

BM YAVORSKI, A.A. PINSKI

**FUNDAMENTOS
DE
FÍSICA**

I



Б. М. ЯВОРСКИЙ, А. А. ПИНСКИЙ

**ОСНОВЫ
ФИЗИКИ**

том I

МЕХАНИКА
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

МОСКВА «НАУКА»

B. M. YAVORSKI, A. A. PINSKI

**FUNDAMENTOS
DE
FÍSICA**

I

MECÁNICA
FÍSICA MOLECULAR
ELECTRODINÁMICA

Traducido al español
por el ingeniero
Antonio Ballesteros Elías

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Impreso en la URSS

На испанском языке

© Издательство «Наука». 1981

© Traducción al español. Editorial Mir. 1983

ÍNDICE

Prólogo _____ 18

PRIMERA PARTE

MOVIMIENTO Y FUERZAS

Capítulo 1. Velocidad	25
§ 1.1. Movimiento mecánico (25). § 1.2. Sistema de referencia. Trayectoria (27). § 1.3. Movimiento rectilíneo. Ley de movimiento (29). § 1.4. Movimiento uniforme (31). § 1.5. Movimiento variado (32). § 1.6. Velocidad media (34). § 1.7. Velocidad instantánea del movimiento variado (35).	
Capítulo 2. Inercia	37
§ 2.1. Principio de la inercia (37). § 2.2. Sistemas inerciales de referencia (40). § 2.3. Principio de la relatividad (41). § 2.4. Transformaciones de Galileo (43). § 2.5. Ley clásica de composición de velocidades (45).	
Capítulo 3. Magnitudes escalares y vectoriales	46
§ 3.1. Magnitudes escalares (46). § 3.2. Magnitudes vectoriales (47). § 3.3. Ciertas operaciones con vectores (48). § 3.4. Descomposición de un vector en dos sumandos (componentes) (50). § 3.5. Velocidad vector (51). § 3.6. Composición de velocidades (53).	
Capítulo 4. Aceleración	55
§ 4.1. Aceleración media e instantánea (55). § 4.2. Movimiento rectilíneo variable (55). § 4.3. Movimiento recti-	

líneo uniformemente variado (56). § 4.4. Gráfica de velocidad con el movimiento uniformemente variado (57). § 4.5. Cálculo gráfico de los desplazamientos (58). § 4.6. Desplazamiento y velocidad media con movimiento uniformemente variado (59). § 4.7. Movimiento uniforme de un punto material por una circunferencia (60). § 4.8. Aceleración con movimiento uniforme de un punto material por una circunferencia (61).

Capítulo 5. Fuerza 63

§ 5.1. La fuerza como medida de interacción de los cuerpos (63). § 5.2. Deformaciones elásticas y plásticas (64). § 5.3. Fuerza vector (66). § 5.4. Composición y descomposición de fuerzas aplicadas a un punto material (68).

Capítulo 6. Fuerza de la gravedad, peso y masa 69

§ 6.1. Fuerza de la gravedad. Peso (69). § 6.2. Caída libre (71). § 6.3. Masa de un cuerpo (73). § 6.4. Densidad de la sustancia (74).

Capítulo 7. Ley fundamental de dinámica 75

§ 7.1. Fuerza y aceleración (75). § 7.2. Aplicaciones de la ley fundamental de dinámica (79). § 7.3. Ingravedad (82). § 7.4. Sistema de unidades (84). § 7.5. Sistema Internacional de Unidades (85).

Capítulo 8. Ley de movimiento de un punto material y condiciones iniciales 87

§ 8.1. Problema fundamental de dinámica (87). § 8.2. Movimiento de un punto material bajo la acción de la fuerza de la gravedad (88). § 8.3. Solución numérica del problema fundamental de dinámica (91). § 8.4. Movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza elástica (92). § 8.5. Magnitudes que determinan la ley de movimiento de un cuerpo material (95).

Capítulo 9. Gravitación 97

§ 9.1. Descubrimiento de la ley de la gravitación (97).
§ 9.2. Ley de la gravitación universal (99). § 9.3. Experimento de Cavendish (100). § 9.4. Cálculo de las distancias del Sol a los planetas (101). § 9.5. Campo gravitatorio (102). § 9.6. Intensidad del campo gravitatorio (103). § 9.7. Campo gravitatorio de la Tierra (104). § 9.8. Influencia de la rotación de la Tierra sobre la aceleración de la caída libre (106).

Capítulo 10. Fuerzas eléctricas 107

§ 10.1. Carga eléctrica (107). § 10.2. Ley de Coulomb (108).
§ 10.3. Unidad de carga (111). § 10.4. Dipolo (112). § 10.5. Campo eléctrico. Intensidad (115). § 10.6. Campo de una carga puntual y un dipolo (115).

Capítulo 11. Rozamiento 118

§ 11.1. Rozamiento externo e interno (viscosidad) (118).
§ 11.2. Rozamiento en reposo (119). § 11.3. Ángulo de rozamiento en reposo (122). § 11.4. Rozamiento de deslizamiento (123). § 11.5. Rozamiento de rodadura (124). § 11.6. Movimiento de los cuerpos bajo la acción de las fuerzas de rozamiento (125). § 11.7. Rozamiento interno (viscosidad) (126). § 11.8. Movimiento de un cuerpo en un líquido (128). § 11.9. Caída de un cuerpo en un líquido o gas (131).

Capítulo 12. Teoría de la relatividad 134

§ 12.1. Velocidad de la luz y ley de composición de velocidades (134). § 12.2. Postulados fundamentales de la teoría especial de la relatividad (136). § 12.3. Relatividad de la simultaneidad y la longitud (137). § 12.4. Transformaciones relativistas de las coordenadas. Ley relativista de composición de velocidades (141). § 12.5. Carácter limitado de la velocidad de la luz (143). § 12.6. Transformaciones de Lorentz (144). § 12.7. Longitud del segmento (145). § 12.8. Intervalo de tiempo entre dos acontecimientos (146). § 12.9. Intervalo de tiempo

entre causa y efecto (147). § 12.10. Correlación entre la mecánica relativista y newtoniana (149).

Capítulo 13. Masa, cantidad de movimiento y fuerza en la teoría de la relatividad 151

§ 13.1. Masa relativista y cantidad de movimiento (151). § 13.2. Ley fundamental de dinámica en la teoría de la relatividad (153). § 13.3. Correlación entre la dinámica newtoniana y relativista (154).

Capítulo 14. Ley de movimiento y principio de incertidumbre 157

§ 14.1. Condiciones iniciales y aparatos de medida (157). § 14.2. Principio de incertidumbre (indeterminación) (161). § 14.3. Principio de incertidumbre y la mecánica clásica (162).

SEGUNDA PARTE

LEYES DE LA CONSERVACIÓN

Capítulo 15. Ley de la conservación de la cantidad de movimiento 167

§ 15.1. Sistema cerrado de cuerpos (167). § 15.2. Ley de la conservación de la cantidad de movimiento (169). § 15.3. Efecto de repercusión (170). § 15.4. Propulsión reactiva a chorro (172). § 15.5. Cálculo de la reserva de combustible (174). § 15.6. Centro de inercia (175). § 15.7. Movimiento del centro de inercia (176). § 15.8. Masa relativista (178).

Capítulo 16. Energía total y cinética 180

§ 16.1. Energía total de un cuerpo (180). § 16.2. Energía cinética (181). § 16.3. Energía y cantidad de movimiento (182). § 16.4. Energía cinética y trabajo (183). § 16.5. Potencia (186). § 16.6. Unidades de energía, trabajo y potencia (186). § 16.7. Cantidad de movimiento y energía de una partícula localizada (187).

Capítulo 17. Teoría elemental del choque 190

§ 17.1. ¿Qué es el choque? (190). § 17.2. Choque perfectamente inelástico (191). § 17.3. Choque elástico (193). § 17.4. Frenado de neutrones (195). § 17.5. Presión del flujo de partículas contra la pared (196).

Capítulo 18. Fuerzas conservativas y energía potencial 198

§ 18.1. Trabajo de una fuerza variable (198). § 18.2. Trabajo de una fuerza elástica (200). § 18.3. Trabajo de la fuerza de Coulomb (202). § 18.4. Trabajo de la fuerza de gravitación (204). § 18.5. Fuerzas conservativas (205). § 18.6. Energía potencial de las interacciones elásticas de Coulomb y de gravitación (206). § 18.7. Potencial del campo electrostático (208). § 18.8. Potencial del campo de una carga puntual (209). § 18.9. Energía del campo eléctrico (210).

Capítulo 19. Ley de la conservación de la energía en la mecánica newtoniana 211

§ 19.1. Energía mecánica y su conservación (211). § 19.2. Energía mecánica y rozamiento (212). § 19.3. Velocidades cósmicas (213). § 19.4. «Rizo del diablo» (214). § 19.5. Curvas potenciales (215). § 19.6. Energía potencial y equilibrio (219).

Capítulo 20. Energía interna 220

§ 20.1. Energía interna de un sistema de partículas (220). § 20.2. Variación de la energía interna al deformarse el cuerpo (222). § 20.3. Variación de la energía interna del cuerpo con los procesos térmicos (223). § 20.4. Variación de la energía durante las reacciones químicas (224). § 20.5. Variación de la energía interna en las reacciones nucleares (226).

Capítulo 21. Ley de la conservación de la energía 227

§ 21.1. El trabajo como medida de la variación de las energías total e interior (227). § 21.2. Transmisión de

calor (228). § 21.3. Cantidad de calor (230). § 21.4. Primer principio de la termodinámica (231). § 21.5. Sistema aislado adiabáticamente (232). § 21.6. Ley de la conservación de la energía (233) § 21.7. Ley de la conservación de la masa (234). § 21.8. Algo más acerca de la masa relativista (236).

Capítulo 22. Ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento 237

§ 22.1. Particularidades del movimiento rotativo (237).
§ 22.2. Energía cinética y momento de inercia (238).
§ 22.3. Dependencia entre el momento de inercia y la posición del eje de rotación (240). § 22.4. Momento de fuerza (243). § 22.5. Condición para el equilibrio de un cuerpo que tiene eje de rotación (244). § 22.6. Momento de cantidad de movimiento y ecuación fundamental de dinámica (245). § 22.7. Ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento (246). § 22.8. Analogía entre las magnitudes y las correlaciones entre ellas con movimientos de traslación y rotativo (250).

Capítulo 23. Simetría en la naturaleza y leyes de la conservación 251

§ 23.1. Las leyes de la conservación como leyes fundamentales de la naturaleza (251). § 23.2. Las leyes de la conservación como principios de imposibilidad (253). § 23.3. Las leyes de la conservación y la simetría del espacio—tiempo (254). § 23.4. La homogeneidad del tiempo y la conservación de la energía (255).

Capítulo 24. Sistemas no inerciales de referencia y gravitación 256

§ 24.1. Fenómenos en un sistema de referencia en movimiento acelerado (256). § 24.2. Fuerza de inercia (259). § 24.3. Particularidades de las fuerzas de inercia (261). § 24.4. El espacio y el tiempo en los sistemas no inerciales de referencia (261). § 24.5. Principio de equivalencia (266). § 24.6. Concepto de la teoría de gravitación de Einstein (268). § 24.7. Paradoja de los gemelos (272).

TERCERA PARTE

TEORÍA CINÉTICO-MOLECULAR DE UN GAS

Capítulo 25. Movimiento molecular 276

§ 25.1. Cómo fue medida la velocidad de movimiento de las moléculas (276). § 25.2. Distribución de las moléculas por las velocidades (278). § 25.3. Longitud del recorrido libre de una molécula (281). § 25.4. Difusión (284). § 25.5. Ley de la difusión (285). § 25.6. Separación de las mezclas de gases (287).

Capítulo 26. Gases ideales o perfectos 290

§ 26.1. Presión de los gases (290). § 26.2. Unidad de presión (292). § 26.3. Gas ideal o perfecto (293). § 26.4. Temperatura (296). § 26.5. Temperatura absoluta y ecuación de estado de un gas ideal (297). § 26.6. Termómetro de gas (298). § 26.7. Temperatura absoluta y temperatura según la escala de Celsius (300). § 26.8. Cero absoluto (301). § 26.9. Constantes de Avogadro y Boltzmann (303). § 26.10. Distribución de las moléculas en un campo de fuerzas (306). § 26.11. Distribución barométrica (307).

Capítulo 27. Gas ideal y primer principio de termodinámica 310

§ 27.1. Energía interna de un gas ideal monoatómico (310). § 27.2. Trabajo al dilatarse un gas ideal (312). § 27.3. Primer principio de termodinámica y capacidad calorífica de un gas (313). § 27.4. Transformación isócara (314). § 27.5. Transformación isobárica (315). § 27.6. Transformación isotérmica (317). § 27.7. Transformación adiabática (318). § 27.8. Capacidad calorífica de un gas biatómico (320). § 27.9. Concepto de la teoría cuántica de la capacidad calorífica de los gases (324).

Capítulo 28. Segundo principio de termodinámica 328

§ 28.1. Transformaciones cuasiestáticas (328). § 28.2. Transformaciones reversibles (330). § 28.3. Irreversibilidad de las transformaciones térmicas reales (331). § 28.4. Irreversibilidad y estadística (333). § 28.5. Difusión y probabilidad termodinámica (337). § 28.6. Probabilidad termodinámica y otras transformaciones térmicas (338). § 28.7. Probabilidad termodinámica y entropía (339). § 28.8. Entropía y transmisión de calor (341). § 28.9. Segundo principio de termodinámica (344). § 28.10. Sentido estadístico del segundo principio de termodinámica. Fluctuaciones (345). § 28.11. Movimiento browniano y fluctuaciones (346). § 28.12. Movimiento browniano y constante de Boltzmann (348).

Capítulo 29. Máquinas térmicas 352

§ 29.1. Máquinas térmicas y el desarrollo de la técnica (352). § 29.2. Motor térmico (352). § 29.3. Estructura esquemática y balance energético de motor térmico (354). § 29.4. Motor térmico y segundo principio de termodinámica (355). § 29.5. Ciclo de Carnot (357). § 29.6. Rendimiento de un motor real (358). § 29.7. Ciclo inverso de Carnot (359). § 29.8. Instalación frigorífica y bomba térmica (361).

Capítulo 30. Principios de dinámica de los gases 363

§ 30.1. Parámetros termodinámicos de un gas en movimiento (363). § 30.2. Ecuación de continuidad (363). § 30.3. Ecuación de la cantidad de movimiento (364). § 30.4. Ecuación de Bernoulli (365). § 30.5. Velocidad de propagación de perturbaciones elásticas (367). § 30.6. Cómo tener en cuenta la compresibilidad de un gas. Número de Mach (369). § 30.7. Cono de Mach (370). § 30.8. Onda de choque frontal (372). § 30.9. Resistencia de ondas (373). § 30.10. Tobera (374). § 30.11. Analogía entre la tobera y la máquina térmica (376). § 30.12. Tobera de Laval (377). § 30.13. Motor de retropropulsión (377). § 30.14. Ala de avión (379). § 30.15. Presión en la corriente de un líquido (381). § 30.16. Definición de la viscosidad (382).

CUARTA PARTE
FUERZAS MOLECULARES Y ESTADOS
DE AGREGACIÓN DE LA MATERIA

Capítulo 31. Fuerzas moleculares	384
§ 31.1. Densidad y compresibilidad de la materia (384).	
§ 31.2. Fuerzas moleculares (386). § 31.3. Origen eléctrico de las fuerzas moleculares (387). § 31.4. Gráfica de las fuerzas moleculares (389). § 31.5. Curva de potencial de la interacción molecular (394). § 31.6. Dilatación térmica de los sólidos y líquidos (392).	
Capítulo 32. Orden de largo alcance	395
§ 32.1. Monocristal (395). § 32.2. Policristal (397).	
§ 32.3. Red cristalina. Orden de largo alcance (398).	
§ 32.4. Defectos del empaquetamiento y estructura en bloques del cristal (399). § 32.5. Movimiento de los defectos y difusión (401). § 32.6. Movimiento de las dislocaciones y deformaciones del cristal (403).	
Capítulo 33. Empaquetamiento compacto de las partículas	405
§ 33.1. Tipos de enlaces cristalinos (405). § 33.2. Empaquetamiento muy compacto de bolas iguales (408). § 33.3. Empaquetamientos muy compactos de bolas con radios diferentes (410). § 33.4. Redes que no se pueden representar como empaquetamiento de bolas (410). § 33.5. Estructura del hielo (413). § 33.6. Polímeros (414).	
Capítulo 34. Ordenación próxima	415
§ 34.1. Singularidades del estado líquido (415). § 34.2. Estructura del líquido y sus propiedades (417). § 34.3. Tiempo medio del estado sedentario (419). § 34.4. Difusión en los líquidos (421). § 34.5. Viscosidad de los líquidos (422). § 34.6. Cuerpos amorfos (424). § 34.7. Energía de la capa superficial y tensión superficial de líquido (425). § 34.8. Presión bajo la superficie curvada de un líquido (426). § 34.9. Fenómenos capilares (428).	

Capítulo 35. Vapor 429

§ 35.1. Evaporación (429). § 35.2. Vapor saturado (431).
§ 35.3. Presión del vapor saturado (433). § 35.4. Isoterma del vapor (435). § 35.5. Estado crítico de la sustancia (437). § 35.6. Humedad del aire (439).

Capítulo 36. Transiciones de fase 441

§ 36.1. Variación del estado de agregación (441). § 36.2. Diagrama de la transición líquido—gas (442). § 36.3. Diagrama de la transición cristal—gas (443). § 36.4. Diagrama de la transición cristal—líquido (443). § 36.5. Diagrama de la transición cristal—cristal (445). § 36.6. Punto triple (447). § 36.7. Variación de la energía interna y de la entropía con las transiciones de fase de primer género (447). § 36.8. Estados metaestables (450). § 36.9. Condensación. Vapor sobresaturado (452). § 36.10. Ebullición. Líquido sobrecalentado (454). § 36.11. Licuación de los gases (455).

QUINTA PARTE
ELECTRODINÁMICA

Capítulo 37. Campo de cargas inmóviles en el vacío 459

§ 37.1. Líneas de fuerza (459). § 37.2. Superficies equipotenciales (460). § 37.3. Relación entre la intensidad y el potencial (462). § 37.4. Dipolo en el campo eléctrico (463). § 37.5. Condensador plano (465). § 37.6. Capacidad eléctrica (467). § 37.7. Energía del campo. Densidad de energía (468). § 37.8. Fuerza de interacción entre las placas de un condensador (468). § 37.9. Conductor en el campo eléctrico (469). § 37.10. Determinación de la carga del electrón (471).

Capítulo 38. Dieléctricos 474

§ 38.1. Campo eléctrico en presencia de un dieléctrico (474). § 38.2. Vector de polarización (475). § 38.3. Susceptibilidad eléctrica (476). § 38.4. Energía del campo en un dieléctrico (477). § 38.5. Polarizabilidad de deformación (478). § 38.6. Polarizabilidad dipolar (480).

Capítulo 39. Corriente continua 483

§ 39.1. Campo exterior. Tensión y fem (483). § 39.2. Intensidad y densidad de corriente (486). § 39.3. Ley de Ohm para un sector homogéneo del circuito (488). § 39.4. Resistencia (488). § 39.5. Ley de Ohm en forma diferencial (489). § 39.6. Ley de Ohm para un sector heterogéneo del circuito y para un circuito cerrado (490). § 39.7. Ley de Joule—Lenz (491). § 39.8. Carga y descarga de un condensador (492).

Capítulo 40. Campo magnético en el vacío 493

§ 40.1. Interacción de corrientes. Fuerzas magnéticas (493). § 40.2. Ley de transformación para la cantidad de movimiento transversal y la fuerza transversal (495). § 40.3. Interacción entre cargas en movimiento (497). § 40.4. Vector de inducción del campo magnético. Líneas de fuerza (499). § 40.5. Campo magnético de un conductor con corriente (500). § 40.6. Momento magnético (503). § 40.7. Intensidad del campo magnético (506). § 40.8. Invariancia de la carga eléctrica (507).

Capítulo 41. Cargas y corrientes en el campo magnético 509

§ 41.1. Fuerza de Lorentz (509). § 41.2. Movimiento de las partículas cargadas en un campo magnético homogéneo (510). § 41.3. Determinación del signo de la carga de las partículas elementales (512). § 41.4. Ciclotrón (513). § 41.5. Energía de la partícula y condición de sincronización (516). § 41.6. Sincrofasotróon (518). § 41.7. Carga específica del electrón (521). § 41.8. Carga específica del ion (523). § 41.9. Conductor con corriente en el campo magnético (525). § 41.10. Cuadro con corriente en el campo magnético (526).

Capítulo 42. Sustancias magnéticas 527

§ 42.1. Tres tipos de sustancias magnéticas (527). § 42.2. Momento magnético del átomo (529). § 42.3. Magnitudes que caracterizan el campo magnético en la sustancia (531). § 42.4. Diamagnetismo (532). § 42.5. Paramagnetismo (535). § 42.6. Ferromagnetismo. Punto de Curie (536). § 42.7. Histéresis (539). § 42.8. Estructura por do-

minios de las sustancias ferromagnéticas (541). § 42.9. Experimento de Einstein-de-Haas (545). § 42.10. Experimento de Stern-Gerlach (547). § 42.11. Spin del electrón (548). § 42.12. Antiferromagnetismo (550).

Capítulo 43. Inducción electromagnética 553

§ 43.1. Descubrimiento de Faraday (553). § 43.2. Fenómeno de inducción electromagnética y fuerza de Lorentz (554). § 43.3. Fuerza electromotriz de la inducción (556). § 43.4. Fenómeno de inducción en un conductor inmóvil (557). § 43.5. Intensidad del campo inducido (558). § 43.6. Campo electromagnético y principio de la relatividad (559). § 43.7. Ley de inducción de Faraday (560). § 43.8. Regla de Lenz (562). § 43.9. Inducción electromagnética y ley de la conservación de la energía (562). § 43.10. Autoinducción (564). § 43.11. Energía del campo electromagnético (565). § 43.12. Conexión de un circuito con inductancia (567).

Capítulo 44. Conductividad eléctrica de los sólidos 568

§ 44.1. Base experimental de la teoría electrónica de conductividad de los metales (568). § 44.2. Efecto Hall (570). § 44.3. Gas electrónico (574). § 44.4. Deducción de la ley de Ohm de la teoría electrónica (576). § 44.5. Conductividad de los metales y los semiconductores (579). § 44.6. Deducción de la ley de Joule-Lenz (580). § 44.7. Diferencia de potencial de contacto (583). § 44.8. Termoelectricidad (584). § 44.9. Trabajo de salida (586).

Capítulo 45. Capacidad calorífica y conductividad térmica de los sólidos 588

§ 45.1. Capacidad calorífica (588). § 45.2. Capacidad calorífica de los metales (590). § 45.3. Conductividad térmica de los aisladores (591). § 45.4. Conductividad térmica de los metales (594).

Capítulo 46. Conductividad eléctrica de los electrolitos 597

§ 46.1. Disociación electrolítica (597). § 46.2. Ley de Ohm y conductividad de los electrolitos (598). § 46.3. Leyes de Faraday (600). § 46.4. Elemento galvánico (601).

Capítulo 47. Corriente en el vacío	602
§ 47.1. Emisión termoeléctrica (602). § 47.2. Diodo y su característica (604). § 47.3. Triodo y su característica (606). § 47.4. Tubo de rayos catódicos (608).	
Capítulo 48. Corriente en los gases	610
§ 48.1. Ionización y recombinación (610). § 48.2. Descarga no espontánea (611). § 48.3. Ionización por choque (614). § 48.4. Contador de Geiger-Müller (616). § 48.5. Descarga espontánea. Plasma (617). § 48.6. Descarga luminiscente (619). § 48.7. Plasma en el campo magnético (622). § 48.8. Generador magnetohidrodinámico (MHD) (624).	
Índice alfabético	627

PRÓLOGO

En la actualidad, la física va a la cabeza de las ciencias naturales. Esto es debido a la riqueza y variedad de las ideas y los métodos de las investigaciones de física moderna, su importancia fundamental para la gnoseología (teoría de los conocimientos), para el desarrollo de la concepción dialéctico-materialista del mundo. No es de menor importancia la influencia de la física para el desarrollo de las fuerzas productivas de la sociedad. Una serie de dominios de la técnica moderna, como electrónica (incluida la electrónica de semiconductores y cuántica), técnica nuclear y construcción de cohetes, radiotecnica, etc., se entrelazan tan estrechamente con la física, que se han convertido en sus partes integrantes. Al mismo tiempo, en las ramas «clásicas» de la ciencia y la técnica, formadas hace mucho, la aplicación de nuevas ideas y métodos físicos de investigación llevan con frecuencia a soluciones, nuevas en principio, de una serie de problemas.

Han surgido y desarróllanse de modo impetuoso, asignaturas afines a las ciencias generales e ingeniería, que se encuentran en el punto de unión de varias ciencias y que se basan en la física (cibernética, radioastronomía, biónica, biofísica, etc.). Se han ampliado de forma notable las posibilidades para la ulterior penetración, unos en otros, de diversos ámbitos de los conocimientos. Además, es característica para nuestro tiempo la brusca reducción de los plazos entre los descubrimientos científicos y su aplicación en la economía nacional, la vida cotidiana y las actividades prácticas.

Todo lo dicho ha provocado un aumento considerable de las exigencias que se presentan al curso moderno de física en los sistemas de enseñanza tanto en la escuela básica, como en la superior. En la primera, ha sido introducido un nuevo programa de física, se han creado nuevos libros de texto y materiales didácticos. En los grados superiores de la

escuela básica incluyéronse cursos facultativos que tienen como fin familiarizar a los alumnos, interesados por esto, con ciertos problemas de la física moderna. En clases especializadas y escuelas básicas fisicomatemáticas, la física es estudiada por programas de elevado nivel.

La elevación del nivel de la enseñanza de física en la escuela básica y los centros de enseñanza superior, plantea una serie de problemas metódicos. El más complicado de ellos yace en la creación de los correspondientes libros de texto y materiales didácticos. Al mismo tiempo, es necesario resolver el problema que (sin pretensiones de plenitud y rigurosidad) enunciaríamos del modo siguiente: exponer las ideas fundamentales de física moderna, su sentido físico, los métodos de investigación y los resultados más importantes sin aplicar un complicado aparato matemático. Con la particularidad de que hay que mostrar las relaciones orgánicas de física moderna y clásica, el valor y la importancia inapreciable de aquellos resultados de física «clásica», sin la asimilación de los cuales es imposible penetrar en el círculo de ideas de física moderna, comprender sus métodos y abarcar sus logros.

La experiencia de la enseñanza de física en la escuela básica y centros de enseñanza superior, adquirida en el transcurso de muchos años, llevó a los autores a la idea, de que el libro en que fuera resuelto este problema, podría ser creado al desechar la sucesión tradicional de exposición del material didáctico. La idea metódica fundamental del libro, que ofrecemos al lector, consiste en que *desde el principio hace resaltar las relaciones orgánicas entre la física clásica y la moderna.*

En particular, esto nos obliga a llevar por todo el curso de mecánica y electrodinámica las ideas de la teoría especial de la relatividad y, en la medida más completa, utilizarlas al enunciar los conceptos fundamentales. Algunas de las más importantes ideas de la mecánica cuántica, también han de ser utilizadas durante todo el curso de física.

Al realizar estas ideas, los autores han tropezado con grandes dificultades metódicas. La principal de ellas consiste en introducir desde el principio del curso sistematizado los conceptos y representaciones, cuyo sentido va aclarándose sólo de modo gradual durante todo el curso de física. No obstante, semejante dificultad también existe en la confección tradicional de dicho curso.

Además, con el sistema tradicional de exposición, cuando los conceptos y representaciones de la física moderna se aducen al final del curso, de forma inconsciente, creamos en los estudiantes cierta barrera psicológica que impide la asimilación de las ideas de la física moderna, es decir, éstas parecen contradecir al «sentido común», que precisamente tiende a consolidar la metodología tradicional.

He aquí la causa por la que, a pesar de todo, nos hemos decidido a escribir este libro, aunque con claridad comprendemos que las dificultades con que vamos a tropezar, tienen que llevar a notables insuficiencias en la exposición de la materia. El libro está destinado para aquellos lectores que han asimilado el curso escolar de física y desean conocer los fundamentos de física clásica y moderna. El manual será útil a los que piensan ingresar en los centros de enseñanza superior, permitirá repetir el curso escolar a nivel más elevado, lo que, sin duda alguna, favorecerá a la profundización y concretización de los conocimientos. Esperamos que también prestará ayuda a los alumnos de los grados superiores de la escuela básica tanto al estudiar el curso fundamental de física, como, y en particular, al estudiar los cursos escolares facultativos.

También sacarán determinado provecho al trabajar con este libro los estudiantes de los centros de enseñanza superior.

Sin embargo, no debemos suponer que la falta de un aparato matemático complicado en el libro, lo hace de inmediato fácil para su lectura y asimilación. La física es una asignatura complicada y su estudio requiere serios esfuerzos. Por esta razón, todo libro por el que puede ser estudiada la física, exige tiempo y trabajo serio e intenso. Semejante libro no puede ser simplemente leído, con él hay que trabajar.

Los autores tienen la esperanza de que el tiempo y los esfuerzos que gasten los lectores para estudiar los fundamentos de física con ayuda de este manual, serán compensados en los posteriores estudios y trabajos.

En la tercera edición del libro, en determinado grado, se ha tenido en cuenta la gran cantidad de referencias de los lectores acerca de las dos primeras ediciones y cierta experiencia de trabajo con este libro de los profesores de una serie de escuelas corrientes y fisicomatemáticas en diversas ciudades y pueblos de la Unión Soviética, así como de

las secciones preparatorias de los centros de enseñanza superior.

De acuerdo con el nuevo contenido de la enseñanza de la matemática, los graduados de las escuelas han asimilado elementos de cálculo diferencial e integral. Tomando en consideración este hecho, en la tercera edición del libro han sido introducidos los correspondientes conceptos y símbolos.

En la tercera edición hemos precisado los valores de las magnitudes físicas fundamentales, así como algunos términos y definiciones.

Expresamos nuestro profundo reconocimiento a todos los lectores que han enviado sus indicaciones y deseos. Reconocemos con claridad que esta edición también necesita un posterior perfeccionamiento y agradeceremos toda clase de observaciones críticas.

Rogamos envíen sus observaciones y referencias acerca de este libro a la siguiente dirección: Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, 1-110, GSP, URSS.

Cómo trabajar con el libro

El estudio exitoso de la física elemental tiene como objetivo, no sólo la preparación para los exámenes de ingreso al centro de enseñanza superior, sino que, principalmente, la creación de una sólida base para la enseñanza posterior en dichos centros.

Durante el estudio reiterado del curso surge una complicada situación psicológica: el lector cree que todo le es ya conocido, que para la asimilación del material no hay que aplicar grandes esfuerzos y, por fin, que es suficiente hojear el libro. Todo esto es una profunda equivocación. El libro de texto no se puede leer, hay que estudiarlo, es decir, con atención estudiar a fondo todos sus apartados, prestando particular atención a las definiciones de las nociones fundamentales, a las enunciaciones de las leyes principales y a los corolarios que de ellas se desprenden.

En la actualidad toda la física, todos sus conceptos y leyes se agrupan alrededor de las teorías fundamentales: la mecánica newtoniana y la teoría de la relatividad, la teoría cinético-molecular y los principios de termodinámica, la teoría del campo electromagnético y la teoría electrónica, la teoría de oscilaciones y la teoría cuántica. La asimilación

de estas teorías favorece a la comprensión más profunda de la esencia de los fenómenos y leyes físicos, permite desde un punto de vista único, contemplar el enorme material real. Al mismo tiempo, el estudio de las teorías fundamentales exige del que estudia el presente manual, el atento análisis de concepciones, factores y regularidades aislados y la determinación de su puesto en el sistema de teorías físicas. Con ello, es de importancia comprender si la concepción dada es una definición, factor experimental, corolario lógico o generalización, etc. Sólo tratando de semejante modo el material expuesto, es posible su profunda comprensión, lo que es condición obligatoria para la sólida asimilación de la física.

Queremos llamar la atención del lector acerca de la necesidad del trabajo sistemático y consecutivo con el manual. La cuestión consiste en que tanto por el volumen del material, como por su estructura, el presente libro se diferencia considerablemente del libro de texto escolar y de otros manuales para aquellos que van a ingresar en los centros de enseñanza superior. La singularidad de este libro consiste en que en él están entrelazadas de forma orgánica la física clásica y la moderna.

En el libro, el material está expuesto en una secuencia lógica que corresponde a la idea fundamental y, por lo tanto, debe estudiarse observando dicha secuencia. Sólo la atenta lectura, el análisis de todos los cálculos y su deducción por el estudiante, la asimilación de la lógica de los razonamientos físicos, llevará a la comprensión real de la esencia del problema y de forma automática inconscientemente favorecerá a su sólida retención en la memoria. En este sentido es muy útil tomar apuntes del material, sobre todo de su parte que está indicada en el programa para las personas que piensen ingresar en los centros de enseñanza superior. Deben tratar de enunciar con precisión las definiciones y deducciones, comprobándolas por el texto del manual, teniendo en cuenta que hablamos de la precisión en esencia y no de la coincidencia textual de las formulaciones.

Al trabajar con el manual presten atención a la descripción de los experimentos. La mayoría de los estudiados en el manual, son experimentos fundamentales, que han servido para la creación de una u otra teoría física.

El alto nivel teórico de desarrollo de la física conduce a que en ella se utilicen con extensidad los métodos matemá-

tivos y múltiples conceptos se deducen de los fundamentales. Junto con esto, la física, como parte de las ciencias naturales, es una ciencia experimental. En la física, el experimento sirve tanto de base inicial, que suministra material real, como de método de comprobación de uno u otro corolario de la teoría. Es decir, el experimento sirve de criterio de la realidad. Por otro lado, la descripción en el libro de una serie de experimentos tiene como objetivo familiarizar al lector con las múltiples aplicaciones de la física en la práctica.

No se puede estudiar la física sin aprender a resolver problemas. Para fijar los conocimientos y perfeccionar el hábito de resolver problemas, se puede hacer uso de una serie de compendios de problemas, editados para ayudar a los que piensan ingresar en los centros de enseñanza superior. En particular ha sido editado un compendio de problemas* en el cual éstos y sus soluciones están de acuerdo con el material teórico del manual de dos tomos según el volumen de nociones, orden de exposición, sistema de designaciones, etc.

Previamente examinen todos los ejemplos que se estudian en los dos tomos, esto facilitará la resolución de problemas análogos. Hay que tener en cuenta, que la resolución de problemas físicos (salvo los ejercicios estándar) es un trabajo creador que con dificultad se somete a estandarización y algoritmización. ¡Por esta razón, no hay que dejarse llevar por el pánico si no se consigue resolver el problema de golpe! Con la mayor frecuencia, esto significa que la teoría se ha asimilado de manera superficial y formal. Retornen de nuevo al correspondiente apartado del manual y estúdiendolo con mayor atención. En casos complicados no se debe despreciar la ayuda de los profesores, los compañeros, así como las indicaciones que hay al final del compendio de problemas.

En los dos tomos del manual ha sido aceptado un sistema de citas sobre el material anterior, dadas en forma de indicación del párrafo donde aquel se estudió o bien de las fórmulas que sirven de base para los razonamientos. Si no se acuerdan de dicho material, retornen a él y sólo entonces quedará claro el material nuevo que se expone. En el texto también están indicados los capítulos o párrafos posteriores.

* A. A. Pinski. Problemas de física. Moscú, Naúka, 1977 (en ruso).

donde el material que se considera será empleado o bien ampliado y profundizado. Esto señala la importancia del presente material para la ulterior exposición.

Con el fin de facilitar la búsqueda de la información necesaria —nociones, leyes, fenómenos, etc.— el manual tiene detallado contenido e índice de materias. En ellos se indican las páginas, en las que dicho material se expone de la manera más completa o por primera vez. Las siguientes citas pueden ser halladas en el texto.

Apreciado lector: ¡le deseamos éxitos al trabajar con el presente manual!

Los autores

MOVIMIENTO Y FUERZAS

Capítulo 1

VELOCIDAD

§ 1.1. Movimiento mecánico

1. Todos los cuerpos que nos rodean, desde las estrellas y los planetas, hasta tan diminutas partículas como los átomos y sus partes componentes, están en constante movimiento. *El movimiento mecánico* en su forma más sencilla consiste en el cambio de la posición de los cuerpos unos respecto a otros.

El movimiento mecánico es la base del funcionamiento de la mayoría de los mecanismos y las máquinas, del desplazamiento de todos los tipos de transporte. Al mismo tiempo, es parte componente de procesos más complicados, no mecánicos. Por ejemplo, los fenómenos térmicos están relacionados con el movimiento caótico (desordenado) de las moléculas; la radiación luminosa, con el movimiento de los electrones en los átomos; las reacciones nucleares, con el movimiento e interacción de las partículas elementales (protones, neutrones, mesones). El número de estos ejemplos puede ser ampliado.

2. Para describir el movimiento del cuerpo hay que indicar como se desplazan todos sus puntos.

Uno de los tipos de movimiento de los cuerpos es el *de traslación*, con el cual todos los puntos del cuerpo se desplazan de forma absolutamente igual; una recta

que uno de dos puntos arbitrarios del cuerpo, se traslada permaneciendo paralela a sí misma (fig. 1.1). Es evidente, que para la descripción del movimiento de traslación es suficiente describir el de uno cualquiera de sus puntos.

Otro tipo sencillo de movimiento es el de *rotación*, con el cual todos los puntos del cuerpo describen circunferencias en planos paralelos, con la particularidad de que los centros de dichas circunferencias yacen en una misma línea recta llamada eje de rotación (fig. 1.2).

3. Al resolver una serie de problemas de mecánica podemos abstraernos de la forma y las dimensiones del cuerpo

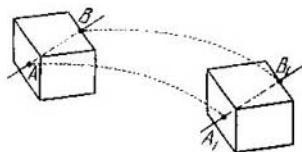


Fig. 1.1.

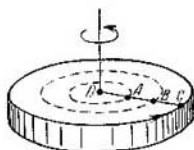


Fig. 1.2.

y considerar que éste es un punto material. Un cuerpo, cuyas dimensiones pueden ser despreciadas en el problema dado, llámase *punto material*.

Es lógico que la noción de punto material sea una abstracción, puesto que en la naturaleza no existen puntos materiales. No obstante, el planteamiento de una serie de problemas de mecánica es tal, que permite hacer uso con éxito de semejante abstracción.

Efectivamente, si a un pasajero le interesa cuánto tiempo necesita el avión para cubrir la distancia de Moscú a Novosibirsk, no precisa, en absoluto, conocer el carácter del movimiento de partes aisladas del avión. De otro lado, no pueden ser despreciadas las dimensiones y forma del avión cuando se estudian fenómenos como el despegue, aterrizaje, la resistencia del aire, etc. De forma análoga podemos considerar que la Tierra y otros planetas son puntos, si nos interesa el carácter de sus movimientos alrededor del Sol. Pero, cuando precisamos aclarar las causas del cambio del día y la noche o las estaciones del año, ya no podemos considerar que la Tierra es un punto, sino que debemos tener en cuenta sus dimensiones, rotación alrededor de su eje, inclinación de éste respecto del plano de la órbita, etc.

Es decir, un mismo cuerpo puede considerarse en unos problemas como punto material, mientras que en otros esto no puede hacerse.

§ 1.2. Sistema de referencia. Trayectoria

1. Si examinamos los fenómenos que transcurren en las proximidades de la superficie de la Tierra, nos cercioraremos de que diversas direcciones en el espacio no son equivalentes. Así, pues, un cuerpo que soltamos de las manos siempre se desplaza hacia abajo en dirección vertical (de modo aproximado hacia el centro de la Tierra); la superficie libre de un líquido se dispone en el plano horizontal; para el movimiento vertical de un cuerpo hacia arriba hay que comunicarle velocidad inicial, mientras que para el vertical del cuerpo hacia abajo semejante velocidad no es necesaria, etc. Esta desigualdad de diferentes direcciones en el espacio es provocada a causa de que la Tierra atrae los cuerpos.

Tanto a considerable distancia de la Tierra, como de otros planetas y estrellas, descubriríamos que *en el espacio, libre de grandes cuerpos, todas las direcciones son equivalentes*. Decimos que *el espacio libre es isótropo*, o sea, que en él no hay direcciones que posean propiedades especiales.

De la misma forma, son equivalentes todos los puntos del espacio si cerca de ellos no hay grandes cuerpos como los planetas o las estrellas. El espacio libre es *homogéneo*, es decir, en él no hay puntos que posean propiedades especiales.

2. *El tiempo también es homogéneo*. A saber, todo fenómeno que transcurra en iguales condiciones, pero en diferentes momentos de tiempo transcurre de forma absolutamente igual. Efectivamente, si hoy una pequeña bola que cae de una altura de 6 m en el lapso de 1,1 s, en ese mismo laboratorio, de esa misma altura la bolita caía al pasar la misma cantidad de tiempo un mes y un año atrás y su caída durará igual tiempo dentro de 1000 años.

3. Como nos convenceremos más adelante de la homogeneidad del tiempo así como de la homogeneidad e isotropía del espacio libre se desprende una serie de importantes corolarios (véase el cap. 23), de inmediato, podemos tener en cuenta uno de ellos: ya que el espacio es homogéneo e isótropo, es imposible definir la posición de un punto material respecto del espacio.

Sin embargo, resulta por completo posible determinar la posición de un cuerpo con relación a otro. Por ejemplo, la posición de una lámpara en la habitación se prefija enteramente por su distancia del suelo y por las distancias desde dos paredes perpendiculares entre sí. Con ayuda de estos tres mismos números podemos definir la posición de cualquier otro cuerpo ubicado tanto en el interior de la habitación, como fuera de ella.

Llamamos *de referencia* a un cuerpo inmóvil, con relación al cual se define la posición de los demás cuerpos.

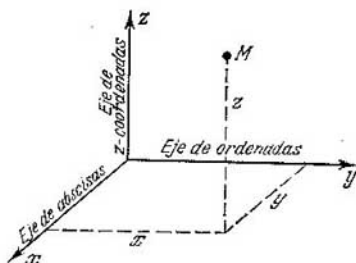


Fig. 1.3.

Por regla, con el cuerpo de referencia se enlazan tres líneas perpendiculares entre sí, es decir, los *ejes de coordenadas* (fig. 1.3). La posición de un punto es caracterizada por las coordenadas x , y , z .

Denomínase *sistema de referencia* un sistema de coordenadas enlazado con el cuerpo de referencia y el conjunto de relojes sincronizados, ubicados en diferentes puntos del sistema de coordenadas. El sistema de sincronización de los relojes será examinado en el § 12.3.

En principio, cualquier cuerpo puede tomarse como de referencia, pero no todo sistema de referencia es igualmente cómodo. Por ejemplo, es mejor considerar el movimiento de un automóvil en un sistema de referencia relacionado con la Tierra y no con el Sol o la Luna. Y al revés, el movimiento de los planetas es más oportuno examinarlo en un sistema de coordenadas enlazado precisamente con el Sol y no con la Tierra u otro planeta, ya que en el primer caso las leyes de movimiento serán descritas con mayor sencillez.

Algunos criterios para elegir el sistema de referencia se examinarán más adelante.

4. En el sistema de referencia prefijado el punto en movimiento describe una línea llamada *trayectoria*. Así, al prender un palito y hacerlo girar con rapidez en el aire, en particular en una habitación a oscuras, veremos con claridad la trayectoria de movimiento del extremo encendido del palito. La forma de la trayectoria depende de la elección del sistema de referencia. Efectivamente, sea que un cuerpo cae dentro de un vagón en movimiento respecto de la Tierra. Entonces, la trayectoria de este cuerpo respecto del vagón será una línea recta, mientras que en relación con la Tierra, una curva (al no haber resistencia del aire — una parábola). Podemos decir lo mismo de la trayectoria que describe cualquier punto de la hélice de un avión en movimiento. En el sistema de coordenadas del avión, este punto describirá una circunferencia; en el sistema de coordenadas enlazado con la Tierra, dicho punto se desplaza por una hélice.

De esta forma, la noción de forma de la trayectoria tiene *sentido relativo*. No se puede hablar en general de la forma de la trayectoria; sólo podemos examinar la forma de la trayectoria en el sistema prefijado de referencia (sistema de coordenadas).

§ 1.3. Movimiento rectilíneo. Ley de movimiento

1. Sea que en cierto sistema de referencia un punto material se mueve por una recta. En semejante caso es cómodo dirigir a lo largo de esta trayectoria uno de los ejes de coordenadas, por ejemplo, la abscisa. En cada momento de tiempo, el punto en movimiento tendrá una coordenada enteramente definida. Esto significa que la coordenada de nuestro punto será función del tiempo: $x = f(t)$. La forma de esta función será *la ley de movimiento*.

2. Para determinar de modo experimental la ley de movimiento, es preciso que el punto que se mueve deje, de alguna manera, marcas en el eje de coordenadas.

Supongamos, por ejemplo, que nos interesa la ley de movimiento de la escalera mecánica del metro. Para definirla, podemos tensar a lo largo de la pared una cinta de papel, mientras que damos al experimentador un instrumento que a intervalos iguales de tiempo (por ejemplo,

cada segundo) hace en la cinta una marca. El resultado del experimento puede reducirse a una tabla:

Momento de tiempo t, s	1	2	3	4	5	6	7	8
Coordenada, x, m	1,75	2,50	3,25	4,00	4,75	5,50	6,25	7,00

Tal experimento no permite determinar con seguridad la posición del punto en los momentos intermedios de tiempo. Sin embargo, es posible elegir la función $x = f(t)$ de tal forma, que sus valores para $t = 1; 2; 3$, etc. fueran $x = 1,75; 2,50; 3,25$, etc. Con facilidad nos cercioramos de que ésta será la función lineal $x = 1 + 0,75t$. Si suponemos que el carácter del movimiento no cambió en el proceso de nuestra investigación, tenemos derecho a considerar que para los demás momentos de tiempo, que yacen en los márgenes que nos interesan, la coordenada se calcula mediante esa misma ley.

Notemos, que mientras menores sean los intervalos de tiempo entre dos marcas contiguas, mayor será la base para suponer que nuestra conjetura acerca del carácter de la ley de movimiento es próxima a la realidad. Por esta razón, al estudiar la ley de movimiento de un cuerpo de manera experimental, juega un papel esencial el volumen de información: mientras más marcas tengamos y menores sean los intervalos de tiempo entre dos de éstas vecinas, con mayor precisión podrá ser definida la ley de movimiento.

3. La suposición de que el carácter del movimiento no varía en el proceso de éste, tiene una importancia básica. En efecto, sea que al final del décimo segundo, un hombre, que hasta entonces estaba parado sobre un escalón de la escalera mecánica, decidió acelerar su bajada y empezó a bajar a pie por la escalera. Como es natural, el carácter de su movimiento cambió considerablemente y ya no podremos hacer uso de la ley de movimiento hallada con anterioridad para los momentos de tiempo después del décimo segundo (a partir del comienzo del experimento).

Así pues, la ley de movimiento hallada de forma experimental puede sólo emplearse para el intervalo de tiempo durante el que se efectuó la investigación. La extrapolación

(o sea, la aplicación de la ley obtenida para un intervalo más amplio de tiempo) sólo es posible después de una investigación complementaria que permita establecer que no varía el carácter del movimiento.

§ 1.4. Movimiento uniforme

1. Es llamado *uniforme* el movimiento de un punto material si la coordenada del punto es una función lineal del tiempo:

$$x = vt + x_0, \quad (1.1)$$

donde v y x_0 son, correspondientemente, la velocidad de movimiento y la coordenada inicial.

2. La ley de movimiento se representa de forma muy evidente por medio de una *gráfica*. Con este fin, en el plano

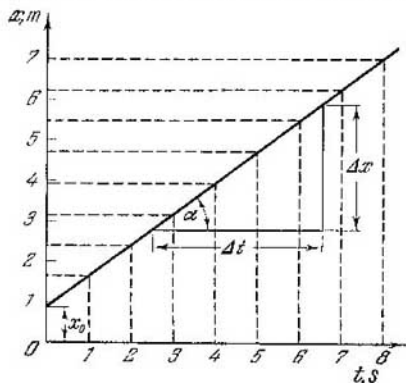


Fig. 1.4.

construimos un sistema de coordenadas, trazando en el eje de abscisas el tiempo t , mientras que en el eje de ordenadas, la coordenada variable del punto (por ejemplo, x). Poniendo en los dos ejes los correspondientes valores de las variables tomadas de la tabla, trazamos desde estos puntos perpendiculares a los ejes de coordenadas. La línea que, de modo uniforme, une los puntos de intersección es la *gráfica del movimiento*. Como con el movimiento uniforme, la coordenada

es función lineal del tiempo, la gráfica de semejante movimiento es una línea recta (fig. 1.4).

3. Haciendo $t = 0$ en la ley de movimiento, $x = x_0$. Esta es la coordenada inicial, es decir, la distancia desde el punto en movimiento hasta el origen de coordenadas en el momento inicial de tiempo.

Hay que prestar particular atención al sentido de la noción *momento inicial de tiempo*. Esto no significa de manera alguna el comienzo del movimiento, sino *el comienzo del experimento para la investigación de dicho movimiento*.

En lo que se refiere al momento en que comienza el movimiento, éste no siempre nos interesa y, en ocasiones, no puede ser en absoluto establecido. Por ejemplo, un astrónomo que estudia la ley de movimiento de un meteoro, sólo puede descubrirlo cuando él penetra en las capas relativamente densas de la atmósfera alta y se encandece. Este será el momento inicial, o sea, el comienzo de las observaciones, pero de ninguna forma el principio del movimiento del meteoro. Esto también se refiere al movimiento de otros cuerpos celestes (planetas, cometas), al de las partículas cósmicas registradas por los aparatos de medición, al de un avión o cohete, cuando son detectados por un radar, etc.

§ 1.5. Movimiento variado

1. Todo movimiento no uniforme se llama *variado*. Examinemos este tipo de movimiento en dos ejemplos: un cuerpo que cae desde cierta altura y un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba. En los dos casos se trata de movimiento rectilíneo, pero no uniforme, es decir, variado.

Sea que una bola pequeña, pero bastante pesada, cae a lo largo del eje z -coordenada. Las marcas en el eje de coordenadas pueden, por ejemplo, obtenerse mediante fotografías, abriendo el obturador del aparato de fotografiar después de iguales intervalos de tiempo. Los resultados del experimento se reducen en la tabla:

Momento de tiempo t , s	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Coordenada z , m	0,049	0,196	0,431	0,784	1,22	1,76	2,40	3,14	3,97	4,90

Construida la gráfica de movimiento, vemos que ésta no es una línea recta, sino una parábola; la ley de movimiento tiene la forma $z = 4,9t^2$ (fig. 1.5).

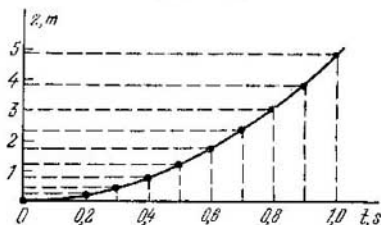


Fig. 1.5.

2. Si mediante el método descrito investigamos el carácter del movimiento del cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba, obtenemos la siguiente tabla de datos:

Momento de tiempo t , s	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Coordenada z , m	0	1,74	3,14	4,12	4,70	4,90	4,70	4,12	3,14	1,74	0

Aquí, el movimiento es rectilíneo variado. La ley de movimiento tiene la forma $z = 9,8 t - 4,9 t^2$. En la gráfica la ley de movimiento está representada por una parábola (fig. 1.6).

3. Hay que prestar atención a la diferencia de principio entre la gráfica de movimiento y la trayectoria. La trayectoria es la curva por la que el punto material se mueve en el sistema de referencia; la gráfica es una curva en el plano que une los puntos representativos en el plano coordenada—tiempo.

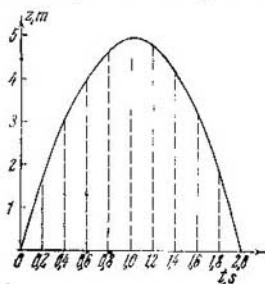


Fig. 1.6.

La bola que cae desde cierta altura y la lanzada verticalmente hacia arriba muévase por una trayectoria de la

misma forma, o sea, por una recta, mientras que sus gráficas son diferentes a causa del carácter desigual del movimiento.

§ 1.6. Velocidad media

1. Consideremos el caso cuando un punto material está en movimiento a lo largo de cierto eje de coordenadas, siempre en una misma dirección.

El segmento $\Delta x = x_2 - x_1$ es llamado *desplazamiento* del punto material en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Señalemos que si el punto siempre se mueve en una misma dirección, el espacio recorrido es igual al valor absoluto del desplazamiento: $\Delta s = |\Delta x|$. Pero si el punto se mueve primero en una dirección y, después de pararse, comienza a desplazarse en dirección inversa (por ejemplo, en el caso de movimiento oscilatorio o el movimiento del cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba), el espacio recorrido es igual a la suma de los valores absolutos de los desplazamientos en una y otra dirección: $\Delta s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots$

Como ejemplo, examinemos de nuevo el caso de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba. Tomemos los momentos de tiempo $t_1 = 0,8$ s y $t_2 = 1,4$ s, a los que corresponden las coordenadas $x_1 = 4,70$ m y $x_2 = 4,12$ m (véase la tabla anterior). El desplazamiento

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4,12 - 4,70 = -0,58 \text{ m.}$$

El signo negativo nos indica que el desplazamiento está dirigido en sentido opuesto a la dirección del eje de coordenadas. El espacio recorrido será mucho mayor, ya que el punto en movimiento alcanzó en el momento de tiempo $t = 1,0$ s la altura máxima $x_{\text{máx}} = 4,90$ m y, a continuación, comenzó a caer. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \Delta s &= |x_{\text{máx}} - x_1| + |x_2 - x_{\text{máx}}| = |4,90 - 4,70| + \\ &+ |4,12 - 4,90| = 0,20 + 0,78 = 0,98 \text{ m.} \end{aligned}$$

2. Se llama *velocidad media* de movimiento, en el intervalo dado de tiempo, una magnitud física numéricamente igual a la razón del desplazamiento al intervalo de tiempo:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.2)$$

La velocidad media es un vector. Su dirección coincide con la del desplazamiento.

La *unidad de velocidad* se define como la velocidad de tal movimiento, con el cual el desplazamiento del punto mate-

rial por la unidad de tiempo es igual a la unidad de longitud:

$$[v] = \frac{[x]}{[t]}. \quad (1.3)$$

En esta fórmula los corchetes indican unidad de magnitud.

En el Sistema Internacional de unidades SI, la unidad de desplazamiento es el metro (m) y la de tiempo, el segundo (s), por lo tanto, la unidad de velocidad será m/s.

3. En el movimiento variable el valor de la velocidad media de manera notable depende de la elección del intervalo de tiempo durante el que el cuerpo estaba en movimiento. Por ejemplo, con la caída libre, que fue examinada más arriba, la velocidad media en el intervalo de $t_1 = 0,1$ s a $t_2 = 0,2$ s (véase la tabla en la pág. 33)

$$v_m = \frac{0,196 - 0,049}{0,2 - 0,1} = \frac{0,147}{0,1} = 1,47 \text{ m/s};$$

en el intervalo de tiempo de $t_1 = 0,7$ s a $t_2 = 0,8$ s la velocidad media

$$v_m = \frac{3,14 - 2,40}{0,8 - 0,7} = \frac{0,74}{0,1} = 7,4 \text{ m/s},$$

mientras que de $t_1 = 0,7$ s a $t_2 = 1,0$ s

$$v_m = \frac{4,90 - 2,40}{1,0 - 0,7} = \frac{2,50}{0,3} = 8,33 \text{ m/s}.$$

Sólo con el movimiento uniforme la velocidad media es una magnitud constante, que no depende de la elección del intervalo de tiempo. En efecto, aquí $x_1 = vt_1 + x_0$, $x_2 = vt_2 + x_0$ y la velocidad media

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{vt_2 + x_0 - vt_1 - x_0}{t_2 - t_1} = v.$$

4. Con el fin de apreciar el valor numérico de la velocidad media, en la práctica se usa, a veces, la siguiente definición: la velocidad media es igual a la razón del espacio recorrido al tiempo de movimiento. Indiquemos, que la velocidad media definida de dicha forma es un escalar y no un vector.

§ 1.7. Velocidad instantánea del movimiento variado

1. Con frecuencia, no nos interesa la velocidad media de movimiento de un cuerpo en el transcurso de determinado intervalo de tiempo, sino que *la velocidad del cuerpo en el*

momento dado, es decir, *la velocidad instantánea*. Por ejemplo, si un cuerpo choca contra un obstáculo, la fuerza con la que él actúa en el momento dado contra el obstáculo, es determinada por la velocidad en dicho momento y no por la velocidad media; la distancia de vuelo de un proyectil y la forma de su trayectoria son definidas por la velocidad en el momento del disparo y no por la velocidad media, etc. Como, de acuerdo con (1.2), la velocidad media es igual a $v_m = \Delta x / \Delta t$, mientras menor sea el intervalo de tiempo Δt , menor será la diferencia entre la velocidad media y la velocidad instantánea que nos interesa.

Definamos la velocidad media v por el límite a que tiende la velocidad media durante un intervalo de tiempo infinitésimo

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.4)$$

Semejante límite en matemáticas se llama *derivada**) o sea, la velocidad instantánea es la derivada de la coordenada en el tiempo:

$$v = dx/dt = x' (t). \quad (1.5)$$

2. Como la velocidad media de un punto material en movimiento uniforme es magnitud constante y el límite de semejante magnitud es ella misma, *la velocidad instantánea de un punto material en movimiento uniforme también es una magnitud constante*.

Así pues, el movimiento uniforme puede definirse como movimiento a velocidad constante.

Como vemos en la gráfica (véase la fig. 1.4), la velocidad del movimiento uniforme es numéricamente igual a la tangente del ángulo de inclinación de la gráfica respecto del eje de tiempo:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = K \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

donde K es un coeficiente dimensional, igual a la razón de las escalas de las unidades de desplazamiento (eje de ordenadas) y de tiempo (eje de abscisas). Al movimiento a mayor velocidad corresponderá una gráfica de mayor inclinación.

* La derivada $y = f(x)$ se designa dy/dx o bien $y'(x)$.

En las gráficas del movimiento variado (véanse las figs. 1.5 y 1.6) la velocidad instantánea es numéricamente igual al ángulo entre la tangente a la gráfica y el eje de abscisas.

Capítulo 2

INERCIA

§ 2.1. Principio de la inercia

1. El estudio del movimiento de los cuerpos en uno u otro sistema de referencia y las causas que determinan el carácter de dichos movimientos es el problema fundamental de mecánica.

Hay que aclarar en qué condiciones muévase el cuerpo por una trayectoria rectilínea o curvilínea: de modo uniforme o no uniforme, acelerado o retardado.

La experiencia muestra que durante la interacción de los cuerpos, su movimiento varía. Por ejemplo, cuando un cuerpo cae, al chocar con la Tierra se para y su movimiento cesa o bien salta hacia arriba y la dirección de su velocidad cambia por la opuesta; un cuerpo en reposo respecto de la Tierra nunca comienza a moverse por sí solo, abandona el estado de reposo y empieza a desplazarse solamente bajo la acción de cualquier otro cuerpo. Como es natural, el número de semejantes ejemplos puede ser aumentado.

2. Sin embargo, de la correcta deducción acerca de que la interacción de los cuerpos provoca el cambio de las velocidades de sus movimientos, algunos pensadores de la antigüedad, como Aristóteles, llegaron a la falsa conclusión de que el propio movimiento de los cuerpos era resultado de la interacción con otros cuerpos.

Una de las causas que les llevó a una conclusión tan errónea consistía en que consideraban que la Tierra era el centro inmóvil de Universo. Por este motivo, el reposo con relación a la Tierra se tomaba como el estado natural de los cuerpos, mientras que el movimiento, un estado temporal, forzado que, según ellos, era resultado de la acción de fuerzas ajenas. Bien es verdad, que surgían determinadas dificultades al explicar, por ejemplo, el movimiento de una piedra

lanzada o un dardo arrojado por el arco: ¡allí no había cuerpos que empujasen permanentemente a la piedra o dardo! Entonces, para explicar estos fenómenos, los sabios de la antigüedad proponían diversas hipótesis arbitrarias, con el solo fin de conservar su principal suposición acerca del origen forzado del movimiento.

3. A fines del siglo XVI, dos problemas sacaron de nuevo a la luz el movimiento. El primero de ellos consistía en que con el desarrollo de la artillería, era preciso hallar las leyes de movimiento de los proyectiles. Además, al ser creado el sistema heliocéntrico de Copérnico quedó claro que la Tierra no es el centro del Universo, sino un planeta corriente que gira, junto con otros, alrededor del Sol. De esto se desprendería inevitablemente que los planetas (y, por consiguiente, otros cuerpos) se mueven por sí mismos, ya que resulta en absoluto inverosímil que a la Tierra y otros planetas algo los empuje en el transcurso de miles de millones de años.

Además, era preciso explicar por qué causa no sentimos la rotación de la Tierra y, también, por qué al separarse de nuestro planeta, por ejemplo al dar un salto, caemos en el mismo punto de la Tierra.

La primera solución correcta, aunque no completa, sobre el problema de movimiento fue proporcionada a principios del siglo XVII por Galileo. Pero sólo 50 años después, Newton pudo hallar una enunciación clara de las tres leyes fundamentales de movimiento, que constituyó la base para crear la mecánica clásica.

4. Para solucionar de modo exacto los problemas de movimiento, había, ante todo, que abstraerse de todos los influjos exteriores y plantear el problema de la forma siguiente: ¿qué ocurrirá con un cuerpo si cesa la interacción de éste con otros cuerpos? En nuestra ayuda debo venir *el experimento mental*, que propuso Galileo. En efecto, durante cualquier experimento real en la Tierra, no podemos liberar a éste de la acción de la fuerza de gravedad y de la fuerza de rozamiento. Pero la cuestión puede ser planteada del siguiente modo: ¿qué sucederá si, por lo menos, mentalmente disminuimos de manera gradual estas fuerzas?

Al desplazarse por la arena una carretilla se parará con rapidez; por un trozo de vidrio su movimiento durará mucho más aunque en este caso, al fin y al cabo, también se detendrá. ¿Qué pasará si el vidrio es absolutamente liso? Por lo

visto, la carretilla se moverá por sí misma tiempo ilimitado.

Esta fue la idea del experimento mental con un cuerpo, libre de todo influjo externo, que permitió a Galileo llegar al concepto del movimiento *inercial* del cuerpo. Y aunque el propio Galileo estaba errado al considerar que un cuerpo puede desplazarse por inercia no sólo de modo uniforme y rectilíneo, sino que también moverse uniformemente por una circunferencia. (¡lo que es erróneo!), su idea permitió a Newton enunciar correctamente *la ley (el principio) de la inercia*, que también es llamada *primera ley de Newton*.

Si el cuerpo dado no interactúa con los cuerpos que lo rodean, la velocidad de su movimiento no varía ni en magnitud ni en dirección, es decir, está en movimiento rectilíneo y uniforme.

El movimiento inercial implica el desplazamiento por recorrido más corto, ya que en el espacio libre la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta.

Cuando decimos que cierto cuerpo está en reposo, éste no es absoluto, sino que lo es en el sistema dado de referencia, que se mueve respecto a otros cuerpos.

5. Gracias precisamente a la inercia, al saltar hacia arriba en un vagón en movimiento, caemos en el mismo sitio. En efecto, estando en el suelo de un vagón que se mueve uniformemente, tenemos la misma velocidad que él. Saltando en dirección vertical hacia arriba, la velocidad horizontal queda invariable, ya que en este sentido sobre nosotros nada actúa. Por esta razón, después de recorrer por el plano horizontal una distancia igual que el vagón, retornamos al mismo punto del que nos separamos al saltar. Lo mismo se puede decir respecto de nuestro movimiento junto con la Tierra.

Los cuerpos lanzados se mueven gracias a la inercia. Como es natural, en el momento del lanzamiento comunicamos a la piedra cierta velocidad. Si la piedra no sufriera la resistencia del aire y la atracción de la Tierra, ésta se movería conservando invariables el valor y la dirección de su velocidad. La interacción de la piedra con el aire y la Tierra provoca la deceleración de su movimiento y la curvatura de su trayectoria y, en fin de cuentas, su parada.

§ 2.2. Sistemas inerciales de referencia

1. La formulación del principio de la inercia ofrecida en el anterior párrafo no se puede considerar completa. En efecto, en él se habla del movimiento del cuerpo, pero ni una palabra se dice del sistema de referencia en el que transcurre el movimiento. No obstante, sabemos que se puede hablar de la forma de la trayectoria, así como de la velocidad, sólo respecto de cierto sistema de referencia, ya que, por ejemplo, una trayectoria rectilínea en un sistema de referencia, es posible que sea curvilínea en otro.

Por esta causa, hay que variar la enunciación del principio de la inercia, introduciendo claras indicaciones del carácter del sistema de referencia, respecto del cual el movimiento dado se examina. Con mayor precisión, el principio de la inercia se formula así:

Existen tales sistemas de referencia, con relación a los cuales todos los cuerpos que no están en interacción con otros cuerpos se encuentran en movimiento rectilíneo y uniforme. Los sistemas de referencia que satisfacen este principio se denominan *sistemas inerciales*.

2. El concepto de sistema inercial de referencia es una abstracción que en la práctica sólo se realiza con cierto grado de aproximación. En realidad, todo sistema de referencia está relacionado con ciertos cuerpos y en la naturaleza todos los cuerpos, en mayor o menor grado, están en interacción entre sí. Por esta razón, es imposible indicar sistemas de referencia que sean rigurosamente inerciales; sólo es posible mostrar tales sistemas que para el círculo dado de problemas a examinar pueden ser considerados inerciales. Es natural, que sólo de forma experimental podamos decidir si el sistema dado es inercial.

