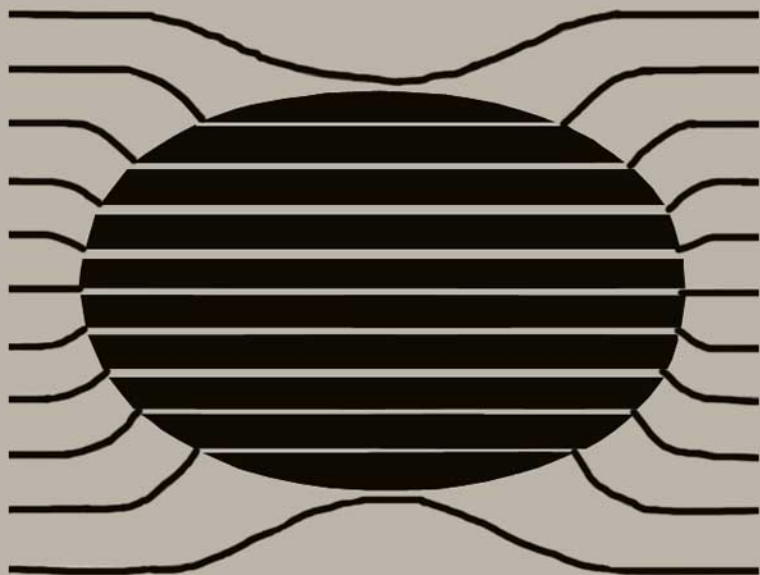


A. I. KITAIGORODSKI



INTRODUCCION  
A LA

FISICA



*Editorial Mir*  
*Moscú*





EDITORIAL MIR

А. И. КИТАЙГОРОДСКИЙ

ВВЕДЕНИЕ

В

ФИЗИКУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА  
МОСКВА

A. I. KITAIGORODSKI  
INTRODUCCION  
A LA  
FISICA

TRADUCIDO DEL RUSO\*POR EL INGENIERO

ANTONIO MOLINA GARCÍA

EDITORIAL MIR  
MOSCU

*На испанском языке*

Impreso en la URSS, 1975

© Traducción al español, Editorial Mir, 1975

# INDICE

Prólogo a la segunda edición

15

## PARTE I MOVIMIENTO MECÁNICO Y TÉRMICO

Capítulo

<b>1. LEY FUNDAMENTAL DE LA MECÁNICA</b>	
§ 1. Cinemática	17
§ 2. Fuerzas	24
§ 3. Ley fundamental de la mecánica	27
§ 4. Aplicación de la ley fundamental de la mecánica al movimiento rectilíneo acelerado	30
§ 5. Aplicación de la ley fundamental de la mecánica al movimiento circular	34
§ 6. Influencia de la rotación de la Tierra en los fenómenos mecánicos	39
§ 7. ¿Qué datos son necesarios para resolver un problema de mecánica?	43
§ 8. Coeficientes de proporcionalidad en las fórmulas de la física y dimensiones de las magnitudes físicas	46
<b>2. ENERGÍA MECÁNICA</b>	
§ 9. Trabajo	48
§ 10. Energía cinética	51
§ 11. Energía potencial	52
§ 12. Ley de conservación de la energía mecánica	57
§ 13. Curvas de potencial. Equilibrio	59
<b>3. IMPULSO</b>	
§ 14. Conservación del impulso	63
§ 15. Centro de inercia	64
§ 16. Choques	66
§ 17. Fenómenos de rechazo	73
<b>4. ROTACIÓN DE UN SÓLIDO</b>	
§ 18. Energía cinética de rotación	77
§ 19. Momento de inercia	79
§ 20. Trabajo de rotación y ecuación fundamental de la rotación	82
§ 21. Momento de impulsión	85
§ 22. Ejes de rotación libres	88
§ 23. Giroscopios	90
<b>5. OSCILACIONES</b>	
§ 24. Desviaciones pequeñas de la posición de equilibrio	91
§ 25. Casos particulares de oscilaciones	93

## INDICE

§ 26.	Transformaciones de la energía. Oscilaciones amortiguadas	96
§ 27.	Oscilaciones forzadas	100
§ 28.	Autooscilaciones	104
§ 29.	Composición de oscilaciones de una misma dirección	107
§ 30.	Espectro de las oscilaciones	110
§ 31.	Composición de oscilaciones perpendiculares entre sí	113
<b>6. ONDAS VIAJERAS</b>		
§ 32.	Propagación de la deformación	115
§ 33.	Origen del movimiento ondulatorio	119
§ 34.	Ondas de presión y de velocidad de oscilación	121
§ 35.	Flujo de energía	123
§ 36.	Amortiguación de las ondas elásticas	126
§ 37.	Interferencia de ondas	127
§ 38.	Principio de Huygens — Fresnel. Reflexión y refracción de las ondas	130
§ 39.	Coeficiente de reflexión	133
§ 40.	Efecto Doppler	135
<b>7. ONDAS ESTACIONARIAS</b>		
§ 41.	Superposición de dos ondas que se propagan en sentidos opuestos	137
§ 42.	Oscilaciones propias de las varillas	139
§ 43.	Oscilaciones propias de los sistemas bidimensionales y tridimensionales	142
§ 44.	Oscilaciones forzadas de varillas y láminas	145
§ 45.	Oscilaciones de los piezoeléctricos	147
<b>8. PROBLEMAS DE ACÚSTICA</b>		
§ 46.	Características objetiva y subjetiva del sonido	148
§ 47.	Intensidad y nivel de intensidad sonora	150
§ 48.	Acústica arquitectónica	152
§ 49.	Acústica atmosférica	154
§ 50.	Acción del ultrasonido	157
<b>9. TEMPERATURA Y CALOR</b>		
§ 51.	Equilibrio térmico	158
§ 52.	Energía interna	159
§ 53.	Primer principio de la termodinámica	161
§ 54.	Energía de los sistemas microscópicos	163
§ 55.	Ecuación de estado	164
§ 56.	Ecuación del estado gaseoso	167
§ 57.	Ecuación de estado de los gases reales	169
<b>10. PROCESOS TERMODINÁMICOS</b>		
§ 58.	Representación gráfica de las transformaciones	171
§ 59.	Trabajo. Ciclos	173



## INDICE

§ 60.	Transformaciones del estado de los gases	175
§ 61.	Efecto Joule — Thomson	183
<b>11. ENTROPIA</b>		
§ 62.	Principio de la existencia de la entropía	185
§ 63.	Principio del aumento de la entropía	188
§ 64.	Principio del funcionamiento de una máquina térmica	191
§ 65.	Ciclo de Carnot. Rendimiento máximo	193
§ 66.	Segundo principio de la termodinámica	195
<b>12. TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES</b>		
§ 67.	Conceptos fundamentales	196
§ 68.	Recorrido libre	199
§ 69.	Presión de un gas. Velocidad cuadrática media de las moléculas	201
§ 70.	Energía interna de un gas	204
§ 71.	Distribución estadística	206
§ 72.	Ley de Boltzmann	208
§ 73.	Distribución de las partículas por alturas en el campo de la gravedad	210
§ 74.	Distribución de las moléculas por velocidades	212
§ 75.	Medición de las velocidades de las moléculas de un gas	215
§ 76.	Probabilidad de un estado	216
§ 77.	Transformaciones irreversibles desde el punto de vista molecular	219
§ 78.	Fluctuaciones. Límites de aplicación del segundo principio	221
<b>13. PROCESOS DA TRANSICIÓN AL ESTADO DE EQUILIBRIO</b>		
§ 79.	Difusión	223
§ 80.	Conductibilidad térmica y viscosidad	225
§ 81.	Rapidez de igualación	227
§ 82.	Procesos estacionarios	230
§ 83.	Movimiento en un medio viscoso	231
§ 84.	Coeficientes de difusión, de viscosidad y de conductibilidad térmica de los gases	233
§ 85.	Gases ultraenrarecidos	235
<b>PARTE II</b>		
<b>CAMPO ELECTROMAGNÉTICO</b>		
<b>14. CAMPO ELÉCTRICO</b>		
§ 86.	Características vectoriales de un campo eléctrico: intensidad y desplazamiento	238
§ 87.	Constante dieléctrica	240
§ 88.	Leyes del campo eléctrico	242
§ 89.	Cálculo de los campos de los sistemas más simples	245
§ 90.	Energía eléctrica	256

## INDICE

§ 91.	Radio del electrón y límites de la electrodinámica clásica	259
§ 92.	Fuerzas eléctricas	261
§ 93.	Momento dipolar de un sistema de cargas	264
§ 94.	Polarización de un dieléctrico isotrópico	267
§ 95.	Polarización de los cuerpos cristalinos	270
§ 96.	Cuerpos dieléctricos finitos en un campo eléctrico	272
<b>15. CAMPO MAGNÉTICO</b>		
§ 97.	Momento magnético	276
§ 98.	Fuerza de Ampere	279
§ 99.	Fuerza que actúa sobre una carga en movimiento	281
§ 100.	Campo magnético creado por los imanes permanentes	283
§ 101.	Intensidad del campo magnético	285
§ 102.	Interacciones de las corrientes con los imanes	287
§ 103.	Equivalencia de las corrientes y los imanes	280
§ 104.	Carácter rotacional del campo magnético	292
§ 105.	Ley de la inducción electromagnética y fuerza de Lorentz	297
§ 106.	Medición del campo magnético por el método del impulso de inducción	298
§ 107.	Cuerpos finitos en un campo magnético	301
§ 108.	Relación entre la permeabilidad magnética y la susceptibilidad	305
§ 109.	Distorsión del campo al introducir en él un material magnético	306
§ 110.	Histéresis magnética	309
<b>16. CAMPO ELECTROMAGNÉTICO. ECUACIONES DE MAXWELL</b>		
§ 111.	Generalización de la ley de inducción electromagnética	312
§ 112.	Corriente de desplazamiento	316
§ 113.	Representación del campo electromagnético	320
<b>17. TRANSFORMACIONES ENERGÉTICAS EN EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO</b>		
§ 114.	Transformaciones en un circuito de corriente continua	322
§ 115.	Transformaciones en un circuito cerrado de corriente alterna	324
§ 116.	Energía magnética del campo	327
§ 117.	Oscilaciones eléctricas	329
§ 118.	Energía electromagnética	332
§ 119.	Impulso y presión de un campo electromagnético	336
<b>18. RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA</b>		
§ 120.	Dipolo elemental	338
§ 121.	Una antena como dipolo eléctrico	340
§ 122.	Radiación de un dipolo	342
§ 123.	Espectro electromagnético	344
§ 124.	Naturaleza cuántica de la radiación	346

## 19. PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 125.	Dispersión y absorción	348
§ 126.	Comportamiento de las ondas electromagnéticas en el límite de separación de dos medios	351
§ 127.	Luz natural y polarizada. Polarización por reflexión	354
§ 128.	Propagación de las ondas luminosas en un medio con gradiente del índice de refracción	356
§ 129.	Propagación de las ondas radioeléctricas	359
§ 130.	Radiolocalización	362

## 20. FENÓMENOS DE INTERFERENCIA

§ 131.	Composición de las ondas de dos fuentes	365
§ 132.	Coherencia	367
§ 133.	Interferencia en una lámina	372
§ 134.	Franjas de igual espesor y franjas de igual inclinación	345
§ 135.	Aplicaciones prácticas de la interferencia	378

## 21. DISPERSIÓN

§ 136.	Radiación secundaria	284
§ 137.	Difracción de las ondas por orificios	386
§ 138.	Sistema de dispersores colocados desordenadamente	391
§ 139.	Comportamiento de un medio homogéneo continuo	394
§ 140.	Dispersión en un medio no homogéneo	396
§ 141.	Red de difracción	398
§ 142.	Emisores dirigidos de ondas radioeléctricas	493
§ 142a.	Holografía	405

## 22. DIFRACCIÓN DE LOS RAYOS X POR UN CRISTAL

§ 143.	El cristal como red de difracción	408
§ 144.	Determinación de los parámetros de la celda unidad de un cristal	411
§ 145.	Intensidad de los rayos difractados	413
§ 146.	Métodos de análisis por difracción de rayos X	415

## 23. DOBLE REFRACCIÓN

§ 147.	Anisotropía de polarizabilidad	418
§ 148.	Propagación de la luz en los cristales uniaxiales	422
§ 149.	Polarizadores. Análisis del estado de polarización de la luz	427
§ 150.	Una lámina de cristal entre dos nicoles «cruzados»	430
§ 151.	Birrefringencia artificial	432
§ 152.	Actividad óptica	434
§ 153.	Principios de la teoría de actividad óptica	437

## 24. TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

§ 154.	Fundamentos de la teoría	439
§ 155.	Confirmaciones experimentales del principio de la constancia de la velocidad de la luz	441

## INDICE

§ 156.	El tiempo en la teoría de la relatividad	445
§ 157.	La masa	447
§ 158.	La energía	448
§ 159.	Defecto de masa	449
§ 160.	Principio de equivalencia y nociones de la teoría general de la relatividad	450
<b>25. NATURALEZA CUÁNTICA DEL CAMPO</b>		
§ 161.	Fotón	453
§ 162.	Efecto fotoeléctrico	456
§ 163.	Fluctuaciones del flujo luminoso	458
§ 164.	Ley de Kirchhoff	460
§ 165.	Cuerpo negro	462
§ 166.	Teoría de la radiación térmica	465
§ 166a.	Radiación estimulada	469
§ 166b.	Luminiscencia	471
<b>PARTE III</b>		
<b>ESTRUCTURA Y PROPIEDADES DE LA MATERIA</b>		
<b>26. FLUJOS DE PARTÍCULAS CARGADAS</b>		
§ 167.	Movimiento de una partícula con carga en un campo eléctrico y en un campo magnético	473
§ 168.	Obtención de haces de partículas con carga	476
§ 169.	Lentes electrónicas	478
§ 170.	Microscopio electrónico	481
§ 171.	Proyectores electrónicos e iónicos	486
§ 172.	Tubo de rayos catódicos	488
§ 173.	Espectrógrafo de masas	490
§ 174.	Aceleradores de partículas cargadas	493
§ 175.	Autoestabilización en fase	495
§ 176.	Sincrofasotrón. Sincrotrón	496
§ 177.	Gas ionizado	498
§ 178.	Descarga eléctrica en un gas	500
§ 178a.	Plasma	504
<b>27. PROPIEDADES ONDULATORIAS DE LAS MICROPARTÍCULAS</b>		
§ 179.	Difracción de los electrones	512
§ 180.	Ideas fundamentales de la mecánica cuántica	515
§ 181.	Principio de incertidumbre	517
§ 182.	Caja de potencial	522
§ 183.	¿Qué da la solución de la ecuación de Schrödinger?	526
§ 184.	Efecto túnel	527
<b>28. ESTRUCTURA DEL ÁTOMO</b>		
§ 185.	Niveles de energía del átomo de hidrógeno	529
§ 186.	Números cuánticos	532

INDICE

187.	Nube electrónica para los estados $s$ y $p$	534
188.	Principio de Pauli	536
189.	Desviación de un haz atómico en un campo magnético	537
190.	Espin del electrón	539
191.	Momentos magnéticos de los átomos	542
192.	Ley periódica de Mendeléiev	543
193.	Potenciales de ionización	545
194.	Espectros de los átomos en la región óptica	546
195.	Espectros atómicos de rayos X	548

## 29. MOLÉCULA

196.	Enlace químico	551
197.	Geometría de las moléculas	555
198.	Capa electrónica de la molécula	558
199.	Niveles energéticos de las moléculas	560
200.	Espectro de rotación de las moléculas	563
201.	Espectro infrarrojo de vibración — rotación	566
202.	Dispersión de combinación de la luz	572
203.	Espectro electrónico de absorción	575
204.	Resonancia magnética	577
205.	Resonancia cuadrípolar	579
206.	Láseres de gas	581

## 30. NÚCLEO ATÓMICO

207.	Métodos experimentales de la física nuclear	589
208.	Partículas que entran en la composición del núcleo	598
209.	Masa y energía del núcleo atómico	599
210.	Espin y momento magnético del núcleo	602
211.	Fuerzas de interacción de los nucleones	604
212.	Los nucleones en el núcleo	606
213.	Espectros de los núcleos atómicos	607
214.	Neutrino de desintegración beta	610
215.	Leyes comunes de las transformaciones químicas y nucleares	611
216.	Radiactividad	614
217.	Reacciones nucleares	617
217a.	Reacciones de fisión de núcleos pesados	620
217b.	Reacción en cadena	622
217c.	Principios en que se basa el funcionamiento de un reactor nuclear	624
217d.	Productos radiactivos artificiales	627
218.	Reacciones termonucleares	628

## 31. PARTÍCULAS ELEMENTALES

219.	Partícula «elemental»	630
220.	Interacción de electrones rápidos	631
221.	Teoría mesónica de la interacción de los nucleones	633
222.	Mesones	634
223.	Teoría relativista del electrón	635
224.	Generación y aniquilación de pares de partículas	637

## INDICE

§ 225. Partículas y antipartículas	639
§ 226. Asimetría de las partículas elementales	641
§ 226a. Espectro bariónico	643
§ 226b. Quarks	647
<b>32. ESTRUCTURA ATÓMICA DE LOS CUERPOS</b>	
§ 227. Sustancia policristalina y monocristales	648
§ 228. Red espacial	650
§ 229. Elección de la celdilla. Simetría de un cristal	654
§ 230. Empaquetamiento de las partículas en el cristal	658
§ 231. Cristal molecular	661
§ 232. Empaquetamientos densos de esferas	665
§ 233. Ejemplos de estructuras cristalinas	668
§ 234. Oscilaciones térmicas en un cristal	672
§ 235. Ondas térmicas	674
§ 236. Dilatación	677
§ 237. Defectos de un cristal	679
§ 238. Ordenación próxima. Líquidos	684
§ 239. Cuerpos amorfos	686
§ 240. Ordenación remota y próxima de los átomos en las aleaciones	688
§ 241. Cristales líquidos	690
§ 242. Polímeros	692
§ 242a. Macromoléculas biológicas	694
<b>33. TRANSICIONES DE FASE</b>	
§ 243. Diagrama de estado	695
§ 244. Transiciones de fase	697
§ 244a. Diagrama de estado y propiedades del helio	699
§ 245. Condiciones de estabilidad del estado de una fase	703
§ 246. Estados metaestables	706
§ 247. Transformaciones gas $\rightleftharpoons$ líquido	708
§ 248. Licuefacción de los gases	710
§ 249. Transformaciones gas $\rightleftharpoons$ cristal	711
§ 250. Transformaciones líquido $\rightleftharpoons$ cristal	712
§ 251. Transformaciones cristal $\rightleftharpoons$ cristal	716
§ 252. Difusión en los sólidos	718
<b>34. DEFORMACIÓN DE LOS CUERPOS</b>	
§ 253. Propiedades elásticas	720
§ 254. Propiedades plásticas	722
§ 255. Límite de rotura	724
§ 256. Propiedades mecánicas de un material policristalino	725
§ 257. Influencia de las sustancias con actividad superficial en la deformación	726
§ 258. Destrucción de los materiales por la acción de un flujo de partículas	728
<b>35. DIELECTRICOS</b>	
§ 259. Relación entre la permitividad y la polarizabilidad de las moléculas	731

## INDICE

§ 260. Polarización de moléculas polares y no polares	734
§ 261. Aditividad de la refracción molecular	737
§ 262. Piroeléctricos y piezoeléctricos	739
§ 262a. Ferroeléctricos	741

### 36. MATERIALES MAGNÉTICOS

§ 263. Tres clases de materiales magnéticos	743
§ 264. Diamagnetismo	744
§ 265. Paramagnetismo	747
§ 266. Ferromagnetismo	749

### 37. ESTRUCTURA ELECTRONICA Y PROPIEDADES DE LOS CUERPOS

§ 267. Electrones libres	756
§ 268. Niveles energéticos en el sólido	757
§ 269. Gas electrónico	760
§ 270. Conductibilidad	764
§ 271. Superconductividad	767
§ 272. Semiconductores	770
§ 273. Emisión de electrones	775
§ 274. Efecto fotoeléctrico	778
§ 275. Capa de barrera	781
§ 276. Diferencia de potencial de contacto	783
§ 276a. Electroluminiscencia de los semiconductores	785
§ 277. Distribución de las cargas en un cuerpo calentado irregularmente	786
§ 278. Fuerza termoelectromotriz	787
§ 279. Desprendimiento de calor en los circuitos eléctricos	790
§ 280. Aplicación del efecto termoeléctrico	792

APÉNDICE.	793
Tabla de fórmulas de electrodinamica	799

INDICE ALFABÉTICO





## PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

A la primera edición de este libro le siguieron dos ediciones en inglés y otras dos en polaco. Muchos centros de enseñanza (en su mayoría extranjeros) han considerado que los principios básicos de este libro coinciden con los suyos propios. Me limitaré aquí a enumerar estas ideas fundamentales. Son éstas la falta de detalles y de descripciones de experimentos, la exposición deductiva de la teoría, la exclusión de la historiología y la renuncia absoluta a repetir el material que se estudia en las escuelas de enseñanza media. Al mismo tiempo he considerado imposible la omisión de cuestiones más complicadas, porque creo que una mención, siquiera fugaz, de muchos problemas que preocupan hoy a los físicos es necesaria, aunque no sea más que para dar al lector noticia de su existencia. Esta circunstancia dio motivo a que un colega, al que quiero y respeto, llamase a esta obra «Física a vista de pájaro». Yo acepto esta apreciación, con su algo de doble sentido, como un halago. Es natural que al hacer una exposición sucinta se pierden detalles, pero si el autor ha logrado dar unos contornos bien definidos al edificio esbelto y elegante de la física, puede dar por cumplida su tarea.

*A. Kitaigorodski*



# I

## MOVIMIENTO MECÁNICO Y TÉRMICO

### 1

#### LEY FUNDAMENTAL DE LA MECÁNICA

##### § 1. Cinemática

ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO DE UN PUNTO MATERIAL. Si las dimensiones y forma de un cuerpo carecen de importancia al estudiar un fenómeno, este cuerpo se sustituye mentalmente por un punto. La representación aproximada de un cuerpo por un punto material (es decir, que posee masa) es justa no sólo en los casos en que las dimensiones del cuerpo son pequeñas comparadas con otras dimensiones que figuran en el problema, sino también en todos aquellos en que interese conocer únicamente el movimiento del centro de gravedad del cuerpo.

Para describir el movimiento de un punto material hay que indicar en qué lugares del espacio estuvo dicho punto y en qué instantes pasó por unos puntos determinados de la trayectoria. Con este objeto es necesario ante todo elegir un sistema de coordenadas de referencia (fig. 1). La situación del punto con respecto a este sistema, que suele elegirse rectangular por ser más sencillo, se caracteriza por tres coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  o por el llamado radio vector o vector de posición  $r$  trazado desde el origen de referencia al punto dado \*) (fig. 2).

\*) El radio vector  $r$  viene dado por su magnitud, igual a  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , y por los ángulos que forma con los ejes de coordenadas:  $\cos \alpha = x/r$ ,  $\cos \beta = y/r$  y  $\cos \gamma = z/r$ . De este modo, para conocer el radio vector  $r$  hay que disponer de tres números que pueden ser:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  o  $r$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  o  $r$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ , etc. (dos ángulos definen el tercero, puesto que  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ).

