en las cámaras fotográficas, linternas de proyección, proyectores cinematográficos, etc.

La cámara fotográfica tiene una estructura semejante a la del ojo. Con el objetivo se obtiene la imagen real disminuida del objeto sobre una película o placa fotosensible. La magnitud del flujo luminoso que entra en la cámara se regula con el diafragma. El enfoque se realiza desplazando el objetivo (fig. 66.15).

Bajo la acción de la luz se produce una reacción fotoquímica en la capa fotosensible de la película. Después de tratar esta última químicamente, se revela la imagen negativa, de la cual se obtiene luego la positiva sobre un papel también fotosensible.

2. Con la linterna de proyección, simplemente proyector se obtiene sobre una pantalla la imagen real aumentada de dibujos, planos, fotografías, etc. Los aparatos para proyectar objetos transparentes (diapositivas, filmes de diapositivas) se llaman proyectores, y los que sirven para proyectar objetos opacos (dibujos, fotografías y objetos pequeños), *epidiáscopios* o *epidiáscopos* (del griego *επι*, sobre; *δια*, a través, y *σκοπεω*, examinar).

3. La retina del ojo tiene cierta inercia, que conserva durante 0,1 s aproximadamente la sensación visual producida (persistencia de las imágenes en la retina). Las excitaciones visuales que se suceden a intervalos menores de 0,1 s se confunden en una sensación variable continuamente. En esto se basa el cinematógrafo.

Una serie de fotografías (fotogramas) del objeto en movimiento se impresionan sobre una película (por lo general 24 fotogramas por segundo). Pero si se quiere obtener la imagen retardada de un proceso muy rápido, o, al contrario, la imagen acelerada de un proceso lento, el rodaje se hace muy rápido (hasta varios millares de fotogramas por segundo), con la llamada «cámara lenta», o muy lento (1 fotograma por hora), con la «cámara rápida», y se proyectan a velocidad normal. Por este procedimiento se consiguen observar, por ejemplo, el crecimiento de la rama de una planta o la destrucción de un blindaje por un proyectil.

El proyector cinematográfico se diferencia del de diapositivas en que el primero tiene un mecanismo de arrastre que intermitentemente tira de la película con la velocidad de 24 fotogramas por segundo. En los instantes en que un fotograma se desplaza, un obturador cierra el objetivo.

§ 66.11. Proyector iónico

1. Ya se ha dicho que el poder separador del microscopio electrónico es de 1—2 nm. Detalles más pequeños, de las dimensiones de un átomo (0,12—0,16 nm) se consiguen ver con el proyector iónico (microscopio de campo iónico) inventado por E. W. Müller en 1950—1951.

El esquema de este aparato se representa en la fig. 66.16. En un recipiente, donde se ha creado una presión de 10^{-2} — 10^{-3} Pa y la temperatura de 20—40 K, se inyecta una pequeña cantidad de átomos de helio, hidrógeno o neón. Estos átomos van a parar a un campo eléctrico fuertemente no homogéneo creado entre el metal que se investiga, en forma de aguja con punta semiesférica de radio menor que 100 nm, y la pantalla, situada debajo de aquél a 10 cm de distancia. La intensidad del campo eléctrico junto a la punta alcanza $(2,2-4,5) \cdot 10^{10}$ V/m aproximadamente.

En este campo se polarizan los átomos: en ellos se produce un momento dipolar inducido en virtud del cual son atraídos hacia la zona de más intensidad del campo (§ 38.5). Al llegar a la punta, el átomo pierde un electrón y se transforma en ion positivo. Sobre el ion actúa el campo con gran fuerza, repulsándolo hacia la pantalla. El ion adquiere una energía cinética grande y cuando choca con la pantalla luminiscente produce en ella un destello.

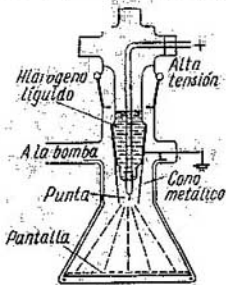


Fig. 66.16.