La práctica muestra que sólo en la primera aproximación el sistema de referencia relacionado con la Tierra puede considerarse inercial, a saber: sobre el transcurso de una serie de fenómenos no influye la rotación de la Tierra. Este sistema de referencia es llamado *geocéntrico*.

Así, la rotación de la Tierra no influye, prácticamente, sobre el funcionamiento de diferentes mecanismos y máquinas, sobre el movimiento de diversos tipos de transporte. Tampoco influye en la marcha de las reacciones térmicas, químicas y nucleares, así como sobre los procesos electromagnéticos que transcurren en los generadores, electromoto-

res, transformadores, receptores y transmisores de radio, así como sobre la propagación de las ondas electromagnéticas, los fenómenos luminosos y acústicos. Por consiguiente, al describir todos los indicados procesos físicos, con alto grado de precisión, podemos considerar que el sistema geocéntrico de referencia es inercial.

3. Por otro lado, hay una serie de fenómenos provocados por la rotación de la Tierra alrededor de su eje y por el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Como estos dos movimientos no son rectilíneos y uniformes, provocan efectos que son imposibles en sistemas inerciales de referencia.

Por ejemplo, observando de noche la bóveda celeste, vemos que todo el sistema de estrellas gira alrededor de un eje que pasa por la Estrella Polar y el centro de la Tierra. Desde el punto de vista del sistema geocéntrico de referencia hay que hallar, en este caso, cierto mecanismo de interacción entre la Tierra y todas las estrellas que permita explicar la causa de la curvatura de sus trayectorias. Además, los planetas realizan por la bóveda celeste movimientos bastante complicados. Moviéndose en cierta dirección, el planeta de pronto se para, a continuación se desplaza hacia atrás y, trazando un lazo, comienza a moverse en la dirección inicial.

Los múltiples intentos ejecutados por Aristóteles, Ptolomeo y otros investigadores para explicar el movimiento de los astros celestes en el sistema geocéntrico de referencia, resultaron inútiles. Copérnico, Galileo y Kepler ofrecieron una teoría correcta del movimiento de los cuerpos celestes, ligando el sistema de referencia no con la Tierra, sino que con el Sol. Este sistema de referencia fue llamado *heliocéntrico*. En grado considerable es más inercial que el sistema geocéntrico de referencia.

§ 2.3. Principio de la relatividad

1. Hay una gran cantidad de sistemas inerciales (con el grado de aproximación indicado más arriba). *Todo sistema de referencia en movimiento rectilíneo y uniforme con relación a cierto sistema inercial, también es inercial.*

En efecto, sea que un cuerpo se mueve por inercia en cierto sistema de referencia. Por consiguiente, no varía el valor y la dirección de su velocidad. Por otro sistema de

referencia, que se mueve de modo rectilíneo y uniforme respecto del primero, nuestro cuerpo tiene otra velocidad, pero también de valor y dirección constantes. O sea, el segundo sistema de referencia, en la misma medida que el primero, es inercial. *H*

Así pues, los sistemas de referencia ligados con un vagón o barco en movimiento uniforme y rectilíneo respecto de la Tierra, serán del mismo modo inerciales, como el sistema de referencia relacionado con la Tierra.

2. Como muestra la experiencia, en un barco en movimiento rectilíneo y uniforme en relación con la Tierra, es tan fácil moverse en cualquier dirección como en ella. Al disparar una pistola, la bala tarda igual tiempo en recorrer el espacio desde proa a popa, como a la inversa. Un cuerpo soltado de las manos cae verticalmente (claro está, respecto del barco; en relación con la Tierra muévase por una trayectoria parabólica). El agua vertida en cierto recipiente, tiene al igual que en la Tierra, la superficie horizontal.

De éstos y otros muchos fenómenos se desprende que ningún experimento mecánico nos permite destacar, del conjunto de sistemas inerciales, un sistema de referencia predominante. De aquí se deduce que de manera alguna podemos hablar de reposo o movimiento absoluto de los cuerpos. Sólo podemos referirnos a su movimiento relativo por cierto sistema inercial de referencia.

Esta ley fundamental recibe el nombre de *principio de la relatividad de Galileo*, que puede ser enunciado del modo siguiente:

Las leyes de mecánica son igualmente válidas en todos los sistemas inerciales de referencia o de forma más breve, todos los sistemas inerciales de referencia son equivalentes.

El análisis del principio de la relatividad, efectuado por Einstein, hizo que éste llegara en 1905 a la conclusión de que este principio es una de las leyes fundamentales de la naturaleza; puede ser aplicado no sólo a los fenómenos mecánicos, sino que también a otros, tales como los térmicos, electromagnéticos, ópticos, etc. Esto le permitió formular el principio general de la relatividad, llamado con frecuencia *principio de la relatividad de Einstein*:

En todos los sistemas inerciales de referencia todas las leyes de la naturaleza son iguales.

Este principio es una de las bases de la concepción física moderna del mundo.

§ 2.4. Transformaciones de Galileo

1. En la mecánica newtoniana tropezamos con velocidades relativamente pequeñas. Efectivamente, las mayores velocidades a las que se desplazan los cuerpos macroscópicos, son las de los planetas, meteoritos, naves cósmicas. Dichas velocidades no superan varias decenas de kilómetros por segundo, es decir, son mucho menores que la velocidad de la luz $c = 300\,000$ km/s.

Si las coordenadas de cierto punto material están prefijadas en un sistema inercial de referencia, podemos calcular las coordenadas de este punto en cualquier otro sistema inercial

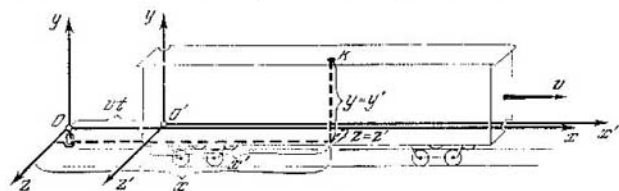


Fig. 2.1.

cial de referencia, en movimiento rectilíneo uniforme respecto del primero. La forma precisa de las correspondientes transformaciones de las coordenadas será deducida en el § 12.7. Aquí examinaremos las llamadas *transformaciones de Galileo* que permiten ligar entre sí las coordenadas de cierto punto material en dos sistemas inerciales de referencia diferentes, a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz.

2. Para mayor precisión ligaremos un sistema de referencia con la Tierra, mientras que el segundo, con un vagón en movimiento rectilíneo uniforme respecto de la Tierra a una velocidad v . Con el fin de simplificar los razonamientos, vamos a dirigir uno de los ejes de coordenadas (por ejemplo, el de abscisas) a lo largo de la dirección de movimiento del vagón (fig. 2.1). En la figura vemos que la z -coordenada y la ordenada del punto K coinciden en los dos sistemas de coordenadas: $z' = z$ e $y' = y$. Las abscisas divergen por el segmento $OO' = vt$. De aquí, las transformaciones de Galileo toman el aspecto

$$z' = z, \quad y' = y, \quad x' = x - vt. \quad (2.1)$$

3. Para que nos cercioramos de que las transformaciones de Galileo satisfacen el principio de la relatividad, examinemos cuál será su aspecto al considerar inmóvil el vagón, en tanto que la Tierra se desplaza en sentido opuesto a una velocidad V . Los valores absolutos de las velocidades V y v coinciden, mientras que sus direcciones son contrarias; por consiguiente, $V = -v$. Razonamientos, en absoluto análogos a los aducidos más arriba, nos llevan a las fórmulas

$$z = z', \quad y = y', \quad x = x' + vt. \quad (2.2)$$

Así pues, las transformaciones de Galileo son recíprocas: cualquiera de los sistemas inerciales de referencia puede ser adoptado convencionalmente como inmóvil, mientras que

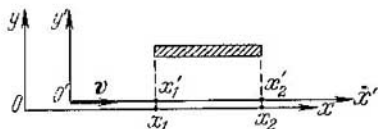


Fig. 2.2.

las transformaciones a cualquier otro sistema inercial son realizadas mediante las mismas fórmulas, pero tomando en consideración el signo de la velocidad relativa del sistema. Esto significa, precisamente, que las transformaciones dadas corresponden al principio de la relatividad.

4. Los desplazamientos de un punto por diversos sistemas de coordenadas son diferentes. En efecto, sea que en el momento t_1 el punto material tenía la coordenada x_1 y en el momento t_2 , la coordenada x_2 . El desplazamiento del punto en el sistema de referencia ligado con la Tierra:

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

El desplazamiento de ese mismo punto en el sistema de referencia relacionado con el vagón:

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1) = \Delta x - v \cdot \Delta t. \quad (2.3)$$

En correspondencia

$$\Delta x = \Delta x' + v \cdot \Delta t. \quad (2.4)$$

5. Sin embargo, se conserva la longitud del segmento en ambos sistemas. En realidad, la longitud del segmento (fig. 2.2.) es llamada diferencia de coordenadas de sus dos

extremos, medidos simultáneamente: $l = x_2 - x_1$ para $t_2 = t_1$, o sea, $\Delta t = 0$. Entonces de (2.3) o (2.4) se desprende:

$$l = l'. \quad (2.5)$$

Este resultado parece ser en absoluto evidente y, a primera vista, no está incluso claro la necesidad de definirlo. El sentido de la deducción quedará obvio más adelante (§ 12.8).

§ 2.5. Ley clásica de composición de velocidades

1. Sea que un punto material está en movimiento uniforme a lo largo del eje de abscisas a una velocidad $u = \Delta x / \Delta t$. Hallemos la velocidad de este mismo punto en otro sistema inercial de referencia $u' = \Delta x' / \Delta t$. Con este fin hacemos uso de la fórmula (2.3). Dividiendo los dos miembros de la igualdad por Δt , obtenemos

$$u' = u - v, \quad (2.6)$$

o bien

$$u = u' + v. \quad (2.7)$$

Esta es la ley clásica de composición de velocidades para el caso particular que consideramos.

2. La ley clásica de composición de velocidades se confirma perfectamente a velocidades mucho menores que la de la luz.

Por ejemplo, si un vagón se mueve respecto de la Tierra a una velocidad de 80 km/h y un pasajero va por el vagón en la misma dirección, a la velocidad de 6 km/h, en relación a la Tierra la velocidad del pasajero constituirá 86 km/h. Si la velocidad de la corriente de un río es igual a 2 m/s y la de un barco respecto a la del agua 8 m/s, al moverse el barco contra la corriente su velocidad con relación a la Tierra será de 6 m/s, y al moverse aguas abajo, 10 m/s.

3. Las consideraciones lógicas, en las que se basa la deducción de las transformaciones de Galileo, son evidentes, mientras que los corolarios que obtenemos de ellas, tales como la constancia de la longitud de un segmento en diversos sistemas de referencia, la ley de composición de velocidades, etc., de modo perfecto se han mostrado válidos en experimentos, a aquellas velocidades de movimiento que trataban los científicos en el transcurso aproximado de tres siglos, pasados después de las obras de Galileo y Newton. Gradual-

mente se creó la opinión de que estas transformaciones debían ser válidas para cualesquiera fenómenos físicos. Y sólo a fines del siglo pasado fue descubierto que la aplicación de las representaciones de la mecánica newtoniana a fenómenos ligados con la propagación de la luz, lleva a una serie de contradicciones. En el capítulo 12 mostraremos cómo surgieron dichas contradicciones y cómo fueron liquidadas con ayuda de la teoría de la relatividad.

Capítulo 3

MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

§ 3.1. Magnitudes escalares

Denomínase *escalar* una magnitud a la que corresponde en todo sistema de referencia un número determinado, que es función del sistema de unidades elegido. Por ejemplo:

$$l = 3 \text{ m} = 300 \text{ cm} = 3000 \text{ mm.}$$

El valor numérico de una magnitud escalar es inversamente proporcional a la unidad de medida. De forma simbólica, esto puede expresarse del siguiente modo:

$$a [A] = a' [A'] \text{ o bien } a/a' = [A']/[A], \quad (3.1)$$

donde $[A]$ y $[A']$ son unidades de la magnitud escalar; a y a' , sus valores numéricos.

El tiempo, la longitud, el área, volumen, la temperatura, masa, energía, el trabajo son ejemplos de magnitudes escalares.

Cualquier operación algebraica con escalares nos da una magnitud escalar.

Señalemos, que si cierta expresión, compuesta de magnitudes escalares, se encuentra bajo el signo de una función no algebraica (transcendente), dicha magnitud se convierte en número abstracto. A esa clase pertenecen las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas. Por ejemplo, si la coordenada x está expresada en metros ($[x] = \text{m}$), la expresión $y = a^{kx}$ sólo tiene sentido cuando $[k] = \text{m}^{-1}$. De modo análogo, la expresión $x = A \cos \omega t$, sólo tiene sentido para $[\omega] = \text{c}^{-1}$.

§ 3.2. Magnitudes vectoriales

1. Se llama *vector* una magnitud que en cualquier sistema de referencia corresponde a un *segmento dirigido*. El vector se caracteriza por su valor absoluto (módulo), dirección y punto de aplicación de su origen. La velocidad y la fuerza son ejemplos de magnitudes vectoriales.

El vector, cuyo origen coincide con el origen de coordenadas y su extremo define la posición de cierto punto material, denominábase *radio vector* de este punto (fig. 3.1).

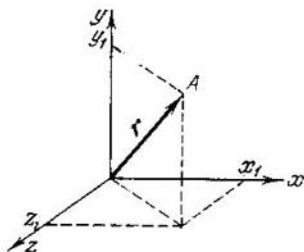


Fig. 3.1.

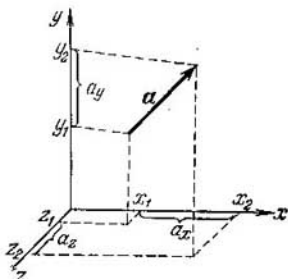


Fig. 3.2.

Se ha adoptado designar los vectores con letras latinas minúsculas con una flecha horizontal encima (\vec{a} , \vec{b} , etc.) o con letras en negrita (\mathbf{a} , \mathbf{b} . . .). El radio vector suele designarse con la letra r .

2. Cualquier vector puede ser proyectado en los ejes de coordenadas.

Las proyecciones del vector \mathbf{a} en los ejes de coordenadas se designan correspondientemente, por a_x , a_y , a_z , donde el índice caracteriza el eje en que se proyecta el vector (fig. 3.2). Como vemos en el plano

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1, \quad (3.2)$$

donde x_1 , y_1 , z_1 son las coordenadas del origen del vector, x_2 , y_2 , z_2 , las coordenadas de su extremo.

Las proyecciones del radio vector r son las coordenadas de su extremo, ya que las coordenadas de su origen son nulas:

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z. \quad (3.3)$$

3. El valor absoluto de un vector o su *módulo*, es una magnitud escalar, igual a la longitud del segmento que representa el vector. Se designa por $|a|$ o simplemente a . Haciendo uso del teorema de Pitágoras, obtenemos

$$|a| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (3.4)$$

El módulo del radio vector

$$|r| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.5)$$

§ 3.3. Ciertas operaciones con vectores

1. La suma de dos vectores es un nuevo vector, cuya proyección es la suma de las correspondientes proyecciones de los sumandos. Si las proyecciones de los sumandos a y b son a_x, a_y, a_z y b_x, b_y, b_z , de la definición se desprende:

$$c = a + b, \text{ si } c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad c_z = a_z + b_z. \quad (3.6)$$

De esta definición sigue una serie de importantes corolarios.

Ley conmutativa de adición:

$$a + b = b + a. \quad (3.7)$$

En efecto, como para todo número, la ley conmutativa es válida para las proyecciones.

De igual modo se demuestra la ley asociativa de adición:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c). \quad (3.8)$$

Regla del polígono: para sumar varios vectores, por ejemplo, a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 , es preciso hacer coincidir el origen del segundo sumando con el extremo del primero, el origen del tercero, con el extremo del segundo, etc. Seguidamente, se construye el nuevo vector, cuyo origen coincidirá con el del primer sumando y su extremo con el extremo del último (fig. 3.3). El vector de cierre b será la suma buscada:

$$b = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Para demostrar este corolario ubiquemos dos vectores a_1 y a_2 en el plano xy , con la particularidad de que haremos

coincidir el origen del vector a_2 con el extremo del vector a_1 (fig. 3.4). Uniendo el origen de a_1 con el extremo de a_2 , obtenemos el vector b que, de acuerdo con la definición, es la suma buscada. Como vemos en el plano, las proyecciones de vector b en los ejes de coordenadas son las sumas de las correspondientes proyecciones de los vectores a_1 y a_2 en estos mismos ejes.

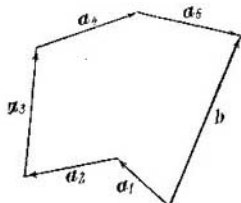


Fig. 3.3.

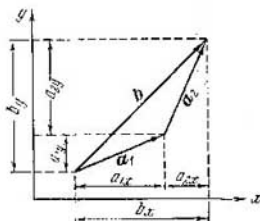


Fig. 3.4.

Para varios vectores puede hacerse uso de la ley asociativa de adición.

Señalemos que también es posible confeccionar la suma de dos vectores por la regla del paralelogramo (fig. 3.5).

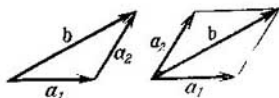


Fig. 3.5.

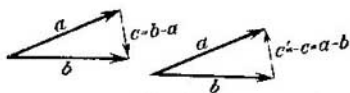


Fig. 3.6.

Sin embargo, la regla del polígono es más cómoda para realizar la suma de varios vectores.

2. Denomínase *diferencia* de dos vectores un vector construido de la forma siguiente: se hacen coincidir los orígenes del vector minuyendo b y del sustraendo a (fig. 3.6). El vector c , trazado del extremo del sustraendo al extremo del minuyendo, es la diferencia buscada:

$$c = b - a. \quad (3.9)$$

En proyecciones

$$c_x = b_x - a_x, \quad c_y = b_y - a_y, \quad c_z = b_z - a_z.$$

La demostración se desprende directamente de la regla del polígono, ya que $a + c = b$.

3. El producto del vector a por un escalar k es un nuevo vector b , cuya proyección es k veces mayor que las correspondientes proyecciones del vector a . De esta definición sigue, que

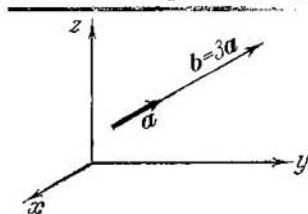


Fig. 3.7.1

$$b = ka, \text{ si } b_x = ka_x,$$

$$b_y = ka_y, \quad b_z = ka_z. \quad (3.10)$$

Para un número k , entero y positivo, esto se desprende de forma directa de la ley de adición de vectores.

Cuando un vector es multiplicado por un escalar positivo, su dirección no cambia, pero el módulo del vector crece k veces (fig. 3.7):

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{k^2 a_x^2 + k^2 a_y^2 + k^2 a_z^2} = \\ &= k \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = ka. \end{aligned}$$

4. El cociente de la división del vector a por un escalar $k \neq 0$, es un nuevo vector b , cuyas proyecciones son k veces menores que las correspondientes proyecciones del vector a . Así, pues, de la definición se deduce, que

$$b = \frac{a}{k}, \quad \text{si } b_x = \frac{a_x}{k}, \quad b_y = \frac{a_y}{k}, \quad b_z = \frac{a_z}{k}. \quad (3.11)$$

Dejemos que, por su cuenta, el lector muestre que al dividir un vector por un escalar positivo, su dirección no varía, en tanto que su módulo disminuye k veces.

§ 3.4. Descomposición de un vector en dos sumandos (componentes)

1. Descomponer el vector a en dos sumandos significa hallar dos vectores b y c tales que $a = b + c$. En semejante caso b , c y a forman un triángulo cerrado (regla del polígono).

Este problema es indeterminado: sobre un segmento de largura a puede ser construido un conjunto ilimitado de triángulos, dos de cuyos lados son los módulos de los vectores

buscados (fig. 3.8). El problema será determinado, si prefijamos ciertas condiciones complementarias.

2. En la práctica se tropieza con frecuencia con el problema de descomposición del vector dado a en dos sumandos cuya dirección es paralela a ciertas rectas. Este problema es por completo determinado.

Por los extremos del segmento a trazamos dos rectas, paralelas a rectas prefijadas BD y CE , que determinan la

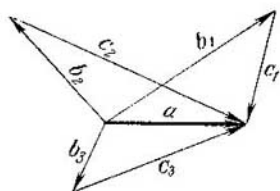


Fig. 3.8.

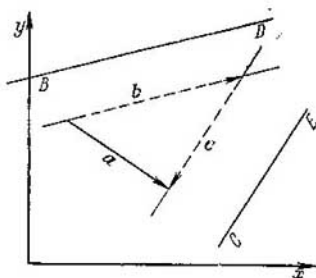


Fig. 3.9.

dirección de los vectores b y c (fig. 3.9). En el triángulo obtenido construimos dos vectores, de manera que el origen del primero coincida con el origen del vector a , mientras que su extremo, con el vértice del triángulo hallado; el origen del segundo vector coincide con el vértice del triángulo, y su extremo, con el extremo del vector a . Estos serán los vectores b y c buscados. En efecto, son paralelos a las rectas prefijadas y su suma, según la regla del polígono, es igual al vector inicial: $b + c = a$.

§ 3.5. Velocidad vector

1. Sea que un punto material se mueve por una trayectoria rectilínea, que no coincide con los ejes de coordenadas. En el momento de tiempo t_1 la posición del punto es determinada por el radio vector r_1 , en el momento t_2 , por el radio vector r_2 (fig. 3.10). Determinemos el vector de desplazamiento:

$$\Delta r = r_2 - r_1. \quad (3.12)$$

Entonces, la velocidad media también será, por lo visto, un vector:

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}. \quad (3.13)$$

En efecto, al dividir el vector Δr por el escalar Δt obtenemos un nuevo vector, cuya dirección coincide con la de des-

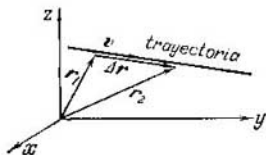


Fig. 3.10.

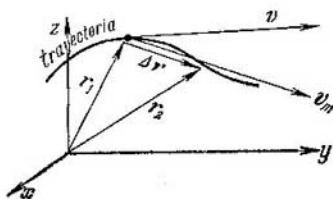


Fig. 3.11.

plazamiento. Por consiguiente, los vectores de velocidad y desplazamiento tienen la misma dirección.

La velocidad instantánea de un punto en movimiento uniforme, también es un vector

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = r'(t) \quad (3.14)$$

que coincide por la dirección con el vector de desplazamiento.

Así, pues, *la velocidad de un punto en movimiento uniforme es un vector dirigido a lo largo de la trayectoria.*

2. Al moverse un punto material por una trayectoria curvilínea, conservaremos las definiciones de velocidad media e instantánea (3.13) y (3.14). En tal caso, los vectores de desplazamiento y de velocidad media están dirigidos por la cuerda que une dos puntos de la trayectoria, correspondientes a la posición del punto material en los momentos de tiempo t_1 y t_2 (fig. 3.11). Cuando $\Delta t \rightarrow 0$, la dirección de la cuerda tiende a la dirección de una tangente. En el límite, el vector infinitésimo de desplazamiento y el vector de la velocidad instantánea coincidirán con la dirección de la tangente.

Así que, *durante el movimiento de un punto material por una trayectoria curvilínea, el vector de la velocidad instantánea está dirigido por la tangente a la trayectoria.*

3. Proyecciones del vector de desplazamiento:

$$\begin{aligned} \Delta r_x = x_2 - x_1 = \Delta x, \quad \Delta r_y = y_2 - y_1 = \Delta y, \quad \Delta r_z = \\ = z_2 - z_1 = \Delta z. \end{aligned} \quad (3.15)$$

De aquí, obtenemos las proyecciones correspondientes del vector de la velocidad instantánea:

$$\begin{aligned} v_x &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t), \\ v_y &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = y'(t), \\ v_z &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} = z'(t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

El módulo de la velocidad instantánea:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (3.17)$$

§ 3.6. Composición de velocidades

1. Como en la mecánica newtoniana la velocidad es un vector, la composición de velocidades se reduce a la suma

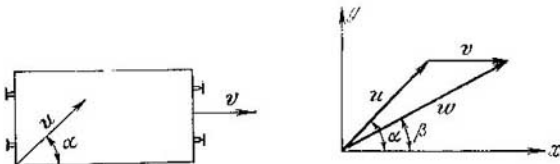


Fig. 3.12.

de las correspondientes proyecciones de la velocidad. O sea, que las velocidades se componen según la regla del polígono (o paralelogramo).

Sea que una persona se mueve por una plataforma a velocidad u , que forma un ángulo α con uno de los lados de la plataforma. Esta misma está en movimiento a velocidad v con relación a la Tierra (fig. 3.12). Hallemos el valor y la dirección de la velocidad w de la persona respecto de la Tierra.

El problema puede ser resuelto del siguiente modo. Las proyecciones del vector u :

$$u_x = u \cos \alpha, \quad u_y = u \sin \alpha;$$

las correspondientes proyecciones del vector v :

$$v_x = 0, \quad v_y = 0,$$

de aquí

$$w_x = u_x + v_x = u \cos \alpha + v, \quad w_y = u_y + v_y = u \sin \alpha.$$

El módulo de la velocidad de la persona con relación a la Tierra:

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{u^2 \cos^2 \alpha + 2uv \cos \alpha + v^2 + u^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

y su dirección se determina de la razón

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{w_y}{w} = \frac{u \operatorname{sen} \alpha}{w}. \quad (3.19)$$

Este mismo resultado puede ser obtenido con ayuda del teorema del coseno.

2. El movimiento de la persona respecto a la plataforma es llamado *relativo*, el de la plataforma con relación a la Tierra, *de traslación*, mientras que el de la persona respecto de la Tierra, *compuesto*.

Así, pues, en la mecánica newtoniana *la velocidad de un movimiento compuesto es igual a la suma vectorial de las velocidades de los desplazamientos relativo y de traslación*

$$w = u + v. \quad (3.20)$$

La expresión (3.20) es *la ley clásica de composición de velocidades en forma vectorial*.

En la teoría de la relatividad, como se mostrará en el § 12.5, las velocidades se componen por reglas mucho más complicadas y, en aquel caso, no se puede hacer uso de la expresión (3.20).

ACELERACIÓN

§ 4.1. Aceleración media e instantánea

1. La *aceleración media* en el intervalo de tiempo dado es una magnitud física, numéricamente igual a la razón de la variación de la velocidad y el intervalo de tiempo.

Sea que en el momento de tiempo t_1 el punto material tenía una velocidad instantánea v_1 , mientras que en el momento t_2 , la velocidad v_2 . Entonces, por definición

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

De la definición es evidente que la aceleración es un vector. La dirección del vector de aceleración depende del carácter del movimiento del punto material. Esto será examinado con detalle más adelante.

Se denomina *aceleración instantánea* una magnitud física, numéricamente igual al límite al que la aceleración media tiende por un intervalo infinitésimo de tiempo, es decir, es la derivada del vector de velocidad en el tiempo:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t). \quad (4.2)$$

2. La unidad de aceleración $[a] = [v]/[t]$, en el Sistema Internacional de unidades (SI), es un metro por segundo cuadrado (m/s^2).

§ 4.2. Movimiento rectilíneo variable

1. Si un punto material se mueve por una trayectoria rectilínea, los vectores de velocidad y aceleración estarán dirigidos a lo largo de esa misma recta y sólo variará el módulo de la velocidad. Las aceleraciones media e instantánea son calculadas de la forma siguiente:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (4.3)$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t). \quad (4.4)$$

2. El movimiento variable denominase *acelerado* si el módulo de la velocidad del punto material crece permanentemente, es decir, para cualesquiera $t_2 > t_1$ es válida la condición $v_2 > v_1$. Nos sirve de ejemplo el movimiento de una bola pesada que cae libremente de una pequeña altura.

En correspondencia, llámase *retardado* el movimiento de un punto, si el módulo de su velocidad decrece constantemente: para cualesquiera $t_2 > t_1$ es válida la condición $v_2 < v_1$. Puede servir de ejemplo el movimiento de una bola pesada, lanzada verticalmente hacia arriba (hasta su parada).

De las definiciones (4.3) y (4.4) se desprende que con el movimiento acelerado de un punto material, la aceleración se expresa por un número positivo, mientras que con el movimiento retardado, por un número negativo. Esto quiere decir, que en el primer caso la dirección de los vectores de velocidad y aceleración coincide, en el segundo caso la dirección de la aceleración es opuesta a la de la velocidad.

§ 4.3. Movimiento rectilíneo uniformemente variado

1. El movimiento de un punto material es llamado *uniformemente variado* si su velocidad instantánea es una función lineal del tiempo:

$$v = v_0 + at, \quad (4.5)$$

donde v_0 y a son magnitudes constantes.

Aquí v_0 tiene el sentido de *velocidad inicial*. En efecto para $t = 0$ la velocidad $v = v_0$, entendiéndose por $t = 0$ el momento de tiempo en que comenzamos a observar el movimiento del punto material. Por regla, este momento no coincide con el lapso cuando comienza el movimiento, que con frecuencia es en general desconocido (véase el § 1.4). Al mismo tiempo, no podemos excluir el caso, en el que los momentos del comienzo de la observación y del movimiento coincidirán (por ejemplo, si conectamos el cronómetro en el momento cuando soltamos la piedra de las manos y ella empieza a caer). En este caso particular $v_0 = 0$ y $v = at$.

2. Aclaremos el sentido de a en la expresión (4.5). Si derivamos (4.5) y tomamos en consideración que v_0 y a son

magnitudes constantes, obtenemos

$$v'(t) = a.$$

Así, pues, con el movimiento uniformemente variado la magnitud a , que entra en la expresión para la velocidad instantánea (4.5), es la aceleración instantánea.

Esto nos permite definir de nuevo modo la noción de movimiento uniformemente variado. Denomínase *uniformemente variado* el movimiento con aceleración constante.

§ 4.4. Gráfica de velocidad con el movimiento uniformemente variado

Para construir la gráfica de velocidad, tracemos en el eje de abscisas los valores instantáneos del tiempo y en eje de ordenadas, los valores de la velocidad instantánea que

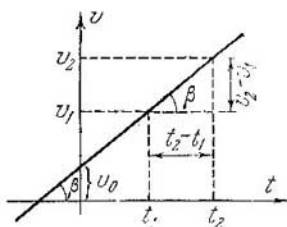


Fig. 4.1.

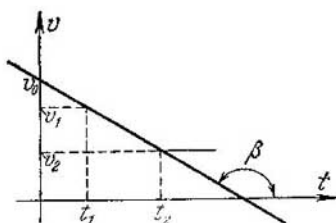


Fig. 4.2.

corresponden a los primeros. La línea que une los puntos obtenidos es la *gráfica* de velocidad.

Para el movimiento uniformemente variado, la gráfica de velocidad es una recta que corta en el eje de ordenadas el valor de la velocidad inicial (fig. 4.1). La tangente del ángulo de inclinación de la gráfica es numéricamente igual a la aceleración:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = a,$$

Para el caso de movimiento acelerado, la gráfica de velocidad forma con el eje de abscisas un ángulo agudo (fig. 4.1), mientras que para el movimiento retardado, obtuso (fig. 4.2).

§ 4.5. Cálculo gráfico de los desplazamientos

1. La correlación entre el desplazamiento y el espacio recorrido fue examinada en el § 1.6, cuando considerábamos el ejemplo de un punto en movimiento a lo largo del eje de abscisas. Dicha correlación es válida en caso de que el punto se mueva por una trayectoria arbitraria.

En la gráfica de velocidad del movimiento uniforme (fig. 4.3), el producto vt está representado por el área del rectángulo sombreado. Por consiguiente, el desplazamiento

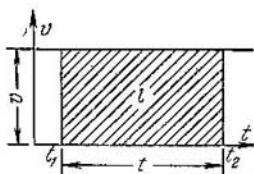


Fig. 4.3.

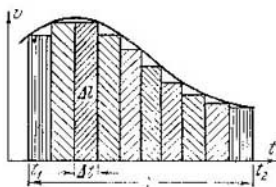


Fig. 4.4.

$l = l_2 - l_1 = v(t_2 - t_1) = vt$ es igual *numéricamente* al área de dicho rectángulo (al elegir la escala del modo correspondiente).

Esta deducción puede ser generalizada para el caso de movimiento variable arbitrario. En efecto, sea que la velocidad de un punto material cambie de acuerdo con la ley arbitraria $v = f(t)$; la gráfica de esta función está representada en la fig. 4.4.

Dividamos el intervalo de tiempo $t = t_2 - t_1$ en varias partes y consideraremos que en el transcurso del pequeño intervalo de tiempo Δt la velocidad no varía, mientras que, a continuación, por salto toma un nuevo valor. Semejante movimiento «a saltos», con cierto grado de precisión, representa el movimiento real con el que la velocidad variaba no a saltos, sino uniformemente, como está representado en la gráfica. El desplazamiento Δl en el transcurso de un pequeño intervalo de tiempo Δt es igual numéricamente al área rayada, ya que durante este tiempo considerábamos que el movimiento era uniforme. En lo que se refiere al desplazamiento en el intervalo de tiempo t , podemos decir que *aproximadamente* es igual al área de la figura escalonada (se trata, claro

está, de la igualdad numérica). Mientras menores sean los intervalos Δt , el movimiento «a saltos» representa con mayor precisión el movimiento variable real. Obtendremos el resultado preciso si pasamos al límite para $\Delta t \rightarrow 0$.

2. En la gráfica de velocidad, el desplazamiento, con movimiento variable arbitrario de un punto material, es numéricamente igual al área del trapecio curvilíneo limitado por abajo por el eje de abscisas, a derecha e izquierda por los valores de la velocidad instantánea en los momentos t_1 y t_2 y por arriba, por la gráfica de velocidad. Hemos de señalar, que el cálculo de semejantes áreas es objeto de la parte de las matemáticas, llamada cálculo integral. Así, pues, el desplazamiento

$$l = l_2 - l_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_0^t v dt. \quad (4.6)$$

§ 4.6. Desplazamiento y velocidad media con movimiento uniformemente variado

1. Haciendo uso de las deducciones del párrafo anterior, nos será fácil calcular el desplazamiento para el movimiento uniformemente variado de un punto material. En efecto, la velocidad es aquí una función lineal del tiempo, la gráfica de velocidad es una línea recta y el área buscada del trapecio es igual al producto de la semisuma de la base por la altura (véase la fig. 4.1). De aquí se desprende que con $t_1 = 0$ y $t_2 = t$, el desplazamiento puede ser calculado por la fórmula

$$l - l_0 = \frac{v_0 + v}{2} t. \quad (4.7)$$

Sustituyendo el valor de $v = v_0 + at$, obtenemos

$$l = l_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (4.8)$$

Es decir, la coordenada de un punto material, en movimiento uniformemente variado, es una función cuadrática del tiempo. La ecuación (4.8) representa la ley de movimiento buscada. La gráfica del espacio recorrido es una parábola. La fig. 4.5 ofrece la gráfica del caso más sencillo de movimiento, cuando

$$l_0 = 0, v_0 = 0 \text{ y } l = at^2/2.$$

Es fácil cerciorarse de que los movimientos variados examinados en el § 1.5 son uniformemente variados.

2. Si se hace uso de la definición de la velocidad media (3.13), se muestra con facilidad que *el valor absoluto de la velocidad media para el movimiento uniformemente variado de un punto material es igual a la semisuma de las velocidades inicial y final:*

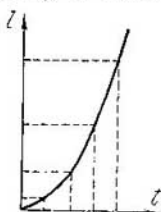


Fig. 4.5.

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (4.9)$$

Efectivamente, por definición

$$v_m = \frac{l_2 - l_1}{t_2 - t_1}. \quad (4.10)$$

Sustituyendo los valores de l_2 y l_1 y después de realizar sencillas transformaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{l_0 + v_0 t_2 + (at_2^2/2) - [l_0 + v_0 t_1 + (at_1^2/2)]}{t_2 - t_1} = \\ &= \frac{v_0(t_2 - t_1) + (1/2)a(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2v_0 + at_1 + at_2}{2} = \\ &= \frac{(v_0 + at_1) + (v_0 + at_2)}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}. \end{aligned}$$

Hay que indicar que esta deducción *sólo* es aplicable para el movimiento uniformemente variado. En el caso general del movimiento variable no es válida. Por ejemplo, si un autobús parte de una parada y frena en la siguiente, $v_1 = v_2 = 0$, pero la velocidad media no es igual a cero.

§ 4.7. Movimiento uniforme de un punto material por una circunferencia

1. Sea que un punto material está en movimiento por una circunferencia de radio r . En el transcurso de tiempo Δt el punto se desplazará por el arco $\Delta l = r\Delta\alpha$, donde $\Delta\alpha$ es el ángulo de giro del radio (fig. 4.6).

Durante el movimiento de un punto material por una circunferencia, la magnitud

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(t) \quad (4.11)$$

denomínase *velocidad angular del punto*.

La unidad de velocidad angular es un radián por segundo (rad/s). La dimensión de la velocidad angular:

$$[\omega] = [\alpha]/[t].$$

De la definición de la velocidad de un punto material, se deduce que

$$v = \frac{dl}{dt} = r \frac{d\alpha}{dt} = r\omega. \quad (4.12)$$

2. Se denomina *período* el tiempo T , durante el que el punto realiza una vuelta completa alrededor de la circunferencia. La magnitud ν , inversa al período, muestra cuantas vueltas realiza el punto por la unidad de tiempo. Esta magnitud se llama *frecuencia*:

$$\nu = 1/T. \quad (4.13)$$

3. En el transcurso del intervalo de tiempo llamado período, el punto en movimiento uniforme describe una circunferencia completa, es decir, para $\Delta t = T$ el arco $\Delta l = 2\pi r$. De aquí se desprende que

$$v = 2\pi r/T = 2\pi r\nu. \quad (4.14)$$

Después de comparar (4.12) y (4.14), obtenemos

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu. \quad (4.15)$$

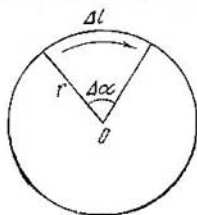


Fig. 4.6.

§ 4.8. Aceleración con movimiento uniforme de un punto material por una circunferencia

1. Con el movimiento uniforme de un punto material por una circunferencia, el módulo de la velocidad no varía: $[v] = v = \text{const.}$ No obstante, esto no quiere decir que el punto se mueva sin aceleración. En efecto, aquí de forma constante cambia la *dirección* de la velocidad, como vector dirigido por la tangente a la trayectoria, lo que significa que el punto está en movimiento con aceleración.

2. El vector de variación de la velocidad

$$\Delta v = v' - v$$

se construye (fig. 4.7) de acuerdo con la regla expuesta en el p. 2, § 3.4. Siendo Δt pequeño, el arco AB casi no se diferencia de la cuerda AB . De la semejanza de los triángulos OAB

y BMN se desprende que:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta l}{r}.$$

De aquí el módulo de la aceleración media

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

El módulo de la aceleración instantánea

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{v}{r} \frac{\Delta l}{\Delta t} \right).$$

El factor constante v/r lo sacamos fuera del signo del límite; entonces

$$a = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{v}{r} v = \frac{v^2}{r}. \quad (4.16)$$

3. Nos queda determinar la dirección del vector de la aceleración instantánea. El vector de la aceleración media

forma con el vector de velocidad el ángulo $\beta = (\pi + \Delta\alpha)/2$. Para $\Delta t \rightarrow 0$ el ángulo $\Delta\alpha \rightarrow 0$. Por consiguiente, el vector de la aceleración instantánea formará con el vector de velocidad el ángulo

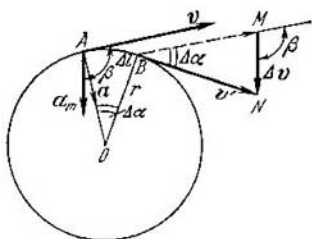


Fig. 4.7.

$$\varphi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi + \Delta\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (4.17)$$

Así, pues, un punto material en desplazamiento uniforme por una circunferencia, se mueve con aceleración dirigida de manera perpendicular al vector de velocidad, es decir, por el radio hacia el centro. Por esto, esta aceleración denominase *normal* o *centrípeta* y se designa por a_n .

De acuerdo con (4.12) $v = \omega r$. Sustituyendo esta igualdad en (4.16), obtenemos

$$a_n = v^2/r = \omega^2 r. \quad (4.18)$$

FUERZA

§ 5.1. La fuerza como medida de interacción de los cuerpos

1. Como nos muestra la experiencia, en la naturaleza todos los cuerpos, de una u otra forma, interaccionan entre sí. Por ejemplo, el aire de la atmósfera presiona sobre la Tierra y sobre todos los objetos que en ella se encuentran; la interacción entre las moléculas de agua y la superficie del cuerpo del bañador hace que gotas de agua se adhieran al cuerpo; la fuerte interacción entre las partes componentes del núcleo del átomo (protones y neutrones) es la causa de que sea extremadamente difícil destruir los núcleos atómicos.

La fuerza es la medida de la interacción entre los cuerpos o entre las partículas de las que éstos constan.

El origen de la noción de fuerza surgió al apreciar la tensión muscular. Para elevar una piedra, desplazar una barca, tensar la cuerda del arco, etc., se necesita cierta tensión de los músculos, diferente en diversos casos. El grado de esta tensión se apreciaba por la fuerza. Podemos aducir como ejemplos una serie de expresiones, en las que incluso ahora, la palabra fuerza se toma en sentido original: «un hombre fuerte», «realizar un violento esfuerzo», «mis fuerzas han llegado al límite», etc.

Más adelante, el hombre se cercioró que la noción de fuerza puede también servir para caracterizar la acción de unos cuerpos sobre otros. Así, surgieron los conceptos de «fuerte viento», «fuerte corriente», «fuerte golpe» como características de influjos externos, equivalentes al esfuerzo muscular.

Posteriormente, el término «fuerza» fue interpretado de modo muy amplio. Aparecieron las expresiones «fuerza de voluntad», «fuerza moral», «más fuerte que la muerte», etc. Semejante ampliación de la noción de fuerza fue y sigue siendo la causa de una serie de equívocos y, por eso, debe ser evitada. Por desgracia, hasta la fecha, por ejemplo, se hace uso de tales términos como «fuerza luminosa», «fuerza electromotriz», «caballo de fuerza», etc., aunque semejantes conceptos nada tienen que ver con la fuerza.

En mecánica, el término «fuerza» será aplicado sólo en su sentido directo, es decir, como medida de interacción entre los cuerpos.

2. En la física moderna se distinguen los siguientes tipos de interacciones:

a) gravitatoria, que surge entre los cuerpos a cuenta de la gravitación;

b) electromagnética, que aparece entre partículas o cuerpos cargados inmóviles o en movimiento;

c) fuerte o nuclear, que caracteriza la interacción de las partículas elementales, por ejemplo, aquellas que constituyen el núcleo atómico;

d) interacción débil, que como resultado proporciona la desintegración de ciertas partículas elementales.

En mecánica se examinan fuerzas que surgen al haber contacto directo entre los cuerpos, o sea, fuerzas de rozamiento y de elasticidad. Además, en mecánica estudiándose las fuerzas de gravitación.

3. El resultado de la interacción entre los cuerpos es su deformación (cambio de las dimensiones o la forma del cuerpo) o bien la aceleración (variación del valor o la dirección de la velocidad). Es natural, que no puede ser excluida la simultaneidad de surgimiento de las deformaciones y la aceleración.

Cada una de estas manifestaciones de la fuerza, puede ser utilizada para su medición. Sin embargo, con frecuencia resulta ser mucho más fácil medir el valor de la deformación que el de la aceleración. Por este motivo, la pieza principal del instrumento para medir las fuerzas, o sea,

del *dinamómetro* (del griego *dynamis* — fuerza), es un muelle cuyo grado de deformación depende del valor de la fuerza que se mide (fig. 5.1).

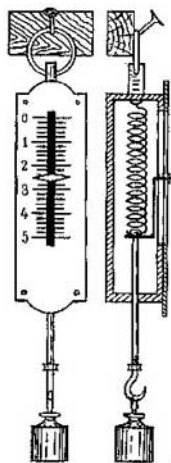


Fig. 5.1.

§ 5.2. Deformaciones elásticas y plásticas

1. La deformación del cuerpo se denomina *elástica* si después de quitar la carga, las dimensiones y la forma del cuerpo por completo se restablecen. La deformación que

no desaparecen después de cesar la acción de la fuerza, denominase *plástica*. Después de semejante deformación el cuerpo conserva (parcial o completamente) la forma adquirida de nuevo y las dimensiones variadas.

Los puentes, las vigas, paredes, piezas de las máquinas-herramientas, bajo la acción de las fuerzas que sobre ellos actúan, deben trabajar en la región de las deformaciones elásticas, lo que asegura su longevidad y la fiabilidad de la estructura. Por lo contrario, durante el maquinado del material (forja, estampado, etc.), éste se somete a deformaciones plásticas de manera que la pieza obtenida después del maquinado tenga las dimensiones y forma necesarias y las conserve después de quitar los esfuerzos.

2. El carácter de la deformación depende del valor y la duración de actuación del esfuerzo, así como también del material de que está fabricado el cuerpo y del estado del material (temperatura que precede al maquinado, etc.).

Por ejemplo, si una placa de acero se dobla y de inmediato se suelta, ella tomará su forma inicial; está claro que se trata de una deformación elástica. Sin embargo, si la placa es fijada en posición doblada para tiempo prolongado, después de quitar los esfuerzos externos, la pieza ya no se desdoblará por completo. El aumento considerable de la duración del influjo exterior, convierte la deformación elástica en plástica.

La temperatura influye de modo considerable sobre el carácter de las deformaciones. Una placa de acero, calentada hasta la temperatura de calda al amarillo, se hace plástica con esfuerzos externos relativamente pequeños, que a la temperatura del medio ambiente sólo puede provocar en la placa deformaciones elásticas. Al revés, el plomo que es muy plástico a la temperatura del medio ambiente, adquiere elasticidad a bajas temperaturas. Una campanilla de plomo, enfriada con aire líquido, omite un sonido puro, lo que significa que en ella se producen deformaciones elásticas. El aumento de la plasticidad de los materiales con el crecimiento de la temperatura, es utilizado en la técnica al maquinar los metales.

Es decir, no hay límites estrictos entre las deformaciones elásticas y plásticas. Sin embargo, como muestra la práctica, pequeñas deformaciones de poca duración pueden tomarse, con suficiente grado de precisión, como elásticas.

3. Por experiencia, sabemos que cuanto mayor deforma-

ción queramos crear, mayores esfuerzos hay que aplicar al cuerpo a deformar. Por consiguiente, según el valor de la deformación, podemos juzgar acerca del valor de la fuerza. El análisis de una serie de experimentos, nos muestra que *el valor absoluto de la deformación elástica es proporcional a la fuerza aplicada*. Esta afirmación constituye el contenido de la ley de Hooke:

$$F = k (l - l_0) = k \Delta l, \quad (5.1)$$

donde F es la fuerza exterior aplicada; l_0 , la longitud inicial del cuerpo; l , la longitud del cuerpo deformado y k , un coeficiente de proporcionalidad llamado *rigidez* (antes se denominaba coeficiente de elasticidad).

De la ley de Hooke se deduce que la escala del dinamómetro debe ser uniforme (véase la fig. 5.1). Esto facilita de modo notable su graduación.

§ 5.3. Fuerza — vector

1. Toda fuerza tiene determinada dirección, con la particularidad de que la acción de la fuerza depende no sólo de su valor, sino que también de su dirección. Por ejemplo, la fuerza de rozamiento está dirigida, con mayor frecuencia, en sentido opuesto al vector de velocidad. Si un muelle se estira bajo la acción de cierta fuerza, al cambiar la dirección de la fuerza el muelle se comprimirá. Cuando un futbolista golpea sobre el balón, comunica a éste una aceleración dirigida en la misma dirección que la fuerza, con la que el pie del futbolista actúa sobre el balón. La ley de Hooke también muestra que la fuerza es un vector, ya que la rigidez es una magnitud escalar, mientras que el alargamiento $\Delta l = l - l_0$ es un vector y el resultado de multiplicar un vector por un escalar es un vector (§ 3.3).

2. Escribamos la ley de Hooke en forma vectorial. Con ello, hay que tener en cuenta la dirección de los vectores de desplazamiento y fuerza. Sea que un cuerpo ajeno, por ejemplo, la mano, estira un muelle (fig. 5.2). La fuerza con la que el cuerpo ajeno actúa sobre el muelle se llama *fuerza externa*. La dirección de dicha fuerza coincide con la dirección de desplazamiento y, por lo tanto, los dos vectores tienen la misma dirección:

$$F_{\text{ext}} = k \Delta l. \quad (5.2)$$

La práctica muestra que el muelle deformado actúa sobre la mano con una fuerza de igual valor que la exterior, pero de dirección opuesta (fig. 5.3). La fuerza con la que el muelle

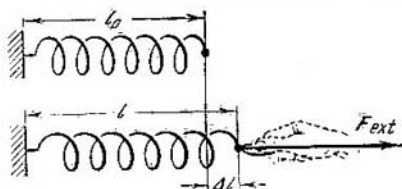


Fig. 5.2.

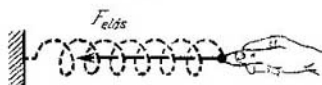


Fig. 5.3.

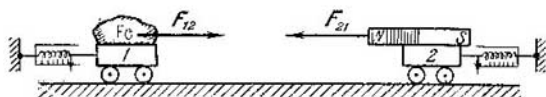


Fig. 5.4.

deformado actúa sobre el cuerpo ajeno, denomínase *fuerza elástica*. Como la dirección de esta fuerza es inversa a la del vector de alargamiento,

$$F_{el} = -k \Delta l. \quad (5.3)$$

3. Al analizar diversos tipos de interacciones entre los cuerpos, Newton llegó a la conclusión de que siempre *la interacción de dos cuerpos transcurre con fuerzas de igual valor, pero dirigidas en sentidos opuestos*:

$$F_{12} = -F_{21}, \quad (5.4)$$

donde F_{12} es la fuerza con la que el primer cuerpo actúa sobre el segundo, mientras que F_{21} , la fuerza con la que el segundo cuerpo actúa sobre el primero. Esta afirmación se llama *tercera ley de Newton*.

Como ejemplo podemos considerar el experimento de interacción de un imán y un trozo de hierro. Los dinamómetros sujetos en los dos cuerpos, registran fuerzas de interacción de igual valor, pero de direcciones opuestas (fig. 5.4).

En los siguientes capítulos se examinan ejemplos de aplicación de la tercera ley de Newton.

§ 5.4. Composición y descomposición de fuerzas aplicadas a un punto material

1. Si sobre un punto material están aplicadas varias fuerzas, éstas pueden ser sustituidas por la fuerza resultante o vector suma. La resultante es la suma vectorial de las fuerzas que se componen y puede ser hallada mediante la regla del polígono (fig. 5.5).

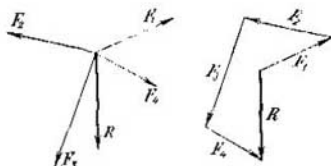


Fig. 5.5.

Si el polígono de fuerzas resulta cerrado, esto quiere decir, que la resultante de este sistema de fuerzas es igual a cero.

Semejante sistema de fuerzas se denomina *equilibrado*. Por ejemplo, un sistema de tres fuerzas de igual valor absoluto, ubicadas en un mismo plano bajo ángulos de 120° entre sí (fig. 5.6).

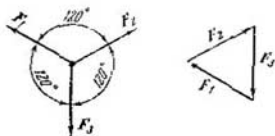


Fig. 5.6.

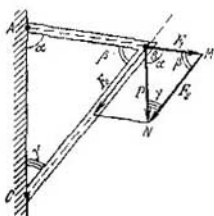


Fig. 5.7.

El sistema de fuerzas aplicado sobre un punto puede ser equilibrado aplicándole una *fuerza de equilibrio*, cuyo módulo es igual a la resultante, pero de dirección opuesta.

2. Como cualquier otro vector, la fuerza puede ser descompuesta en dos componentes (véase § 3.4). En la práctica se tropieza frecuentemente con el caso de descomposición de una fuerza en dos componentes de direcciones prefijadas.

Por ejemplo, sea que sobre un soporte actúa cierta fuerza P (fig. 5.7). Es necesario hallar los esfuerzos en las barras. En este caso, las fuerzas buscadas están dirigidas a lo largo de las barras. Construimos el triángulo BMN de forma que sus lados sean paralelos a la fuerza P y a las barras. En la escala elegida, la largura del lado BN es igual a P . Entonces el vector $F_1 = \vec{BM}$ es la fuerza que estira la barra AB , mientras que el vector $F_2 = \vec{MN}$, la fuerza que comprime la barra BC . En la escala elegida las fuerzas F_1 y F_2 pueden ser calculadas con ayuda de la proporción

$$\frac{F_1}{AB} = \frac{F_2}{BC} = \frac{P}{AC}.$$

Capítulo 6

FUERZA DE LA GRAVEDAD, PESO Y MASA

§ 6.1. Fuerza de la gravedad. Peso

1. De la experiencia cotidiana sabemos que todos los cuerpos caen a la Tierra, si este movimiento no se obstaculiza por otros cuerpos. ¿Cuál es la causa de la caída?

Realicemos el siguiente experimento. Mediante un hilo atemos un cuerpo de un muelle y después soltémoslo (fig. 6.1). El cuerpo se desplazará un poco hacia abajo, estirará el muelle y, a continuación, quedará parado. El muelle deformado actúa sobre el cuerpo con la fuerza F_{el} , dirigida verticalmente hacia arriba, pero el cuerpo seguirá en equilibrio. Este fenómeno sólo es posible en el caso de que, además de la fuerza elástica, sobre el cuerpo actúa una fuerza más P , igual a la primera por su valor absoluto, pero dirigida verticalmente hacia abajo, o sea, hacia la Tierra.

Si quemamos el hilo que liga el cuerpo con el muelle, la interacción entre ellos desaparece. El muelle tomará de

nuevo sus dimensiones y forma iniciales. La acción mutua entre la Tierra y el cuerpo se conserva, es decir, la Tierra continúa atrayendo el cuerpo con la fuerza P . Bajo el influjo de esta fuerza el cuerpo abandona el estado de reposo y comienza a caer hacia la Tierra.

La fuerza con que la Tierra atrae los cuerpos llámase fuerza de la gravedad.

2. La fuerza de la gravedad actúa sobre todos los cuerpos situados en las cercanías de la Tierra. La causa por la que no todos ellos caen a la Tierra consiste en que su movimiento está limitado por otros cuerpos: apoyos, hilo, muelle, pared, etc.



Fig. 6.1.

Los cuerpos que limitan el movimiento de otros, son llamados *enlaces* o *ligadura mecánica*. El origen de este término es evidente: dichos cuerpos «enlazan» el movimiento del cuerpo dado, obstaculizando su desplazamiento libre. Por ejemplo, la superficie de la mesa es la ligadura mecánica para todos los objetos que en ella se encuentran; el suelo es la ligadura para mesa, etc.

Bajo la acción de la fuerza de la gravedad los enlaces se deforman y la reacción de los enlaces deformados, según la tercera ley de Newton, equilibran dicha fuerza. Pero si es fácil observar la deformación del muelle, para advertir la deformación de otros enlaces, son con frecuencia necesarios instrumentos que permitan registrar muy pequeños desplazamientos.

3. *Denomínase peso la fuerza con que el cuerpo actúa sobre el enlace (presiona sobre el apoyo horizontal o estira el muelle) a causa de la atracción de este cuerpo por la Tierra.*

Como se mostrará en el § 7.2 el peso del cuerpo es igual a la fuerza de la gravedad, si tanto el cuerpo como el enlace están en reposo con relación a la Tierra (o respecto de ella su movimiento es rectilíneo y uniforme).

Para medir el peso puede hacerse uso de la reacción del enlace deformado. Con este fin se utiliza un dinamómetro (báscula de resorte), graduado según cualesquiera unidades de fuerza.

Pero podemos proceder de otro modo. Tomemos una *pesa patrón*, es decir, un cuerpo cuyo peso es igual a la unidad de fuerza y fabriquemos pesas varias veces mayores y menores que la patrón. Este sistema de pesas es llamado juego de pesas.

Coloquemos en uno de los platos de una balanza de brazos iguales el cuerpo, cuyo peso deseamos determinar y, en el otro, una pesa de tal valor que equilibre la balanza (fig. 6.2). Como para equilibrar la balanza de brazos iguales es preciso

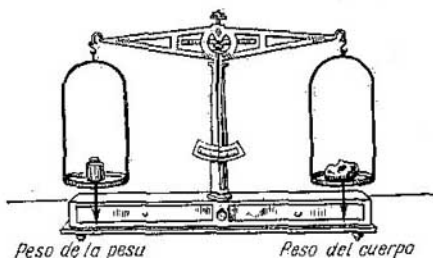


Fig. 6.2.

que sobre los dos platos actúen fuerzas iguales, llegamos a la conclusión de que el peso del cuerpo que probamos es igual al de las pesas.

Así, pues, *el peso se puede determinar en la báscula de resorte o en la balanza de palanca.*

§ 6.2. Caída libre

1. Llamamos *caída libre* el movimiento de los cuerpos que transcurre bajo la acción sólo de la fuerza de la gravedad. Para investigar la caída libre de los cuerpos, hay que librarlos del influjo de todas las fuerzas ajenas y, en particular, de la resistencia del aire.

Es fácil cerciorarse de que la resistencia del aire influye de forma notable sobre el carácter de la caída de los cuerpos. Dejemos caer una piedra y un trozo de algodón. La piedra llegará con rapidez a la Tierra, mientras que el algodón bajará con mayor lentitud. Puede crearse la impresión de que los cuerpos pesados caen con mayor velocidad que los ligeros. Pero si del algodón se forma una bolita compacta, ésta caerá a Tierra con más rapidez. ¿Qué ha variado en este experimento? Ha disminuido el tamaño de la bolita y, correspondientemente, la resistencia del aire. De la misma manera,

una hoja de papel arrugada, sufre una resistencia del aire mucho menor y, por esto, su velocidad de caída es mayor que la de esa misma hoja sin arrugar.

Es natural que surja la pregunta: ¿cómo caerán los cuerpos en el vacío, cuando la resistencia del aire está excluida? ¿Caerán con la misma aceleración? Examinemos el siguiente experimento (fig. 6.3). Tomemos un tubo de vidrio de más de un metro de longitud, soldado por un lado y que por el otro está cerrado con una tapa, en la que hay una tobera. Dentro del tubo se encuentran un trocito de plomo y una pluma. Si se da con brusquedad la vuelta al tubo, el plomo cae con rapidez, en tanto que la pluma cae muy despacio. Unamos el tubo a una bomba y absorbamos el aire de éste. Dando de nuevo la vuelta al tubo nos cercioraremos de que los dos cuerpos caen de igual forma, ¡la pluma no queda en absoluto atrás del plomo!

Es decir, *la caída libre de todos los cuerpos, independientemente de su peso, transcurre con igual aceleración.*

2. Fue Galileo quien, a comienzos del siglo XVII, llegó por primera vez a esta idea. Hasta entonces, en las ciencias dominaba la representación de Aristóteles, de que los cuerpos pesados caen más rápidamente que los ligeros. Para convencerse de que su punto de vista era correcto, Galileo ejecutó una serie de experimentos, tirando diversos cuerpos desde la famosa torre inclinada de Pisa y midiendo el tiempo de su caída.

Galileo mostró que la caída libre es un movimiento uniformemente acelerado. Para demostrar esta tesis es suficiente, por ejemplo, cerciorarse de que *la distancia recorrida por el cuerpo con la caída libre, es proporcional al cuadrado del tiempo de movimiento* (véase el § 4.6). Galileo no tenía instrumentos que permitieran medir con precisión pequeños intervalos de tiempo. Por esta causa, el sabio imitaba la caída libre al moverse el cuerpo por un plano inclinado.

3. En la actualidad, mediante un cronómetro eléctrico es posible medir con gran precisión el tiempo de caída de un cuerpo de cualquier altura. Sea que una pequeña bola de



Fig. 6.3.

acero está detenida a cierta altura por medio de un electroimán. Un relé especial permite desconectar la corriente en el circuito del electroimán y conectar, simultáneamente, el cronómetro eléctrico. Al caer a lo largo de una regla vertical, la bolita recorre determinada distancia y al final del recorrido abre el circuito del cronómetro, haciendo que éste se pare. Cambiando la distancia y midiendo cada vez el tiempo de caída, con facilidad puede ser establecida la ley de movimiento. La resistencia del aire puede ser eliminada introduciendo toda la instalación en un tubo y practicando el vacío en él. Por cierto, que cuando una bolita pesada cae de una pequeña altura, la resistencia del aire puede ser despreciada (véase el § 11.9).

Los resultados de los experimentos certifican con evidencia lo siguiente:

a) *La caída libre es un movimiento uniformemente acelerado.*

b) *Bajo la acción de la fuerza de la gravedad todos los cuerpos caen con igual aceleración g (del latín—gravitas—peso), llamada aceleración de caída libre.*

c) *La aceleración de la caída libre en diversos puntos de la Tierra, es algo diferente.* Al realizar mediciones de precisión no muy alta, esta diferencia (que no es más del 0,6%) puede ser despreciada y considerarse $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

§ 6.3. Masa de un cuerpo

1. La práctica enseña que la fuerza de la gravedad que en diversos puntos de la Tierra actúa sobre el cuerpo dado, es en cierto grado diferente: varía en función de la latitud geográfica y de la altitud sobre el nivel del mar; del mismo modo cambia la aceleración de caída libre. Sin embargo, para todo cuerpo la razón de la fuerza de la gravedad y la aceleración de caída libre es una magnitud constante:

$$\frac{P_1}{g_1} = \frac{P_2}{g_2} = \frac{P_3}{g_3} = \dots = \text{const.}$$

y, por consiguiente, ofrece cierta característica del cuerpo que consideramos.

La razón entre la fuerza de la gravedad, que actúa sobre el cuerpo, y la aceleración de caída libre se denomina masa del cuerpo:

$$m = P/g. \quad (6.1.)$$

El concepto de masa es uno de los fundamentales en física. Será examinado en las siguientes partes del curso: al estudiar las leyes de Newton, las leyes de gravitación, en relación con tan importantes nociones como cantidad de movimiento y energía, lo que permite de modo considerable profundizar y ampliar nuestras representaciones acerca de la masa.

2. Masa es una magnitud escalar, en tanto que la fuerza de la gravedad y la aceleración de caída libre, son vectores de igual dirección. Es mejor anotar la correlación (6.1) en forma vectorial:

$$P = mg. \quad (6.2)$$

3. Como la aceleración de caída libre es constante para todos los cuerpos, de (6.1) se desprende:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1}{P_2}, \quad (6.3)$$

es decir, *la razón entre las masas de dos cuerpos es igual al cociente de sus pesos*, ya que aquí el peso es igual a la fuerza de la gravedad.

En este hecho se basa la definición de las masas mediante la balanza de palanca. Como ya hemos señalado, dicha balanza está equilibrada si el peso del cuerpo es igual al de las pesas. *Pero, en semejante caso la masa del cuerpo también es igual a la de las pesas*. Si fabricamos una pesa patrón y tomando su masa por la unidad, en la balanza de palanca podemos comparar con ella la masa de cualquier otro cuerpo. Por lo tanto, la palabra «ponderación» se aplica en realidad, en dos sentidos: como definición del peso y de la masa.

Así, pues, *la masa de un cuerpo puede ser determinada en la balanza de palanca*.

§ 6.4. Densidad de la sustancia

Si cuerpos de distintos volúmenes se fabrican de una misma sustancia, sus masas también serán diferentes. Sin embargo, como muestra la experiencia, *la razón entre las masas de estos cuerpos y sus volúmenes es igual a una magnitud constante*:

$$\frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2} = \dots = \text{const.}$$

Esta razón es una característica de la materia.

La razón de la masa del cuerpo respecto a su volumen es llamada densidad de la materia:

$$\rho = m/V. \quad (6.4)$$

Como mostraremos más adelante, la densidad de la sustancia depende de su temperatura, presión exterior y de su estado de agregación. Por esta causa, en los manuales siempre se indican las condiciones para las que los datos de las tablas son válidos. Sin dichas indicaciones éstos no tienen sentido.

Capítulo 7

LEY FUNDAMENTAL DE DINÁMICA

§ 7.1. Fuerza y aceleración

1. De la ley de inercia se deduce que el cuerpo, por sí mismo, sin interacción con los cuerpos que le rodean, no puede variar su velocidad. Todo cambio del valor o la dirección de la velocidad es provocado por fuerzas exteriores aplicadas sobre él. Como sabemos, este influjo se caracteriza por las fuerzas (véase el § 5.1). *La ley fundamental de dinámica (llamada de otro modo, segunda ley de Newton) expresa la correlación entre la fuerza y la variación de la velocidad de los cuerpos en interacción.*

La ley fundamental de dinámica tiene la forma más sencilla en los sistemas inerciales de referencia. El caso que transcurre en sistemas no inerciales será examinado más abajo (cap. 24).

Para empezar, estudiaremos la ley fundamental de dinámica a condición de que la velocidad de movimiento de un punto material respecto del sistema inercial de referencia elegido, sea mucho menor que la velocidad de la luz. Más adelante, mostraremos que muchos problemas de dinámica pueden ser resueltos con esta aproximación hasta una precisión suficiente para las actividades prácticas. Posteriormente, consideraremos el caso relativista más general (cap. 13).

2. El siguiente experimento aclara el sentido de la ley fundamental de dinámica. Entre las dos paredes de una vago-

neta está sujeta una barra dura y lisa, por la que se desliza un cuerpo de masa m con el rozamiento mínimo. En el cuerpo está fijado un dinamómetro, que con su segundo extremo se fija en la pared delantera (fig. 7.1). Sea que la vagoneta se mueve respecto de un sistema inercial de referencia (por ejemplo, la Tierra) con cierta aceleración a .