El resultado de la investigación del movimiento puede darse, por lo tanto, aproximadamente, en forma de tabla de los valores de  $r$  (con tres números para cada valor) correspondientes a los instantes  $t_1, t_2$ , etc. o, exactamente, en forma de una función

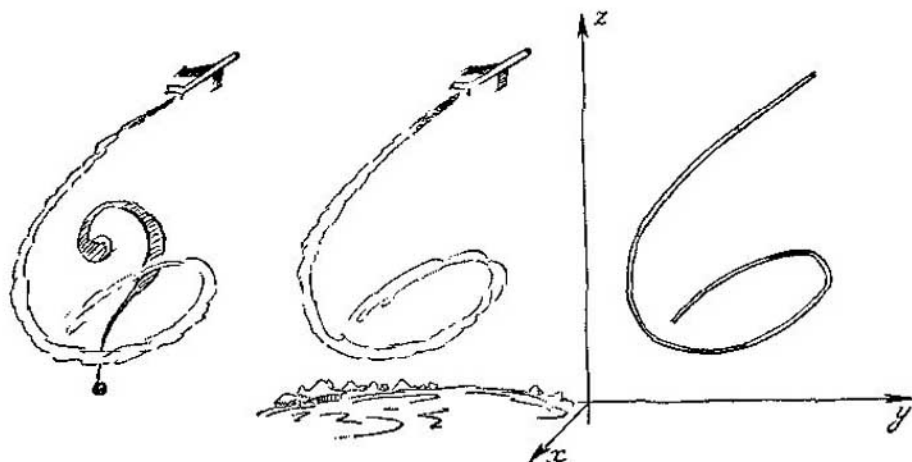


FIG. 1.

continua  $r=f(t)$  (en realidad en forma de tres funciones, por ejemplo,  $x=f_1(t)$ ,  $y=f_2(t)$ ,  $z=f_3(t)$  o  $r=\varphi_1(t)$ ,  $\alpha=\varphi_2(t)$ ,  $\beta=\varphi_3(t)$ , etc.).

La ecuación vectorial  $r=f(t)$  y las tres ecuaciones escalares equivalentes a ella se llaman *ecuaciones del movimiento*.

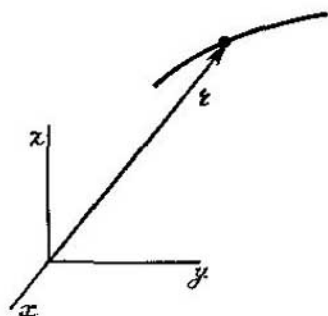


FIG. 2.

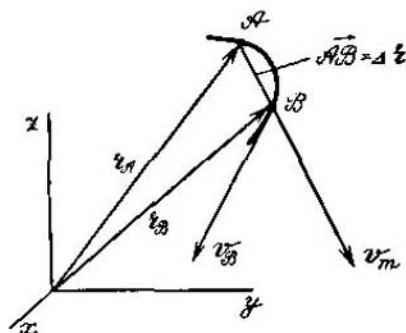


FIG. 3.

VELOCIDAD MEDIA. Consideremos un tramo de trayectoria  $AB$ . Supongamos que en un instante  $t$  el punto móvil se encontraba en  $A$

y en el instante  $t + \Delta t$ , en el  $B$  (fig. 3). Tracemos los radios vectores  $r_A$  y  $r_B$ . Sabemos que durante el tiempo  $\Delta t$  el punto se trasladó desde  $A$  hasta  $B$ . Es natural, pues, llamar al vector  $\overrightarrow{AB}$  vector traslación del punto.

Los vectores se componen de acuerdo con la regla del paralelogramo. Observando la fig. 3 vemos que

$$r_B = r_A + \overrightarrow{AB}, \text{ o } \overrightarrow{AB} = r_B - r_A = \Delta r,$$

es decir, el vector traslación del punto es la diferencia vectorial de los radios vectores. El valor del vector traslación  $\Delta r$  en el tiempo  $\Delta t$  determinará el movimiento curvilíneo con una exactitud tanto mayor cuanto menor sea  $\Delta r$ .

La velocidad media en el tramo  $AB$  se acostumbra caracterizarla por la relación

$$v_m = \frac{AB}{\Delta t};$$

ésta es, por consiguiente, la velocidad a que el cuerpo recorrería el tramo  $AB$  con movimiento rectilíneo y uniforme en el tiempo  $\Delta t$ .

Así, pues, el movimiento en el tramo  $AB$  se puede caracterizar por la dirección del vector  $\overrightarrow{AB} = \Delta r$  y la magnitud de la velocidad  $v_m$ . En vez de esto se introduce el vector

$$v_m = \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t},$$

que es igual en longitud a la velocidad media y tiene la dirección del vector traslación. Ahora puede decirse que el movimiento del cuerpo en el tramo  $AB$  viene determinado por la velocidad vectorial media.

VELOCIDAD VERDADERA (INSTANTÁNEA). Si disminuimos el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , el punto  $B$  se aproximará al  $A$ . Llegará un instante en que estos puntos se unan, convirtiéndose la dirección  $\overrightarrow{AB}$  en línea tangente a la trayectoria en el punto en que se unen aquéllos.

Se puede afirmar que la relación  $\overrightarrow{AB}/\Delta t$  tiende al límite cuando  $\Delta t$  disminuye. El vector  $v_{\text{verd}}$ , que tiene dirección tangencial a la trayectoria del punto en el instante dado del movimiento y numéricamente es igual al límite de  $AB/\Delta t$  si  $\Delta t \rightarrow 0$ , se llama *velocidad vectorial verdadera (instantánea)* del movimiento del punto:

$$v_{\text{verd}} = \lim \frac{\Delta r}{\Delta t} \text{ cuando } \Delta t \rightarrow 0.$$

En otras palabras, la velocidad verdadera (instantánea) es la derivada del vector  $r$  respecto del tiempo:

$$v = \frac{dr}{dt}.$$

Subrayamos una vez más que para describir un movimiento no es obligatorio emplear vectores. En vez de utilizar el concepto de velocidad vectorial se puede hablar de valor numérico de la velocidad  $\left|\frac{dr}{dt}\right|^{*)}$  e indicar la dirección del movimiento. Pero en este caso las mismas reglas y los mismos datos experimentales tienen que formularse mediante frases más largas. El idioma de los vectores concuerda con la experiencia física y, además, es conciso y expresivo. Claro está que para acostumbrarse a él hay que hacer cierto esfuerzo.

Como las proyecciones del vector  $r$  sobre los ejes de coordenadas son las coordenadas de su extremo  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , las proyecciones de la velocidad vectorial serán iguales a

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

**ACELERACIÓN VECTORIAL.** Prosiguiendo el estudio del movimiento curvilíneo, construyamos en forma de flechas las velocidades verdaderas del movimiento del cuerpo al pasar por los puntos  $A$  y  $B$  de su trayectoria. Si no hubiéramos introducido el concepto de velocidad vectorial tendríamos que decir así: la velocidad en  $B$  es distinta que en  $A$  y, además, varió la dirección del movimiento. Utilizando la velocidad vectorial diremos simplemente: en el punto  $B$  la velocidad vectorial es distinta que en  $A$ .

La velocidad vectorial puede variar en magnitud y en dirección.

Si el tramo  $AB$  es rectilíneo, los vectores  $v_A$  y  $v_B$  tendrán la misma dirección. La magnitud de la variación de la velocidad se halla en este caso restando aritméticamente la longitud del vector  $v_A$  de la del vector  $v_B$ .

Consideremos un tramo rectilíneo  $AB$ ; los vectores  $v_A$  y  $v_B$  difieren ahora tanto en magnitud como en dirección. Para determinar cuánto aumentó la *magnitud* de la velocidad hay que restar, como antes, la longitud del vector  $v_A$  de la del  $v_B$ :

$$\Delta |v| = |v_B| - |v_A|.$$

Sin embargo, este número no caracteriza completamente las variaciones ocurridas en el movimiento.

\*) Las líneas verticales  $||$  significan que sólo se tiene en cuenta el valor numérico (módulo) de la magnitud vectorial encerrada entre ellas.

Restemos ahora el vector  $v_A$  del  $v_B$  según las reglas de operaciones con vectores. En la fig. 4 se muestra el vector

$$\Delta v = v_B - v_A.$$

El vector  $v_B -$  suma  $\Delta v + v_A$  — es la diagonal del paralelogramo construido sobre estos vectores.

Al vector  $\Delta v$  le llamaremos incremento vectorial de la velocidad. La longitud de este vector, en el caso del movimiento curvilíneo, no es igual a  $\Delta|v| = |v_B| - |v_A|$ . La figura evidencia que la magnitud del incremento vectorial  $|\Delta v|$  es mayor que la

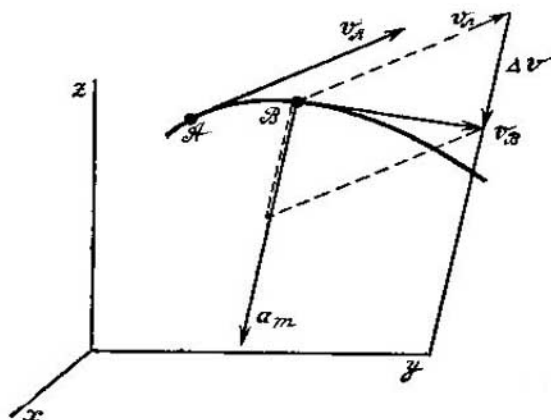


FIG. 4.

diferencia  $\Delta|v|$  entre las magnitudes de las velocidades vectoriales. Para conocer la velocidad vectorial en el punto  $B$  hay que sumar, de acuerdo con la regla del paralelogramo, el vector velocidad  $v_A$  y el incremento  $\Delta v$ .

Ahora podemos definir la magnitud de la aceleración en el movimiento curvilíneo de la forma siguiente: el vector igual a la razón del incremento vectorial de la velocidad al tiempo durante el cual se produjo este incremento se llama *aceleración vectorial media*:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Al disminuir el intervalo de tiempo  $\Delta t$  esta relación tiende al límite. El vector

$$a_{\text{verd}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

se llama *aceleración vectorial verdadera (instantánea)* del cuerpo en un instante dado de su movimiento. En otras palabras, la aceleración vectorial es igual a la derivada de la velocidad vectorial:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

y

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

La aceleración vectorial define unívocamente el carácter de la variación de la velocidad del cuerpo.

En general, el vector aceleración puede formar cualquier ángulo con la trayectoria del movimiento. Este ángulo deter-

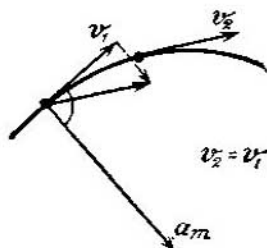
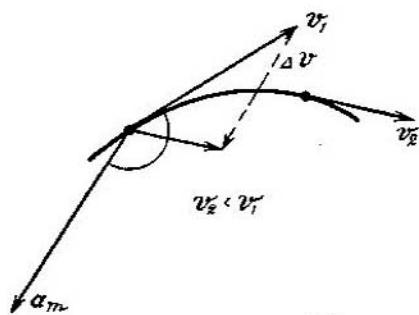
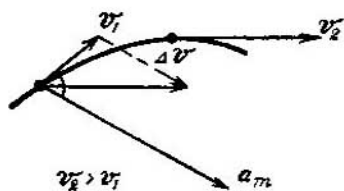


FIG. 5.

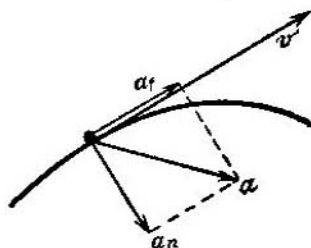


FIG. 6.

mina el carácter de la aceleración y la curvatura de la trayectoria del modo siguiente. Por el punto que nos interesa de la trayectoria trazamos una circunferencia que tenga con aquélla una tangente común en dicho punto y que en el tramo dado de la curva se aproxime lo más exactamente posible a ella. Esta circunferencia se llama *osculatriz* \*), y su radio  $\rho$  recibe el nombre de *radio de curvatura* en el punto dado. El vector aceleración está siempre dirigido hacia dentro de esta circunferencia. Si el movimiento es acelerado, el vector  $a$  formará un ángulo agudo con la trayectoria (es decir,

\*) La circunferencia oscultriz y el cálculo del radio de curvatura se estudian detenidamente en los cursos de geometría diferencial.



con la tangente a la trayectoria en el punto dado). Si el movimiento es retardado este ángulo será obtuso. Y, finalmente, si la velocidad no cambia en magnitud, la aceleración vectorial será normal a la trayectoria.

Estas afirmaciones pueden demostrarse rigurosamente; nosotros nos limitaremos a dar su ilustración geométrica (fig. 5).

De acuerdo con lo dicho, el vector aceleración se suele descomponer en dos (fig. 6):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

Como el triángulo vectorial es rectángulo,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

El vector  $\mathbf{a}_t$ , dirigido a lo largo de la trayectoria, caracteriza la variación de la velocidad en magnitud; este vector se llama *aceleración tangencial*. No es difícil demostrar que la aceleración tangencial

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta |\mathbf{v}|}{\Delta t} \text{ cuando } \Delta t \rightarrow 0,$$

es decir,  $a_t = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt}$ , donde  $\Delta |\mathbf{v}|$  es el incremento de la magnitud de la velocidad.

El vector  $\mathbf{a}_n$  está dirigido según la normal a la trayectoria; este vector caracteriza el cambio de dirección de la velocidad y se denomina *aceleración normal*.

La aceleración normal  $a_n$  está ligada por medio de una fórmula simple con la magnitud de la velocidad  $v$  y el radio de curvatura  $\rho$  en el punto dado, a saber:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

De esta fórmula, que se deduce en los cursos de mecánica teórica basándose en razonamientos geométricos, se desprende que un movimiento en el cual permanece invariable la aceleración normal ( $a_n$  y  $v$  son magnitudes constantes) es un movimiento circular. En este caso  $\rho$  es una magnitud constante para todos los puntos de la trayectoria e igual al radio de la circunferencia.

La aceleración normal  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$  se llama también con frecuencia *aceleración centripeta*.

La aceleración centripeta de un cuerpo que se mueve por una circunferencia de radio  $R$  puede expresarse también en función del período  $T$ , de la frecuencia  $\nu$  o de la velocidad angular  $\omega$  de dicho movimiento. Entre estas magnitudes y la velocidad lineal  $v$

existen las siguientes relaciones simples:

$$v = \frac{2\pi R}{T}, \quad v = \omega R, \quad v = \frac{l}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Las dos últimas fórmulas son las definiciones de las magnitudes auxiliares  $v$  y  $\omega$ .

De este modo, la aceleración centrípeta de un cuerpo que se mueve siguiendo una circunferencia se puede escribir también en la forma

$$a_n = \omega^2 R \quad \text{o} \quad a_n = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Hay que subrayar que el concepto ordinario de la palabra «aceleración» es mucho más estrecho que su sentido físico. El concepto físico de aceleración incluye la retardación o deceleración (aceleración negativa); lo más importante es que llamamos también acelerado al movimiento uniforme que tiene lugar siguiendo una línea curva. Movimiento sin aceleración vectorial puede ser únicamente el que es a la vez rectilíneo y uniforme.

*Orden de las aceleraciones.* En un acelerador moderno el protón se mueve, siguiendo una circunferencia, con una aceleración normal del orden de  $10^{16}$  m/s<sup>2</sup>. La aceleración lineal de los modernos proyectiles a reacción es de  $\sim 30$  m/s<sup>2</sup>. La aceleración de una pelota de hockey es de  $\sim 10$  m/s<sup>2</sup>. La aceleración de un automóvil al arrancar es de  $1-2$  m/s<sup>2</sup>. La velocidad angular del rotor de un turbogenerador es de  $314$  rad/s, a  $0,5$  m de distancia del eje de rotación sus partículas se mueven con una aceleración de  $\sim 5 \cdot 10^3$  m/s<sup>2</sup>. La velocidad angular de la rueda de una bicicleta es de  $7-10$  rad/s<sup>2</sup>, las partículas de su llanta de radio  $0,5$  m tienen una aceleración normal de cerca de  $20$  m/s<sup>2</sup>.

## § 2. Fuerzas

En la actualidad conocen los físicos cuatro tipos de interacciones.

**FUERZAS GRAVITATORIAS.** Las fuerzas de atracción establecidas por Newton para los cuerpos celestes, llamadas también gravitatorias, actúan entre dos partículas materiales cualesquiera de acuerdo con la ley

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

donde  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$  (N · m<sup>2</sup>)/kg<sup>2</sup>,  $m_1$ ,  $m_2$  son las masas de las partículas y  $r$  es la distancia entre ellas.

Puede demostrarse rigurosamente, aunque nosotros no nos detendremos en ello, que la ley de atracción de Newton escrita para los cuerpos de pequeñas dimensiones (comparadas con la distancia entre ellos) también es válida para la interacción de un

cuerpo pequeño con una gran esfera. En este caso debe entenderse por distancia la que hay entre los centros de los cuerpos.

La ley de la gravitación universal para el caso de la atracción de un cuerpo por la Tierra se escribe por esto en la forma

$$F = \gamma \frac{M}{(R+h)^2} m,$$

donde  $h$  es la altura sobre la superficie de la Tierra y  $R$  es el radio de la esfera terrestre. Para los puntos próximos a la superficie de la Tierra  $h$  es tan pequeña con respecto a  $R$  que  $R+h$  se puede sustituir por  $R$ . En este caso  $F = \gamma \frac{M}{R^2} m$ . Comparando esta fórmula con la expresión ordinaria del peso  $F = mg$ , vemos que la aceleración de la gravedad puede expresarse en función de la constante de gravitación, de la masa de la Tierra y del radio de ésta por medio de la fórmula

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

El hecho de que las fuerzas de atracción sean proporcionales a las masas hace que aquéllas sean enormes para los cuerpos celestes e insignificantes por su pequeñez para las partículas elementales. En las interacciones de los átomos, las moléculas u otras partículas de la materia no desempeñan ningún papel las fuerzas de gravitación.

La fuerza de atracción entre la Luna y la Tierra es igual a  $2,3 \times 10^{20}$  N; entre la Tierra y una molécula de oxígeno,  $\sim 5 \cdot 10^{-25}$  N; entre dos moléculas de oxígeno que se hallen a la distancia de contacto ( $3\text{Å} = 3 \cdot 10^{-8}$  cm),  $\sim 2 \cdot 10^{-12}$  N. Estas cifras son elocuentes por sí mismas.

**FUERZAS ELECTROMAGNÉTICAS.** Si las partículas o los grandes cuerpos poseen cargas eléctricas  $q_1$  y  $q_2$ , entre ellas actúa una fuerza, de atracción si las cargas son de signo contrario y de repulsión si son de igual signo, de acuerdo con la ley de Coulomb

$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ . Lo mismo que en el caso de la gravitación universal, esta fórmula es válida para las partículas puntuales. A su debido tiempo estableceremos (§ 111) que las fuerzas magnéticas se encuentran en relación directa con las fuerzas eléctricas. Todas las interacciones electromagnéticas son de una misma naturaleza.

Las interacciones entre los átomos, las fuerzas intermoleculares y las que retienen a los electrones cerca del núcleo atómico son todas de procedencia eléctrica. Para subrayar una vez más que las interacciones gravitatorias entre partículas elementales son insignificantes, compararemos la fuerza de atracción gravitatoria con la de atracción eléctrica en el caso de un átomo de hidrógeno

con su único electrón:

$$F_{e1} = 9 \cdot 10^{-8} \text{ N}, \text{ mientras que } F_{gr} = 4 \cdot 10^{-47} \text{ N. (!)}$$

A primera vista puede parecer incomprensible por qué la interacción de los átomos neutros y de las moléculas neutras tiene origen eléctrico. De esto se tratará detenidamente en el capítulo 29. No obstante, es oportuno señalar ya aquí que las fuerzas entre los átomos y las moléculas no dependen de la carga total de las moléculas (que es igual a cero), sino de las condensaciones y enrarecimientos locales de las cargas eléctricas.

Como quiera que las fuerzas intermoleculares son de origen eléctrico, las fuerzas superficiales tienen este mismo origen, lo mismo que cualquier fuerza de adhesión entre los cuerpos. Las fuerzas de rozamiento se reducen también esencialmente a interacciones eléctricas.

Las fuerzas de elasticidad que se manifiestan cuando se estira el caucho o se comprime un resorte metálico son resultado de interacciones interatómicas e intermoleculares. Por lo tanto, también estas fuerzas tienen, en fin de cuentas, naturaleza electromagnética.

**FUERZAS NUCLEARES.** Entre las partículas neutras que componen el núcleo atómico, así como entre un neutrón y un protón y entre dos protones con carga de igual signo, actúan fuerzas que no pueden reducirse a electromagnéticas. Estas fuerzas disminuyen con extraordinaria rapidez al aumentar la distancia entre las partículas que interactúan. Por esta razón dichas fuerzas no se manifiestan fuera de los límites del núcleo y sólo nos encontramos con ellas en los fenómenos relacionados con la interacción directa de los núcleos.

**FUERZAS DE INTERACCIÓN «DÉBIL».** Se ponen de manifiesto en los procesos de transformación de las partículas elementales en que participa el neutrino.

**CAMPO DE FUERZAS.** El espacio en que actúan las fuerzas de gravitación se llama *campo gravitatorio* o *campo de atracción* (de Newton). De manera análoga puede hablarse de campo electromagnético. Si una partícula cualquiera está sometida a la acción de un campo de fuerzas, ella misma es capaz de crearlo. Por ejemplo, cualquier partícula material crea un campo de atracción y está sometida a la acción de la atracción. Cualquier partícula con carga eléctrica crea un campo electromagnético y está sometida a la acción de un campo electromagnético.

De este modo, cualquier interacción de partículas se representa en física por un esquema partícula — campo — partícula. La primera partícula crea un campo y este campo actúa sobre la segunda partícula. En la pág. 632 se dirán unas palabras acerca de

cómo se tiene en cuenta en este esquema la naturaleza cuántica del campo.

Las propiedades del campo difieren considerablemente de las propiedades de la sustancia. Por esto se suele decir ahora que la materia se encuentra en dos formas: campo y sustancia. Los problemas de las relaciones mutuas del campo y la sustancia son en la actualidad objeto de intenso estudio y, por ahora, no pueden considerarse resueltos (para más detalles véase el § 220).

### § 3. Ley fundamental de la mecánica

LEYES DE NEWTON. La ley fundamental de la mecánica es la relación, hallada por Newton, entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y la aceleración que adquiere dicho cuerpo por la acción de aquéllas. Esta ley se formula de ordinario para un punto material. Con esto no se limita en nada la generalidad de dicha ley, puesto que todo cuerpo complejo se puede considerar como un conjunto de puntos materiales. Por otra parte, la ecuación de Newton para un punto material tiene un campo de aplicación directa extraordinariamente amplio, ya que en multitud de problemas de mecánica nos encontramos con cuerpos de dimensiones pequeñas o nos interesa únicamente el movimiento del centro de gravedad del cuerpo.

La ley fundamental de la mecánica dice lo siguiente: Si sobre un cuerpo actúan las fuerzas  $f_1, f_2, f_3$ , etc., que dan como resultante la fuerza  $F = \Sigma f$ , la aceleración vectorial que adquiere el cuerpo por la acción de estas fuerzas será proporcional al cociente de dividir la fuerza resultante por la masa del cuerpo material:

$$a = \frac{F}{m}.$$

Esta ecuación dice también que el vector aceleración debe coincidir con la dirección de la fuerza resultante. En esta fórmula se supone que el coeficiente de proporcionalidad es igual a la unidad, lo que impone a las unidades de medición de las magnitudes que figuran en ella las condiciones que se estudian en el curso de física de los centros de enseñanza media.

La ley fundamental de la mecánica puede escribirse también en la forma

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

o también  $F = \frac{d(mv)}{dt}$ . La última expresión equivale a la anterior solamente en el caso en que la masa no varía durante el movimiento.

Nosotros nos atenderemos a esta condición. El caso en que la masa es variable se estudiará más adelante. En el cap. 3 nos detendremos brevemente en la ecuación del movimiento de los cuerpos de masa variable, tipo cohetes, y en el cap. 24 consideraremos la complicación que surge cuando los cuerpos se mueven a velocidades próximas a la de la luz (mecánica de la teoría de la relatividad).

La ley fundamental de la mecánica se debe considerar como una ley que generaliza los hechos. Esta ley no puede deducirse teóricamente de ningunos razonamientos generales simples.

La ley de la inercia es consecuencia directa de ley fundamental. Si sobre un cuerpo no actúan fuerzas la aceleración vectorial será igual a cero y el movimiento de dicho cuerpo será rectilíneo y uniforme.