2. La superficie del metal de la punta no es absolutamente lisa: en las direcciones de los ejes cristalográficos la curvatura de la superficie difiere algo de su curvatura en otras direcciones. Esto es consecuencia de la propiedad general de la anisotropía de los cristales (§ 32.1).

El grado de ionización de los átomos del gas es diferente en distintas partes de la punta. Está claro que el número de iones que incide en distintas partes de la pantalla depende de la orientación respecto del eje cristalográfico y la brillantez de la iluminación de la pantalla en distintos puntos es diferente.

En la fig. 66.17 se muestra la fotografía de la estructura de un cristal de platino obtenida con el proyector iónico. En ella se ve claramente la estructura de la red cristalina que, como se sabe, es cúbica centrada en las caras.

La comparación de este tipo de fotografías con los datos de las investigaciones estructurales con rayos X (§ 62.7) da la posibilidad de obtener una serie de nuevos conoci-

mientos acerca de la estructura del cristal. En particular, en virtud del gran poder resolutivo del proyector iónico (0,28 μm), en él se pueden descubrir defectos de distinto

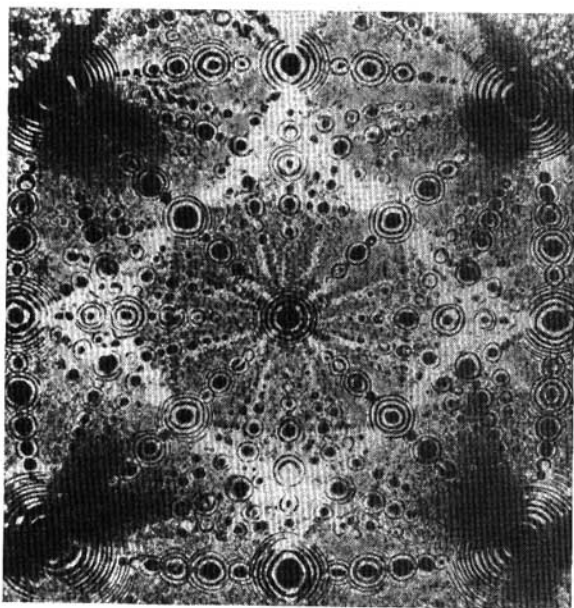


Fig. 66.17.

tipo de la estructura, especialmente defectos aislados: huecos (vacancias), inclusiones y sustituciones (§ 32.4), cuya observación directa es imposible por otros métodos.

§ 66.12. Aparatos espectrales

1. Se llama *espectroscopio* un aparato con el cual se investiga visualmente la composición espectral de la luz emitida por una fuente. Si el espectro se registra en una

placa fotográfica, el aparato recibe el nombre de *espectrógrafo*. La descomposición espectral (§ 50.4) se efectúa por medio de una red de difracción (§§ 62.2—62.4) o con un prisma (§§ 63.4 y 65.3). Para las investigaciones en la región visible del espectro se utiliza óptica de vidrio, y para las regiones ultravioleta e infrarroja, óptica de cuarzo, fluorita o sal gema.

2. En la fig. 66.18 se representa un esquema muy simple de espectrógrafo. A la izquierda se encuentra el colimador

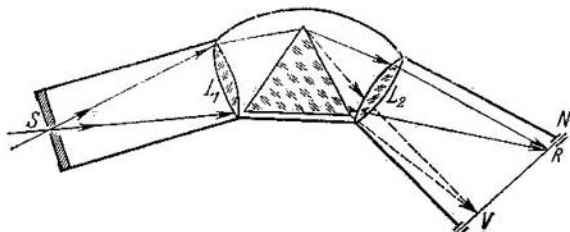


Fig. 66.18.