Si el cuerpo queda inmóvil con relación a la vagoneta, en lo que se refiere a la Tierra (sistema inercial de referencia), él se mueve con la misma aceleración a que la vagoneta. La experiencia muestra que en semejante caso, el resorte del

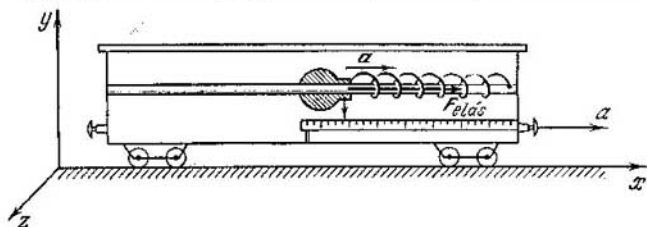


Fig. 7.1.

dinamómetro está deformado. Esto significa que *el resorte actúa sobre el cuerpo con cierta fuerza que le comunica aceleración*. En efecto, eliminando la interacción entre el resorte y el cuerpo (digamos, se quema el hilo que los une), el resorte dejará de estar deformado. En lo que concierne al cuerpo, éste, en lo tocante a la Tierra, se moverá uniformemente, conservando por inercia la velocidad que adquirió en el momento cuando cesó la interacción.

Al experimentar con cuerpos de diferentes masas y con diversas aceleraciones de la vagoneta, podremos cerciorarnos que el grado de alargamiento del resorte es proporcional a la masa del cuerpo acelerado (con aceleración constante) y a la aceleración (para la masa del cuerpo prefijada). Además, el alargamiento del resorte no depende de la velocidad de movimiento del cuerpo y la vagoneta. Pero por definición (véase el § 5.2), la fuerza elástica es proporcional al alargamiento del resorte, de forma que según el valor de éste, podemos juzgar acerca del valor de la fuerza aplicada.

Los resultados del experimento pueden ser enunciados del siguiente modo:

a) Si un cuerpo está en movimiento con aceleración respecto a cierto sistema inercial de referencia, sobre él actúa una fuerza.

b) La fuerza provoca una aceleración que es proporcional a dicha fuerza y cuya dirección coincide con ella; con la acelera-

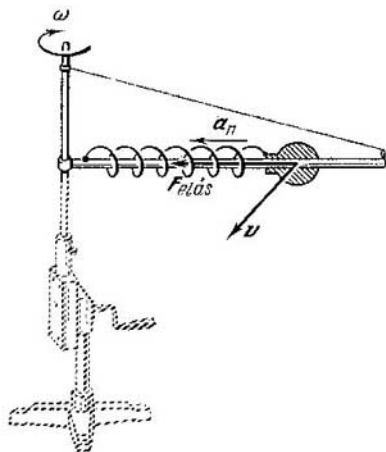


Fig. 7.2.

ción prefijada, la fuerza es proporcional a la masa del cuerpo al que comunica aceleración.

c) A velocidades mucho menores que la de la luz, dicha fuerza no depende de la velocidad de movimiento del cuerpo que se acelera.

3. Un resultado análogo se obtiene al estudiar el movimiento curvilíneo de un punto material, lo que vemos en el siguiente experimento. Una barra, con un peso y un muelle, se fija por un extremo en una máquina centrífuga y se pone en rotación alrededor de este eje (fig. 7.2). Advertiremos, que al girar el sistema el muelle se deforma y actúa sobre el cuerpo con una fuerza, que es función de la masa del cuerpo, la distancia desde el cuerpo al eje de rotación y la velocidad de rotación.

Este resultado es fácil de explicar. Cuando el cuerpo está en movimiento uniforme por una circunferencia, el módulo

de la velocidad queda constante, mientras que la dirección del vector de velocidad varía constantemente. A este respecto, ya hemos establecido (véase el § 4.8) que en semejante caso hay *aceleración normal* o bien *centrípeta*:

$$a_n = v^2/r = \omega^2 r.$$

Esta aceleración es comunicada al cuerpo por el muelle deformado.

Después de realizar experimentos con diversos cuerpos a diferentes velocidades de sus movimientos y a variadas distancias del cuerpo al eje de rotación, nos cercioramos de que al moverse el cuerpo, sobre él actúa una fuerza proporcional a la masa del cuerpo y a la aceleración centrípeta.

4. Al generalizar los resultados de los experimentos, que hemos examinado más arriba, llegamos a la conclusión: *la fuerza es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración que ella comunica a dicho cuerpo*:

$$F = ma. \quad (7.1)$$

Así se enuncia la segunda ley de Newton (o la ley fundamental de dinámica) para el caso cuando la velocidad de movimiento del cuerpo es mucho menor que la velocidad de la luz en el vacío.

5. La ley fundamental de dinámica puede ser escrita de otra forma, que con frecuencia resulta ser más cómoda. Según la definición $a = dv/dt$. Sustituyendo este valor en (7.1) y teniendo en cuenta que en la mecánica newtoniana la masa es invariante, obtenemos

$$F = m \frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}. \quad (7.2)$$

Se llama *cantidad de movimiento* (impulso o impulsión) el producto de la masa del cuerpo por su velocidad:

$$p = mv. \quad (7.3)$$

Entonces la ley fundamental de dinámica (7.2) puede ser enunciada del modo siguiente: *la fuerza es igual a la derivada de la cantidad de movimiento en el tiempo*:

$$F = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{dp}{dt} = p'(t). \quad (7.4)$$

Esta es la enunciación más general de la ley fundamental de dinámica.

6. Por fin, si sobre el cuerpo actúa cierto conjunto de fuerzas, cuya resultante es igual a R , la segunda ley de Newton se escribe de la manera siguiente:

$$R = ma = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt}. \quad (7.5)$$

Señalemos, que si el punto material está en movimiento uniforme por una circunferencia, la resultante de todas las fuerzas está dirigida al centro. En ocasiones, esta resultante, es llamada *fuerza centrípeta*.

§ 7.2. Aplicaciones de la ley fundamental de dinámica

1. Con ayuda de la ley fundamental de dinámica pueden ser determinadas las fuerzas aplicadas al cuerpo o bien, por las fuerzas profijadas, el carácter del movimiento del cuerpo. Por ejemplo, si fue preestablecida la ley de movimiento, podemos hallar la aceleración con la que el cuerpo se mueve. Conociendo la aceleración y la masa del cuerpo es fácil determinar la fuerza aplicada.!

Al confeccionar la ecuación de movimiento hay que hacer uso de la siguiente regla:

primero, es preciso hallar *todas* las fuerzas que actúan sobre el punto material dado (incluyendo las fuerzas de reacción);

después, calcular la resultante de estas fuerzas;

sobre la base de la ley fundamental de dinámica, hay que escribir que la resultante de todas las fuerzas es igual al producto de la masa por la aceleración.

La ecuación de movimiento confeccionada debe ser resuelta respecto de la magnitud buscada.

2. *Ejemplo 1.* Sobre el suelo de un ascensor está una persona, cuya masa es m . Determinar con qué fuerza presiona ésta contra el suelo del ascensor, si éste se mueve:

- verticalmente hacia arriba con aceleración;
- verticalmente hacia arriba con deceleración;
- verticalmente hacia abajo con aceleración;
- verticalmente hacia abajo con deceleración;
- uniformemente.

Como, en lo que se refiere al ascensor, la persona está en reposo, ésta se mueve con relación a la Tierra con la misma aceleración que el ascensor. Según la tercera ley de Newton, sabemos que el suelo del ascensor presiona sobre la persona

con la misma fuerza que ésta aprieta sobre el suelo, pero que las direcciones de dichas fuerzas son opuestas. Así, pues, sobre el hombre actúan dos fuerzas: la de la gravedad P y la reacción del suelo Q .

Dirijamos el eje z verticalmente hacia arriba. Entonces, la fuerza de la reacción es un vector positivo, mientras que la fuerza de la gravedad, es negativa. El signo del vector de aceleración depende del carácter del movimiento (fig. 7.3).

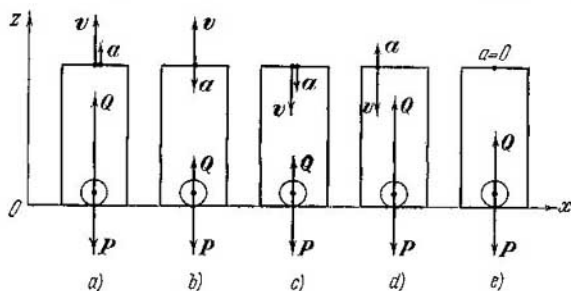


Fig. 7.3.

En el caso a), el vector de aceleración está dirigido verticalmente hacia arriba y, por lo tanto, es positivo; lo mismo resulta en el caso d), el vector de aceleración para el movimiento retardado está dirigido en sentido opuesto al vector de velocidad. En los casos b) y c) el vector de aceleración se dirige verticalmente hacia abajo.

La ecuación de movimiento en forma vectorial se escribe del modo siguiente:

$$P + Q = ma. \quad (7.6)$$

Para pasar a la anotación en forma escalar, hay que tomar en consideración los signos de los vectores. Para los casos a) y d): $-P + Q = ma$, de donde

$$Q = P + ma = m(g + a).$$

Para los casos b) y c): $-P + Q = -ma$, de donde

$$Q = m(g - a).$$

Por fin, para el caso e): $-P + Q = 0$, de donde

$$Q = P.$$

3. Así, pues, si el ascensor se mueve con relación a la Tierra con aceleración y , por lo tanto, en un sistema *no inercial* de referencia, la fuerza con la que el cuerpo presiona sobre el apoyo (es decir, su peso) no es igual a la fuerza de la gravedad. En caso que la aceleración del ascensor esté dirigida en sentido inverso a la aceleración de caída libre, la fuerza de presión sobre el apoyo *es mayor* que la fuerza de la gravedad. Pero si la aceleración del ascensor coincide por su dirección con la de caída libre, la fuerza con la que el cuerpo presiona sobre el apoyo *es menor* que la fuerza de la gravedad. Con ello, si resulta que $a = g$, de (7.6) sigue que $Q = 0$, o sea, que el cuerpo no presiona por completo sobre el apoyo.

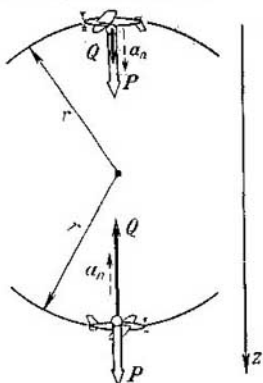


Fig. 7.4.

Sólo en el caso, cuando el ascensor se mueve uniformemente respecto de la Tierra (y , por lo tanto, es un sistema *inercial* de referencia), la fuerza de presión del cuerpo sobre el apoyo es igual a la fuerza de la gravedad.

4. *Ejemplo 2.* Un avión que se mueve a una velocidad v , riza en el plano vertical un rizo de radio r . ¿Con qué fuerza es presionado el piloto contra el asiento? ¿Con qué velocidad mínima el piloto se mantiene en el asiento? Considerar los puntos superior e inferior de la trayectoria.

En lugar de la fuerza con la que el piloto se ve apretado contra el asiento, hallaremos la fuerza de reacción numéricamente igual a ella, pero de dirección opuesta. Sobre el piloto actúan dos fuerzas: la reacción de asiento y la atracción de la Tierra. En el punto inferior la reacción está dirigida verticalmente hacia arriba, en el superior, verticalmente hacia abajo (fig. 7.4). Aunque el avión se mueve por la circunferencia de modo uniforme, la dirección del vector de velocidad cambia constantemente, por lo que la aceleración

$a_n = v^2/r$ es normal (centrípeta). En el punto inferior de la trayectoria está dirigida verticalmente hacia arriba, en el superior, hacia abajo. Para mayor comodidad, dirijamos el eje z en sentido vertical hacia abajo, a lo largo de la fuerza de la gravedad.

En forma vectorial, la ecuación de movimiento tiene la forma

$$P + Q = ma_n. \quad (7.7)$$

Para el punto inferior, en las proyecciones sobre el eje z , obtenemos $P - Q = -\frac{mv^2}{r}$, de donde

$$Q = P + \frac{mv^2}{r} = m \left(\frac{v^2}{r} + g \right).$$

Por consiguiente, aquí el piloto sufre sobrecarga. Para el punto superior $P + Q = \frac{mv^2}{r}$, de donde

$$Q = \frac{mv^2}{r} - P = m \left(\frac{v^2}{r} - g \right).$$

Como Q es el módulo de la fuerza de reacción, es decir, un número positivo, la magnitud v^2/r no puede ser menor que g . En consecuencia, el piloto se mantendrá en el asiento, si $v^2/r \geq g$. La velocidad mínima se halla de la condición

$$v_{\min} = \sqrt{gr}. \quad (7.8)$$

§ 7.3. Ingravidez

1. En el § 6.1 definimos el peso como la fuerza con la que el cuerpo actúa en el enlace a causa de la atracción de éste por la Tierra. En el párrafo anterior nos hemos cerciorado de que cuando, tocante a la Tierra, el cuerpo está inmóvil, su peso es igual a la fuerza de la gravedad.

El análisis de la solución del ejemplo 1 del párrafo anterior, nos lleva a la conclusión de que el peso también es igual a la fuerza de la gravedad, cuando el cuerpo se encuentra en un ascensor en movimiento rectilíneo uniforme respecto de la Tierra, es decir, en un sistema inercial de referencia. Por consiguiente, *el peso es igual a la fuerza de la gravedad en todo sistema inercial de referencia.*

Si, al contrario, el cuerpo está en un ascensor en movimiento acelerado, en lo que atañe a la Tierra, o en un avión

que se mueve por una circunferencia (o sea, también con aceleración en relación a la Tierra), la fuerza de presión contra el apoyo, es decir, el peso, ya no será igual a la fuerza de la gravedad.

Un sistema de referencia en movimiento acelerado acerca de un sistema inercial, es llamado sistema *no inercial* de referencia. Los fenómenos que transcurren en sistemas no inerciales de referencia, serán tratados en el cap. 24. Aquí nos limitaremos al análisis del sentido de dos conceptos: la ingravidez y las sobrecargas.

2. Examinemos con qué fuerza presiona sobre el apoyo un cosmonauta, ubicado en el sillón de una nave cósmica, durante el despegue, frenado y con el vuelo libre por la órbita.

Por la acción del cohete impulsor, la nave cósmica se mueve durante el despegue (lanzamiento) con aceleración. Este caso es análogo al descrito en el punto a) del párrafo anterior. Aquí, la fuerza, con la que el astronauta presiona sobre el apoyo, es mayor que la de la gravedad. En efecto, según la tercera ley de Newton, la fuerza con la que aprieta el cosmonauta sobre el apoyo $Q = m(g + a)$, mientras que la fuerza de la gravedad es igual a mg . El cosmonauta sufrirá *sobrecarga*, es decir, le parecerá que su peso ha aumentado.

El organismo de una persona entrenada puede aguantar, aproximadamente, una carga séxtupla, es decir $F_{pr} \approx 6P$. Esto significa, que la aceleración de la nave cósmica no debe sobrepasar el valor quíntuplo de la aceleración de caída libre. Efectivamente, de la desigualdad $m(g + a) \leq 6mg$ se desprende que $a \leq 5g$.

3. Basándose en los resultados de la solución del punto d) del párrafo anterior, dejemos que el lector muestre que durante el frenado de la nave cósmica surgen las mismas cargas (sobrecargas) que al despegar.

4. Si la nave cósmica gira por una órbita alrededor de la Tierra, la aceleración de aquélla es igual a la de caída libre: $a = g$. En este caso, de (7.6) se deduce que $Q = 0$. El cosmonauta no presiona contra el apoyo y tendrá la sensación de «haber perdido el peso».

Así, pues, *el estado de ingravidez surge en el caso cuando el sistema no inercial (en nuestro caso, nave cósmica), se mueve con relación a la Tierra con aceleración $a = g$.*

Señalemos, que semejante valor de la aceleración no predice aún el carácter del movimiento. Este puede ser rec-

tilíneo, si con el despegue o aterrizaje verticales el motor del cohete está desconectado, o bien curvilíneo, cuando la nave cósmica se mueve por una órbita alrededor de la Tierra, aquí la aceleración será centrípeta. Para que surja la ingravidez, la forma de la trayectoria no juega ningún papel. Sólo tiene importancia que la nave se mueva con aceleración $a = g$.

§ 7.4. Sistema de unidades

1. Como hemos indicado más arriba, las unidades de medida de cualquier magnitud física pueden ser elegidas de forma arbitraria. La única condición necesaria consiste en la *homogeneidad* de la unidad de medida y de la propia magnitud: como unidad de longitud puede servir la largura de cierta barra sólida, como unidad de velocidad, la de cualquier movimiento uniforme, etc. Sin embargo, semejante arbitrariedad para la elección de las fórmulas que ligan ciertas magnitudes mediante dependencias funcionales, aparecen coeficientes numéricos.

Por ejemplo, es conocido que el área del rectángulo es proporcional a su longitud y altura:

$$S = \alpha lh,$$

donde S es el área, l , la longitud, h , la altura y α , coeficiente que depende de la elección de las unidades. Si la unidad de longitud y altura es el metro y el área, una hectárea, $\alpha = 0,0001$; entonces $S = 0,0001 lh$. No obstante, es más factible tomar como unidad de área, la de un cuadrado cuyo lado es igual a la unidad de longitud. Si la longitud se mide en metros, el área será medida en metros cuadrados y la expresión buscada tomará la forma más sencilla:

$$S = lh.$$

Así, pues, *es conveniente elegir las unidades de las magnitudes físicas de tal forma que estén ligadas entre sí por las mismas correlaciones que las magnitudes que se miden*. Esto permite reducir notablemente el número de coeficientes que entran en las fórmulas y que expresan las correlaciones entre las magnitudes físicas.

El conjunto de unidades, confeccionado de acuerdo con la regla indicada, se denomina *sistema de unidades*.

2. Todas las unidades que forman un sistema determinado, se dividen en dos clases:

Unidades básicas (fundamentales), establecidas de forma arbitraria e independientes unas de otras. Las unidades fundamentales se determinan por medio de modelos (patrones).

Unidades complementarias (derivadas) que se expresan por mediación de las fundamentales, con ayuda de las leyes físicas correspondientes.

Por ejemplo, la unidad de longitud es básica, mientras que la del área, derivada.

La *dimensión* de la magnitud física B es la correlación que determina el enlace entre la unidad de esta magnitud $[B]$ y las unidades básicas $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_3]$, ... del sistema dado. Las fórmulas de dimensión tienen la forma

$$[B] = [A_1]^{n_1} \cdot [A_2]^{n_2} \cdot [A_3]^{n_3} \dots$$

Por regla, se tiende a disminuir el número de las unidades básicas, pero esto no siempre es cómodo en la práctica. Por esta razón, al confeccionar el sistema de unidades hay que tener en cuenta las necesidades de la técnica de medida y las tradiciones históricas.

§ 7.5. Sistema Internacional de Unidades

1. En junio de 1978, la Comisión Permanente de estandarización aprobó el Estándar CAME 1052—78 «Metrología. Unidades de magnitudes físicas», de acuerdo con el cual las unidades del Sistema Internacional deben ser obligatoriamente aplicadas en todas las ramas de las ciencias, la técnica, economía nacional y en la enseñanza. En la Unión Soviética, el empleo obligatorio de las unidades SI fue ordenado por la disposición de GOSSTANDART*/de la URSS a partir del 1 de enero de 1980.

El sistema internacional de unidades (SI) es el conjunto de unidades de las magnitudes físicas, correctamente confeccionado y en interacción, que consta de siete unidades básicas, dos complementarias y de gran cantidad de derivadas.

Unidades básicas:

metro (m)—unidad de longitud;

kilogramo (kg)—unidad de masa;

segundo (s)—unidad de tiempo;

* Comité de Normas y Estándares de la URSS (N. del T.)

amperio (A)—unidad de intensidad de corriente eléctrica (§ 41.9);

kelvin (K)—unidad de temperatura termodinámica (§§ 26.7, 36.6);

mol (mol)—unidad de cantidad de materia (§ 26.9);

candela (cd)—unidad de intensidad luminosa (§ 66.1).

Unidades complementarias:

radián (rad)—unidad de ángulo plano;

estereorradián (sr)—unidad de ángulo sólido (§ 66.1).

2. Las unidades derivadas para medir magnitudes mecánicas se determinan de la forma siguiente:

la unidad de velocidad—metro por segundo (m/s)— es la velocidad de movimiento uniforme de un punto material, que cubre el espacio de un metro en el transcurso de un segundo;

la unidad de aceleración —metro por segundo cuadrado (m/s²)— es la aceleración del movimiento uniformemente variado de un punto material, cuya velocidad varía en 1 m/s en el transcurso de 1 s;

la unidad de fuerza —newton (N)— es la fuerza que a una masa igual a 1 kg comunica una aceleración igual a 1 m/s².

Las unidades de las demás magnitudes serán determinadas en la medida de su utilización.

3. A las unidades básicas, es decir, a la longitud, masa, el tiempo, la intensidad de corriente eléctrica, temperatura termodinámica, cantidad de materia e intensidad luminosa, se les atribuye la dimensión L, M, T, I, Θ , N, J. Las dimensiones de las unidades derivadas se confeccionan sobre la base de las fórmulas que se utilizan para determinar las correspondientes magnitudes derivadas, por ejemplo:

$$[v] = [l/t] = LT^{-1}, \quad [a] = [v/t] = LT^{-2}, \quad [F] = [ma] = MLT^{-2}, \quad [\rho] = [m/V] = L^{-3}M, \text{ etc.}$$

Tabla 7.1

Factor	Prefijo	Designación	Factor	Prefijo	Designación
10 ¹²	tera	T	10 ⁻³	mili	m
10 ⁹	giga	G	10 ⁻⁶	micro	μ
10 ⁶	mega	M	10 ⁻⁹	nano	n
10 ³	kilo	k	10 ⁻¹²	pico	p

4. Para la formación de unidades decimales múltiples y fraccionales se hace uso de un sistema de prefijos decimales, cada uno de los cuales corresponde a un factor del tipo 10^n , donde n es un número entero. Los prefijos que más se utilizan están aducidos en la tabla 7.1.

Por ejemplo, 1 nm (nanómetro) = 10^{-9} m, 1 Gm (gigmetro) = 10^9 m; 1μ s (microsegundo) = 10^{-6} s, 1 MN (meganewton) = 10^6 N, 1 mg (miligramo) = 10^{-3} g, 1.Mg (megagramo) = 10^6 g = 1 t, etc.

Capítulo 8

LEY DE MOVIMIENTO DE UN PUNTO MATERIAL Y CONDICIONES INICIALES

§ 8.1. Problema fundamental de dinámica

1. Muchos problemas de astronomía, transporte, artillería y de otra serie de ámbitos de las ciencias y la técnica se enuncian del modo siguiente: hay un cuerpo que puede ser considerado como punto material (por ejemplo, un planeta, proyectil, cohete, etc.); son conocidas las fuerzas aplicadas a este cuerpo. Hay que hallar la ley de movimiento del punto, es decir, expresar sus coordenadas en forma de determinadas funciones del tiempo.

Este es el problema fundamental de dinámica que, en forma breve, se enuncia así: *determinar la ley de movimiento de un punto material, si son conocidas las fuerzas aplicadas a él.*

Para su solución, primeramente, con ayuda de la ley fundamental de dinámica (segunda ley de Newton), se halla la aceleración con la que se mueve el punto material. A continuación, mediante las conocidas fórmulas de cinemática, son buscadas las expresiones para las velocidades y coordenadas.

2. Las dificultades matemáticas que surgen al resolver los problemas en forma general, pueden resultar muy considerables. Al mismo tiempo, la resolución particular de cualquier problema puede ser obtenida por métodos numéricos aproximadamente, pero con el grado de precisión prefijado de antemano.

Dos sencillos problemas serán considerados más adelante. Uno de ellos, en forma general, el segundo, por métodos numéricos. Tomándolos como ejemplo, trataremos de aclarar qué es preciso conocer para poder resolver el problema fundamental de dinámica.

La solución precisa del problema podrá ser obtenida sólo en el caso más sencillo, al calcular el movimiento del cuerpo al aplicar una *fuerza constante*. En lo que atañe a los métodos numéricos, éstos son aptos para resolver todo problema, pero siempre requieren gran cantidad de cálculos matemáticos. En la actualidad, semejantes cálculos son realizados en computadores digitales de acción rápida, que con facilidad resuelven los problemas dados, claro está con la correspondiente programación.

§ 8.2. Movimiento de un punto material bajo la acción de la fuerza de la gravedad

1. Sea que sobre un punto material en movimiento, salvo la fuerza de la gravedad, no está aplicada ninguna otra fuerza. Este podría ser, por ejemplo, un cuerpo en la Luna,

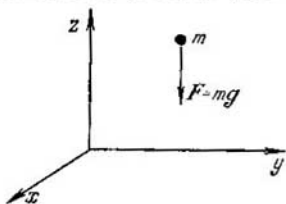


Fig. 8.1.

donde no hay atmósfera. Por cierto, que con suficiente aproximación esto puede también transcurrir en la Tierra, si la velocidad del punto no es mayor que varios metros por segundo, ya que a tales velocidades puede despreciarse la resistencia del aire.

Vamos a considerar que el sistema de referencia relacionado con la Tierra es inercial y elegir los ejes de coordenadas como se muestra en la fig. 8.1. La expresión para la fuerza aplicada sobre el punto material, se escribe así:

$$F = P = mg, \quad (8.1)$$

o en las proyecciones sobre los ejes de coordenadas

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg. \quad (8.2)$$

La ley fundamental de dinámica toma la forma

$$F_x = ma_x = 0, \quad F_y = ma_y = 0, \quad F_z = ma_z = -mg. \quad (8.3)$$

Por consiguiente, las proyecciones de la aceleración en los ejes de coordenadas serán:

$$a_x = 0, \quad a_y = 0, \quad a_z = -g. \quad (8.4)$$

2. Ahora ya no nos es difícil hallar la ley de movimiento. A lo largo del eje de abscisas el punto se mueve sin aceleración, o sea, uniformemente. En tal caso, la velocidad del punto queda constante, en tanto que su coordenada, es una función lineal del tiempo (véase el § 1.4):

$$v_x = u_0 = \text{const}, \quad x = x_0 + u_0 t. \quad (8.5)$$

Por analogía, para el eje de ordenadas

$$v_y = w_0 = \text{const}, \quad y = y_0 + w_0 t. \quad (8.6)$$

Por fin, a lo largo del eje de la coordenada z , el punto está en movimiento con aceleración constante. Entonces (véanse los §§ 4.3—4.6) su velocidad es función lineal del tiempo, mientras que su coordenada, una función cuadrática del tiempo:

$$\begin{aligned} v_z = v_0 + a_z t = v_0 - gt, \quad z = z_0 + v_0 t + \frac{a_z t^2}{2} = \\ = z_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

3. Así, pues, hemos hallado la ley de movimiento. Tiene la forma

$$x = x_0 + u_0 t; \quad y = y_0 + w_0 t, \quad z = z_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (8.8)$$

En (8.8) antes de la aceleración hemos obtenido el signo menos, mientras que en (4.8) teníamos el signo más. Esto está relacionado con la dirección del eje de la coordenada z : en (4.8) la aceleración está dirigida a lo largo del eje z , aquí la dirección del vector de aceleración es opuesta.

En la expresión para la ley de movimiento han entrado seis constantes arbitrarias: las coordenadas iniciales x_0, y_0, z_0 y las velocidades iniciales u_0, w_0, v_0 , que determinan la posición y la velocidad de movimiento del punto material en el momento de tiempo $t = 0$, que hemos tomado como inicial.

4. El sistema de ecuaciones (8.5)—(8.8) describe todos los posibles casos de movimiento del punto bajo la acción de la fuerza de la gravedad. Para obtener cierta solución particular, hay que indicar condiciones iniciales concretas.

Sea que el punto ha sido lanzado desde el origen de coordenadas a la velocidad V_0 bajo un ángulo α respecto del horizonte, con la particularidad de que el vector de la velocidad inicial yace en el plano yz (fig. 8.2). Entonces las condiciones iniciales toman la forma

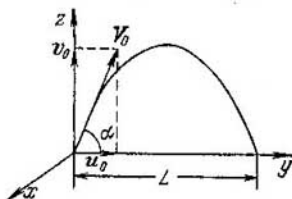


Fig. 8.2.

$$u_0 = 0, \quad w_0 = V_0 \cos \alpha, \quad v_0 = V_0 \sin \alpha. \quad (8.9)$$

La ley de movimiento tiene la forma:

$$x = 0, \quad y = V_0 t \cos \alpha, \\ z = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (8.10)$$

Mostremos que el punto se mueve por una parábola que yace en el plano vertical. En efecto, de (8.10) se desprende: $t = y/(V_0 \cos \alpha)$. Sustituyendo este valor de t en la tercera ecuación, obtenemos

$$z = y \operatorname{tg} \alpha - \frac{gy^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (8.11)$$

Como vemos, esta es la ecuación de una parábola en forma general. El alcance del vuelo será obtenido haciendo en (8.11) $z = 0$, $y = L$; entonces

$$L = \frac{2V_0^2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (8.12)$$

El alcance máximo del vuelo es conseguido al lanzar el cuerpo bajo un ángulo $\alpha = 45^\circ$ respecto al horizonte; aquí $\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1$.

5. Recomendamos al lector que obtenga de modo independiente las expresiones para dos casos particulares:

a) Un cuerpo que se encuentra a cierta altura h de la Tierra, es lanzado en dirección horizontal a una velocidad inicial u_0 . Hallar la ley de movimiento; la trayectoria; alcance del vuelo.

b) Un cuerpo ha sido lanzado verticalmente hacia arriba desde el origen de coordenadas a una velocidad inicial v_0 . Hallar la ley de movimiento; la trayectoria; la altura máxima de elevación y el tiempo necesario para esto.

§ 8.3. Solución numérica del problema fundamental de dinámica

1. En el párrafo anterior hemos conseguido hallar, de forma muy sencilla, la ley general de movimiento sólo por la causa de que sobre el punto estaba aplicada una fuerza constante. Si, al contrario, sobre el punto actúa una fuerza variable, la ley general de movimiento sólo puede ser hallada por métodos de matemática superior. Sin embargo, la solución particular, cuando las condiciones iniciales son concretas, siempre puede ser obtenida por métodos numéricos. En semejante caso, la solución se reduce a operaciones aritméticas del tipo más elemental, pero muy largas.

2. Durante los cálculos hay que partir de los siguientes razonamientos. La aceleración media en el transcurso de cierto intervalo de tiempo $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ se determina de la correlación (§ 4.1)

$$a_m = \frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t},$$

Suponiendo (para Δt pequeño) que la aceleración media poco se diferencia de la instantánea en el momento final $t = t_n$, aproximadamente, tenemos

$$v_n \approx v_{n-1} + a_n \Delta t. \quad (8.13)$$

Para la velocidad media \bar{v}_n obtenemos una fórmula análoga

$$\bar{v}_n \approx \bar{v}_{n-1} + a_n \Delta t, \quad (8.14)$$

donde la velocidad media

$$\bar{v}_n \approx \frac{v_n + v_{n-1}}{2}.$$

Pero según la definición (§ 1.6) la velocidad media

$$\bar{v}_n = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t};$$

de donde sigue:

$$x_n = x_{n-1} + v_n \Delta t. \quad (8.15)$$

Ahora ya tenemos todo lo necesario para el cálculo numérico de la ley de movimiento. En realidad, sea que conozcamos la coordenada y la velocidad de un punto en cierto momento inicial; la aceleración será hallada por medio de la ley fundamental de dinámica. Con ayuda de la fórmula (8.13) calcularemos la velocidad al pasar el tiempo Δt , en tanto que por la fórmula (8.15), la coordenada. Tomando estos nuevos valores de la velocidad y la coordenada como iniciales y haciendo uso de las mismas fórmulas daremos un paso más, etc. Al hacer un número finito de pasos obtendremos la velocidad y la coordenada en el momento necesario de tiempo.

Como es natural, mientras menor sea Δt , de mayor precisión será el resultado. Pero esto exigirá el aumento de la cantidad de cálculos.

§ 8.4. Movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza elástica

1. Con el ejemplo del movimiento de un punto material bajo la acción de una fuerza elástica, vamos a ilustrar la aplicación del método numérico para resolver el problema fundamental de dinámica.

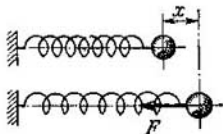


Fig. 8.3.

Sea que sobre un punto material está aplicada la fuerza elástica $F = -kx$ (fig. 8.3). Entonces, la ecuación fundamental de dinámica tiene la forma

$$-kx = ma, \quad (8.16)$$

o bien en las proyecciones sobre los ejes de coordenadas

$$-kx = ma_x, \quad 0 = ma_y, \quad 0 = ma_z. \quad (8.17)$$

Supongamos que $y_0 = z_0 = 0$ y $w_0 = u_0 = 0$; por consiguiente, el punto material sólo se mueve por el eje de abscisas con una aceleración

$$a_x = a = -\frac{k}{m} x. \quad (8.18)$$

Para la solución numérica del problema, hay que profijar cierto valor concreto de la constante k/m , la coordenada x_0 y la velocidad inicial v_0 . Sea

$$k/m = 2,467 = \pi^2/4; \quad x_0 = 1,000; \quad v_0 = 0. \quad (8.19)$$

Realicemos el cálculo, suponiendo que $\Delta t = 0,1$ s.

De (8.18) se deduce que la aceleración en el transcurso del primer intervalo de tiempo es aproximadamente $a_0 = -2,467 \cdot x_0 = -2,467$.

La velocidad final después de $\Delta t = 0,1$ s

$$v_0^{\text{fin}} = v_0 + a_0 \Delta t = -2,467 \cdot 0,1 = -0,2467.$$

Tabla 8.1

t	x	$a = -2,467 \text{ m/s}^2$	v	Cálculos
0,0	1,000	-2,467	-0,123	$v_0 = 0$ $v_{0 \text{ fin}} = v_0 + a_0 \Delta t = -0,246$
0,1	0,988	-2,437	-0,367	$x_1 = x_0 + \bar{v}_0 \Delta t = 1,000 - 0,012 = 0,988$ $\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + a_1 \Delta t = -0,123 - 0,244 = -0,367$
0,2	0,951	-2,347	-0,602	$x_2 = x_1 + \bar{v}_1 \Delta t = 0,988 - 0,037 = 0,951$ $\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + a_2 \Delta t = -0,367 - 0,235 = -0,602$
0,3	0,891	-2,199	-0,822	$x_3 = x_2 + \bar{v}_2 \Delta t = 0,951 - 0,060 = 0,891$ $\bar{v}_3 = \bar{v}_2 + a_3 \Delta t = -0,602 - 0,220 = -0,822$
0,4	0,809	-1,996	-1,022	$x_4 = x_3 + \bar{v}_3 \Delta t = 0,891 - 0,082 = 0,809$ $\bar{v}_4 = \bar{v}_3 + a_4 \Delta t = -0,822 - 0,200 = -1,022$
0,5	0,707	-1,743	-1,196	$x_5 = x_4 + \bar{v}_4 \Delta t = 0,809 - 0,102 = 0,707$ $\bar{v}_5 = \bar{v}_4 + a_5 \Delta t = -1,022 - 0,174 = -1,196$
0,6	0,587	-1,450	-1,341	$x_6 = x_5 + \bar{v}_5 \Delta t = 0,707 - 0,120 = 0,587$ $\bar{v}_6 = \bar{v}_5 + a_6 \Delta t = -1,196 - 0,145 = -1,341$
0,7	0,453	-1,120	-1,453	$x_7 = x_6 + \bar{v}_6 \Delta t = 0,587 - 0,134 = 0,453$ $\bar{v}_7 = \bar{v}_6 + a_7 \Delta t = -1,341 - 0,112 = -1,453$
0,8	0,308	-0,722	-1,525	$x_8 = x_7 + \bar{v}_7 \Delta t = 0,453 - 0,145 = 0,308$ $\bar{v}_8 = \bar{v}_7 + a_8 \Delta t = -1,453 - 0,072 = -1,525$
0,9	0,156	-0,380	-1,563	$x_9 = x_8 + \bar{v}_8 \Delta t = 0,308 - 0,152 = 0,156$ $\bar{v}_9 = \bar{v}_8 + a_9 \Delta t = -1,525 - 0,038 = -1,563$
1,0	0,000	0,000	-1,563	$x_{10} = x_9 + \bar{v}_9 \Delta t = 0,156 - 0,156 = 0,000$ $\bar{v}_{10} = \bar{v}_9 + a_{10} \Delta t = -1,563 - 0,000 = -1,563$
1,1	-0,156	0,380	-1,525	$x_{11} = x_{10} + \bar{v}_{10} \Delta t = 0,000 - 0,156 = -0,156$ $\bar{v}_{11} = \bar{v}_{10} + a_{11} \Delta t = -1,563 + 0,038 = -1,525$
1,2	-0,308	0,722	-1,453	$x_{12} = x_{11} + \bar{v}_{11} \Delta t = -0,156 - 0,152 = -0,308$ $\bar{v}_{12} = \bar{v}_{11} + a_{12} \Delta t = -1,525 + 0,072 = -1,453$

En este mismo intervalo de tiempo, la velocidad media

$$\bar{v}_0 = \frac{v_0 + v_0^{\text{fin}}}{2} = \frac{0 - 0,2467}{2} = -0,1234.$$

La coordenada del punto al final del intervalo

$$x_1 = x_0 + \bar{v}_0 \Delta t = 1,000 - 0,1234 \cdot 0,1 = 0,988.$$

De modo análogo, los cálculos pueden continuarse (tabla 8.1).

2. Después de $t = 1$ s no tiene sentido continuar los cálculos, ya que desde este momento de tiempo, los valores de la coordenada x se repiten, pero con signo opuesto. Por lo tanto, para $t = 2$ s la coor-

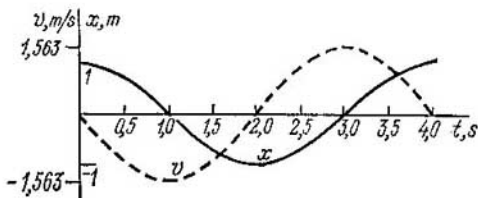


Fig. 8.4.

denada tomará el valor $x = -1$; para $t = 3$ s, el valor $x = 0$. Por fin, para $t = 4$ s, la coordenada y la velocidad tendrán los mismos valores que para $t = 0$.

La gráfica de dependencia de la coordenada del punto del tiempo (fig. 8.4) mucho se parece a la gráfica de la función $x = A \cos \omega t$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$. En la misma figura está representada la gráfica de la velocidad instantánea del punto, muy parecida a la gráfica de la función $v = B \sin \omega t$. En efecto, la solución exacta de este problema (§ 49.1) nos lleva al siguiente resultado:

$$x = \cos \frac{\pi}{2} t, \quad v = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t. \quad (8.20)$$

Si expresamos el ángulo variable $\alpha = (\pi/2) t$ no en radianes sino en grados, en las tablas de funciones trigonométricas hallaremos los valores de la expresión (8.20) y los comparamos con los resultados de nuestros cálculos (tabla 8.2). Entonces hay que tener en cuenta, que la fórmula (8.20) nos ofrece los valores *instantáneos* de la velocidad al comienzo de cada intervalo de tiempo, en tanto que nosotros hemos calculado *el valor aproximado de la velocidad media* en el transcurso de dicho intervalo.

Notemos, que en realidad, durante el cálculo numérico hemos obtenido los datos dividiendo el intervalo de tiempo en 100 y no en 10 partes y en la tabla se aducen valores redondeados. Vemos muy buena coincidencia de los datos teóricos y calculados para las coordenadas.

Tabla 8.2

t, s	$\alpha = \frac{\pi}{2} t = 90^\circ t$	Datos teóricos		Datos calculados	
		$x = \cos \frac{\pi}{2} t$	$v = -\frac{\pi}{2} \times \times \text{sen} \frac{\pi}{2} t$	x	v
0	0	1,0000	0,0000	1,000	-0,123
0,1	9°	0,9877	-0,2457	0,988	-0,367
0,2	18°	0,9544	-0,4854	0,951	-0,602
0,3	27°	0,8910	-0,7131	0,891	-0,822
0,4	36°	0,8090	-0,9233	0,809	-1,022
0,5	45°	0,7071	-1,1107	0,707	-1,196
0,6	54°	0,5878	-1,2708	0,587	-1,341
0,7	63°	0,4540	-1,3996	0,453	-1,453
0,8	72°	0,3090	-1,4938	0,308	-1,525
0,9	81°	0,1564	-1,5515	0,156	-1,563
1,0	90°	0,0000	-1,5708	0,000	-1,563
1,1	99°	-0,1564	-1,5515	-0,156	-1,525

3. El movimiento del punto material bajo la acción de una fuerza elástica se llama *oscilación armónica*. Este tipo de movimiento será examinado con detalle en el capítulo 49.

§ 8.5. Magnitudes que determinan la ley de movimiento de un punto material

1. En el ejemplo de los problemas estudiados en los párrafos anteriores, nos hemos cerciorado que para definir la ley de movimiento de un punto material se requieren los siguientes datos:

a) debe ser conocida *la fuerza* aplicada, prefijada como función del tiempo o de las coordenadas;

b) han de ser conocidas *las condiciones iniciales*: las coordenadas y la velocidad del punto en cierto momento de tiempo. (En lugar de la velocidad inicial puede ser preestablecida la cantidad de movimiento $p_0 = mv_0$.)

Si estas magnitudes son conocidas, siempre es posible hallar la ley de movimiento de un punto, o sea, expresar sus coordenadas en forma de una función del tiempo, lo que a su vez nos permite predecir su conducta en cualquier momento de tiempo, precedente o posterior.

Por ejemplo, sabiendo cuáles son las fuerzas de interacción entre el Sol y los planetas, así como las coordenadas y la velocidad de éstas en cierto lapso (es decir, las condiciones

iniciales), podemos predecir el estado de su movimiento tanto en tiempos remotos, como en el futuro. En particular, se pueden pronosticar tales fenómenos como los eclipses de Sol o de Luna, las oposiciones de la Tierra y Marte (o sea, los momentos de tiempo, cuando la distancia entre estos planetas es mínima), etc.

Conociendo la velocidad de un cohete cósmico y sus coordenadas en cierto momento de tiempo, así como las fuerzas sobre él aplicadas, podemos calcular su trayectoria; determinar en dónde se encontrará en cualquier lapso; pronosticar el tiempo y las coordenadas del punto de aterrizaje.

2. Si resulta que el movimiento real de un punto material no coincide con el calculado, esto significa que las condiciones iniciales han sido definidas incorrectamente o que la fuerza ha sido profijada de forma errónea. Por el grado de divergencia entre la trayectoria calculada y real consíguese, por regla, determinar también el valor del error realizado. Examinemos, como ejemplo, la historia del descubrimiento de Neptuno y Plutón.

El astrónomo inglés W. Herschel construyó en 1781 un telescopio que, para aquellos tiempos, era enorme. Con su ayuda él descubrió un nuevo planeta, el séptimo, que fue llamado Urano. Tomando en consideración el influjo sobre Urano del Sol y los demás planetas del Sistema Solar, entonces conocidos (Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno), fue hallada su ley de movimiento y definida su trayectoria en la bóveda celeste. Pero resultó que ésta era errónea: Urano se movía por otra curva. Como las condiciones iniciales también habían sido elegidas correctamente, la única suposición lógica era que no se tomaron en consideración todas las fuerzas aplicadas a Urano.

El científico francés Leverrier y el inglés Adams, independientemente uno de otro, enunciaron la suposición de que tras Urano debe encontrarse otro planeta, que nadie había observado. De acuerdo con la desviación de la trayectoria de Urano de la real, los científicos pudieron determinar la ley de movimiento del desconocido planeta y predecir en qué punto de la bóveda celeste puede ser hallado en uno u otro momento de tiempo. El experimento confirmó de forma brillante sus cálculos: el astrónomo alemán Galle dirigió su telescopio a ese punto del cielo y en 1846 descubrió que en realidad allí había un planeta que, posteriormente, fue llamado Neptuno.

A principios del siglo XX el astrónomo estadounidense Lowell, teniendo en cuenta los resultados de observaciones más precisas, llegó a la conclusión de que las divergencias entre la trayectoria calculada de Urano y el carácter real de su movimiento no pueden ser explicadas sólo por el influjo de Neptuno, de que tras éste hay otro planeta, el noveno. En 1930, ya después de la muerte de Lowell, en el observatorio fundado por él, el astrónomo C. Tombaugh descubrió dicho planeta, llamado Plutón.

Así, pues, en el ejemplo de una serie de problemas de mecánica newtoniana, nos hemos convencido de que *la fuerza y las condiciones iniciales determinan por completo la ley de movimiento del punto material.*

El desarrollo posterior de las ciencias ha mostrado que en el micromundo es imposible la prefijación de las condiciones iniciales, aplicable en la mecánica newtoniana (véase el cap. 14).

Capítulo 9

GRAVITACIÓN

§ 9.1. Descubrimiento de la ley de gravitación

1. A principios del siglo XVII la mayoría de los científicos se cercioró definitivamente de la justeza del sistema heliocéntrico del universo. Según este sistema, que fue propuesto por Nicolás Copérnico, la Tierra y los demás planetas están en movimiento alrededor del Sol, que es el centro de nuestro sistema planetario. No obstante, los científicos de aquel tiempo no comprendían con claridad tanto las leyes de movimiento de los planetas, como las causas que determinaban el carácter de su movimiento.

Después de estudiar los resultados de las extensas observaciones realizadas por Tycho Brahe y por él mismo, Juan Kepler obtuvo las leyes de movimiento de los planetas alrededor del Sol. El sabio comprendía que para explicar estas leyes había que hallar las fuerzas que actúan sobre los planetas. Sin embargo, ni él ni sus contemporáneos, consiguieron resolver este problema. Sólo el genial inglés Isaac Newton pudo resolverlo y exponerlo en su obra «Fundamen-

tos Matemáticos de la filosofía natural» (en aquel tiempo la física se denominaba filosofía natural), editada en 1687.

2. Con la primera aproximación podemos considerar que los planetas están en movimiento casi uniforme por órbitas que poco se diferencian de las circunferencias. Pero durante el movimiento de un punto material por una circunferencia hay aceleración normal (centrípeta), dirigida al centro de la órbita, donde se encuentra el Sol. De la ley fundamental de dinámica se desprende que la aceleración es provocada por cierta fuerza. Así, pues, el Sol actúa sobre cada planeta con una fuerza dirigida hacia su centro. Como se deduce de la tercera ley de Newton, el planeta también actúa sobre el Sol con la misma fuerza, pero dirigida en sentido opuesto.

3. Es sabido que la Luna gira alrededor de la Tierra. Es evidente que las fuerzas de atracción también existen entre ellas: la Luna es atraída por la Tierra, y ésta, por la Luna.

Newton presentó la suposición decisiva de que la fuerza de la gravedad, que actúa sobre los cuerpos en las proximidades de la superficie terrestre, y la fuerza con que la Tierra atrae la Luna, son de igual origen. Con este fin, él comparó la aceleración de caída libre y la aceleración normal, con la que la Luna se mueve por su órbita.

Esta aceleración puede ser calculada, partiendo de los siguientes razonamientos. La distancia de la Tierra a la Luna $r = 384\,403 \text{ km} = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$; el período de revolución $T = 27,322 \text{ días} = 27,3 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}$. La velocidad orbital $v = 2\pi r/T$, y la aceleración normal:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 3,84 \cdot 10^8}{(27,3 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2. \quad (9.1)$$

Como vemos, la aceleración normal de la Luna y de caída libre se diferencian grandemente entre sí por su valor. No obstante, Newton explicó la divergencia entre estas magnitudes, suponiendo que *la fuerza de gravitación decrece al aumentar la distancia entre los cuerpos en interacción según cierta ley, que ahora hallaremos*. Efectivamente, la aceleración de caída libre es igual a $9,81 \text{ m/s}^2$ cerca de la superficie de la Tierra, es decir, cuando la distancia desde el cuerpo atraído hasta el centro de la Tierra es igual a su radio medio ($R = 6371 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$); la aceleración normal de la Luna fue obtenida para un punto en su órbita, cuando la distancia entre los cuerpos en interacción era igual al radio de la órbi-

ta lunar $r = 3,84 \cdot 10^8$ m. Confeccionemos la correlación

$$\frac{g}{a_n} = \left(\frac{r}{R}\right)^n, \quad (9.2)$$

después de lo cual es posible definir el exponente desconocido. Introduciendo los valores de las distancias y las aceleraciones, obtenemos

$$\frac{9,81}{2,72 \cdot 10^{-3}} = \left(\frac{3,84 \cdot 10^8}{6,37 \cdot 10^6}\right)^n,$$

o bien $3600 = 60^n$, de donde $n = 2$.

Así, pues, la aceleración provocada por la fuerza de gravitación decrece inversamente proporcional al cuadrado de la distancia: siendo $n = 2$, de (9.2) se deduce que

$$a_n = \frac{gR^2}{r^2} = \frac{K}{r^2}, \quad (9.3)$$

donde K es cierta magnitud constante.

§ 9.2. Ley de gravitación universal

1. Los resultados obtenidos por Newton al analizar la aceleración normal que surge al girar la Luna alrededor de la Tierra, hicieron que llegara a la deducción de que en la naturaleza todos los cuerpos se atraen mutuamente con cierta fuerza de gravitación, con la particularidad de que la aceleración provocada por esta fuerza, decrece inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los cuerpos en interacción.

Sea que dos cuerpos de masa m_1 y m_2 están a una distancia r el uno del otro. Las fuerzas de interacción entre ellos $F_1 = m_1 a_1$ y $F_2 = m_2 a_2$, siendo $F_1 = F_2$, según la tercera ley de Newton. Teniendo en cuenta (9.3), obtenemos

$$\frac{m_1 K_1}{r^2} = \frac{m_2 K_2}{r^2}. \quad (9.4)$$

Esta igualdad será válida si hacemos $K_1 = \gamma m_2$ y $K_2 = \gamma m_1$, donde γ es cierta magnitud constante. Entonces

$$F = m_1 a_1 = \frac{m_1 K_1}{r^2} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Enunciemos la ley de gravitación del modo siguiente:

La fuerza de gravitación entre dos cuerpos (puntos materiales) es directamente proporcional al producto de sus masas e in-

versamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (9.5)$$

Las consideraciones expuestas más arriba, no pueden considerarse de ninguna manera como la deducción de la ley de gravitación. Sólo pueden servir como ilustración de los razonamientos del propio Newton.

Para la comprobación experimental de esta ley hay que saber hallar la fuerza de gravitación no sólo entre puntos materiales, sino que también entre cuerpos de dimensiones finitas. En caso general, este problema presenta enormes dificultades matemáticas y por métodos elementales es imposible de resolver. El cálculo exacto muestra que también se puede hacer uso de la fórmula (9.5) para el cálculo de la fuerza de interacción entre *bolas homogéneas* con masas m_1 y m_2 , entendiéndose por r la distancia entre los centros de las bolas.

2. El coeficiente γ , que entra en la expresión de la ley de gravitación, llámase *constante de gravitación*. Es numéricamente igual a la fuerza de interacción entre partículas de masa unitaria, separadas una de otra a una distancia unitaria.

En el Sistema Internacional de unidades, la constante de gravitación es numéricamente igual a la fuerza de interacción entre dos partículas con masas $m_1 = m_2 = 1$ kg separadas entre sí a una distancia $r = 1$ m. Esta magnitud sólo puede ser determinada por vía experimental.

§ 9.3. Experimento de Cavendish

En 1798 Cavendish realizó un experimento que permitió medir la fuerza de gravitación en el laboratorio y de esta forma, determinar la constante de gravitación. Para el experimento fue utilizada una balanza de torsión cuya estructura se muestra en la fig. 9.1.

Una ligera barra 2 está suspendida de un hilo fino de cuarzo 1, en el que está fijado un pequeño espejo 3. El rayo de luz 4 incide en el espejo y se refleja sobre la escala 5. Al girar la barra, el rayo reflejado se desplaza por la escala, registrando así el ángulo de torsión del hilo. En los extremos de la barra se hallan fijadas dos bolitas de plomo de igual masa m .

A ellas se acercan dos bolas de plomo, dispuestas simétricamente, cuya masa es M ($M \gg m$). Con ello, el hilo se torsiiona a cierto ángulo, hasta que la fuerza elástica del hilo deformado no equilibre la fuerza de interacción gravitatoria entre las bolas. Después de medir la fuerza de interacción según el

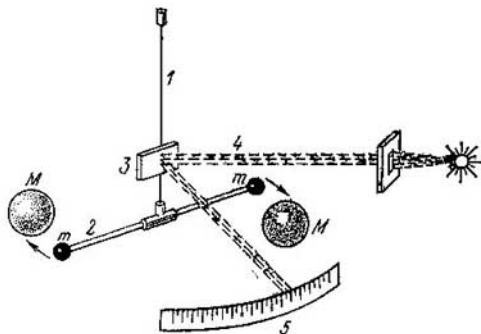


Fig. 9.1.

ángulo de torsión del hilo y conociendo la masa de las bolas y la distancia entre ellas, puede ser determinada la constante de gravitación.

Mediciones más exactas, realizadas de acuerdo con un método perfeccionado, ofrecieron el siguiente resultado

$$\gamma = (6,6720 \pm 0,0041) \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

§ 9.4. Cálculo de las distancias del Sol a los planetas

Empleemos la ley de gravitación para calcular las distancias del Sol a los planetas. Para simplificar los razonamientos vamos a suponer que los planetas giran por órbitas circulares. Esto poco influirá en la precisión de los resultados del cálculo ya que las trayectorias reales de los planetas poco se diferencian de circunferencias.

La fuerza de gravitación que actúa desde el Sol sobre los planetas, comunica a éstos aceleración normal: $a_n = F/m =$

$= \gamma M/r^2$. Pero como $a_n = v^2/r = 4\pi^2 r/T^2$, entonces

$$\frac{\gamma M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}, \quad (9.6)$$

donde M es la masa del Sol, r , el radio de la órbita, T , período de revolución del planeta alrededor del Sol. De aquí

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2} = \text{const.} \quad (9.7)$$

Así, pues, los cubos de las distancias medias de los planetas al Sol son proporcionales a los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas alrededor del Sol (tercera ley de Kepler).

Como los períodos de revolución de los planetas pueden ser medidos con gran exactitud, para determinar las distancias hasta todos los planetas es suficiente medir la distancia del Sol a un planeta cualquiera. En calidad de semejante patrón se ha aceptado la distancia media Tierra—Sol, llamada *unidad astronómica* de longitud: (1 UA = $1,49589 \cdot 10^{11}$ m).

En el transcurso de 1960—1962 los científicos soviéticos, mediante un potente radar, midieron la distancia Tierra—Venus, lo que permitió precisar el valor de la unidad astronómica y, por lo tanto, la distancia entre todos los planetas del Sistema Solar. La perfecta coincidencia de los resultados de las mediciones astronómicas y por radiolocalización es una buena demostración de la justeza de la ley de gravitación universal.

§ 9.5. Campo gravitatorio

En la física moderna, el mecanismo de las interacciones gravitatorias es representado de la siguiente forma. Cada cuerpo de masa M crea a su alrededor un campo; si en cierto punto de este campo se coloca un cuerpo de prueba de masa m , el campo actuará sobre la masa de prueba con la fuerza F que depende de las propiedades del campo en dicho punto y del valor de la masa del cuerpo de prueba. Como es natural, dicho cuerpo creará a su alrededor su propio campo, que a su vez actúa sobre el cuerpo de masa M .

El espacio libre de materia posee una serie de propiedades geométricas y físicas. Por ejemplo, la distancia más corta entre dos puntos es una recta; la marcha del tiempo en todos los puntos del espacio es igual; los rayos de la luz son líneas rectas, etc.

Einstein indicó que al introducir un cuerpo de masa M en cierta región del espacio, el primero varía las propiedades del segundo. En particular, la distancia mínima entre dos puntos ya no será una recta, sino una curva cuya forma depende de la masa del cuerpo y de la distancia entre el cuerpo y los puntos del espacio que se estudian. Como anteriormente, la luz se propaga por la distancia más corta entre dos puntos, pero los rayos luminosos se curvarán. En correspondencia, en las proximidades de cuerpos macizos el tiempo también se retarda.

Por lo tanto, el campo gravitatorio caracteriza el cambio de las propiedades físicas y geométricas del espacio en el entorno de cuerpos macizos (§§ 24.5, 24.6).

El campo gravitatorio es material, existe independientemente de nuestra conciencia y puede ser descubierto por su influjo sobre objetos físicos, por ejemplo, sobre los instrumentos de medida.

§ 9.6. Intensidad del campo gravitatorio

1. Para dar al campo gravitatorio una característica cuantitativa, vamos a introducir una magnitud física que llamaremos *intensidad del campo* G . Numéricamente esta magnitud es igual a la razón entre la fuerza de gravitación, que actúa sobre un cuerpo de prueba, y la masa de este cuerpo:

$$G = F/m. \quad (9.8)$$

Haciendo uso de la ley de gravitación (9.5) y haciendo en ella $m_1 = M$, $m_2 = m$, obtenemos

$$G = \gamma M/r^2. \quad (9.9)$$

2. Como vemos, la intensidad del campo gravitatorio es determinada por la masa del cuerpo que crea el campo (fuente del campo) y la distancia desde este cuerpo hasta el punto del campo que nos interesa. La intensidad no depende de la masa del cuerpo de prueba ubicado en dicho punto.

Es evidente que por su sentido físico, la intensidad del campo gravitatorio coincide con la aceleración del cuerpo de prueba. Como la intensidad del campo no depende de la masa del cuerpo de prueba, todos los cuerpos, independientemente de su masa, se mueven en el punto dado del campo gravitatorio con igual aceleración. En particular, precisamente

por esta causa, todos los cuerpos caen, bajo el influjo de la fuerza de gravedad, con igual aceleración g (§ 6.2).

3. La intensidad del campo es un vector dirigido en el mismo sentido que la fuerza de gravitación. Si el radio vector r es dirigido desde la fuente del campo M hacia el punto del campo que investigamos, entonces el vector de intensidad siempre estará dirigido en sentido opuesto al radio vector. Para mostrar esto, hay que escribir con signo negativo la proyección del vector de intensidad del campo gravitatorio sobre la dirección del radio vector:

$$G_r = -\gamma \frac{M}{r^2}. \quad (9.10)$$

§ 9.7. Campo gravitatorio de la Tierra

1. A medida que un cuerpo se aleja de la Tierra, disminuyen la fuerza de gravedad y la aceleración de caída libre. Un cuerpo situado al nivel del mar se atrae por la Tierra con una fuerza

$$P_0 = mg_0 = \gamma \frac{Mm}{R^2}, \quad (9.11)$$

donde M y R son la masa y el radio de la Tierra, m , la masa del cuerpo, g_0 , la aceleración de caída libre al nivel del mar. Si subimos ese mismo cuerpo a una altura h sobre el nivel del mar, él será atraído por la Tierra con la fuerza

$$P = mg = \gamma \frac{Mm}{(R+h)^2}. \quad (9.12)$$

De aquí se desprende que la fuerza de gravedad y la aceleración de caída libre varían en el mismo grado al cambiar la altura.

A pequeñas alturas, mucho menores que el radio de la Tierra, dichas variaciones pueden ser despreciadas y considerarse que la fuerza de gravedad y la aceleración de caída libre son magnitudes constantes. Efectivamente, como el radio medio terrestre $R = 6371$ km, incluso a una altura de varios centenares de kilómetros sobre el nivel del mar, sólo instrumentos muy sensibles pueden advertir el cambio del valor de la fuerza de gravedad y la aceleración. Sea $h = 300$ km, entonces

$$\frac{P}{P_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \left(\frac{6371}{6671}\right)^2 = 0,955,$$

lo que se diferencia de la unidad el 4,5%. Cuando $h = 30$ km

$$\frac{P}{P_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \left(\frac{6371}{6401}\right)^2 = 0,9957,$$

lo que difiere de la unidad el 0,43%.

2. Conociendo la aceleración de caída libre y la constante de gravitación podremos determinar la masa de la Tierra. En efecto, de (9.11)

$$g_0 = \frac{\gamma M}{R^2},$$

de donde la masa de la Tierra

$$M = \frac{g_0 R^2}{\gamma} = \frac{9,81 \cdot 6,37^2 \cdot 10^{12}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg.} \quad (9.13)$$

De modo análogo podemos calcular la masa del Sol. Sabiendo que el radio de la órbita terrestre $R_T = 149,5 \cdot 10^9$ m y el período de revolución de la Tierra alrededor del Sol $T = 1$ año $= 31,56 \cdot 10^6$ s, podemos hallar la aceleración normal de la Tierra:

$$a_T = \frac{4\pi^2 R_T}{T^2} = 5,93 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

Por analogía con (9.13), tenemos

$$M_S = \frac{a_T R_T^2}{\gamma} = \frac{5,93 \cdot 10^{-3} \cdot 149,5^2 \cdot 10^{18}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg.}$$

Así, pues, la masa del Sol es 330 000 veces mayor que la de la Tierra.

3. Conociendo la masa terrestre y su radio, podemos calcular su densidad media:

$$\rho_m = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 3}{4\pi 6,37^3 \cdot 10^{18}} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

Como las rocas pétreas, de las que está constituida la capa superficial de la Tierra, tienen una densidad que es, aproximadamente, dos veces menor, claro está que en las entrañas de la Tierra, hay un núcleo, cuya densidad es cerca de dos veces mayor que su densidad media. Esto significa que el núcleo terrestre consta, fundamentalmente, de metales semejantes al hierro, cobre, etc.

De acuerdo con una de las hipótesis propuestas por O. Yu. Shmidt, la Tierra se formó de una nube de meteoritos. Chocando unos con otros, los meteoritos se calentaban; además, su calentamiento era

provocado por el calor que se desprendía durante la desintegración de las sustancias radiactivas. Como resultado el globo terráqueo adquirió propiedades plásticas. Las sustancias más densas, tales como los metales, fueron atraídas al centro de la Tierra y formaron su núcleo; materias menos densas ascendieron a la superficie y formaron la cubierta pétreo de la Tierra, es decir, la litosfera.

Sin embargo, en la litosfera se hallan con frecuencia yacimientos macizos de sustancias más densas, los minerales metálicos. En el entorno de estos yacimientos la aceleración de caída libre es mayor que en las regiones constituidas sólo de rocas pétreas. Mediciones exactas de la aceleración de caída libre ayudan a los geólogos a descubrir yacimientos metálicos. Este método, denominado *exploración gravimétrica*, se usa extensamente en la práctica.

§ 9.8. Influencia de la rotación de la Tierra sobre la aceleración de la caída libre

1. En el párrafo anterior hemos deducido la dependencia entre la aceleración de la caída libre y la altura del cuerpo sobre el nivel del mar. Pero, con ello, no hemos tenido en cuenta que sobre dicha magnitud también influye la rotación diaria terrestre.

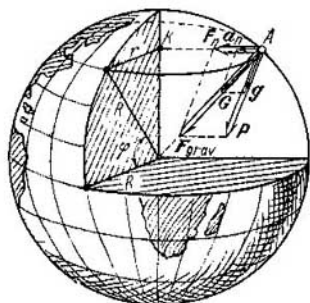


Fig. 9.2.

Sea que un cuerpo de masa m está situado en el punto A de latitud geográfica φ (fig. 9.2). Como este cuerpo toma parte en la rotación diaria terrestre, él se moverá por una circunferencia de radio $AK = r = R \times \cos \varphi$, donde R es el radio de la Tierra. Durante todo movimiento curvilíneo surge aceleración normal

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 R \cos \varphi}{T^2},$$

donde T es el período de revolución de la Tierra.

Para hallar la fuerza que provoca la aceleración normal hay que descomponer la fuerza de gravitación F_{gr} en dos componentes: la fuerza centrípeta F_n y la fuerza de gravedad P . En la fig. 9.2 vemos que la fuerza de gravedad es en todo lugar, salvo en los polos, menor que la fuerza de gravitación. Además, dondequiera, excluyendo el ecuador y los polos, la fuerza de gravedad está dirigida no hacia el centro de la Tierra sino un poco hacia un lado.

Como a cuenta de la rotación de la Tierra, en los polos la fuerza de gravedad es algo mayor que en el ecuador, el globo terráqueo está un poco aplastado: su radio polar es igual a 6356,9 km, mientras que el ecuatorial, 6378,4 km.

2. La aceleración de la caída libre tiene su valor máximo en el polo. Es verdad, aquí la aceleración normal es igual a cero y el radio polar tiene la menor dimensión. Por consiguiente,

$$g_p = G_p = \frac{\gamma M}{R_p^2}.$$

La aceleración de caída libre de un cuerpo en el ecuador es la diferencia entre la intensidad del campo gravitatorio y la aceleración normal:

$$g_{ec} = G_{ec} - a_n^{ec} = \frac{\gamma M}{R_{ec}^2} - \frac{4\pi^2 R_{ec}}{T^2}.$$

Mediciones exactas nos dan

$$g_p = 9,83210 \text{ m/s}^2,$$

$$g_{ec} = 9,78038 \text{ m/s}^2.$$

En la latitud de 45° la aceleración de caída libre de un cuerpo $g = 9,80620 \text{ m/s}^2$.

En los cálculos aproximados se toma $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Capítulo 10

FUERZAS ELÉCTRICAS

§ 10.1. Carga eléctrica

1. Además de la gravitación, en la naturaleza hay una clase particular de interacciones *electromagnéticas*: fuerzas eléctricas y magnéticas. El ejemplo más sencillo de interacción es la atracción o repulsión de los cuerpos electrizados.