Al aplicar la ley fundamental de Newton a un cuerpo cualquiera colocamos éste en el centro de nuestra atención, nos interesan las fuerzas que actúan sobre él. Pero hay que tener siempre presente que las fuerzas son la medida de la interacción de los cuerpos y que no existen interacciones unilaterales. Si un cuerpo actúa sobre otro, el segundo también actúa sobre el primero. La medición de las fuerzas es la medición de las interacciones. Por esto el procedimiento de medición de las fuerzas contiene ya la afirmación de que la fuerza que el primer cuerpo ejerce sobre el segundo es igual a la que el segundo ejerce sobre el primero. Como generalmente nos interesa un cuerpo determinado, la fuerza que actúa sobre él es la que destacamos, y a la segunda fuerza le damos el nombre de reacción. Las fuerzas de acción y reacción son iguales en magnitud y tienen sentidos opuestos. Este postulado se introdujo en la ciencia con el nombre de tercera ley de Newton.

RELATIVIDAD DEL MOVIMIENTO. Un cuerpo que esté en reposo en un sistema de coordenadas puede parecerse que se mueve desde otro punto de vista. El movimiento uniforme de una persona que se pasea por un andén será variado si se describe en el sistema de coordenadas asociado con un tren que va frenando. Por esto, al hablar de la ley de un movimiento hay que indicar el sistema de referencia en que esta ley se cumple. El sistema en el que se cumplen las leyes de Newton debe satisfacer necesariamente la siguiente condición: todo cuerpo sobre el cual no actúen fuerzas debe moverse en él rectilínea y uniformemente o estar en reposo. Este tipo de sistema se llama *inercial*.

Es completamente evidente que todos los sistemas de referencia que se mueven con aceleración respecto a un cuerpo sobre el cual no actúan fuerzas no serán inerciales. Otra conclusión importante a la que llegamos inmediatamente es, que el sistema inercial no será único. Al contrario, existe una multitud innumerable de sistemas inerciales. Con cualquiera de los cuerpos que se

mueven uniforme y rectilíneamente respecto a otro cuerpo, sobre el cual no actúan fuerzas, se puede asociar un sistema inercial.

En efecto, supongamos que ya está elegido el sistema inercial. Para cualquier cuerpo que se mueva en este sistema con la velocidad  $v$  y la aceleración  $a$  será válida la ley de Newton  $F=ma$ . Consideremos ahora otro sistema de referencia que se mueva rectilínea y uniformemente, con la velocidad  $u$ , respecto del inercial. En este sistema el mismo cuerpo tendrá otra velocidad, igual a la diferencia entre la velocidad  $v$  y la velocidad  $u$  del movimiento del segundo sistema con relación al primero. Pero en virtud de que el movimiento relativo de estos dos sistemas es rectilíneo y uniforme, la aceleración del cuerpo en ambos será la misma. Esto se explica porque la aceleración es la derivada de la velocidad, y la derivada de una magnitud constante es nula:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(v-u)}{dt},$$

puesto que  $\frac{du}{dt}=0$ . En la ley de Newton figura la aceleración del cuerpo y no su velocidad. Por esto la ley fundamental de la mecánica tendrá necesariamente la misma forma desde el punto de vista de ambos sistemas.

Esta importante afirmación, que se deduce de la ley de la mecánica de Newton, se llama *principio de la relatividad del movimiento*. Este principio dice: existe una multitud innumerable de sistemas inerciales en los cuales se cumple la ley de la inercia y la ley  $F=ma$ . Ninguno de estos sistemas posee privilegios o peculiaridades respecto de los demás. Todos los sistemas inerciales de referencia tienen las mismas propiedades.

El principio de la relatividad fue establecido primeramente por Galileo.

LEYES DE LA MECÁNICA EN UN SISTEMA DE COORDENADAS NO INERCIAL. Admitimos que la afirmación «la aceleración es provocada por las fuerzas» se conserva siempre en todos los sistemas de referencia. En los sistemas no inerciales de referencia un cuerpo se mueve con aceleración incluso en aquellos casos en que no interviene en interacciones con otros cuerpos. Pero si esto es así, en los sistemas no inerciales, además de las fuerzas debidas a la interacción, existen fuerzas de otro origen, debidas al carácter no inercial del sistema. Estas fuerzas adicionales se llaman fuerzas de inercia (aunque en esencia sería más correcto llamarlas fuerzas no inerciales). Como las fuerzas de inercia no se deben a una interacción, no cumplen la tercera ley de Newton.

En adelante no utilizaremos para el análisis del movimiento los sistemas no inerciales de coordenadas, por esto vamos a limitarnos a poner un ejemplo sencillito de fuerza de inercia.

Supongamos que por determinadas razones nos conviene tomar un sistema de referencia que se mueve con una aceleración  $\mathbf{a}$  constante en magnitud y dirección. Todos los cuerpos en reposo o en movimiento uniforme respecto de los sistemas inerciales se moverán con la aceleración  $-\mathbf{a}$  con relación al sistema no inercial de referencia elegido. La aceleración  $-\mathbf{a}$  es originada por una fuerza  $-\mathbf{ma}$ .

Esta es la fuerza de inercia en el caso considerado. Esta fuerza no es el resultado de una interacción de cuerpos, sino que se debe al movimiento acelerado del sistema de referencia.

Si el cuerpo observado en el sistema no inercial de referencia se halla en interacción con otros cuerpos, la fuerza de inercia se suma a las fuerzas debidas a la interacción.

La ley fundamental de la mecánica en los sistemas de coordenadas no inerciales se escribe en la forma

$$\mathbf{ma} = \mathbf{F} + \text{fuerzas de inercia};$$

aquí  $\mathbf{F}$  es la fuerza resultante debida a las interacciones entre los cuerpos.

En dependencia del carácter que tenga el movimiento del sistema no inercial de referencia (lineal, circular, circular acelerado, etc.) la expresión de las fuerzas de inercia tendrá formas distintas. Las fórmulas de las fuerzas de inercia para todos los casos posibles pueden encontrarse en los manuales de física teórica.

#### *§ 4. Aplicación de la ley fundamental de la mecánica al movimiento rectilíneo acelerado*

A continuación se dan varios ejemplos elementales que aclaran el contenido físico de la ley fundamental de la mecánica: la suma geométrica de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración y está dirigida a lo largo de ésta.

MOVIMIENTO HORIZONTAL POR LA ACCIÓN DE UNA FUERZA CONSTANTE. Un motor empuja una vagoneta colocada sobre raíles. Sobre la vagoneta actúan dos fuerzas en sentidos opuestos: la fuerza de rozamiento  $\mathbf{F}_{ry}$  por la parte de los raíles y la fuerza elástica  $\mathbf{F}_{mv}$  por la parte del motor. Si estas dos fuerzas son iguales la vagoneta se mueve uniformemente. Pero si la vagoneta toma aceleración, la fuerza resultante debe estar dirigida a lo largo de  $\mathbf{a}$ . Por consiguiente, para crear un movimiento acelerado, la fuerza que actúa por la parte del motor debe ser mayor que la fuerza de rozamiento. La diferencia de estas fuerzas es la resultante que, según la ley fundamental de la mecánica, es igual al producto de



la masa por la aceleración. Así, pues,

$$F_{mv} - F_{rv} = ma.$$

La fuerza de rozamiento es el resultado de la interacción de los raíles con la vagoneta. Por consiguiente, la fuerza que forma pareja con  $F_{rv}$  estará aplicada a los raíles ( $F_{vr}$ ). La fuerza que forma pareja con  $F_{mv}$  será la fuerza  $F_{vm}$  con que la vagoneta actúa sobre el motor.

La fuerza  $F_{vm}$  es la fuerza de resistencia que vence el motor (es decir, que él experimenta o que sobre él actúa). Esta fuerza es la

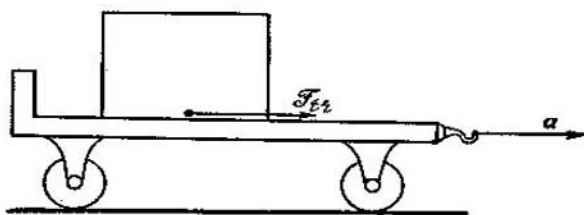


FIG. 7.

que sentirían los músculos de un hombre si él fuera el que hacía las veces de motor. Como vemos, la fuerza de resistencia  $F_{vm}$  se compone de dos: la fuerza de rozamiento y la magnitud  $-ma$ , que conviene llamar *resistencia inercial*. Se da el nombre de resistencia inercial a una fuerza que existe siempre, y que actúa sobre el cuerpo acelerador, que es igual a  $ma$  y está dirigida en sentido opuesto al de la aceleración. La resistencia inercial puede ser también la única fuerza que actúe sobre el cuerpo acelerador, como, por ejemplo, en el caso de la vagoneta si no existiera rozamiento.

Veamos otro ejemplo de movimiento horizontal por la acción de una fuerza constante. Una carga, objeto de nuestra observación, está colocada sobre una vagoneta, con borde (fig. 7), que se mueve. Si no existiera el borde, la carga podría deslizarse y caerse de la plataforma de la vagoneta cuando el movimiento fuera acelerado. La suerte de la carga depende de la interacción de la superficie de la plataforma de la vagoneta con ella. Esta interacción consiste únicamente en el rozamiento. La vagoneta se mueve con una aceleración pequeña  $a$ . La fuerza que actúa sobre la carga, es decir, la fuerza de rozamiento, debe ser igual a  $ma^*$ ). Pero la fuerza

\*) Si un cuerpo cualquiera es arrastrado, a espensas únicamente del rozamiento, en un movimiento acelerado, la fuerza de rozamiento estático o en reposo (puesto que el cuerpo arrastrado en el movimiento *está en reposo* respecto del que lo arrastra) estará siempre dirigida a lo largo de la aceleración.

de rozamiento en reposo no puede ser tan grande como se quiera, sino que es menor que cierta magnitud  $F_{roz}^{máx}$ . Si

$$ma > F_{roz}^{máx},$$

el movimiento con la aceleración  $a$  se hace imposible y la carga se desliza y cae de la vagoneta. Si no existiera rozamiento entre la carga y la superficie de la plataforma de la vagoneta aquella no se movería de su sitio: la vagoneta se escaparía de debajo de la carga. Supongamos ahora que la vagoneta tiene borde. En este caso cesa el deslizamiento de la carga en cuanto ésta entra en contacto con el borde. Ahora el borde tirará de la carga con la fuerza  $F=ma$ . La fuerza que forma pareja con la motriz es la resistencia inercial que experimenta el borde. Esta fuerza también es igual a  $ma$ , está dirigida en sentido contrario al de la aceleración y aplicada al borde.

*Ejemplos numéricos de fuerzas.* La fuerza que acelera a un automóvil de turismo es de  $\sim 200 \text{ kgf} = 1960 \text{ newtones (N)}$ . 1 N es la fuerza que le comunica a una masa de 1 kg la aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$ ;  $1 \text{ N} = 10^5 \text{ dinas} = 0,102 \text{ kgf}$ . La fuerza de tracción del motor a reacción de un avión moderno es de  $10\,000 - 20\,000 \text{ kgf} = 10^5 - 2 \cdot 10^5 \text{ N}$ . La fuerza de tracción de la locomotora TЭ-3, de  $\sim 10\,000 \text{ kgf}$ .

**MONTACARGAS VERTICAL.** Estudiemos las fuerzas que actúan cuando a una carga que descansa sobre el suelo de un montacargas se le comunica un movimiento variado.

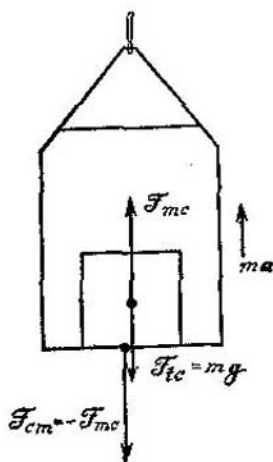


FIG. 8.

Supongamos que el montacargas se mueve hacia arriba con aceleración (fig. 8). Sobre la carga actúan dos fuerzas: una por

parte de la Tierra  $F_{tc}$  y otra por parte del montacargas  $F_{mc}$ . Pero ahora la fuerza resultante debe ser distinta de cero y, por consiguiente,  $F_{tc} \neq F_{mc}$ . Como la fuerza resultante tiene que estar dirigida a lo largo de la aceleración,  $F_{mc} > F_{tc}$ , y ser precisamente:

$$F_{mc} - F_{tc} = ma.$$

La fuerza  $F_{tc}$  es la fuerza de atracción de la carga por la Tierra, por lo tanto

$$F_{mc} - mg = ma.$$

La magnitud de la fuerza con que la carga presiona sobre el montacargas  $F_{cm}$  es idénticamente igual a  $F_{mc}$ ; por consiguiente, la resistencia que experimenta el montacargas al elevar la carga es igual a

$$F_{cm} = mg + ma.$$

Como vemos esta resistencia se compone del peso de la carga y de la resistencia inercial. La fuerza  $F_{cm}$  se llama a veces peso aparente.

Este resultado se ha obtenido para el caso en que la aceleración del montacargas está dirigida en sentido contrario al de la aceleración de la gravedad, lo que ocurrirá no sólo cuando el montacargas se mueva hacia arriba con aceleración, sino también cuando se mueva hacia abajo con retardación.

En el caso en que el sentido de la fuerza de la gravedad y el de aceleración del montacargas coinciden, la fuerza con que presiona la carga sobre el montacargas (peso aparente) será

$$F_{cm} = mg - ma.$$

De esta fórmula se deduce que la presión sobre el fondo del montacargas desaparece si  $a = g$ , es decir, si el montacargas cae libremente en el campo de la gravedad. En estas condiciones los cuerpos que se hallan en el montacargas que cae dejan de presionar sobre el soporte, de tensar los cables, etc., o sea, se comportan como si dejaran de pesar.

TRACCIÓN DE UNA CARGA COLGADA LIBREMENTE. Consideremos el movimiento de una carga colgada situada sobre una vagoneta que se mueve con aceleración. Con este movimiento, el hilo de que pende la carga forma un ángulo con la vertical. Sobre la carga actúan dos fuerzas: la tensión del hilo  $F_{hc}$  y la atracción de la Tierra  $F_{tc}$ , igual a  $mg$  (fig. 9). Las direcciones de estas fuerzas forman un ángulo. Su suma geométrica, de acuerdo con la ley fundamental de la mecánica, deberá ser igual a  $ma$  y estar dirigida a lo largo de la aceleración. Por consiguiente, la diagonal del paralelogramo construido sobre las fuerzas  $F_{hc}$  y  $F_{tc}$  será horizontal,

$$ma = F_{hc} + F_{tc}.$$

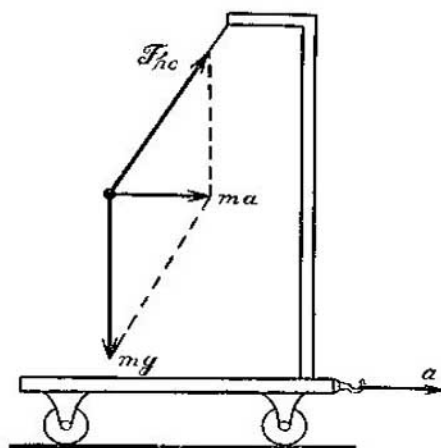


FIG. 9.

La fuerza que forma pareja con  $F_{tc}$  está aplicada a la Tierra y no nos interesa. Por el contrario, ofrece interés la fuerza  $F_{ch}$ , o sea, la fuerza con que la carga tensa el hilo. Esta fuerza, aplicada al hilo, es

$$F_{ch} = -ma + F_{tc}.$$

Así, pues, en este ejemplo la resistencia inercial figura como sumando en la resistencia que experimenta el cuerpo acelerador.

### § 5. Aplicación de la ley fundamental de la mecánica al movimiento circular

El movimiento circular es un movimiento acelerado. Si un cuerpo se mueve con velocidad angular constante siguiendo una circunferencia, su aceleración es igual en magnitud a  $\omega^2 R$  y está dirigida radialmente hacia el centro.

Un cuerpo con movimiento circular uniforme puede estar sometido a un número cualquiera de fuerzas dirigidas arbitrariamente. Pero de la ley fundamental de la mecánica se deduce, que la suma vectorial de todas estas fuerzas o, concretamente, la fuerza resultante, deberá estar dirigida radialmente hacia el centro (paralela a la aceleración) y, por su magnitud, tener el valor

$$F_{ct} = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R.$$

La fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo con movimiento circular uniforme se llama *fuerza centrípeta*. Subrayamos una vez

más, que la fuerza resultante está dirigida siempre a lo largo de la aceleración, y no de la velocidad, es decir, en nuestro caso, la fuerza que origina el movimiento circular uniforme está dirigida, a lo largo del radio, hacia el centro, y no a lo largo de la tangente a la trayectoria circular. El papel de la fuerza centrípeta es desviar continuamente el cuerpo del camino rectilíneo que recorrería por inercia en ausencia de la fuerza actuante.

*Ejemplo.* Una partícula no equilibrada de masa  $m$ , ligada a una de las paletas de una turbina de vapor moderna (3000 r. p. m. y radio de 1 m aproximadamente), experimenta una fuerza centrípeta  $F = m\omega^2 r = m (314)^2 \cdot 100 = 10^7 m$  dinas ( $m$  en gramos). El peso de la partícula es igual a  $mg$ , por lo tanto, la fuerza centrípeta es  $\frac{10^7 m}{mg}$  10 000 veces mayor que el peso.

Si se hace que el movimiento del cuerpo sea acelerado, de acuerdo con la regla de la acción y reacción el cuerpo acelerado actuará sobre los otros cuerpos (que desempeñan el papel de enlaces o ligaduras) que le obligan a moverse aceleradamente, y no por inercia. A la fuerza que actúa sobre las ligaduras por parte del cuerpo acelerado la hemos llamado resistencia inercial. Esta fuerza existe, por supuesto, y cuando el movimiento es circular recibe el nombre de *fuerza centrífuga*.

La fuerza centrífuga es igual en magnitud a la fuerza centrípeta y está dirigida en sentido opuesto a ella. La fuerza centrífuga está aplicada a las ligaduras del cuerpo que participa en el movimiento circular, o en otras palabras, está aplicada a los cuerpos que obligan al cuerpo considerado a moverse siguiendo una circunferencia y le impiden hacerlo rectilíneo y uniformemente. Lo mismo que la fuerza centrípeta, la centrífuga es una fuerza resultante, suma de todas las reacciones que opone el cuerpo que gira a los cuerpos que lo sujetan.

Consideremos varios ejemplos limitándonos a los casos más simples, en los cuales el movimiento circular se produce como resultado de la interacción de dos cuerpos. Si un cuerpo  $A$  impide que un cuerpo  $B$  se mueva rectilíneo y uniformemente y le obliga a moverse uniformemente describiendo una circunferencia, la fuerza  $F_{AB}$  será centrípeta y la  $F_{BA}$ , centrífuga. Esta simplísima interacción tiene lugar entre un cuerpo colocado sobre el soporte en forma de platillo cilíndrico (fig. 10) que gira alrededor de su eje en el plano horizontal, y el propio soporte. Si el rozamiento

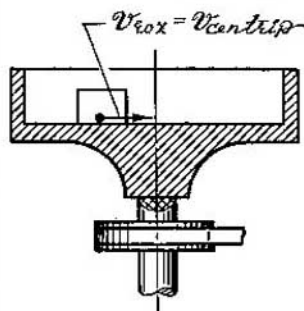


FIG. 10.

no es muy grande y el soporte gira con rapidez, el cuerpo se deslizará hacia el borde del soporte. En este caso la interacción del cuerpo y el soporte consiste en lo siguiente: el borde del platillo actúa sobre el cuerpo en dirección radial hacia el centro (fuerza centrípeta) y el cuerpo presiona sobre el borde con una fuerza igual en magnitud dirigida radialmente en sentido opuesto (fuerza centrífuga).

Volvamos a considerar ahora el instante inicial de este experimento. El cuerpo se encuentra sobre el soporte y éste apenas comienza a girar. Si entre el cuerpo y el soporte no existiera interacción, aquél permanecería en su sitio y el soporte giraría debajo de él. La existencia del rozamiento en reposo conduce a otro resultado. El soporte al girar arrastra consigo al cuerpo. En este caso, como se indicó en el párrafo anterior, la fuerza de rozamiento en reposo estará dirigida radialmente hacia el centro: esta fuerza es la única que obliga al cuerpo a girar, es decir, la fuerza de rozamiento es, en este caso, la fuerza centrípeta. Por lo tanto

$$F_{\text{roz}} = F_{\text{ct}}.$$

La fuerza centrífuga actúa por parte del cuerpo sobre el soporte y está dirigida radialmente en sentido opuesto al centro. Suponiendo para mayor claridad (aunque recordando que ésta es una representación muy burda) que el rozamiento es el resultado del «enganche» de dos superficies rugosas, en el cual los salientes de la superficie de un cuerpo penetran en los entrantes de la superficie de otro cuerpo, la fuerza centrífuga nos la figuramos como actuando a lo largo del radio, en sentido contrario al centro, sobre los puntos de «enganche» de la superficie del soporte.

La interacción de rozamiento que mantiene al cuerpo en reposo con respecto al soporte sólo puede ser menor que cierto valor máximo  $F_{\text{roz}}^{\text{máx}}$ . Al aumentar la velocidad de rotación del platillo llega un instante en el cual el producto  $m\omega^2 R$  se hace mayor que  $F_{\text{roz}}^{\text{máx}}$ . Entonces la participación del cuerpo en el movimiento circular con la aceleración  $|\mathbf{a}| = \omega^2 R$  se hace imposible. Efectivamente, para asegurar la participación del cuerpo en un movimiento circular con la velocidad angular  $\omega$  hay que actuar sobre él con una fuerza  $m\omega^2 R$ . Si la interacción de rozamiento no puede asegurar esta fuerza y, por consiguiente, el movimiento según la circunferencia de radio  $R$  con la velocidad  $\omega$ , el cuerpo se desplaza de su sitio con respecto al soporte y entre aquél y éste deja de efectuarse la interacción de rozamiento estático.

En cuanto que cesa la interacción del cuerpo con el soporte y aquél queda libre, comienza un movimiento rectilíneo y uniforme con la velocidad vectorial que tenía el cuerpo en el instante del

arranque. Como la velocidad de un cuerpo que se mueve siguiendo una circunferencia está dirigida tangencialmente, esta línea será la que al moverse siga el cuerpo liberado. La demostración más clara de que las trayectorias que siguen las partículas que se desprenden de un cuerpo en rotación son tangenciales se consigue en el experimento con la muela de afilar.

Hagamos ahora varias observaciones acerca del proceso de rotación de una piedra sujeta con un bramante (fig. 11). Para,

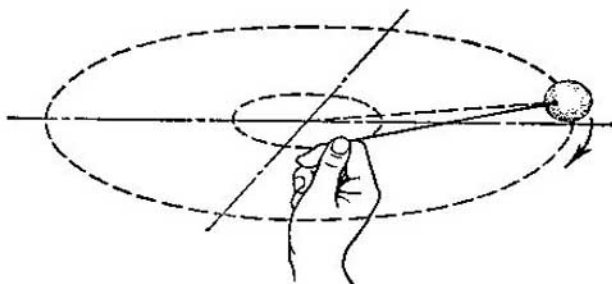


FIG. 11.

en condiciones normales, hacer girar uniformemente una piedra sujeta a una cuerda hay que comunicarle a aquélla no sólo una aceleración centrípeta, sino también una tangencial. Esta última es necesaria para vencer el rozamiento con el aire. La aceleración resultante y, por consiguiente, la fuerza, no están dirigidas a lo largo del radio, sino que forman un ángulo agudo con la dirección del movimiento. La mano realiza un movimiento de rotación y la cuerda está dirigida, en cada instante dado, a lo largo de la tangente a la circunferencia que describe la mano.

Como un ejemplo más de movimiento circular consideraremos la rotación de dos cuerpos que se atraen y que giran con la misma velocidad angular alrededor de un centro común. Con una máquina centrífuga no es difícil hacer que dos pesas de igual masa, unidas entre sí por un hilo, giren en torno a un eje común.