SL_1 . La rendija S está situada en el plano focal del objetivo L_1 , por consiguiente, sobre el prisma incidirá un haz de luz paralelo. Del prisma, en virtud de la dispersión, emergen también haces paralelos de luz, desviados en ángulos distintos en dependencia de su longitud de onda. En el plano focal de la lente L_2 se obtiene un conjunto de imágenes de la rendija S . Cada una de estas imágenes corresponde a una longitud de onda determinada.

Si sobre la rendija incide una luz constituida por la mezcla de varias ondas monocromáticas, sobre la placa MN se forma un *espectro de rayas*, o sea, una serie de rayas estrechas separadas por intervalos negros. En cambio, si la rendija se ilumina con luz blanca, se obtiene un *espectro continuo* con transiciones suaves de un color a otro.

3. En los espectroscopios la lente L_2 se hace de foco corto y la imagen real del espectro que aparece en su plano focal MN se ve por el ocular. En este mismo plano se encuentra un índice relacionado con un tornillo micrométrico y un volante graduado. Con él se gradúa el espectroscopio de acuerdo con la luz de cierta fuente normalizada.

§ 66.13. Holografía

1. En 1948 propuso D. Gábor un método nuevo de obtener imágenes radicalmente distinto de los utilizados en los instrumentos ópticos ordinarios. Por este descubrimiento fue galardonado en 1971 con el premio Nobel de Física. La esencia de este método consiste en lo siguiente.

Las imágenes que se obtienen con los instrumentos ópticos ordinarios (cámara fotográfica, linterna de proyección, proyector cinematográfico, ojo, etc.) registran la intensidad de las ondas, o sea, el cuadrado de su amplitud

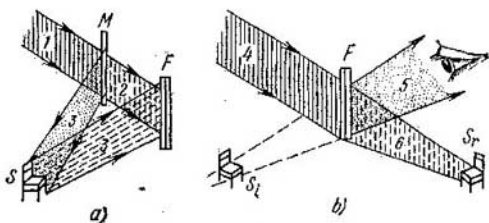


Fig. 66.19.

(§ 55.3). La fase de la onda se pierde en este caso. Gábor propuso utilizar el fenómeno de la interferencia para registrar las relaciones entre las frecuencias y las fases de la onda y después emplear la figura obtenida para reconstruir las relaciones entre las amplitudes. Si en la fotografía ordinaria sólo se registra un parámetro de la onda, su amplitud, por el método de Gábor se registra una información completa de todos los parámetros de la onda: frecuencia, fase y amplitud. La figura de interferencia que resulta en este caso se llama *holograma* (del griego $\text{o}\lambda\omicron\varsigma$, todo, y $\text{\gamma\rho\alpha\mu\mu\alpha}$, escrito), y el método para obtener la imagen, *holografía*:

2. Para obtener el holograma (fig. 66.19, a) se dirige un haz de luz 1 sobre un espejo semitransparente M que lo divide en dos haces. El haz de referencia 2 incide directamente sobre la placa fotográfica F; el haz objeto o señal 3 ilumina el objeto S y se difunde. Parte de la luz difusa incide sobre la placa fotográfica, en la que interfiere con el haz de referencia. La figura de interferencia que se produce se fija en la emulsión fotosensible. Esto es el holograma.

Por su aspecto externo el holograma no se parece en nada al objeto. Es un sistema de máximos y mínimos de interferencia análogos, por ejemplo, a un sistema de anillos de Newton (véase la fig. 61.4 ó la 61.7).

3. Conviene llamar la atención al hecho de que entre los haces 2 y 3 existe una gran diferencia de marcha, desde unas decenas de centímetros hasta varios metros. Esto crea ciertas dificultades en el proceso de obtención del holograma.