El siguiente experimento nos permite estudiar la electrificación. Dos barras de plástico están instaladas sobre agujas y pueden girar libremente (fig. 10.1). En una de las barras está fijada una placa metálica bien pulida, mientras que en la otra, una placa de plexiglás, también pulida minuciosamente. Quitemos las barras de las agujas y pongamos las

placas en contacto. Si ponemos de nuevo las barras sobre las agujas, las placas se atraerán entre sí. Como es natural, esta fuerza no es de gravitación, ya que la masa de los cuerpos antes y después del contacto queda invariable, mientras que las fuerzas gravitatorias sólo dependen de la masa de los cuerpos y la distancia entre ellos. Por lo tanto, en el experimento dado tropezamos con una nueva clase de fuerzas, que son llamadas *eléctricas*.

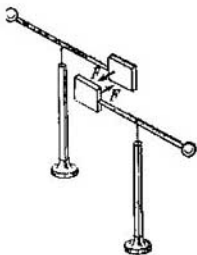


Fig. 10.1.

2. La magnitud física que caracteriza la propiedad de los cuerpos de ponerse en interacción eléctrica a determinadas condiciones y que define el valor de las fuerzas eléctricas se llama *carga eléctrica*. El fenómeno que se acompaña por la redistribución de las cargas y los cuerpos, denomínase *electrización*.

La electrización de los cuerpos al hacer éstos contacto, también es llamada a veces electrización por rozamiento, lo que en esencia es erróneo. El rozamiento no juega aquí un papel de principio, sino que mejora el contacto entre los cuerpos y, de este modo, favorece a su electrización.

3. Durante todos los fenómenos relacionados con la redistribución de las cargas eléctricas en un sistema aislado de cuerpos en interacción, la suma algebraica de las cargas eléctricas queda constante. Esta *ley de conservación de las cargas eléctricas* es, por lo tanto, una ley fundamental de física, lo mismo que el resto de las leyes de conservación, que serán estudiadas más adelante (véase el cap. 15).

§ 10.2. Ley de Coulomb

1. La práctica muestra que la fuerza de interacción eléctrica depende, de modo bastante complicado de la forma de los cuerpos electrizados y del carácter de la distribución de la carga en dichos cuerpos. Por lo tanto, no existe una fórmula única y sencilla, que describa la interacción eléctrica para cualquier caso arbitrario. Tan sólo para *las cargas puntuales* la ley de interacción se escribe de manera suficientemente simple.

Hay que señalar que la noción de carga puntual es una cómoda abstracción, análoga al concepto «punto material» (§ 1.1). Denominamos *puntual* a una carga distribuida por un cuerpo, cuyas dimensiones son considerablemente menores que cualesquiera de las distancias con las que se tropieza en el problema.

2. Coulomb, haciendo uso de una balanza de torsión, (§ 9.3) pudo hallar de modo experimental en 1785 la ley de interacción de las cargas puntuales. La balanza de torsión de Coulomb (fig. 10.2) tenía una ligera palanca de vidrio con una bolita metálica en un extremo. Coulomb tocaba esta bolita con una barra electrizada, en cuyo extremo también había una bolita. En este caso, la carga se distribuía entre las bolitas y ellas se repelían. La palanca torsionaba el hilo hasta el momento, cuando la fuerza elástica equilibraba la de interacción eléctrica. Haciendo girar la manecilla, podía ser cambiado el ángulo de torsión del hilo, variando con ello la fuerza elástica y, por lo tanto, la distancia entre las cargas. Después de una serie de experimentos, Coulomb halló que la fuerza de interacción eléctrica entre las cargas varía inversamente proporcional a la distancia entre ellas.

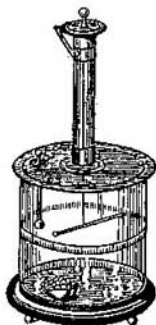


Fig. 10.2.

A diferencia del experimento de T. Cavendish, durante el cual eran conocidas las masas de los cuerpos en interacción, Coulomb no poseía ningún método para medir el valor de la carga en las bolitas. No obstante, aquí resultó ser posible la aplicación del siguiente procedimiento. Con la bolita electrizada hacía contacto una bolita sin carga de igual tamaño que la primera, que después de esto se llevaba lejos del instrumento. Como en tal caso, la carga se distribuía en partes iguales entre los dos cuerpos en contacto, la carga de la bolita de prueba disminuía el doble. Resultó que la fuerza de interacción eléctrica disminuyó el mismo número de veces.

Repetiendo esta operación varias veces, Coulomb llegó a la conclusión de que la fuerza de interacción eléctrica es proporcional al producto de las cargas de los cuerpos que interactúan.

3. Los experimentos de Coulomb fueron muy inexactos,

ya que las bolitas eran demasiado grandes y la fuerza se medía con considerable error. Además, los experimentos transcurrían en el aire, lo que influía sobre los resultados del experimento, aunque no de forma considerable. A pesar de todo, Coulomb consiguió formular una ley que, más adelante, fue confirmada brillantemente por todo el conjunto de los fenómenos eléctricos: *la fuerza de interacción entre dos cargas pun-*

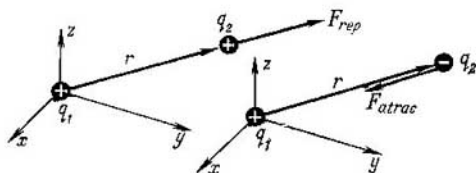


Fig. 10.3.

tuales inmóviles en el vacío, es directamente proporcional al producto de estas cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas,

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (10.1)$$

Aquí F es la fuerza de interacción, q_1 y q_2 , las cargas, r , la distancia entre ellas, k , un coeficiente de proporcionalidad que depende del sistema de unidades empleado durante los cálculos.

4. La fuerza de Coulomb, como otra cualquiera (por ejemplo, la de gravitación), se subordina a la tercera ley de Newton: *las fuerzas de interacción entre las cargas son iguales por su valor y están dirigidas en sentido opuesto una de otra a lo largo de una recta que une dichas cargas.*

La práctica muestra que las cargas de un mismo signo se repelen, las de signos diferentes se atraen. Por esta causa, las fuerzas de Coulomb se diferencian en principio de las de gravitación, que siempre son fuerzas de atracción.

La fuerza de repulsión, que actúa sobre la carga dada, va dirigida en el mismo sentido que el radio vector trazado hacia dicha carga; la fuerza de atracción tiene dirección opuesta (fig. 10.3). Por esta razón, es conveniente atribuir a estas fuerzas los correspondientes signos: a las fuerzas de repulsión, positivo, a las de atracción, negativo.

La ley de Coulomb toma en consideración automáticamente los signos de las cargas: si éstas son de un mismo signo, su producto es un número positivo y la fuerza de repulsión tiene el mismo signo. Si las cargas tienen signos diferentes, su producto es un número negativo, lo que corresponde al signo de la fuerza de atracción.

Notemos, que de acuerdo con la condición del signo de las fuerzas, la expresión para la proyección de la fuerza de gravitación en la dirección del radio vector, debe escribirse con signo menos:

$$F_r = -\gamma \frac{mM}{r^2}, \quad (10.2)$$

ya que las masas siempre tienen signo positivo, mientras que entre ellas actúa la fuerza de atracción, que es negativa.

§ 10.3. Unidad de carga

1. La unidad de carga en el SI es *el culombio*.

Por definición, dos cargas puntiformes inmóviles, cada una de 1 culombio, separadas entre sí a 1 m, interactúan en el vacío con una fuerza igual a $9 \cdot 10^9$ N. Como el coeficiente k en la ley de Coulomb (del mismo modo que la constante de gravitación en la ley de gravitación) es numéricamente igual a la fuerza con que las dos cargas unitarias interactúan a una distancia unitaria,

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2. \quad (10.3)$$

En el SI la ley de Coulomb se escribe en la forma siguiente

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2}. \quad (10.4)$$

La magnitud ϵ_0 denomínase *constante dieléctrica*. Comparando (10.1.) y (10.4), obtenemos

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2) = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2).$$

2. Hubiera sido natural tomar como unidad de carga eléctrica la del electrón. En tal caso, la carga de todo otro cuerpo se expresaría con un número entero, que mostraría cuántos electrones el cuerpo adquirió (o perdió) durante su electrización. Sin embargo, como que la unidad de carga ya está elegida, la carga del electrón fue determinada de modo experimental. Resultó que la carga del electrón (carga ele-

mental) $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C (§ 37.10). De aquí se deduce que $1 \text{ C} = 6,25 \cdot 10^{18} e$.

3. Comparemos las fuerzas de interacción gravitatoria y eléctrica entre dos electrones. Tenemos

$$F_{\text{coul}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad F_{\text{gr}} = \frac{\gamma m^2}{r^2},$$

donde $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg, la masa en reposo del electrón:

$$\frac{F_{\text{coul}}}{F_{\text{gr}}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma m^2} = \frac{1,6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 36\pi \cdot 10^9}{4\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 9^2 \cdot 10^{-62}} \approx 4 \cdot 10^{42}.$$

Es decir, al examinar los fenómenos que transcurren en los sistemas cargados eléctricamente y, en particular, en el mundo de las moléculas, átomos y núcleos atómicos, pueden ser despreciadas por completo las fuerzas de gravitación, en comparación con las eléctricas. Sólo para los cuerpos cósmicos (planetas, estrellas,) que tienen masas muy grandes, las fuerzas de gravitación comienzan a jugar un papel predominante.

§ 10.4. Dipolo

1. Llamamos *dipolo* un sistema eléctrico que consta de dos cargas q de igual magnitud y signo contrario (fig. 10.4). La característica del dipolo es su *momento eléctrico*:

$$p_e = ql. \quad (10.5)$$

El vector l se considera dirigido de la carga negativa a la positiva. El módulo $|l| = l$ se denomina *brazo del dipolo*.

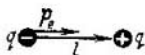


Fig. 10.4.

El vector p_e está dirigido en la misma dirección que el vector l .

Como el dipolo es un sistema eléctricamente neutro, a primera vista puede crearse la impresión de que los dipolos son incapaces de interactuar de forma eléctrica. No obstante, esta conclusión es demasiado arriesgada. *Los dipolos interactúan*, lo que se provoca por el hecho de que las cargas, que forman el dipolo, se encuentran en diversos puntos del espacio.

2. Consideremos el caso de la interacción de dos dipolos iguales, dispuestos a lo largo de un mismo eje. Designemos por r la distancia entre los centros de los dipolos; sea que esta distancia es mucho mayor que el brazo del dipolo: $r \gg l$ (fig. 10.5).

La fuerza de interacción se compone de cuatro componentes: dos fuerzas de repulsión entre las cargas homónimas y

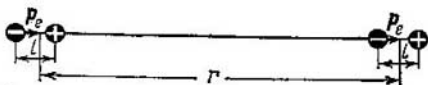


Fig. 10.5.

dos fuerzas de atracción entre las cargas de diferente signo:

$$F = \frac{(-q)(-q)}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{(-q)q}{4\pi\epsilon_0 (r-l)^2} + \frac{(-q)q}{4\pi\epsilon_0 (r+l)^2} =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2}{r^2} - \frac{1}{(r-l)^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right].$$

Después de sencillas transformaciones obtenemos

$$F = -\frac{6q^2 l^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r^2 - (l^2/3)}{(r^2 - l^2)^2}.$$

Designando $ql = p_e$ y despreciando l^2 , como una magnitud muy pequeña en comparación con r^2 , tenemos

$$F = -\frac{6p_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}. \quad (10.6)$$

Es fácil generalizar esta expresión para el caso de interacción de dipolos con diferentes momentos eléctricos dipolares p_{1e} y p_{2e} :

$$F = -\frac{6p_{1e}p_{2e}}{4\pi\epsilon_0 r^4}. \quad (10.7)$$

Así, pues, si los momentos dipolares están dispuestos a lo largo de una recta y tienen la misma dirección, ellos se atraen, con la particularidad de que la fuerza de atracción es proporcional al producto de los momentos eléctricos de los dipolos e inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia entre ellos. Por consiguiente, la interacción dipolar decrece con la distancia con mayor rapidez que la interacción entre dos cargas puntiformes.

Ofrecemos al lector que se cerciore por su cuenta, de que los dipolos, cuyos momentos están dispuestos, a lo largo de una recta y dirigidos en sentidos contrarios, se repelen con una fuerza de ese mismo valor.

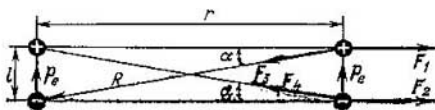


Fig. 10.6.

3. Calculemos la fuerza de interacción entre dipolos orientados de la forma mostrada en la fig. 10.6. La fuerza resultante

$$F' = F_2 + F_2 - F_3 \cos \alpha - F_4 \cos \alpha = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{2q^2 \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Teniendo en cuenta que $\cos \alpha = r/R$ y que $R^2 - r^2 = l^2$, después de sencillas transformaciones, obtenemos

$$F' = \frac{2q^2 l^2 (R^2 + Rr + r^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2 R^3 (R+r)}.$$

Haciendo, como más arriba, $l \ll r$, y, por consiguiente, $R \approx r$, tenemos

$$F' = \frac{2q^2 l^2 \cdot 3r^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2r^6} = \frac{3p_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} = \frac{f}{2}. \quad (10.6')$$

El lector se convencerá con facilidad que con la orientación antiparalela de los momentos dipolares, surge una fuerza de atracción del mismo valor.

4. Comparando las expresiones (10.6) y (10.6'), nos cercioramos que a diferencia de las fuerzas centrales (de gravitación y de Coulomb), la fuerza de interacción entre los dipolos no sólo depende de la distancia entre ellos, sino que también de la orientación entre los dipolos. Semejante propiedad tienen también las fuerzas nucleares (§ 80.5).

La interacción dipolar juega un importantísimo papel en física. Resulta, que todo sistema, constituido por cargas con disposición asimétrica, cuya suma algebraica es igual a cero, puede considerarse, con la primera aproximación, que es un dipolo. Este factor permite explicar una de las formas de la interacción molecular, las llamadas fuerzas de Van der Waals (§ 31.3).

§ 10.5. Campo eléctrico. Intensidad

1. Lo mismo que fue introducida la noción de campo gravitatorio (§ 9.5), introduzcamos el concepto de campo eléctrico. Vamos a considerar que la interacción eléctrica es ejecutada según el esquema «carga—campo—carga»: cada carga crea a su alrededor un campo eléctrico que actúa sobre todas las demás partículas cargadas.

El campo eléctrico es material. Existe independientemente de nuestra conciencia y puede ser descubierto por su influjo sobre los objetos físicos, por ejemplo, los instrumentos de medida.

2. La característica cuantitativa de fuerza del campo eléctrico es una magnitud vectorial, denominada *intensidad* del campo eléctrico E :

$$E = F/q. \quad (10.8)$$

La intensidad del campo es numéricamente igual a la razón entre la fuerza que actúa en el punto dado del campo sobre una carga positiva de prueba q y la magnitud de dicha carga. La carga de prueba tiene que ser tan pequeña que su campo no perturbe el campo que investigamos.

§ 10.6. Campo de una carga puntual y un dipolo

1. La expresión para la intensidad del campo de una carga puntual, puede obtenerse de la ley de Coulomb. Si designamos la carga que crea el campo con la letra Q y la carga de prueba positiva, por q , obtenemos

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (10.9)$$

Dispongamos la carga que crea el campo en el origen de coordenadas (fig. 10.7). Tracemos un radio vector al punto M del campo que nos interesa. Entonces, cuando el signo de la fuente del campo es positivo, el vector de intensidad está dirigido en el mismo sentido que el radio vector, mientras que con el signo negativo, en sentido contrario.

Notemos, que la intensidad en el punto dado es definida por la fuente del campo Q y el radio vector r , pero no es función de la carga de prueba q . Esto nos permite hablar acerca del campo en el punto dado del espacio, independientemente de si en dicho punto hay carga de prueba o no.

2. Hablando en general, el campo de todo cuerpo cargado se puede calcular partiendo de que la intensidad es un vector y de que conocemos la ley de suma de vectores. En principio, el método no es complicado: hay que dividir el cuerpo en sectores tan pequeños, que su carga pueda ser considerada

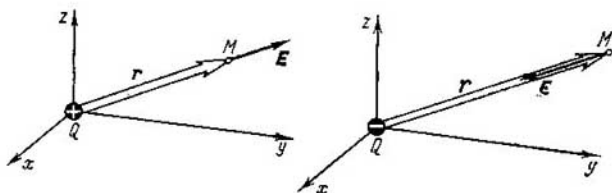


Fig. 10.7.

puntiforme, calcular la intensidad del campo creado por cada carga puntiforme y, a continuación, hallar la *suma vectorial* según la regla del polígono.

Calculemos, por ejemplo, la intensidad del campo en el centro de un triángulo equilátero, si en sus vértices se encuentran cargas de

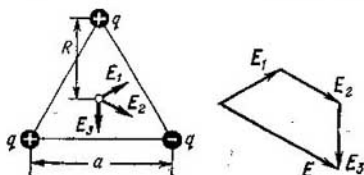


Fig. 10.8.

igual módulo, dos positivas y una negativa (fig. 10.8). Los vectores E_1 , E_2 , E_3 son de igual módulo; por la fórmula (10.9), tenemos

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a^2},$$

ya que $R = a/\sqrt{3}$. Sumando los tres vectores, según la regla del polígono, obtenemos un trapecio isósceles, cuya base mayor es, precisamente, el vector E buscado. De la figura vemos que

$$E = E_2 + E_1 \cos 30^\circ + E_3 \cos 30^\circ = 2E_1 = \frac{6q}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Además, vemos que el vector E está dirigido en la misma dirección que el vector E_2 .

3. Calculemos la intensidad del campo por el eje de dipolo E_{\parallel} y en el punto en la normal al punto medio del dipolo E_{\perp} (fig. 10.9). Con ello, lo mismo que en el § 10.4, la distancia desde el punto del campo hasta el eje del dipolo es mucho mayor que el brazo de dipolo: $r \gg l$. La intensidad del cam-

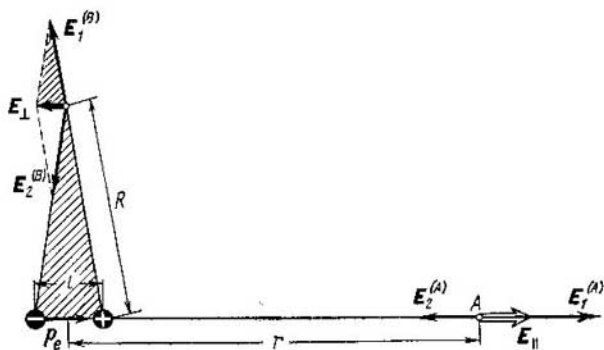


Fig. 10.9.

po en el punto A es igual a la suma vectorial de las intensidades de los campos, creados por las cargas positivas y negativas. Como E_1 y E_2 están dirigidas por una misma recta,

$$\begin{aligned} E_{\parallel} = E_1^{(A)} + E_2^{(A)} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{l}{2}\right)^2} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2lr}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}. \end{aligned}$$

Eliminando la pequeña magnitud $l^2 \ll r^2$ y haciendo $ql = = p_e$, tenemos

$$E_{\parallel} = \frac{2p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (10.10)$$

La intensidad del campo en el punto B es igual a la suma vectorial de las intensidades $E_1^{(B)}$ y $E_2^{(B)}$. De la semejanza

de los triángulos de las intensidades y las distancias (en la figura están sombreados), obtenemos

$$\frac{E_{\perp}}{E_1^{(B)}} = \frac{l}{R}.$$

De la fórmula (10.9), tenemos: $E_1^{(B)} = q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$; por consiguiente,

$$E_{\perp} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Cuando $r \gg l$, sin gran error podemos hacer $R \approx r$. Entonces

$$E_{\perp} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (10.11)$$

Así, pues, la intensidad del campo creado por un dipolo, es directamente proporcional al momento del dipolo e inversamente proporcional al cubo de la distancia desde el punto del campo hasta el centro del dipolo.

4. La intensidad del campo y el momento del dipolo son vectores. La fig. 10.9 nos muestra que los vectores E_{\parallel} y p_e tienen la misma dirección, mientras que el vector E_{\perp} , dirección opuesta. Por lo tanto, las expresiones (10.10) y (10.11) en forma vectorial toman la forma

$$E_{\parallel} = \frac{2p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (10.12)$$

$$E_{\perp} = -\frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (10.13)$$

Capítulo 11

ROZAMIENTO

§ 11.1. Rozamiento externo e interno (viscosidad)

Se llama *de rozamiento la fuerza T* que surge al hacer contacto las superficies de dos cuerpos, que obstaculiza su desplazamiento mutuo. Se aplica a los cuerpos a lo largo de la superficie de contacto recíproco y siempre está dirigida en sentido contrario a *la velocidad relativa* de desplazamiento.

Son distinguidos el rozamiento *externo* (seco) e *interno* (líquido o viscoso).

Se llama *rozamiento externo* la interacción entre las superficies de dos sólidos en contacto. Si dichos cuerpos no se mueven, se dice *rozamiento en reposo*; con el desplazamiento mutuo relativo, llámase *rozamiento de deslizamiento* o cinemático. Cuando uno de los cuerpos rueda por la superficie de otro sin patinar, surge un género especial de resistencia, denominada *rozamiento de rodadura*.

El *rozamiento interno* (viscosidad) es la interacción que surge entre las capas que se mueven unas con respecto a otras de un líquido o gas. A diferencia del rozamiento externo, aquí no hay rozamiento en reposo.

§ 11.2. Rozamiento en reposo

1. Las particularidades del rozamiento externo pueden estudiarse con ayuda de la instalación, representada en la fig. 11.1. Mediante un dinamómetro, la barreta que se halla



Fig. 11.1.

sobre la superficie lisa y horizontal de una tabla, se fija en un hilo que puede enrollarse en un tambor asentado en el árbol de un electromotor. El dinamómetro sirve para medir la fuerza de tracción F . Regulando la velocidad de rotación del motor, la fuerza de tracción puede variar en los límites necesarios. La experiencia muestra que mientras la fuerza de tracción sea menor que cierta magnitud $F_{\text{mín}}$, la barreta no se moverá de su sitio. Con mayor fuerza de tracción, la barreta con un salto empieza el desplazamiento y, a continuación, en función de las condiciones de experimento, se mueve uniforme o aceleradamente.

2. Si habiendo fuerza de tracción la barreta no tiene aceleración, esto puede explicarse sólo a causa de que *la fuerza de tracción se equilibra por la fuerza de rozamiento*.

La ley fundamental de dinámica tiene la forma

$$F + T = ma. \quad (11.1)$$

Con $a = 0$, la barreta ora está en reposo, ora en movimiento uniforme. Por consiguiente, aquí $|F| = |T|$, de donde se desprende que para medir la fuerza de rozamiento en reposo o la fuerza de rozamiento de deslizamiento es suficiente medir la fuerza de tracción que corresponde a este estado.

La fuerza de rozamiento en reposo no es una magnitud unívocamente definida. En función de la fuerza de tracción aplicada, el valor de la fuerza de rozamiento en reposo varía de cero a F_{\min} , es decir, semejante valor de la fuerza, cuando la barreta, por un salto, comienza a moverse. Por esta razón

$$T_{\text{rep}} \leq T_{\text{rep}}^{\text{máx}} = F_{\min}. \quad (11.2)$$

Por regla, la fuerza de rozamiento en reposo denominase *fuerza máxima de rozamiento en reposo*.

3. La teoría del fenómeno de rozamiento externo, está insuficientemente elaborada, pero en rasgos generales, el mecanismo de surgimiento del rozamiento en reposo es el siguiente.

La superficie de un sólido, incluso bien pulida, está lejos de ser plana (lisa). En ella hay microsaliientes, huecos, fisuras; con frecuencia dicha superficie está cubierta de óxidos, capas adheridas de gases o líquidos, inclusiones ajenas. Al hacer contacto las superficies de dos cuerpos, los microsaliientes penetran parcialmente en los huecos correspondientes. Como es natural, el engrane de los salientes obstaculizará el desplazamiento relativo a los cuerpos en contacto.

En una serie de sectores, la distancia entre los cuerpos en contacto puede ser del orden del radio de acción de las fuerzas moleculares. Esto conduce a la *coalescencia* de los cuerpos en los sectores dados, lo que también obstaculiza su desplazamiento relativo.

A la penetración de los microsaliientes y la coalescencia parcial de las superficies, favorece la *fuerza de presión normal* P_n exterior, que aprieta los sólidos uno contra otro. Como esta fuerza puede actuar la de gravedad o la de su componente normal (si el cuerpo se halla en un plano inclinado), así como cualquier otra fuerza, perpendicular a la superficie de contacto de los cuerpos.

La fuerza de tracción, menor que la fuerza máxima de rozamiento en reposo, en lo fundamental, provoca defor-

maciones elásticas de los microsaliientes y de los sectores donde actúan las fuerzas de cohesión molecular. En esencia, la fuerza elástica que surge es la fuerza de rozamiento en reposo.

4. Los razonamientos expuestos permiten sólo explicar cualitativamente el origen del rozamiento en reposo, pero son insuficientes para el cálculo del valor de la fuerza de rozamiento. Para obtener la correspondiente ley, hagamos un experimento.

Cargando con diversas pesas la barreta (fig. 11.1), cambiaremos la fuerza de la presión normal P_n (y, por consiguiente, la fuerza de la reacción, que es igual a ella, $Q = P_n$). Midiendo cada vez la fuerza de tracción, nos cercioraremos de que *la fuerza de rozamiento en reposo es proporcional a la fuerza de la presión normal*:

$$T_{\text{rep}}^{\text{máx}} = \mu_{\text{rep}} Q. \quad (11.3)$$

La magnitud μ_{rep} se denomina *coeficiente de rozamiento en reposo*.

Variando el área de la barreta, por ejemplo, haciéndola girar de la base al costado, veremos que *la fuerza de rozamiento en reposo no depende del área de la barreta*. Dividamos los dos miembros de la igualdad (11.3) por el área de contacto y designemos con $\tau = T/S$ la magnitud que llamamos *tensión tangencial*; como $p = P_n/S$ es la presión, la ley de rozamiento obtenida puede ser escrita del siguiente modo:

$$\tau_{\text{rep}}^{\text{máx}} = \mu_{\text{rep}} p. \quad (11.4)$$

5. El coeficiente de rozamiento en reposo depende de la calidad de maquinado de la superficie. En superficies rectificadas el rozamiento es menor que entre planos trabajados de forma basta. No obstante, esto es válido sólo hasta ciertos límites. Precisamente la experiencia muestra, que con un minucioso rectificado, los cuerpos se adhieren entre sí, lo que provoca el aumento brusco del coeficiente de rozamiento. Por lo visto, cuando las superficies están trabajadas de modo basto, el principal papel para el surgimiento de la fuerza de rozamiento lo desempeña el engrane de los salientes, mientras que con el rectificado minucioso, la cohesión molecular.

La fuerza de rozamiento en reposo también depende de cuánto tiempo han estado en contacto los cuerpos. Durante el contacto prolongado entre los cuerpos, cuando la fuerza

de la presión normal es considerable, se produce la deformación plástica de las superficies en contacto. Esto favorece a la coalescencia de los cuerpos y lleva al crecimiento de la fuerza de rozamiento en reposo.

§ 11.3. Ángulo de rozamiento en reposo

Para determinar el coeficiente de rozamiento es cómodo hacer uso de la instalación representada en la fig. 11.2. Elevando con precaución el plano inclinado, advertiremos

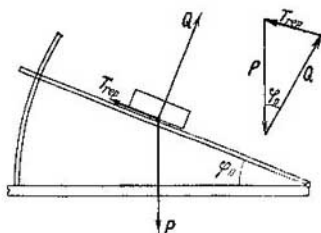


Fig. 11.2.

que con cierto ángulo φ_0 el bloque, con un salto, se mueve de su lugar y comienza a resbalar por el plano.

En el presente caso, sobre el bloque están aplicadas tres fuerzas: la de gravedad P , la de reacción del apoyo Q y la de rozamiento T_{rep} . Si no hay aceleración, la resultante de las tres fuerzas será nula, o sea, ellas forman un triángulo cerrado. Como la fuerza de gravedad está dirigida por la vertical, la fuerza de rozamiento, a lo largo del plano inclinado, mientras que la reacción es perpendicular a ella, el triángulo de fuerzas QPT_{rep} es rectángulo y el ángulo en su vértice es igual a φ_0 . De aquí se desprende que $T_{rep} = Q \operatorname{tg} \varphi_0$. Ya que $T_{rep} = \mu_{rep} Q$, entonces

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \mu_{rep}. \quad (11.5)$$

Las medidas realizadas para diversos materiales, con diferente calidad de su trabajado, muestran que el coeficiente de rozamiento varía en márgenes muy extensos: desde varias centésimas hasta la unidad. Cuando la coherencia molecular es considerable, el coeficiente de rozamiento puede alcanzar valores de 2 . . . 3.

§ 11.4. Rozamiento de deslizamiento

1. La práctica muestra que con el movimiento *uniforme* del bloque representado en la fig. 11.1, al cuerpo debe estar constantemente aplicada la fuerza de tracción. Pero el movimiento uniforme es inercial; transcurre por sí mismo, sin aplicación de fuerzas externas. Es evidente, que la falta de aceleración del bloque, al haber fuerza de tracción, sólo puede ser explicada a causa de que *la fuerza de tracción se equilibra por la fuerza de rozamiento de deslizamiento.*

Cuando investigamos la magnitud de la fuerza de rozamiento de deslizamiento en diversas condiciones, vemos que ella, con la fuerza de rozamiento en reposo, depende de la presión normal y de la calidad de trabajado de las superficies en contacto. No es función del área de contacto y depende poco de la velocidad del movimiento relativo de los cuerpos en contacto. Esto permite calcular la fuerza de rozamiento de deslizamiento por la fórmula

$$T_{des} = \mu Q, \quad (11.6)$$

donde μ es el coeficiente de rozamiento de deslizamiento.

2. Si el rozamiento en reposo se provoca, principalmente, por las deformaciones elásticas de los microsaliientes en las superficies de los cuerpos en contacto, el rozamiento de deslizamiento surge a causa de las deformaciones plásticas de los microsaliientes y por su destrucción parcial. En efecto, en estado de reposo, diferentes microsaliientes se hallan bajo la acción de fuerzas desiguales y, además, la resistencia mecánica de diversos salientes es variada. Cuando actúa la fuerza de tracción algunos de ellos se destruyen de inmediato. Con ello, la fuerza de tracción se concentra en los sectores que aún no se han destruido, pero que ya no pueden aguantar la carga creciente. Como resultado, se produce la destrucción en alud de los microsaliientes, por lo que el cuerpo, a salto, se desprende de su lugar. En este caso, la fuerza de rozamiento decrece, ya que la disminución del engrane y adhesión entre las superficies favorece a su patinaje mutuo, y como resultado, el coeficiente de rozamiento de deslizamiento μ resulta ser menor que el de rozamiento en reposo μ_{rep} .

3. El análisis cualitativo del mecanismo del rozamiento de deslizamiento, muestra que éste se acompaña del *desgaste* y *calentamiento* de las superficies en rozamiento. El carácter

del desgaste se determina por el estado de las superficies en contacto, del grado de su rugosidad, dureza, etc. Gracias al desgaste son posibles algunos tipos de maquinado de materiales, es decir, el rectificado y pulido.

El desgaste y calentamiento de las piezas en rozamiento de los mecanismos y máquinas, sin duda alguna, son nocivos; por esta causa, en la técnica se toman una serie de medidas para disminuir el rozamiento. Con este fin, utilizábase con frecuencia el engrase (§ 11.7). Otra buena medida es sustituir el rozamiento de deslizamiento por el de rodadura, instalando rodamientos de bolas o rodillos.

§ 11.5. Rozamiento de rodadura

1. Sustituyamos en la instalación mostrada en la fig. 11.1, la barreta en resbalamiento por un cilindro que puede girar en su eje (fig. 11.3). Si en el eje se aprietan las grapas de forma que el cilindro no gire, él resbalará por la superficie de la tabla. En semejante caso, la fuerza de rozamiento no diferirá, de forma notable, de la fuerza de

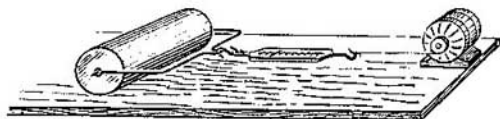


Fig. 11.3.

rozamiento de la barreta, ya que ésta, prácticamente, no depende del área de contacto de los cuerpos en rozamiento. Si, por lo contrario, las grapas se aflojan en el eje, el cilindro comenzará a rodar y la fuerza de rozamiento disminuirá bruscamente. Así, pues, *la fuerza de rozamiento de rodadura es mucho menor que la de rozamiento de deslizamiento.*

2. Los experimentos muestran que el rozamiento de rodadura es directamente proporcional a la fuerza de presión normal e inversamente proporcional al radio del cilindro (o la rueda):

$$T_{\text{rod}} = k \frac{Q}{r}, \quad (11.7)$$

Aquí, k es el coeficiente de rozamiento de rodadura; tiene la dimensión de longitud y en el Sistema Internacional de unidades se mide en metros. La expresión (11.7) puede ser sólo empleada en el caso, cuando el cilindro no patina por la superficie.

§ 11.6. Movimiento de los cuerpos bajo la acción de las fuerzas de rozamiento

1. Hasta el momento hemos considerado la fuerza de rozamiento como cierto obstáculo para el movimiento del cuerpo. Sin embargo, esto no es siempre así. En realidad, precisamente la presencia de rozamiento en reposo da la posibilidad de movimiento, digamos, a un hombre o automóvil por la superficie terrestre, a un tren o tranvía por los carriles, etc. En efecto, cuando una persona anda, entre la suela de su calzado y la tierra surge la fuerza de rozamiento en reposo. Esta fuerza es la que provoca su movimiento. Todos sabemos, cuán difícil es andar por el hielo, en el que la fuerza de rozamiento en reposo es muy pequeña.

2. Aclaremos el papel de la fuerza de rozamiento al virar un ciclista por un sector horizontal del camino. De la práctica sabemos que para virar es preciso inclinarse hacia el correspondiente lado, lo que provoca el giro automático del manillar.

Examinemos las fuerzas aplicadas sobre el ciclista al inclinarse éste a la izquierda (fig. 11.4). La fuerza de gravedad P y la fuerza de reacción del apoyo Q , ya no actúan por una misma recta. Bajo la acción de estas fuerzas, el ciclista comienza a virar en el plano vertical, lo que debía provocar el patinaje de las ruedas. Entonces, surge la fuerza de rozamiento en reposo T_{rep} , dirigida al mismo lado, hacia el que se inclina el ciclista.

Como la fuerza de rozamiento es perpendicular a la velocidad, ésta comunica al ciclista la aceleración normal $a_n = v^2/r$. De la ley fundamental de dinámica se desprende que la fuerza centrípeta es igual a la fuerza de rozamiento en reposo:

$$\frac{mv^2}{r} = T_{\text{rep}} \leq \mu_{\text{rep}} mg,$$

o bien

$$\frac{v^2}{r} \leq g \mu_{\text{rep}}.$$

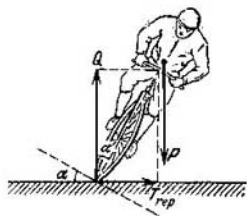


Fig. 11.4.

El ángulo de inclinación del ciclista (contando de la vertical), puede ser hallado de la condición, por la que la resultante de la fuerza de reacción y la fuerza de rozamiento debe estar dirigida a lo largo del cuerpo en movimiento:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T_{\text{rep}}}{Q} = \frac{mv^2}{rmg} = \frac{v^2}{rg} \leq \mu_{\text{rep}}$$

El ciclista no debe desviarse de la vertical a más del ángulo de rozamiento $\varphi_0 = \arctg \mu_{\text{rep}}$. Con el fin de crear la posibilidad de vencer una curva cerrada a grandes velocidades, el velódromo (pista para ciclismo) se perfila, inclinándola a un ángulo que satisfaga la condición $\operatorname{tg} \alpha \approx v^2/rg$.

§ 11.7. Rozamiento interno (viscosidad)

1. La experiencia muestra, que en los líquidos o gases en movimiento surgen fuerzas de rozamiento interno. La presencia de semejantes fuerzas puede ser revelada con ayuda de la instalación representada en la fig. 11.5. De un fino hilo se cuelga un cilindro pesado. En el recipiente cilíndrico exterior, cuyo eje coincide con el del cilindro suspendido, se echa un líquido. Si ponemos en rotación el cilindro exterior, el interior girará a cierto ángulo. Esto significa, que el líquido en rotación actúa sobre la superficie del cilindro interior con una fuerza que se equilibra por la elasticidad del hilo torsionado. Esta fuerza depende de la distancia entre los cilindros interior y exterior, de la velocidad de rotación del cilindro exterior, del género del líquido y de su temperatura.

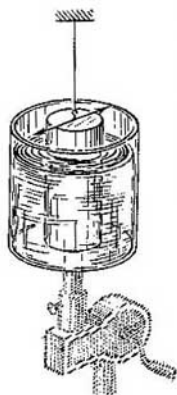


Fig. 11.5.

2. El fenómeno del rozamiento interno se describe del modo siguiente. Sea que entre dos planos hay una capa de líquido; el plano superior se mueve respecto del inferior a una velocidad v (fig. 11.6). Dividamos mentalmente el líquido en capas muy finas por medio de planos paralelos, dispuestos a una distancia Δz unos de otros. Las capas del líquido, que hacen contacto con los sólidos, se adhieren a ellos. Las capas intermedias tienen la distribución de velo-

cidas representada en la fig. 11.6. Dicha distribución se caracteriza por el *gradiente de velocidad*, la magnitud $\Delta v/\Delta n$, que muestra con qué rapidez cambia el valor absoluto de la velocidad al desplazarse a la unidad de longitud en dirección perpendicular al vector de velocidad (correspondientemente a las capas del líquido).

Entre las capas del líquido en contacto, al haber gradiente de velocidad, surgen fuerzas dirigidas a lo largo del plano de contacto y que obstaculizan su desplazamiento relativo, es decir, las fuerzas de rozamiento interno. De acuerdo con

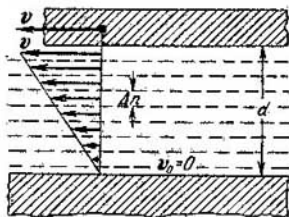


Fig. 11.6.

Newton, *las tensiones tangenciales de las fuerzas del rozamiento interno son proporcionales al gradiente de velocidad*:

$$\tau = \frac{T_{\text{int}}}{S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta n}, \quad (11.8)$$

donde η es el coeficiente de rozamiento interno o *viscosidad* del líquido.

La unidad de viscosidad en el SI es un *pascal-segundo*:

$$\text{Pa}\cdot\text{s} = \text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2,$$

su dimensión $[\eta] = \text{L}^{-1}\text{MT}^{-1}$.

3. Las fuerzas de rozamiento interno manifiéstanse no sólo en los líquidos, sino que también en los gases. Podemos cerciorarnos de esto, haciendo girar con rapidez la instalación, mostrada en la fig. 11.5, cuando entre los cuerpos se encuentra el aire (o cualquier otro gas). La viscosidad de los gases es muy pequeña, aproximadamente 10^5 veces menor que la de los líquidos.

Las fuerzas de rozamiento interno son mucho menores que las de rozamiento de deslizamiento. Por esta causa, para disminuir el rozamiento entre las partes en movimiento de los mecanismos y máquinas se emplea *el engrase*, o sea, una capa de un líquido viscoso, que llena el espacio entre las superficies en rozamiento y que las separa una de otra. Esto provoca la considerable disminución del rozamiento, lo que está ligado con la reducción del calenta-

miento y desgaste de las piezas. Pero hay que evitar la penetración del líquido en los embragues de fricción, entre la correa y la polea de una transmisión por correa, entre las ruedas motrices de la locomotora y el carril, etc., ya que en todos los casos enumerados precisamente el rozamiento es lo que sirve para transmitir el movimiento, por lo que la disminución del rozamiento es, sin duda alguna, maléfica.

§ 11.8. Movimiento de un cuerpo en un líquido

1. La práctica muestra que un cuerpo en movimiento por un líquido o gas ha de vencer cierta resistencia, que depende de las dimensiones y la forma del cuerpo, de la velocidad de su movimiento y de las propiedades del líquido o gas.

Consideramos el flujo de un líquido, que se mueve a una velocidad v , por cierto sistema de coordenadas, ligado con un cuerpo inmóvil. Del principio de relatividad sigue, que la fuerza con la que el flujo en movimiento actúa sobre el cuerpo, es completamente igual a la fuerza de resistencia que sufriría este cuerpo en movimiento a la misma velocidad por el líquido inmóvil.

2. El flujo del líquido, al chocar con el cuerpo, se deforma y fluye a su alrededor. En tal caso, las capas del líquido, junto al propio cuerpo, se adhieren a éste. A determinadas condiciones, se forma la llamada *capa límite*, región del líquido en la que la velocidad crece con gran rapidez desde cero hasta, aproximadamente, la velocidad del flujo no perturbado, es decir, que hay un elevado gradiente de velocidad. Al separarse la capa límite del cuerpo, tras él surgen torbellinos (fig. 11.7). Los fenómenos que transcurren en la capa límite y el carácter de los torbellinos, en grado considerable determinan la resistencia del líquido o del gas. No obstante, el análisis detallado de los fenómenos en la capa límite y el cálculo de las fuerzas de resistencia es un problema exclusivamente complicado. Podemos sólo emprender el intento de apreciar *el orden* de estas fuerzas y los parámetros fundamentales de los que dependen.

Vamos a considerar que la fuerza de resistencia consta de dos componentes: resistencia de presión y resistencia por rozamiento. La primera se define como *la diferencia de presiones* en los bordes delantero y posterior de un cuerpo aerodinámico, la segunda, como *las fuerzas de rozamiento*

interno, que aparecen a cuenta del elevado gradiente de velocidad en la capa límite. Para valorar la influencia de cada una de estas componentes apliquemos el método de dimensiones.

3. La fuerza de resistencia que se crea a causa de la diferencia de presiones en los bordes delantero y posterior del

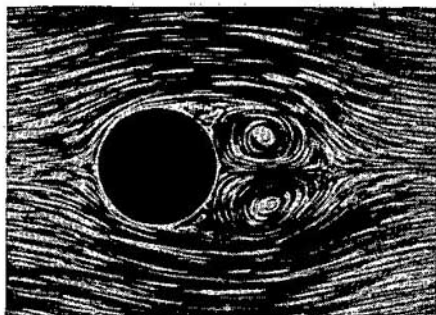


Fig. 11.7.

cuerpo aerodinámico, depende de la densidad del líquido, velocidad del flujo y el área máxima de la sección transversal, perpendicular al flujo:

$$R = \frac{C}{2} \rho^\alpha v^\beta S^\gamma. \quad (11.9)$$

Donde C es un coeficiente adimensional.

En toda igualdad la dimensión del primero y segundo miembros es igual, es decir, $[R] = [\rho^\alpha v^\beta S^\gamma]$. Haciendo $[R] = LMT^{-2}$, $[\rho] = L^{-3}M$, $[v] = LT^{-1}$ y $[S] = L^2$, determinamos los exponentes desconocidos α , β y γ . Obtenemos

$$LMT^{-2} = L^{-3\alpha} M^\alpha L^\beta T^{-\beta} L^{2\gamma},$$

de donde $\alpha = 1$; $-3\alpha + \beta + 2\gamma = 1$, $-\beta = -2$, es decir, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$.

La expresión para la resistencia de presión tiene la forma

$$R = CS \frac{\rho v^2}{2}. \quad (11.10)$$

El coeficiente C , que entra en esta expresión, depende de la forma del cuerpo o , con otras palabras, de sus cualidades aerodinámicas. Así, pues, por ejemplo, si para un disco redondo $C = 1,1 \dots 1,2$, para una bola $C = 0,4 \dots \dots 0,2$, y para un cuerpo aerodinámico en forma de gota $C \approx 0,04$, es decir, aproximadamente, 10 veces menor que para la bola y 30 veces menor que para el disco (fig. 11.8).

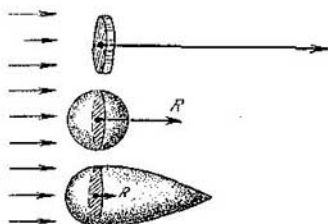


Fig. 11.8.

4. La fuerza del rozamiento viscoso, como se desprende de 11.8, debe ser función de la viscosidad, la velocidad y las dimensiones del cuerpo:

$$T = B\eta^m v^n L^k, \quad (11.11)$$

donde B es un coeficiente adimensional, L , la dimensión característica del cuerpo. El análisis de las dimensiones del primero y segundo miembros, nos da

$$LMT^{-2} = L^{-m} M^n T^{-m} L^n T^{-n} L^k,$$

de donde

$$m = 1, \quad -m + n + k = 1, \quad -m - n = -2,$$

por consiguiente,

$$m = n = k = 1.$$

La expresión para la resistencia por rozamiento será

$$T = B\eta v L. \quad (11.12)$$

El coeficiente B , lo mismo que C , con mayor frecuencia, es determinado de forma experimental. Para una bola, como mostró Stokes, $B = 6\pi$, mientras que la dimensión caracte-

rística es su radio. Así, pues para la bola]

$$T = 6\pi\eta vr. \quad (11.13)$$

5. La fuerza total de resistencia es una combinación bastante complicada de la resistencia de presión R y la resistencia por rozamiento T . Sin embargo, a velocidades muy pequeñas, la fuerza de rozamiento, proporcional a la primera potencia de la velocidad, será mucho mayor que la fuerza de presión, que es proporcional a la segunda potencia de la velocidad. A grandes velocidades, como es natural, es justo lo contrario.

Como los conceptos de velocidad «grande» y «pequeña» son suficientemente indeterminados, vamos a introducir un criterio especial para su apreciación. Con este fin, hallemos la razón de la resistencia de presión a la resistencia por rozamiento:

$$\frac{R}{T} = \frac{C}{2B} \frac{\rho v^2 S}{\eta v L}.$$

Desechando los coeficientes adimensionales C y B y considerando el área de la sección proporcional al cuadrado de la dimensión característica ($S \sim L^2$), obtenemos

$$\frac{R}{T} \approx \frac{\rho v L}{\eta} \text{Re}. \quad (11.14)$$

El número adimensional Re , llamado *de Reynolds*, juega un papel exclusivo en hidro- y aerodinámica: precisamente él determina el valor de la resistencia.

Por ejemplo, para las corrientes «arrastrantes» cuando $\text{Re} < 1$, pueden ser despreciadas las fuerzas de presión y sólo tomar en consideración las fuerzas de rozamiento. Y a la inversa, para grandes valores del número de Reynolds, sólo hay que tener en cuenta las fuerzas de presión y desechar las de rozamiento.

§ 11.9. Caída de un cuerpo en un líquido o gas

1. Más arriba estudiamos la caída libre de un cuerpo, es decir, el movimiento de los cuerpos por la acción única de la fuerza de gravedad. Fue establecido que semejante movimiento es uniformemente acelerado y hallamos la correspondiente ley de movimiento (§ 8.2). Aquí, vamos a examinar la caída de un cuerpo en un medio que opone resisten-

cia, es decir, un líquido o gas. Aclaremos, al mismo tiempo, en qué condiciones es posible despreciar la resistencia del aire y considerar que la caída del cuerpo en el aire es libre.

2. Sobre un cuerpo que cae en un líquido o gas están aplicadas tres fuerzas: la fuerza de gravedad P , la fuerza de empuje de Arquímedes F_{Arq} y la fuerza de resistencia F_{res} (fig. 11.9). En este caso, la ley fundamental de dinámica se escribe del modo siguiente:

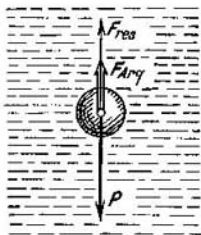


Fig. 11.9.

$$ma = P - F_{Arq} - F_{res}. \quad (11.15)$$

De las tres fuerzas sólo una es variable, la fuerza de resistencia, cuya magnitud crece con rapidez al aumentar la velocidad. La fuerza de gravedad y la de Arquímedes son magnitudes constantes. Es natural, que con el tiempo, a medida que crece la velocidad, la aceleración disminuye y llega un momento, cuando

ésta se hace igual a cero. A partir de este momento el cuerpo se moverá *uniformemente*. Así, pues, la caída de un cuerpo por un líquido o gas, sólo en la etapa inicial es acelerada; desde cierto momento el cuerpo cae a velocidad constante, que se denomina *estacionaria*.

3. La velocidad estacionaria v_{est} puede ser hallada de (11.15) para la condición $a = 0$:

$$P - F_{Arq} - F_{res}^{est} = 0. \quad (11.16)$$

Para realizar el cálculo correspondiente, es preciso valorar el orden del valor del número de Reynolds y elegir la expresión necesaria para la fuerza de resistencia.

Sea que, por ejemplo, una bola de hierro ($\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) de radio $r = 2 \text{ mm}$, cae en glicerina. La viscosidad de la glicerina $\eta = 0,83 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, su densidad $\rho_l = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. El número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho_l r v}{\eta} = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} v}{0,83} \approx 3v.$$

Sea $Re < 1$, entonces la fuerza de resistencia se calculará por la fórmula de Stokes (11.13).

Como sabemos, la fuerza de gravedad $P = mg = 4/3\pi r^3 \rho g$. La fuerza de empuje, según el principio de Arquímedes, es igual al peso

del líquido desalojado: $F_{\text{Arq}} = P_1 = 4/3\pi r^3 \rho_l g$. Sustituyendo en (11.16) y después de realizar las transformaciones correspondientes, obtenemos

$$v_{\text{est}} = \frac{2r^2 g (\rho - \rho_l)}{9\eta} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 9,8 \cdot 6,6 \cdot 10^3}{9 \cdot 0,83} \approx 0,07 \text{ m/s.}$$

Así, pues, aquí hemos hecho uso fundamentado de la fórmula de Stokes para calcular las fuerzas de resistencia, ya que $Re = 0,21 < 1$.

En los gases, por ejemplo en el aire, semejantes movimientos «arrastrantes» se producen para cuerpos muy pequeños, o sea, partículas de polvo, gotas de niebla, etc.

4. Con grandes números de Reynolds, la fuerza de resistencia está condicionada, en lo fundamental, por la resistencia de presión R . La ley fundamental de dinámica tomará la forma (menospreciando para los gases la fuerza de empuje $F_{\text{Arq}} \ll P$)

$$ma = mg - CS \frac{\rho_0 v^2}{2}, \quad (11.17)$$

donde ρ_0 es la densidad del gas.

Si un cuerpo pesado de pequeño tamaño cae de una pequeña altura, la fuerza de resistencia puede ser mucho menor que la de gravedad. Entonces puede despreciarse la resistencia y considerar que el cuerpo cae casi libremente. Si, por lo contrario, el cuerpo cae de una gran altura, la resistencia ya no puede ser despreciada y, a partir de cierto momento, el cuerpo caerá a velocidad estacionaria, lo que es fácil determinar de (11.17), haciendo $a = 0$:

$$v_{\text{est}} = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho_0}}. \quad (11.18)$$

Por ejemplo, las gotas de lluvia, que tienen forma de esfera ($C = 0,4$) de radio cerca de $r \approx 1 - 2$ mm, con una densidad del agua $\rho \approx 1 \text{ kg/m}^3$, caen a velocidad estacionaria independientemente de la altura de las nubes sobre la superficie terrestre (para el agua $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$):

$$v_{\text{est}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \pi r^3 \cdot \rho g}{3 \cdot C \cdot \pi r^2 \cdot \rho_0}} = \sqrt{\frac{8r\rho g}{3C\rho_0}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 9,8}{3 \cdot 0,4 \cdot 1}} \approx 8 \text{ m/s.}$$

5. El análisis de la fórmula (11.18) permite comprender el papel que juega el paracaídas. Cuando una persona cae sin paracaídas desde una altura considerable, tendrá una velocidad estacionaria del orden de varias decenas de metros por segundo. A semejante velocidad el choque con la superficie terrestre causaría su muerte. Al abrirse el paracaídas la fuerza de resistencia crece bruscamente: el área de la sección del paracaídas aventado por la corriente, es, aproximadamente, cien veces mayor que la de la persona que cae, mientras que el coeficiente de resistencia C del paracaídas

es varias veces mayor que la del hombre. Al aumentar el factor CS varias centenas de veces, la velocidad estacionaria disminuirá decenas de veces, hasta cerca de 3 . . . 4 m/s. A semejante velocidad el aterrizaje no es peligroso.

Capítulo 12

TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

§ 12.1. Velocidad de la luz y ley de composición de velocidades

1. A mediados del siglo XIX fueron confeccionados métodos que permitieron con suficiente precisión, medir la velocidad de la luz. Resultó, que en el vacío ésta constituye $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (con mayor precisión, véase el § 63.9). Surge



Fig. 12.1.

la siguiente pregunta: ¿en qué sistema de referencia tiene lugar este valor de la velocidad de la luz? Pues, como sabemos, hablar de la velocidad sin indicar el sistema de referencia, en general, es absurdo.

Si nos basamos en la ley clásica de composición de velocidades, llegamos a la conclusión de que en diferentes sistemas de referencia la velocidad de la luz debe ser diversa; por consiguiente, el valor dado de dicha velocidad debe referirse sólo a cierto sistema de referencia, ligado, por ejemplo, con la fuente de luz. Sobre esta base, podemos ofrecer el siguiente experimento.

Supongamos que un aparato, que permite medir la velocidad de la luz con suficiente grado de precisión, está en reposo en lo que concierne a la fuente de luz, dispuesta en el sistema de referencia xyz . En tal caso, el aparato registrará una velocidad de la luz igual a c (fig. 12.1).

Ubiquemos ahora el aparato en otro sistema de referencia que, en relación con el sistema xyz , se mueve como se muestra en las figs. 12.2, 12.3 y 12.4. Partiendo de la ley clásica de composición de velocidades, podríamos esperar que $c' =$

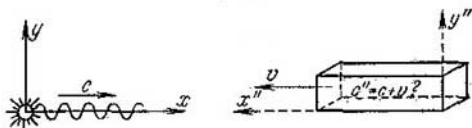


Fig. 12.2.

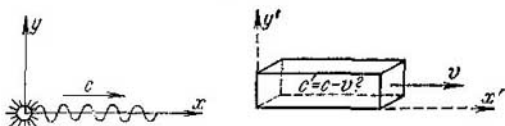


Fig. 12.3.

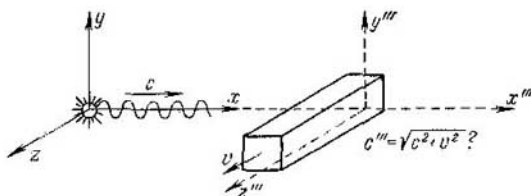


Fig. 12.4.

$= c - v$, $c'' = c + v$, $c''' = \sqrt{c^2 + v^2}$, es decir, que las velocidades de la luz c' , c'' y c''' son diferentes.

2. El primer experimento para medir la velocidad de la luz en un sistema de referencia en movimiento, fue ejecutado por Michelson en 1881. Más adelante, experimentos análogos fueron realizados por una serie de científicos, en realidad, hasta los últimos tiempos, con la particularidad de que la precisión de las mediciones crecía, como es lógico, cada vez más. Se manifestó que el experimento da *resultados negativos*: con grado muy elevado de exactitud en todos los sistemas de referencia, independientemente del valor y la dirección de la velocidad de su movimiento, la velocidad de la luz

(en el vacío) es la misma que en el sistema de referencia ligado a la fuente, es decir, $c' = c'' = c''' = c$.

Este resultado significa que la ley clásica de composición de velocidades tiene un ámbito reducido de aplicación. En particular, no es válida para describir fenómenos relacionados con la propagación de la luz. Pero la ley clásica de composición de las velocidades en un corolario de las transformaciones de Galileo; por consiguiente, estas últimas también tienen aplicación limitada.

3. Como la invariancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas inerciales de referencia es un hecho experimental establecido con seguridad, pero, como al mismo tiempo, este hecho no concuerda con las transformaciones de Galileo, surgió la necesidad de la revisión crítica de las ideas sobre las que se basan estas transformaciones. Este problema fue resuelto el año 1905 por A. Einstein. Pero para ello, fue necesaria la revisión radical de nuestras representaciones acerca del espacio y el tiempo.

Einstein mostró que al deducir las transformaciones de Galileo, en forma implícita, fueron introducidas dos tesis, que parecían tan evidentes, que se consideró innecesario fundamentarlas:

a) se suponía que la simultaneidad de dos acontecimientos es un concepto absoluto, es decir, dos acontecimientos simultáneos en un sistema de referencia, se consideraba que lo eran también en otro sistema; de aquí se desprendía que los relojes situados en sistemas inerciales de referencia tomados al azar, registran el mismo tiempo, hablando brevemente, el tiempo en todos los sistemas inerciales de referencia transcurren del mismo modo;

b) se suponía que la largura de una barra era la misma en todos los sistemas inerciales de referencia (§ 2.4).

En realidad estas tesis resultaron no ser universales, sino que la primera aproximación, justa sólo en la mecánica newtoniana.

§ 12.2. Postulados fundamentales de la teoría especial de la relatividad

La teoría especial de la relatividad de otro modo es denominada teoría relativista. En la base de su enunciación yacen dos principios que se consideran postulados. Ambos han sido certificados con seguridad experimentalmente.

1. *Principio de la relatividad.* Todos los sistemas inerciales de referencia son equivalentes, en todos los sistemas inerciales todos los fenómenos de la naturaleza, y no sólo los mecánicos, transcurren del mismo modo.

2. *Principio de invariancia de la velocidad de la luz.* En todos los sistemas inerciales la velocidad de la luz en el vacío es idéntica e igual a c .

Veamos qué corolarios se deducen de estas tesis fundamentales.

§ 12.3. Relatividad de la simultaneidad y la longitud

1. Con el fin de determinar el momento de tiempo cuando en el punto dado del espacio A ocurre cierto acontecimiento, hay que comparar éste con las indicaciones del reloj situado en el contorno de dicho punto. Lo mismo se refiere a cualquier otro punto B . No obstante, la comparación de los dos relojes tiene sentido si ellos están sincronizados. Esta afirmación es tan evidente que en el transcurso de muchos años nadie planteó la pregunta: ¿en qué consiste el procedimiento físico de sincronización?

Einstein propuso sincronizar los relojes mediante señales luminosas, partiendo del siguiente experimento mental. Por definición, suponemos que el tiempo durante el que la señal luminosa va de A a B es igual al tiempo que pasa al ir la señal de B a A . Sea que la señal sale de A en el lapso t_A^{sal} , llega a B en el momento de tiempo t_B , se refleja y retorna al punto A en el momento de tiempo t_A^{leg} . Entonces, de acuerdo con la definición,

$$t_B - t_A^{sal} = t_A^{leg} - t_B.$$

Con otras palabras, el reloj en el punto B debe mostrar el tiempo

$$t_B = \frac{1}{2} (t_A^{sal} + t_A^{leg}).$$

Durante la realización de semejante procedimiento de sincronización, se cumplen dos condiciones:

a) condición de simetría: si el reloj A funciona de manera sincrónica con el reloj B , éste es sincrónico con el reloj A ;

b) condición de transitividad: si los relojes A y B están sincronizados, y el reloj B es sincrónico con el reloj C , el reloj A también marchará de modo sincrónico con el reloj C .

2. De los dos postulados fundamentales de la teoría de la relatividad sigue que *dos acontecimientos, simultáneos en cierto sistema de referencia, no son simultáneos en otro sistema.*

Para demostrar esta tesis, que a primera vista parece ser paradójica, examinemos el siguiente experimento. Sea que un sistema de referencia está relacionado con la Tierra y el segundo, con un vagón en movimiento rectilíneo uniforme (fig. 12.5). Marquemos en la Tierra los puntos A , B y M , con la particularidad de que $AM = BM$, mientras que en

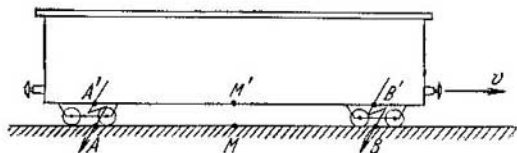


Fig. 12.5.

el vagón se marcan, correspondientemente, los puntos A' , B' , M' de forma que $A'M' = B'M'$. Sea, que en el momento cuando los puntos en la Tierra y en el vagón coinciden, en los puntos A y B ocurre cierto acontecimiento, por ejemplo, caen dos rayos.

Es evidente, que si la luz de las dos ráfagas llega al punto M simultáneamente, al punto M' llegará antes la luz de B' y, después, de A' . Ahora analicemos estos acontecimientos desde el punto de vista de los observadores que se encuentran en los dos sistemas de referencia.

En la Tierra: la distancia $AM = BM$. La velocidad de la luz es igual en todas las direcciones. Las señales de los dos acontecimientos llegan al punto M simultáneamente. Por consiguiente, *los acontecimientos en los puntos A y B han transcurrido al mismo tiempo.*

En el vagón: la distancia $A'M' = B'M'$. La velocidad de la luz es igual en todas las direcciones. La señal del punto B' llegó antes que la del punto A' . Es decir, *el acontecimiento en el punto B' ocurrió antes que en el punto A' .* Si el vagón se moviera de derecha a izquierda, obtendríase el resultado inverso: el acontecimiento en B' ocurriría más tarde que en A' .

Así, pues, la noción de simultaneidad tiene sentido relativo y en diversos sistemas inerciales de referencia el tiempo transcurre de manera distinta.

3. Notemos que en los razonamientos aducidos hemos utilizado sólo dos principios: consideramos que los dos sistemas de referencia son equivalentes (principio de la relatividad) y que la luz se mueve en todas las direcciones a la misma velocidad (principio de invariancia de la velocidad de la luz). Otras hipótesis no han sido introducidas.

En lo que se refiere a la física clásica, sin ningún fundamento se suponía que en todos los sistemas de referencia el tiempo transcurría de igual forma. De aquí se obtenía la ley clásica de composición de velocidades, que contradice a la ley de invariancia de la velocidad de la luz, establecida de modo experimental.

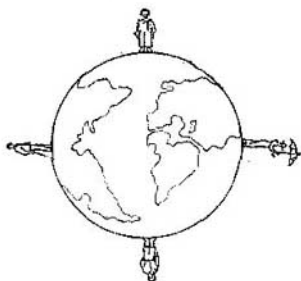


Fig. 12.6.

4. En ocasiones preguntan: ¿son o no *en realidad* simultáneos los acontecimientos en los puntos A y B? Por lo visto, semejante pregunta no tiene sentido. Responder a la pregunta de lo que ocurre *en realidad*, significa de hecho indicar un sistema de referencia preponderante, pero como sabemos, en la naturaleza no existe tal sistema de referencia.

Hablando en general, no siempre puede darse respuesta a la pregunta de lo que ocurre en realidad, ya que cuando en Moscú es la mañana, en Vladivostok es la tarde, mientras que en San Francisco, la noche. En verdad es absurdo preguntar qué parte del día es ahora: ¿mañana, tarde o noche? Estas son nociones relativas, por lo que la respuesta depende del punto de la Tierra donde está el observador. En el mismo grado son relativos los conceptos «arriba» y «abajo» para las personas que habitan en puntos opuestos del globo terrestre (fig. 12.6).

De la misma manera es relativa la noción de simultaneidad: no se puede responder a la pregunta de la simultaneidad o no simultaneidad de dos acontecimientos sin indicar

el sistema de referencia, con relación al cual se resuelve el problema.

5. ¿Por qué en la física clásica menospreciamos esta propiedad del tiempo y consideramos que el tiempo es invariante, es decir, una magnitud que no depende del sistema de referencia?

La cuestión reside en que en física clásica operamos con velocidades tan pequeñas en comparación con la de la luz, que podemos despreciar el retardo de las señales y considerar que la luz se propaga, prácticamente, de forma instantánea, a una velocidad infinitamente grande. En tal caso, los observadores que se encuentran en la superficie terrestre y en el vagón, no advertirán ninguna diferencia en la llegada de las señales de los puntos *A* y *B* (fig. 12.5), por lo que los dos observadores llegarán a la misma conclusión acerca de la simultaneidad o no simultaneidad de los acontecimientos.

Así, pues, la relatividad de la simultaneidad se desprende de que la velocidad de propagación de la luz es finita y, en general, de que la velocidad de transmisión de cualquier interacción también es finita. El hecho experimental de carencia de cualesquiera procesos, que se propagan a velocidades infinitamente grandes, fue lo que Einstein puso en la base de la teoría de la relatividad.

6. Más arriba hemos definido la longitud de una barra como la diferencia de las coordenadas de su comienzo y final *medidas simultáneamente* (§ 2.4). Sin embargo, la noción de simultaneidad tiene sentido relativo y los acontecimientos que en un sistema de referencia son simultáneos, no lo serán en otro sistema. De esto sigue, que *la largura de la barra en diversos sistemas de referencia será diferente* (véase más adelante el § 12.8). No podemos hablar de la longitud de la barra sin indicar el sistema de referencia, en relación con el cual se midió dicha dimensión. Esto en igual grado no tiene sentido, como hablar de la velocidad del pasajero sin indicar el sistema de referencia: la velocidad del pasajero respecto del vagón, no es igual a la velocidad en lo que concierne a la Tierra.

Así, pues, *en la teoría de la relatividad, los intervalos de tiempo entre los acontecimientos y las longitudes de los segmentos son nociones relativas, que tienen distintos valores en diferentes sistemas inerciales de referencia.*

§ 12.4. Transformaciones relativistas de las coordenadas. Ley relativista de composición de velocidades

1. Como fue mostrado más arriba, las transformaciones de Galileo no concuerdan con el hecho, establecido experimentalmente, de la constancia de la velocidad de la luz. Por esta razón, es preciso deducir nuevas transformaciones de las coordenadas, al pasar de un sistema inercial de referencia a otro.