Examinemos al principio la primera pesa sujeta por el hilo al eje de rotación. La fuerza centrífuga que actúa sobre el eje será igual a  $m_1\omega^2R_1$ . La segunda pesa actúa sobre el eje con una fuerza  $m_2\omega^2R_2$ . Si estas fuerzas son iguales, los hilos se podrán atar el uno al otro sin que con esto varíe nada (fig. 12). De esto se deduce claramente que la condición para que el movimiento de rotación de dos cuerpos, unidos por un hilo, sea estable es que sean iguales las fuerzas centrífugas que actúan sobre el hilo por parte de estos cuerpos:

$$m_1\omega^2R_1 = m_2\omega^2R_2.$$

Por lo tanto,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

es decir, la rotación será estable únicamente en el caso en que las distancias de los cuerpos al eje de rotación sean inversamente proporcionales a las masas de dichos cuerpos.

El punto que divide la línea de longitud  $R_1 + R_2$  en la proporción  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_2}{m_1}$  (fig. 12) se llama centro de inercia (véase el § 15).

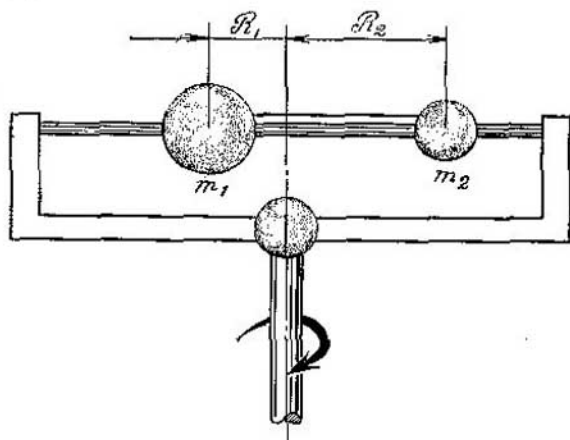


FIG. 12.

Se puede asegurar que la rotación estable de dos cuerpos ligados entre sí tiene lugar alrededor del punto que es centro de inercia del sistema.

Nos hemos referido a dos cuerpos cuya interacción se realiza por medio de un hilo. No obstante, todo lo dicho es también completamente válido en el caso de dos cuerpos que se atraen de acuerdo con la ley de la gravitación universal o de dos cargas eléctricas, positiva y negativa, que se atraen. La interacción de cualquier naturaleza entre un par de cuerpos que se atraen puede, por lo tanto, conducir a la rotación estable alrededor de un punto, que es el centro de inercia. Esta interacción se representa por dos fuerzas aplicadas a dos cuerpos que se atraen. Estas fuerzas están dirigidas la una al encuentro de la otra y numéricamente son iguales. (Por lo general, al llegar a este punto, al lector poco preparado se le plante la pregunta: ¿por qué, entonces, no se aproximan entre sí los cuerpos? Volvemos a subrayar una vez más que estas fuerzas son paralelas a las aceleraciones, pero no a las velocidades, y que



en el movimiento circular las aceleraciones están dirigidas radialmente hacia el centro de rotación). Como sobre cada cuerpo actúa solamente una fuerza, ambas son centrípetas. Pero al mismo tiempo estas dos fuerzas son también centrífugas. En efecto, el cuerpo *A* desempeña el papel de ligadura del cuerpo *B*, y viceversa. Esto quiere decir que para el cuerpo *A* la fuerza  $F_{BA}$  es centrípeta y la fuerza  $F_{AB}$  es centrífuga, y viceversa. Sin embargo, la utilización en este caso del concepto de fuerza centrífuga tiene un carácter completamente formal. Estos renglones sólo eran necesarios para subrayar la analogía que existe entre un sistema de esferas ligadas entre sí por un hilo y un sistema de cuerpos «ligados» entre sí por fuerzas de atracción.

El sistema planetario es un ejemplo de rotación estable de cuerpos que se atraen. Supongamos, por ejemplo, que el Sol no tuviera más planeta que la Tierra. En este caso el centro de rotación dividiría la recta que une el Sol con la Tierra en la proporción  $m_{\text{Sol}} : m_{\text{Tierra}} = 330\,000 : 1$ .

De este modo, al decir de ordinario que la Tierra gira alrededor del Sol no cometemos un error grande, y tampoco lo cometeríamos incluso en el caso en que la Tierra fuera el único satélite del Sol.

### § 6. *Influencia de la rotación de la Tierra en los fenómenos mecánicos*

La esfera terrestre efectúa un movimiento complejo: gira en torno a su eje y se mueve por su órbita alrededor del Sol. Es, pues, completamente comprensible que la Tierra no sea un sistema de referencia inercial. Sin embargo, nosotros aplicamos eficazmente la ley de Newton en las condiciones de la Tierra. Pero en una serie de casos el carácter no inercial de la Tierra se deja sentir con bastante fuerza. Estos casos deben ser estudiados.

**INFLUENCIA DE LA ROTACIÓN DE LA TIERRA EN SU FORMA. PESO DE UN CUERPO.** Si no se tiene en cuenta la rotación de la Tierra, un cuerpo que se encuentre en su superficie deberá considerarse en reposo. La suma de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo sería entonces igual a cero. Pero en realidad cualquier punto de la superficie de la esfera terrestre que se halle a una latitud geográfica  $\varphi$ , se mueve alrededor del eje de la Tierra, es decir, describiendo una circunferencia de radio  $r = R \cos \varphi$  ( $R$  es el radio de la Tierra considerada en primera aproximación como si tuviera forma de esfera), con la velocidad angular  $\omega = 0,7292 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . Por lo tanto, la suma de las fuerzas que actúan sobre este punto será distinta de cero e igual al producto de la masa por la aceleración  $\omega^2 R \cos \varphi$  y estará dirigida a lo largo de  $r$ .

Es evidente que la existencia de esta fuerza resultante,  $OG$  (fig. 13), solamente es posible en el caso en que las direcciones respectivas de la reacción de la superficie terrestre  $OA$  y de la fuerza de gravitación  $OE$  forman un ángulo entre sí. Entonces el cuerpo presionará sobre la superficie de la Tierra (según la tercera ley de Newton) con una fuerza  $OC = -OA$ . Si la esfera terrestre

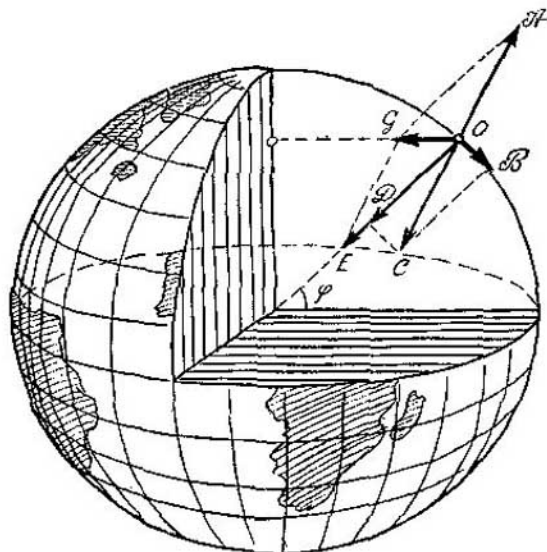


FIG. 13.

estuviera en reposo, esta fuerza sería igual a la de gravitación  $OE$  y su dirección coincidiría con la de ésta.

Descompongamos la fuerza  $OC$  en dos: una dirigida a lo largo del radio  $OD$  y otra siguiendo la tangente  $OB$ . La existencia de la rotación de la Tierra conduce, como puede verse en la figura, a dos hechos. En primer lugar, el peso (presión del cuerpo sobre la Tierra) se hace menor que la fuerza de gravitación. Como  $OC \approx OD$ , esta disminución será igual a  $DE = mR\omega^2/\cos^2 \varphi$ . En segundo lugar, aparece una fuerza que tiende a achatar la Tierra, a trasladar la materia al ecuador; esta fuerza es  $OB = mR\omega^2 \cos \varphi \sin \varphi$ . Este achatamiento existe en realidad; la Tierra no tiene forma de esfera, sino una forma que se aproxima a la de un elipsoide de revolución. El radio ecuatorial de la Tierra se hace, a consecuencia de la acción indicada,  $\frac{1}{300}$  parte mayor que el radio polar.

Las fuerzas achatadoras obligaran a la masa de la esfera terrestre a desplazarse hasta que tomó una forma equilibrada. Cuando el proceso de desplazamiento terminó, las fuerzas achatadoras cesaron, evidentemente, de actuar. Por consiguiente, las fuerzas de presión que actúan sobre la superficie de la «esfera» terrestre están dirigidas normalmente a dicha superficie.

Volvamos a ocuparnos ahora del valor de la presión que ejerce un cuerpo sobre la tierra, es decir, de la magnitud física que generalmente se llama peso. El cálculo hecho para la esfera (la fuerza de gravitación menos  $mR\omega^2 \cos^2 \varphi$ ) no es válido, claro está, para la forma verdadera de la Tierra. Sin embargo, este resultado puede utilizarse para los cálculos aproximados.

En el polo ( $\varphi=90^\circ$ ) el peso del cuerpo es igual a la fuerza de gravitación. Llamemos  $mg$  a la fuerza de gravitación del cuerpo en el polo. Entonces, la presión del cuerpo sobre la superficie terrestre en cualquier otro punto de la esfera terrestre o, dicho de otra forma, su peso, será igual, como dijimos antes, a la diferencia entre la fuerza de gravitación y la fuerza  $DE$ , es decir

$$mg - mR\omega^2 \cos^2 \varphi = mg'$$

y

$$g' = g - R\omega^2 \cos^2 \varphi$$

es la aceleración con que caen los cuerpos en la latitud  $\varphi$ . En el ecuador  $g'$  es aproximadamente  $\frac{1}{300}$  menor que  $g$ .

Utilizando las distintas aceleraciones de caída libre correspondientes a las diversas latitudes evitamos la necesidad de tener en cuenta la influencia de la rotación de la Tierra en el peso del cuerpo.

**INFLUENCIA DE LA ROTACIÓN DE LA TIERRA EN EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS POR SU SUPERFICIE.** Figurémonos que la observación del movimiento del cuerpo se hace en un sistema de coordenadas giratorio. Ante el observador se mueve rectilínea y uniformemente un cuerpo cualquiera. En el sistema de referencia no inercial elegido la trayectoria del cuerpo será curvilínea. El científico francés Coriolis demostró por medio de cálculos que, con respecto a un sistema que se mueva con la velocidad angular  $\omega$ , un cuerpo con movimiento rectilíneo y uniforme de velocidad  $v$  tendrá una aceleración igual a  $2v\omega \sin \alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo comprendido entre el eje de rotación y la dirección del movimiento rectilíneo. En estas condiciones el vector aceleración tiene dirección perpendicular al plano que pasa por el eje de rotación y por la dirección de la velocidad. Para elegir una de las dos direcciones posibles de la aceleración se puede utilizar la regla siguiente: si se mira a lo largo del eje de rotación de modo que se vea ésta en

sentido contrario al de las agujas del reloj y se coloca la mano izquierda con la palma hacia abajo, poniendo los dedos en la dirección del movimiento rectilíneo, el dedo pulgar indicará la dirección de la aceleración (fig. 14).

La aceleración de Coriolis  $a_c$  actúa sobre todos los cuerpos que se mueven por la superficie de la Tierra. Si se mira el eje de la esfera terrestre desde la parte del polo norte, la rotación de ésta tiene el sentido contrario al de las agujas del reloj. Por lo tanto, cualquier cuerpo que se mueva en el hemisferio norte rectilíneamente con respecto a un sistema inercial, se desviará hacia la derecha en la dirección del movimiento (o hacia la izquierda en el hemisferio sur) para un observador que se halle en la Tierra. Esta desviación puede ser mayor o menor en dependencia de la dirección que tenga el movimiento con relación al eje y de la velocidad lineal del mismo.

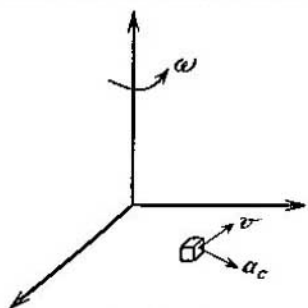


FIG. 14.

La desviación de los cuerpos puede tener lugar tanto en el plano horizontal como en el vertical (con respecto a la superficie de la Tierra). La aceleración de Coriolis está dirigida perpendicularmente al eje de la Tierra; por esto la desviación que tiene lugar en el plano horizontal es máxima en el polo e igual a cero en el ecuador. En el caso de la desviación en el plano vertical ocurre lo contrario. Las desviaciones en estos dos planos se caracterizan por las correspondientes proyecciones del vector aceleración. Así, la proyección de la aceleración de un cuerpo en el plano horizontal será igual a

$$2v\omega \operatorname{sen} \varphi,$$

donde  $\varphi$  es la latitud. En el hemisferio norte esta proyección está dirigida hacia la derecha siguiendo el movimiento.

La desviación del camino rectilíneo de los cuerpos que se mueven en el plano horizontal se manifiesta en el derrubio por los ríos de sus orillas derechas según la corriente en el hemisferio norte y de sus orillas izquierdas en el hemisferio sur. Por esta misma causa los ríos rodean los obstáculos por la derecha en el hemisferio norte y por la izquierda en el hemisferio sur.

Las masas de aire que afluyen a una región de baja presión se desvían de la dirección radial hacia la derecha en el hemisferio norte (y hacia la izquierda en el sur) y originan ciclones. Por lo tanto, en el hemisferio norte los ciclones transportan las masas de aire en sentido contrario al de las agujas del reloj, y en el sur, al contrario.

La existencia de la desviación vertical hace que un cuerpo al caer siga no exactamente la vertical, sino que se desvíe de occidente a oriente (la Tierra gira de occidente a oriente, es decir, en sentido contrario al de las agujas del reloj si se mira desde la parte del polo norte).

*Ejemplos. 1.* Calculemos la desviación máxima de la trayectoria rectilínea que experimenta un proyectil de artillería. La desviación será máxima en el polo ( $\varphi=90^\circ$  y para todas las direcciones en que se dispare  $\alpha=90^\circ$ ). Tomando la velocidad del proyectil igual a 1 km/s obtenemos  $2 \cdot 1000 \cdot 0,73 \cdot 10^{-4} \approx 0,15 \text{ m/s}^2$ . Esta aceleración es aproximadamente 70 veces menor que la aceleración de la gravedad. La desviación del proyectil de la trayectoria rectilínea puede alcanzar, como vemos, una magnitud del orden de varios centímetros.

2. Supongamos que un río corre de norte a sur (en el hemisferio norte) con la velocidad  $v=3 \text{ km/h}$ . En este caso el agua pasa de unas regiones en que la velocidad lineal de rotación de la superficie terrestre es pequeña a otras regiones en que dicha velocidad es mayor. Este aumento de la velocidad del movimiento (dirigido de occidente a oriente junto con las márgenes del río) se caracteriza por la aceleración de Coriolis y se debe a la acción de la orilla derecha del río sobre la masa de agua. Calculemos la aceleración de Coriolis para la latitud  $\varphi=45^\circ$ :

$$a_c = 2v\omega_0 \operatorname{sen} \varphi,$$

$$\omega_0 = 2\pi \text{ rd/d} = 7,25 \cdot 10^{-5} = \text{rd/s}, \quad v = 3 \text{ km/h} = 0,83 \text{ m/s},$$

$$a_c = 2 \cdot 0,83 \cdot 7,25 \cdot 10^{-5} \cdot 0,707 = 8,50 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2.$$

Por lo tanto, sobre cada tonelada de agua la orilla derecha presiona con una fuerza de

$$8,5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3 = 8,5 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

Las escarpadas márgenes derechas del Volga, Don y otros grandes ríos del hemisferio norte pueden servir de ilustración a este cálculo.

### § 7. ¿Qué datos son necesarios para resolver un problema de mecánica?

El problema fundamental de la mecánica es hallar el movimiento partiendo de las fuerzas dadas. Hallar o determinar el movimiento significa poder indicar en qué lugar del espacio y en qué instante se encuentra cualquiera de los puntos materiales. Pero si lo que nos interesa es un sistema mecánico complejo, ¿qué conocimientos serán necesarios con respecto a cada uno de los puntos materiales en que dicho sistema se divide mentalmente?

Para poder resolver este problema deberemos disponer ante todo de los datos completos acerca de las fuerzas que actúan. Las fuerzas deben conocerse para cualquier punto y cualquiera que sea el lugar en que éste se encuentre. Si se conocen las fuerzas, aplicando las ecuaciones de Newton podemos determinar la aceleración del punto material. No obstante, todos los datos sobre la trayectoria, la velocidad y el instante al que corresponde el paso por un

punto dado del espacio no se pueden obtener aplicando únicamente las ecuaciones del movimiento de Newton. Para describir el movimiento es necesario conocer para cualquier instante el lugar en que se encontraba el punto material, así como su velocidad, tanto en magnitud como en dirección. Hay que conocer en total seis números: las tres coordenadas del punto y las tres proyecciones de la velocidad sobre los ejes. Estos datos caracterizan unívocamente el «estado mecánico» del punto; se pueden llamar, pues, parámetros de estado.

De este modo, el problema se reduce a hallar los parámetros de estado, y las ecuaciones de Newton dan únicamente la aceleración.

Para resolver un problema hay que conocer las condiciones iniciales, es decir, los valores de los parámetros de estado para un instante cualquiera (por lo general en este instante se designa por  $t=0$ , de aquí la denominación de condiciones iniciales). Si se conocen los valores iniciales de los parámetros de estado, lo demás es ya una cuestión matemática. Las ecuaciones del movimiento de Newton más los datos iniciales resuelven unívocamente el problema mecánico. La suerte del punto, tanto en el futuro como en el pasado, se puede analizar, en principio, durante un plazo tan grande como se desee hacia adelante o hacia atrás. Esta idea admiró en su tiempo a los hombres de ciencia. El gran científico y pensador francés Laplace decía: si conociéramos las coordenadas iniciales y las velocidades de todas las partículas que constituyen el mundo, podríamos predecir su suerte. Este punto de vista ingenuo, que reduce todo lo existente a fenómenos puramente mecánicos, es falso por principio, y no sólo porque en la práctica sea imposible disponer de todos los datos necesarios. Esto se debe a que la mecánica basada en las leyes de Newton tiene una aplicación limitada y sus deducciones no pueden utilizarse con tanta amplitud.

Pero, volvamos a las seis condiciones iniciales. La necesidad de conocer precisamente seis cifras para determinar el estado de un punto se deduce evidentemente de las propias ecuaciones de Newton.

La ecuación vectorial puede descomponerse según los tres ejes y escribirse en forma de tres igualdades:  $ma_x = F_x$ ,  $ma_y = F_y$  y  $ma_z = F_z$ . Determinar un movimiento significa hallar cómo varían con el tiempo las tres coordenadas del punto  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . La dependencia de la coordenada  $x$  respecto del tiempo se halla integrando la ecuación

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x.$$

La primera integración permite hallar la componente  $x$  de la velocidad. Al hacer esta integración aparece la primera constante de

integración. La segunda integración da la posibilidad de hallar la coordenada  $x$  en función del tiempo. Al integrar por segunda vez aparece una segunda constante, constante arbitraria. Esto mismo se refiere también a las ecuaciones de variación con el tiempo de las otras dos coordenadas. En total aparecen seis constantes arbitrarias que únicamente se pueden encontrar si se conocen seis datos independientes cualesquiera acerca de las coordenadas y de las velocidades de la partícula.

Las condiciones iniciales, como ya hemos dicho, son las tres coordenadas iniciales y las tres proyecciones también iniciales. No obstante, el problema se puede resolver también si se conocen otros seis números. Por ejemplo, pueden darse las tres coordenadas del punto inicial, el valor numérico de la velocidad inicial y dos coordenadas del punto final. La trayectoria del punto también queda determinada unívocamente con estas seis condiciones.

Los parámetros de un punto pueden darse por diversos procedimientos. La posición de un punto en el espacio puede darse mediante tres coordenadas cartesianas o por la distancia desde el origen de coordenadas al punto y dos de los ángulos que forma el radio vector (o vector de posición) con los ejes. Lo mismo puede decirse con respecto a la velocidad.

Un ejemplo característico de la dependencia del movimiento de un cuerpo respecto de las condiciones iniciales es el comportamiento de un cohete lanzado desde la superficie de la Tierra. La trayectoria de dicho cohete y su suerte estarán determinadas por la dirección del lanzamiento, la situación geográfica del lugar en que se efectúa este último y por la magnitud de la velocidad inicial. Si las velocidades son pequeñas, el cuerpo lanzado desde la Tierra describe, como sabemos perfectamente, una curva parabólica. Cuando la velocidad alcanza cerca de 8 km/s se consigue igualar la fuerza centrífuga y la fuerza de atracción y el cuerpo puede colocarse en una órbita circular. Con velocidades comprendidas entre 8 y 11,2 km/s el cuerpo lanzado describe alrededor de la Tierra una trayectoria elíptica. Y si la velocidad inicial es de cerca de 11,2 km/s, la energía cinética del cuerpo se hace suficiente para vencer por completo la atracción de la Tierra. Un cohete lanzado con esta velocidad se moverá siguiendo una hipérbola.

Si un sistema mecánico consta de  $n$  puntos independientes, el número de parámetros del sistema será igual a  $6n$ .

Pero en una serie de casos al sistema mecánico se le pueden imponer ligaduras (o enlaces) que disminuyen este número. Un ejemplo sencillo es el de un regulador centrífugo, el cual podemos figurárnoslo como un sistema de dos esferas ligadas entre sí que pueden separarse y girar alrededor de un eje común. Está claro que, en este caso, dando la distancia a un punto desde el eje de

rotación y el ángulo acimutal con respecto a una línea arbitraria podemos determinar unívocamente el estado mecánico del sistema. Dos «coordenadas» y dos velocidades de variación de las mismas serán los parámetros de este estado.

Consideremos ahora un cuerpo sólido que gire arbitrariamente y veamos qué datos hay que tener para fijar su posición con respecto a un sistema de coordenadas en reposo. Está claro que con tres datos podemos determinar la posición del centro de gravedad del cuerpo. Pero para definir la rotación del cuerpo basta conocer tres ángulos. En esta afirmación podemos no detenernos, puesto es evidente que, mediante tres giros alrededor de unos ejes perpendiculares entre sí, siempre es posible dar a un cuerpo cualquier orientación.

Así, pues, el cuerpo sólido tiene que caracterizarse por medio de seis coordenadas y seis velocidades de variación de estas coordenadas, en total doce parámetros.

Como otro ejemplo más, consideraremos dos puntos rígidamente unidos. Si fueran libres, para sus características se necesitarían los valores de seis coordenadas. Pero como están rígidamente enlazados existe una condición adicional que relaciona las coordenadas de estos puntos:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{const.}$$

De este modo, para caracterizar dicho sistema se tienen cinco magnitudes independientes. Cinco coordenadas y cinco velocidades de variación de las mismas dan para este sistema diez parámetros.

Como los parámetros de estado se dividen siempre en «coordenadas» y en velocidades de variación de las «coordenadas», se acostumbra hablar de *grados de libertad* del sistema, entendiéndose por esto el número de coordenadas independientes necesario para definir el sistema. Por lo tanto, un punto tiene tres grados de libertad; dos puntos rígidamente unidos, cinco grados de libertad; un sólido, seis grados de libertad; un sistema de  $n$  puntos independientes,  $3n$  grados de libertad, etc. Ahora está claro el sentido que tiene la afirmación de que el estado mecánico de un sistema se determina dando sus parámetros de acuerdo con el número de grados de libertad que tenga.

*§ 8. Coeficientes de proporcionalidad  
en las fórmulas de la física  
y dimensiones de las magnitudes físicas*

El coeficiente  $\gamma$  que figura en la ley de la gravitación universal es una constante universal que depende de las unidades de medición de la fuerza, masa y distancia que se elijan. Las unidades de me-



dición se pueden elegir de modo que  $\gamma=1$ . Para esto hay que tomar como unidad de masa la masa de un punto que atraiga a otro de igual masa que se halle a la distancia unidad, con una fuerza igual a la unidad. En el sistema CGS esta masa sería igual, evidentemente, a  $1,5 \cdot 10^7$  g, es decir, a 15 toneladas.