El espejo semitransparente divide cada haz luminoso en dos, los cuales, al encontrarse, deben dar una figura de interferencia. Pero ésta sólo se produce si en el punto dado

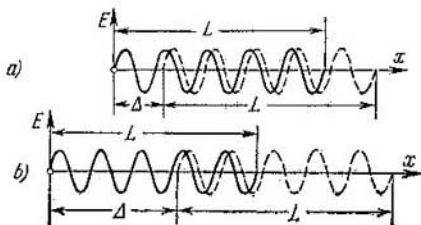


Fig. 66.20.

del espacio se encuentran oscilaciones pertenecientes a un mismo tren de ondas. Esto debe durar un intervalo de tiempo conmensurable con el tiempo de paso del tren. La longitud del tren L debe ser decenas e incluso centenares de veces mayor que la diferencia de marcha (fig. 66.20, a). En este caso la sucesión de los trenes en el punto de observación será cofásica, las ondas serán coherentes y se observará la figura de interferencia.

Pero si la diferencia de marcha resulta ser aproximadamente igual a la longitud del tren (fig. 66.20, b), la sucesión de los trenes en la onda de referencia y en la de objeto se efectúa independientemente y la figura de interferencia desaparece.

Suponiendo $\Delta \approx 1$ m, $L \approx 30\Delta \approx 30$ m, obtenemos que el tiempo de emisión del tren es

$$\tau \approx \frac{L}{c} \approx \frac{30}{3 \cdot 10^8} = 10^{-7} \text{ s.}$$

La indeterminación de la frecuencia según (61.8) es

$$\Delta\omega \approx 1/\tau \approx 10^7 \text{ s}^{-1},$$

y la indeterminación relativa (véase (61.9)) cuando la frecuencia de la luz es $\omega \approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$ será

$$\Delta\omega/\omega \approx 10^7/10^{15} \approx 10^{-8}.$$

Comparando esto con los datos de los §§ 61.4—61.6, vemos que la coherencia y cromaticidad de las fuentes ordinarias de luz son insuficientes para obtener los hologramas. Precisamente por eso, como dijo Gábor, la holografía sufrió un letargo de quince años. Hasta 1962—1963 no se inventaron los generadores ópticos cuánticos o láseres (§ 79.4), que emiten una luz muy coherente con longitud de tren varios millares de veces mayor que la de los trenes de las fuentes de luz ordinarias (por ejemplo, de las lámparas de mercurio). Con la luz coherente de los láseres se consiguen hologramas de buena calidad.

4. El esquema de la reconstrucción de la imagen se muestra en la fig. 66.19, *b*. El haz de reconstrucción 4 de luz coherente incide sobre el holograma bajo el mismo ángulo con que el haz de referencia 2 incidió sobre la placa fotográfica. Al difundirse en los máximos y mínimos de interferencia registrados en el holograma, la luz se transforma en dos haces, uno divergente 5 y otro convergente 6.

El haz 6 da una imagen real en relieve del objeto S_1 . Ésta tiene el defecto, como se ve en la figura, de ser una imagen especular, lo que no siempre es conveniente.

Para la observación se utiliza por lo general el haz divergente 5. El ojo, situado frente a él, mira a través del holograma como por una ventana y ve la imagen virtual del objeto S_1 , que coincide exactamente con el objeto.

5. Un método para obtener hologramas en color fue propuesto en 1962 por Yu. N. Denisiuk, basándose en la idea de Lipman sobre la fotografía en colores de las interferencias. Aquí (fig. 66.21, *a*) la onda de referencia 1 y la onda objeto 2 inciden por los dos lados sobre una capa gruesa de emulsión fotosensible F_1 , en la cual se produce un sistema de ondas estacionarias (§ 57.2). Para la reconstrucción, el holograma se ilumina bajo el mismo ángulo con la onda de reconstrucción 3 que se difunde en los vientres de la onda estacionaria. El observador percibe el haz difuso 4 y ve la imagen virtual S_1 (fig. 66.21, *b*). La peculiaridad del holo-

grama en colores consiste en que los vientres formados por las ondas de diferente longitud se encuentran en distintas capas. Por lo tanto, si el holograma se ilumina con luz blanca, en sus distintas partes se amplifican las ondas correspondientes al color que sirvió de base para el holograma y se ve la imagen en colores y relieve del objeto.