Consideremos el sistema de coordenadas xyz relacionado con la Tierra y el sistema de coordenadas $x'y'z'$, ligado con un vagón (véase la fig. 2.1). En este caso, a lo largo del eje

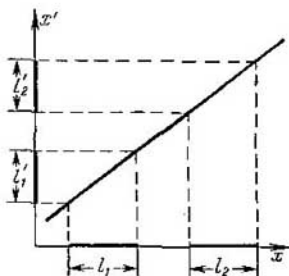


Fig. 12.7.

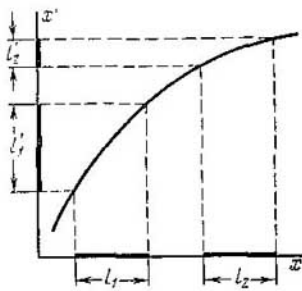


Fig. 12.8.

de ordenadas y del eje de la z -coordenada no hay movimiento, de donde se desprende que $y' = y$ y $z' = z$, lo mismo que en las transformaciones de Galileo.

El espacio libre es homogéneo e isótropo. Esto quiere decir que las transformaciones de las coordenadas son funciones lineales (fig. 12.7). En efecto, como vemos en la figura, en semejante caso la longitud del segmento no depende de la región del espacio en que éste se encuentra: de $l_1 = l_2$ se deduce que $l'_1 = l'_2$.

Si la transformación fuera no lineal (fig. 12.8) de $l_1 = l_2$ seguiría que $l'_1 \neq l'_2$, o sea, que la longitud del segmento dependería de la región del espacio en la que él se encuentra. Tal hecho señalaría la perturbación de la homogeneidad del espacio.

Es natural, que razonamientos análogos son también justos para el tiempo.

Por lo tanto, vamos a buscar las transformaciones relativistas en forma de funciones lineales:

$$x' = Ax + Bt, \quad t' = Mx + Nt. \quad (12.1)$$

Aquí A , B , M y N son constantes que debemos hallar.

2. El desplazamiento a lo largo del eje de abscisas por el vagón

$$\begin{aligned} \Delta x' = x'_2 - x'_1 &= A(x_2 - x_1) + B(t_2 - t_1) = \\ &= A \Delta x + B \Delta t. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Para el intervalo de tiempo entre dos acontecimientos, por analogía, tenemos

$$\Delta t' = M \Delta x + N \Delta t. \quad (12.3)$$

Dividiendo (12.2) por (12.3) y, tomando en consideración que la velocidad del punto respecto del vagón (a lo largo del eje de abscisas)

$$u' = \Delta x' / \Delta t', \quad (12.4)$$

y la velocidad de ese mismo punto acerca de la Tierra

$$u = \Delta x / \Delta t, \quad (12.5)$$

obtenemos la expresión de la ley de composición de velocidades (a lo largo del eje de abscisas):

$$u' = \frac{Au + B}{Mu + N}. \quad (12.6)$$

3. Hagamos uso de (12.6) para determinar las constantes, introducidas en las expresiones (12.1). Con este fin, examinemos los casos particulares siguientes:

a) Sea que un punto material está en reposo en relación con el vagón. Entonces $u' = 0$, $u = v$. Sustituyendo estas igualdades en (12.6), tenemos $0 = \frac{Av + B}{Mv + N}$, de donde

$$B = -Av. \quad (12.7)$$

b) Sea que respecto de la Tierra el punto está en reposo. Entonces $u' = -v$, $u = 0$. Realizando las anteriores transformaciones y haciendo uso de (12.7), tenemos $-v = -Av/N$, de donde

$$N = A. \quad (12.8)$$

c) Sea que en lugar de un punto material, por el vagón se propaga una onda luminosa. De acuerdo con el segundo postulado de la teoría de la relatividad —el principio de invariancia de la velocidad de la luz— obtenemos

$$u' - u = c. \quad (12.9)$$

Sustituyendo en (12.6) y empleando los resultados de (12.7) y (12.8), tenemos $c = \frac{Ac - Av}{Mc + A}$, de donde

$$M = -Av/c^2. \quad (12.10)$$

4. Ponemos en (12.6) los valores obtenidos de B , M y N y obtenemos la ley relativista de composición de velocidades (a lo largo del eje de abscisas):

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \quad \text{o bien} \quad u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}. \quad (12.11)$$

§ 12.5. Carácter limitado de la velocidad de la luz

1. De la ley relativista de composición de velocidades se desprende el carácter limitado de la velocidad de la luz: *en ningún sistema de referencia un cuerpo (o señal) puede moverse a una velocidad mayor que la de la luz en el vacío.*

En efecto, sea que un cuerpo se mueve a la velocidad u' , que no supera la de la luz en el vacío, respecto de un vagón: $0 < u' < c$. A su vez, el vagón está en movimiento con relación a la Tierra a la velocidad v , también menor que la de la luz $0 < v < c$. En tal caso, es fácil mostrar que la velocidad del cuerpo respecto de la Tierra (para cualesquiera u' y v menores que c) también será más pequeña que la velocidad de la luz.

Para la demostración hallamos la diferencia entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad del cuerpo en relación con la Tierra:

$$c - u = c - \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{(c - v)(c - u')}{c(1 + u'v/c^2)}. \quad (12.12)$$

Como hemos supuesto desde el principio que la velocidad del cuerpo u' y la velocidad del propio sistema v es menor que c , entonces $c - u > 0$. Así, pues,

$$u < c. \quad (12.13)$$

2. El resultado obtenido es, sin duda, justo para las partículas de la materia. En realidad, siempre existe un sistema de referencia, en el que la partícula se mueve a una velocidad menor que la de la luz en el vacío (por ejemplo, está en reposo, o sea, $u' = 0$). Pero entonces, la partícula en cualquier otro sistema de referencia estará en movimiento más lento que la señal luminosa en el vacío.

Notemos, que durante la deducción, no hicimos ninguna suposición relacionada con la estructura o propiedades de las partículas de la materia, sino que sólo nos basamos en los postulados fundamentales. Por consiguiente, el resultado obtenido es por completo general, apto para cualesquiera partículas de la materia, para todo cuerpo.

Así, pues, la velocidad de la luz en el vacío es la mayor velocidad en la naturaleza.

§ 12.6. Transformaciones de Lorentz

1. Las transformaciones de las coordenadas, que corresponden a los postulados fundamentales de la teoría de la relatividad, fueron obtenidas por primera vez por Lorentz.

Para deducir las transformaciones que buscamos, sustituyamos en la expresión (12.1) los valores de las constantes B , M y N ; obtendremos

$$x' = A(x - vt), \quad t' = A(t - vx/c^2). \quad (12.14)$$

Del principio de relatividad se desprende la total equivalencia de los dos sistemas de referencia: puede considerarse en reposo el sistema de coordenadas ligado al vagón; entonces el sistema de coordenadas relacionado con la Tierra, se moverá respecto del vagón a la velocidad $v' = -v$ (reciprocidad de las transformaciones de Lorentz).

Las transformaciones de coordenadas toman la forma

$$x = A(x' + vt'), \quad t = A(t' + vx'/c^2). \quad (12.15)$$

Sustituyendo las expresiones (12.15) en (12.14) tenemos

$$x' = A^2(x' + vt' - vt' - v^2x'/c^2),$$

de donde, después de simplificar, obtenemos

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.16)$$

Definitivamente, las transformaciones de Lorentz tomarán la forma

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.17)$$

o bien

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.18)$$

2. En la mecánica clásica, el espacio y el tiempo se consideran nociones que no dependen entre sí. De las transformaciones de Lorentz se desprende la estrecha ligazón entre las coordenadas espaciales y temporales: no sólo las coordenadas espaciales dependen del tiempo (lo que vimos en las transformaciones de Galileo), sino que también el tiempo es función de las coordenadas espaciales, así como de la velocidad de movimiento del sistema de referencia.

3. Las transformaciones de Lorentz y la ley relativista de composición de velocidades, corresponden al principio de inercia.

En efecto, si un cuerpo está en movimiento uniforme y rectilíneo respecto de un sistema inercial de referencia (digamos, con relación al vagón), también estará en movimiento rectilíneo y uniforme, en lo que se refiere a cualquier otro sistema inercial: de $u' = \text{const}$ y $v = \text{const}$ se deduce, de acuerdo con (12.11), que también $u = \text{const}$.

§ 12.7. Longitud del segmento

1. Supongamos que una barra es paralela al eje de abscisas y yace en el sistema de referencia xyz (por ejemplo, en la superficie terrestre). Su longitud en el sistema de referencia en el que está en reposo, será designada por $l_0 = x_2 - x_1$ (véase la fig. 2.2 en la pág. 44). En el sistema de referencia $x'y'z'$ que se mueve respecto del sistema xyz a la velocidad v (por ejemplo, en un vagón), la longitud de la barra l se define de la siguiente manera: $l = x'_2 - x'_1$ para la condición $t'_2 = t'_1$. De las transformaciones de Lorentz (12.18) sigue que

$$x_2 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

de donde

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1 + v'(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.19)$$

Haciendo, según el planteamiento, $t'_2 = t'_1$, tenemos

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (12.20)$$

2. Llamemos la longitud de la barra en el sistema de referencia, en el que está en reposo, *longitud propia* l_0 . De (12.20) se deduce que la longitud de la barra en cualquier otro sistema de referencia, respecto del cual está en movimiento, es menor que la longitud propia.

Indiquemos que en diversos sistemas de referencia, en movimiento a diferentes velocidades en relación con el sistema de referencia en el que la barra está en reposo, la longitud de ésta es distinta. De aquí se desprende explícitamente, que la variación relativista de longitud no se provoca por cualesquiera deformaciones de la barra (o por otros procesos análogos).

§ 12.8. Intervalo de tiempo entre dos acontecimientos

1. Llámense *acontecimientos* cualesquiera fenómenos que ocurren en la naturaleza.

Sea que en el punto A , en el que está el cuerpo que nos interesa, en el momento de tiempo t_1 ocurre cierto acontecimiento, en tanto que en el momento de tiempo t_2 , otro. En tal caso, el intervalo de tiempo entre estos acontecimientos $\tau_0 = t_2 - t_1$, que será medido en el sistema de referencia xyz , ligado al cuerpo que se investiga (*tiempo propio*). Hallemos el intervalo de tiempo entre estos mismos acontecimientos en el sistema de referencia $x'y'z'$, en movimiento respecto de xyz a la velocidad v (a lo largo del eje de abscisas).

Empleando la expresión (12.17) y teniendo en cuenta que los acontecimientos ocurren en un mismo punto A , es decir, $x_2 = x_1$, tenemos

$$\tau = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.21)$$

Hemos obtenido un resultado de enorme importancia: *el intervalo de tiempo entre dos acontecimientos tiene el menor valor en el sistema de referencia, ligado con el punto A , donde ocurrieron los acontecimientos que estudiamos.* En cualquier otro sistema de referencia, este intervalo de tiempo será

mayor. Con otras palabras, *en el sistema de referencia en movimiento el tiempo se retarda en comparación con el sistema de referencia en el que transcurren los acontecimientos y que hemos considerado inmóvil.*

2. El retraso del tiempo en el sistema de referencia en movimiento permite explicar un curioso fenómeno.

Bajo la acción de la radiación cósmica en el límite de la atmósfera surgen partículas llamadas *muones* (§ 83.3). Más tarde, estas partículas son detectadas en la superficie terrestre. La extensión de la atmósfera es de un orden de 300 km. Incluso si los muones se desplazan a una velocidad muy próxima a la de la luz, el tiempo de su movimiento por la atmósfera sería cerca de 10^{-3} s. Sin embargo, los experimentos con los muones muestran que estas partículas son inestables y se desintegran de manera espontánea. La duración de la vida de un muón es de 10^{-8} s, es decir, ¡mil veces menor que el tiempo de su paso por la atmósfera hacia la superficie de la Tierra! ¿Cómo explicar semejante contradicción?

Pero la cuestión consiste en que no hay ninguna clase de contradicción. En efecto, en el sistema de referencia ligado con el muón, la duración de su vida es igual a 10^{-8} s. Por lo contrario, el sistema de referencia relacionado con la Tierra, se mueve respecto del muón a una velocidad próxima a la de la luz. En este sistema el tiempo está retardado y el muón vive cerca de 10^{-3} s, o sea, mil veces más que en el sistema de referencia ligado al muón.

§ 12.9. Intervalo de tiempo entre causa y efecto

1. En la naturaleza se tropieza, con frecuencia, con acontecimientos ligados entre sí mediante un tipo determinado de enlace, que solemos llamar de causa y efecto. Por ejemplo, para que la bala llegue al blanco, antes hay que disparar. En este caso, el disparo es el acontecimiento que sirve de causa, mientras que caer en el blanco, es el efecto.

Con esto, hay que hacer notar dos propiedades características de este tipo de enlace entre los fenómenos:

- a) siempre transcurre primero el acontecimiento que es la causa, después, el efecto;
- b) si de algún modo se elimina el acontecimiento, que sirve de causa, no ocurriría otro acontecimiento que es el efecto.

Mostremos que aunque en la teoría de la relatividad, el tiempo transcurre de diferente manera en diversos sistemas de referencia, la sucesividad según el tiempo de la causa y el efecto se conserva.

2. Sea que en un sistema de referencia ligado con la Tierra, se produjo un disparo en el momento de tiempo t_1

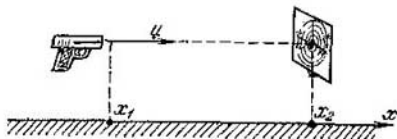


Fig. 12.9.

en un punto con coordenada x_1 , en tanto que la bala cayó en el blanco con coordenada x_2 en el momento de tiempo t_2 (fig. 12.9). En este sistema de referencia, la velocidad de la bala será

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Hallemos el intervalo de tiempo entre estos dos acontecimientos en un sistema de referencia en movimiento a lo largo del eje de abscisas a una velocidad v . De la expresión (12.17), obtenemos

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right). \quad (12.22)$$

Las velocidades de la bala u y de movimiento del nuevo sistema de referencia v son menores que la velocidad de la luz en el vacío. Por esta causa, $1 - uv/c^2$ es un número positivo. El signo de la diferencia $t'_2 - t'_1$ coincide con el signo de la diferencia $t_2 - t_1$.

Pero $t_2 > t_1$, ya que en el sistema de referencia ligado con la Tierra, la bala cayó en el blanco *después del disparo*. Precisamente por esto, en cualquier otro sistema de referencia $t'_2 > t'_1$.

Así, pues, aunque el intervalo de tiempo entre dos acontecimientos en diferentes sistemas de referencia es distinto, *el acontecimiento que es la causa ocurre en todos los sistemas de referencia antes que el acontecimiento que es el efecto*.

§ 12.10. Correlación entre la mecánica relativista y newtoniana

1. La mecánica newtoniana y, en particular las transformaciones de Galileo, se basaban en la suposición de que en todos los sistemas de referencias el tiempo transcurre del mismo modo. Arriba hemos mostrado que dicha suposición es errónea. Es natural que surja la pregunta: ¿cómo pudo esta teoría aplicarse durante varios siglos en la práctica y dar *correctos* resultados? Más aún, incluso en la actualidad se realizan con éxito los cálculos del movimiento de los cuerpos celestes, las naves cósmicas, los automóviles, barcos, etc., basándose en las leyes de la *mecánica newtoniana*, hacemos uso de las transformaciones de Galileo y ¡siempre obtenemos perfectos resultados! ¿Hay o no aquí alguna contradicción?

Resulta que no hay contradicciones. Se trata de que todos los cuerpos enumerados se mueven a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz en el vacío. En semejante caso, las fórmulas relativistas, con una precisión suficientemente alta para fines prácticos, pasan de modo automático a las newtonianas.

2. En efecto, sea que un cuerpo está en movimiento a una velocidad $v = 10$ km/s, respecto de la Tierra. Esta es la velocidad de un cohete cósmico. Por regla, en la práctica de ingeniería se tratan cuerpos que se mueven con mucha más lentitud. Liguemos a este cuerpo un nuevo sistema de referencia. Las correlaciones exactas entre las coordenadas y el tiempo en los dos sistemas de referencia se expresan con ayuda de las transformaciones de Lorentz. Sin embargo, es fácil cerciorarse de que haciendo uso de las transformaciones de Galileo, prácticamente, obtenemos iguales resultados.

En realidad, en nuestro caso, la razón

$$\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{10^4}{3 \cdot 10^8} \right)^2 \approx 10^{-9}.$$

Por consiguiente, para diferenciar de la unidad la magnitud $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, es necesario un instrumento de medida que permita medir con una precisión ¡hasta de nueve cifras significativas! En la práctica, empleamos instrumentos mucho menos precisos. Lo mismo podemos decir de la magnitud vx/c^2 , que de modo insignificante difiere de cero.

Pero si en las transformaciones de Lorentz, se hace $\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1$ y $vx/c^2 \approx 0$, éstas se convierten automáticamente en las transformaciones de Galileo:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx x - vt, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx t.$$

De esta forma, al analizar los fenómenos que transcurren a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz en el vacío, pueden emplearse exitosamente las transformaciones de Galileo y, por consiguiente, todas las demás fórmulas de la mecánica newtoniana. El empleo de las transformaciones de Lorentz dará, en estos casos, los mismos resultados, aunque los cálculos serán más complicados.

Hemos obtenido un resultado de importancia de principio: *la teoría de la relatividad contiene la mecánica newtoniana como el caso límite de mecánica de los fenómenos, cuya velocidad es considerablemente menor que la velocidad de la luz en el vacío.*

3. En este ejemplo vemos las vías de desarrollo de las ciencias. Toda teoría científica describe cierto círculo de fenómenos con determinado grado de precisión, que depende del nivel de desarrollo de las ciencias, así como del nivel de fomento de la técnica de mediciones. Durante el desarrollo posterior de las ciencias es abarcado un ámbito más amplio de fenómenos. Al mismo tiempo, crece la exactitud de nuestras mediciones.

En una determinada etapa, puede resultar que la antigua teoría ya no puede explicar los fenómenos descubiertos. Las deducciones de la antigua teoría entran en contradicción con los nuevos hechos. En semejantes casos, se crea una teoría que, con frecuencia, está basada en principios nuevos en total. No obstante, la nueva teoría no renuncia de la antigua, como si ésta fuera errónea. Incluye en sí los resultados de la antigua teoría, como el caso límite para el círculo de fenómenos, que también antes eran descritos en forma satisfactoria. En la ciencia esto se denomina *principio de correspondencia*.

Con frecuencia, la crítica de los fundamentos de principio de la antigua teoría es en suficiente grado dificultosa, ya que hay que vencer representaciones que parecen «evidentes», «que se sobreentienden por sí mismas», por lo que, al parecer, son verídicas. Sin embargo, tarde o temprano, vence la teoría más progresiva. En semejantes casos, las

posteriores generaciones no comprenden, con frecuencia, la causa que provocó las anteriores discusiones.

Lo mismo pasó con la teoría de la relatividad. Su aparición provocó violentas discusiones. Muchos científicos no pudieron desechar las representaciones habituales, por lo que no comprendieron su esencia. Reaccionarios de todos los «colores» lucharon con ensañamiento contra ella, intentando demostrar que la teoría de la relatividad va en contra del «sentido común». No obstante, el posterior desarrollo de las ciencias, confirmó la veracidad tanto de sus nociones iniciales, como de todas sus deducciones.

Capítulo 13

MASA, CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y FUERZA EN LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

§ 13.1. Masa relativista y cantidad de movimiento

1. En la mecánica newtoniana se suponía que la masa de un cuerpo tiene el mismo valor en diversos sistemas inerciales de referencia. Los experimentos con cuerpos, cuya velocidad de movimiento es mucho menor que la de la luz, al parecer, confirmaban este concepto: a dichas velocidades no se consigue revelar ninguna dependencia entre la masa y la velocidad. Precisamente por esto, en todos los cálculos anteriores hemos supuesto que la masa del cuerpo es una magnitud constante.

Consideremos cómo se moverá un cuerpo bajo la acción de una fuerza constante, aplicando la anterior suposición. Para simplificar los cálculos posteriores, vamos a suponer que para $t_1 = 0$ la velocidad inicial $u_1 = 0$, o sea, que el cuerpo no tiene velocidad inicial. En tal caso, la ley fundamental de dinámica (7.2) toma la forma

$$F = mu/t \quad \text{o bien} \quad u = Ft/m. \quad (13.1)$$

Para la suposición de la constancia de la fuerza y la masa $a = F/m = \text{const.}$ Por consiguiente, la velocidad del cuerpo

será directamente proporcional al tiempo durante el que la fuerza actúa

$$u = at. \quad (13.2)$$

Esto significa que con una acción bastante prolongada de la fuerza constante sobre el cuerpo, la velocidad de su movimiento crecerá ilimitadamente.

2. Semejante resultado contradice la teoría de la relatividad. En efecto, una de las deducciones fundamentales de dicha teoría estipula que *a una velocidad superior a la de la luz en el vacío no puede moverse ningún cuerpo* (§ 12.6).

De esta manera, debemos transformar la ley fundamental de dinámica, para que las deducciones que de ella se des-

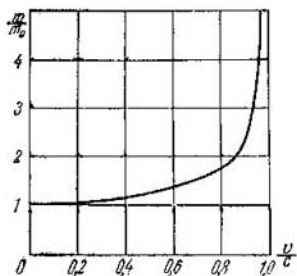


Fig. 13.1.

prenden concuerden con las deducciones de la teoría de la relatividad. La cuestión consiste en que, para ello, hay que considerar que *la masa del cuerpo es diferente en distintos sistemas de referencia*. Esto se expresa mediante la igualdad (fig. 13.1)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (13.3)$$

Aquí, m_0 es la masa del cuerpo en el sistema de referencia con respecto al cual está en reposo; tal magnitud

denomínase *masa propia* o *masa en reposo*; la magnitud m es la masa de ese mismo cuerpo en el sistema de referencia, con relación al cual está en movimiento a la velocidad u ; semejante magnitud se llama *masa relativista* (§ 15.8).

3. En la teoría de la relatividad la cantidad de movimiento se define de la misma forma que en la mecánica newtoniana:

$$p = mu. \quad (13.4)$$

Pero a diferencia de dicha mecánica, la masa que entra en la igualdad (13.4), no es la masa en reposo, sino la relativista.

§ 13.2. Ley fundamental de dinámica en la teoría de la relatividad

1. La ley fundamental de dinámica (7.2) y (7.4) conserva su enunciación, es decir, *la fuerza es igual a la derivada de la cantidad de movimiento en el tiempo*:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mu)}{dt}. \quad (13.5)$$

Mostremos que con esta formulación de la ley fundamental de dinámica, las deducciones que de ella se desprenden no contradicen la teoría de la relatividad.

2. Con las mismas suposiciones que ofrecimos más arriba ($F = \text{const}$, $t_1 = 0$, $u_1 = 0$), de (7.2) obtenemos:

$$F = \frac{mu}{t} = \frac{m_0 u}{t \sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (13.6)$$

Haciendo $F/m_0 = b = \text{const}$ y resolviendo esta ecuación respecto de la velocidad u , tenemos

$$u = \frac{bt}{\sqrt{1 + b^2 t^2/c^2}}. \quad (13.7)$$

3. Analicemos el resultado obtenido. Para intervalos de tiempo suficientemente pequeños, el producto bt es mucho menor que la velocidad de la luz en el vacío; o sea, que $b^2 t^2/c^2 \ll 1$ y, aproximadamente

$$u \approx bt.$$

Así, pues, hemos obtenido la aproximación clásica como el caso límite de los movimientos lentos.

Cuando la acción de la fuerza constante es prolongada, la magnitud bt puede hacerse considerablemente mayor que c ; entonces, $b^2 t^2/c^2 \gg 1$ y, aproximadamente

$$u \approx \frac{bt}{\sqrt{b^2 t^2/c^2}} = c.$$

De esta forma, cuando una fuerza constante actúa largo tiempo, *la velocidad del cuerpo tiende a la velocidad de la luz*, pero no crece de modo ilimitado como se desprendía de las leyes de mecánica newtoniana (véase más adelante, fig. 13.2).

§ 13.3. Correlación entre la dinámica newtoniana y relativista

1. En el § 12.10 fue mostrado que la teoría de la relatividad no liquida la cinemática newtoniana, sino que la toma en su «arsenal», como el caso límite de movimientos lentos. Los resultados del párrafo anterior nos llevan a la conclusión de que igual situación debe tener también lugar en dinámica. A saber, hemos mostrado que con movimientos suficientemente lentos, es por completo tolerable hacer uso de las fórmulas de mecánica newtoniana, pero cuando hemos analizado movimientos rápidos, resultados correctos sólo fueron ofrecidos por la teoría de la relatividad.

Vamos a intentar introducir con mayor precisión el criterio de cuáles movimientos deben considerarse lentos y cuáles, rápidos.

Supongamos que los aparatos permiten realizar mediciones de magnitudes con una precisión hasta de n cifras significativas. Entonces, si el error relativo (es decir, la diferencia entre dos magnitudes, dividida por la magnitud que se mide) es menor que 10^{-n} , éste no puede ser advertido. Calculemos a qué velocidad de movimiento del cuerpo no pueden ser descubiertas las variaciones de su masa. El error relativo, al medir la masa, es

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{m - m_0}{m} = 1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (13.8)$$

Este error debe ser menor que 10^{-n} y, por consiguiente,

$$1 - \sqrt{1 - u^2/c^2} < 10^{-n} \text{ o bien } 1 - 10^{-n} < \sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

Elevemos la desigualdad al cuadrado, lo que es posible, ya que la unidad es mayor que 10^{-n} . Entonces

$$1 - 2 \cdot 10^{-n} + 10^{-2n} < 1 - u^2/c^2 \text{ o bien}$$

$$u < c \sqrt{2 \cdot 10^{-n} - 10^{-2n}}.$$

Tomando en consideración que $10^{-2n} \ll 10^{-n}$, tenemos

$$u < c \sqrt{2 \cdot 10^{-n}}.$$

Por ejemplo, sean las mediciones efectuadas con una precisión salvo seis cifras significativas ($n = 6$). En tal caso $u < c \sqrt{2 \cdot 10^{-6}} = 423$ km/s. De esta forma, a velocidades de movimiento que no superan *cuatrocientos kilómetros*

por segundo, la masa en reposo se distingue de la masa relativista menos que en 10^{-6} , es decir, ¡menos que una diezmilésima de tanto por ciento!

En condiciones reales de movimiento de grandes cuerpos, sus velocidades son mucho menores que el límite indicado, ya que incluso los cohetes cósmicos desarrollan una velocidad cerca de 10 km/s, es decir, 40 veces menores. Además, es raro cuando en la técnica se realizan mediciones con semejante precisión. Queda claro, que en tales condiciones el

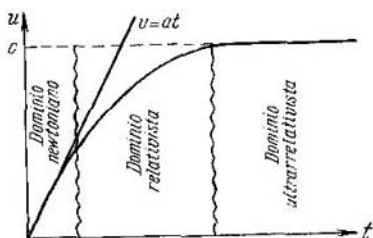


Fig. 13.2.

empleo de las leyes de mecánica newtoniana para calcular el movimiento de los cuerpos da resultados, que por su precisión son ideales.

Sin embargo, en el mundo de las partículas atómicas se tropieza frecuentemente con velocidades próximas a la de la luz en el vacío. En este caso, la aplicación de las leyes de la teoría de la relatividad nos ofrecerá resultados correctos. En particular, al analizar el movimiento de micropartículas rápidas fue posible, por vía experimental, comprobar la expresión para la masa relativista (13.3), con la particularidad de que los resultados del experimento coincidieron perfectamente con la teoría.

2. Las consideraciones expuestas, nos permiten introducir la siguiente clasificación de los movimientos (fig. 13.2).

Región newtoniana. La velocidad de movimiento de los cuerpos es tan pequeña que los aparatos de medida no permiten descubrir los efectos relativistas de retardo del tiempo,

reducción de la longitud, aumento de la masa, etc. Aquí es por completo tolerable hacer uso de las leyes de mecánica newtoniana.

Región relativista. La velocidad de movimiento es suficientemente grande y los efectos relativistas pueden ser plenamente medidos. Como es natural, aquí obtendremos resultados correctos sólo mediante la teoría de la relatividad.

Región ultrarrelativista. La velocidad del cuerpo es casi igual a la velocidad de la luz en el vacío. Hablando con mayor precisión, la diferencia entre la velocidad del cuerpo y de la luz es menor que la sensibilidad del instrumento de medida. Está claro, que también en este caso, sólo el empleo de las leyes de la teoría de la relatividad nos dará resultados correctos.

En nuestro ejemplo, cuando la precisión de las mediciones no supera 10^{-8} , el ámbito clásico de velocidades es constituido por velocidades menores que 400 km/s; el ámbito ultrarrelativista lo forman las velocidades que se distinguen de la de la luz menos que en 300 m/s; el resto de la gama de velocidades constituye, precisamente, el ámbito relativista.

3. Examinemos, como varía la cantidad de movimiento del cuerpo bajo la acción de una fuerza constante. De la ecuación (13.5), a condición de que para $t_1 = 0$ la cantidad inicial de movimiento $p_1 = 0$, se desprende:

$$p = Ft. \quad (13.9)$$

Así, pues, bajo la acción de una fuerza constante, la cantidad de movimiento crece proporcionalmente al tiempo.

En la región newtoniana, la cantidad de movimiento crece sólo a cuenta del aumento de la velocidad, ya que se puede despreciar la variación de la masa. A la inversa, en la región ultrarrelativista, la velocidad del cuerpo, prácticamente, no cambia y la cantidad de movimiento crece sólo a cuenta del aumento de la masa. Como es natural, en la región intermedia (relativista) el crecimiento de la cantidad de movimiento transcurre a cuenta del aumento de los dos factores: la velocidad y la masa. Con la particularidad de que la velocidad aumenta más lentamente que en la región newtoniana, precisamente a causa del aumento de la masa del cuerpo que se acelera.

LEY DE MOVIMIENTO Y PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

§ 14.1. Condiciones iniciales y aparatos de medida

1. La aplicación exitosa del método para solucionar el problema fundamental de dinámica en mecánica newtoniana, estudiado en el capítulo 8, llevaba inevitablemente a los científicos a la idea de que semejante método era universal y, por lo tanto, podía ser empleado para solucionar *cualquier* problema. Con esto, nadie hizo en serio la pregunta: ¿es posible en realidad o no, fijar las condiciones iniciales con el grado necesario de precisión? La propia resolución correcta del problema llevaba a la conclusión de que, al parecer, las condiciones iniciales pueden ser dadas en grado arbitrario de precisión.

Claro está, que la medición de las coordenadas y las cantidades de movimiento es realizada con determinado error. Sin embargo, en el siglo XIX se suponía que perfeccionando los instrumentos de medida, el error de medición puede hacerse cuan se quiera pequeño. El desarrollo posterior de las ciencias ha demostrado la inconsistencia de este punto de vista.

Intentemos en un ejemplo analizar, en rasgos generales, el funcionamiento de los instrumentos, mediante los que se pueden medir las coordenadas y la velocidad de los cuerpos.

2. Para determinar las coordenadas de un avión se hace uso de un radar (fig. 14.1). Su antena emite ondas radioeléctricas a cortos impulsos. Cuando la onda choca contra el avión, se refleja de éste y retorna a la antena. En la pantalla del radar se obtienen dos marcas: de la señal emitida y recibida (reflejada). Conociendo la velocidad de movimiento del rayo por la pantalla u , y la velocidad de las ondas hertzianas ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s), de la proporción $\frac{L}{u} = \frac{2X}{c}$, según el valor del desplazamiento de las marcas, se puede juzgar acerca de la distancia hasta el avión $X = \frac{c}{2u}L$. En la pantalla, el desplazamiento se gradúa en kilómetros

(ya que la magnitud $c/2u$ es constante y conocida). Esto permite sin cálculos complementarios, determinar de inmediato las coordenadas del avión según las marcas en la pantalla del oscilógrafo.

Notemos, que con la ayuda de un instrumento que sirve para determinar los valores instantáneos de las coordenadas, es imposible medir los valores instantáneos de la velocidad.

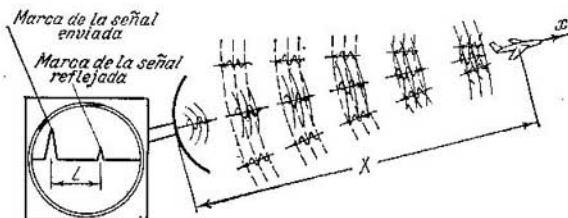


Fig. 14.1.

Bien es verdad, que observando el movimiento de las marcas por la pantalla del radar, es posible determinar la velocidad media del avión en cierto intervalo de tiempo, pero hallar la velocidad instantánea del avión en el momento de medición de las coordenadas con este aparato es imposible.

3. Hay instrumentos, con los que es posible medir la velocidad instantánea de un punto. Por ejemplo, ese mismo radar puede ser reequipado de forma que compare la frecuencia de las oscilaciones de la onda que emite la antena y la frecuencia de las oscilaciones de la onda reflejada del avión.

Si el avión se mueve a una velocidad v a lo largo del eje de abscisas, el ritmo del tiempo en el sistema de referencia ligado con él, varía en comparación con el ritmo de tiempo en el sistema de referencia relacionado con el radar (§ 12.8). Como es natural, al cambiar el ritmo del tiempo, variará la frecuencia de la onda, lo que se verá en la pantalla del radar reequipado: al alejarse el avión del radar la onda se estira a lo largo de la pantalla (fig. 14.2), al acercarse, se comprime (fig. 14.3).

Haciendo uso de las transformaciones de Lorentz, puede ser deducida la correlación entre la frecuencia de la onda emitida ν y la frecuencia de la onda reflejada del avión ν' .

Llámanse frecuencia, el número de oscilaciones por unidad de tiempo: por consiguiente, la frecuencia de oscilación de la onda en diversos sistemas de referencia *es inversamente proporcional* al intervalo de tiempo entre dos acontecimien-

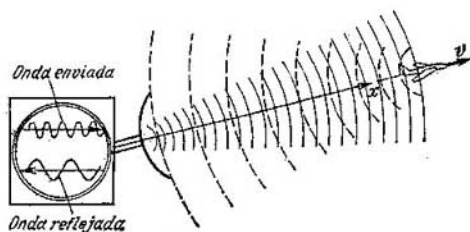


Fig. 14.2.

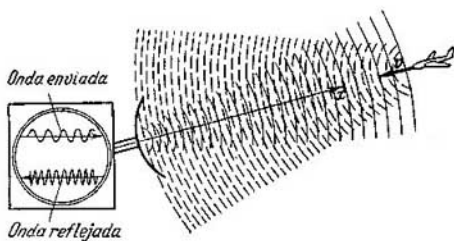


Fig. 14.3.

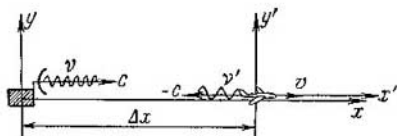


Fig.14.4.

tos (por ejemplo, el intervalo de tiempo entre la reflexión de la onda del avión y su recepción por el radar (fig. 14.4)). En el sistema de referencia, ligado con el radar, tenemos la frecuencia de onda ν y el intervalo de tiempo Δt . En el

sistema de referencia relacionado con el avión, v' y $\Delta t'$, respectivamente. Entonces

$$\frac{v'}{v} = \frac{\Delta t}{\Delta t'}. \quad (14.1)$$

Pero

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v \cdot \Delta x / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(véase 12.7)), donde Δx es el espacio recorrido por la onda reflejada. Teniendo en cuenta, que la velocidad de la onda reflejada $\Delta x / \Delta t = -c$ (el signo menos ha surgido porque la onda reflejada se mueve en dirección opuesta a la del eje de abscisas), obtenemos

$$\Delta t' = \Delta t \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (14.2)$$

Después de comparar las igualdades (14.1) y (14.2), tendremos

$$v' = v \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c}. \quad (14.3)$$

Así, pues, la frecuencia de la onda que se refleja del avión en alejamiento, será menor que la frecuencia de la onda que emite el radar. Si, por lo contrario, el avión se acerca al radar, su velocidad tiene signo opuesto y la frecuencia de la onda reflejada crecerá:

$$v'' = v \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c}. \quad (14.4)$$

Este fenómeno recibe el nombre de *efecto Doppler* óptico longitudinal. Con su ayuda es fácil medir la velocidad del avión, para lo que es suficiente comparar las frecuencias de la onda emitida y reflejada.

Mediante el efecto Doppler también puede ser medida la velocidad de un cuerpo que emite luz, por ejemplo, la velocidad de movimiento de una estrella (§ 59.8).

4. Halleemos la frecuencia de una onda que el radar recibe de un avión en alejamiento:

$$v_{\text{rec}} = v' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} = v \frac{1 - v^2/c^2}{(1 + v/c)^2} = v \frac{1 - v/c}{1 + v/c}.$$

En el caso, cuando el avión se acerca al radar es necesario cambiar los signos, en el numerador y denominador, por los contrarios.

5. Sin embargo, *el instrumento que permite medir la velocidad de un punto material (y por consiguiente, su cantidad de movimiento), no permite medir su coordenada.* En efecto, para medir la velocidad mediante el efecto Doppler, hay que tener una onda sinusoidal de determinada frecuencia, mientras que para medir las coordenadas del avión, el radar debe emitir ondas a impulsos cortos, y semejantes ondas no son sinusoidales.

De este modo, para la medición simultánea de las coordenadas y la velocidad (o la cantidad de movimiento) de un cuerpo en movimiento, hay que tener dos instrumentos, uno de los cuales mide la coordenada y, el segundo, la velocidad.

Niels Bohr (uno de los fundadores de la física cuántica moderna) mostró que todos los instrumentos de medida pueden ser divididos en dos clases, de tal forma que los instrumentos de una de ellas ofrecen información *complementaria* a la que dan los instrumentos de otra clase. Por ejemplo, unos instrumentos sirven para medir las coordenadas, mientras que otros, las cantidades de movimiento o las velocidades. Una información completa acerca del carácter del movimiento de un cuerpo, sólo puede obtenerse al emplear conjuntamente los instrumentos de las dos clases.

§ 14.2. Principio de incertidumbre

1. Los instrumentos con los que se efectúan las mediciones de las coordenadas y velocidades, interactúan con el cuerpo, cuyos parámetros se miden. Por ejemplo, cuando la onda hertziana alcanza el avión y se refleja de él, ocasiona sobre éste cierta presión a causa de la cual, varía su coordenada y velocidad.

Claro está, que en el caso del avión estos cambios son insignificantes y pueden no tomarse en consideración. No obstante, a medida que se penetra en el micromundo se hizo evidente que el instrumento de medida puede introducir serias perturbaciones en el carácter del movimiento de la micropartícula y, en este caso, no se puede despreciar el influjo del instrumento. Esto está ligado con la naturaleza de las micropartículas, que será estudiada en el apartado dedicado a la mecánica cuántica.

2. W. Heisenberg analizó los resultados de toda clase de experimentos, que pueden ser realizados para medir las coordenadas de la partícula y su cantidad de movimiento

(o velocidad). El científico llegó a la conclusión de que la singular naturaleza de las micropartículas conduce a que durante la medición simultánea de las coordenadas y las cantidades de movimiento, surgen incertidumbres en sus valores, iguales a Δx y Δp_x , respectivamente. Estas incertidumbres están ligadas por la correlación

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar, \quad (14.5)$$

donde la constante de Planck \hbar es una de las más importantes constantes mundiales, de enorme importancia para la descripción de los fenómenos del micromundo. En la mecánica cuántica tropezaremos con frecuencia con esta magnitud. En la actualidad se ha adoptado el siguiente valor:

$$\hbar = (1,0545887 \pm 0,0000057) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s},$$

$$h = 2\pi\hbar = (6,626176 \pm 0,000036) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}.$$

Mediante correlaciones análogas están ligadas incertidumbres de las coordenadas y cantidades de movimiento por otros ejes:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \approx \hbar, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \approx \hbar.$$

§ 14.3. Principio de incertidumbre y la mecánica clásica

1. Si comparamos el método de resolución del problema fundamental de dinámica con el principio de Heisenberg, veremos que se contradicen entre sí. Efectivamente, para determinar la ley de movimiento se precisa la más exacta prefijación de las condiciones iniciales; el principio de incertidumbre muestra que las condiciones iniciales pueden ser prefijadas sólo aproximadamente, con la particularidad de que el grado de aproximación no es ilimitado. Pero, en este caso, no está claro, ¿cómo puede ser que en la mecánica clásica se consiga hallar la ley de movimiento con una precisión de antemano tomada al azar?

Para dar respuesta a esta pregunta analicemos tres problemas. En el primero, examinaremos el movimiento de un cuerpo macroscópico (cohete); en el segundo, el movimiento de una micropartícula (electrón) por una trayectoria macroscópica y, por fin, en el tercer problema, el movimiento de una micropartícula por una microtrayectoria.

2. *Problema 1.* Un cohete de masa 10^3 kg gira alrededor de la Tierra por una órbita circular. El radio de la órbita

es de 6500 km; la velocidad del cohete, 8 km/s. ¿Con qué precisión han de ser prefijados el radio y la velocidad?

Para que el cohete se mueva por una circunferencia, el vector de velocidad debe ser perpendicular al radio en cada punto de la trayectoria. Esto significa que la componente de la velocidad a lo largo del radio debe ser nula. Pero si dicha componente es *con precisión* igual a cero, su incertidumbre Δv_r también es igual a cero. Entonces, como muestra la correlación (14.5), la incertidumbre en el valor del radio será infinitamente grande. Pero podemos aceptar un compromiso. Sea dado el radio de la órbita con la incertidumbre Δr , mientras que la componente radial de la velocidad, igual a cero, pero con incertidumbre Δv_r , que puede ser obtenida del principio de incertidumbre de Heisenberg (fig. 14.5):

$$\Delta r \cdot \Delta p_r \approx \hbar.$$

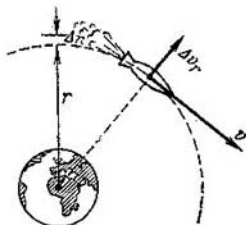


Fig. 14.5.

Si, en este caso, las incertidumbres de las magnitudes que nos interesan son mucho menores que ellas mismas, podemos considerar que el problema ha sido resuelto con suficiente precisión.

En nuestro caso, supongamos que $\Delta r = 10^{-10}$ m; esta indeterminación es, aproximadamente, igual al diámetro de un átomo. Está claro: ¡el error de cualquier instrumento de medida es, en la práctica, considerablemente mayor! Entonces, la incertidumbre de la componente radial de la cantidad de movimiento del cohete

$$\Delta p_r \approx \frac{\hbar}{\Delta r} = \frac{10^{-34}}{10^{-10}} = 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s},$$

y la incertidumbre de la componente radial de la velocidad

$$\Delta v_r = \frac{\Delta p_r}{m} \approx \frac{\hbar}{m \Delta r} = \frac{10^{-34}}{10^3 \cdot 10^{-10}} = 10^{-27} \text{ m/s}.$$

¡Pero la velocidad orbital del cohete $8 \cdot 10^3$ m/s es inconmensurablemente mayor que la incertidumbre obtenida!

Así, pues, al analizar el movimiento de un cuerpo macroscópico el principio de incertidumbre no desempeña ningún papel. Podemos plenamente despreciar las indeterminaciones de las coordenadas y velocidades, suponer que las condiciones

iniciales pueden ser prefijadas con la precisión que nos es necesaria y resolver el problema fundamental de dinámica por los métodos clásicos.

Problema 2. Un electrón se mueve en un betatrón (aparato para acelerar electrones) por una órbita circular de radio 2,5 m a una velocidad igual al 99% de la velocidad de la luz: $v = 0,99 c = 2,97 \cdot 10^8$ m/s. ¿Con qué precisión pueden ser dados el radio de la órbita y la velocidad del electrón?

A diferencia del anterior problema, aquí hay que tener en cuenta la dependencia de la masa de la velocidad. La masa en reposo del electrón $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. A la velocidad prefijada de movimiento, su masa

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-0,99^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1,99 \cdot 0,01}} = \frac{m_0}{1,41 \cdot 0,1} = 7,1 m_0.$$

Como la masa del electrón es en grado considerable menor que la del cohete, no puede ser dado el radio de la órbita con tan elevada precisión, como en el problema anterior. Sin embargo, si prefijamos la incertidumbre del radio $\Delta r = 0,05$ mm, la órbita será determinada con alta precisión, ya que el error relativo será

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{0,05}{2,5 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-5} = 0,002\%.$$

La incertidumbre de la componente radial de la velocidad

$$\Delta v_r \approx \frac{\hbar}{m \cdot \Delta r} = \frac{10^{-34}}{7 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^{-5}} \approx 0,3 \text{ m/s.}$$

A la velocidad del electrón, casi igual a la de la luz, una componente radial igual a 30 cm/s puede, sin duda alguna, despreciarse, haciéndola nula. Por consiguiente, en este caso, cuando una micropartícula está en movimiento por una trayectoria macroscópica, el principio de incertidumbre tampoco juega, en realidad papel alguno. Aquí también es posible suponer que las condiciones iniciales pueden ser prefijadas con el grado necesario de precisión y resolver el problema mediante los métodos clásicos (teniendo en cuenta los efectos relativistas).

En adelante conoceremos, que la complicada naturaleza de las partículas elementales (electrones, protones, neutrones, etc.), hablando en rigor, no permite considerarlas como puntos materiales y no es posible calcular con facilidad sus

órbitas. No obstante, en casos semejantes al estudiado, tal acceso, para la resolución del problema acerca del carácter de su movimiento, es por completo tolerable.

Problema 3. Consideremos el movimiento de una micro-partícula por una microórbita, por ejemplo, de un electrón en un átomo. El radio del átomo, $r \approx 5 \cdot 10^{-11}$ m; la velocidad orbital $v \approx 10^6$ m/s. A semejante velocidad podemos despreciar los efectos relativistas y considerar la masa del electrón igual a su masa en reposo. Hagamos la incertidumbre igual a un tanto por ciento del valor del radio, o sea, $\Delta r = 0,01r = 5 \cdot 10^{-13}$ m. Entonces, la incertidumbre de la componente radial de la velocidad

$$\Delta v_r \approx \frac{\hbar}{m \cdot \Delta r} = \frac{10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^{-13}} = 2,2 \cdot 10^8 \text{ m/s,}$$

lo que casi es igual a la velocidad de la luz.

Así, pues, ¡la incertidumbre de la componente radial de la velocidad supera 220 veces la velocidad orbital! Es evidente que en este caso no se puede ni hablar del movimiento del electrón por la órbita, ya que la velocidad de su movimiento no está en absoluto definida.

Y a la inversa, si prefijamos cierto valor razonable de la incertidumbre para la componente radial de la velocidad, por ejemplo, $\Delta v_r/v = 1\%$, nada podremos decir de la trayectoria. En efecto, si $\Delta v_r = 0,01v = 10^4$ m/s, la incertidumbre del radio

$$\Delta r \approx \frac{\hbar}{m \cdot \Delta v_r} = \frac{10^{-34}}{10^4 \cdot 9 \cdot 10^{-31}} = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 110 \text{ \AA}.$$

¡Esta magnitud es 220 veces mayor que el propio radio! Está claro, que es imposible por completo hablar de cualquiera determinada órbita.

3. Así, pues, nos hemos cerciorado de que el principio de incertidumbre no influye sobre la aplicación de los métodos de la mecánica newtoniana o sobre la teoría de la relatividad respecto de *objetos macroscópicos*. Aquí, según las fuerzas y las condiciones iniciales, con cualquier grado de precisión, establecido de antemano, se puede hallar la ley de movimiento del cuerpo, considerándolo como un punto material. El principio de incertidumbre no limita, en realidad, la aplicación de estas leyes a *las micropartículas* que se mueven en regiones *macroscópicas* del espacio. Por ejemplo, tiene sentido hablar de la trayectoria de un electrón

en una válvula de radio, en un tubo de rayos catódicos, un acelerador, etc.

Otro cuadro, completamente diferente, observamos en *microrregiones*, es decir, en el átomo, núcleo del átomo, en la red cristalina de un sólido, etc. A causa del principio de incertidumbre, aquí son inaplicables por completo los métodos de mecánica clásica. En particular, pierden todo sentido tales nociones clásicas, como la ley de movimiento de la partícula, su trayectoria, la velocidad instantánea, etc. Es absurdo hablar de la trayectoria del electrón en un átomo o de las velocidades de movimiento del protón en el núcleo atómico. Para resolver estos problemas se aplican los métodos de *la mecánica cuántica*.

Segunda parte

LEYES DE LA CONSERVACIÓN

Capítulo 15

LEY DE LA CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

§ 15.1. Sistema cerrado de cuerpos

1. Para la resolución correcta del problema acerca del carácter del movimiento de cierto cuerpo, hay que tomar en consideración todas las fuerzas que sobre él actúan por parte de todos los cuerpos que lo rodean. Pero la cantidad de semejantes fuerzas es, en realidad, infinitamente grande. Además, las fuerzas dadas son variables, ya que como resultado de la interacción mutua, los cuerpos circundantes se mueven de forma muy complicada. Así que, al plantear el problema de este modo, resolverlo es, prácticamente, imposible a causa de dificultades matemáticas insuperables.

De hecho, el problema puede ser simplificado de forma considerable si tenemos en cuenta que no todos los cuerpos circundantes actúan sobre el cuerpo dado con iguales fuerzas. Por ejemplo, si un satélite se mueve alrededor de la Tierra por una órbita de radio aproximado $r = 8000$ km, el Sol actúa sobre él con una fuerza que es mucho menor que la fuerza de atracción de la Tierra:

$$\frac{F_T}{P_S} = \frac{\gamma m M_T \cdot R^2}{r^2 \gamma m M_S} = \frac{M_T R^2}{M_S r^2},$$

donde $R = 1$ UA = $1,49598 \cdot 10^{11}$ m, $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg y $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg. Poniendo los valores numéricos, obtenemos

que el Sol actúa sobre este satélite con una fuerza mil veces menor que la de atracción de la Tierra. El lector puede cerciorarse de que la fuerza de atracción de la Luna será aún 200 veces menor, mientras que el influjo de los demás planetas es insignificante.

Este cálculo nos muestra que con la primera aproximación, podemos despreciar la acción de todos los cuerpos sobre el satélite, salvo la de la Tierra. Por consiguiente, es posible examinar *un sistema constituido por dos cuerpos*, o sea, el satélite y la Tierra y considerar que su interacción, fundamentalmente, determina el carácter del movimiento del satélite. Todos los demás cuerpos pueden ser considerados como *externos* con relación a este sistema y la acción de dichos cuerpos se tiene en cuenta mediante correcciones de la fuerza fundamental.

2. Reciben el nombre de *fuerzas internas*, aquellas con las que interactúan entre sí las partes componentes del sistema dado. *Externas* se llaman las fuerzas con las que todo el sistema o cuerpos aislados, que entran en su composición, interactúan con los cuerpos circundantes. Llamamos *cerrado* (o aislado) un sistema de cuerpos, si en comparación con la acción de las fuerzas internas, la de las externas puede ser despreciada.

3. Así, pues, en el ejemplo analizado, el sistema Tierra--satélite, con la primera aproximación puede ser considerado cerrado.

Con mayor grado de precisión es posible llamar cerrado el Sistema Solar. En efecto, las fuerzas de interacción entre el Sol y los planetas superan en alto grado las fuerzas con las que sobre éstos actúan incluso las estrellas más cercanas. La estrella que se encuentra más cerca del Sistema Solar, está alejada de él a la colosal distancia $R = 4,5 \text{ a.l.}^*$) = $4,2 \cdot 10^{13} \text{ km}$; a su vez, la distancia de la Tierra al Sol $r = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$. Suponiendo que la masa de la estrella es casi igual a la del Sol, obtenemos

$$\frac{F_S}{F_E} = \frac{\gamma m M \cdot R^2}{r^2 \cdot \gamma m M} = \frac{r^2}{R^2} = \left(\frac{4,2 \cdot 10^{13}}{1,5 \cdot 10^8} \right)^2 \approx 8 \cdot 10^{10}.$$

De forma que la fuerza interna (es decir, la fuerza de interacción entre el Sol y la Tierra) es 80 mil millones de veces mayor que la fuerza externa (o sea, la fuerza con la

* Año luz es la distancia que cubre la luz en el vacío en el transcurso de 1 año.

que la estrella más cercana actúa sobre la Tierra). Es natural que tengamos toda la razón al considerar que el Sistema Solar es cerrado.

4. La noción de sistema cerrado es una útil abstracción, ya que en tales sistemas todos los fenómenos se describen con ayuda de sencillas y generales leyes. Por eso, *en todo lugar donde esto es posible, hay que prescindir de la acción de las fuerzas externas y considerar que el sistema a estudiar es cerrado*. Seguidamente, si esto es necesario, hay que introducir en la solución obtenida con la primera aproximación, las correcciones que toman en consideración las perturbaciones provocadas por el influjo de las fuerzas externas.

§ 15.2. Ley de la conservación de la cantidad de movimiento

1. Para los sistemas cerrados es justa la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, que puede ser enunciada de la forma siguiente: *la cantidad de movimiento sumaria de un sistema cerrado se conserva con cualquier proceso que transcurra en dicho sistema*.

No hay que pensar que esta ley implica la invariabilidad de la cantidad de movimiento de cada cuerpo que entra en el sistema. Al contrario, gracias a la acción de las fuerzas internas, las cantidades de movimiento de dichos cuerpos constantemente varían. *Es sólo conservada la suma vectorial de las cantidades de movimiento de todas las partes constituyentes del sistema*.

2. Para deducir la ley de la conservación de la cantidad de movimiento haremos uso de la segunda y tercera leyes de Newton. Para mayor sencillez de razonamiento, nos limitaremos al caso cuando el sistema consta sólo de dos cuerpos; el examen del caso más general de un sistema constituido por muchos cuerpos nada nos dará nuevo en principio, pero de forma notable complicará la deducción.

Supongamos que en el momento de tiempo t' el primer cuerpo tiene una masa m_1' y una velocidad v_1' ; el segundo, una masa m_2' y una velocidad v_2' ; en el momento de tiempo t'' , respectivamente, m_1'' y v_1'' , m_2'' y v_2'' . La segunda ley de Newton se escribirá para el primer cuerpo de la siguiente forma:

$$F_{12} = \frac{m_1''v_1'' - m_1'v_1'}{t'' - t'}$$

para el segundo cuerpo

$$F_{21} = \frac{m_2'' v_2'' - m_2' v_2'}{t'' - t'}$$

Según la tercera ley de Newton $F_{21} = -F_{12}$ o bien

$$\frac{m_2'' v_2'' - m_2' v_2'}{t'' - t'} = - \frac{m_1'' v_1'' - m_1' v_1'}{t'' - t'}$$

Simplifiquemos los denominadores y traslademos todos los términos con dos rayas al primer miembro y con una, al segundo miembro de la igualdad. Obtenemos

$$m_2'' v_2'' + m_1'' v_1'' = m_2' v_2' + m_1' v_1', \quad (15.1)$$

o de forma más corta

$$m_2 v_2 + m_1 v_1 = \text{const} \quad (15.2)$$

para cualquier momento de tiempo.

Si el sistema cerrado consta de varios cuerpos, para él la ley de la conservación de la cantidad de movimiento se escribirá así:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n = \text{const}. \quad (15.3)$$

3. Al deducir la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, sólo hemos hecho uso de las leyes de Newton, con la particularidad de que hemos aplicado la forma que es válida tanto para la mecánica relativista, como la newtoniana. Por consiguiente, la ley de la conservación de la cantidad de movimiento es aplicable tanto en la mecánica newtoniana, como en la relativista; pero en la última hay que tener en cuenta la dependencia entre la masa y la velocidad.

§ 15.3. Efecto de repercusión

1. Con frecuencia tropezamos en la práctica con el fenómeno cuando un cuerpo se divide (desintegra) en dos partes a cuenta de la acción de las fuerzas interiores. Si, además, estas fuerzas son mucho mayores que las externas, puede considerarse que dicho sistema es cerrado y emplear la ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

Para simplificar los razonamientos, nos limitaremos al caso cuando el cuerpo, antes de desintegrarse en dos partes, estaba en reposo respecto del sistema de referencia. Entonces, podemos afirmar que los dos nuevos cuerpos, surgidos como

resultado de la división, se moverán en direcciones opuestas a velocidades inversamente proporcionales a sus masas. Sean las masas de estos cuerpos iguales a m_1 y m_2 , sus velocidades v_1 y v_2 , respectivamente. De la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, sigue que

$$p = p_1 + p_2.$$

Como antes de dividirse el cuerpo estaba en reposo respecto del sistema de referencia, $p = 0$. De aquí

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (15.4)$$

o bien

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1, \quad (15.5)$$

es decir, en efecto los vectores v_1 y v_2 están dirigidos en sentidos opuestos.

2. Con el efecto de repercusión tropezamos, por ejemplo, al disparar un cañón: si este no se sujeta, retrocederá en dirección opuesta al movimiento del proyectil. En la ametralladora, fusil, etc., a cuenta de la repercusión del cierre se realiza la expulsión de la vaina utilizada y se recarga el arma.

También está ligado con el efecto de repercusión el movimiento de todos los tipos de transporte. Por ejemplo, cuando las ruedas motrices de un automóvil giran, entre la superficie de la Tierra y de la cubierta surge fuerza de rozamiento. Esta fuerza es interna (en el sistema automóvil—Tierra). A cuenta de dicha fuerza, el automóvil se mueve en una dirección, la Tierra en la contraria. El movimiento de la Tierra realizase a una velocidad insignificante, ya que la masa de la Tierra es incomparablemente mayor que la del automóvil.

Del mismo modo se mueve un barco: su hélice aspira el agua y la lanza tras la popa, gracias a lo cual el barco se desliza adelante.

3. En física nuclear, muchos fenómenos son también acompañados por la repercusión. Por ejemplo, cuando en el núcleo de uranio penetra un neutrón, el primero se divide en dos fragmentos de masa aproximadamente igual. Como el núcleo y el neutrón se movían antes de la reacción a velocidades muy pequeñas (térmicas), podemos considerar, con cierta aproximación, que hasta el momento de la desintegración el sistema estaba en reposo. Pero los fragmentos formados durante la desintegración deben moverse en direc-

ciones contrarias. Esto se ve claramente en la fotografía (fig. 15.1), obtenida mediante la cámara de Wilson (§ 36.9) en cuyo interior se encuentra una placa a la que se ha aplicado una capa de óxido de uranio. Se observan las huellas *AB* y *BC*, de dos fragmentos que volaron en direcciones opuestas.

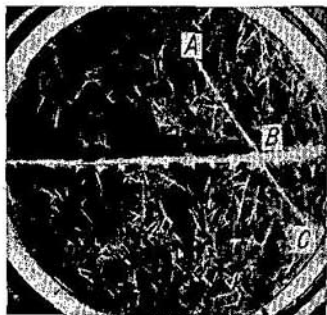


Fig. 15.1.

A continuación, examinaremos otro fenómeno ligado con la repercusión, durante las reacciones nucleares (§ 17.4).

4. Haciendo uso de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento pueden compararse sin pesarlos las masas de dos cuerpos. Liguemos con un hilo dos cuerpos de diferente masa e instalemos entre ellos un resorte comprimido. Al quemar el hilo, los dos cuerpos se

pondrán en movimiento a lo largo de cierto eje en direcciones contrarias, a velocidades v_1 y v_2 . Como de acuerdo con la fórmula (15.5) las velocidades son inversamente proporcionales a las masas, conociendo dichas velocidades y la masa de uno de los cuerpos, sin ayuda de la balanza, podremos determinar la masa del segundo cuerpo.

En mecánica, este método de medida de las masas, prácticamente, no se emplea, ya que medir las velocidades de los cuerpos es bastante difícil; la cuestión radica en que a causa del rozamiento, la velocidad varía constantemente. Sin embargo, en la física nuclear, donde la velocidad de la partícula puede ser medida por la longitud de su alcance, este método puede realizarse, por ejemplo, para comparar las masas de los fragmentos que se crean durante la desintegración del núcleo.

§ 15.4. Propulsión reactiva a chorro

1. Sobre la base del efecto de repercusión, es decir, de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, podemos explicar el movimiento de un cohete. Cuando se

quemamos el combustible, por la tobera salen los gases a gran velocidad, a causa de lo cual el cohete se mueve en dirección opuesta, de forma que la suma de las cantidades de movimiento del cohete y de los gases resulta ser una magnitud constante.

Supongamos que en cierto momento de tiempo t la masa del cohete (junto con el combustible y el oxidante) es igual a m , la velocidad respecto de la Tierra, v . Al quemarse cierta cantidad de combustible el cohete, en el momento de tiempo t_1 , tendrá la masa m_1 y la velocidad con relación a la Tierra, v_1 . La velocidad de los gases en lo que atañe al cohete, o sea, la *velocidad de escape* (o de descarga), es igual a u y está dirigida en dirección contraria a la velocidad del cohete. Entonces, la velocidad de los gases con relación a la Tierra en el momento de tiempo t_1 es igual a la diferencia de la velocidad del cohete y la velocidad de escape $v_g = v_1 - u$.

La cantidad de movimiento del cohete en el momento de tiempo t es igual a $p = mv$; en t_1 , la cantidad de movimiento sumaría del cohete y los gases

$$p_1 = m_1 v_1 + m_g v_g = m_1 v_1 + (m - m_1) (v_1 - u).$$

Como el cohete y los gases forman un sistema cerrado, podemos aplicar a él la ley de la conservación de la cantidad de movimiento:

$$mv = m_1 v_1 + (m - m_1) (v_1 - u). \quad (15.6)$$

Después de abrir los paréntesis y de reducir los términos semejantes, obtenemos

$$m(v - v_1) = u(m_1 - m).$$

Pero $\Delta v = v_1 - v$ es igual al incremento de la velocidad del cohete; $\Delta m = m_1 - m$ es igual a la masa de combustible quemado durante el tiempo $\Delta t = t_1 - t$. Por consiguiente,

$$-m \cdot \Delta v = u \cdot \Delta m. \quad (15.7)$$

2. Al salir de la tobera del cohete, los gases actúan sobre ella con cierta fuerza que recibe el nombre de *fuerza reactiva de empuje*. Para hallarla haremos uso de la ecuación fundamental de dinámica (7.2). Con este fin dividimos los dos miembros de la igualdad (15.7) por Δt . Teniendo en cuenta que $m \Delta v / \Delta t = \vec{F}$ es la *fuerza de empuje*, mientras que $\mu = -\Delta m / \Delta t$ es el *consumo de combustible por segundo*, obte-

nemos

$$F = -\mu u. \quad (15.8)$$

Así, pues, la fuerza reactiva de empuje es directamente proporcional al consumo de combustible por segundo y a la velocidad de escape de los gases; está dirigida en dirección opuesta al escape de los gases.

§ 15.5. Cálculo de la reserva de combustible

1. Para apreciar a grandes rasgos la reserva aproximada de combustible realicemos un breve cálculo. Supongamos, que un cohete de masa cerca de 10 t debe ascender con una aceleración $a = 5g = 49 \text{ m/s}^2$. La fuerza de empuje $F = ma = 49 \cdot 10^4 \text{ N}$. La velocidad de escape de los gases en los cohetes modernos $u \approx 4 \text{ km/s}$. De aquí, el consumo de combustible

$$\mu = \frac{F}{u} = \frac{49 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^3} \approx 120 \text{ kg/s}.$$

Moviéndose con una aceleración cerca de 50 m/s^2 , el cohete alcanza la primera velocidad cósmica (8 km/s) después de un intervalo de tiempo $t = v : a = 8000 : 50 = 160 \text{ s}$. Por consiguiente, la reserva sumaria de combustible constituirá

$$M_{\text{comb}} = \mu t \approx 120 \text{ kg/s} \cdot 160 \text{ s} \approx 19\,000 \text{ kg} \approx 20 \text{ t}.$$

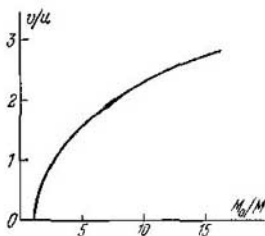


Fig. 15.2.

2. El cálculo aducido más arriba no sirve ni siquiera para apreciar con aproximación la reserva de combustible. La cuestión reside en que el cohete es un cuerpo con masa variable, ya que a medida que se quema el combustible, la masa del cohete disminuye constantemente. Por esta razón, si necesitamos lanzar a la órbita un cohete de masa de 10 t, al comienzo del vuelo, incluso de acuerdo con nuestros cálculos aproximados, su masa debería alcanzar unas 30 t. Para transmitir a semejante masa la aceleración necesaria, hace falta una fuerza de empuje 3 veces mayor, lo que requiere el aumento del consumo de combustible y, a su vez, conducirá indudablemente al aún mayor crecimiento de la reserva de combustible y su consumo.

3. Con precisión puede calcularse la reserva de combustible por la fórmula de Tsiolkovski, que aducimos sin demostración:

$$\frac{v}{u} = 2,3 \lg \frac{M_0}{M}, \quad (15.9)$$

donde v es la velocidad final del cohete; la velocidad inicial $v_0 = 0$; u , la velocidad de escape de los gases; M , la masa del cohete en la órbita $M_0 = M_{\text{comb}} + M$, la masa inicial del cohete con el combustible. La gráfica de esta función se muestra en la fig. 15.2.

Suponiendo que $v = 8$ km/s, $u = 4$ km/s, $M = 10$ t, obtenemos

$$\lg \frac{M_0}{M} = \frac{8}{4 \cdot 2,3} = 0,87,$$

de aquí $M_0/M = 7,4$, $M_0 = 74$ t y $M_{\text{comb}} = 64$ t, casi 3,5 veces más que la apreciación aproximada. Una reserva todavía mayor de combustible, cerca de 160 t, será necesaria para alcanzar la segunda velocidad cósmica $v = 11,2$ km/s.

§ 15.6. Centro de inercia

Sea que dos puntos materiales (partículas) de masas m_1 y m_2 , están situados en el eje de abscisas en los puntos con coordenadas x_1 y x_2 . La distancia entre los puntos $l = x_2 - x_1$ (fig. 15.3). El punto C , que divide la distancia entre las partículas en segmentos inversamente proporcionales a sus masas, será llamado *centro de inercia* (o *centro de masas*) del sistema dado de partículas. Así, pues, por definición

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (15.10)$$

Fig. 15.3.