De este modo, los coeficientes universales que figuran en las leyes de la física aparecen como consecuencia de las unidades de medición que concretamente se elijan. Si se quisiera podrían hacerse desaparecer todos los coeficientes de este tipo de todas las leyes, eligiendo convenientemente las unidades de medida.

Lo importante es asimilar lo siguiente: en las fórmulas están ligados entre sí el sistema de unidades de medición que se utiliza y los coeficientes de proporcionalidad. Esta relación se pone de manifiesto cuando se estudian las fórmulas de las dimensiones. En primer lugar es necesario establecer el número de unidades que se desean considerar fundamentales. Este número depende totalmente de nuestra voluntad y se determina exclusivamente atendiendo a razones de comodidad.

En física se admite generalmente un sistema en el cual las unidades de longitud  $L$ , masa  $M$  y tiempo  $T$  se han elegido independientemente unas de otras. En este caso los valores de todas las constantes universales, lo mismo que las unidades de medición de todas las demás magnitudes quedan determinadas unívocamente al elegir las unidades de  $L$ ,  $M$  y  $T$ . El carácter de esta relación viene dado por las llamadas fórmulas de las dimensiones. El sentido de estas fórmulas queda claro en los ejemplos siguientes. La dimensión de la velocidad es  $LT^{-1}$ , la de la aceleración  $LT^{-2}$ , la de la fuerza  $MLT^{-2}$ , la de la constante de gravitación  $M^{-1}L^3T^{-2}$ , la de la carga eléctrica en la fórmula de Coulomb  $M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$ , etc. Conociendo estas fórmulas se puede decir inmediatamente cómo varían los valores numéricos de las constantes universales y de las unidades de medición de las magnitudes físicas derivadas si se varía la magnitud de una unidad fundamental cualquiera.

Como veremos en los ejemplos (§ 81), el análisis de las dimensiones de las magnitudes físicas puede indicar el carácter de unas u otras dependencias entre dichas magnitudes.

Además del sistema en el cual las magnitudes fundamentales son la distancia, el tiempo y la masa, se utiliza mucho el sistema en el que como magnitudes fundamentales se toman la distancia  $L$ , el tiempo  $T$  y la fuerza  $F$  (sistema  $FLT$ ). Es indudable que en este sistema las fórmulas de las dimensiones tendrán otra forma. Por ejemplo, el momento de una fuerza en el sistema  $FLT$  tiene la dimensión  $FL$ , mientras que en el sistema  $MLT$  su dimensión es  $ML^2T^{-2}$ . La masa, que en el sistema  $FLT$  es una magnitud derivada, toma la dimensión  $FL^{-1}T^2$ .

La ley fundamental de la mecánica relaciona entre sí la fuerza, la masa, la distancia y el tiempo. Por esto, la elección del coeficiente de proporcionalidad en esta fórmula depende para ambos sistemas de las unidades de medida que se tomen. En ambos sistemas se supone que el coeficiente de proporcionalidad es igual a la unidad. Esto significa que en el sistema MLT, por la fórmula  $F=ma$ , se elige la unidad de medida de la fuerza de tal modo, que  $F=1$  si la masa y la aceleración son iguales a la unidad, mientras que en el sistema FLT, por la fórmula  $m=\frac{F}{a}$ , se elige la unidad de medición de la masa de manera, que  $m=1$  si la fuerza y la aceleración son iguales a la unidad.

En este libro utilizaremos con más frecuencia el sistema MLT en sus dos variantes:

El sistema CGS:  $L$ , centímetro;  $M$ , gramo;  $T$ , segundo;  
y el sistema SI:  $L$ , metro;  $M$ , kilogramo;  $T$ , segundo.

En el sistema CGS la unidad de fuerza es la dina= $1\text{g}\cdot\text{cm}/\text{s}^2$ , y la unidad de trabajo es el ergio= $1\text{din}\cdot\text{cm}$ . En el SI la unidad de fuerza es el newton= $1\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$ , y la de trabajo es el julio= $1\text{N}\cdot\text{m}$ .

Si el lector encuentra datos expresados en el sistema FLT debe reducirlos a cualquiera de los dos sistemas indicados. Para esto basta recordar que la unidad de fuerza en el sistema FLT es el kilogramo fuerza (peso de una pesa de 1 kilogramo al nivel del mar a  $45^\circ$  de latitud), que está ligado con las dos unidades de fuerza que hemos admitido por medio de las relaciones

$$1\text{kgf} = 9,81\text{ N} = 9,81 \cdot 10^5\text{ din.}$$

Del problema de los sistemas de unidades volveremos a tratar cuando nos sean necesarias las magnitudes eléctricas.

## 2

### ENERGÍA MECÁNICA

#### § 9. Trabajo

Un movimiento sin aceleración (es decir, rectilíneo y uniforme) puede producirse tanto si sobre el cuerpo no actúan fuerzas como si actúan. En el último caso la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es nula. Entre estas dos formas de movimiento sin aceleración existe una diferencia esencial. En el primer caso el movimiento no va acompañado de trabajo, mientras que para

efectuar el segundo tipo de movimiento hay que realizar trabajo. Trabaja el motor que mueve uniforme y rectilíneamente a un automóvil. Trabaja el hombre que hace que se mueva uniforme y rectilíneamente un trineo con carga. Se dice que en estos casos el trabajo se invierte en vencer las resistencias, como el rozamiento, la resistencia del aire, etc.

De dos fuerzas equilibradas entre sí que actúan sobre un cuerpo que se mueve sin aceleración, una está dirigida en el sentido del movimiento y la otra en sentido contrario.

De la fuerza que actúa en el sentido del movimiento se dice que es la que realiza trabajo, y de la que tiene sentido contrario al del movimiento se dice que contra ella se realiza el trabajo.

La característica cuantitativa del trabajo es el producto de la fuerza que actúa sobre el cuerpo, en el sentido del movimiento, por el camino recorrido. Esta magnitud física se llama *trabajo*.

Supongamos que sobre un cuerpo actúa una multitud de fuerzas cuya suma geométrica es nula. El cuerpo se mueve uniforme y

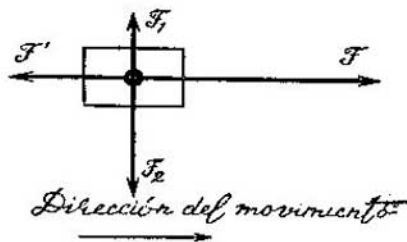


FIG. 15.

rectilíneamente. En este caso todas las fuerzas se pueden reducir a cuatro (fig. 15). Las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$ , de acuerdo con la definición admitida, no realizan trabajo. La fuerza  $F$  efectúa un trabajo igual a  $F\Delta S$  ( $\Delta S$  es el camino recorrido). El trabajo de la fuerza  $F'$  es igual a  $-F\Delta S$ . El signo menos indica que el

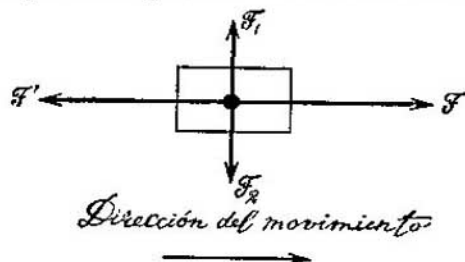


FIG. 16.

trabajo se realiza contra la fuerza  $F'$ .

Consideremos ahora el movimiento acelerado de un cuerpo, es decir, el movimiento curvilíneo y variado. Como sabemos, en este caso actúa sobre el cuerpo una fuerza resultante dirigida a lo largo de la aceleración (¡pero, en el caso general, no a lo largo de la trayectoria!). Reduzcamos otra vez todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo a fuerzas dirigidas a lo largo del movimiento y a fuerzas perpendiculares a él (fig. 16). Ahora  $F$  no es igual a  $F'$  ni  $F_1$  igual a  $F_2$ . Conservando la definición de trabajo que hemos dado antes, decimos, lo mismo que en el caso precedente, que las

fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  no realizan trabajo. El trabajo de la fuerza  $F'$  es, como antes, negativo, es decir, el trabajo se efectúa contra la fuerza  $F'$  y es igual a  $F'\Delta S$ . La fuerza  $F$  realiza el trabajo  $F\Delta S$ , que es mayor que el trabajo contra las fuerzas de resistencia. El exceso de trabajo se invierte en acelerar el cuerpo.

La desigualdad de las fuerzas  $F_2$  y  $F_1$  indica que el movimiento es curvilíneo. La diferencia entre las fuerzas  $F_2 - F_1$  responde de la componente normal del vector aceleración.

Estudiemos el caso límite, el movimiento uniforme por una circunferencia. En este movimiento, como ya sabemos, la fuerza resultante está dirigida siguiendo el radio de la circunferencia, es decir, perpendicularmente a la dirección del movimiento. Por esto la fuerza centrípeta no realiza trabajo.

Así, pues, en el caso general del movimiento curvilíneo acelerado el exceso de trabajo no se invierte en crear la totalidad de la aceleración, sino sólo la componente tangencial del vector aceleración. Para un punto material esta afirmación se escribe así:

$$F - F' = ma_t \quad \text{y} \quad F\Delta S - F'\Delta S = ma_t \Delta S.$$

Recordamos que  $(F - F')$  es la componente tangencial de la fuerza resultante  $F_r^{\text{res}}$ .

El trabajo que se invierte en acelerar el cuerpo (igual, por definición, a la proyección de la fuerza resultante sobre la dirección del movimiento multiplicada por la magnitud del camino recorrido) es igual al producto de la masa del cuerpo por la magnitud del camino recorrido y por la de la aceleración tangencial. Esta última igualdad se puede escribir de la forma  $F\Delta S = F'\Delta S + ma_t \Delta S$  y leerla así: el trabajo de la fuerza que actúa sobre el cuerpo se compone del trabajo contra las fuerzas de resistencia y del trabajo que se invierte en acelerar el cuerpo.

*Ejemplos.* 1. Un avión de pasajeros, a reacción, cuyo peso  $P=70$  tf, se eleva a la altura  $h=10$  km. Si se moviera uniformemente el trabajo de elevación a dicha altura sería

$$A_1 = Ph = 7 \cdot 10^8 \text{ kgf} \cdot \text{m} = 68,6 \cdot 10^8 \text{ J} = 68,6 \cdot 10^{12} \text{ erg}.$$

Pero si la toma de altura se realiza durante un trayecto  $S=85$  km aumentando simultáneamente la velocidad (con la aceleración  $a=0,3 \text{ m/s}^2$ ), el gasto adicional de trabajo en conseguir la aceleración será

$$A_2 = ma \cdot S = 17,9 \cdot 10^8 \text{ J} = 17,9 \cdot 10^{12} \text{ erg} = 1,82 \cdot 10^8 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

2. En acepillar una tabla de 2 m de longitud y 0,2 m de anchura un carpintero realiza un trabajo de cerca de  $150 \text{ kgf} \cdot \text{m} = 1470 \text{ J}$ .

## § 10. Energía cinética

Como hemos dicho, al acelerar un cuerpo la fuerza resultante  $F^{\text{res}}$  realiza un trabajo

$$A = F_t^{\text{res}} \Delta S = ma_t \Delta S,$$

donde  $a_t$  es la aceleración tangencial media en el trozo de camino  $\Delta S$  que se considera. Poniendo el valor de  $a_t$ , tenemos que

$$A = m \frac{\Delta v \cdot \Delta S}{\Delta t} = mv \cdot \Delta v,$$

siendo  $v$  la velocidad media, igual a  $\frac{1}{2}(v_2 + v_1)$ , si  $v_2$  y  $v_1$  son las velocidades instantáneas al final y al principio del recorrido. Como  $\Delta v = v_2 - v_1$  \*),

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta \left( \frac{mv^2}{2} \right),$$

es decir, el trabajo es numéricamente igual al incremento de la magnitud  $mv^2/2$ . Por eso la magnitud

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

se toma como medida de la energía del movimiento de un punto material; a la magnitud  $K$  le llamaremos *energía cinética*. La ecuación precedente se lee ahora así: el trabajo de la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo (es decir, el producto de la componente tangencial de la fuerza resultante por el camino recorrido) es igual al incremento de la energía cinética de dicho cuerpo. Esta ecuación resulta cómoda para resolver los problemas elementales de mecánica en que se da el trayecto durante el cual actuó la fuerza.

Con el término «energía» nos encontraremos más de una vez. Este es uno de los conceptos más importantes de la física. La energía, es decir, la capacidad de producir trabajo, es función del estado del cuerpo; a expensas de la disminución de la magnitud de esta función se realiza el trabajo. La energía cinética es función del estado de movimiento. Si la energía cinética varía de  $K_1$  a  $K_2$ , el trabajo realizado al ocurrir esto será igual a  $K_2 - K_1$  inde-

\*) El mismo resultado obtendríamos escribiendo la expresión para el trabajo infinitesimal en la forma  $dA = mv dv$  e integrándola desde el instante en que la velocidad era  $v_1$  hasta el que era  $v_2$ :

$$A = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

pendientemente del carácter del movimiento. Que la velocidad varíe rápida o lentamente, uniformemente o no, carece de importancia. La disminución de la energía cinética en una cantidad determinada produce siempre un mismo trabajo.

Una magnitud física puede tener sentido de energía, es decir, de reserva de trabajo, únicamente en el caso en que dicha magnitud sea función de estado.

*Ejemplos.* La unidad de energía en física atómica es el electrón voltio (eV); ésta es la energía cinética de un electrón acelerado por una diferencia de potencial de 1 voltio:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

La energía de un protón acelerado en un sincrofasotrón es igual a  $10 \text{ GeV} = 10^{10} \text{ eV} = 0,016 \text{ erg} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ J.}$

La energía cinética de un gran avión reactor de pasajeros ( $m = 100 \text{ t}$ ,  $v = 800 \text{ km/h}$ ) es igual a

$$2,5 \cdot 10^{10} \text{ erg} = 2,5 \cdot 10^9 \text{ J} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ kgf} \cdot \text{m.}$$

### § 11. Energía potencial

Veamos ahora algunos fenómenos en los cuales el trabajo realizado no va acompañado de una variación de la velocidad del cuerpo. Dos tipos de ejemplos serán objeto de nuestra atención: los primeros se refieren a la deformación elástica de los cuerpos, los segundos describen los hechos que tienen lugar cuando los cuerpos se mueven en el campo de la gravedad o en un campo eléctrico. Vamos a demostrar que en estos dos casos nos encontramos con la transformación del trabajo en una forma especial de la energía llamada energía potencial.

Primeramente nos detendremos en los fenómenos de deformación elástica. La experiencia demuestra que en toda deformación elástica de tracción, compresión, flexión, etc., se puede evidenciar una función del estado tal, que aumenta precisamente en la cantidad de trabajo realizada sobre el cuerpo. Esta función del estado o, dicho de otra forma, función de las propiedades del cuerpo y del grado de deformación, se llama *energía potencial de elasticidad*.

Demostraremos la existencia de esta energía solamente en un ejemplo de deformación elástica, la de tracción o compresión lineal. Demostraciones análogas pueden hacerse con otros tipos cualesquiera de deformación elástica.

Supongamos que cierta fuerza (muscular, por ejemplo) estira muy despacio un cuerpo sólido (un muelle). El trabajo que se invierte en alargar el cuerpo desde la longitud  $l + s_1$  hasta la longitud  $l + s_2$ , donde  $l$  es la longitud del muelle no deformado es

$$A = F(s_2 - s_1).$$

La fuerza muscular es equilibrada en cada instante dado por la fuerza de elasticidad del muelle. Esta última, si los alargamientos no son muy grandes, es proporcional a la deformación  $s^*$ :

$$F_{\text{elast}} = ks.$$

En la expresión del trabajo debemos poner el valor medio de la fuerza  $F$ , es decir,  $1/2 (ks_2 = ks_1)$ . Entonces obtenemos \*\*):

$$A = \frac{ks_2^2}{2} - \frac{ks_1^2}{2} = \Delta \left( \frac{ks^2}{2} \right),$$

o sea, el trabajo contra las fuerzas de elasticidad se invierte en aumentar la magnitud  $ks^2/2$ . Esta magnitud debe tomarse como medida de la energía elástica. A la magnitud

$$U_{\text{elast}} = \frac{ks^2}{2}$$

le llamaremos *energía potencial de elasticidad*.

Exactamente la misma forma tienen las fórmulas de la energía potencial de elasticidad para otros tipos de deformaciones.  $k$  caracteriza la rigidez del cuerpo con respecto a una forma concreta de deformación, y  $s$  es la medida de la deformación (por ejemplo, el ángulo de torsión, el ángulo de cizallamiento, etc.).

La magnitud  $U_{\text{elast}}$  es energía precisamente en el sentido que hablamos al final del § 10. Cualquiera que sea el procedimiento y la rapidez con que se deforme el cuerpo, a un mismo trabajo invertido le corresponderá siempre un mismo valor del incremento de la magnitud  $ks^2/2$ . Esto significa que  $ks^2/2$  es una medida de energía, concretamente, de la energía potencial de elasticidad.

*Ejemplos.* 1. La energía potencial de un trozo de alambre de acero (módulo de Young  $E=20,6 \cdot 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>) de 50 m de longitud, 10 mm<sup>2</sup> de sección transversal y alargado 1 cm, será

$$U_{\text{elast}} = \frac{ks^2}{2} = 20 \cdot 10^6 \text{ erg} \approx 2 \text{ J.}$$

2. El módulo de Young de la goma es  $E=7,85 \cdot 10^6$  N/m<sup>2</sup>. Una china de 20 g de masa lanzada con un tirador se eleva hasta 20 m de altura. Para esto hay que transmitirle una energía de 3,92 J. Supongamos que al disparar la china se estiró la goma 40 cm, siendo su longitud inicial igual a 40 cm. Hallemos la sección que

\* ) Recordamos que la ley de la deformación elástica (ley de Hooke) se escribe de la forma  $\frac{F}{S} = E \frac{s}{l}$ , donde  $E$  es el módulo de elasticidad y  $S$  es la sección del cuerpo que se estira. Por lo tanto, la rigidez (coeficiente de proporcionalidad en la expresión de la fuerza de elasticidad) tiene el valor  $k = ES/l$ .

\*\* ) Al mismo resultado llegaríamos integrando el trabajo infinitesimal  $dA = -ks ds$  entre los límites de  $s_1$  a  $s_2$ .

debe tener la goma.

$$U_{\text{clast}} = \frac{ES}{l} \frac{s^2}{2}; \quad S = \frac{2LU}{Es^2} = \frac{2 \cdot 40 \text{ cm} \cdot 3,92 \text{ J}}{7,85 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \cdot 1600 \text{ cm}^2} = 0,25 \text{ cm}^2.$$

Las fuerzas de gravedad tienen la misma peculiaridad que las de elasticidad, a saber: el trabajo realizado en elevar un cuerpo en el campo de la gravedad se invierte en variar una función del estado de dicho cuerpo. En este caso la función que nos interesa depende de la posición del cuerpo dado con relación a los cuerpos que lo atraen. Esta función recibe el nombre de *energía potencial de gravitación*.

En primer lugar demostraremos la existencia de esta energía en los cuerpos que se hallan cerca de la superficie de la Tierra. Desde un punto 1 un cuerpo se traslada a otro punto 2 más alto siguiendo cierto camino curvilíneo. Dividamos esta trayectoria en trozos pequeños y sustituyamos la línea curva por una quebrada. Esto se puede hacer tan exactamente como se quiera. El trabajo que se emplea en trasladar el cuerpo a lo largo de uno de estos segmentos rectilíneos de longitud  $dl$  es igual a

$$dA = mg \, dl \, \text{sen} \alpha \quad \text{o} \quad dA = mg \, dh,$$

donde  $dh$  es el incremento de la altura. Como  $mg$  es constante durante todo el recorrido, al hacer la suma de los trabajos correspondientes a todo el camino,  $mg$  se saca fuera de paréntesis (al integrar se saca fuera del signo de integración), lo que da para el trabajo total

$$A = mg (h_2 - h_1),$$

donde  $h_1$  y  $h_2$  son las alturas respectivas de los puntos 1 y 2.

$$A = (mgh)_2 - (mgh)_1 = \Delta (mgh),$$

es decir, el trabajo de traslación es igual al incremento del producto  $mgh$ , que es la medida de la energía potencial de gravitación en este caso.

Está claro que

$$U = mgh$$

es una energía y que responde completamente al sentido que le damos a esta palabra. Cualquiera que sea el procedimiento por el cual se realice el trabajo, el camino por que se traslade el cuerpo y la rapidez con que se mueva, el trabajo de traslación del cuerpo desde el punto 1 hasta el punto 2 será siempre el mismo, puesto que el incremento de la energía depende únicamente de la posición que ocupen estos puntos o, en nuestro caso, de sus alturas.

Como el trabajo de traslación de un cuerpo en el campo de la gravedad no depende de la forma del camino recorrido, el trabajo de traslación por un contorno cerrado será nulo.



Advertimos que el origen que se tome para la lectura de  $h$  no desempeña ningún papel. Si convenimos medir  $h$  desde la superficie de la Tierra, la energía potencial de un cuerpo que se encuentre en el fondo de un pozo será negativa.

La fórmula escrita anteriormente no sirve para los cuerpos que se encuentran a gran distancia de la Tierra, por ejemplo, para la Luna. En efecto, como se aclaró en el § 2, para grandes distancias la fórmula aproximada de la gravitación  $mg$  debe sustituirse por la exacta  $\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ .

Calculemos el trabajo que realizan las fuerzas de gravitación. Convencionalmente consideraremos positivo el trabajo que efectúan las fuerzas del sistema y negativo el que se realiza contra dichas fuerzas. Supongamos que dos cuerpos que se atraen se aproximan entre sí, siguiendo la línea de acción de las fuerzas, en un trozo infinitamente pequeño,  $-dr$ , del espacio que los separa (se toma con signo menos porque  $r$  disminuye). En este caso

$$dA = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr.$$

Pero  $\frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{1}{r}\right)$ . Por consiguiente

$$dA = -d\left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r}\right).$$

El trabajo se realiza a costa de la disminución de la magnitud  $U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$ , que es la medida de la energía de gravitación en el caso general:

$$dA = -dU.$$

La magnitud

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

es la energía potencial de gravitación en el caso general.

La energía potencial de gravitación es nula si los cuerpos se encuentran a una distancia infinitamente grande uno del otro. Al acercarse los cuerpos aumenta el valor absoluto de  $U$ , pero como  $U$  es negativa, lo mismo que en el caso de la fórmula aproximada para los cuerpos que se hallan cerca de la Tierra, la energía potencial será tanto menor cuanto más cerca se encuentren entre sí los cuerpos que se atraen. Está claro que, si se quiere, puede cambiarse el origen de la lectura de  $U$  y hacer que esta magnitud sea positiva en el intervalo de valores que nos interese.

No es difícil demostrar la relación que existe entre la fórmula general de  $U$  y su caso particular  $U = mgh$ . En efecto, sustituyendo

$r$  por  $R+h$ , donde  $R$  es el radio de la Tierra, obtenemos

$$U = -\frac{\gamma Mm}{R+h} = -\frac{\frac{1}{R} \gamma Mm}{1+\frac{h}{R}}$$

( $M$  es la masa de la Tierra). Pero  $\frac{h}{R}$  es una cantidad pequeña, por lo que con suficiente exactitud  $\frac{1}{1+\frac{h}{R}} = 1 - \frac{h}{R}$ , de donde

$$U = -\gamma \frac{Mm}{R} + mgh.$$

Cambiando el origen de la lectura de  $U$ , es decir, tomando como cero la energía potencial del cuerpo que se halla en la superficie de la Tierra, llegamos a la fórmula  $U = mgh$ .

*Ejemplo.* Para que se comprenda mejor el sentido de los resultados obtenidos calcularemos la energía potencial de un cuerpo de masa  $m = 1$  kg en la superficie de la Tierra y a 1000 km de distancia sobre dicha superficie.