Por el descubrimiento del método para obtener hologramas en colores, le fue concedido a Yu.N. Denisiuk el Premio Lenin.

6. ¿Qué ventajas tiene el método holográfico que tan intensamente se está desarrollando en la actualidad? Veamos algunas de ellas.

a) En la fotografía ordinaria cada parte de la emulsión representa una parte separada del objeto. Por eso la infor-

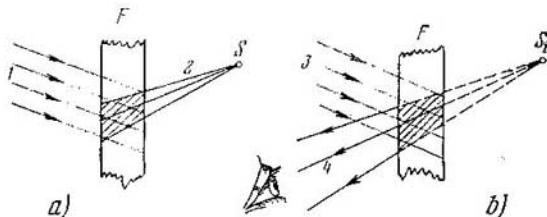


Fig. 66.21.

mación que contiene una parte de la fotografía no tiene ninguna relación con la información que contiene otra parte. La destrucción de una parte cualquiera de una fotografía significa la pérdida de la información correspondiente. En el holograma cada una de sus partes contiene información sobre toda la figura, por lo que la imagen que se obtiene, incluso de una parte pequeña del holograma, es una representación total y correcta del objeto, aunque menos brillante y nítida. Esto es análogo a como, utilizando un pequeño trozo de lente, se puede obtener la imagen de un objeto que con la lente entera, aunque su calidad sea algo peor.

Como almacén de información, el holograma es mucho más seguro que la fotografía ordinaria.

b) El holograma se caracteriza por tener una capacidad de información mucho mayor que la fotografía. Así, si en

una hoja de papel fotográfico o en una placa de 6×9 mm puede caber una página de texto impreso, en la misma superficie se puede inscribir, en dependencia de la calidad de la emulsión, de 100 a 300 hologramas. En la actualidad con el aumento brusco experimentado por la producción tipográfica, el problema del almacenamiento compacto de la información se ha agudizado y en el futuro se agudizará aún más. La holografía da la posibilidad de resolver este problema.

c) Por la holografía se puede resolver el problema de la creación del cine y la televisión estereoscópica en colores.

d) Si la longitud λ' de la onda de reconstrucción de la imagen es mayor que la longitud λ de la onda con que se obtuvo el holograma, la imagen será mayor que el objeto en la proporción λ'/λ . Esto permite elevar mucho el aumento y el poder separador del microscopio. Pero este microscopio es por ahora cosa futura.

Advertimos, sin embargo, que esto también tiene un límite: la longitud de onda λ' del haz de reconstrucción debe ser varias veces menor que la distancia entre las franjas de interferencia. En el caso contrario la emulsión resultará ser para esta onda un medio homogéneo (§ 62.8) y el efecto holográfico desaparecerá.

e) Tiene gran interés la holografía acústica. Las ondas sonoras coherentes se obtienen con mucha facilidad y el sonido (o ultrasonido) se propaga bien en los líquidos y sólidos. Por eso es fácil conseguir un holograma tridimensional acústico de objetos opacos. Si después se reconstruye la imagen con luz visible, podemos ver la estructura interna de estos cuerpos, por ejemplo, la estructura de una varilla metálica, de una viga de hormigón o las entrañas del organismo. Tanto para la técnica como para la medicina esto ofrece un interés colosal.

La principal dificultad con que se tropieza en este caso son los métodos para registrar y fijar los hologramas acústicos. En la actualidad se están investigando eficazmente ciertas vías de solución que aquí no podemos exponer.

7. Nos hemos detenido solamente en algunas aplicaciones de la holografía. Por lo visto hasta ahora no se han descubierto teóricamente todas las posibilidades de este método y menos aún sus aplicaciones prácticas. Pero se puede predecir con seguridad que la holografía encontrará amplia utilización en un futuro próximo.