Como $l_1 = x_c - x_1$, $l_2 = x_2 - x_c$, donde x_c es la coordenada del centro de inercia, entonces

$$m_1(x_c - x_1) = m_2(x_2 - x_c),$$

de donde

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (15.11)$$

Esta expresión con facilidad se generaliza para el caso de varios puntos materiales, dispuestos al azar; la coordenada del centro de inercia

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (15.12)$$

Expresiones análogas obtenemos para la ordenada y_c y la z -coordenada z_c del centro de inercia de un sistema de puntos materiales.

§ 15.7. Movimiento del centro de inercia

1. Vamos a resolver el problema acerca del carácter del movimiento del centro de inercia para el caso cuando los cuerpos se mueven a velocidades mucho menores que la de la luz, cuando las masas de los cuerpos son magnitudes constantes.

Si escribimos la expresión (15.12) para dos momentos de tiempo diferentes y restamos la una de la otra, obtenemos

$$\Delta x_c = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (15.13)$$

Dividiendo los dos miembros de la igualdad por $\Delta t = t_2 - t_1$ y haciendo $\Delta x_c / \Delta t = v_c^{(x)}$ (componente del vector de la velocidad por el eje de las abscisas), tenemos

$$v_c^{(x)} = \frac{m_1 v_1^{(x)} + m_2 v_2^{(x)} + \dots + m_n v_n^{(x)}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (15.14)$$

Semejantes expresiones serán obtenidas para las componentes de la velocidad por los ejes de ordenadas y z -coordenada. La expresión para la velocidad del centro de inercia en forma vectorial, tiene el aspecto

$$v_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{P}{M}, \quad (15.15)$$

donde M es la masa sumaria del sistema, P , su cantidad de movimiento sumaria.

2. Como en la teoría de la relatividad la masa del cuerpo depende de la velocidad, de la fórmula (15.12) no se desprende (15.14). Por dicha causa, en la teoría de la relatividad las expresiones (15.14) y (15.15) no se deducen, sino que son utilizadas en calidad de ecuaciones determinantes: llámase *centro de inercia del sistema* el punto cuya velocidad es igual a la razón de la cantidad de movimiento sumaria del sistema a la masa sumaria. En lo que se refiere a la fórmula (15.12), ésta no se emplea en la teoría de la relatividad.

3. Si un sistema de partículas es cerrado, su cantidad de movimiento sumaria será magnitud constante. Pero en caso semejante, la velocidad del centro de inercia también será constante.

Con otras palabras, *el centro de inercia de un sistema cerrado está en movimiento inercial*, es decir, su movimiento es rectilíneo uniforme independientemente de cómo se

mueven los cuerpos aislados de los que está constituido el sistema.

Hay que prestar atención al sentido de esta afirmación. En un sistema cerrado actúan fuerzas internas, a causa de lo cual, los cuerpos componentes del sistema pueden moverse de modo acelerado y sus velocidades (cantidades de movi-

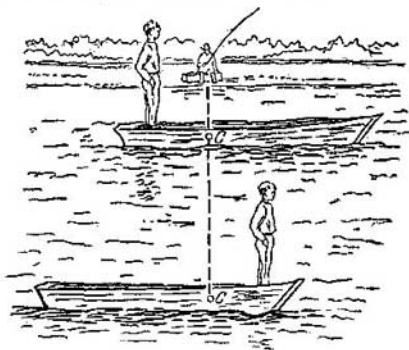


Fig. 15.4.

miento) es posible que cambien constantemente. No obstante, *bajo la acción de las fuerzas internas, la velocidad de movimiento del centro de inercia no varía.*

4. El lector puede hallar una serie de ejemplos que confirman el resultado obtenido. Así, estando en un automóvil, es posible presionar sobre cualquiera de sus paredes con fuerza arbitraria, y esto, de ninguna manera, influirá sobre el carácter del movimiento del automóvil: si con relación a la Tierra está en reposo, en reposo quedará, mientras que si está en movimiento, continuará éste a la misma velocidad.

Al desplazarse una persona a lo largo de una barca, ésta se moverá en dirección opuesta (fig. 15.4). La causa reside en lo siguiente. A velocidades muy pequeñas, la fuerza de rozamiento entre la barca y el agua es insignifican-
tamente pequeña (§ 11.8), por esta razón, la barca junto con la persona forma un sistema cerrado. El desplazamiento de la persona en una dirección provoca el correspondiente movimiento de la barca en dirección contraria, ya que el

centro de masas de este sistema C conserva una posición constante.

Semejante concepto no sólo se refiere al movimiento de traslación, sino que también al de rotación. Por ejemplo, sólo de modo aproximado podemos decir que la Luna gira alrededor de la Tierra: en realidad, el sistema Tierra—Luna gira en torno del centro común de masas. Hallemos su posición. La distancia entre los centros de la Tierra y su satélite es igual a 384 000 km, la masa de la Luna es 81 veces menor que la de la Tierra. De (15.12) se desprende que la distancia del centro de masas hasta el centro de la Tierra

$$x_c = \frac{1 \cdot 384\,000 + 81 \cdot 0}{1 + 81} \approx 4700 \text{ km.}$$

Pero el radio del globo terrestre es igual a 6370 km, es decir, el centro de masas del sistema Tierra—Luna está alejado de forma notable del centro de la Tierra. Después de hacer semejante cálculo para el sistema Tierra—Sol y analizar el resultado, podemos cerciorarnos de que el centro de masas de este sistema coincide casi exactamente con el centro del Sol.

§ 15.8. Masa relativista

1. Con ayuda de las propiedades del centro de inercia, vamos a deducir la fórmula para la masa relativista (13.3).

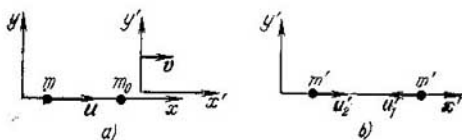


Fig. 15.5.

Estudiemos dos cuerpos iguales en absoluto, con idénticas masas en reposo m_0 , con la particularidad de que uno de ellos está en movimiento a la velocidad u paralelamente al eje de abscisas, mientras que el segundo está en reposo (fig. 15.5, a). El centro de inercia de este sistema se mueve a lo largo del eje de abscisas a la velocidad (15.15):

$$v_c = \frac{m u}{m + m_0}. \quad (15.16)$$

Pasemos al sistema de referencia, donde las designaciones tienen una raya, que se mueve a la misma velocidad v_c que el centro de inercia. En este sistema de referencia la velocidad de dicho centro es nula, mientras que los dos cuerpos se mueven al encuentro uno de otro, a velocidades de igual módulo, pero con cantidades de movimiento en direcciones opuestas (fig. 15.5, b).

Es evidente, que el cuerpo en reposo en el sistema de referencia xyz estará en movimiento respecto del sistema de referencia con designaciones con rayas a una velocidad $u'_1 = -v_c$. En lo que se refiere al segundo cuerpo, $u'_2 = v_c$. En efecto, gracias a la isotropía del espacio (§ 1.2) la masa del cuerpo no depende de la dirección de la velocidad, sino que sólo depende de su módulo. Pero los módulos de las cantidades de movimiento serán iguales sólo en el caso, cuando los dos cuerpos (con idénticas masas en reposo) resultan tener velocidades de iguales módulos.

2. Sin embargo, la velocidad del cuerpo u'_2 puede ser calculada haciendo uso de la ley relativista de composición de velocidades (12.11):

$$u'_2 = v_c = \frac{u - v_c}{1 - \frac{uv_c}{c^2}}. \quad (15.17)$$

La expresión (15.17) es una ecuación cuadrática respecto de v_c :

$$\frac{uv_c^2}{c^2} - 2v_c + u = 0.$$

Sus raíces:

$$v_{c1} = \frac{1 + \sqrt{1 - u^2/c^2}}{u/c^2} = \frac{c^2(1 + \sqrt{1 - u^2/c^2})}{u} = \frac{u}{1 - \sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

$$v_{c2} = \frac{1 - \sqrt{1 - u^2/c^2}}{u/c^2} = \frac{c^2(1 - \sqrt{1 - u^2/c^2})}{u} = \frac{u}{1 + \sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

La primera raíz no tiene sentido físico, ya que la velocidad del centro de inercia no puede ser mayor que la de la luz en el vacío (§ 12.6). Poniendo el valor de la segunda raíz en la expresión (15.16), hallaremos la buscada fórmula para la masa relativista.

3. Si en lugar de la ley relativista de composición de velocidades hacemos uso de la clásica (2.6), en vez de

(15.17) obtendremos $v_c = u - v_c$, de donde $v_c = u/2$. Al sustituir este valor en (15.16) vamos a tener que $m = m_0$.

Así, pues, las transformaciones de Lorentz (y, en particular, la ley relativista de composición de velocidades) nos llevan a la dependencia relativista entre la masa y la velocidad; las transformaciones de Galileo (y la ley clásica de composición de velocidades) nos conducen a la deducción de que la masa del cuerpo no depende de la velocidad, o sea, de la invariancia de la masa en la mecánica newtoniana.

Capítulo 16

ENERGÍA TOTAL Y CINÉTICA

§ 16.1. Energía total de un cuerpo

1. En física la noción de energía es una de las fundamentales. Del curso inicial de física, el lector conoce *la ley de la conservación de la energía*, una de las más importantes leyes de la naturaleza, así como una serie de aplicaciones de dicha ley para explicar los fenómenos mecánicos, térmicos y eléctricos. Con la noción de energía tropezamos al considerar múltiples problemas técnicos, ya que uno de los problemas esenciales de la técnica consiste en la obtención, transmisión y empleo de la energía. En este capítulo y en los siguientes, será expuesta con detalle la noción de energía, así como mostrado de que forma se hace uso de ella al resolver una serie de problemas físicos.

2. Utilizando las ideas de la teoría de la relatividad, podemos obtener la noción más completa de energía. *La energía total* de un cuerpo aislado de los influjos externos es el producto de la masa relativista por el cuadrado de la velocidad de la luz:

$$\mathcal{E} = mc^2. \quad (16.1)$$

De esta definición se desprende que *en diversos sistemas de referencia, la energía total del cuerpo es distinta*. Ella es función de la velocidad a la que el cuerpo se mueve con relación al sistema de referencia, ya que la masa relativista depende de la velocidad (§ 13.1) y el cuerpo tiene diferentes velocidades en distintos sistemas de referencia.

El cuerpo tiene la menor energía en el sistema de referencia en el que está en reposo. El valor de la energía del cuerpo recibe el nombre de *energía en reposo*:

$$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2. \quad (16.2)$$

§ 16.2. Energía cinética

1. Llámanse *energía cinética de un cuerpo K* la diferencia entre su energía total y la energía en reposo:

$$K = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = (m - m_0) c^2. \quad (16.3)$$

Depende de la velocidad de movimiento del cuerpo respecto del sistema de referencia.

Vamos a aducir a la expresión de la energía cinética una forma más cómoda para las posteriores investigaciones. De (13.3), sigue que

$$K = (m - m \sqrt{1 - u^2/c^2}) c^2 = mc^2 (1 - \sqrt{1 - u^2/c^2}).$$

Multiplicando y dividiendo esta expresión por $1 + \sqrt{1 - u^2/c^2}$, obtenemos

$$K = \frac{mu^2}{1 + \sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{p^2}{m(1 + \sqrt{1 - u^2/c^2})}. \quad (16.4)$$

En la mecánica newtoniana, la velocidad de movimiento del cuerpo con relación al sistema de referencia es mucho menor que la de la luz; por esta razón, puede ser despreciado el término u^2/c^2 en comparación con la unidad y hacer $\sqrt{1 - u^2/c^2} \approx 1$. Después de las indicadas operaciones obtenemos una sencilla fórmula para calcular la energía cinética en la mecánica newtoniana:

$$K = \frac{mu^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (16.5)$$

Aunque esta fórmula es aproximada, a velocidades de movimiento con las que se tropieza en técnica, ofrece una buena precisión. Haciendo uso de los resultados del § 13.3, obtenemos que incluso a velocidades de un orden de centenares de kilómetros por segundo, la expresión aproximada (16.5) difiere de la precisa (16.4) menos de una diezmilésima parte de tanto por ciento.

2. A velocidades mucho menores que la de la luz, la energía cinética del cuerpo es en grado considerable menor

que la energía en reposo. En efecto

$$\frac{K}{\mathcal{E}_0} = \frac{u^2}{2c^2} \ll 1.$$

Incluso a velocidades $u \approx 300$ km/s, que es diez veces mayor que la velocidad orbital de la Tierra, la energía cinética constituirá

$$\frac{K}{\mathcal{E}_0} = \frac{9 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 5 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-5} \%,$$

es decir, una cienmilésima parte de tanto por ciento de la energía en reposo!

Y al revés, a velocidades ultrarrelativistas, que poco se diferencian de la de la luz, prácticamente, toda la energía del cuerpo está concentrada en la energía cinética: la energía en reposo es mucho menor que la cinética. Por ejemplo, en los sincrofasotrones modernos, los protones se aceleran hasta velocidades del orden $u = 0,999923 c$. Aquí

$$\begin{aligned} \frac{K}{\mathcal{E}_0} &= \frac{(m - m_0) c^2}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 = \\ &= \frac{10^8}{\sqrt{153,9941}} - 1 = 80,6 - 1 \approx 80. \end{aligned}$$

Por consiguiente, a tales velocidades la energía cinética del protón es 80 veces mayor que la energía en reposo.

Despreciando la energía en reposo en comparación con la cinética, de (16.3) obtenemos, aproximadamente, para las velocidades ultrarrelativistas

$$K \approx \mathcal{E} = mc^2. \quad (16.6)$$

§ 16.3. Energía y cantidad de movimiento

1. Deduzcamos la correlación entre la energía total de un cuerpo y su cantidad de movimiento, que en el futuro nos será necesaria. Con este fin elevemos al cuadrado la expresión para la masa relativista (13.3); después de sencillas transformaciones, obtenemos

$$m^2 c^2 - m^2 u^2 = m_0^2 c^2$$

o bien, después de multiplicar por c^2 ,

$$m^2 c^4 - m^2 u^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (16.7)$$

Teniendo en cuenta que la cantidad de movimiento del cuerpo $p = mu$, la energía total $\mathcal{E} = mc^2$ y la energía en reposo $\mathcal{E}_0 = m_0c^2$, tenemos

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_0^2 + p^2c^2. \quad (16.8)$$

En el dominio ultrarrrelativista

$$K \approx \mathcal{E} \approx pc. \quad (16.9)$$

2. El análisis de la expresión (16.8) nos muestra que hay dos procedimientos para variar la energía total de un cuerpo.

Primero, podemos cambiar la cantidad de movimiento del cuerpo, sin variar la energía en reposo. Para ello, es preciso cambiar la velocidad de movimiento del cuerpo respecto del sistema de referoncia elegido. Segundo: es posible cambiar la energía en reposo; con ello, como es natural, variará también la masa en reposo de dicho cuerpo. A primera vista, parece no estar claro mediante qué procedimiento puede ser variada la masa en reposo del cuerpo. En realidad, semejantes procesos son posibles, lo que será mostrado en los caps. 20 y 21.

§ 16.4. Energía cinética y trabajo

1. Examinemos el caso cuando sobre un cuerpo está aplicada la fuerza F , que forma con la dirección de desplazamiento un ángulo α . En el caso general, podemos considerar la fuerza variable y la trayectoria del cuerpo, curvilínea. Descomponemos la fuerza en dos componentes (fig. 16.1): tangencial $F_t = F \cos \alpha$ y normal $F_n = F \sin \alpha$. A continuación, consideramos cómo éstas influyen sobre la energía cinética del cuerpo.

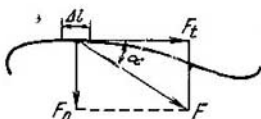


Fig. 16.1.

La componente normal de la fuerza sólo cambia la dirección del vector de velocidad, pero no hace variar su valor absoluto (§ 4.8). Por esta causa, la componente normal de la fuerza no hace que cambie la energía cinética del cuerpo. En efecto, en la expresión para la energía cinética (16.4) entra el cuadrado de la velocidad, por lo tanto, dicha energía sólo depende del módulo de la velocidad o de la cantidad de movimiento, pero no es función de la dirección de dichos vectores.

Por lo contrario, la componente tangencial de la fuerza influye precisamente sobre el valor absoluto de la velocidad o la cantidad de movimiento, pero no sobre sus direcciones. Por consiguiente, la variación de la energía cinética del cuerpo transcurre bajo la acción de la componente tangencial de la fuerza. Esta última, de acuerdo con (13.5), puede ser escrita:

$$F_t = F \cos \alpha = dp/dt.$$

En verdad, la componente tangencial de la fuerza caracteriza la variación del valor absoluto de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo, por lo que en la expresión (13.5) hay que considerar la diferencia entre los módulos de los vectores, en lugar de la diferencia entre éstos.

2. Supongamos que bajo la acción de una fuerza, el cuerpo se ha desplazado a una pequeña distancia Δl en el transcurso de un pequeño intervalo de tiempo Δt . Quedando la energía en reposo invariable, el cambio de la energía cinética del cuerpo será igual a la variación de su energía total.

Derivando (16.8) para $\mathcal{E}_0 = \text{const}$, tenemos

$$2\mathcal{E} d\mathcal{E} = 2pc^2 dp.$$

Poniendo los valores de la energía total $\mathcal{E} = mc^2$ y de la cantidad de movimiento $p = mu$, después de simplificar obtenemos

$$d\mathcal{E} = dK = u dp. \quad (16.10)$$

Siendo constante la energía en reposo, la variación de la energía total del cuerpo es igual al cambio de su energía cinética. Multiplicando y dividiendo (16.10) por dt y teniendo en cuenta que

$$u dt = dl, \quad \frac{dp}{dt} = F_t = F \cos \alpha,$$

$$dK = F_t dl = F \cos \alpha dl. \quad (16.11)$$

3. La magnitud física $F_t dl = F \cos \alpha dl$ recibirá el nombre de *trabajo elemental*:

$$\Delta A = F \cos \alpha dl = F_t dl = F dl. \quad (16.12)$$

Así, pues, el trabajo elemental es igual a una variación infinitésima de la energía cinética del cuerpo:

$$\Delta A = dK. \quad (16.13)$$

4. Consideremos el caso del trabajo de una fuerza tomada al azar en un sector finito de la trayectoria (fig. 16.2). Dividimos esta trayectoria en pequeños sectores $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$. De acuerdo con (16.13), para cada sector tenemos

$$\begin{aligned} \Delta A_1 &= \Delta K_1 = K_1 - K_0; \quad \Delta A_2 = \Delta K_2 = K_2 - K_1; \quad \dots \\ \dots; \quad \Delta A_n &= \Delta K_n = K_n - K_{n-1}. \end{aligned}$$

Después de sumar todas estas igualdades y designando el trabajo en el último sector por $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$ y haciendo $K_n = K$, tenemos

$$A = K - K_0, \quad (16.14)$$

ya que todos los sumandos intermedios se eliminan entre sí. Así, pues, el trabajo de una fuerza en el sector final de

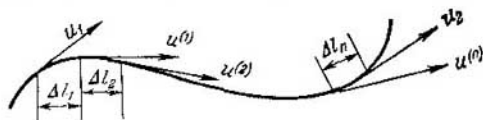


Fig. 16.2.

la trayectoria es igual a la variación de la energía cinética del cuerpo, es decir, a la diferencia de los valores de la energía cinética en los puntos final e inicial de la trayectoria. La expresión (16.14) se ha deducido sobre la base de las fórmulas de la teoría de la relatividad y, por esta razón, es justa para el movimiento de un cuerpo a velocidades arbitrarias (pero a condición de que la energía en reposo no cambia).

5. Teniendo en cuenta la importancia de este resultado, recomendamos al lector que deduzca por su cuenta la expresión (16.14) para el caso, cuando está aplicada una fuerza constante, con la aproximación $u \ll c$ (mecánica newtoniana). Por ejemplo, se puede hacer uso de las expresiones (4.9), (4.10) y (7.2) y obtener

$$A = \frac{mu^2}{2} - \frac{mu_0^2}{2}. \quad (16.15)$$

§ 16.5. Potencia

Es llamada *potencia media* en el intervalo de tiempo Δt la razón entre el trabajo, realizado durante ese tiempo y el intervalo de tiempo:

$$P_m = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (16.16)$$

Recibe el nombre de *potencia instantánea* el límite al que tiende la potencia media en el transcurso de un intervalo infinitésimo de tiempo:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = A'(t). \quad (16.17)$$

La potencia instantánea puede ser expresada por la fuerza y la velocidad instantánea. Con este fin, poniendo en (16.17) la expresión (16.12), obtenemos

$$P = F_t u = Fu \cos \alpha, \quad (16.18)$$

donde u es el valor de la velocidad instantánea.

Notemos, que si la fuerza es perpendicular a la trayectoria ($\alpha = \pi/2$), el trabajo y la potencia son iguales a cero.

§ 16.6. Unidades de energía, trabajo y potencia

1. Como el trabajo es la medida de la variación de la energía, estas dos magnitudes se miden con las mismas unidades.

En el SI, la unidad de trabajo es un *julio*, que significa el trabajo ejecutado por una fuerza de 1 N a la distancia de 1 m en la dirección de aplicación de la fuerza:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}.$$

Dimensión del trabajo:

$$[A] = [F] [l] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}.$$

Esta misma dimensión puede ser obtenida del modo siguiente:

$$[A] = [\xi] = [m] [c^2] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}.$$

Una evidente representación del julio podemos obtener partiendo de los razonamientos que siguen: si un cuerpo de masa 2 kg se mueve a la velocidad de 1 m/s, su energía cinética es igual a 1 J.

2. En el SI, como unidad de potencia se emplea *el vatio* que es la potencia con la que durante 1 s se realiza un trabajo igual 1 J:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s.}$$

La dimensión de la potencia:

$$[P] = [A/t] = \text{ML}^2\text{T}^{-3}.$$

3. En física atómica se utiliza la unidad de energía *electronvoltio* (eV) y sus derivadas: kiloelectronvoltio (1 keV) = 10^3 eV), megaelectronvoltio (1 MeV = 10^6 eV) y gigaelectronvoltio (1 GeV = 10^9 eV)

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

El sentido de semejante denominación de la unidad de energía será aclarado más adelante (§ 18.7).

§ 16.7. Cantidad de movimiento y energía de una partícula localizada

1. Una partícula recibe el nombre de *localizada* en cierta parte del espacio con la dimensión característica a , si para sus coordenadas son válidas las correlaciones

$$\begin{aligned} x_0 \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 \leq y \leq \\ \leq y_0 + a, \quad z_0 \leq z \leq z_0 + a. \end{aligned} \quad (16.19)$$

Esto significa que la partícula no sale de los límites del cubo representado en la fig. 16.3.

Es natural, que la incertidumbre de las coordenadas de la partícula coincidan con la dimensión característica de la región de localización:

$$\Delta x \approx \Delta y \approx \Delta z \approx a. \quad (16.20)$$

Haciendo uso del principio de incertidumbre (14.5), hallaremos la incertidumbre de la proyección de las cantidades de movimiento:

$$\Delta p_x \approx \Delta p_y \approx \Delta p_z \approx h/a. \quad (16.21)$$

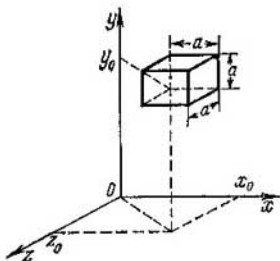


Fig. 16.3.

2. Intentemos apreciar la magnitud del valor medio de la cantidad de movimiento de esta partícula. De (16.21) sigue que la diferencia entre dos valores tomados al azar de la proyección de la cantidad de movimiento en cualquier eje de coordenadas no supera \hbar/a :

$$0 \leq |p_{x_2} - p_{x_1}| \leq \hbar/a.$$

Pero la suma de los módulos de dos magnitudes no es menor que el módulo de su diferencia:

$$|p_{x_1}| + |p_{x_2}| \geq |p_{x_2} - p_{x_1}| \approx \hbar/a.$$

El valor medio de la proyección de la cantidad de movimiento en el eje de abscisas:

$$\bar{p}_x \approx 1/2 (|p_{x_1}| + |p_{x_2}|) \geq \hbar/2a.$$

De forma análoga para las demás proyecciones:

$$\bar{p}_x \approx \bar{p}_y \approx \bar{p}_z \approx \hbar/2a. \quad (16.22)$$

De aquí se desprende la expresión para el valor medio de la cantidad de movimiento de la partícula

$$\bar{p} = \sqrt{\bar{p}_x^2 + \bar{p}_y^2 + \bar{p}_z^2} \geq \sqrt{3\hbar^2/4a^2} \approx \hbar/a, \quad (16.23)$$

donde a es la dimensión característica de la región de localización*).

3. Deduzcamos la expresión para la energía cinética media de una partícula localizada. Para un caso no relativista, de acuerdo con (16.5) y (16.23), tenemos

$$\bar{K} = \frac{\bar{p}^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2}. \quad (16.24)$$

Para una partícula ultrarrelativista, en correspondencia con (16.9), obtenemos

$$\bar{K}_{rel} \approx \bar{pc} \geq \hbar c/a. \quad (16.25)$$

Si el número de partículas por unidad de volumen (es decir, la concentración de partículas) es igual a n , es evidente que $na^3 = 1$, de donde se deduce que $a = n^{-1/3}$. Sustituyen-

* Como vemos, el valor medio de la cantidad de movimiento de una partícula localizada no es menor que la incertidumbre de dicha magnitud, es decir, $\bar{p} \geq \Delta p$. De forma análoga, también la energía $\bar{\mathcal{E}} \geq \Delta \mathcal{E}$.

do en (16.24) y (16.25), expresamos la energía cinética mediante la concentración de las partículas:

$$\bar{K} \geq \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m}, \quad (16.26)$$

$$\bar{K}_{\text{rel}} \geq \hbar c n^{1/3}. \quad (16.27)$$

4. Así, pues, una partícula localizada en cierta región del espacio, *no puede estar en reposo*: el valor medio de su cantidad de movimiento es igual a $\bar{p} \approx \hbar/a$, el valor medio de la energía cinética es igual a $\bar{K} \approx \hbar^2/2ma^2$ (o bien $\bar{K}_{\text{rel}} \approx \hbar c/a$).

A primera vista, este resultado parece paradójico, contradice a nuestra experiencia cotidiana, de acuerdo con la que vemos múltiples cuerpos en reposo. Los dos siguientes ejemplos nos ayudarán a comprender esta paradoja.

Ejemplo 1. Sea que sobre la mesa está una moneda de un kopek ($m = 1$ g). Apreciemos su cantidad de movimiento y su velocidad medias. La región de localización es aquí no menor que su tamaño: $a \approx 1$ cm. El valor medio de la cantidad de movimiento

$$\bar{p} \approx \frac{\hbar}{a} \approx \frac{10^{-34}}{10^{-2}} = 10^{-32} \text{ kg} \cdot \text{m/s},$$

su velocidad media

$$\bar{u} = \frac{\bar{p}}{m} \approx \frac{10^{-32}}{10^{-3}} = 10^{-29} \text{ m/s}.$$

Es lógico que podamos despreciar semejante velocidad y considerar que la moneda está en reposo. Como en el § 14.3, vemos de nuevo que en el ámbito de la mecánica newtoniana pueden despreciarse los corolarios que siguen de los principios de incertidumbre.

Ejemplo 2. Apreciemos la cantidad de movimiento y la energía de un electrón en el átomo ($a \approx 10^{-10}$ m). Tenemos

$$\bar{p} \approx \frac{\hbar}{a} \approx \frac{10^{-34}}{10^{-10}} = 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s},$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{p}}{m} \approx \frac{\hbar}{ma} \approx \frac{10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-10}} \approx 10^6 \text{ m/s}.$$

Vemos que el electrón en el átomo debe moverse a una velocidad considerable, aunque no relativista. El valor

medio de la energía cinética

$$\bar{K} \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2} \approx \frac{10^{-68}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-20}} \approx 5 \cdot 10^{-19} \text{ J} \approx 3 \text{ eV.}$$

Al estudiar con detalle la estructura del átomo (véanse los caps. 71, 72), nos cercioraremos de que por el orden de las magnitudes, hemos obtenido un resultado justo.

Así, pues, en el micromundo no se puede hacer uso de las representaciones newtonianas; sólo las ideas de la mecánica cuántica nos ofrecerán resultados correctos y entre ellos, los corolarios del principio de incertidumbre.

Capítulo 17

TEORÍA ELEMENTAL DEL CHOQUE

§ 17.1. ¿Qué es el choque?

1. En la vida cotidiana por choque se comprende un fenómeno semejante a la colisión recíproca de *las bolas de billar*. En física este fenómeno se entiende en un sentido más amplio. Entendemos por *choque* o *colisión cualquier breve interacción entre partículas*. Así, podemos hablar de la colisión de moléculas, aunque ellas interactúan a distancia, por intermedio de sus campos eléctricos; es posible hablar del choque de un neutrón o partícula alfa con un núcleo, aunque tampoco aquí hay contacto directo entre las partículas y la interacción se ejecuta por medio de fuerzas nucleares o eléctricas.

La particularidad de la teoría del choque consiste en que no analizamos en forma detallada el mecanismo de la interacción. La causa reside en que el análisis de las fuerzas que surgen durante el choque es muy complicado y, en muchos casos, imposible. Por ejemplo, así sucede con las fuerzas nucleares, para las que hasta la fecha no ha sido hallada la ley de variación.

Es lógico, que como resultado nos vemos privados de la posibilidad de describir con detalle la ley de movimiento de las partículas, no podemos calcular las trayectorias, velocidades instantáneas, etc. Pero con frecuencia, todo

esto no nos interesa en alto grado, más aún cuando para las partículas elementales es, a veces, completamente imposible fijar con exactitud las trayectorias y velocidades instantáneas (o cantidades de movimiento) a causa del principio de incertidumbre.

2. El problema del choque se formula, por regla, del siguiente modo: se dan las cantidades de movimiento y las energías cinéticas de las partículas antes del choque: ¿cómo hallar los valores de estas magnitudes después del choque? Resulta que para resolver este problema no es preciso realizar el análisis detallado de la interacción.

A continuación, examinaremos la teoría del choque sólo con la aproximación de la mecánica newtoniana, cuando la velocidad de las partículas es mucho menor que la de la luz en el vacío, mientras que las masas de las partículas son suficientemente grandes. Además, para simplificar los razonamientos, vamos a considerar sólo el choque de dos partículas. A pesar de la aparente limitación de semejante planteamiento del problema, éste será útil para analizar muchos fenómenos físicos reales. Examinemos ciertos problemas, para cuya resolución es suficiente aplicar la ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

§ 17.2. Choque perfectamente inelástico

1. Recibe el nombre de *perfectamente inelástico* el choque cuando después del impacto los cuerpos se mueven a igual velocidad formando un solo cuerpo. Como ejemplo podemos indicar la caída de proyectiles en una plataforma con arena, la colisión de un meteorito con la Tierra, etc.

Supongamos que una partícula de masa m_1 se mueve a una velocidad v_1 , mientras que la partícula de masa m_2 , a la velocidad v_2 . Las partículas chocaron en cierto punto y se unieron.

¿Cuál será la velocidad del cuerpo formado de nuevo (fig. 17.1)? Como examinamos un caso no relativista, las masas de los cuerpos no varían al cambiar la velocidad y la masa del cuerpo formado de nuevo $M = m_1 + m_2$. Basándonos en la ley de la conservación de la cantidad de

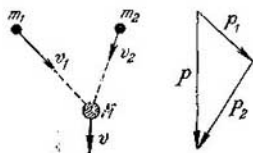


Fig. 17.1.

movimiento, tenemos

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v, \quad (17.1)$$

de donde

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (17.2)$$

2. Hay que prestar atención a que tanto las velocidades, como las cantidades de movimiento son vectores, por lo que (17.1) no puede ser entendido como una suma aritmética. Aquí, hay que ejecutar dicha operación como una

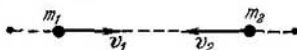


Fig. 17.2.

suma algebraica. En particular, si los cuerpos se mueven al encuentro por una recta, uno de los vectores tiene que tener signo positivo y el segundo, negativo (fig. 17.2).

3. Con el choque inelástico la suma de las energías cinéticas de las partículas antes de la colisión no es igual a la energía cinética del cuerpo formado después del choque. Esto es completamente evidente para el caso del choque inelástico de dos cuerpos, cuyas cantidades de movimiento son iguales y están dirigidas en sentidos opuestos. Aquí, la energía cinética del cuerpo después del choque es igual a cero, mientras que la suma de las energías cinéticas de los cuerpos que chocan, como es natural, antes del choque no era nula. Esto también es justo para el caso, cuando el cuerpo en reposo respecto del sistema dado de referencia, se divide en dos fragmentos.

4. En calidad de ejemplo, consideremos la desintegración radiactiva alfa. En el transcurso de la desintegración de cierto elemento radiactivo, éste emite una partícula alfa (núcleo de helio); el núcleo formado de nuevo sufre repercusión.

Supongamos que conocemos la energía cinética de la partícula alfa K y que nos interesa la energía cinética del nuevo núcleo, que designaremos con la letra R . Este problema se resuelve con facilidad partiendo de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

Sea la masa de la partícula alfa igual a m y la del núcleo antes de la desintegración M . Entonces, la masa del nuevo núcleo será igual a $M - m$. Suponiendo que el núcleo estaba en reposo antes de la desintegración respecto del sistema de referencia del laboratorio, en correspondencia con la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, obtenemos

$$0 = p_\alpha + p_R. \quad (17.3)$$

Por consiguiente, las cantidades de movimiento de la partícula alfa y del nuevo núcleo son de igual magnitud y de signos opuestos.

Sea que la partícula alfa está en movimiento a velocidad no relativista; la velocidad del nuevo núcleo será aún menor. Mediante la fórmula (16.5) hallamos sus energías cinéticas:

$$K = \frac{p_{\alpha}^2}{2m}, \quad R = \frac{p_R^2}{2(M-m)}. \quad (17.4)$$

La razón de las energías cinéticas

$$K/R = (M-m)/m. \quad (17.5)$$

La variación de la energía del núcleo inicial

$$\Delta\mathcal{E} = K + R = KM/(M-m). \quad (17.6)$$

Examinemos un ejemplo numérico concreto. Como han mostrado las investigaciones, durante su desintegración el núcleo de radio emite partículas alfa con una energía cinética $K = 5,681$ MeV; la masa del núcleo de radio es 56 veces mayor que la masa de la partícula alfa ($M = 56m$). En este caso, la energía cinética del núcleo, formado después de la desintegración radiactiva

$$R = \frac{Km}{M-m} = \frac{5,681 \cdot 1}{55} = 0,103 \text{ Mev,}$$

y la energía total de la reacción

$$\Delta\mathcal{E} = K + R = 5,784 \text{ MeV.}$$

§ 17.3. Choque elástico

1. Llamamos *elástico* un choque cuando se conserva no sólo la suma de las cantidades de movimiento, sino que también la suma de las energías cinéticas de los cuerpos que chocan. Esto no significa, de ninguna manera, que no cambia la energía de cada uno de ellos. Al contrario, al chocar cambian las velocidades de los cuerpos y, junto con ellas, los impulsos de movimiento y las energías cinéticas. Pero la suma de los impulsos de movimiento y la de las energías cinéticas quedan invariables con el choque elástico.

Cuando el choque de dos cuerpos es elástico, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2, \quad K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2, \quad (17.7)$$

donde sin rayas se designan las energías y los impulsos de movimiento antes del choque, con rayas, después de éste.

2. Consideremos el choque elástico *central* de dos bolas, es decir, tal choque cuando los vectores de velocidades están dirigidos por una recta que une los centros de dichas

bolas. Para simplificar los razonamientos, consideraremos el fenómeno en el sistema de referencia, con relación al cual la bola m_2 está en reposo y la bola m_1 , en movimiento a la velocidad v . La ecuación (17.7) toma la forma

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad (17.8)$$

o bien

$$m_1 (v - v_1) = m_2 v_2, \quad m_1 (v^2 - v_1^2) = m_2 v_2^2.$$

Dividiendo la segunda igualdad por la primera, tenemos

$$v + v_1 = v_2. \quad (17.9)$$

Poniendo (17.9) en la primera igualdad del sistema (17.8), obtenemos

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v + m_2 v_1,$$

de donde

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v. \quad (17.10)$$

3. Detengámonos en ciertos casos particulares de interés.

a) Si $m_2 = m_1$, $v_1 = 0$, $v_2 = v$. Por consiguiente, para el choque elástico central de una bola contra otra bola en reposo de igual masa, la primera bola se para, mientras que la segunda adquiere la velocidad de la primera bola. Además, si las bolas son indistinguibles (por ejemplo, moléculas), obtendremos un resultado, como si la primera bola «hubiera pasado a través de la segunda» y continuara moviéndose con la misma velocidad, mientras que la bola en reposo quedó en su sitio.



Fig. 17.3.

b) Si $m_1 > m_2$, $0 < v_1 < v$ y $v_2 > v$. En el caso límite, cuando $m_1 \gg m_2$, la velocidad de la bola maciza casi no cambiará, en tanto que la bola ligera, en reposo antes del choque, se moverá a una velocidad $v_2 \approx 2v$.

c) Si $m_1 < m_2$, $-v \leq v_1 < 0$, es decir, la bola ligera al chocar con la maciza se «refleja» en sentido contrario. La bola maciza m_2 adquiere la velocidad $0 \leq v_2 < v$.

En el caso límite, cuando $m_2 \gg m_1$, podemos suponer que la razón m_1/m_2 tiende a cero. Entonces de (17.10) sigue que $v_2 = 0$; la velocidad de la primera bola

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{(m_1/m_2) - 1}{(m_1/m_2) + 1} v = -v,$$

es decir, al chocar la bola contra una pared maciza se repetirá de ella a la misma velocidad con la que choca contra ella (fig. 17.3); la velocidad de la pared, prácticamente, no cambia.

§ 17.4. Frenado de neutrones

1. Para ciertas reacciones nucleares es preciso moderar los neutrones, es decir, disminuir su energía cinética desde varios MeV hasta centésimas partes de electronvoltio. Los neutrones se frenan a cuenta de los choques elásticos de éstos con los núcleos de la materia moderadora. Hallemos el coeficiente de frenado r , igual a la razón de la energía perdida por el neutrón durante un choque y la energía cinética inicial.

Sea la masa del núcleo del moderador M , su velocidad después de la colisión $u = \frac{2m}{m+M}v$ (véase (17.10)). La energía perdida por el neutrón es igual a la energía que ha recibido el núcleo del moderador; así, pues,

$$r = \frac{\Delta K}{K} = \frac{Mu^2 \cdot 2}{2 \cdot mv^2} = \frac{4mM}{(m+M)^2}. \quad (17.11)$$

Como moderador se emplea el carbono. La masa de su núcleo es 12 veces mayor que la masa del neutrón. Para $M = 12m$, de (17.11) obtenemos

$$r = \frac{4 \cdot 1 \cdot 12}{13^2} = 0,284 = 28,4\%.$$

2. Para determinar el número de colisiones hasta el frenado total de los neutrones realizamos el siguiente cálculo. Si la energía cinética inicial del neutrón es igual a K , después de un choque

$$K_1 = K - \Delta K = K(1 - r).$$

Después del segundo choque

$$K_2 = K_1 - \Delta K_1 = K_1(1 - r) = K(1 - r)^2.$$

Es evidente que después de n colisiones la energía cinética

$$K_n = K(1 - r)^n. \quad (17.12)$$

Suponiendo que

$$K = 1,75 \text{ MeV} = 1,75 \cdot 10^6 \text{ eV}, \quad K_n = 0,025 \text{ eV}, \quad r = 0,284.$$

obtenemos: $0,025 = 1,75 \cdot 10^6 \cdot 0,716^n$ o bien $7 \cdot 10^7 = 0,716^{-n}$, de donde

$$n = \frac{-\lg(7 \cdot 10^7)}{\lg 0,716} = \frac{-7,845}{-0,145} = 54.$$

Así, pues, si el choque elástico del neutrón con el núcleo de carbono fuera siempre central, después de 54 choques su energía cinética disminuiría de 1,75 MeV a 0,025 eV, es decir, ¡70 millones de veces! No obstante, en realidad, además de los choques centrales se producen colisiones oblicuas, durante las cuales el neutrón pierde menos energía que con las centrales. Por esta razón, para conseguir el correspondiente frenado es preciso aumentar en cierto grado el número de choques.

3. El agua pesada es un moderador mucho más eficaz, ya que en ella los átomos de hidrógeno se han sustituido por los de hidrógeno pesado, es decir, deuterio. Aquí $M = 2m$, $r = 4mM/(m + M^2) = 8/9$. Poniendo este valor de r en (17.12) obtenemos $K_n = K/9^n$. Suponiendo, como con anterioridad, que $K = 1,75$ MeV, $K_n = 0,025$ eV, tenemos que $n = 7$.

§ 17.5. Presión del flujo de partículas contra la pared

1. Estudiemos un flujo constituido por partículas iguales de masa m , que están en movimiento a una velocidad v perpendicularmente a cierta pared, cuya masa es mucho mayor que la masa de todas las partículas (fig. 17.4). En la figura vemos que durante el tiempo Δt llegarán a la pared todas las partículas contenidas en el volumen $V = S \Delta l = Sv \Delta t$. Si la concentración de las partículas (el número de ellas por unidad de volumen) es igual a n , durante el intervalo de tiempo Δt contra la pared chocarán N partículas:

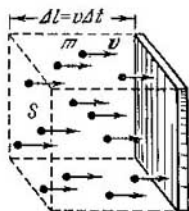


Fig. 17.4.

$$N = nV = nSv \Delta t.$$

2. Al chocar contra la pared, sobre la partícula actúa una fuerza igual a la variación de la cantidad de movimiento de la partícula por la unidad de tiempo:

$$f = \Delta(mv)/\Delta t. \quad (17.13)$$

Según la tercera ley de Newton, la partícula actúa sobre la pared con una fuerza igual en magnitud, pero de sentido inverso. Teniendo en cuenta que sobre la pared, en el lapso Δt , golpean N partículas, hallamos la fuerza total:

$$F = -fN = -nSv \Delta(mv). \quad (17.14)$$

3. La variación de la cantidad de movimiento de la partícula es función del carácter de su choque contra la

pared. Con el choque elástico contra la pared inmóvil, su velocidad cambia por la inversa (§ 17.3).

Así, pues, $v_{fin} = v$, $v_{fin} = -v$; la variación de la cantidad de movimiento

$$\Delta (mv)_{elás} = mv_{fin} - mv_{in} = -2mv. \quad (17.15)$$

Poniendo (17.15) en (17.14), obtenemos

$$F_{elás} = 2Snmv^2. \quad (17.16)$$

Por definición, la presión p se llama la razón de la fuerza F al área S , sobre la que esta fuerza está aplicada (con ello, la dirección de la fuerza es perpendicular al área):

$$p = F/S.$$

De aquí se desprende que la presión contra la pared, producida por el flujo de partículas al ser el choque contra ella elástico, se expresa de la forma siguiente:

$$p_{elás} = 2nmv^2. \quad (17.17)$$

4. Con el choque inelástico, cuando las partículas parece que se "pegan" a la pared, la presión resulta ser dos veces menor. En efecto, aquí la velocidad inicial $v_{in} = v$, mientras que la final, $v_{fin} = 0$. La variación de la cantidad de movimiento

$$\Delta (mv)_{inel} = mv_{fin} - mv_{in} = -mv. \quad (17.18)$$

Poniendo esta expresión en (17.14), obtenemos

$$F_{inel} = Snmv^2, \quad p_{inel} = nmv^2. \quad (17.19)$$

5. Las expresiones obtenidas para la fuerza con la que el flujo actúa sobre la pared, son muy generales. Por ejemplo, sirven para calcular la presión del gas (§ 26.1), para calcular la presión luminosa (§ 68.5), etc.

Hagamos uso de ellas para calcular la fuerza con la que el flujo de un líquido actúa sobre la pared. El producto $mn = \rho$ es la densidad del líquido. En realidad, si multiplicamos la concentración, o sea, el número de moléculas por la unidad de masa, por la masa de una molécula, obtendremos la masa de la sustancia por unidad de volumen, es decir, la densidad de ésta.

Así, que

$$F_{elás} = 2S\rho v^2, \quad (17.20)$$

$$F_{inel} = S\rho v^2. \quad (17.21)$$

En esencia, ya hicimos uso de semejantes fórmulas en el cap. 11 para apreciar las fuerzas de resistencia que sufre un cuerpo al moverse por un líquido (véase (11.10)). Allí, la expresión fue obtenida del análisis de las dimensiones, en el presente capítulo, partiendo de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

Capítulo 18

FUERZAS CONSERVATIVAS Y ENERGÍA POTENCIAL

§ 18.1. Trabajo de una fuerza variable

1. Como ya indicamos (§ 16.4), el producto del módulo de la fuerza por el módulo del desplazamiento y el coseno del ángulo entre estos vectores, recibe el nombre de trabajo elemental de la fuerza F por el desplazamiento infinitésimo dl :

$$\Delta A = F dl \cos \alpha = F_t dl = F' dl.$$

Con otras palabras, *el trabajo elemental es igual al producto de la componente tangencial de la fuerza por el módulo del desplazamiento.*

En dependencia de si el ángulo α es agudo u obtuso, el trabajo elemental ΔA puede ser tanto positivo (si $0 < \alpha < \pi/2$, $\Delta A > 0$), como negativo (si $\pi/2 < \alpha < \pi$, $\Delta A < 0$).

2. Para calcular el trabajo en el sector final del recorrido, dividimos éste en pequeños desplazamientos y calculamos el trabajo elemental en cada uno de ellos. La suma de los trabajos elementales, será el trabajo buscado de la fuerza en el sector final del recorrido:

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n = F_t^{(1)} \Delta l_1 + F_t^{(2)} \Delta l_2 + \dots + F_t^{(n)} \Delta l_n. \quad (18.1)$$

Hablando con rigor, aquí siempre surge cierto error que es función del procedimiento de división del camino en pequeños sectores. Un resultado exacto será sólo obtenido en *el límite*, cuando el recorrido sea dividido en un número infinitamente grande de desplazamientos infinitésimos.

3. El trabajo de una fuerza constante por un sector rectilíneo del recorrido, será expresado así:

$$A = F_t l = Fl \cos \alpha. \quad (18.2)$$

Efectivamente, en este caso de la fórmula (18.1) podemos sacar del paréntesis el factor F_t y la suma de los desplazamientos elementales Δl nos dará el espacio recorrido l .

Semejante trabajo puede ser representado en una gráfica (fig. 18.1). La gráfica de la componente tangencial de la fuerza con $F_t = \text{const}$ es una línea recta paralela al eje de abscisas. Entonces, el trabajo en el sector del espacio $l = l_2 - l_1$ es numéricamente igual al área del rectángulo

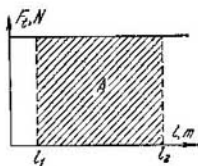


Fig. 18.1.



Fig. 18.2.

sombreado. Aquí hay que tener en cuenta la escala de conversión: el área unitaria representa la unidad de trabajo (en nuestra figura 1 cm^2 corresponde a 1 J).

4. En el caso general, la componente tangencial de la fuerza es una magnitud variable (fig. 18.2). Para el cálculo gráfico del trabajo, dividamos el recorrido l en varios sectores pequeños. Los valores más pequeños de la fuerza en cada sector (en nuestro caso, las ordenadas a la izquierda) los multiplicamos por los correspondientes desplazamientos y los sumamos. El área de la figura escalonada interior, obtenida de la forma descrita, representa cierto trabajo $A_{\text{mín}}$; como para cada desplazamiento hemos tomado el menor valor de la fuerza, el trabajo $A_{\text{mín}}$ es más pequeño que el trabajo A .

Pero si al hacer estos mismos cálculos tomamos para cada desplazamiento el valor máximo de la fuerza (en la fig. 18.3, las ordenadas a la derecha), el área de la figura escalonada que sobresale, representa cierto trabajo $A_{\text{máx}}$.

que es mayor que el trabajo buscado A . Así pues,

$$A_{\text{mín}} < A < A_{\text{máx.}}$$

Si aumentamos el doble el número de particiones, el área de la figura escalonada interior aumentará, mientras que la de la exterior, disminuirá (fig. 18.4). En los cursos de matemáticas se demuestra que con el crecimiento ilimitado del número de divisiones (como es natural, $\Delta l \rightarrow 0$),

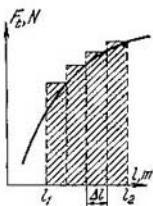


Fig. 18.3.

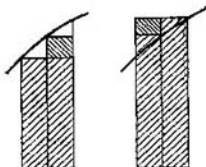


Fig. 18.4.

las áreas de las dos figuras escalonadas tienen un límite común, igual al área de un trapecio curvilíneo que es el que nos ofrecerá el valor numérico preciso del trabajo de una fuerza variable.

Así, pues, el trabajo de una fuerza variable se representa en una gráfica como el área de un trapecio curvilíneo, limitado por abajo con el eje de abscisas, por arriba con la gráfica de la fuerza y por los costados, por las ordenadas de los puntos límites.

Como sabemos, el área de un trapecio curvilíneo es una integral definida, tomada en los límites de las abscisas inicial y final. En correspondencia, el trabajo de una fuerza variable se expresa mediante una integral definida:

$$A = \int_{l_1}^{l_2} F dl = \int_{l_1}^{l_2} F \cos \alpha dl. \quad (18.3)$$

§ 18.2. Trabajo de una fuerza elástica

1. Primero calcularemos el trabajo de una fuerza externa que estira un resorte. Según la tercera ley de Newton, la fuerza externa es igual por su módulo a la fuerza elástica,

pero tiene sentido contrario ($F_{\text{ext}} = -F_{\text{elás}}$); teniendo en cuenta la expresión para la fuerza elástica, obtenemos

$$F_{\text{ext}} = kx, \quad (18.4)$$

donde k es la rigidez. La gráfica de esta fuerza está representada en la fig. 18.5. El trabajo de la fuerza externa en el

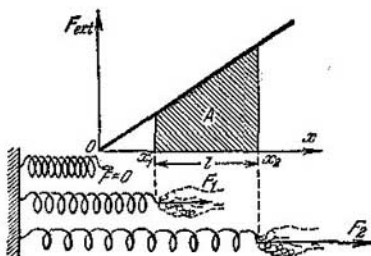


Fig. 18.5.

sector del recorrido $l = x_2 - x_1$ es numéricamente igual al área del trapecio rayado:

$$A_{\text{ext}} = \frac{F_1 + F_2}{2} l = \frac{kx_1 + kx_2}{2} (x_2 - x_1) = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \quad (18.5)$$

2. El trabajo de una fuerza elástica en este mismo sector sólo se diferencia por el signo, o sea, que

$$A_{\text{elás}} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \quad (18.6)$$

Como es natural, este mismo resultado puede ser obtenido integrando:

$$A_{\text{elás}} = \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{elás}} dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}.$$

3. Para $x_1 < x_2$, es decir, al estirar el muelle, la fuerza elástica realiza un trabajo negativo, lo que corresponde a la regla del signo de la fuerza: las fuerzas de atracción son negativas, las de repulsión, positivas (§ 10.2).

En efecto, al aumentar la distancia entre dos cuerpos que se atraen, la fuerza de atracción forma un ángulo obtuso con la dirección de desplazamiento ($\pi/2 < \alpha \leq \pi$), y, como

sabemos, el coseno de un ángulo obtuso es un número negativo. Aquí la fuerza de atracción realiza un trabajo negativo (fig. 18.6, a). En lo que atañe a la fuerza de repulsión, ésta

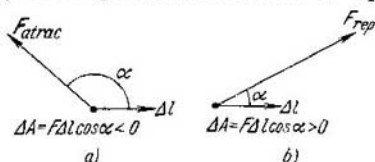


Fig. 18.6.

forma con la dirección de desplazamiento un ángulo agudo ($0 \leq \alpha < \pi/2$) y, por lo tanto, realiza un trabajo positivo (fig. 18.6, b).

§ 18.3. Trabajo de la fuerza de Coulomb

1. Con bastante facilidad hemos conseguido la expresión para el trabajo de una fuerza elástica, ya que en este caso

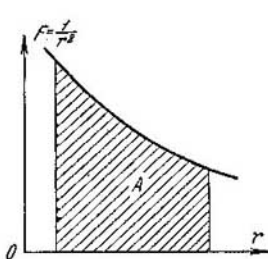


Fig. 18.7.

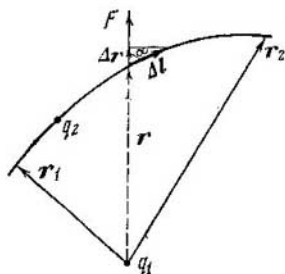


Fig. 18.8.

el trabajo se representa por el área de un trapecio corriente. Algo más difícil será calcular el trabajo de la fuerza de Coulomb (o de gravitación).

En efecto, aquí la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y la gráfica de esta fuerza es una línea curva. Por esta razón, el trabajo se representa mediante el área de un trapecio curvilíneo (fig. 18.7),

mientras que dicha área se calcula o integrando, o bien por métodos numéricos.

2. Calculemos el trabajo de la fuerza de Coulomb al desplazarse una carga por una trayectoria curvilínea, tomada al azar (fig. 18.8).

Dividamos esta curva en desplazamientos infinitésimos Δl , que con la primera aproximación pueden ser considerados como segmentos infinitamente pequeños. El trabajo elemental por semejante segmento

$$\Delta A = F \Delta l \cos \alpha = F \Delta r, \quad (18.7)$$

ya que como vemos en la figura $\Delta l \cos \alpha = \Delta r$. La suma de todos los trabajos elementales

$$\begin{aligned} A &= F_1 \Delta l_1 \cos \alpha_1 + F_2 \Delta l_2 \cos \alpha_2 + \dots \\ &\dots = F_1 \Delta r_1 + F_2 \Delta r_2 + \dots \end{aligned} \quad (18.8)$$

El resultado exacto será obtenido pasando al límite para $\Delta r \rightarrow 0$. Así, pues, el trabajo de la fuerza de Coulomb para el desplazamiento de una carga del punto definido por el radio vector r_1 al punto que se determina por el radio vector r_2 , es expresado por la siguiente integral definida:

$$A_{\text{Coul}} = \int_{r_1}^{r_2} F_{\text{Coul}} \cos \alpha \, dl = \int_{r_1}^{r_2} F_{\text{Coul}} \, dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q_1 q_2 \, dr}{4\pi \epsilon_0 r^2}. \quad (18.9)$$

Es sabido que

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}. \quad (18.10)$$

Por consiguiente, el trabajo de la fuerza de Coulomb

$$A_{\text{Coul}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_1} - \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_2}. \quad (18.11)$$

De forma que *el trabajo de la fuerza de Coulomb no depende de la forma de la trayectoria de la carga*; el trabajo queda definido sólo por los radios vectores de los puntos inicial y final de la trayectoria.

3. Recomendamos que el lector muestre por su cuenta, que en plena correspondencia con la fórmula deducida al final del párrafo anterior, al aumentar la distancia entre las cargas, las fuerzas de repulsión realizarán un trabajo positivo, en tanto que las de atracción, negativo.

§ 18.4. Trabajo de la fuerza de gravitación

1. El cálculo del trabajo de la fuerza de gravitación, en realidad, en nada se diferencia del cálculo del trabajo de la fuerza de Coulomb. Sólo es necesario sustituir en la fórmula (18.11) $q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0)$ por la expresión $\gamma m_1 m_2$ y cambiar el signo, ya que la fuerza de gravitación siempre es de atracción. Obtenemos

$$A_{\text{grav}} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r_1} + \frac{\gamma m_1 m_2}{r_2}. \quad (18.12)$$

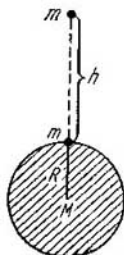


Fig. 18.9.

2. Sea que un cuerpo de masa m se eleva a cierta altura h sobre la superficie de la Tierra (fig. 18.9). Haciendo $m_1 = m_2$ (la masa del cuerpo), $m_2 = M$ (masa de la Tierra), $r_1 = R$ (radio del globo terrestre) y $r_2 = R + h$, obtenemos la expresión para el trabajo de la fuerza de gravedad:

$$A = -\frac{\gamma m M}{R} + \frac{\gamma m M}{R+h} = -\frac{\gamma m M h}{R(R+h)}. \quad (18.13)$$

El trabajo de la fuerza externa tiene el signo contrario, por consiguiente

$$A_{\text{ext}} = \frac{\gamma m M h}{R(R+h)}. \quad (18.14)$$

Si la altura h es mucho menor que el radio de la Tierra, se puede, aproximadamente, hacer $R + h \approx R$. Empleando (9.11), tenemos

$$A_{\text{ext}} = \gamma m M h / R^2 = mgh. \quad (18.15)$$

En realidad, este resultado podría ser obtenido de modo elemental. A pequeñas alturas sobre la Tierra, la fuerza de gravedad $P = mg$ es una magnitud constante. Para una fuerza constante $A_{\text{ext}} = Ph = mgh$.

Sin embargo, la deducción ofrecida más arriba, aunque es más complicada, permite apreciar el error que obtenemos al sustituir la fórmula precisa (18.14) por la expresión aproximada (18.15). En efecto, supongamos que es preciso calcular el trabajo con una exactitud salvo un tanto por ciento; entonces

$$\frac{A_{\text{apr}} - A_{\text{prec}}}{A_{\text{prec}}} = \frac{A_{\text{apr}}}{A_{\text{prec}}} - 1 \leq 0,01.$$

Poniendo los valores precisos y aproximados del trabajo y simplificando los factores iguales, tendremos

$$\frac{R+h}{R} - 1 = \frac{h}{R} \leq 0,01.$$

Así que hasta alturas $h = 0,01R = 0,01 \cdot 6371 \approx 64$ km podemos hacer uso de la fórmula aproximada (18.15) con una precisión salvo 1%.

3. Está claro en absoluto, que *el trabajo de la fuerza de gravitación, como el de la fuerza de Coulomb, no depende de la forma de la trayectoria* por la que se desplaza el punto material; el trabajo se define sólo por los radios vectores de los puntos inicial y final de la trayectoria. Esto se desprende directamente de la identidad de las expresiones para calcular el trabajo de las fuerzas de gravitación y de Coulomb.

§ 18.5. Fuerzas conservativas

1. En los párrafos anteriores mostramos que existen fuerzas elásticas, de Coulomb, de gravitación, cuyo trabajo no depende de la forma de la trayectoria y que se define sólo por las coordenadas del comienzo y el final de la trayectoria. Semejantes fuerzas se llaman *conservativas*. Vamos a mostrar que *el trabajo de una fuerza conservativa por una trayectoria cerrada, tomada al azar, es igual a cero*.

Para demostrarlo, examinemos cierta trayectoria cerrada (fig. 18.10). Designemos el trabajo en los sectores M_1KM_2 y M_1LM_2 por A_K y A_L , respectivamente. De la definición del concepto "fuerza conservativa" se desprende que si el cuerpo se desplaza del punto M_1 al punto M_2 , el trabajo no depende de si el cuerpo se mueve por la curva M_1KM_2 o M_1LM_2 ; así, que $A_K = A_L$. Sea que al desplazarse el cuerpo del punto M_1 al punto M_2 se realiza trabajo positivo, mientras que al moverse el cuerpo del punto M_2 al punto M_1 , el trabajo sea negativo, $A'_L = -A_L$. En efecto, si la dirección de la fuerza no cambia y la del desplazamiento varía por la opuesta, según la definición, el trabajo cambia de signo.

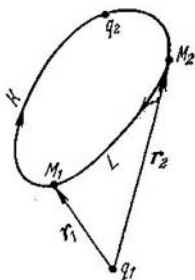


Fig. 18.10.

El trabajo por una trayectoria cerrada es la suma de los trabajos en los sectores M_1KM_2 y M_2LM_1 ; así, pues,

$$A_{\text{cerr}} = A_K + A'_L = A_K - A_L = 0.$$

Recomendamos al lector que efectúe el cálculo para una fuerza concreta, que actúa sobre la trayectoria prefijada, haciendo uso de las expresiones obtenidas para las fuerzas elásticas (18.6), de Coulomb (18.11) o de gravitación (18.12).

2. Notemos que también existen fuerzas no conservativas (de otra manera, *disipativas*), cuyo trabajo, en modo considerable, depende de la forma de la trayectoria. Ejemplo de semejante fuerza es la de rozamiento. En realidad, al desplazar cierto objeto, digamos, por el suelo, realizamos trabajo contra las fuerzas de rozamiento. Pero aquí, como nos muestra la experiencia, el trabajo depende notablemente de la trayectoria por la que el cuerpo se desplaza. En particular, si la fuerza de rozamiento es igual por todos los puntos de la superficie del suelo, el trabajo por el recorrido más corto es menor que por cualquier otra trayectoria.

El trabajo de una fuerza disipativa por una trayectoria cerrada no es igual a cero. Por ejemplo, el trabajo de la fuerza de rozamiento (o cualquier otra fuerza de resistencia) es siempre negativo, ya que la fuerza está dirigida en sentido contrario al desplazamiento. Es natural, que el trabajo de esta fuerza por cualquier trayectoria no se reduzca a cero.

§ 18.6. Energía potencial de las interacciones elásticas, de Coulomb y de gravitación

1. *La energía potencial* U de los cuerpos en interacción, es aquella que depende de la disposición recíproca de dichos cuerpos.

En todos los ejemplos que hemos examinado (fórmulas (18.6), (18.11), (18.12)) el trabajo de las fuerzas conservativas era igual a la diferencia de dos expresiones, funciones de las coordenadas del comienzo y el final de la trayectoria, es decir, a la variación de la energía potencial del sistema de cuerpos en interacción:

$$A = U_1 - U_2. \quad (18.16)$$

2. Comparando las fórmulas (18.6) y (18.16), obtenemos la siguiente expresión para *la energía potencial de las fuerzas*

elásticas:

$$U_{\text{elás}} = kx^2/2. \quad (18.17)$$

Queda claro, que la energía potencial es igual a cero para $x = 0$, en el caso cuando el resorte no está deformado.

3. La comparación análoga de las fórmulas (18.11) y (18.16) nos permite hallar la expresión de la energía potencial de las fuerzas de Coulomb:

$$U_{\text{Coul}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (18.18)$$

Notemos, que en este caso la energía potencial tiende a cero cuando la distancia entre las cargas en interacción crece infinitamente ($r \rightarrow \infty$). Si las cargas q_1 y q_2 tienen igual signo, entre ellas actúa la fuerza de repulsión, mientras que la energía potencial será una magnitud positiva. Si, por lo contrario, las cargas q_1 y q_2 tienen diferentes signos, entre ellas actúa la fuerza de atracción y la energía potencial será una magnitud negativa.

4. La energía potencial de las fuerzas de gravitación puede ser hallada comparando las fórmulas (18.12) y (18.16):

$$U_{\text{grav}} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r}. \quad (18.19)$$

Aquí la energía potencial es una magnitud negativa, ya que la fuerza de gravitación es una fuerza de atracción. Al aumentar ilimitadamente la distancia entre los cuerpos en interacción ($r \rightarrow \infty$), la energía potencial tiende a cero, es decir, *crece* a cuenta del trabajo de la fuerza externa, que aumenta la distancia entre los cuerpos que interactúan.

5. Tiene determinado interés el valor de la energía potencial de la fuerza de gravedad cerca de la superficie de la Tierra. En la expresión (18.16), hagamos la energía en la superficie terrestre $U_1 = 0$, mientras que designamos por U la energía U_2 a la altura h ; en lugar del trabajo de la fuerza de gravedad pongámosla en (18.13). Obtenemos

$$U = \frac{\gamma m M h}{R(R+h)}. \quad (18.20)$$

A pequeñas alturas ($h \ll R$) hallaremos la expresión aproximada

$$U = mgh. \quad (18.21)$$

Estas últimas dos fórmulas reciben con frecuencia el nombre de *energía potencial de un cuerpo en el campo gravitatorio*. Semejante terminología no es del todo exacta: en realidad no es el propio cuerpo el que posee energía potencial, sino el sistema formado por la Tierra y este cuerpo. No obstante, si esto no se olvida, remarcando la presencia del campo gravitatorio (creado por la Tierra), semejante definición no será contraproducente. De forma análoga podemos hallar la energía potencial de una carga en el campo eléctrico. Pero es inaceptable por completo, hablar simplemente de la energía potencial de un cuerpo, sin indicar el campo en el que él se halla.

6. Hay que notar, que la energía potencial puede ser definida con una precisión salvo un sumando constante arbitrario. En efecto, si añadimos a todos los valores de la energía potencial cierta constante, el nuevo valor de la energía potencial U' se expresará del modo siguiente:

$$U' = U + \text{const.}$$

Con semejante transformación de la energía potencial, el trabajo no varía. Efectivamente,

$$\begin{aligned} A' &= U'_1 - U'_2 = (U_1 + \text{const}) - (U_2 + \text{const}) = \\ &= U_1 - U_2 = A. \end{aligned}$$

Con frecuencia, el resultado obtenido se enuncia de la siguiente forma: *el nivel nulo de la energía potencial puede ser elegido al azar*; al pasar a otro nivel nulo, los valores de la energía potencial en todos los puntos, varían en un mismo sumando. En lo que se refiere al trabajo de la fuerza, éste conserva su valor.

Precisamente tomando en consideración esta propiedad, examinábamos con detalle el problema acerca del nivel nulo de la energía potencial de las interacciones elástica, de Coulomb y gravitatoria.

§ 18.7. Potencial del campo electrostático

1. En el cap. 10 hemos caracterizado el campo eléctrico mediante *la característica de fuerza*, es decir, con el vector de intensidad E . Sin embargo, podemos también introducir *la característica energética* del campo. o sea, la magnitud escalar φ , llamada *potencial*.