La energía potencial en la superficie de la Tierra

$$U_0 = -\gamma \frac{Mm}{R} \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,8 \cdot 10^{24} \cdot 1}{6,3 \cdot 10^6} = -6,1 \cdot 10^7 \text{ J} = -6,1 \cdot 10^{14} \text{ erg.}$$

La energía potencial a 1000 km de distancia

$$U_{1000} = -6,67 \cdot 10^{11} \cdot \frac{5,8 \cdot 10^{24} \cdot 1}{7,3 \cdot 10^6} = -5,3 \cdot 10^7 \text{ J} = -5,3 \cdot 10^{14} \text{ erg.}$$

De este cálculo se deduce que: 1) la energía potencial de un cuerpo en el campo gravitatorio de la Tierra es siempre negativa y aumenta a medida que se aleja de la Tierra (puesto que convinimos en que tiende a cero cuando  $h \rightarrow \infty$ ); 2) la variación de la energía potencial de un cuerpo que se eleva sobre la Tierra no se describe, en general, por la fórmula  $mg(h_2 - h_1)$ . En efecto,

$$U_{1000} - U_0 = -5,3 \cdot 10^7 - (-6,1 \cdot 10^7) = 0,8 \cdot 10^7 \text{ J.}$$

mientras que el cálculo por la fórmula  $mg(h_2 - h_1)$  da  $0,98 \cdot 10^7$  J. Pero en aquellos casos en que se trata de elevaciones a alturas  $h \ll R$  ( $R$  es el radio de la Tierra) puede utilizarse la fórmula simplificada  $mg(h_2 - h_1)$ .

Las expresiones de la energía potencial de gravitación y de la energía potencial de la interacción eléctrica de las cargas se parecen mucho.

Consideremos dos cargas eléctricas de igual signo,  $q_1$  y  $q_2$ , que se hallen a la distancia  $r$  una de otra. Las cargas interactúan (se repelen) de acuerdo con la ley de Coulomb. Por lo tanto, al aproximarlas entre sí en un pequeño espacio  $dr$  realizaremos un trabajo igual a  $-dA = -\frac{q_1 q_2}{r^2} dr$  (el signo menos del primer

miembro se debe a que el trabajo se realiza contra las fuerzas del sistema, y el del segundo, a que, como se produce una aproximación,  $dr$  es negativa). El cálculo, que no se diferencia en nada del que acabamos de hacer para las fuerzas de atracción gravitatoria, da para la energía de la interacción eléctrica de las cargas (que para abreviar se llama coulombiana) la expresión  $U = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ , es decir, aquí también  $dA = -dU$ .

La energía de interacción de las cargas de signos distintos será negativa y se comportará lo mismo que la gravitatoria. La energía de las cargas de igual signo es nula en el infinito y aumenta a medida que se aproximan las cargas.

Podemos limitarnos a estos ejemplos de energía potencial, aunque en algunos casos puede tomarse en consideración otras funciones del estado del cuerpo.

La energía potencial aparece siempre que entre los cuerpos o partículas que forman el sistema que se considera actúan fuerzas dependientes de la distancia entre los cuerpos. La energía potencial es la energía de interacción de los cuerpos. Si un sistema consta de multitud de cuerpos o partículas puede hablarse de su energía potencial total, que se compone de las energías de interacción entre todas las partículas (cada una con cada una de las demás). En el caso de cuatro partículas la energía potencial constará ya de seis sumandos, puesto que hay que contar la interacción del primer cuerpo con el segundo, tercero y cuarto, la del segundo con el tercero y cuarto y, finalmente, la del tercero con el cuarto.

En mecánica se tiene en cuenta únicamente la energía potencial de las fuerzas que actúan entre cuerpos distintos. Si los cuerpos son complejos y constan de multitud de partículas, la energía potencial de la interacción de estas partículas se considera constante durante los fenómenos mecánicos. La energía potencial de interacción de las partículas que componen un cuerpo es parte integrante de la energía interna de dicho cuerpo (cap. 9). Si se producen variaciones de la energía interna del cuerpo, el fenómeno deberá considerarse desde el punto de vista de las leyes de la termodinámica (cap. 9).

### § 12. Ley de conservación de la energía mecánica

Cualesquiera que sean las fuerzas que tomen parte en un movimiento, el trabajo de la fuerza resultante será siempre igual al incremento de la energía cinética del cuerpo, es decir,

$$F \Delta s = \Delta \left( \frac{mv^2}{2} \right).$$

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo pueden ser de elasticidad, de gravitación, eléctricas, de rozamiento, etc.

De las fuerzas que actúan se pueden separar siempre aquellas cuyo trabajo se invierte en cambiar la energía potencial. Estas fuerzas se llaman a veces, para abreviar, *potenciales* o poseedoras de potencial. La ecuación del trabajo puede escribirse de la forma

$$F_{\text{pot}} \Delta s + f \Delta s = \Delta \left( \frac{mv^2}{2} \right).$$

Aquí  $f$  son las fuerzas no potenciales. El trabajo de estas fuerzas es igual a la variación de la energía interna del cuerpo o del medio en que éste se mueve.

Sustituyendo el trabajo de las fuerzas potenciales por el incremento de la energía potencial con signo contrario, podemos escribir la ecuación anterior en la forma

$$f \Delta s = \Delta \left( \frac{mv^2}{2} + U \right).$$

La suma de las energías potencial y cinética de un cuerpo se llama *energía mecánica total*. Representando por  $\mathcal{E}$  esta magnitud, obtenemos:  $f \Delta s = \Delta \mathcal{E}$ , es decir, la variación de la energía total de un cuerpo es igual al trabajo de las fuerzas no potenciales, por ejemplo, de las fuerzas de rozamiento.

Si el trabajo que se invierte en variar la energía interna del cuerpo es pequeño comparado con  $\mathcal{E}$ , la igualdad se transforma en la afirmación siguiente:  $\Delta \mathcal{E} = 0$  y  $\mathcal{E} = \text{const}$ . Esta es la ley o principio de conservación de la energía mecánica, que dice, que la energía mecánica total de un cuerpo se conserva.

Este principio se generaliza inmediatamente a un sistema formado por muchos cuerpos o partículas. Para cada cuerpo puede escribirse la ecuación del trabajo y después sumar todas estas igualdades. La energía total será igual en este caso a la suma de las energías cinéticas de los cuerpos más la energía potencial de la interacción:

$$\mathcal{E} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + U.$$

Si se toman en consideración todos los cuerpos de interacción (este sistema se llama *cerrado* o *aislado*), la forma de la ley sigue siendo la misma que para el caso de un solo cuerpo. La variación de la energía mecánica es igual al trabajo de las fuerzas no potenciales, y si este trabajo puede despreciarse, la energía mecánica total del sistema cerrado de cuerpos permanece invariable, es decir, se conserva.

La ley de conservación de la energía mecánica es, por una parte, consecuencia de las ecuaciones de la mecánica (de la ley de Newton); y, por otra parte, se puede considerar como un caso particular de la ley más general de la naturaleza, o sea, de la ley de conservación de la energía (cap. 9).

Ya en la mecánica nos encontramos con una gran variedad de transformaciones mutuas de la energía. Al estudiar el movimiento de un cuerpo por la acción de las fuerzas elásticas o de gravitación no es difícil advertir que el aumento de una de las formas de la energía mecánica va acompañado de la disminución de otra forma de la energía.

Así, por ejemplo, las fuerzas de la gravedad que actúan sobre un cuerpo que cae hacen que disminuya la energía potencial y que aumente la energía cinética de dicho cuerpo. La transformación inversa se produce cuando se eleva el cuerpo. Las fuerzas de elasticidad que obligan a una pelota lanzada a botar en la pared, hacen que disminuya la energía potencial de la pelota comprimida, que se transforma en energía cinética. La transformación contraria ocurre en el instante en que la pared detiene a la pelota lanzada (en el período desde que aún no existe deformación hasta la compresión máxima).

Un muelle alargado puede elevar un peso a cierta altura. Y, al contrario, el peso al caer alarga el muelle. Por consiguiente, la energía de elasticidad se puede transformar en energía de gravitación y viceversa.

Los ejemplos citados se refieren tanto a casos de transformación de una forma de la energía en otra concernientes a un mismo cuerpo, como a casos en que un cuerpo le comunica energía a otro.

Está claro que un cuerpo puede cederle a otro energía de una misma forma, por ejemplo, un peso tira de otro por medio de un hilo que pasa por una polea; una bola, al chocar con otra, le cede parte de su energía cinética, etc.

### § 13. *Curvas de potencial. Equilibrio*

La energía potencial de interacción de los cuerpos o partículas depende de su posición mutua, es decir, es siempre función de las coordenadas o de otros parámetros que caracterizan la posición de estos cuerpos en el espacio. En los casos más simples la energía potencial puede depender de una sola coordenada.

Consideremos la interacción de dos partículas cuya energía potencial viene determinada por la función  $U(x)$ , donde  $x$  es la distancia entre dichas partículas. Supongamos, para concretar, que las partículas se repelen con una fuerza  $F$ . La fuerza de inte-

racción hace que la distancia entre las partículas aumente en  $dx$ , es decir, se realizará el trabajo  $Fdx$ . Esto puede ocurrir a costa de la energía potencial de interacción  $U$ , que variará en  $-dU$  (disminución de la energía).

Por lo tanto,  $-dU = Fdx$ , o

$$F = - \frac{dU}{dx},$$

es decir, en el caso de las fuerzas potenciales, la fuerza es la derivada de la energía potencial respecto del parámetro  $x$  con signo contrario. Entonces el carácter del problema mecánico se define simple y claramente por medio

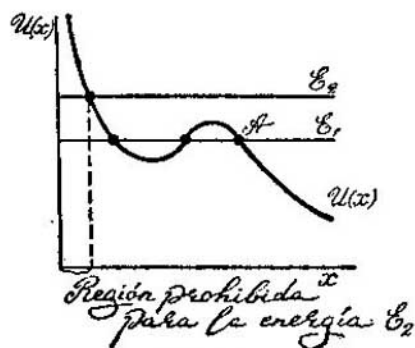


FIG. 17.

de las llamadas curvas de potencial, o sea, de unas gráficas en las cuales los valores de la energía potencial se toman en función del parámetro  $x$  (fig. 17). Al explicar la esencia de este método gráfico se recurre generalmente al ejemplo del movimiento de un cuerpo por una montaña. El dibujo de la curva de potencial resulta muy comprensible en este caso, ya que el perfil de la montaña y la forma de la energía potencial, que es proporcional a la altura  $h$ , coinciden salvo un factor constante.

En la curva de potencial hay pozos, vértices, y subidas y bajadas pendientes y suaves. La forma de la curva permite indicar inmediatamente en qué tramos de la trayectoria se realiza un trabajo mayor o menor y cuál es el signo de dicho trabajo. Cuanto más pendiente es la curva de potencial, tanto mayor es la fuerza que actúa sobre el cuerpo. De acuerdo con el conocido sentido geométrico de la derivada, la fuerza viene caracterizada por la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la tangente geométrica a la curva de potencial.

La validez de la fórmula que relaciona la energía potencial y la fuerza es completamente evidente para aquellos casos particulares de energía potencial que hemos tomado en consideración. Para la energía potencial de un cuerpo cerca de la superficie de la Tierra

$$U = mgh \quad \text{y} \quad F = - \frac{dU}{dh} = - mg;$$

para un cuerpo en un campo gravitatorio en el caso general

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad \text{y} \quad F = -\frac{dU}{dr} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2};$$

para un cuerpo sometido a una acción elástica

$$U = \frac{kx^2}{2} \quad \text{y} \quad F = -\frac{dU}{dx} = -kx;$$

y para una interacción eléctrica

$$U = -\frac{q_1 q_2}{r} \quad \text{y} \quad F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Volviendo a la curva de potencial representada en la figura, podemos advertir inmediatamente en ella, teniendo en cuenta las observaciones hechas, los sitios en que la fuerza es máxima y los puntos en que la fuerza que actúa sobre el cuerpo es nula. Estos últimos puntos, es decir, las posiciones de equilibrio, son el fondo del pozo de potencial y el vértice de la montaña de potencial. Las posiciones en que la energía potencial es máxima corresponden a un equilibrio inestable, mientras que el fondo de un pozo de potencial es una posición de equilibrio estable.

Hemos dicho antes que la forma de la curva de potencial permite describir el posible movimiento del cuerpo. Esto no es completamente exacto: además de la curva de potencial es necesario conocer el valor de la energía mecánica total del cuerpo. Si se conoce este número, por la forma de la curva de potencial se puede hablar, en efecto, de los posibles movimientos del cuerpo o de la partícula.

En la fig. 17 se han trazado unas rectas horizontales cuyas ordenadas son  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$ . Si  $\mathcal{E}$  es la energía total de una partícula, por la gráfica se puede hallar en este caso no sólo la energía potencial, sino también la energía cinética como diferencia entre  $\mathcal{E}$  y  $U$ .

El punto que se mueve no puede hallarse en posiciones en las cuales la energía potencial es mayor que la energía total. Por lo tanto, la recta horizontal  $\mathcal{E}$  limita los posibles tramos del movimiento del cuerpo. En el caso en que la energía viene expresada por la recta inferior  $\mathcal{E}_1$ , el punto que se mueve tiene dos intervalos de posiciones posibles: puede estar en el pozo de potencial (y realizar en él un movimiento oscilatorio) o en la pendiente que hay a la derecha del punto  $A$ , donde se moverá hacia abajo o hacia arriba según que adquiera o pierda energía cinética.

Los razonamientos expuestos son iguales para curvas de potencial de cualquier naturaleza. En la fig. 18 se muestran varios tipos de curvas de potencial. La curva 18,  $a$  es la curva de potencial de un cuerpo que oscila en un resorte. El cuerpo oscilante se encuentra en un pozo de potencial con bordes simétricos. La curva

18,  $b$  es la de potencial típica de muchas partículas en interacción, como los átomos o las moléculas. Esta curva representa un pozo de potencial con uno de sus bordes muy empinado y el otro en pendiente suave. Sobre el eje de abscisas se ha tomado la distancia entre las partículas. Como puede verse por la curva, la energía potencial es bastante grande cuando las distancias son pequeñas, luego, al ir aumentando éstas, la energía potencial decrece, alcanza un mínimo y después aumenta lentamente tendiendo a cierto límite finito. El carácter del movimiento y la relación entre las dos partículas que interaccionan queda descrito con todo detalle por esta

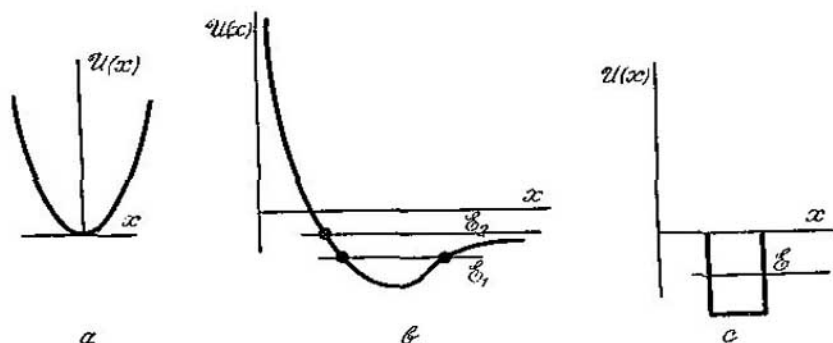


FIG. 18.

curva. Hay que distinguir dos casos: primero, cuando la energía mecánica total de este par de partículas viene expresada por la recta horizontal inferior  $\mathcal{E}_1$ , y segundo, cuando la energía total es igual a  $\mathcal{E}_2$ . En el primer caso el sistema no puede salir del pozo de potencial. Esto significa que la distancia entre las partículas se halla entre los límites indicados en la figura. El movimiento mutuo de las partículas sólo puede tener en este caso, carácter oscilatorio. Así ocurre, por ejemplo, en una molécula diatómica estable. El segundo caso es inverso al primero. La energía total de interacción de las partículas es demasiado grande para que estén ligadas constantemente. El sistema puede salir del pozo de potencial, es decir, el enlace entre las partículas no puede existir, las partículas pueden separarse hasta una distancia tan grande como se quiera.

La tercera curva de la figura es la llamada caja de potencial. Recordando que la fuerza se caracteriza por la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la tangente geométrica a la curva de potencial, vemos que la energía potencial puede expresarse en forma de caja si el cuerpo o la partícula se mueve libre-



mente sin que sobre él actúen fuerzas, pero no puede salir de los límites de la región dada mientras la energía total sea menor que la altura de los bordes del pozo.

### 3

#### IMPULSO

##### § 14. Conservación del impulso

Se llama impulso o impulsión de un cuerpo o punto material el producto de la masa del punto por el vector velocidad,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  (esta magnitud se denomina también cantidad de movimiento). El impulso  $\mathbf{p}$  es, por lo tanto, una magnitud vectorial. Si se trata de un sistema de cuerpos o de puntos, el impulso de dicho sistema será igual a la suma geométrica de los impulsos de los puntos que constituyen el sistema:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots$$

La peculiaridad fundamental que hace que esta magnitud vectorial sea de interés para la física consiste en que, en un sistema cerrado, el vector  $\mathbf{P}$  no varía cualesquiera que sean los movimientos que ocurran dentro del sistema. Este postulado se conoce con el nombre de *ley o principio de conservación del impulso*.

La ley de conservación del impulso se deduce directamente de las leyes de Newton. Para cada uno de los cuerpos que integran un sistema cerrado es válida la ecuación

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F},$$

es decir,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Veamos lo que ocurre si se suman estas ecuaciones escritas para todos los puntos. En el segundo miembro se encuentran las fuerzas que actúan sobre un cuerpo dado por parte de los demás. Es decir, la fuerza que actúa sobre el primer cuerpo es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre él por parte del segundo, tercero, etc. Utilizando subíndices dobles, esto se puede escribir así:  $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14} + \dots$ . Análogamente puede escribirse la expresión de la fuerza que actúa sobre el segundo cuerpo:  $\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{22} + \mathbf{F}_{23} + \dots$ , sobre el tercero:  $\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{33} + \dots$ , etc. No es di-

fácil comprender que, al sumarlos, los segundos miembros de las igualdades dan cero. A cada sumando de una fila puede encontrársele siempre, en otra fila, otro igual y de signo contrario de acuerdo con la regla de la acción y la reacción. Así, la fuerza  $F_{12}$  se anula al sumarla con  $F_{21}$ , la fuerza  $F_{13}$ , al sumarla con  $F_{31}$ , etc. Por esto, en un sistema cerrado se cumple la igualdad

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} + \frac{dp_3}{dt} + \dots = 0;$$

$$\frac{d}{dt} (p_1 + p_2 + p_3 + \dots) = 0,$$

o bien

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots = \text{const.}$$

Esta es la ley de conservación del impulso. La magnitud y la dirección de los impulsos de los distintos cuerpos puede variar, pero su suma geométrica para el sistema cerrado no cambia.

Valores de algunos impulsos: el impulso de un electrón de energía  $5\text{eV} \sim 12 \cdot 10^{-20} \text{ g} \cdot \text{cm/s}$ , el de una bala de fusil  $\sim 8 \cdot 10^6 \text{ g} \cdot \text{cm/s} = 8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ , el de un tren de mercancías  $\sim 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ .

### § 15. Centro de inercia

Los procedimientos para hallar el centro de gravedad de cualquier cuerpo son conocidos. Un cuerpo sujeto por su centro de gravedad se encuentra en una posición de equilibrio indiferente. Si

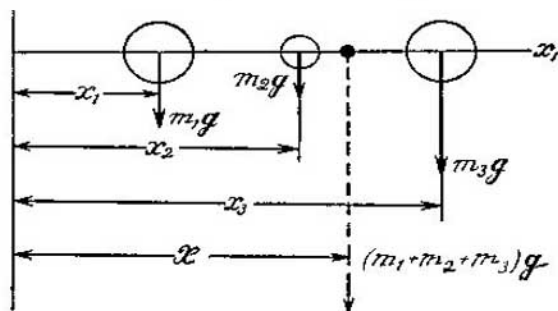


FIG. 19.

tenemos un sistema de puntos materiales o si un cuerpo continuo se descompone convencionalmente en volúmenes elementales, considerando cada uno como un punto material, se puede dar la expresión analítica de la posición del centro de gravedad.

Aplicando la regla de composición de fuerzas paralelas (fig. 19), podemos hallar en el caso en que los puntos materiales se encuentren a lo largo de una recta, por ejemplo, del eje  $x$ , la siguiente expresión de la posición del centro de gravedad:

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}.$$

Aquí  $x_1, x_2, x_3, \dots$  son las coordenadas de los puntos materiales, y  $m_1, m_2, m_3, \dots$  son sus masas respectivas. Las masas aparecen en vez de los pesos, ya que la aceleración de la gravedad se simplifica.

En la mecánica teórica se demuestra que, cuando los puntos materiales están dispuestos arbitrariamente, la expresión de la posición del centro de gravedad tiene la forma

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots},$$

donde  $\mathbf{R}$  es el radio vector (vector de posición) del centro, y  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots$  son los radios vectores de los puntos.

El hecho de que la aceleración de la gravedad se haya simplificado en estas fórmulas nos permite considerar que el punto hallado tiene también un sentido objetivo en el caso en que el cuerpo se trasladara a otras condiciones gravitatorias e incluso si se encontrase en condiciones de ingravidez en el espacio interplanetario. Por esta razón sería conveniente sustituir el tan difundido nombre de «centro de gravedad» por el de *centro de inercia*, del cuerpo \*), que guarda relación directa con la esencia de la cuestión.

Ahora veremos el profundo sentido que tiene esta denominación. Consideremos la velocidad del movimiento del centro de inercia

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}.$$

Aplicando la fórmula para hallar el centro de inercia, obtenemos

$$\mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + m_3 \mathbf{v}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}.$$

En el numerador figura el impulso total, que se conserva en el sistema cerrado; esto significa que en el segundo miembro de esta igualdad se encuentra una cantidad constante. De aquí se deduce que el vector velocidad del centro de inercia no varía ni en magnitud ni en dirección. O, dicho en otras palabras, el centro de inercia de un sistema cerrado de puntos materiales realiza un movimiento inercial.

\*) Se suele llamar también *centro de masas* (*N. del T.*).

Como sabemos, todos los sistemas inerciales de coordenadas tienen las mismas propiedades. Por esto siempre se puede pasar al sistema de coordenadas asociado al centro de inercia del sistema que se estudia y considerar que este punto interesante se halla en reposo. En la física atómica se estudian con frecuencia las colisiones de partículas entre sí. Para este fin se utilizan dos sistemas de coordenadas: el de laboratorio (sistema de coordenadas natural del observador) y el asociado con el centro de inercia de las partículas que chocan. La comodidad que resulta del empleo del segundo sistema de referencia es evidente: el impulso total de las partículas es nulo.

### § 16. Choques

El término «choque», «colisión» o «percusión» debe entenderse con un sentido algo más amplio que el que se le da en el uso ordinario. En los problemas mecánicos que nos interesan ahora, se consideran colisiones los encuentros de cualquier tipo, de dos o más cuerpos en los cuales la interacción dura muy poco. De este modo, además de los fenómenos que pueden considerarse choques en todos los sentidos de la palabra, como, por ejemplo, el de dos

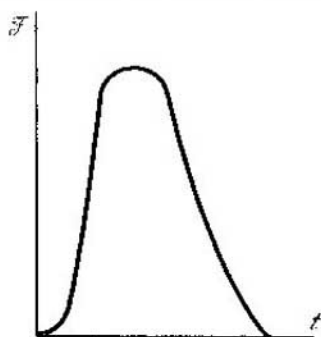


FIG. 20.

bolas de billar, el de los átomos o los núcleos atómicos, también se incluyen aquellos sucesos como el salto de un hombre al apearse de un tranvía o al subirse a él o el impacto de una bala en una pared. En estas interacciones tan cortas se producen fuerzas tan grandes, que el papel de todas las fuerzas que actúan constantemente se puede considerar insignificante. Esto nos da derecho a tratar los cuerpos que chocan como si fueran un sistema cerrado y a aplicarles la ley de conservación del impulso.

En muchas colisiones la interacción dura milésimas de segundo. En este tiempo la fuerza llega hasta su valor máximo y luego cae hasta cero. La curva típica de la fuerza en un choque se representa en la fig. 20. En cada instante de la colisión, la relación entre la fuerza que actúa sobre cualquiera de los cuerpos y el impulso de este mismo cuerpo viene dada por la segunda ley de Newton:

$$\frac{d}{dt} (mv) = F.$$

Escribiendo esta expresión en la forma  $F\Delta t = \Delta(mv)$ , podemos decir, que el producto del valor medio de la fuerza por el tiempo que dura su acción debe ser igual a la variación del impulso. Una afirmación más exacta se obtiene integrando la ecuación antes escrita desde el momento inicial del choque hasta el fin de la interacción. Es evidente que

$$\int_0^{\tau} F dt = (mv)_2 - (mv)_1.$$

La integral del primer miembro se suele llamar impulso de la fuerza. El sentido geométrico de esta cantidad, en la gráfica, es el área situada bajo la curva del choque (véase la fig. 20).

En dependencia de las propiedades elásticas de los cuerpos, las colisiones pueden transcurrir de formas muy diversas. Se acostumbra destacar dos casos extremos: el del choque de cuerpos perfectamente elásticos y el del choque de cuerpos totalmente inelásticos.

Nos detendremos primeramente en el segundo de ellos. Se entiende por *choque inelástico* el encuentro de dos cuerpos cuyo resultado es la unión de ambos. A la categoría de choques inelásticos pertenecen: el choque de dos bolas de arcilla, el salto de un hombre sobre una vagoneta en movimiento, la colisión de dos iones de signos distintos para formar una molécula, la captura de un electrón por un ion positivo, etc.

Supongamos que antes del choque los cuerpos se movían con las velocidades  $v_1$  y  $v_2$ ; el impulso total era igual a  $m_1v_1 + m_2v_2$ . Después de encontrarse los cuerpos tendrán una masa total igual a  $m_1 + m_2$  y se moverán con una velocidad  $V$ . El impulso del sistema después de la colisión será igual a  $(m_1 + m_2)V$ . La ley de conservación del impulso impone que se cumpla la igualdad

$$(m_1 + m_2)V = m_1v_1 + m_2v_2,$$

de donde después del choque inelástico, la velocidad de los cuerpos vendrá expresada por la fórmula

$$V = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

El vector impulso, después de encontrarse los cuerpos, debe ser igual a la suma de los vectores impulso de dichos cuerpos antes del choque.

Si los cuerpos se mueven al encuentro siguiendo una recta, después del choque se moverán en el sentido en que iba antes el cuerpo cuyo impulso era mayor. Si los impulsos de los cuerpos son iguales en magnitud,  $m_1v_1 = -m_2v_2$  y, por lo tanto,  $V$  será igual a cero, es decir, los cuerpos se detendrán después de chocar.

El choque inelástico va acompañado de una transformación energética. En el ejemplo que acabamos de poner se ve que la energía cinética puede anularse. No es difícil calcular la cantidad en que aumenta la energía interna de los cuerpos que se encuentran en un caso cualquiera; para esto basta plantear la diferencia

$$\frac{m_1 + m_2}{2} V^2 - \left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right).$$

Estudiemos ahora los *choques perfectamente elásticos*, es decir, aquellos en que los cuerpos recuperan totalmente su forma. Esto significa que en el estado de estos cuerpos no se producen cambios de su energía potencial e interna, antes y después de la colisión, no varía y, por consiguiente, que su energía cinética debe conservarse. Para dos cuerpos que choquen de este modo se pueden plantear dos ecuaciones: la de la ley de conservación del impulso y la de la ley de conservación de la energía cinética. Llamemos  $m$  y  $M$  a las masas de los cuerpos. Siempre es posible elegir un origen de coordenadas que coincida con uno de los cuerpos. Esto simplifica el problema sin disminuir el carácter general de su consideración. Por esta razón podemos suponer que el cuerpo

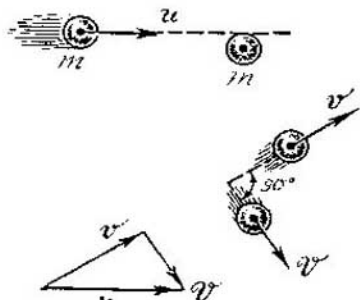


FIG. 21.

de masa  $M$  está en reposo hasta que se produce el choque. En este caso, las dos leyes de conservación indicadas dan los siguientes resultados:

$$mu = mv + MV, \quad \frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} MV^2;$$

donde  $u$  y  $v$  son respectivamente las velocidades del cuerpo de masa  $m$  antes del choque y después de él, y  $V$  la velocidad del cuerpo de masa  $M$  después del choque.

Veamos varios ejemplos de aplicación de estas ecuaciones. Ante todo estudiaremos el choque no central \*) de dos esferas de igual masa (fig. 21). En este caso se simplifican las masas en las dos ecuaciones y obtenemos

$$u = v + V, \quad u^2 = v^2 + V^2.$$

\*) El choque se llama central si las esferas, antes de la colisión, se mueven siguiendo la recta que pasa por sus centros.

De la igualdad vectorial se deduce claramente que el vector  $u$  es el que cierra el triángulo construido sobre los vectores  $v$  y  $V$ . Y de la ecuación de la derecha se desprende, que el triángulo en que  $u$  es la hipotenusa debe ser rectángulo; por consiguiente, después de chocar dos partículas de igual masa, sus velocidades deben estar dirigidas formando un ángulo recto entre sí. Esta deducción se puede comprobar fácilmente en el juego de billar: la dirección del movimiento de la bola que recibió la tacada y la de la bola «propia» forman un ángulo de  $90^\circ$ . En lo demás, el carácter de la variación del vector velocidad no se determina por nuestras ecuaciones, en las cuales no se tiene en cuenta la desviación de la línea de choque respecto de la línea que pasa por los centros de las esferas.

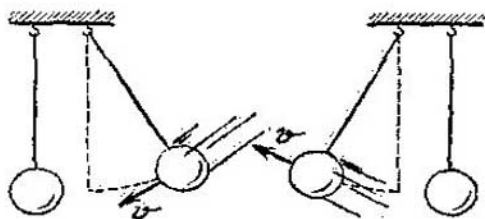


FIG. 22.

Los datos completos acerca del movimiento de las esferas después del choque los podemos obtener si nos limitamos al caso del choque central. El movimiento de las esferas después de la colisión se efectuará entonces a lo largo de la misma recta. Por esto se puede prescindir del uso de los símbolos vectoriales, pero teniendo en cuenta que el cambio de signo de la velocidad significará el cambio del sentido del movimiento. En estas condiciones no hace falta estudiar el caso simplificado de las masas iguales. Las ecuaciones del choque central tienen la forma

$$mu = mv + MV, \quad mu^2 = mv^2 + MV^2.$$

Reduciendo estas ecuaciones a la forma

$$m(u - v) = MV, \quad m(u^2 - v^2) = MV^2$$

y dividiendo la una por la otra, hallamos que  $u + v = V$  o  $u = -(v - V)$ . Advertimos que la velocidad relativa de la esfera  $m$ , con respecto a la esfera  $M$ , antes del choque (que hemos designado por  $u$ ) es igual, con signo contrario, a esta misma velocidad relativa después del choque.

Si en la fórmula de la ley de conservación del impulso se hace  $V = u + v$ , se obtiene una expresión interesante. Hallamos la expresión de la velocidad de la esfera  $m$  después de la colisión en

función de la velocidad de esta misma esfera antes del choque:

$$v = \frac{m-M}{m+M} u.$$

Si las masas de las esferas son iguales, la velocidad  $v$  se anula. Este fenómeno se puede demostrar claramente con bolas de acero o de marfil. Parece que las bolas se ceden las velocidades en este choque (fig. 22). En los demás casos, la esfera  $m$  se retarda. Cuanto más próximos son los valores de las masas de las esferas percursoras,

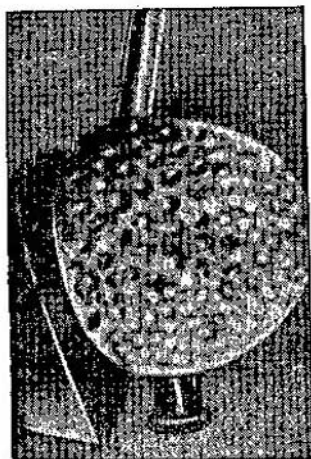


FIG. 23.

tanto más espectacular es el retardo. No es difícil calcular que un neutrón (masa 1) rebotará en el núcleo de un átomo de carbono (masa 12) perdiendo  $\frac{2}{13}$  de su velocidad, y en el de un átomo de uranio (masa 235), perdiendo únicamente  $\frac{2}{236}$  de la misma.

Entre los cuerpos macroscópicos cumplen bien las leyes del choque elástico materiales como el marfil, el acero, la goma y otros. Estos materiales tienen la propiedad de recuperar perfectamente su forma, como puede verse en la interesante fotografía que reproduce la fig. 23, en la que por medio de la llamada «camara lenta» se ha logrado filmar el instante en que una pelota de hockey choca contra un obstáculo. En  $\frac{1}{5000}$  de segundo la pelota se contrae en casi un centímetro, y el mismo tiempo se invierte en



la fase de recuperación del golpe. En la primera fase la energía cinética del choque se transforma en energía potencial de compresión elástica. En la segunda fase la energía potencial se transforma en cinética. Si el choque es perfectamente elástico, esta transformación inversa debe restablecer completamente el valor de la energía cinética consumida en la primera fase del choque.

Nuestras fórmulas no abarcan el caso importante del choque elástico de una esfera con una pared (fig. 24). Como la energía cinética debe conservarse, la velocidad de la esfera no puede cambiar de valor. Y en cuanto se refiere a la dirección del movimiento después del choque, ésta debe formar con la normal un ángulo de  $(90^\circ - \alpha)$  igual al que formaba el vector velocidad antes del choque. En efecto, en el caso del choque con una pared lisa, la componente tangencial de la velocidad permanece invariable, ya que no existen fuerzas tangenciales de adhesión a la pared. Como puede verse en la figura, el incremento del impulso es numéricamente igual a  $2mv \sin \alpha$  y está dirigido a lo largo de la normal a la pared. De acuerdo con la ley fundamental de la mecánica, en el instante del choque, la fuerza que actúa sobre la esfera por parte de la pared debe tener la misma dirección que el vector variación del impulso. Por esto, el ángulo de incidencia de la esfera también debe ser igual a su ángulo de reflexión.

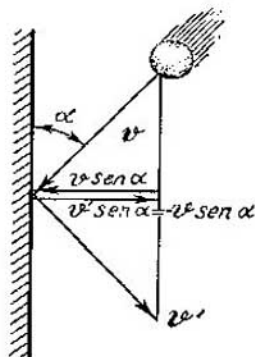


FIG. 24.

Examinemos el choque inelástico basándonos en el ejemplo de un péndulo balístico (aparato para medir la velocidad de las balas). Este péndulo consiste en una caja llena de arena, cuya masa es  $M$ , que pende de una cuerda. La bala disparada entra en la caja y se atasca en la arena. El impulso de la bala antes del choque es  $mu$ , el del sistema después del choque,  $(M+m)v$ . Tenemos que

$$v = \frac{m}{m+M} u.$$

La caja adquiere la energía cinética  $Mv^2/2$  y la invierte en elevarse a una altura  $h$  que satisface la condición

$$Mgh = \frac{Mv^2}{2}, \text{ es decir, } h = \frac{u^2}{2g} \left( \frac{m}{M} \right)^2 \quad (m \ll M).$$

Sean  $M=10$  kg,  $m=10$  g y  $u=900$  m/s; entonces  $h=4$  cm.

Si en vez de aplicar la ley de conservación del impulso determinásemos  $h$  basándonos en la transformación completa de la energía cinética de la bala en energía potencial del péndulo, obtendríamos que  $h=40$  m (!). Esto significa que, en nuestro ejemplo, 3920 J de energía mecánica (el 99,9% de la reserva total) «desaparecieron» (se gastaron en calentar el sistema). Como cuerpos perfectamente

elásticos no existen, en todo choque «elástico» no se conserva la energía mecánica, sino que una parte de ella se transforma en energía del movimiento térmico de las moléculas y se dispersa. De esto volveremos a tratar en el cap. 11 (pág. 190).

Ahora, partiendo del ejemplo de las colisiones, demostraremos las ventajas que tiene el sistema de coordenadas asociado al centro de inercia.

Supongamos que hacia una bola de masa  $m$ , que se halla en reposo en un sistema de coordenadas de laboratorio, se lanza otra bola igual con la velocidad  $v$ . Si el choque es inelástico, una parte de la energía cinética del sistema  $mv^2/2$  se transformará en calor. En otros sistemas de coordenadas la energía cinética de este par de bolas se expresará con otros números. En cuanto al calor desprendido se refiere, éste será siempre el mismo para el par de bolas dado y vendrá determinado por la velocidad de su movimiento *relativo*. Por esto, en vez de buscar, aplicando la ley de conservación del impulso, la fracción de energía cinética que se transforma en calor, calculada respecto al sistema de coordenadas de laboratorio, basta calcular la energía cinética con relación al sistema asociado al centro de inercia. Como en este sistema de coordenadas el impulso total de los cuerpos es nulo, después de la colisión inelástica se detienen las esferas: toda la energía cinética se transforma en calor. La energía cinética referida al sistema asociado al centro de inercia tendrá su valor mínimo.

En el sistema de coordenadas asociado al centro de inercia las bolas se mueven, una al encuentro de la otra, con la velocidad  $\frac{1}{2}v$ . La energía cinética de cada bola es igual a  $\frac{1}{4}mv^2$ , y la energía total del sistema es  $\frac{1}{2}mv^2$ . Esta será la cantidad de calor que se desprenderá en el choque inelástico. Cualquiera que sea la colisión, el desprendimiento de calor (o de otra forma de la energía) a costa de la energía cinética de los cuerpos sólo puede producirse en una cantidad que no exceda de la energía cinética calculada respecto al sistema asociado al centro de inercia. Y viceversa, para que se desprenda una cantidad de calor dada hace falta una cantidad de energía cinética equivalente a la calculada con respecto al sistema del centro de inercia.

*Ejemplo.* La reacción nuclear de bombardeo del nitrógeno  $N^{14}$  con partículas  $\alpha$  transcurre según la ecuación



y se desarrolla con absorción de 1,13 MeV de energía. ¿Qué energía cinética deberá tener la partícula  $\alpha$ , en el sistema de coordenadas de laboratorio, para que la reacción comience? A primera vista parece que para esto es suficiente la energía de 1,13 MeV. Pero ya sabemos que esto no es así. En el sistema de coordenadas

asociado al centro de inercia se necesita la energía de 1,13 MeV, pero en el de laboratorio la energía debe ser mayor.

En efecto, la velocidad del centro de inercia  $\mathbf{v}_c = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$ , donde  $m_1 \mathbf{v}_1$  es el impulso de la primera partícula y  $m_2 \mathbf{v}_2$ , el de la segunda. La velocidad de la primera partícula en el sistema de coordenadas del centro de inercia es  $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ ; para la segunda partícula podemos escribir

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1).$$

De aquí se deduce que la energía cinética del sistema ( $\alpha$ , N<sup>14</sup>) en el sistema de coordenadas del centro de inercia será

$$K_{c.i.} = \frac{1}{2} \mu (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2, \text{ donde } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

es la llamada masa reducida de ambas partículas. Vamos a suponer que el núcleo N<sup>14</sup> está en reposo ( $\mathbf{v}_2 = 0$ ). Esta suposición es correcta, puesto que siempre se puede despreciar el movimiento térmico de los núcleos bombardeados (blancos) que, comparado con las enormes velocidades de las partículas incidentes, es lento. Entonces la energía cinética en el sistema de coordenadas de laboratorio será  $K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$  y, por consiguiente,

$$K_1 = K_{c.i.} \frac{m_1 + m_2}{m_2}.$$

La reacción se desarrolla si  $K_{c.i.} = 1,13$  MeV. Teniendo en cuenta que  $m_1 = 4$  y  $m_2 = 14$ , tenemos que

$$K_1 = 1,13 \cdot \frac{18}{4} = 1,45 \text{ MeV}.$$

### § 17. Fenómenos de rechazo

La ley de conservación del impulso ayuda a comprender fácilmente los rasgos fundamentales de los efectos de rechazo en los disparos, en el movimiento de reacción y al estudiar otros problemas análogos.

Consideraremos primeramente el efecto de rechazo que tiene lugar en un sistema de referencia con respecto al cual, en el instante inicial, los cuerpos estén en reposo. En el caso de un disparo de cañón esta consideración es completamente natural. Si en el momento inicial un sistema, formado por dos o más cuerpos, está en reposo, su impulso total es nulo. Cualesquiera que sean los sucesos que ocurran después, el impulso total continuará siendo nulo. Por esto, si en un instante cualquiera se produce una explosión que hace que el sistema se divida en partes cuyas masas  $m_1, m_2, m_3, \dots$ , se separen con las velocidades  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots$ , la suma de los impul-

SOS  $m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3, \dots$  de las partes lanzadas deberá ser, lo mismo que antes, igual a cero.

Si se trata de un disparo de cañón (el sistema se divide en dos partes), la condición de igualdad a cero del impulso de este sistema de dos cuerpos tendrá la forma  $m v + M V = 0$ ; aquí las letras minúsculas se refieren a un cuerpo, por ejemplo, el proyectil, y las mayúsculas, al otro, es decir, al cañón. La división del sistema en dos partes sólo puede ocurrir al separarse éstas siguiendo una línea recta común. Por esta razón se puede prescindir de los signos vectoriales y escribir la condición anterior en la forma  $m v = -M V$ . Las velocidades del cañón y del proyectil deben ser inversamente proporcionales a sus masas. Por lo tanto, el efecto de rechazo será tanto más sensible cuanto mayor sea la masa del proyectil con respecto a la del cañón.

Son extraordinariamente interesantes los efectos de «rechazo continuo», que se producen en el movimiento de reacción. Estos fenómenos constituyen un capítulo peculiar de la mecánica que puede llamarse mecánica de la masa variable. Dichos fenómenos tienen lugar no sólo en los aviones reactores. Al contrario, puede señalarse toda una serie de fenómenos habituales en que nos encontramos con un movimiento semejante. Como ejemplo bastará citar el caso de un rollo de papel al desenrollarse o el de la caída de gotas que se condensan continuamente en la atmósfera (véase el ejemplo al final de este párrafo). Los fundamentos de la mecánica de la masa variable fueron sentados a finales del siglo XIX por el profesor I. V. Mescherski. Como no tenemos posibilidad de detenernos en su obra, nos limitaremos a examinar un solo problema de esta rama, el concerniente a la velocidad posible del movimiento de los cohetes.

Un cohete se mueve con la velocidad  $v$  y en un instante determinado arroja cierta porción de gas combustible de masa  $dM$ . Como es natural, la masa del cohete disminuye en esta cantidad. Si la velocidad de salida de los gases se designa por  $u$  (velocidad no con respecto al cohete, sino al sistema inercial de referencia en que se define la velocidad de éste), el impulso de la materia que se separa del cohete será igual a  $u dM$ . La masa del cohete disminuye y su velocidad aumenta en la cantidad  $dv$ . El impulso de dicho cohete después de arrojado el combustible será igual a  $(M - dM)(v + dv)$ . De acuerdo con la ley de la conservación del impulso, podemos igualar el impulso  $Mv$  del cohete antes de arrojar la porción de combustible y el impulso del sistema después de salir el gas. Este último será igual a la diferencia entre el impulso del cohete y el de la masa de combustible. Así pues,

$$Mv = (M - dM)(v + dv) - u dM,$$

de donde, salvo infinitésimos de segundo orden,

$$dv = (u + v) \frac{dM}{M}.$$

Pero  $u+v$  es la velocidad relativa de salida de los gases combustibles (con respecto al cohete). Llamando  $c$  a esta velocidad, llegamos a la siguiente ecuación del incremento de la velocidad del cohete:  $dv = -c \frac{dM}{M}$ . El signo menos se pone para tener en cuenta el aumento de la velocidad al disminuir la masa. Vemos que el incremento de la velocidad es igual a una fracción de la masa perdida, multiplicada por la velocidad relativa de salida del combustible.

Considerando que esta velocidad de salida es una cantidad constante, podemos integrar con facilidad la ecuación escrita. Si la masa del cohete era  $M_0$ , cuando su velocidad era  $v_0$ , y se hizo  $M$ , cuando esta velocidad se redujo a  $v$ , la integración da

$$\int_{v_0}^v dv = -c \int_{M_0}^M \frac{dM}{M},$$

es decir,

$$v - v_0 = c \ln \frac{M_0}{M}.$$

Esta última fórmula fue deducida la primera vez por el creador de estructuras de cohetes e investigador de la teoría de las comunicaciones interplanetarias K. E. Tsiolkovski.

Tomando logaritmos decimales y llamando  $m = M_0 - M$  a la diferencia de masas del cohete, o sea, a la masa del combustible arrojado, obtenemos la fórmula de Tsiolkovski en la forma

$$v = c \cdot 2,3 \cdot \lg \left( 1 + \frac{m}{M} \right)$$

(la velocidad inicial  $v_0$  se supone igual a cero).

Si la velocidad de salida de los gases es de 2000 m/s, el cálculo por esta fórmula da las siguientes cifras características:

$m/M$	0,25	1,0	4,0	10,0	32,3	54	999
$v, \text{ m/s}$	446	1386	3218	4817	7013	8000	13 815

Como puede verse en esta tabla, al aumentar la cantidad de combustible arrojado, la velocidad del cohete aumenta mucho más lentamente que fuera de desear. Para comunicarle al cohete una velocidad considerable hay que arrojar una cantidad de combustible enorme en comparación con la masa inicial del cohete.

Por ejemplo, para comunicarle la velocidad de 7 km/s, de la masa del cohete deberá quedar menos de  $\frac{1}{30}$  parte.

Para que un cohete escape a la atracción de la Tierra hay que hacer que su velocidad sea aproximadamente igual a 11 km/s. Esta cifra se obtiene mediante los simples razonamientos que siguen. Para poder alejarse de la Tierra el cohete debe tener la energía cinética suficiente para realizar el trabajo de transporte del cuerpo desde la superficie del planeta hasta el infinito. Pero este trabajo contra las fuerzas de gravedad es igual a la diferencia entre la energía potencial del cohete en la superficie de la Tierra y la que tendría en el infinito. Como en el infinito la energía potencial es nula, la condición para alejarse de la Tierra tiene la simple forma siguiente

$$\frac{mv^2}{2} = \gamma \frac{mM}{R},$$

donde  $M$  y  $R$  son, respectivamente, la masa y el radio de la Tierra. Multiplicando por  $R$  el numerador y el denominador del segundo miembro de esta igualdad, recordando la fórmula de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra  $g = \gamma \frac{M}{R^2}$ , y simplificando la masa del cohete, hallamos la condición buscada:  $v = \sqrt{2gR}$ , que da la cifra de cerca de 11 km/s.

Suponiendo que la velocidad de salida de los gases es de 2000 m/s\*) se puede hallar por la fórmula de Tsiolkovski la relación  $m/M$ . Esta relación será igual a 244. Si queremos que un cohete se aleje de la Tierra tenemos que dotarlo de una estructura tal, que el viaje interplanetario lo emprenda tan sólo  $\frac{1}{245}$  parte de la masa que tenga el cohete en reposo. Si se consiguiera que la velocidad de salida de los gases fuera tres veces mayor, es decir, hacerla llegar hasta 6 km/s, la relación  $m/M$  disminuiría hasta 5,3. Pero, al parecer, no es posible por ahora, por lo menos si juzga por el comunicado de prensa de 1968, acerca del viaje del «Apolo — 8» alrededor de la Luna, que decía: «a la atmósfera terrestre retornará un módulo de 5,3 toneladas de peso, que es lo único que queda de una nave de 3100 toneladas».