El potencial de un punto del campo es numéricamente igual a la razón entre la energía potencial de una carga de prueba puntiforme, ubicada en este punto del campo, y la magnitud de dicha carga:

$$\varphi = U/q. \quad (18.22)$$

Si la carga de prueba se desplaza de un punto del campo con potencial φ_1 a otro punto del campo con potencial φ_2 , en tal caso el campo realiza el trabajo

$$A = U_1 - U_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (18.23)$$

Así, pues, *el trabajo realizado por el campo eléctrico al desplazarse la carga de prueba de un punto del campo a otro, es igual al producto de la carga por la diferencia de potencial.*

2. Las fuerzas eléctricas son conservativas; su trabajo no depende de la forma de la trayectoria y se define sólo por los valores del potencial en los puntos inicial y final del recorrido. De aquí se desprende que el campo eléctrico potencial no es capaz de obligar a las cargas eléctricas a desplazarse por una trayectoria cerrada.

3. En el SI, la unidad de potencial es *el voltio* (V). El voltio es igual al potencial de un punto del campo en el que una carga de prueba de 1 C posee una energía potencial de 1 J. Es natural, que si la diferencia de potencial entre dos puntos del campo es igual a 1 V, las fuerzas eléctricas, desplazando una carga de prueba de 1 C entre estos puntos, realizan un trabajo igual a 1 J:

$$1\text{V} = \frac{1\text{J}}{1\text{C}}.$$

Ahora ya podemos fundamentar el sentido de la unidad de energía llamada *electronvoltio*, introducida en el § 16.6; un electronvoltio es la energía adquirida por una partícula que porta una carga elemental (es decir, la carga del electrón), al moverse entre dos puntos del campo entre los que la diferencia de potencial es igual a 1 V. Como $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C y $\varphi_1 - \varphi_2 = 1$ V,

$$1\text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

§ 18.8. Potencial del campo de una carga puntual

1. Si designamos por Q la carga puntual que crea el campo y por q la carga de prueba, de acuerdo con (18.18) la energía potencial de la carga de prueba a la distancia r

de la fuente del campo, tomará la forma

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (18.24)$$

De aquí se desprende que el potencial del campo de una carga puntiforme, es igual a

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (18.25)$$

De esta expresión sigue que el potencial del campo de una carga puntual se reduce a cero en un punto infinitamente alejado. Sin embargo, semejante elección del nivel nulo del potencial, aunque es cómoda, no es del todo obligatoria. En principio, el potencial nulo se puede elegir en cualquier punto del campo (véase el § 18.6, p. 6). Por esta causa, en un mismo sumando constante cambiarán los potenciales de todos los puntos del campo, pero el trabajo de las fuerzas eléctricas quedará invariable, ya que éste no es función de los valores absolutos de los potenciales, sino que de la diferencia de potencial, que con lo indicado no varía su valor.

2. De forma análoga al potencial del campo eléctrico, podemos introducir el concepto de potencial del campo gravitatorio. El potencial del campo de una partícula de masa M a una distancia r de ella, según (18.19), es igual a

$$\varphi_{\text{grav}} = -\gamma M/r. \quad (18.26)$$

En este caso, el potencial se reduce a cero en un punto infinitamente alejado. Si suponemos que el potencial es igual a cero en la superficie de la Tierra, de acuerdo con (18.20), el potencial del campo gravitatorio a la altura h sobre la superficie terrestre, será igual a

$$\varphi_{\text{grav}} = \frac{\gamma M h}{R(R+h)} = gh \frac{R}{R+h}. \quad (18.27)$$

A alturas no grandes ($h \ll R$), tendremos aproximadamente

$$\varphi_{\text{grav}} = gh. \quad (18.28)$$

§ 18.9. Energía del campo eléctrico

La energía potencial de dos cargas q_1 y q_2 , como fue mostrado en el § 18.6, es igual a

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Pero la expresión $q_1/(4\pi\epsilon_0 r) = \varphi_1$ es el potencial del campo creado por la carga q_1 en el punto donde se encuentra la carga q_2 ; la expresión $q_2/(4\pi\epsilon_0 r) = \varphi_2$ es el potencial del campo creado por la carga q_2 en el punto donde se halla la carga q_1 . Por esta causa, la expresión para la energía potencial de dos cargas en interacción, puede ser escrita de la forma siguiente:

$$U = q_1\varphi_2 = q_2\varphi_1. \quad (18.29)$$

La semisuma de dos magnitudes iguales, es igual a cada una de ellas; por consiguiente,

$$U = 1/2 (q_1\varphi_2 + q_2\varphi_1). \quad (18.30)$$

Para un conjunto de muchas cargas, la energía potencial se calcula del mismo modo, es decir, como la semisuma de los productos de cada carga por la suma de los potenciales de los campos creados por todas las cargas, salvo el creado por sí misma: q_1 se multiplica por la suma de todos los potenciales, pero sin φ_1 ; q_2 , por la suma de todos los potenciales, salvo φ_2 , etc. La causa reside en que el campo creado por cierta carga inmóvil, actúa sobre cualesquiera otras cargas, pero no sobre la carga que lo crea.

Capítulo 19

LEY DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA EN LA MECÁNICA NEWTONIANA

§ 19.1. Energía mecánica y su conservación

1. Estudiemos un sistema de cuerpos en el que sólo actúan fuerzas conservativas. *Llamamos energía mecánica total de un sistema, la suma de las energías cinética y potencial:*

$$W = K + U. \quad (19.1)$$

En la mecánica newtoniana esta magnitud juega un papel de importancia exclusiva.

2. Supongamos que el sistema conservativo de cuerpos que examinamos es cerrado. Esto significa que en él sólo

actúan fuerzas internas. De la correlación (16.14) se desprende que el trabajo de las fuerzas internas es igual a la variación de la energía cinética, mientras que de (18.16), que el trabajo es igual al cambio de la energía potencial. Así, pues,

$$A = K_2 - K_1 \quad \text{y} \quad A = U_1 - U_2.$$

Igualando los segundos miembros de estas expresiones, obtenemos

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2,$$

o bien

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1. \quad (19.2)$$

Por consiguiente, la suma de las energías cinética y potencial, es decir, la energía mecánica del sistema es invariable:

$$W = K + U = \text{const.} \quad (19.3)$$

Hemos hallado *la ley de la conservación de la energía en la mecánica newtoniana*. Puede ser enunciada del modo siguiente: *la energía mecánica de un sistema conservativo cerrado permanece constante*.

§ 19.2. Energía mecánica y rozamiento

La ley de la conservación de la energía en la mecánica newtoniana, que hemos enunciado con anterioridad, en cierto grado es una idealización de las condiciones del experimento real. En verdad, en todo sistema verídico de cuerpos, actúan las fuerzas de rozamiento, que no son conservativas. Por esta razón, la ley de la conservación de la energía mecánica se cumple sólo de forma aproximada y con tanta mayor precisión, cuanto menores sean las fuerzas de rozamiento en comparación con las elásticas, eléctricas o gravitatorias.

La experiencia nos muestra que existen tales sistemas en los que las fuerzas de rozamiento, con la primera aproximación, pueden ser despreciadas. En semejante caso, los cálculos realizados sobre la base de la ley de la conservación de la energía mecánica se confirman en la práctica.

Si las fuerzas de rozamiento no pueden ser despreciadas, es posible introducir una corrección que tome en consideración el rozamiento. Entonces, la ley de la conservación de

la energía mecánica será escrita de la siguiente forma:

$$W_1 = W_2 + A_{\text{roz}}, \quad (19.4)$$

donde W_1 y W_2 son las energías mecánicas al comenzar y finalizar el proceso; A_{roz} , el trabajo de las fuerzas de rozamiento.

Más adelante, serán examinados ciertos procedimientos de aplicación de la ley de la conservación de la energía mecánica.

§ 19.3. Velocidades cósmicas

1. Tratemos de calcular, qué velocidad hay que comunicarle a un cohete para que entre en órbita circular alrededor de la Tierra. Designemos su velocidad orbital por v_{orb} , la velocidad de lanzamiento v , el radio de la órbita r (fig. 19.1).

Sobre el cohete en movimiento por una órbita circular, está aplicada la fuerza de gravitación de la Tierra que le comunica aceleración normal $a = v_{\text{orb}}^2/r$. De acuerdo con la segunda ley de Newton

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = \frac{mv_{\text{orb}}^2}{r}. \quad (19.5)$$

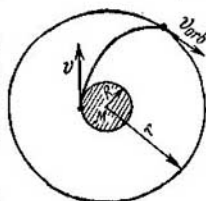


Fig. 19.1.

Pero nos interesa no la velocidad orbital, sino la de lanzamiento. Para definirla hagamos uso de la ley de la conservación de la energía en la mecánica newtoniana; la suma de las energías potencial y cinética en la superficie terrestre y en la órbita son iguales:

$$K_{\text{sup}} + U_{\text{sup}} = K_{\text{orb}} + U_{\text{orb}}, \quad (19.6)$$

o bien

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma mM}{R} = \frac{mv_{\text{orb}}^2}{2} - \frac{\gamma mM}{r}. \quad (19.7)$$

Teniendo en cuenta (19.5), tenemos

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma mM}{R} = \frac{\gamma mM}{2r} - \frac{\gamma mM}{r}.$$

En definitiva, obtenemos

$$v = \sqrt{\gamma M \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{r} \right)}. \quad (19.8)$$

Hemos realizado los cálculos sin tener en cuenta la resistencia del aire. En condiciones reales, cuando el cohete se lanza a la atmósfera, la velocidad de lanzamiento debe ser aumentada. Sin embargo, el cálculo de la velocidad real de lanzamiento es muy complicado y no puede ser realizado aquí.

2. Calculemos la primera velocidad cósmica, es decir, la velocidad de lanzamiento, cuando el cohete se mueve a poca distancia de la superficie terrestre. En este caso $r \approx R$, por lo que

$$v_1 = \sqrt{\gamma M \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{r} \right)} = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}. \quad (19.9)$$

Como para pequeñas alturas $g = \gamma M/R^2$, entonces

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{gR} = \sqrt{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}} = \\ &= 7,91 \cdot 10^3 \text{ m/s} \approx 8 \text{ km/s}. \end{aligned}$$

Es decir, la primera velocidad cósmica es igual a 8 km/s.

3. Recibe el nombre de *segunda velocidad cósmica*, aquella velocidad de lanzamiento del cohete a la que éste abandona el campo de gravedad de la Tierra y se convierte en un planeta artificial. En este caso, se puede suponer que el cohete entrará en una órbita infinitamente alejada. Poniendo en (19.8) $r \rightarrow \infty$, tenemos

$$v_2 = \sqrt{2\gamma M/R} = v_1 \sqrt{2} = 7,91 \cdot 1,414 = 11,2 \text{ km/s}.$$

La segunda velocidad cósmica es casi una vez y media mayor que la primera.

§ 19.4. "Rizo del diablo"

Sea que un ciclista rueda sin girar los pedales por la pista vertical del «rizo del diablo» (fig. 19.2). Hay que determinar la altura mínima H desde la que debe comenzar la bajada, para que el ciclista no caiga del punto superior del rizo, es decir, en el sector más peligroso de la trayectoria.

En el punto superior sobre el ciclista actúan dos fuerzas: la de gravedad $P = mg$ y la reacción del apoyo de la superficie interior de la pista Q ; su resultante comunica al ciclista aceleración normal $a = v^2/r$. De acuerdo con la segunda ley de Newton

$$mg + Q = mv^2/r, \quad (19.10)$$

Para hallar la velocidad en el punto superior del rizo, hagamos uso de la ley de la conservación de la energía: la energía potencial

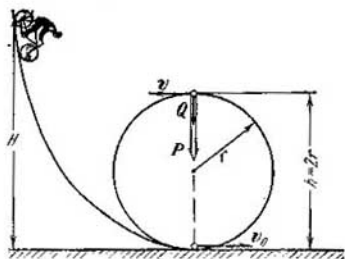


Fig. 19.2.

al comenzar la bajada (a la altura H) debe ser igual a la suma de las energías cinética y potencial en el punto superior del rizo (a la altura $h = 2r$),

$$mgH = mg \cdot 2r + \frac{mv^2}{2} \text{ o bien } H = 2r + \frac{v^2}{2g}.$$

Poniendo el valor de v^2 de (19.10), tenemos

$$H = \frac{5r}{2} + \frac{Qr}{2mg}.$$

La altura mínima (sin tener en cuenta el rozamiento) se obtiene si en el punto superior del rizo, el ciclista se desliza casi sin hacer contacto con la pista. Entonces la reacción del apoyo $Q = 0$ y $H = 2,5 r$.

§ 19.5. Curvas potenciales

1. Con frecuencia, un punto material puede moverse sólo por cierta curva prefijada, por ejemplo, a lo largo del eje de abscisas. En tal caso, su energía potencial depende solamente de una variable, o sea, $U = f(x)$. La gráfica que muestra la dependencia entre la energía potencial y la distancia, es llamada *curva potencial*. Resulta, que el análisis de la forma de esta gráfica nos ofrece amplia información acerca del carácter del movimiento del punto.

Como ejemplo, examinemos el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza elástica (fig. 19.3). Con $x = x_0$ el resorte no está deformado y la fuerza aplicada a la partícula es igual a cero. Cuando la partícula se desvía

de la posición de equilibrio, sobre ella actúa una fuerza $F = -k(x - x_0)$. Notemos, que con $x > x_0$ la fuerza es negativa (atracción), mientras que con $x < x_0$, positiva (repulsión).

La energía potencial de la partícula (véase (18.17)), es igual a

$$U = \frac{k(x - x_0)^2}{2}. \quad (19.11)$$

Se representa en la gráfica (fig. 19.3) en forma de una parábola con el vértice en el punto $x = x_0$. En lo que se refiere a la energía mecánica de la partícula $W = K + U$, ésta es una magnitud constante y se representa en la gráfica con una línea recta paralela al eje de abscisas.

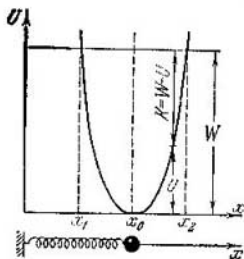


Fig. 19.3.

Ante todo, en la gráfica vemos que la energía cinética puede ser hallada de inmediato en cualquier punto como la longitud del segmento desde la recta W hasta la parábola, ya que $K = W - U$. Para $x = x_0$, la partícula tendrá el valor máximo de la energía cinética; aquí $U = 0$

y $K_{\text{máx}} = W$. En los puntos $x = x_1$ y $x = x_2$ la energía cinética de la partícula es nula, ya que aquí $U_{\text{máx}} = W$.

Además, en la gráfica vemos que la partícula no puede desplazarse tras el punto x_2 a la derecha y tras el punto x_1 , a la izquierda. En efecto, la energía cinética no puede ser magnitud negativa y, por consiguiente, la energía potencial no puede ser mayor que la energía total*). En semejante caso decimos que la partícula se encuentra en el pozo de potencial con coordenadas $x_1 \leq x \leq x_2$.

2. El análisis de la inclinación de la curva de potencial permite determinar con rapidez el signo de la fuerza y, con ello, el carácter de su actuación (atracción o repulsión). En realidad, el trabajo elemental $\Delta A = F \Delta x$; por otro lado, $\Delta A = U_1 - U_2 = -\Delta U$. Entonces, si la fuerza es

* La mecánica cuántica introduce en esta deducción notables correcciones relacionadas con la naturaleza singular de las micropartículas y con el principio de incertidumbre (§§ 70.2—70.6).

función sólo de una coordenada, por ejemplo, de la abscisa x , $F \Delta x = -\Delta U$ o bien

$$F = -\Delta U / \Delta x.$$

Pero en la gráfica $\Delta U / \Delta x = \operatorname{tg} \alpha$, donde α es el ángulo de inclinación de la curva de potencial respecto del eje de abscisas (fig. 19.4). Hablando con propiedad, el valor exacto de la fuerza será sólo obtenido en el límite, cuando el desplazamiento Δx tiende a cero:

$$F_x = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{dU}{dx} = -U'(x). \quad (19.12)$$

Así, pues, en los sistemas conservativos la fuerza es igual a la derivada de la energía potencial por la coordenada, tomada con signo opuesto.

Cuando la energía potencial crece, la curva de potencial forma con el eje de abscisas un ángulo agudo. La tangente

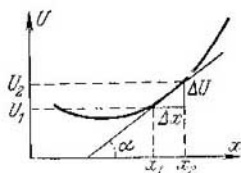


Fig. 19.4.

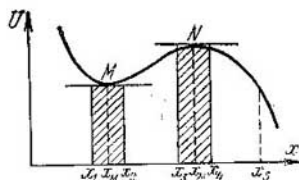


Fig. 19.5.

de semejante ángulo es un número positivo, mientras que la fuerza tiene signo contrario, es decir, negativo; por consiguiente, esta fuerza es de atracción.

Si, por lo contrario, la energía potencial decrece, la curva de potencial forma con el eje de abscisas un ángulo obtuso, cuya tangente es un número negativo. En tal caso, la fuerza será positiva, o sea, de repulsión.

Por fin, en los puntos del mínimo y máximo de energía la fuerza, como es lógico, será igual a cero, ya que en el entorno de estos puntos ella cambia de signo. En la gráfica la tangente a la curva de potencial en estos puntos es paralela al eje de abscisas (fig. 19.5).

Proponemos que el lector demuestre por su cuenta que en el caso representado en la fig. 19.6 la partícula con

energía total $W < U_0$, se hallará o en el pozo de potencial $x_1 \leq x \leq x_2$, o bien se alejará a un punto infinitamente distanciado; en lo que atañe a la barrera de potencial $x_2 \leq$

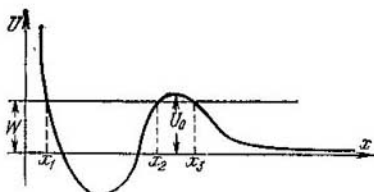


Fig. 19.6.

$\leq x \leq x_3$, esta partícula no podrá vencerla ni por la izquierda ni por la derecha.

3. Hay que prestar atención a una interesantísima propiedad de la energía potencial. Si la distancia entre las

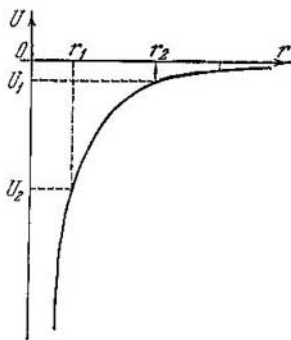


Fig. 19.7.

partículas que se atraen disminuye, también decrece la energía potencial, mientras que la fuerza de atracción aumenta. Y a la inversa, el aumento de la distancia entre dichas partículas se acompaña por el crecimiento de la energía potencial y por el decrecimiento de la fuerza de atracción.

Esta propiedad es del todo general y justa para toda fuerza de atracción. Bien es verdad, que su demostración en forma general es algo difícil y aquí no vamos a realizarla. La comprobación de

su justeza, tomando como ejemplo las fuerzas de Coulomb y de gravitación, lo dejamos a cuenta del lector.

Con este fin es conveniente analizar la curva de potencial de la interacción gravitatoria entre dos puntos materiales, mostrada en la fig. 19.7 y comparar la energía y la fuerza en los puntos con coordenadas r_1 y r_2 . Al construir la curva

suponíamos que la energía potencial era igual a cero con una distancia infinitamente grande entre los puntos en interacción (véase (18.19)). No obstante, esto no tiene importancia de principio: el resultado de los razonamientos no depende en absoluto de donde se ha elegido el nivel nulo de la energía potencial.

§ 19.6. Energía potencial y equilibrio

1. El análisis de las curvas de potencial permite juzgar acerca de las condiciones de equilibrio de cierto cuerpo (con mayor precisión, de un punto material).

Un cuerpo se halla en equilibrio si es igual a cero la resultante de todas las fuerzas aplicadas a él. Es lógico, que al equilibrio corresponden los puntos con la energía potencial mínima o máxima (los puntos M y N en la fig. 19.5), ya que precisamente en estos puntos la fuerza se reduce a cero. Sin embargo, los puntos del máximo o mínimo de energía no son equivalentes.

Efectivamente, supongamos que una partícula yace en el punto x_M , donde la energía potencial es la mínima. En el sector $x_1 \leq x < x_M$ dicha energía disminuye, por consiguiente, sobre la partícula está aplicada una fuerza positiva de repulsión, que la retorna al punto M . En el sector $x_M < x \leq x_2$ la energía potencial aumenta; es decir, sobre la partícula actúa la fuerza negativa de atracción, que de nuevo retorna la partícula al punto M .

Así, pues, si la partícula que se halla en el punto con el valor mínimo de la energía potencial se saca de este estado, bajo la acción de las fuerzas retornará a ese mismo punto. Llegamos a la conclusión de que *el valor mínimo de la energía potencial es la condición de equilibrio estable.*

Efectuando razonamientos análogos para el punto N , en el que la partícula posee el máximo valor de la energía potencial, el lector puede cerciorarse de que aquí las fuerzas, aplicadas en sus entornos más próximos, no retornarán la partícula a dicho punto. De esta forma, *el máximo de energía potencial caracteriza el estado de equilibrio inestable* (lábil).

2. Al analizar las condiciones de equilibrio, sólo hemos considerado *el entorno más próximo* de la parte del campo que nos interesa. Por éste se entiende tal dominio, en el que no hay máximos y mínimos complementarios de energía. Si no se presta atención a semejante condición, podemos llegar a conclusiones erróneas.

Por ejemplo, analizando las fuerzas que actúan sobre una partícula, desplazada a la derecha de la posición de equilibrio estable ($x_2 > x_N$), afirmábamos que dichas fuerzas serían de atracción. Pero esto será sólo justo mientras la partícula quede a la izquierda del máximo de energía. Pero si ésta se desplaza más a la derecha, por ejemplo, hasta el punto $x_2 > x_N$ (véase la fig. 19.5), obtendremos una fuerza de repulsión y, por lo tanto, la partícula no retornará a su posición anterior.

Capítulo 20

ENERGÍA INTERNA

§ 20.1. Energía interna de un sistema de partículas

1. En el cap. 16 fue mostrado que la energía total de un cuerpo puede ser representada como la suma de las energías cinética y en reposo. La primera es función de la velocidad de movimiento con relación al sistema de referencia elegido, o sea, respecto de los cuerpos externos.

La energía en reposo depende de los procesos que transcurren en el interior del cuerpo que consideramos, por esto, de otro modo, recibe el nombre de *energía interna*.

2. Supongamos que un cuerpo con masa en reposo M_0 consta de N partículas, cuya masa es $m_0^{(1)}, m_0^{(2)}, \dots, m_0^{(N)}$. Sea, a continuación, que dichas partículas se mueven a velocidades arbitrarias v_1, v_2, \dots, v_N , pero de forma que el centro de masas queda inmóvil en el sistema de referencia dado, o sea, que $m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_N v_N = 0$. Para finalizar, supongamos que estas partículas se encuentran, unas de otras, a considerables distancias, de modo que con la primera aproximación podemos despreñar la interacción recíproca entre ellas.

A primera vista puede parecer que la energía en reposo del cuerpo es simplemente igual a la suma de la energía en reposo de las partículas de que éste consta. Pero semejante conclusión es errónea. En efecto, aunque el cuerpo está en reposo en lo que atañe al sistema de referencia, las partículas que constituyen el cuerpo, se mueven de forma determinada. Por esta causa, *la energía interna del cuerpo* \mathcal{E}_0

(o sea, la energía en reposo) es igual a la suma de las energías totales de las partículas de las que consta el cuerpo:

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}^{(1)} + \mathcal{E}^{(2)} + \dots + \mathcal{E}^{(N)}. \quad (20.1)$$

Tomando en consideración que de acuerdo con (16.3) $\mathcal{E}^{(i)} = \mathcal{E}_0^{(i)} + K^{(i)}$, donde i es el número de la partícula, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} + K^{(1)} + K^{(2)} + \dots \\ &\dots K^{(N)} = \mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} + K_{\text{int}}, \end{aligned} \quad (20.2)$$

en donde $K_{\text{int}} = K^{(1)} + K^{(2)} + \dots + K^{(N)}$ es la energía cinética sumaria del movimiento interno de las partículas de las que el cuerpo está constituido.

3. Más arriba, hemos examinado un sistema de partículas que no interactúan. Pero en realidad en todos los cuerpos (salvo en los gases enrarecidos) las partículas interactúan entre sí con bastante intensidad. Por regla, la interacción se limita por la atracción. La energía potencial de las fuerzas de atracción es una magnitud *negativa*, ya que al no haber fuerzas de interacción hemos considerado que la energía potencial era igual a cero (§ 18.6).

Designemos por U_{int} la energía potencial de interacción de las partículas. En realidad U_{int} es la energía de los campos con los que se efectúa la interacción entre las partículas dentro del cuerpo. Entonces, generalizando la fórmula (20.2) para el caso de las partículas que interactúan entre sí, obtenemos

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} + K_{\text{int}} + U_{\text{int}}. \quad (20.3)$$

Así, pues, la energía interior del cuerpo es igual a la suma de las energías en reposo de las partículas de las que éste consta, más la energía cinética sumaria de dichas partículas y la energía potencial de los campos que efectúan la interacción entre las partículas.

4. Si dividimos (20.3) por c^2 y tenemos en cuenta que $\mathcal{E}_0/c^2 = M_0$ es la masa en reposo del cuerpo, mientras que $\mathcal{E}_0^{(i)}/c^2 = m_0^{(i)}$, la masa en reposo de cierta partícula de número i , tendremos

$$M_0 = m_0^{(1)} + m_0^{(2)} + \dots + m_0^{(N)} + \frac{1}{c^2} (K_{\text{int}} + U_{\text{int}}). \quad (20.4)$$

De este modo, resulta que en el caso general, la masa en reposo del cuerpo no es igual a la suma de las masas en reposo de las partículas que constituyen el cuerpo.

En particular, al haber grandes fuerzas de atracción, el valor absoluto de la energía potencial de los campos puede ser mucho mayor que la energía cinética sumaria del movimiento interno. Pero como la energía potencial de las fuerzas de atracción es un número negativo, puede resultar que $K_{\text{int}} + U_{\text{int}} < 0$. Por consiguiente, en semejante caso, la masa en reposo del cuerpo será menor que la suma de las masas en reposo de las partículas, de las que consta éste.

Con este fenómeno tropezaremos en el segundo tomo, al estudiar las fuerzas nucleares y los métodos de obtención de la energía del núcleo (§§ 80.4, 82.7—82.12).

§ 20.2. Variación de la energía interna al deformarse el cuerpo

1. Bajo la acción de una fuerza el cuerpo se deforma, es decir, cambia sus dimensiones y forma. La deformación del cuerpo está ligada con la variación de la distancia entre las moléculas y, por lo tanto, con el cambio de la energía de interacción molecular. Por consiguiente, *la deformación de un cuerpo se ve acompañada de la variación de su energía interna.*

Ya que la energía interna del cuerpo cambia, también varía su masa. ¿Por qué no lo advertimos? El siguiente ejemplo nos permitirá responder a esa pregunta.

Bajo la acción de una fuerza $F = 2 \cdot 10^6$ N, una barra de acero de longitud $l = 1$ m y sección $S = 1$ cm² se alarga en $\Delta l = 1$ mm. El trabajo de la fuerza elástica

$$A = \frac{kx^2}{2} = \frac{F\Delta l}{2} = 10 \text{ J.}$$

Pero éste es igual a la variación de la energía interna de la barra: $A = \Delta \mathcal{E}_0$. La variación de su masa

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{10}{9 \cdot 10^{16}} = 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ kg.}$$

Pero la masa de la barra antes de la deformación

$$m = \rho l S = 7,8 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 0,78 \text{ kg.}$$

Como nos muestra el cálculo, la variación de la masa del cuerpo es pequeñísima, ¡sólo se advierte en el décimo sexto signo después de la coma! No hay instrumentos que sean

capaces de revelar una magnitud tan pequeña. Por esta razón, las variaciones de la masa del cuerpo, al deformarse éste, son despreciadas en la práctica.

2. Calculemos en cuanto variará la energía de una molécula al deformarse el cuerpo. Un kilogramo de acero contiene 10^{25} moléculas. Nuestra barra de masa igual a 0,78 kg consta de $N = 0,78 \cdot 10^{25}$ moléculas. En tal caso, la variación de la energía de una molécula

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{10}{0,78 \cdot 10^{25}} = 1,3 \cdot 10^{-24} \text{ J.}$$

Es más cómodo expresar esta energía en electronvoltios. Como ya hemos indicado, $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, por tanto

$$\varepsilon = \frac{1,3 \cdot 10^{-24}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-5} \text{ eV.}$$

Así, pues, la variación de la energía de una molécula al deformarse el cuerpo constituye varias millonésimas partes de un electronvoltio. Más abajo vamos a comparar esta magnitud con la variación de la energía de una molécula con otros procesos.

§ 20.3. Variación de la energía interna del cuerpo con los procesos térmicos

1. Reciben el nombre de térmicos, aquellos procesos que están ligados con el cambio de su *estado de agregación*, es decir, fusión o solidificación, evaporación o condensación. Con detalle, estos procesos serán examinados más adelante. Aquí nos limitaremos a dar una característica general de ellos desde el punto de vista de la variación de la energía interna.

El cambio de la temperatura de un cuerpo está ligado con la variación de la energía cinética de movimiento de sus moléculas. No obstante, hay que remarcar que de modo simultáneo cambia también la energía potencial de sus interacciones (salvo en el caso de un gas enrarecido). En efecto, el cambio de temperatura es acompañado por la variación de la distancia entre las posiciones de equilibrio en los nodos de la red cristalina del cuerpo, lo que registramos como cambio de las dimensiones del cuerpo al variar la temperatura. Es natural, que con esto cambia la energía de interacción de las moléculas. En lo que se refiere al

cambio del estado de agregación, éste es resultado de la variación de la estructura molecular, lo que se provoca por el cambio tanto de la energía de interacción de las moléculas, como también por el carácter de su movimiento.

Así, pues, *los procesos térmicos son acompañados por la variación de la energía interna del cuerpo.*

2. Valoremos en cuanto cambia la energía de una molécula en los procesos térmicos. Como sabemos, al aumentar 1°C la temperatura de 1 kg de agua se absorbe una energía igual a $4,18 \cdot 10^3$ J. Un kilogramo de agua contiene $3,3 \cdot 10^{26}$ moléculas. Por lo tanto

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{4,18 \cdot 10^3}{3,3 \cdot 10^{26} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-3} \text{ eV.}$$

Esta energía es, aproximadamente, 100 veces mayor que con las deformaciones elásticas. Por otro lado, al transformarse 1 kg de agua en vapor se absorben $2,25 \cdot 10^6$ J. En semejante caso la energía de la molécula aumenta, más o menos,

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{2,25 \cdot 10^6}{3,3 \cdot 10^{26} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 0,5 \text{ eV.}$$

3. A pesar de que con los procesos térmicos la energía interna crece miles de veces más que con las deformaciones elásticas, con dichos procesos tampoco es posible medir la variación de la masa. En efecto, si al evaporarse 1 kg su energía aumenta $2,25 \cdot 10^6$ J, la masa crecerá en la siguiente magnitud

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{2,25 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^{16}} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ kg}$$

lo que está muy lejos de los límites de sensibilidad de los instrumentos de medida.

§ 20.4. Variación de la energía interna durante las reacciones químicas

1. Las reacciones químicas son procesos de reestructuración de las moléculas, su descomposición en partes más sencillas o, por lo contrario, procesos de surgimiento de moléculas más complicadas formadas por otras más simples o por átomos aislados (reacciones de análisis y síntesis). Con ello, varían considerablemente las fuerzas de interacción entre los átomos, lo que se acompaña por la corres-

pondiente variación de la energía de interacción. Además, cambia el carácter tanto de las moléculas, como la interacción entre ellas, ya que las moléculas de la sustancia creada de nuevo interactúan entre sí de forma diferente que las moléculas de las sustancias iniciales.

Así, pues, *las reacciones químicas son acompañadas de la variación de la energía interna del cuerpo.*

Notemos, que las reacciones químicas siempre se acompañan por procesos térmicos, es decir, cambio de la temperatura y, con frecuencia, del estado de agregación del sistema. Por ejemplo, al quemarse el carbono sólido forma productos gaseosos: monóxido de carbono y bióxido de carbono (gas carbónico).

2. Vamos a valorar la energía de una molécula durante las reacciones químicas. Al quemarse 1 kg de carbón se desprende, aproximadamente, una energía igual a $3 \cdot 10^7$ J. Como un kilogramo de carbón consta de $5 \cdot 10^{25}$ átomos de carbón, la variación de la energía de una molécula constituirá

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{3 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^{25} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 4 \text{ eV.}$$

Por consiguiente, durante las reacciones químicas la variación de la energía de una molécula constituye varios electronvoltios, es decir, cientos y miles de veces más que con los procesos térmicos y millones de veces más que durante las deformaciones elásticas.

Señalemos, que esta energía coincide con el valor medio de la energía cinética de un electrón, localizado en el átomo (§ 16.7). Semejante hecho era de esperar, ya que las reacciones químicas se reducen a la reestructuración de las capas electrónicas de los átomos y las moléculas.

Sin embargo, también en este caso la variación de la masa de los cuerpos en interacción es tan pequeña, que está fuera de la precisión de los instrumentos de medida: se advertirá sólo en la décima cifra significativa y con semejante exactitud no sabemos medir la masa. En realidad, al quemar 1 kg de carbón

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{3 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^{16}} = 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ kg.}$$

§ 20.5. Variación de la energía interna en las reacciones nucleares

1. A ciertas condiciones, los núcleos de los átomos sufren transformaciones que reciben el nombre de *reacciones nucleares*. Independientemente del mecanismo de los procesos que transcurren en tal caso (los que pueden ser muy variados), todos ellos están ligados con una considerable variación de la energía de interacción de las partículas. Por consiguiente, *las reacciones nucleares se acompañan por la variación de la energía interna del cuerpo* en el que se encuentran los núcleos que sufren las correspondientes transformaciones. Esto permite valorar el rendimiento energético de la reacción, según las masas de las partículas iniciales y los productos de la reacción conocidos (§ 80.4).

Resulta que si 1 kg de hidrógeno pesado (deuterio) se convierte en helio, como resultado de esta reacción se obtienen, en total, 993,75 g de helio, o sea, que la masa en reposo disminuye $\Delta m_0 = 6,25$ g. Tal variación de la masa (el 0,6%) ya puede ser medida con instrumentos sensibles.

La variación de la energía interna con esta reacción constituirá

$$\Delta \mathcal{E}_0 = \Delta m_0 c^2 = 6,25 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 5,62 \cdot 10^{14} \text{ J.}$$

Para comparar, calculemos cuánto carbón hay que quemar para producir una cantidad igual de energía:

$$m_{\text{car}} = \frac{5,62 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^7} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ kg}$$

(aquí $3 \cdot 10^7$ J es la energía que se desprende al quemarse 1 kg de carbón). Tomando en consideración que un vagón puede sólo contener 50 t de carbón, obtenemos que al transformarse 1 kg de deuterio en helio se desprende una cantidad de energía igual a la que obtendríamos al quemar el carbón contenido en 400 vagones.

2. Apreciemos la variación de la energía de un núcleo durante semejante género de reacciones. Un kilogramo de helio contiene $1,5 \cdot 10^{26}$ átomos, por lo tanto,

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{5,62 \cdot 10^{14}}{1,5 \cdot 10^{26} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,34 \cdot 10^7 \text{ eV} = 23,4 \text{ MeV.}$$

Esta energía es millones de veces mayor que la de las reacciones químicas y miles de millones de veces mayor que la energía de los procesos térmicos.

Notemos, que estas cifras también caracterizan el orden de las fuerzas nucleares en comparación con las fuerzas de interacción entre los átomos y las moléculas.

Capítulo 21

LEY DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

§ 21.1. El trabajo como medida de la variación de las energías total e interior

1. En el § 20.2 hemos puesto en claro que con las deformaciones de un cuerpo, cambian las distancias entre las partículas de que aquél está constituido. Este hecho lleva a la variación de la energía interna del cuerpo.

Además, con las deformaciones inelásticas cambia la temperatura del cuerpo, de lo que nos cercioramos con facilidad con un experimento. Si doblamos con rapidez varias veces un trozo de alambre, en el lugar de la flexión la temperatura crece bruscamente, lo que se puede sentir tocando el alambre con el dedo en dicho lugar.

Pero durante la deformación del cuerpo se realiza trabajo. Este es, precisamente, la medida de variación de la energía interna.

2. También cambia la energía interna de un cuerpo durante el choque inelástico de éste con otro cuerpo. Con esto, como mostramos en el (§ 17.2), la energía cinética de los cuerpos que chocan disminuye. Pero de aquí de ningún modo se deduce que la energía cinética desaparece por completo. Es fácil cerciorarse de que ella se convierte en la energía interna del cuerpo.

Hagamos el siguiente experimento. Coloquemos un trozo de alambre en un yunque y golpeemos contra él varias veces fuertemente con un martillo. Si después de esto tocamos el sector golpeado del alambre nos convenceremos de que la temperatura ha crecido considerablemente.

Como vemos, con un golpe inelástico la energía cinética de los cuerpos se convierte en interna. Pero la medida de la variación de la energía cinética es el trabajo de la fuerza. Es natural, que el trabajo de esa misma fuerza puede servir de medida de la variación de la energía interna.

3. Por fin, la variación de la energía interna transcurre bajo la acción de la fuerza de rozamiento, ya que, como sabemos de la práctica, el rozamiento siempre es acompañado por la variación de la temperatura de los cuerpos en rozamiento. Es natural, que el trabajo de la fuerza de rozamiento pueda servir de medida de la variación de la energía interna.

4. Los ejemplos aducidos nos permiten establecer una ligazón más general, de la que mostramos en el cap. 16, entre el trabajo de una fuerza y la variación de la energía.

Supongamos que la energía total de un cuerpo en cierto estado es igual a $\mathcal{E}^{(1)} = \mathcal{E}_0^{(1)} + K^{(1)}$. Si sobre el cuerpo actúa cierta fuerza externa, el estado de éste variará; en correspondencia también cambiará su energía total que se hará igual a $\mathcal{E}^{(2)} = \mathcal{E}_0^{(2)} + K^{(2)}$. La variación de la energía $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)} = (\mathcal{E}_0^{(2)} - \mathcal{E}_0^{(1)}) + (K^{(2)} - K^{(1)})$ o de forma más corta

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta\mathcal{E}_0 + \Delta K. \quad (21.1)$$

Pero nosotros ya sabemos que el trabajo de la fuerza externa puede hacer que varíe tanto la energía cinética, como la interna del cuerpo, es decir, su energía total. Por esto, podemos escribir

$$\Delta\mathcal{E} = A_{\text{ext}}, \quad (21.2)$$

o sea, que *el trabajo de una fuerza externa es la medida de variación de la energía total del cuerpo.*

§ 21.2. Transmisión de calor

1. Existe otro procedimiento para la variación de la energía del cuerpo que no está relacionado con el trabajo de una fuerza. Si ubicamos un cuerpo en la llama de un quemador su temperatura cambiará y, por consiguiente, también variará su energía interna. Metiendo después el cuerpo caliente en agua fría, nos cercioraremos de que su temperatura de nuevo ha cambiado, lo que otra vez está ligado con la variación de su energía. No obstante, en este caso no se ha realizado ninguna clase de trabajo, ya que no se produjo un desplazamiento visible ni del cuerpo, ni de sus partes aisladas bajo la acción de ciertas fuerzas.

En realidad, aquí la variación de la energía interna del cuerpo transcurrió por la acción de colisiones moleculares

recíprocas. En el cuerpo caliente las moléculas se mueven a mayores velocidades, en el cuerpo frío, a menores. Durante el contacto entre estos dos cuerpos se producen choques elásticos entre las moléculas. Al chocar una partícula en rápido movimiento con otra, que posee menor velocidad, le transmite parte de su energía cinética. Como es natural, durante el contacto de dos cuerpos con diferente temperatura, a cuenta de los choques entre las moléculas, la energía cinética sumaria de las moléculas del cuerpo caliente disminuirá, mientras que la energía cinética sumaria de las moléculas del cuerpo frío, crecerá. El resultado de esto es, precisamente, la transmisión de energía del cuerpo caliente al frío sin que se realice trabajo.

Recibe el nombre de transmisión de calor la comunicación de energía de un cuerpo a otro sin que se realice trabajo.

2. El proceso de intercambio de calor entre cuerpos que se hallan en contacto directo, que hemos examinado, es denominado *transmisión de calor por conducción o conductividad térmica.*

La transmisión de calor puede transcurrir a cuenta de la convección. Las capas de líquido o gas, al hacer contacto con un cuerpo a alta temperatura, se calientan y ascienden, mientras que su lugar es ocupado por capas más frías. El intercambio de calor que transcurre mediante los flujos de líquido o gas, recibe el nombre de *transmisión de calor por convección.*

3. Por fin, la transmisión de calor puede transcurrir con ayuda de rayos tanto visibles, como invisibles. De esto podemos cerciorarnos con ayuda del siguiente experimento. Fijemos en un soporte el cuerpo caliente. Acerquemos a él la mano por abajo a una distancia de 15—20 cm. Sentiremos que el cuerpo transmite a la mano energía. Este proceso no es convección, ya que el flujo de aire caliente asciende y no puede llegar a la mano. Esto tampoco puede ser conductividad térmica, ya que ésta es muy pequeña para todos los gases, incluido el aire.

Resulta que todo cuerpo emite rayos infrarrojos y a temperaturas superiores a 800°C, luz visible. El proceso de transmisión de energía mediante ondas electromagnéticas (radiación infrarroja y visible) se llama *transmisión de calor por radiación.*

En el experimento relatado tropezamos en realidad con semejante género de transmisión de calor. En efecto, al

colocar entre la mano y el cuerpo una chapa de hojalata, sentiremos que el calentamiento de la mano cesa. La causa reside en que el metal parcialmente refleja y en parte absorbe la radiación y ésta ya no llega a la mano.

Señalemos, para finalizar, que si para la transmisión de calor por conducción o por convección entre dos cuerpos es preciso que entre ellos haya obligatoriamente materia, la transmisión de calor por radiación transeurre en el vacío. Así, la energía que emite el Sol llega a la Tierra por el espacio sideral, en donde hay vacío profundo.

§ 21.3. Cantidad de calor

1. La medida de la variación de la energía de un cuerpo durante los procesos mecánicos es el trabajo realizado por las fuerzas externas (véase (21.2)). Introduzcamos una magnitud física que caracterice la variación de la energía del cuerpo con la transmisión de calor. Dicha magnitud recibe el nombre de *cantidad de calor* y se designa por Q .

Il llamamos cantidad de calor la energía comunicada mediante la transmisión de calor.

De esta definición sigue, que si la energía del cuerpo sólo varía a causa de la transmisión de calor, entonces

$$Q = \Delta \mathcal{E}, \quad (21.3)$$

es decir, *la cantidad de calor es la medida de la variación de la energía del cuerpo durante la transmisión de calor.*

2. En el Sistema Internacional la unidad de la cantidad de calor, como el trabajo y la energía, es el julio (§ 16.6):

$$[Q] = [\mathcal{E}] = [A] = \text{J}.$$

En la práctica se emplea, a veces, la unidad de cantidad de calor fuera de sistema, llamada *caloría*. Por definición

$$1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}.$$

3. Recordemos al lector las expresiones con las que se puede calcular la cantidad de calor.

Al variar la temperatura del cuerpo,

$$Q = mc \Delta t, \quad (21.4)$$

donde m es la masa del cuerpo, Δt , la variación de la temperatura, c , el calor específico de la materia.

Al fundirse un cristal (o al cristalizarse un fundido),

$$Q = m\lambda, \quad (21.5)$$

donde λ es el calor específico de fusión.

Al evaporarse un líquido (o condensarse un vapor)

$$Q = mL, \quad (21.6)$$

donde L es el calor específico de vaporización.

Durante una reacción química

$$Q = mq, \quad (21.7)$$

donde q es el calor específico de la reacción. Por ejemplo, la cantidad de calor que se desprende al quemarse 1 kg de combustible recibe el nombre de *calor específico de quemado del combustible*.

4. Hay que prestar atención a que el término "calentamiento" se utiliza corrientemente en dos sentidos: como la transmisión de energía en forma de calor (durante el intercambio de calor) y como variación de la temperatura. Pero estos dos procesos no son equivalentes. La temperatura del cuerpo se puede cambiar sin transmitirle calor. Con el choque o la deformación inelásticos, con el rozamiento, etc. la temperatura del cuerpo varía no a cuenta de la transmisión de calor, sino a causa del trabajo. Y a la inversa, durante procesos como la fusión o ebullición, la temperatura del cuerpo no varía, aunque se le transmite energía en forma de calor. Por esta razón, durante la descripción precisa de los fenómenos, hay que evitar el término de doble sentido "calentamiento" e indicar con exactitud en qué consiste la esencia del proceso que examinamos, es decir, variación de temperatura o comunicación de energía mediante la transmisión de calor.

§ 21.4. Primer principio de la termodinámica

Recibe el nombre de *termodinámica* la ciencia que estudia las condiciones de transformación de la energía de un género de ésta a otro y que caracteriza estas transformaciones desde el punto de vista cuantitativo.

1. Más arriba fue mostrado (fórmulas (21.2) y (21.3)) que la energía del cuerpo puede cambiar bien a cuenta de la aplicación de fuerzas externas, ya mediante el intercambio de calor con el medio circundante. También es posible el caso cuando la energía varía a cuenta de estas dos causas. Entonces, la variación de la energía del sistema es igual a la suma del trabajo de las fuerzas externas y la cantidad de calor, extraído de los cuerpos que rodean a dicho sistema:

$$\Delta \mathcal{E} = A_{\text{ext}} + Q. \quad (21.8)$$

2. El trabajo que realiza el sistema contra las fuerzas externas, difiere del trabajo de las fuerzas externas sólo por su signo: $A = -A_{\text{ext}}$. Entonces, a la expresión (21.8) se le puede aducir la forma

$$\Delta \mathcal{E} = -A + Q$$

o bien

$$Q = \Delta \mathcal{E} + A, \quad (21.9)$$

es decir, *la cantidad de calor* (la energía recibida por el sistema por medio de la transmisión de calor) *se consume para la variación de la energía del sistema y para el trabajo contra las fuerzas externas.*

3. La expresión obtenida llámase *primer principio de la termodinámica*. Este tiene un sentido extremadamente general y puede ser aplicado para describir un amplísimo círculo de fenómenos. En adelante emplearemos dicha ley para describir una serie de procesos térmicos y otros.

En los siguientes párrafos del presente capítulo aclararemos la ligazón entre el primer principio de la termodinámica y una de las más importantes leyes de la Naturaleza: la ley de la conservación de la energía.

§ 21.5. Sistema aislado adiabáticamente

Un sistema de cuerpos es *cerrado* cuando en comparación con las fuerzas internas, las externas aplicadas a él pueden no ser tomadas en consideración (§ 15.1). De esta definición se desprende que en un sistema cerrado el trabajo de las fuerzas externas es igual a cero.

Recibe el nombre de *aislado adiabáticamente* un sistema que no tiene intercambio de calor con el medio circundante. En correspondencia con esta definición, la cantidad de calor que recibe un sistema aislado adiabáticamente es nula.

El concepto de sistema aislado adiabáticamente es una idealización de ciertos sistemas reales. Queda claro, que es imposible aislar por completo un sistema del intercambio de calor, pero hay la posibilidad de aproximar a las adiabáticas las transformaciones que transcurren en el sistema dado.

Ante todo, el intercambio de calor se produce, por regla, con suficiente lentitud, de forma mucho más lenta que la transmisión de energía con ayuda de otros procesos. Por esta razón, cualquier otra transformación rápida del tipo explosión, choque, inflamación, etc., con suficiente grado de aproximación puede ser considerada adiabática.

Por otro lado, el sistema puede ser aproximado al adiabático, obstaculizando el intercambio de calor con el medio circundante, o sea, creando un aislamiento térmico fiable. Es un buen ejemplo de *cubierta adiabática* la vasija de Dewar, que es la parte principal de un termo (fig. 21.1). Se trata de un recipiente de vidrio de paredes dobles finas, entre las cuales se crea alto vacío. Éste obstaculiza la transmisión de calor por conducción y la convección. La pared interior del recipiente está plateada. Como resultado de esto, la superficie especular obtenida refleja bien los rayos, obstaculizando la transmisión de calor radiante.

El sistema ubicado en la vasija de Dewar con alto grado de aproximación, puede considerarse aislado adiabáticamente.



Fig. 21.1.

§ 21.6. Ley de la conservación de la energía

1. Examinemos un sistema de cuerpos que no interactúa de forma mecánica con los cuerpos que lo rodean (sistema cerrado) y no tiene intercambio de calor con cuerpos externos (sistema aislado adiabáticamente). De que el sistema es cerrado, se desprende que él no realiza trabajo contra las fuerzas externas, es decir, $A = 0$. De que el sistema es aislado adiabáticamente, se deduce que éste no recibe y no cede energía por intercambio de calor, o sea, $Q = 0$.

Basándonos en el primer principio de termodinámica (21.9), obtenemos que aquí la energía total del sistema no varía: $\Delta \mathcal{E} = 0$ y, por lo tanto, $\mathcal{E} = \text{const.}$

Así, pues, *la energía total de un sistema cerrado y aislado adiabáticamente es una magnitud constante.* Esta es la enunciación más general de la ley de la conservación de la energía.

2. La ley de la conservación de la energía en la mecánica newtoniana (§ 19.1) es un caso particular de la ley que hemos obtenido ahora. En efecto, en el cap. 19 sólo hemos considerado los sistemas conservativos, en los que no hay intercambio de calor y en los que para la conservación de la energía es necesaria una sola condición: que el sistema sea cerrado.

3. La ley de la conservación de la energía no exige en absoluto que la energía de cada uno de los cuerpos que entran

en el sistema dado quede invariable. En realidad, entre los cuerpos puede haber tanto interacción mecánica, como intercambio de calor y, por esta causa, la energía de los cuerpos aislados, que constituyen el sistema que examinamos, puede, sin duda alguna, variar. Para la conservación de la energía del sistema es preciso que éste no interactúe con los cuerpos externos y no tome parte en el intercambio de calor. En semejante caso, la energía total del sistema no variará, aunque cambie la energía de sus partes constituyentes.

§ 21.7. Ley de la conservación de la masa

1. Si la energía total de sistema se conserva, también se conservará la masa relativista correspondiente a ella. De esta forma, de la ley de la conservación de la energía puede ser deducida *la ley de la conservación de la masa*.

La masa relativista de un sistema cerrado y aislado adiabáticamente es una magnitud constante.

Como vemos, la ley de la conservación de la masa es un corolario de la ley de la conservación de la energía. Por esta razón, se habla con frecuencia de una ley única de la conservación de la energía y de la masa.

Representa dificultades más considerables la masa en reposo (la masa propia del sistema).

2. En la mecánica newtoniana se examinan cuerpos en movimiento a pequeñas velocidades. En semejante caso, la masa del cuerpo coincide, en realidad, con su masa en reposo; aquí, las variaciones de la energía del cuerpo a cuenta de su movimiento, deformaciones, procesos térmicos o químicos son pequeñísimas en comparación con la energía en reposo (§§ 16.2, 20.2—20.4), por lo que se puede considerar que esta última es una magnitud constante. Además, en la mecánica newtoniana no se examinan los casos de transformación de una forma de la materia en otras; por ejemplo, en los límites de dicha teoría son imposibles las transformaciones de unas partículas de la materia en otras, en el campo electromagnético o en otros campos. Por este motivo, en la mecánica newtoniana, la masa se considera como una magnitud constante para el cuerpo dado (independientemente de su energía), mientras que la masa del sistema, como una suma de las masas de los cuerpos de los que el sistema consta. Será natural, que en la mecánica newtoniana sea justa una *ley de la conservación de la masa*, independiente de la

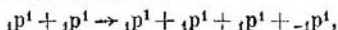
ley de la conservación de la energía. La práctica confirma perfectamente esta ley con aquellos procesos que se examinan en esta teoría.

3. En la teoría de la relatividad la masa en reposo del sistema no es igual a la suma de las masas en reposo de los cuerpos de los que está formado el sistema (§ 20.1). En realidad, sólo esto ya es suficiente para afirmar que, en el caso general, la masa en reposo no es una magnitud constante.

Pero, además, con grandes energías cinéticas, es posible la transformación de unas partículas en otras, así como el "surgimiento" y "desaparición" de las partículas. Aquí, nos limitaremos a un ejemplo.

4. Supongamos que un protón rápido, acelerado en un acelerador hasta una velocidad próxima a la de la luz, choca con un protón inmóvil. Resulta que si el protón rápido posee una energía cinética suficiente, en lugar de dos partículas surgirán cuatro: tres protones y un antiprotón.

La reacción se escribe así:



en donde ${}_1p^1$ es un protón, mientras que ${}_{-1}p^1$, un antiprotón (una partícula de masa igual a la del protón, pero con signo inverso de la carga eléctrica). Designemos por \mathcal{E}_0 la energía en reposo del protón; entonces, la energía en reposo del sistema antes del choque será $2\mathcal{E}_0$, después de éste, $4\mathcal{E}_0$. Así, pues, la masa en reposo aquí no se conserva; la energía cinética se transforma en energía en reposo.

Haciendo uso de las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento, vamos a determinar la energía cinética mínima del protón que es capaz de "hacer nacer" un antiprotón, al chocar contra un blanco de hidrógeno inmóvil. Para simplificar la resolución, admitamos que después de la colisión todas las partículas están en movimiento con la misma cantidad de movimiento p_1 . De acuerdo con la ley de la conservación de la cantidad de movimiento

$$p = 4p_1, \quad (21.10)$$

donde p es la cantidad de movimiento del protón rápido antes del choque contra el blanco. Haciendo uso de la ligazón (16.8) entre la energía y cantidad de movimiento, tenemos

$$\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2 = p^2 c^2, \quad \mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_0^2 = p_1^2 c^2, \quad (21.11)$$

donde \mathcal{E}_0 es la energía en reposo del protón, \mathcal{E} , la energía del protón rápido antes de la colisión y \mathcal{E}_1 , la energía del protón o antiprotón después del choque. Excluyendo de (21.10) y de (21.11) las cantidades de movimiento p y p_1 , obtenemos

$$\mathcal{E}^2 - 16\mathcal{E}_1^2 + 15\mathcal{E}_0^2 = 0. \quad (21.12)$$

De la ley de la conservación de la energía se desprende que la energía total de dos protones antes de la colisión es igual a la suma de las energías totales de las cuatro partículas surgidas después de la colisión:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_0 = 4\mathcal{E}_1. \quad (21.13)$$

Poniendo esta expresión en (21.12) y después de sencillos cálculos, tendremos

$$\mathcal{E} = 7\mathcal{E}_0, \quad (21.14)$$

de donde sigue que la energía cinética de un protón rápido antes de la colisión

$$K = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = 6\mathcal{E}_0. \quad (21.15)$$

Es de importancia sustancial que de toda la energía cinética $K = 6\mathcal{E}_0$, sólo $2\mathcal{E}_0$ se ha transformado en energía en reposo; el resto, es decir, $4\mathcal{E}_0$ conservará la forma de energía cinética de los productos de la reacción, o sea, de tres protones y un antiprotón.

5. Recomendamos que el lector realice el cálculo numérico, tomando en consideración que la masa en reposo del protón $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. Se cerciorará de que la energía cinética del protón rápido constituye $K \approx 6 \text{ GeV} = 6 \cdot 10^9 \text{ eV}$ y que su velocidad es igual al 99% de la de la luz.

§ 21.8. Algo más acerca de la masa relativista

1. En § 15.8 deducimos la expresión para la masa relativista, haciendo uso de las propiedades del centro de inercia del sistema. Ahora vamos a mostrar, que esta fórmula puede ser obtenida partiendo de tres nociones: la ley de la conservación de la cantidad de movimiento (§ 15.2), la ley de la conservación de la masa relativista (§ 21.7) y la ley relativista de la composición de velocidades.

Estudiemos los dos mismos cuerpos que en el § 15.9 y supongamos que han chocado de manera inelástica, forman-

do un nuevo cuerpo de masa M , en movimiento a la velocidad v .

De la ley de la conservación de las masas relativistas, se desprende:

$$M = m + m_0, \quad (21.16)$$

mientras que de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento:

$$mu = (m + m_0)v. \quad (21.17)$$

2. Pasemos al sistema de referencia ligado con el cuerpo a la izquierda. Aquí sólo varían las direcciones de los vectores de velocidad, quedando invariables las demás magnitudes. La ley de la conservación de la cantidad de movimiento tomará la forma

$$-mu = Mv' = -v(m + m_0). \quad (21.18)$$

Por otro lado, al pasar de un sistema inercial de referencia a otro, la velocidad se transforma de acuerdo con la fórmula (12.11), que en el caso dado se escribirá:

$$v' = -v = \frac{v - u}{1 - vu/c^2}. \quad (21.19)$$

Después de resolver esta ecuación cuadrada respecto de v y empleando los mismos razonamientos que en el § 15.8, obtendremos la expresión buscada de la masa relativista.

Capítulo 22

LEY DE LA CONSERVACIÓN DEL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

§ 22.1. Particularidades del movimiento rotativo

En la práctica cotidiana se tropieza frecuentemente con cuerpos en rotación: se trata de toda clase de volantes, árboles, rotores de generadores y motores, tornillos, brocas, fresas, etc. Las particularidades del movimiento rotativo consisten en que todos los puntos del cuerpo se mueven por circunferencias concéntricas, cuyos centros están ubicados en el eje de rotación. Todos estos puntos están en movi-

miento a *diferentes* velocidades lineales, mientras que para todos ellos es igual la velocidad angular $\omega = d\alpha/dt$ (§ 4.7).

Al estudiar las leyes de movimiento de un punto material, introducimos una serie de magnitudes dinámicas: cantidad de movimiento, fuerza, energía cinética, etc. En realidad, también hicimos uso de dichas magnitudes para la descripción de las leyes del movimiento de traslación de un sólido. Si un sólido está en movimiento de traslación, todos sus puntos se mueven por iguales trayectorias (§ 1.1) y, por consiguiente, a igual velocidad. Por esta razón, las expresiones para la cantidad de movimiento o la energía cinética del cuerpo tendrán el mismo aspecto que para un punto material. En efecto, la cantidad de movimiento del cuerpo es igual a la suma de las cantidades de movimiento de las partes aisladas que lo constituyen:

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + \dots + P_n = m_1 v + m_2 v + \dots + m_n v = \\ &= (m_1 + m_2 + \dots + m_n) v = m v, \end{aligned}$$

donde m_1, m_2, \dots, m_n son las masas de las partículas aisladas, mientras que la masa del cuerpo $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Este mismo resultado será también obtenido para la energía cinética de un cuerpo en movimiento de traslación.

Si el sólido gira, el razonamiento anterior no será válido, ya que las velocidades de diversos puntos serán diferentes. En semejante caso es preciso expresar las características dinámicas mediante la velocidad angular. Es precisamente por esta causa, por lo que nos vemos obligados a introducir, en este caso, una serie de nuevas magnitudes físicas, tales como momento de fuerza, momento de inercia y momento de cantidad de movimiento.

§ 22.2. Energía cinética y momento de inercia

1. Deduzcamos la expresión para la energía cinética de un sólido en rotación alrededor de un eje inmóvil. Vamos a resolver el problema con la aproximación de la mecánica newtoniana, o sea, a condición de que todos los puntos se muevan a velocidades, mucho menores que la de la luz en el vacío. Para simplificar el problema, examinaremos primero un sistema constituido por dos puntos materiales generalizando, a continuación, el resultado obtenido para cualquier sólido.

2. Supongamos que dos puntos materiales de masas m_1 y m_2 están situados a una distancia l el uno del otro (fig. 22.1). Consideraremos que el sistema es rígido, es decir, que la distancia entre los puntos no varía. Alrededor del eje el sistema gira a una velocidad angular ω . Entonces, de acuerdo

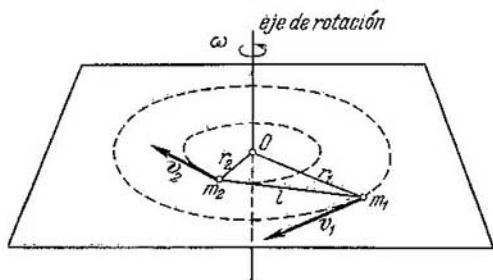


Fig. 22.1.

con (4.12) la velocidad del primer punto $v_1 = r_1\omega$, la del segundo, $v_2 = r_2\omega$, donde r_1 y r_2 son las distancias de los puntos materiales al eje de rotación. Como sigue de (16.5) la energía cinética de los puntos materiales

$$K_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2, \quad K_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2. \quad (22.1)$$

La energía cinética del sistema es igual a la suma de las energías cinéticas de los puntos materiales que forman el sistema:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2). \quad (22.2)$$

3. La magnitud física

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \quad (22.3)$$

recibe el nombre de *momento de inercia* de un sistema de puntos materiales. Éste caracteriza la distribución de las masas de dichos puntos respecto del eje de rotación.

En el SI como unidad de momento de inercia se toma el *kilogramo por metro cuadrado* ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$).

Sustituyendo (22.3) en (22.2), obtenemos

$$K = J\omega^2/2. \quad (22.4)$$

Así, pues, la energía cinética de un sistema de puntos materiales es igual a la mitad del producto del momento de inercia de dicho sistema por el cuadrado de la velocidad angular de rotación.

4. Si el sistema consta no de dos sino que de n puntos materiales, la expresión para su energía cinética quedará invariable, pero el momento de inercia tomará el aspecto

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2. \quad (22.5)$$

Un sólido puede ser dividido en un número suficientemente grande de partículas de masa $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$, de tal forma que cada una de ellas pueda ser considerada punto material. Entonces, el momento de inercia de semejante cuerpo

$$J = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_n r_n^2. \quad (22.6)$$

Hablando en general, el resultado dependerá del procedimiento de división del cuerpo en partículas y de la posición del eje de rotación. Sólo pasando al límite, con el aumento infinito del número de particiones, obtendremos un resultado preciso. El cálculo del momento de inercia de un sólido es un problema matemático suficientemente complicado y en el ámbito del presente libro no será resuelto.

§ 22.3. Dependencia entre el momento de inercia y la posición del eje de rotación

1. El momento de inercia de un cuerpo no sólo depende de su masa, sino que también de la posición del eje de rotación.

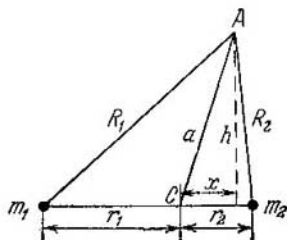


Fig. 22.2.

Esto se desprende directamente de la expresión (22.5). En efecto, si trasladamos el eje de rotación a otro punto, las masas m_1, m_2, \dots, m_n no variarán, pero los radios r_1, r_2, \dots, r_n serán otros, a causa de lo cual el momento de inercia también cambiará.

Calculemos los momentos de inercia de un sistema de dos puntos materiales respecto de dos ejes, paralelos entre sí y perpendiculares al plano de la figura (fig. 22.2). La distancia entre los ejes $AC = a$.

El momento de inercia del sistema en relación con el eje que pasa por el punto A :

$$J = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2. \quad (22.7)$$

El momento de inercia de ese mismo sistema respecto del eje que pasa por el centro de masas C :

$$J_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \quad (22.8)$$

Según el teorema de Pitágoras

$$R_1^2 = h^2 + (r_1 + x)^2, \quad R_2^2 = h^2 + (r_2 - x)^2.$$

Sustituyendo en (22.7), realizando sencillas transformaciones y teniendo en cuenta (22.8)

$$J = J_0 + (m_1 + m_2) (h^2 + x^2) + 2x (m_1 r_1 - m_2 r_2).$$

Pero $h^2 + x^2 = a^2$; de la definición del concepto "centro de masas" (15.7) se desprende que $m_1 r_1 - m_2 r_2 = 0$. Por fin,

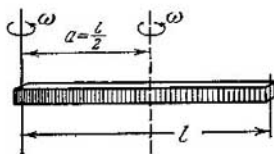


Fig. 22.3.

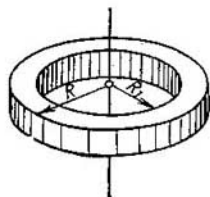


Fig. 22.4.

para velocidades no relativistas $m_1 + m_2 = m$ es la masa del sistema. Por consiguiente

$$J = J_0 + ma^2. \quad (22.9)$$

Así, pues, el momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto de un eje tomado al azar, es igual al momento de inercia de dicho sistema en relación con el eje paralelo que pasa por el centro de masas, más el producto de la masa del sistema por el cuadrado de la distancia entre los ejes (*teorema de Steiner*).

Como ma^2 es un número positivo, del teorema de Steiner se desprende que el momento de inercia de un sistema tiene el valor mínimo respecto del eje que pasa por su centro de masas.

2. Hagamos uso del teorema de Steiner para calcular el momento de inercia de una barra homogénea en lo que atañe a un eje perpendicular a la barra y que pasa por su extremo (fig. 22.3). Sean m la masa de la barra y l , su longitud. El

momento de inercia es proporcional a la masa y al cuadrado de las dimensiones lineales:

$$J = \theta ml^2,$$

siendo θ un coeficiente adimensional.

Calculemos el momento de inercia respecto de un eje que pasa por el centro de masas. Por un lado podemos considerar que la barra consta de dos trozos iguales de masas $m_1 = m/2$ y longitudes $l_1 = l/2$. Tomando en consideración que el momento de inercia de toda la barra es igual a la suma de los momentos de inercia de las dos mitades, obtenemos

$$J_0 = 2\theta m_1 l_1^2 = 2\theta \frac{m}{2} \frac{l^2}{4} = \frac{\theta}{4} ml^2.$$

Por otro lado, de acuerdo con el teorema de Steiner,

$$J_0 = J - ma^2 = \theta ml^2 - m(l/2)^2 = ml^2(\theta - 1/4).$$

Comparando las dos igualdades, obtendremos

$$\theta/4 = \theta - 1/4, \text{ de donde } \theta = 1/3.$$

De forma que el momento de inercia de una barra homogénea respecto de un eje que pasa por su extremo y es perpendicular a la barra,

$$J = ml^2/3. \quad (22.10)$$

El momento de inercia de esa misma barra, pero respecto de un eje que pasa por el centro de masas

$$J_0 = ml^2/12. \quad (22.11)$$

3. El momento de inercia de un disco con relación a un eje que pasa por su centro, es proporcional a su masa y al cuadrado de su radio:

$$J = \alpha m R^2.$$

Para determinar el coeficiente de proporcionalidad α , calculemos el momento de inercia de un anillo (fig. 22.4). Es igual a la diferencia de los momentos de inercia de dos discos con radios R y R_1 y de masas m y $m_1 = mR_1^2/R^2$, respectivamente:

$$J_A = J - J_1 = \alpha m R^2 - \alpha m_1 R_1^2 = \frac{\alpha m}{R^2} (R^4 - R_1^4).$$

La masa del anillo

$$m_A = m - m_1 = m (R^2 - R_1^2)/R^2.$$

Si el anillo es suficientemente fino ($R_1 \approx R$), su momento de inercia se puede calcular de (22.6). Tenemos

$$J_A = \Delta m_1 R^2 + \Delta m_2 R^2 + \dots = (\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots) \times R^2 = m_A R^2 = m (R^2 - R_1^2).$$

Comparando las dos expresiones para el momento de inercia del anillo, obtendremos después de simplificar

$$\alpha (R^2 + R_1^2) = R^2.$$

Pero como según el planteamiento $R_1 \approx R$, entonces $\alpha = 1/2$.

Así, pues, el momento de inercia de un disco respecto de un eje que pasa por su centro perpendicularmente a su plano, es igual a

$$J = 1/2 mR^2. \quad (22.12)$$

§ 22.4. Momento de fuerza

1. Supongamos que sobre un cuerpo que gira alrededor de un eje inmóvil está aplicada cierta fuerza F (fig. 22.5). Calculemos el trabajo que realiza dicha fuerza al girar el cuerpo a un ángulo $\Delta\alpha$. Por definición (16.12), el trabajo elemental es igual a

$$\Delta A = F_t \Delta l.$$

Pero $F_t = F \operatorname{sen} \gamma$, donde γ es el ángulo entre la dirección de la fuerza y la del radio trazado del eje de rotación al punto de aplicación de la fuerza. En lo que se refiere al arco $\Delta l = r \Delta\alpha$. Por lo tanto

$$\Delta A = Fr \operatorname{sen} \gamma \cdot \Delta\alpha. \quad (22.13)$$

2. La magnitud

$$M = Fr \operatorname{sen} \gamma = Fd \quad (22.14)$$

será llamada *momento de fuerza* respecto del eje de rotación. La distancia más corta desde el eje de rotación hasta la dirección de la fuerza $d = r \operatorname{sen} \gamma$ recibirá el nombre de *brazo de la fuerza*.

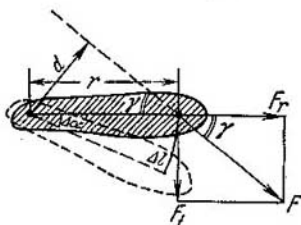


Fig. 22.5.

Llamamos momento de fuerza respecto de cierto eje el producto de la fuerza por su brazo.

La unidad de momento de fuerza en el Sistema Internacional de unidades es un newton-metro ($N \cdot m$).

3. Si ponemos (22.14) en la expresión para el trabajo elemental (22.13), obtenemos

$$\Delta A = M \Delta \alpha, \quad (22.15)$$

es decir, el trabajo que se realiza al girar un cuerpo es igual al producto del momento de fuerza por el ángulo de giro.

4. Para calcular la potencia, la expresión (22.15) debe dividirse por el intervalo de tiempo Δt . Pero como $\Delta A / \Delta t = N_m$ es la potencia media, mientras que $\Delta \alpha / \Delta t = \omega_m$, o sea, la velocidad angular media, se obtiene

$$N_m = M \omega_m$$

o bien, pasando al límite para $\Delta t \rightarrow 0$, hallamos para la potencia instantánea, que

$$N = M \omega. \quad (22.16)$$

La potencia instantánea es igual al producto del momento de fuerza por la velocidad angular de rotación.

§ 2.5. Condición para el equilibrio de un cuerpo que tiene eje de rotación

1. En el § 19.6 deducimos la condición de equilibrio para un cuerpo libre, que puede desplazarse en cualquier dirección. En este caso, el equilibrio se alcanza si la suma vectorial de todas las fuerzas (su resultante) es igual a cero. Examinemos qué condición ha de satisfacer un cuerpo, que puede girar alrededor de cierto eje prefijado, para estar en equilibrio.

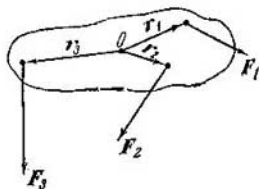


Fig. 22.6.

Examinemos qué condición ha de satisfacer un cuerpo, que puede girar alrededor de cierto eje prefijado, para estar en equilibrio.

Vamos a considerar positivos los momentos que hacen girar el cuerpo en sentido antihorario y negativos, los momentos que le hacen girar en sentido horario.

Así, pues, en la fig. 22.6, si el eje pasa por O , los momentos de las fuerzas F_1 y F_2 tienen signo negativo, el momento de la fuerza F_3 , signo positivo.

2. Si el cuerpo se encuentra en estado de equilibrio, al hacerlo girar a un ángulo infinitésimo $\Delta\alpha$, la energía potencial no varía, por consiguiente el trabajo elemental ΔA , igual a la variación de la energía potencial, será nulo: $\Delta A = 0$. Pero

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 = M_1 \Delta\alpha + M_2 \Delta\alpha + M_3 \Delta\alpha = (M_1 + M_2 + M_3) \Delta\alpha.$$

Pero como $\Delta\alpha \neq 0$, queda claro que

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0. \quad (22.17)$$

Esta es la condición de equilibrio buscada. De forma que *un cuerpo que tiene un eje de giro prefijado se encuentra en equilibrio si es igual a cero la suma algebraica de todos los momentos de fuerza respecto a dicho eje.*

De otro modo, podemos decir, que el equilibrio se alcanza en aquel caso, cuando la suma de los momentos que hacen girar al cuerpo en sentido antihorario es igual a la suma de los momentos que lo hacen girar en sentido horario.

3. Como vemos de la condición obtenida, una pequeña fuerza aplicada sobre un brazo grande es capaz de equilibrar una fuerza mayor con pequeño brazo. Esta propiedad de los momentos de fuerza encuentra aplicación práctica en las palancas, el cabrestante, el elevador de tornillo (gato) y una gran serie de otros dispositivos, muy difundidos en técnica.

§ 22.6. Momento de cantidad de movimiento y ecuación fundamental de dinámica

1. Sea que sobre un cuerpo, en rotación alrededor de un eje inmóvil, actúan varias fuerzas (fig. 22.6). Designemos por M la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas. Como muestra la experiencia, bajo la acción del momento sumario de las fuerzas, la velocidad angular de rotación del cuerpo varía y, junto con ésta, cambia su energía cinética. Una variación infinitamente pequeña de la energía cinética (a condición de que $J = \text{const}$)

$$dK = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega d\omega.$$

Pero de acuerdo con (16.13) y (22.16), tenemos

$$dK = \Delta A = N dt = M\omega dt,$$

de donde

$$M dt = J d\omega = d(J\omega). \quad (22.18)$$

2. La magnitud física igual al producto del momento de inercia por la velocidad angular recibe el nombre de *momento de la cantidad de movimiento* (de otro modo, *momento rotatorio* o *momento de impulsión*):

$$L = J\omega. \quad (22.19)$$

Señalemos que para un punto material, en movimiento por una circunferencia de radio r , el momento de cantidad de movimiento es igual al producto de la cantidad de movimiento por el radio:

$$L = J\omega = mr^2\omega = mrv = pr. \quad (22.20)$$

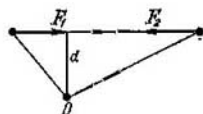


Fig. 22.7.

La unidad de momento de cantidad de movimiento en el SI es un *kilogrametro al cuadrado por segundo* ($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$).

3. Si dividimos la igualdad (22.18) por dt y tomamos en consideración (22.19), hallamos

$$M = \frac{dL}{dt} = L'(t). \quad (22.21)$$

Así es la *ecuación fundamental de dinámica para un sólido en rotación*: el momento de fuerza es igual a la derivada del momento de cantidad de movimiento en el tiempo.

4. Hay que prestar atención al hecho de que en la expresión (22.21) se trata de la suma de los momentos de *las fuerzas externas*. En lo que respecta a las fuerzas internas, la suma de sus momentos es siempre nula, lo que sigue directamente de la tercera ley de Newton. Para demostrarlo examinemos un sistema de dos puntos materiales en interacción (fig. 22.7). La fuerza $F_2 = -F_1$, ambas fuerzas tienen igual brazo d . De esta manera, $M_1 = F_1d$, $M_2 = F_2d = -F_1d = -M_1$ y momento sumario de las fuerzas internas

$$M_{\text{int}} = M_1 + M_2 = 0.$$

§ 22.7. Ley de la conservación del momento de cantidad de movimiento

1. Sea igual a cero la suma algebraica de los momentos de las fuerzas externas aplicadas sobre un cuerpo. En particular, esta condición es siempre justa para un sistema ce-

rrado, sobre el cual las fuerzas externas no actúan por completo. Entonces, de (22.21) se deduce:

$$dL/dt = 0 \text{ o bien } L = \text{const.} \quad (22.22)$$

Hemos obtenido un importante resultado, que recibe el nombre de *ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento*.

El momento de la cantidad de movimiento de un sistema cerrado es una magnitud constante.

2. De la diferencia entre las nociones "cantidad de movimiento" y "momento de la cantidad de movimiento" se desprende un interesante corolario.

En el § 15.7 fue mostrado que bajo la acción de las fuerzas internas, la velocidad del centro de masas de un sistema de puntos materiales no puede variar. Durante el movimiento de traslación de un cuerpo, la velocidad de todos sus puntos coincide con la velocidad del centro de masas. Por consiguiente, las fuerzas internas no pueden variar la velocidad de un cuerpo en movimiento de traslación.

Otro resultado completamente diferente se obtiene cuando el cuerpo gira alrededor de un eje. Bajo la acción de las fuerzas internas puede variar la distancia entre partes aisladas del cuerpo, lo que provoca la variación de su momento de inercia. Pero de la ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento sigue que sólo es constante el producto $L = J\omega$, y no cada uno de los factores. Si bajo la acción de las fuerzas internas el momento de inercia disminuye, una igual cantidad de veces crecerá la velocidad angular, mientras que el producto $J\omega$ seguirá siendo una magnitud constante.

3. Semejante resultado tiene múltiples aplicaciones prácticas.

Examinemos cómo un deportista realiza el salto hacia atrás (fig. 22.8). Después de ponerse en cuclillas con las manos dirigidas hacia atrás, el deportista salta hacia arriba elevando los brazos adelante y, a continuación, desplazándolos hacia arriba y ligeramente hacia atrás. De este modo él comunica a su cuerpo una pequeña velocidad de rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masas (a eso del nivel de la cintura). Cerca del punto superior de la trayectoria, el deportista se "agrupa", es decir, bruscamente atrae las rodillas a la barbilla y las agarra con las manos. Con esto, el momento de inercia disminuye de forma consi-

derable, mientras que la velocidad de rotación crece, lo que permite al deportista efectuar la voltereta con rapidez. Al aterrizar, de nuevo se endereza y lanza las manos hacia arriba y, ligeramente, adelante, aminorando así la rotación.

De forma análoga, los deportistas de patinaje artístico realizan la figura llamada trompo. Separando las manos hacia los lados y elevando la pierna libre, el deportista se comunica lenta rotación alrededor del eje vertical. "Agrupación"



Fig. 22.8.

pándose" con brusquedad, o sea, acercando al cuerpo los brazos y la pierna libre, el deportista disminuye el momento de inercia y comienza a girar con gran rapidez.

4. Es fácil cerciorarse de que en todos los ejemplos aducidos, la energía cinética de rotación no se conserva. Sea al principio la energía cinética $K = J\omega^2/2$. Después de la "agrupación" el momento de inercia disminuye n veces, $J_1 = J/n$. En una misma cantidad de veces aumenta la velocidad angular: de $J\omega = J_1\omega_1$ se deduce que $\omega_1 = n\omega$. La energía cinética

$$K_1 = \frac{J_1\omega_1^2}{2} = \frac{J\omega^2 n^2}{n \cdot 2} = nK.$$

El incremento de la energía cinética $\Delta K = K_1 - K = K(n - 1)$. Pero para aumentar la energía cinética hace falta trabajo. ¿Qué fuerzas lo realizan?

Como con la primera aproximación los sistemas examinados son cerrados, la acción de las fuerzas externas puede ser despreciada. Por lo tanto, en semejante caso la energía cinética de rotación crece a cuenta de las fuerzas internas, es decir, al fin y al cabo por la acción de la energía interna del sistema en rotación. Como vemos, este resultado co-

responde por completo a la ley de la conservación de la energía.

5. De la ley de la gravitación se desprende que *cada uno de los planetas gira alrededor del Sol por una elipse, con la particularidad de que éste se encuentra en uno de sus focos* (primera ley de Kepler). De acuerdo con la ley de la conservación de la energía (19.3)

$$\frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} = \text{const.}$$

Es fácil cerciorarse de que la velocidad orbital varía continuamente: a medida que aumenta la distancia entre el Sol y el planeta, la velocidad de éste decrece (fig. 22.9).

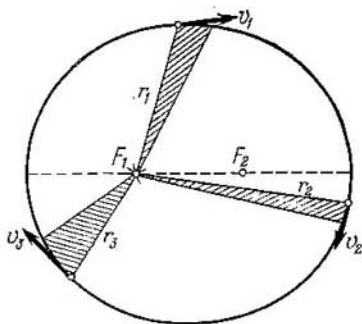


Fig. 22.9.

Kepler, haciendo uso de sus observaciones realizadas durante muchos años, estableció que *en el transcurso de iguales intervalos de tiempo, el radio vector del planeta describe iguales áreas* (segunda ley de Kepler). Vamos a demostrar que esta ley es un corolario de la ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento.

En efecto, el Sol y el planeta constituyen un sistema cerrado y, por esta razón, en lo que a este se refiere puede ser aplicada la ley de la conservación del momento de cantidad de movimiento. El centro de masas de dicho sistema coincide, prácticamente, con el centro del Sol, por consiguiente, la velocidad de éste es, en realidad, igual a cero. De acuerdo con (22.22) el momento de la cantidad de movimiento de

este sistema

$$L = mvr = \text{const.} \quad (22.23)$$

El área descrita por el radio vector del planeta por unidad de tiempo,

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \frac{r dl}{dt} = \frac{mvr}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{const.} \quad (22.24)$$

Esta es la expresión de la segunda ley de Kepler.

§ 22.8. Analogía entre las magnitudes y las correlaciones entre ellas con movimientos de traslación y rotativo

Si comparamos las correlaciones entre las magnitudes que caracterizan el movimiento de un punto material (o de un cuerpo en movimiento de traslación) con las mismas correlaciones que describen la rotación de un cuerpo alrededor de un eje, se advierte con facilidad la profunda analogía entre ellas. Escribamos una serie de magnitudes y las ecuaciones que las ligan en forma de una tabla, limitándonos al ámbito de la mecánica newtoniana (tabla 22.1).

Tabla 22.1

Movimiento de traslación	Movimiento rotativo
Desplazamiento Δl	Ángulo de giro $\Delta \alpha$
Velocidad v	Velocidad angular ω
Masa m	Momento de inercia J
Cantidad de movimiento $p = mv$	Momento de la cantidad de movimiento $L = J\omega$
Fuerza F	Momento de fuerza M
Ecuación fundamental de dinámica	Ecuación fundamental de dinámica
$F = \frac{dp}{dt} = p'(t)$	$M = \frac{dL}{dt} = L'(t)$
Energía cinética	Energía cinética
$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$	$K = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2J}$
Trabajo elemental	Trabajo elemental
$\Delta A = F_t dl$	$\Delta A = M d\alpha$
Potencia $N = F_t v$	Potencia $N = M\omega$

Como vemos en la tabla, la simple sustitución de magnitudes análogas en las fórmulas para el movimiento de traslación nos lleva automáticamente a fórmulas correctas para el movimiento rotativo. Por ejemplo, al sustituir en la expresión $K = p^2/2m$ la cantidad de movimiento p por el momento de la cantidad de movimiento L , análogo a ella, y la masa m por su análogo, es decir, por el momento de inercia J , para el movimiento rotativo obtenemos la expresión $K = L^2/2J$. Del mismo modo, por analogía, podemos escribir la expresión para el trabajo que se realiza al torsionar un resorte a cierto ángulo φ . En efecto, en el § 18.2 obtuvimos de una gráfica la expresión $A = Fl/2$. Sustituyendo la fuerza por su análogo, o sea, el momento de fuerza, y el desplazamiento por el ángulo de giro, obtendremos $A = M\varphi/2$. Claro está, que esta fórmula puede deducirse independientemente con ayuda de la gráfica, pero haciendo uso de la analogía la obtenemos con mayor rapidez y sencillez.

Recomendamos al lector que, introduciendo el concepto de aceleración angular $\beta = d\omega/dt$, obtenga por analogía la expresión para la velocidad angular instantánea y ángulo de giro con rotación uniformemente variable, así como también la expresión para la ecuación fundamental dinámica de un cuerpo en rotación.

Capítulo 23

SIMETRÍA EN LA NATURALEZA Y LEYES DE LA CONSERVACIÓN

§ 23.1. Las leyes de la conservación como leyes fundamentales de la naturaleza

1. En los capítulos anteriores hemos examinado las tres leyes fundamentales de la naturaleza: las leyes de la conservación de la cantidad de movimiento, del momento de cantidad de movimiento y de la energía. Hay que tener en cuenta que estas leyes sólo se cumplen en los sistemas inerciales de referencia. Efectivamente, al deducir estas leyes hicimos uso de la segunda y tercera leyes de Newton y estas últimas pueden sólo utilizarse en los sistemas inerciales.

Recordemos también que la cantidad de movimiento y el momento de cantidad de movimiento se conservan en aquel caso, cuando podemos considerar que el sistema es cerrado (la suma de todas las fuerzas externas y, en correspondencia, la de todos los momentos de fuerza es igual a cero). Pero para la conservación de la energía del cuerpo es insuficiente que el sistema sea cerrado, es decir, además el cuerpo debe estar aislado adiabáticamente (o sea, no debe tomar parte en el intercambio de calor).

2. Las leyes de la conservación son valiosas por su comunidad. En realidad, ni los detalles de uno u otro proceso físico, ni las particularidades de los cuerpos aislados que toman parte en dichos procesos, no influyen sobre la justeza de las indicadas leyes. Son del mismo modo aplicables tanto a los planetas y estrellas, como a las moléculas, átomos y partículas elementales de las que están constituidos los núcleos atómicos. De ellas se puede hacer uso al investigar procesos térmicos, químicos, eléctricos y cualesquiera otros.

3. En el transcurso de toda la historia de desarrollo de la física, las leyes de la conservación han resultado ser casi las únicas leyes que han conservado su importancia al sustituir unas teorías por otras.

Por ejemplo, en la teoría de la relatividad sufren notables cambios las representaciones clásicas acerca del tiempo y la simultaneidad de los acontecimientos, la longitud de los segmentos y la masa de los cuerpos; se introducen nuevas enunciaciones de la ley de composición de velocidades y de la segunda ley de Newton, cambia la expresión para la energía cinética, etc. No obstante, las leyes de la conservación de la cantidad de movimiento, del momento de la cantidad de momento y de la energía, son también por completo justas en dicha teoría. Más aún, en la teoría de la relatividad las leyes de la mecánica newtoniana, la ley de la conservación de la masa y de la conservación de la energía, se unifican formando la ley única de la conservación de la masa y la energía.

En el micromundo, es decir, el de los átomos, moléculas y partículas elementales, tropezamos con una serie de fenómenos que divergen bruscamente de los fenómenos en el mundo de los grandes cuerpos. Gracias al principio de incertidumbre, en este caso es imposible resolver el problema fundamental de dinámica y de forma unívoca determinar, digamos, la trayectoria de un electrón en el átomo. Todo

esto requiere otro enfoque de los fenómenos del micromundo. Sin embargo, también aquí las leyes de la conservación siguen conservando su fuerza y en la mecánica cuántica juegan un papel aún mayor que en la mecánica newtoniana o relativista. Con frecuencia, las leyes de la conservación son el único instrumento que sirve para explicar los fenómenos que transcurren en el micromundo.

Es precisamente *el carácter universal de las leyes de conservación* el que proporciona a éstas su valía.

§ 23.2. Las leyes de la conservación como principios de imposibilidad

1. Entre las leyes del tipo de la ecuación fundamental de dinámica y las leyes de la conservación hay una diferencia de principio. Las leyes de dinámica nos dan una representación acerca del transcurso detallado del proceso. Por ejemplo, si están prefijadas la fuerza que actúa sobre un punto material, así como las condiciones iniciales, podemos hallar la ley de movimiento, la trayectoria, el valor y la dirección de la velocidad en cualquier momento de tiempo, etc. (véase el cap. 8). Por su parte, las leyes de la conservación no nos dan indicaciones directas acerca de cómo debe transcurrir uno u otro proceso. Sólo nos indican qué procesos son imposibles y, por lo tanto, no existen en la naturaleza.

De esta manera, las leyes de la conservación se manifiestan como *principios de imposibilidad: todo fenómeno con el que no se cumpla aunque no sea más que una de las leyes de conservación, es imposible* y semejantes fenómenos no se observan en la naturaleza. *Todo fenómeno con el que no se viola ninguna de las leyes de conservación, puede, en principio, transcurrir.* Notemos que los fenómenos no imposibles siempre se producen en la práctica, aunque con distinta probabilidad: algunos de dichos fenómenos transcurren con gran frecuencia, otros, rara vez, pero todos ellos pueden ser observados.

Puede parecer que las leyes de la conservación proporcionan demasiada arbitrariedad, demasiadas variantes y, por esta razón, no queda claro por qué en el experimento se realiza con la mayor frecuencia un solo proceso. En la realidad resulta que la actuación conjunta de varias leyes de conservación define de forma casi unívoca el posible transcurso del proceso.

2. Examinemos un ejemplo. ¿Puede un cuerpo en reposo ponerse en movimiento a cuenta de su energía interna? Semejante proceso no contradice a la ley de la conservación de la energía. Es sólo necesario que la energía cinética que surge sea exactamente igual a pérdida de energía interna.

Pero en realidad, este proceso nunca se produce, ya que él contradice a la ley de la conservación de la cantidad de movimiento. Si el cuerpo se pone en movimiento, su cantidad de movimiento crecerá por sí sola, lo que es imposible. Por esta causa, la energía interna del cuerpo no puede convertirse en cinética, si el cuerpo no se descompone en partes.

Si admitimos la posibilidad de la descomposición de dicho cuerpo en partes, entonces la imposibilidad, que impone la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, se retira. Con esto, los fragmentos creados pueden moverse de forma que su centro de masas quede en reposo, que es precisamente lo que exige la ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

Así, pues, para que la energía interna de un cuerpo en reposo pueda convertirse en energía cinética, este cuerpo debe ser capaz de descomponerse en fragmentos. Pero al haber una ley más que imposibilite la descomposición de dicho cuerpo en fragmentos, su energía interna y su masa en reposo serán constantes.

3. Por cierto, que precisamente por la acción conjunta de la ley de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento se explica el hecho de que para obtener antiprotones durante la colisión de los protones rápidos contra los inmóviles (§ 21.7) es preciso comunicar a las partículas que bombardean una energía cinética $6\mathcal{E}_0 \approx 6 \text{ GeV}$, aunque para el surgimiento de dos partículas nuevas, o sea un protón y un antiprotón, es suficiente una energía $2\mathcal{E}_0$.

§ 23.3. Las leyes de la conservación y la simetría del espacio — tiempo

1. Al mostrar el carácter universal de las leyes de la conservación, al mismo tiempo entramos en cierta contradicción lógica con los razonamientos que nos ayudaron a deducir algunas de dichas leyes. En efecto, las leyes de la conservación fueron obtenidas como un corolario de las segunda y tercera leyes de Newton. Pero estas mismas leyes son el resultado de la generalización de experimentos con interac-

ciones elásticas, gravitatorias y de Coulomb. Sin embargo, las indicadas interacciones no describen todos los fenómenos de la naturaleza.

En la actualidad conocemos dos tipos más de interacciones. Por las interacciones fuertes están condicionadas las fuerzas nucleares que actúan entre las partículas elementales en el interior del núcleo, así como los procesos de formación de las partículas elementales pesadas con energías muy altas, por ejemplo, la reacción del surgimiento del par protón—antiprotón, examinada en el § 21.7. El resultado de las interacciones débiles es la descomposición de ciertas partículas elementales, por ejemplo la desintegración beta de los núcleos (§§ 81.12, 83.5).

2. No es evidente por completo, que las leyes de Newton sean aplicables a dichas interacciones, más aún cuando en semejante caso juega fundamental papel el principio de incertidumbre. Pero con dichas interacciones, las leyes de la conservación son completamente justas, lo que se certifica por todos los fenómenos conocidos.

De este modo, resulta que las leyes de la conservación tienen un carácter más omnímodo que las leyes de Newton, que fueron nuestro punto de partida. Por esta razón, nos parece conveniente hallar ciertos principios más generales de los que se desprendieran las leyes de la conservación.

3. Resulta que en realidad semejantes principios existen. Son los principios de simetría del espacio—tiempo. Fue mostrado que de la homogeneidad del espacio sigue la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, de la isotropía del espacio, la ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento y de la homogeneidad del tiempo, la ley de la conservación de la energía.

El hecho de que las leyes de la conservación sean el corolario de representaciones tan generales, es una convincente confirmación de la importancia universal de dichas leyes.

§ 23.4. La homogeneidad del tiempo y la conservación de la energía

Como ilustración de la dependencia entre las propiedades de la simetría del espacio—tiempo y las leyes de la conservación, examinemos ciertas consideraciones elementales que aclaran la ligazón entre la ley de la conservación de la energía y la homogeneidad del tiempo.

1. La homogeneidad del tiempo, acerca de la que ya hablamos en el § 1.2, expresa, precisamente, la independencia de los fenómenos de la naturaleza del momento de tiempo que hemos adoptado como inicial. En particular, de esto se deduce que la masa en reposo de un sistema cerrado y aislado adiabáticamente no depende del tiempo.

Notemos, que el aislamiento adiabático, que no juega ningún papel al analizar las propiedades del espacio, aquí desempeña un papel substancial, ya que al haber intercambio de calor la masa en reposo varía con el tiempo.

2. Derivando la ecuación (16.8) y tomando en consideración que $m_0 = \text{const}$, de nuevo obtenemos una ecuación que coincide con (16.10):

$$d\mathcal{E} = u dp. \quad (23.1)$$

Pero como el sistema es cerrado, la fuerza externa $F = 0$, por consiguiente $dp = F dt = 0$. Con estas condiciones, de (23.1) se desprende que $d\mathcal{E} = 0$.

Así, pues, de la homogeneidad del tiempo, para un sistema cerrado y aislado adiabáticamente, se desprende que $d\mathcal{E} = 0$ ó bien $\mathcal{E} = \text{const}$, es decir, la ley de la conservación de la energía. Una demostración más rigurosa requiere un aparato matemático más complicado.

Capítulo 24

SISTEMAS NO INERCIALES DE REFERENCIA Y GRAVITACIÓN

§ 24.1. Fenómenos en un sistema de referencia en movimiento acelerado

1. En los capítulos anteriores hemos descrito los fenómenos en sistemas inerciales de referencia. Examinemos cómo se comportan los cuerpos en sistemas de referencia que se mueven con aceleración respecto del sistema inercial. Para simplificar los razonamientos, nos limitaremos al caso particular, cuando el sistema no inercial de referencia en relación con el inercial, está en movimiento rectilíneo, con aceleración constante $w = \text{const}$ en el transcurso de cortos inter-

valos de tiempo, de forma que la velocidad del sistema de referencia $v = wt \ll c$.

A pesar de tan limitado planteamiento del problema, con medios elementales, obtendremos todas las regularidades que tienen importancia de principio.

2. Imaginémosnos un vagón suficientemente largo, a lo largo del cual está tendida una barra horizontal. Por ésta, sin rozamiento, puede moverse una bola maciza (fig. 24.1).

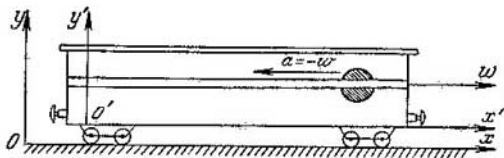


Fig. 24.1.

El sistema de referencia xyz , relacionado con la Tierra, como ya hemos dicho, es inercial en grado suficiente. Consideremos como se describen en el sistema de referencia $x'y'z'$, ligado con el vagón, los fenómenos que transcurren en éste.

La experiencia nos muestra que cuando el vagón se mueve respecto de la Tierra con aceleración w , la bola se desplaza a lo largo de la barra con aceleración $a = -w$, en lo que atañe

Sistema xy

Sobre la bola no actúa ninguna fuerza y por la ley de inercia su velocidad no varía, es decir, respecto de la Tierra su aceleración es igual a cero. Pero en relación con la Tierra el vagón se mueve con aceleración w , por lo que respecto del vagón la bola se mueve con aceleración

$$a = -w.$$

Sistema $x'y'$

Sobre la bola no actúa ninguna fuerza, pero, sin embargo, en relación con el vagón tiene una aceleración a . Por lo tanto, en el sistema de referencia ligado con el vagón, ha sido violada la ley de inercia: aquí surgen aceleraciones que no han sido provocadas por fuerzas. La causa radica en que el vagón se mueve respecto del sistema inercial con la aceleración

$$w = -a.$$

al vagón. Describamos este fenómeno desde el punto de vista de los dos sistemas de referencia.

Así, pues, en un sistema de referencia en movimiento acelerado se viola la ley de inercia. Por esta razón, semejante sistema es *no inercial*.

3. Variemos en cierto grado el experimento, uniendo la bola con un resorte, uno de cuyos extremos está fijado en la pared delantera del vagón (fig. 24.2). Mientras que el vagón está en reposo en relación con la Tierra o, en lo que a ésta atañe, está en movimiento rectilíneo y uniforme, el resorte

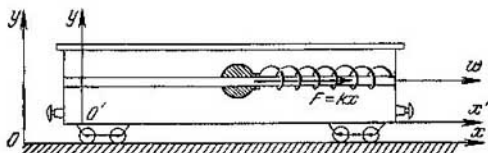


Fig. 24.2.

no se deformará. Si el vagón comienza a moverse con aceleración el muelle se estirará y conservará este estado mientras continúe el movimiento acelerado del vagón. Pero la bola estará en reposo, respecto del vagón. Examinemos también este caso desde el punto de vista de los dos sistemas de referencia.

*Sistema xy
(inercial)*

La bola está en reposo respecto del vagón y, por consiguiente, junto con el vagón se mueve en relación con la Tierra con aceleración w . Pero según la segunda ley de Newton la aceleración se provoca por la fuerza $F = mw$. Esta fuerza está aplicada a la bola por el lado del resorte deformado:

$$F = kx = mw.$$

*Sistema $x'y'$
(no inercial)*

La bola está en reposo en lo que atañe al vagón, aunque el resorte deformado actúa sobre ella con una fuerza $F = kx$. Por lo tanto, en el sistema de referencia, ligado con el vagón, se viola la segunda ley de Newton. La cuestión reside en que respecto del sistema inercial de referencia el vagón se mueve con la aceleración

$$w = l'/m = kx/m.$$

§ 24.2. Fuerza de inercia

1. Como mostramos en el párrafo anterior, en los sistemas no inerciales de referencia no se cumplen las leyes de Newton. No obstante, podemos enunciar una regla que permita, *de modo formal*, hacer uso de la segunda ley de Newton (la ecuación fundamental de dinámica) en los sistemas no inerciales de referencia.

Con este fin, retornemos al análisis de los fenómenos que transcurren en el vagón durante su movimiento acelerado (véanse las figs. 24.1 y 24.2). En el primer experimento,

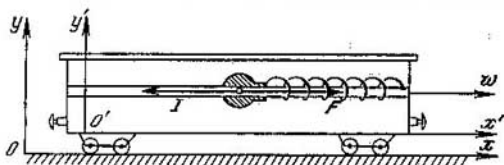


Fig. 24.3.

cuando la bola no interactúa con otros cuerpos, ésta a pesar de todo, se mueve respecto del vagón con aceleración $a = -w$. De esta forma, la bola se comporta como si sobre ella actuara cierta fuerza

$$I = ma = -mw,$$

que le comunicaría dicha aceleración.

En el segundo experimento, sobre la bola actúa el resorte deformado con una fuerza $F = -kx$. Sin embargo, dicha fuerza no comunica a la bola aceleración en relación con el vagón. Es como si sobre la bola actuara una fuerza I tal que equilibrara la fuerza F (fig. 24.3). La magnitud $I = -mw$, donde w es la aceleración del sistema no inercial de referencia (respecto del inercial), recibe el nombre de *fuerza de inercia*.

2. Haciendo uso de esta noción, podemos escribir de la forma siguiente la ecuación fundamental de dinámica en sistemas no inerciales:

$$R + I = ma, \quad (24.1)$$

donde R es la suma de todas las fuerzas de interacción, I , la fuerza de inercia, a , la aceleración del cuerpo respecto del sistema no inercial de referencia.

La fórmula (24.1) es la generalización de la ecuación fundamental de dinámica al tratar sistemas no inerciales de referencia:

La suma vectorial de todas las fuerzas de interacción y las fuerzas de inercia es igual al producto de la masa del cuerpo por su aceleración respecto del sistema no inercial de referencia.

3. Mostremos con un ejemplo como se aplica este principio. Supongamos que en un vagón en movimiento acelerado con relación a la Tierra, está colgado de un hilo cierto cuerpo de masa m . Como muestra la experiencia, en tanto que el vagón se mueva con aceleración, el hilo formará cierto ángulo α con la vertical. Calculemos este ángulo en sistemas inercial y no inercial de referencia.

Sistema inercial

Como el cuerpo está en reposo respecto del vagón, el cuerpo, junto con éste, se moverá con una aceleración w en relación con la Tierra. Esta aceleración es comunicada al cuerpo por la resultante de dos fuerzas: la de la gravedad y la de la tensión del hilo (fig. 24.4).



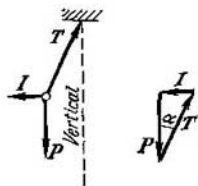
De acuerdo con la ecuación fundamental de dinámica

$$F = P + T = mw.$$

Pero $F/P = \operatorname{tg} \alpha$. Poniendo los valores $F = mw$ y $P = mg$, obtenemos $\operatorname{tg} \alpha = mw/mg = w/g$.

Sistema no inercial

Como el cuerpo está en reposo respecto del vagón, la suma vectorial de todas las fuerzas, incluidas las fuerzas de interacción y de inercia, es igual a cero. Por consiguiente, la fuerza de la gravedad, la fuerza de tensión del hilo y la fuerza de inercia forman un triángulo cerrado (fig. 24.5).



Del dibujo vemos que: $\operatorname{tg} \alpha = I/P$. Sustituyendo $I = mw$ y $P = mg$, tendremos

$$\operatorname{tg} \alpha = mw/mg = w/g.$$

§ 24.3. Particularidades de las fuerzas de inercia

1. Las fuerzas de inercia tienen una serie de singularidades que las distinguen de las fuerzas de interacción: elásticas, eléctricas, gravitacionales, fuerzas de rozamiento.

Enumeremos las más importantes de ellas:

a) La fuerza de inercia está provocada no por la interacción de los cuerpos, sino que por el movimiento acelerado del propio sistema de referencia; por esta razón, la tercera ley de Newton no puede ser aplicada a las fuerzas de inercia.

b) La fuerza de inercia actúa sobre el cuerpo sólo en sistemas no inerciales de referencia; en los sistemas inerciales no existen semejantes fuerzas.

c) Para cualquier sistema de cuerpos, ubicado en un sistema no inercial de referencia, las fuerzas de inercia son las fuerzas externas; por lo tanto, aquí no hay sistemas cerrados y, por consiguiente, no se cumplen las leyes de la conservación (con mayor detalle, véase el § 24.4).

d) Y por fin, señalemos que la fuerza de inercia, como la gravitatoria, es proporcional a la masa del cuerpo; por esto, en el campo de las fuerzas de inercia, como en el de las gravitatorias, todos los cuerpos se mueven con la misma aceleración, independientemente de sus masas (con mayor detalle, véase el § 24.5).

2. En los sistemas inerciales de referencia no hay fuerzas de inercia. Por esta causa, en dichos sistemas de referencia no se puede hacer uso de las fuerzas de inercia, ya que esto es un gran error. En los sistemas inerciales, el término «fuerza» sólo se aplica en el sentido newtoniano, como medida de la interacción de los cuerpos.

En los sistemas no inerciales, las fuerzas de inercia actúan como las de interacción. Si al frenar el vagón brusca-mente, la fuerza de inercia le lanza hacia adelante, sentirá esta fuerza de forma tal real como la fuerza de la gravedad. De forma exactamente igual, el cosmonauta siente con toda la realidad la fuerza de inercia que le aprieta contra el sillón durante la aceleración del cohete.

§ 24.4. El espacio y el tiempo en los sistemas no inerciales de referencia

1. Hemos llamado reiteradamente la atención del lector de que en los sistemas inerciales de referencia el tiempo es homogéneo, mientras que el espacio es homogéneo e isó-

tropo. Las propiedades geométricas del espacio homogéneo e isótropo se describen con ayuda de la geometría de Euclides.

Uno de los postulados fundamentales de la geometría de Euclides es el quinto, que puede ser formulado del siguiente modo: por un punto que no yace en la recta dada, puede ser trazada una recta paralela a la primera, con la particularidad de que puede ser trazada sólo una. De este postulado se

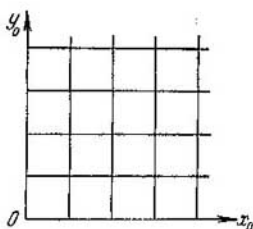


Fig. 24.6.

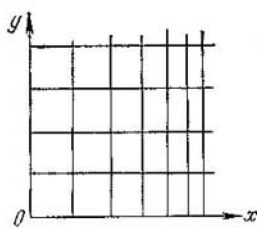


Fig. 24.7.

desprende que la suma de los ángulos internos del triángulo es igual a π radianes (180°). Y, por fin, notemos que en la geometría de Euclides, la distancia más corta entre dos puntos es un segmento de recta.

Para simplificar los siguientes razonamientos, nos limitaremos al análisis de las correlaciones geométricas en el plano, digamos, xy .

2. Sea que un observador se encuentra en un sistema inercial de referencia (por ejemplo, en la Tierra, fig. 24.1). Como ya sabemos, aquí el espacio y el tiempo son homogéneos e isótropos.

En el espacio homogéneo e isótropo la longitud del segmento no depende de la región del espacio en que se encuentra. Dividamos los ejes de coordenadas en segmentos iguales $\Delta x_0 = \Delta y_0 = l_0$ y por los puntos de división tracemos rectas paralelas a los ejes. En tal caso, el plano x_0y_0 se dividirá en celdas elementales (fig. 24.6), que tienen la forma de iguales cuadrados.

Del mismo modo, gracias a la homogeneidad del tiempo en el sistema inercial de referencia, el intervalo de tiempo Δt_0 entre dos acontecimientos, no depende del punto del espacio en el que se producen los acontecimientos.

3. El observador, situado en un sistema no inercial de referencia (por ejemplo, en un vagón en movimiento acelerado), descubrirá que el espacio no es homogéneo (fig. 24.7). En efecto, la longitud del segmento en un sistema de referencia en movimiento es menor que en el sistema de referencia, donde el segmento está en reposo (12.8):

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (24.2)$$

Si el observador, en movimiento uniformemente acelerado, ha recorrido la distancia x_0 en relación con la Tierra, entonces

$$v^2 = 2wx_0,$$

donde w es la aceleración del vagón. Poniendo el valor de v^2 en (24.2), obtenemos

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - 2wx_0/c^2}. \quad (24.3)$$

Esta expresión tiene sentido para $2wx_0 \ll c^2$. En tal caso, $x \approx x_0$ y la expresión (24.3) toma el aspecto

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - 2wx/c^2}. \quad (24.3')$$

Vemos que en los sistemas no inerciales de referencia la longitud del segmento es función de la región del espacio en que se encuentra: en los puntos con diferentes abscisas la longitud de un mismo segmento es diversa.

Pero a lo largo del eje de ordenadas el segmento conserva invariable su longitud, ya que en esa dirección no hay movimiento: $\Delta y = \Delta y_0$. Si construimos la red de coordenadas en un sistema no inercial de coordenadas, nos cercioraremos de que aquí el plano xy se divide en celdas elementales, en forma de rectángulos cuya anchura decrece a medida que nos desplazamos a lo largo del eje de abscisas (fig. 24.7).

4. En un sistema no inercial de referencia, el espacio no sólo no es homogéneo, sino que tampoco es isótropo.

Efectivamente, aquí las dos direcciones a lo largo del eje de abscisas no son equivalentes: en nuestro ejemplo, a lo largo de la dirección positiva de este eje, el elemento de longitud decrece, mientras que a lo largo de la negativa, crece. En lo que se refiere al eje de ordenadas la magnitud del elemento de longitud no varía. Por consiguiente, mediante un experimento físico, tenemos la posibilidad de

distinguir diversas direcciones en dicho espacio, lo que certifica que no es isótropo.

Indiquemos, que a causa de que el espacio no es homogéneo e isótropo, en los sistemas no inerciales de referencia no se cumplen las leyes de la conservación de la cantidad de movimiento y del momento de la cantidad de movimiento, de lo que ya hemos hablado.

5. Por fin, podemos cerciorarnos de que en los sistemas no inerciales de referencia, el tiempo no es homogéneo, como resultado de lo cual aquí no se cumple la ley de la conservación de la energía.

En un sistema de referencia en movimiento, el intervalo de tiempo entre dos acontecimientos, que transcurren en un mismo punto (§ 12.9), se expresa de la forma siguiente:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (24.4)$$

Haciendo, como antes, uso de la expresión $v^2 = 2wx$, obtenemos

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 2wx/c^2}}. \quad (24.5)$$

6. Vamos a mostrar que en los sistemas no inerciales de referencia, a causa de que el espacio no es homogéneo e isótropo, sus propiedades deben ser descritas por la *geometría no euclídea*.

En calidad de demostración, examinemos qué aspecto tiene en el espacio dado un segmento de recta, no paralelo a los ejes de coordenadas. Construyamos en un sistema inercial de referencia el segmento AB bajo un ángulo de 45° a los ejes de coordenadas (fig. 24.8). En el sistema no inercial *el segmento se convertirá en una quebrada* (fig. 24.9), y en realidad, si hacemos el elemento de longitud Δx infinitamente pequeño, se convertirá en *una línea curva*. Pero, entonces, la suma de los ángulos del triángulo curvilíneo obtenido resultará ya mayor que 180° ($\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$). Esto significa que en el espacio dado la geometría no es de Euclides.

Indiquemos también que aquí la distancia más corta entre los puntos A y B no será ya un segmento de recta, sino el arco de cierta curva, lo que también distingue la geometría de este espacio de la de Euclides.

7. En 1826 fue N. I. Lobachevski el primero que presentó la posibilidad de la existencia de geometrías no euclídeas. El mostró que es posible realizar construcciones de geometría no contradictoria, en la cual no se cumple el quinto postulado de Euclides. De esta forma, Lobachevski comenzó una serie de trabajos, continuados más adelante, acerca

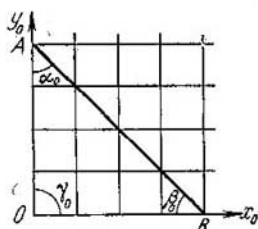


Fig. 24.8.

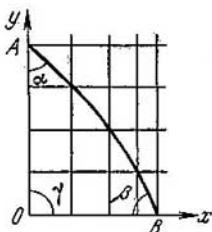


Fig. 24.9.

de las geometrías no euclídeas. Al mismo tiempo, propuso la idea de que la geometría del mundo real, posiblemente, es no euclídea.

Los contemporáneos de Lobachevski no pudieron comprender la profundidad de las ideas que radicaban en sus obras y muchos de ellos, no las tomaron en serio. Esto era comprensible, ya que la geometría de Euclides, de la que hacían uso durante más de dos milenios, estaba considerada como la base intangible de las ciencias, mientras que el intento de crear una geometría no euclídea se semejaba a una verdadera excentricidad, contradecía al «sentido común». Por cierto, que la teoría de la relatividad fue admitida por muchos científicos de este mismo modo.

A pesar de todo, resultó que la verdad se encontraba no en el «sentido común» de los conservadores, sino en las ideas revolucionarias de Lobachevski y Einstein. La previsión del científico acerca del carácter no euclídeo del mundo que nos rodea fue confirmada plenamente por la teoría general de la relatividad.

Llamamos con frecuencia espacio «curvado», aquel cuyas propiedades se describen en la geometría no euclídea. El sentido de ese término consiste en que en el espacio no euclídeo la distancia más corta entre dos puntos no es una línea

recta, sino cierta curva que recibe el nombre de «línea geodésica». Puede servir de ejemplo el arco de un gran círculo en la superficie de una esfera o una línea helicoidal en la superficie de un cilindro.

§ 24.5. Principio de equivalencia

1. Las fuerzas de inercia, como las de gravitación, son proporcionales a las masas de los cuerpos sobre las que están aplicadas. Por esta causa, en el campo de las fuerzas de inercia, como en el de las fuerzas de gravitación, todos los cuerpos se mueven con la misma aceleración, que no depende de sus masas.

De este modo, *las fuerzas de inercia, por sus manifestaciones, no se distinguen de las de gravitación.* Para ilustrar semejante hecho, analicemos una vez más el fenómeno descrito en el punto 3 del § 24.1. En él, sobre la bola actúa un resorte elásticamente deformado con una fuerza $F = -kx$, pero ésta no comunica al cuerpo aceleración respecto del vagón. Semejante situación es posible si sobre la bola, además de la fuerza de elasticidad, actúa una fuerza más de

Primera deducción

Por lo visto, *el vagón es un sistema no inercial de referencia* y la fuerza de elasticidad equilibra la fuerza de inercia: $F = -I$. Para cerciorarse de que ésta es, efectivamente, la fuerza de inercia, hay que unir al muelle cuerpos de distinta masa. Como la fuerza de inercia es proporcional a la masa del cuerpo, el alargamiento del muelle debe ser proporcional a la masa:

$$x = \frac{-F}{k} = \frac{I}{k} = \frac{mw}{k} = \xi m,$$

en donde

$$\xi = w/k = \text{const.}$$

Segunda deducción

Por lo visto, *el vagón es un sistema inercial de referencia, pero se encuentra en el campo de gravitación* y la fuerza de elasticidad equilibra la de gravitación: $F = -P$. Para cerciorarnos que ésta es realmente la fuerza de gravitación, hay que unir al muelle cuerpos de diferente masa. Como la fuerza de gravitación es proporcional a la masa del cuerpo, el alargamiento del muelle también es proporcional a la masa:

$$x = \frac{-F}{k} = \frac{P}{k} = \frac{mg}{k} = \xi m,$$

en donde

$$\xi = g/k = \text{const.}$$

igual magnitud, pero en dirección opuesta. Sin embargo, todos los cuerpos situados en el vagón, salvo el resorte, no interactúan con la bola. ¿A qué deducciones podemos llegar?

De este modo, *los fenómenos en un sistema inercial, situado en un campo gravitatorio homogéneo, y los que se producen en un sistema no inercial, que se mueve con aceleración de magnitud y dirección constantes, transcurren de forma absolutamente igual.* Este principio fue enunciado por primera vez

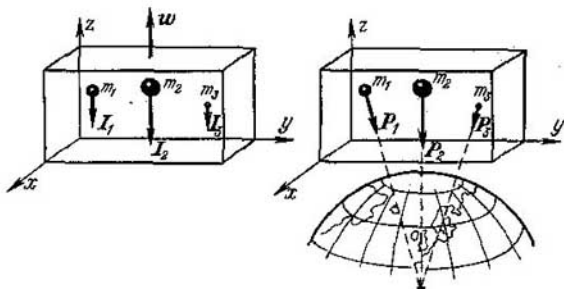


Fig. 24.10.

por Einstein y creó la base de la teoría relativista de gravitación (§ 24.6). Recibió el nombre de *principio de equivalencia*.

2. Hay que prestar particular atención a la precisión de enunciación del indicado principio. Sólo es válido para *pequeñas* regiones del espacio, tan pequeñas que en ellas el campo gravitatorio puede considerarse homogéneo. En grandes regiones del espacio, en las que de forma explícita se manifiesta la no homogeneidad del campo gravitatorio, es imposible elegir tal sistema no inercial de referencia en el que las fuerzas de inercia tengan las mismas magnitudes y direcciones que en el campo de las fuerzas de gravitación.

La cuestión consiste en que el campo de las fuerzas de gravitación es *central*, es decir, dichas fuerzas están dirigidas hacia el centro de la masa gravitante, por ejemplo de la Tierra: las fuerzas de gravitación varían inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Con ninguna aceleración del sistema de referencia es imposible obtener semejantes fuerzas de inercia, ya que con el movimiento acelerado

del sistema de referencia, las fuerzas de inercia serán paralelas entre sí (fig. 24.10).

3. De aquí se desprende, que no se puede ni pensar en que del principio de equivalencia se deduce que el campo gravitatorio es sólo «aparente», que en cualquier caso es posible elegir un sistema de referencia en el que no haya campo gravitatorio. Sobre este error advirtió múltiples veces Einstein. Sólo se puede hablar de que las propiedades del espacio y el tiempo en un campo gravitatorio y en sistemas no inerciales de referencia son análogas. En esto consiste la esencia de la teoría de gravitación de Einstein. Ciertas ideas de la misma serán examinadas a continuación.

§ 24.6. Concepto de la teoría de gravitación de Einstein

1. En el entorno de cuerpos macizos surge un campo gravitatorio. Se caracteriza por el vector de intensidad G , que por su sentido físico coincide con la aceleración de los cuerpos en el punto dado del campo, y de la magnitud escalar φ , que es el potencial del campo gravitatorio (§§ 9.6, 18.8). En un campo homogéneo, dirigido a lo largo del eje de abscisas, el potencial $\varphi = gx$, donde g es la aceleración de la caída libre, x , la distancia del punto del campo al nivel nulo del potencial, que elijeremos en el eje de ordenadas (véase (18.28)).

Del principio de equivalencia se desprende que las propiedades del espacio y el tiempo en el campo gravitatorio deben ser las mismas que en los sistemas no inerciales de referencia.

2. Supongamos que en punto, en el que el potencial del campo gravitatorio es igual a cero, el elemento de longitud a lo largo del eje de abscisas es igual a Δx_0 ; en ese mismo punto del campo, el intervalo de tiempo es igual a Δt_0 . Entonces, en otro cualquier punto del campo, en el que el potencial es φ , el elemento de longitud $\Delta x \neq \Delta x_0$, y el intervalo de tiempo $\Delta t \neq \Delta t_0$. Para los cálculos hagamos uso de las fórmulas (24.3') y (24.5). Ya que del principio de equivalencia sigue que $g = w$, el producto $wx = gx = \varphi$. Sustituyendo en (24.3') y (24.5), obtenemos

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - 2\varphi/c^2} \quad (24.6)$$

y

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 2\varphi/c^2}}. \quad (24.7)$$

Así, pues, en un campo gravitatorio, lo mismo que en los sistemas no inerciales de referencia, el tiempo no es homogéneo, mientras que el espacio no es euclídeo, es decir, no homogéneo y no isótropo. De este modo se ha confirmado la genial previsión de Lobachevski, de que la geometría del mundo real puede ser no euclídea.

3. Veamos, cómo desde este punto de vista se describe el movimiento de un cuerpo en el campo gravitatorio.

En la mecánica newtoniana, cuando no hay campo gravitatorio, un cuerpo se mueve por inercia, o sea, de modo rectilíneo y uniforme. Si, por el contrario, penetra en un campo gravitatorio, bajo la acción de la fuerza se viola el carácter inercial del movimiento. El cuerpo adquiere aceleración y se pone en movimiento no uniforme y no rectilíneo.

De acuerdo con la teoría general de la relatividad (teoría de gravitación de Einstein) *los cuerpos siempre se mueven por inercia*, independientemente de si hay o no campo gravitatorio. El movimiento por inercia es un movimiento por la *línea geodésica* (es decir, por la distancia más corta) y para éste se consume *el mínimo de tiempo propio* (o sea, el tiempo según el reloj ligado con el cuerpo en movimiento).

Si el cuerpo está en movimiento fuera del campo gravitatorio, allí el espacio es homogéneo e isótropo y el tiempo, homogéneo. Por lo tanto, el cuerpo se moverá por una trayectoria rectilínea, y la velocidad de movimiento será una magnitud constante: de $\Delta x = \text{const}$ y $\Delta t = \text{const}$, sigue que $v = \Delta x / \Delta t = \text{const}$.

Si, por el contrario, el cuerpo se mueve por el campo gravitatorio, en el que el tiempo no es homogéneo y el espacio, no homogéneo y no isótropo, la línea geodésica ya no es una línea recta, sino que es cierta curva, cuya forma depende de la estructura del campo gravitatorio. De la misma forma, la velocidad de movimiento será una magnitud variable, ya que el elemento de longitud y el intervalo de tiempo son aquí funciones del potencial gravitatorio (véase (24.6) y (24.7)).

Sobre la base de estas ideas, Einstein pudo formular la teoría relativista de gravitación, de la cual la ley de gravitación de Newton se desprende como un caso límite para campos débiles, con movimientos lentos de los cuerpos en interacción.

Sin embargo, esta nueva opinión acerca de las propiedades del espacio y el tiempo, permitió a Einstein, no sólo

obtener una nueva teoría de gravitación, sino que también descubrir tres efectos que no eran conocidos en la teoría de gravitación de Newton.

4. Ante todo, Einstein mostró que los planetas se mueven alrededor del Sol por curvas no cerradas y no por elipses. Cada una de estas curvas puede ser representada, aproximadamente, por elipses, cuyo eje gira con lentitud en el plano de la órbita.

Para los planetas muy lejanos del Sol, revelar este efecto es muy complicado. Entre los planetas el más cercano del Sol es Mercurio; por consiguiente, él se encuentra en un

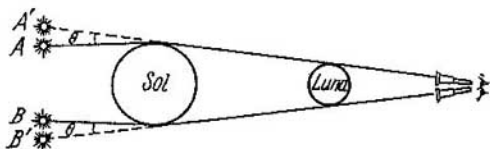


Fig. 24.11.

campo gravitatorio más fuerte y se mueve por la órbita con mayor rapidez que otros planetas. Por este motivo, los efectos relativistas se manifiestan con más fuerza. Resultó, que el giro del eje de la órbita de Mercurio debe constituir $43''$ por siglo. Semejante singularidad en las leyes de movimiento de Mercurio fue observada por los astrónomos ya en la mitad de siglo XIX, pero no se conseguía explicar semejante fenómeno. Las mediciones astronómicas más precisas del desplazamiento dieron el valor $(42,6 \pm 0,9)''$ por centenario, lo que perfectamente se explica con la teoría de gravitación de Einstein.

5. El segundo efecto que sigue de dicha teoría, es la curvatura de los rayos luminosos en el campo gravitatorio. En efecto, la luz siempre se propaga por las líneas geodésicas, y en el campo gravitatorio dichas líneas son curvas que dependen de la estructura del campo.

En el ámbito del Sistema Solar, un campo gravitatorio fuerte sólo existe en las cercanías de la superficie del Sol. Por esta razón, la curvatura de los rayos luminosos puede ser observada de la forma siguiente. Hay que fotografiar un sector de la esfera celeste cerca del Sol, seguidamente, ese

mismo sector, cuando el Sol salga de él; con ello, se debe observar el desplazamiento de las estrellas a cierto ángulo θ (fig. 24.11). Es natural que las fotografías de la bóveda celeste deben hacerse durante el eclipse total, ya que de otro modo, sobre el fondo de la brillante luz del Sol, la débil luz que emerge de las estrellas no se verá.

Einstein demostró que

$$\theta = \frac{4\varphi}{c^2} = \frac{4\gamma M}{c^2 R}, \quad (24.8)$$

donde M y R son, respectivamente, la masa y el radio del Sol. Poniendo los valores de $\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ H} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $R = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$ y $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, obtenemos

$$\theta = 0,085 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 1,75''.$$

Las mediciones realizadas por una serie de observadores, ofrecieron de $(1,72 \pm 0,11)''$ a $(1,82 \pm 0,15)''$, lo que en los límites de los errores de medición concuerda perfectamente con la teoría.

6. Por fin, gracias a la no homogeneidad del tiempo, cualquier proceso periódico en el campo gravitatorio debe transcurrir con más lentitud que fuera del campo. Por consiguiente, la marcha del reloj en el campo gravitatorio se retrasa.

Sea que un átomo irradia ondas electromagnéticas (es indiferente que sea luz visible o radiación gama) fuera del campo gravitatorio, con cierta frecuencia ν_0 . Entonces, ese mismo átomo, estando ubicado en un campo gravitatorio de potencial φ , irradiará ondas con menor frecuencia ν . En realidad, $\nu_0 = \Delta N / \Delta t_0$, donde ΔN es el número de oscilaciones. En el campo gravitatorio $\nu = \Delta N / \Delta t$, de donde $\nu / \nu_0 = \Delta t_0 / \Delta t$. Haciendo uso de (24.7), obtendremos

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - 2\varphi/c^2}. \quad (24.9)$$

En el experimento puede ser registrada la variación de la frecuencia

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = 1 - \sqrt{1 - 2\varphi/c^2} = \frac{2\varphi}{c^2 (1 + \sqrt{1 - 2\varphi/c^2})}.$$

Como, por lo general $\frac{2\varphi}{c^2} \ll 1$, entonces

$$1 + \sqrt{1 - 2\varphi/c^2} \approx 2.$$

Así, pues,

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{\varphi}{c^2}. \quad (24.10)$$

En el campo gravitatorio de la Tierra, el efecto de variación de la frecuencia es exclusivamente pequeño. Por ejemplo, a una altura h de la Tierra

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{\varphi}{c^2} = \frac{gh}{c^2} = \frac{9,81h}{9 \cdot 10^{16}} = 1,09 \cdot 10^{-16} h.$$

A pesar de todo, en 1960 Pound y Rebka, empleando el efecto de Mössbauer (§ 81.11), consiguieron confirmar de manera experimental la variación de la frecuencia de la radiación gamma en el campo gravitatorio de la Tierra. Fue comparada la radiación de dos núcleos del isótopo de hierro de masa atómica 57 de dos fuentes, una de las cuales se encontraba en la superficie de la Tierra y la segunda, a una altura de 22,5 m. La variación teórica de la frecuencia $\Delta v/v_0 = 2,46 \cdot 10^{-15}$. En el experimento resultó $\Delta v/v_0 = (2,56 \pm 0,25) \cdot 10^{-15}$. Su razón

$$\frac{\Delta v(\text{exp.})}{\Delta v(\text{teór})} = 1,04 \pm 0,12,$$

lo que en los límites de los errores del experimento, de forma brillante confirma la teoría de gravitación de Einstein.

§ 24.7. Paradoja de los gemelos

1. Supongamos que una nave cósmica es lanzada de la Tierra en el punto A , se acelera y se aleja de ella, a lo largo

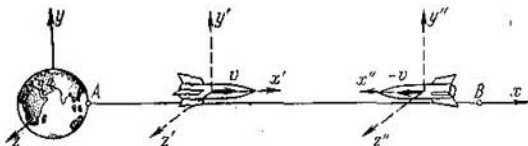


Fig. 24.12.

del eje de abscisas, a una velocidad v . A continuación, en el punto B la nave gira, se mueve hacia la Tierra a esa misma velocidad, es frenada y aterriza. Liguemos con la Tierra el sistema de referencia xyz , con la nave al alejarse, el sistema $x'y'z'$ y con la nave al acercarse, el sistema $x''y''z''$ (fig. 24.12).

Comparemos el intervalo de tiempo entre el lanzamiento y el aterrizaje según las indicaciones del reloj en la Tierra y del reloj ubicado en la nave cósmica. Se supone que la estructura de los relojes les permite funcionar con igual perfección en los dos sistemas de referencia.

2. El intervalo de tiempo entre los dos acontecimientos ocurridos según el reloj terrestre

$$\Delta t_{\text{Tierra}} = t_{2A} - t_{1A} = (t_{2A} - t_B) + (t_B - t_{1A}), \quad (24.11)$$

donde t_{1A} es el momento de lanzamiento de la nave, t_{2A} , el momento de aterrizaje y t_B , el momento de giro. Ese mismo intervalo de tiempo según el reloj cósmico, de acuerdo con (12.22), será igual a

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{cósm}} = \Delta t'' + \Delta t' &= \frac{t_{2A} - t_B + (x_A - x_B) v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \\ &+ \frac{t_B - t_{1A} - (x_B - x_A) v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (24.12)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{x_A - x_B}{t_{2A} - t_B} = -v, \quad \frac{x_B - x_A}{t_B - t_{1A}} = v,$$

y poniéndolas en (24.12), obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{cósm}} &= (t_{2A} - t_B) \frac{1 - v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + (t_B - t_{1A}) \frac{1 - v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \\ &= (t_{2A} - t_B) \sqrt{1 - v^2/c^2} + (t_B - t_{1A}) \sqrt{1 - v^2/c^2} = \\ &= \Delta t_{\text{Tierra}} \sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned}$$

Así, pues,

$$\Delta t_{\text{cósm}} = \Delta t_{\text{Tierra}} \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (24.13)$$

3. Este problema se puede resolver de otro modo, desde el punto de vista del observador que se encuentra en la nave cósmica. El reloj, en reposo en relación con la nave, muestra el tiempo propio (§ 12.9):

$$\Delta t_{\text{cósm}} = \Delta t'_0 + \Delta t''_0. \quad (24.14)$$

El tiempo de acuerdo con el reloj en Tierra, será hallado por la fórmula (12.21):

$$\Delta t_{\text{Tierra}} = \Delta t' + \Delta t'' = \frac{\Delta t'_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{\Delta t''_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_{\text{c6sm}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (24.15)$$

De nuevo hemos llegado a la fórmula (24.13).

Así, pues, con todo cálculo resulta que el tiempo en la nave cósmica transcurre con mayor lentitud que en la Tierra. Si, por ejemplo, $v = 0,9998c$, el tiempo se retrasa 50 veces! Por lo tanto, si uno de los gemelos marcha a la velocidad indicada a un largo viaje cósmico y, durante éste (por su calendario) envejece un año, su hermano que queda en la Tierra, envejecerá 50 años.

4. El retraso del tiempo en una nave cósmica que se mueve a gran velocidad, ofrece de principio la posibilidad de viajar a las lejanas estrellas, en el transcurso de intervalos de tiempo razonables según su propio reloj. Pero bien es verdad que las personas que quedaron en la Tierra nada sabrán de los resultados de semejante viaje.

Notemos, que en la actualidad son completamente desconocidos los requisitos técnicos (incluidas las fuentes de energía) que permitirán acelerar las naves cósmicas hasta velocidades ultrarrelativistas. Incluso la aceleración de las partículas elementales hasta dichas velocidades está ligada con enormes dificultades (§§ 41.4—41.6).

5. El resultado que más arriba hemos obtenido recibe el nombre de "paradoja de los gemelos". En realidad no hay paradoja ninguna y las objeciones que a veces se presentan respecto del resultado obtenido no tienen base. Consideremos algunas de ellos.

En ocasiones dicen que el resultado obtenido contradice al principio de la relatividad (§ 12.2). Esta objeción se basa en una confusión. Durante el lanzamiento, giro y aterrizaje, en la nave cósmica surgen sobrecargas, durante el vuelo libre, la ingravidez; en la Tierra no existe ninguno de esos fenómenos. Así, pues, los dos sistemas de referencia no son equivalentes y por lo tanto, en ellos el ritmo del tiempo es diferente. Aquí el principio de relatividad no es aplicable.

A veces, se oponen al resultado obtenido indicando que la nave cósmica no es un sistema inercial de referencia en las

etapas de lanzamiento, giro y aterrizaje, y durante el cálculo hicimos uso de las fórmulas de la teoría especial de la relatividad. Esta observación es razonable, pero resulta que el carácter no inercial no varía la esencia del problema. En los sectores, donde el movimiento de la nave no es uniforme, el tiempo también retardará, lo que fue mostrado en los párrafos anteriores.

6. En ocasiones se expresan dudas acerca de si es o no justa la aplicación de la teoría de la relatividad al ritmo de los procesos que transcurren en los organismos vivientes. Por cierto, que la posibilidad de aplicar a dichos organismos las leyes de la mecánica newtoniana, no provoca dudas. Pero no hay ningún motivo para el surgimiento de dichas dudas. El fomento de la ciencia ha mostrado que, al fin de cuentas, la vida se reduce a procesos fisicoquímicos, que transcurren en sistemas muy complicados, constituidos de compuestos de alto número molecular, es decir, de albúminas y ácidos nucleicos. Gracias a su alto grado de organización, estos sistemas, como es lógico, tienen sus regularidades específicas. Pero las leyes generales de física tanto newtoniana, como relativista, son aplicables por completo a dichos organismos.