Las dificultades que hay que vencer para poner en órbita un satélite artificial de la tierra son menores. Para crear un satélite de este tipo se necesita una velocidad inicial menor. Si suponemos que la aceleración de la gravedad en las alturas a que deseamos establecer la órbita del satélite es aproximadamente igual a la que

\*) La literatura soviética ha dado a conocer que los motores de combustible líquido pueden proporcionar velocidades de salida de los gases de hasta 4500 m/s.

existe en la superficie de la Tierra, la ley de la mecánica, escrita para dicho satélite, tendrá la forma  $mg=ma$ , y como el satélite se mueve por una circunferencia, la aceleración centrípeta  $a=v^2/R$ . De aquí hallamos la velocidad de rotación del satélite  $v=\sqrt{gR}$ , es decir, 8 km/s. Si a un cohete se le comunica esta velocidad, se convierte en satélite de la Tierra. Por la tabla que hemos dado, calculada para 2000 m/s de velocidad de salida de los gases, vemos que el valor de  $m/M$ , necesario para que el cohete adquiriera la velocidad de 8 km/s, es igual a 54.

*Ejemplo de movimiento de un cuerpo de masa variable.* Supongamos que una gota de agua cae en una atmósfera saturada de vapor de agua. En un instante  $t$ , la gota tiene la masa  $m$  y el radio  $r$ . Durante el tiempo  $dt$  el volumen de la gota  $v$ , por consiguiente, su masa (considerando la densidad igual a 1), aumenta en la cantidad  $4\pi r^2 dr$ . Por lo tanto, la velocidad con que aumenta la masa  $\frac{dm}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ . Al mismo tiempo, por razonamientos físicos, está claro que la velocidad de condensación  $\frac{dm}{dt}$  del vapor de agua debe ser proporcional a la superficie de condensación ( $4\pi r^2$ ). De aquí se deduce que  $\frac{dr}{dt} = \text{const}$  y  $r=kt$ , donde  $k$  es un coeficiente de proporcionalidad.

Planteemos la ecuación del movimiento de esta gota en el campo de atracción de la Tierra. Nos interesa la variación del impulso  $\dot{d}(mv)$ , que por la ley fundamental de la mecánica es igual a  $Fdt$ , siendo  $F=mg$ . Tenemos que  $F=\frac{d}{dt}(mv)$ , es decir,  $mg=m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}$ . Sustituyendo aquí  $m$  y  $r$  por sus respectivas expresiones, obtenemos  $\frac{dv}{dt}=g-\frac{3v}{t}$ . La integración de esta ecuación demuestra que  $v=\frac{g}{4}t$ , es decir, la gota cae con la aceleración constante  $\frac{1}{4}g=2,45 \text{ m/s}^2$ . La resistencia del aire no se ha tenido en cuenta al hacer el cálculo.

## 4

### ROTACIÓN DE UN SÓLIDO

#### § 18. Energía cinética de rotación

En este capítulo se estudiarán cuerpos «absolutamente rígidos». Esto significa que todas las deformaciones de todo género que pueden ocurrir al moverse el cuerpo se pueden despreciar y suponer que las distancias entre las partículas de dicho cuerpo permanecen invariables.

Consideremos un sólido que gira alrededor de un eje fijo que pasa por él (fig. 25). Dividimos mentalmente este cuerpo en pequeños volúmenes cuyas masas  $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots$  se encuentren respectivamente a las distancias  $r_1, r_2, \dots$  del eje de rotación. A los distintos valores de las distancias corresponderán diferentes velocidades de movimiento  $v_1, v_2, \dots$ . Nos interesa la energía cinética de rotación de todo el sólido. Esta energía se compone de las energías cinéticas de las partículas  $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots$ , etc.

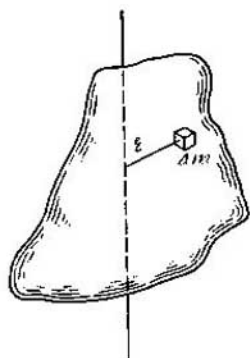


FIG. 25.

$$K_{\text{rot}} = \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} + \frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} + \frac{\Delta m_3 v_3^2}{2} + \dots$$

La velocidad del movimiento circular de un punto cualquiera del cuerpo puede expresarse sin dificultad en función de la velocidad angular  $\omega$  de rotación de este último. Si el cuerpo gira en el tiempo  $dt$  un ángulo  $d\varphi$ , la derivada  $d\varphi/dt$  recibe el nombre de *velocidad angular*:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

En el caso del movimiento uniforme esta fórmula se transforma en la relación  $\omega = 2\pi/T$  que ya conocía el lector. La magnitud  $\omega$  se mide generalmente en radianes por segundo. Si el cuerpo da 1 vuelta por segundo, su velocidad angular será igual a  $2\pi$  rad/s.

Todos los puntos de un cuerpo en rotación tienen distintas velocidades  $v$  (que llamaremos *lineales*), pero la misma velocidad angular  $\omega$ . Cuando el cuerpo gira un ángulo  $\varphi$  el punto recorre un arco  $ds = r d\varphi$ . Dividiendo ambas partes de esta igualdad por el tiempo que dura el movimiento  $dt$ , hallamos la relación entre la velocidad lineal y la angular:

$$v = \omega r.$$

De este modo, la fórmula que ya conocíamos del movimiento uniforme es correcta en el caso general.

Por medio de esta relación se puede transformar la expresión de  $K_{\text{rot}}$  del modo siguiente:

$$K_{\text{rot}} = \frac{\omega^2}{2} (r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \dots).$$

La cantidad que figura entre paréntesis no depende de la velocidad del movimiento, pero caracteriza las propiedades inerciales del cuerpo en rotación: cuanto mayor sea la cantidad comprendida



entre paréntesis, tanto mayor será la energía que hay que gastar para conseguir la velocidad dada. Por esto, la magnitud

$$I = r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \dots$$

se llama *momento de inercia* del cuerpo, y la expresión  $r^2 \Delta m$  es el *momento de inercia* del punto. El valor de  $I$  puede escribirse de un modo más reducido

$$I = \int r^2 dm;$$

en este caso la integración (suma) se extiende a todos los puntos del cuerpo.

La fórmula de la energía cinética del cuerpo que gira toma entonces la forma

$$K_{\text{rot}} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Esta fórmula es correcta para un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo. Si se trata de un cuerpo que rueda, como, por ejemplo, una esfera, una rueda, etc., la energía del movimiento se compondrá de la energía de rotación y de la energía del movimiento de traslación. Si el cuerpo que rueda tiene la masa  $M$ , el momento de inercia  $i$ , la velocidad de traslación  $v$  y la de rotación  $\omega$ , su energía cinética será

$$K_{\text{rod}} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Esta fórmula resulta ser válida para cualquier movimiento arbitrario de un sólido. En la mecánica teórica se demuestra que el movimiento arbitrario puede descomponerse en un conjunto de movimiento de traslación y de rotación. En este caso la rotación debe considerarse con respecto al eje que pasa por el centro de inercia.

### § 19. Momento de inercia

Observando atentamente la fórmula del momento de inercia vemos, que el valor de  $I$  depende del carácter de la distribución de la masa con respecto al eje de rotación. Los puntos que se encuentran lejos del eje de rotación hacen una aportación considerablemente mayor a la suma que los que están cerca.

Calculemos el momento de inercia de un disco plano, de radio  $r$ , con respecto al eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano del disco (fig. 26). La masa de un anillo elemental de radio  $x$  será  $dm = \rho \cdot 2\pi x dx$ , donde  $\rho$  es la densidad del material del disco. El momento de inercia de este anillo  $dI_1 = dm \cdot x^2$ , y el momento

de inercia de todo el disco

$$I_1 = \int_0^r dI_1 = \int_0^r \rho \cdot 2\pi x^3 dx = 2\pi\rho \frac{r^4}{4} = \frac{mr^2}{2}.$$

Es evidente que, con respecto a este mismo eje, el momento de inercia del anillo que tiene toda su masa concentrada en la circunferencia exterior, de radio  $r$ , será  $I_2 = mr^2$ , es decir,  $I_2 = 2I_1$ .

El momento de inercia de un mismo cuerpo puede ser distinto, según cual sea la posición del eje de rotación. Si una aguja fina de hacer punto gira alrededor de su eje longitudinal, su momento

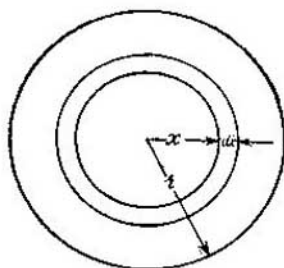


FIG. 26.

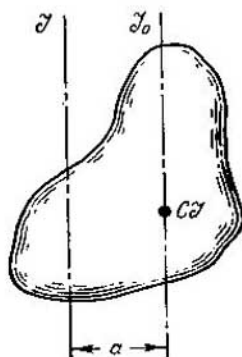


FIG. 27

de inercia será muy pequeño, porque todos los puntos se encuentran muy cerca del eje de rotación y, por consiguiente, todas las cantidades  $r_1^2, r_2^2, \dots$  que figuran en la fórmula de  $I$  serán totalmente insignificantes. El momento de inercia será mucho mayor si la aguja gira alrededor de una recta perpendicular a su eje.

El momento de inercia depende de la dirección del eje y del sitio en que se encuentra. Si no se hace una advertencia especial, se supone que el eje de rotación pasa por el centro de inercia del cuerpo.

Si el eje de rotación está desplazado una distancia  $a$  respecto del centro de inercia (fig. 27), el nuevo momento de inercia  $I$  será distinto del momento de inercia  $I_0$ , tomado con respecto al eje paralelo que pasa por el centro de inercia.

Teniendo en cuenta la observación hecha al final del párrafo anterior, podemos representar la energía cinética del cuerpo, que gira alrededor del eje desplazado, como una suma

$$K = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2};$$

aquí  $v$  es la velocidad del movimiento del centro de inercia, que será igual a  $a\omega$ . De este modo,

$$K = \frac{Ma^2\omega^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}(I_0 + Ma^2).$$

Por consiguiente, el momento de inercia  $I$  con relación a un eje paralelo, desplazado una distancia  $a$  del centro de inercia, será

$$I = I_0 + Ma^2.$$

De aquí se deduce que el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de inercia es siempre el más pequeño para esta dirección. En dependencia de su simetría, el cuerpo se caracteriza por uno, dos o tres momentos de inercia respecto de los ejes principales que pasan por su centro de inercia.

Así, para un disco son característicos dos ejes que pasan por su centro: uno, situado en el plano del disco, y otro, perpendicular a él; estos momentos de inercia son, respectivamente, iguales (suponiendo que la masa está distribuida uniformemente por el disco) a  $mr^2/4$  y  $mr^2/2$ . Para un anillo, los momentos de inercia en torno a dos ejes trazados como en el caso anterior serán  $mr^2/2$  y  $mr^2$ .

Para todos los cuerpos de revolución basta conocer los momentos de inercia con respecto a dos ejes. En el caso de cuerpos de forma arbitraria, para dar una característica completa de las propiedades inerciales del cuerpo cuando gira basta conocer tres momentos de inercia referidos a ejes que pasen por su centro de inercia, a saber: el momento de inercia máximo  $I_{\max}$ , el momento de inercia mínimo  $I_{\min}$  y el momento de inercia con relación al eje perpendicular a los dos primeros ( $I_{\text{med}}$ ).

El único cuerpo cuyos momentos de inercia en torno a todos sus ejes son iguales es la esfera. Para la esfera  $I = \frac{2}{5}mr^2$ .

Las fórmulas que hemos dado de los momentos de inercia han sido calculados partiendo de

$$I = \int r^2 dm.$$

La aplicación de esta fórmula exige, en el caso general, saber operar con integrales múltiples. Ejemplos de cálculos de este tipo se dan en el curso de mecánica teórica.

Como veremos más adelante, al físico le interesan a veces los valores de los momentos de inercia de las moléculas. La masa de los átomos se halla concentrada en los núcleos, cuyas dimensiones son extremadamente pequeñas, por lo cual el cálculo de dichos momentos de inercia se hace sin dificultad: los átomos pueden considerarse como puntos materiales.

El momento de inercia de una molécula diatómica con relación al eje que pasa por los átomos es igual a cero. Para el eje perpendicular a la recta que los une, tenemos

$$I = m_A r_A^2 + m_B r_B^2,$$

donde  $r_A$  y  $r_B$  son las respectivas distancias de los átomos  $A$  y  $B$  de la molécula diatómica al centro de inercia. Si  $l$  es la distancia entre los átomos,  $r_A + r_B = l$  y  $\frac{r_A}{r_B} = \frac{m_B}{m_A}$ . Por consiguiente,

$$I = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} l^2.$$

Los momentos de inercia de las moléculas más complejas también se pueden calcular como suma de los momentos de inercia de los átomos puntuales.

*Ejemplos.* 1. Un volante de motor de barco, de 1 t, aproximadamente, de masa y 2m de diámetro, posee un momento de inercia  $I \sim 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . A 300 r.p.m., la energía cinética de rotación de este volante es

$$K = \frac{I\omega^2}{2} \approx 500\,000 \text{ J} \approx 50\,000 \text{ kgf} \cdot \text{m},$$

2. El momento de inercia de la esfera terrestre es del orden de  $10^{45} \text{ g} \cdot \text{cm}^2 = 10^{38} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . La energía cinética de rotación de la Tierra alrededor de su eje es de  $2,5 \cdot 10^{29} \text{ J}$ .

3. En la molécula de hidrógeno  $\text{H}_2$  la distancia  $l = 0,753 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$  y la masa del átomo de hidrógeno  $m_H = 1,6598 \cdot 10^{-24} \text{ g}$ , por lo tanto, el momento de inercia de la molécula con respecto al eje perpendicular a  $l$ , será

$$I = \frac{m_H l^2}{2} = 0,46 \cdot 10^{-40} \text{ g} \cdot \text{cm}^2.$$

### § 20. Trabajo de rotación y ecuación fundamental de la rotación

Si un cuerpo, sujeto a un eje, se hace girar aplicándole una fuerza  $F$  o, al contrario, si un cuerpo en rotación es frenado por una fuerza, su energía cinética de rotación aumenta, o disminuye, en una cantidad igual al trabajo invertido. Lo mismo que en el caso del movimiento de traslación, este trabajo depende de la fuerza actuante y de la traslación efectuada por ella. Pero ahora la traslación es angular y la expresión que conocemos del trabajo para trasladar un punto material a cierta distancia ya no es aplicable.

Para hallar la fórmula que nos interesa recurriremos a la fig. 28. La fuerza  $F$  está aplicada a un punto que se encuentra a la distancia  $r$  del eje de rotación. El ángulo comprendido entre la dirección

de la fuerza y el radio vector del punto lo designaremos por  $\theta$ . Como el cuerpo es absolutamente rígido, el trabajo de esta fuerza (aunque esté aplicada a un punto) es igual al trabajo que se gasta en hacer girar todo el cuerpo. Si el cuerpo gira un ángulo  $d\varphi$ , el punto de aplicación recorrerá un espacio  $r d\varphi$  y el trabajo  $dA$ , igual

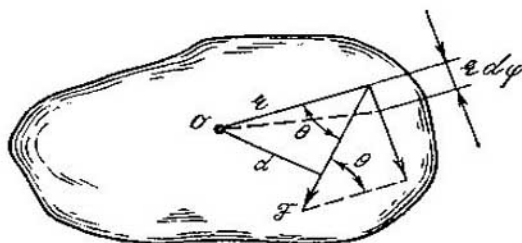


FIG. 28.

al producto de la proyección de la fuerza sobre la dirección del desplazamiento por la magnitud de dicho desplazamiento, será

$$dA = Fr \operatorname{sen} \theta d\varphi.$$

La expresión  $Fr \operatorname{sen} \theta$  se conoce con el nombre de *momento de la fuerza*,

$$M = Fr \operatorname{sen} \theta.$$

Del dibujo se deduce que  $r \operatorname{sen} \theta = d$ , siendo  $d$  la distancia más corta entre la línea de acción de la fuerza y el eje de rotación. Por esto

$$M = Fd,$$

es decir, el momento de una fuerza es igual a dicha fuerza multiplicada por el brazo.

La fórmula del trabajo que buscábamos es, pues,

$$dA = Md\varphi.$$

El trabajo de rotación de un cuerpo es igual al producto del momento de la fuerza que actúa por el ángulo girado.

Estrictamente hablando, esta fórmula es correcta cuando el ángulo de giro  $d\varphi$  es infinitesimal. Pero podemos utilizarla en cualquier caso si entendemos por  $M$  el valor medio del momento de la fuerza en el tiempo que dura el giro. En este caso

$$\Delta A = M_{\text{med}} \Delta\varphi.$$

El trabajo de rotación se invierte en aumentar la energía cinética de rotación. Por esto debe cumplirse la igualdad

$$M d\varphi = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right).$$

Si el momento de inercia es constante durante el movimiento,

$$M d\varphi = I\omega d\omega$$

o, como  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ,

$$M = I \frac{d\omega}{dt}.$$

Esta es la ecuación fundamental del movimiento de un cuerpo que gira. El momento de la fuerza que actúa sobre el cuerpo es igual al producto del momento de inercia por la aceleración angular  $\frac{d\omega}{dt}$ .

*Ejemplos.* 1. El momento de la fuerza correspondiente a la rueda de una locomotora que desarrolla un esfuerzo de tracción del orden de  $10^8$  N es del orden de  $\approx 3000$  N·m.

El momento de rotación que un ciclista crea sobre el pedal es del orden de 100 N·m.

2. Con este ejemplo demostraremos la relación que existe entre la expresión de la energía cinética de un sólido en movimiento (véase la pág. 79) y la ley fundamental de la mecánica.

Supongamos que a un carrete de masa  $m$  y radio  $r$ , que posee un momento de inercia  $I$  respecto a su eje, está arrollado un hilo exento de peso (fig. 29). El extremo del hilo está sujeto a cierta altura sobre el nivel de la Tierra. El carrete cae por la acción de su propio peso  $mg$ . Planteemos las ecuaciones del movimiento del carrete:

$$mg - T = m \frac{dv}{dt},$$

$$Tr = I \frac{d\omega}{dt},$$

donde  $T$  es la tensión del hilo y  $\omega$ , la velocidad angular de rotación del carrete. Eliminando  $T$ , obtenemos la aceleración

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{g}{1 + \frac{I}{mr^2}}.$$

Si se empieza a medir el tiempo desde el instante en que se suelta el carrete, en  $t$  segundos caerá una altura  $h = v^2/2a$ . Es evidente que la energía cinética total del carrete en este instante deberá ser igual a la variación de su energía potencial:

$$K = mgh = mg \frac{v^2}{2a}.$$

Sustituyendo aquí  $a$  por su expresión, obtenemos

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

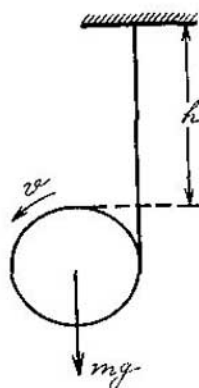


FIG. 29.

## § 21. Momento de impulsión \*)

Salta a la vista la analogía entre las fórmulas del movimiento de un punto material y las leyes deducidas de la rotación de un sólido. Esto queda claro aunque no se haga más que la siguiente comparación:

Punto	Cuerpo en rotación
$F = m \frac{dv}{dt}$ ,	$M = I \frac{d\omega}{dt}$ ,
$K = \frac{mv^2}{2}$ ,	$K = \frac{I\omega^2}{2}$ .

También es evidente el sentido físico de esta analogía: de un modo semejante a cómo en la mecánica del punto las aceleraciones pueden calcularse por la fuerza dada, en el movimiento de rotación se calcula la aceleración angular por el momento de la fuerza dado. El papel de la masa lo desempeña el momento de inercia, que caracteriza en la rotación el grado de inercia del cuerpo (la masa sola ya es insuficiente para esto). Esta analogía nos anima a dar un nuevo paso y suponer que en relación con las magnitudes físicas análogas deben existir leyes análogas.

En el capítulo anterior se estableció que el impulso  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  es una magnitud física que satisface la ley de conservación en un sistema aislado. La magnitud análoga a  $\mathbf{p}$  es el *momento de impulsión* (o *impulso de rotación*)

$$N = I\omega.$$

Puede demostrarse rigurosamente que el impulso de rotación satisface la ley de conservación siguiente: en un sistema aislado, el impulso de rotación total de los cuerpos que integran dicho sistema no varía. El aumento del impulso de rotación de uno de los cuerpos debe ser compensado por una disminución igual de los demás.

La ley

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + I_3\omega_3 + \dots = \text{const}$$

tiene muchas aplicaciones de interés en problemas muy semejantes a los que estudiamos en el capítulo anterior.

La ley de conservación del impulso, si se aplica a un cuerpo, tiene la forma  $m\mathbf{v} = \text{const}$  y, de este modo, coincide con la ley de la inercia. La ley de conservación del impulso de rotación nos conduce a un resultado interesante incluso en el caso elemental

\*) Los autores de habla española le llaman preferentemente *momento cinético* o *momento de la cantidad de movimiento* ( $N$ . del T.).

que sigue. Un cuerpo solo, si no existe interacción con el medio ambiente, debe satisfacer la condición.

$$I\omega = \text{const.}$$

Pero el momento de inercia puede variar durante el movimiento. Como puede verse, el aumento de  $I$  debe ir acompañado de la disminución de  $\omega$ , y viceversa.

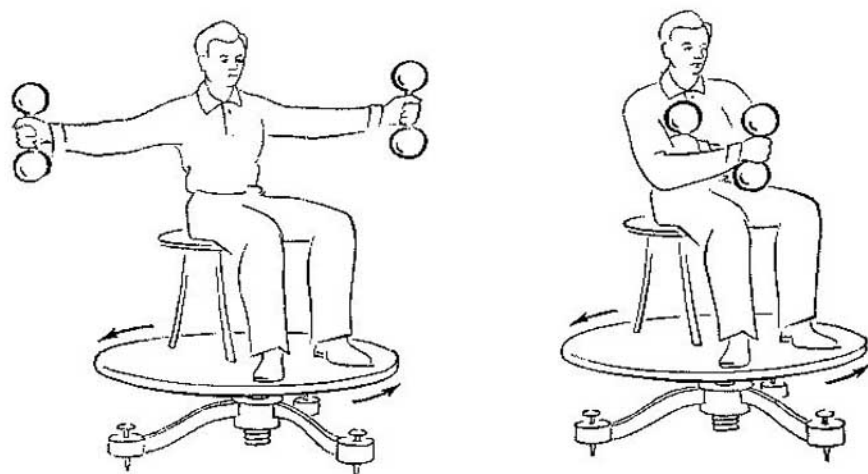


FIG. 30.

A esto se pueden poner multitud de ejemplos y, si se dispone de un taburete giratorio, pueden hacerse experimentos aclaratorios que llaman mucho la atención. Siéntese en el citado taburete y coja unas pesas de hacer gimnasia (fig. 30). Abra los brazos y pídale a alguien que le dé cierto impulso de rotación. Comenzará a moverse con un determinado momento de inercia  $I$  y una velocidad angular  $\omega$ . Ahora cruce los brazos delante del pecho; el momento de inercia disminuye considerablemente hasta  $I'$ . Y como el producto  $I\omega$  debe permanecer invariable,  $I\omega = I'\omega'$ . Esto significa, que el movimiento hecho con los brazos debe ocasionar un aumento considerable de la velocidad de rotación. Si vuelve a abrir los brazos, el movimiento se retardará; si los cruza de nuevo, se acelerará.

La disminución del momento de inercia como medio para aumentar la velocidad de rotación, es bien conocida por los gimnastas y bailarines. Este procedimiento se utiliza en todo género de saltos,





FIG. 31.

cabriolas, virajes y volteretas. La fig. 31 recuerda cómo este procedimiento se utiliza en el baile para aumentar la velocidad de rotación a expensas de cambiar de postura y de disminuir así el momento de inercia.

Con el mismo taburete giratorio y una rueda de bicicleta montada en un eje largo, se suele demostrar el efecto de rechazo en la rotación (fig. 32).

Puesto de pie sobre el taburete y manteniendo la rueda más arriba de la cabeza, haga girar la rueda con un movimiento brusco; el taburete girará entonces en sentido contrario. Este es el efecto de rechazo: el impulso de rotación  $I_1\omega_1$  de la rueda es equilibrado por el de signo contrario  $I_2\omega_2$  del taburete con el hombre encima, ya que en el estado inicial tanto el taburete como la rueda no giraban y el impulso de rotación total era igual a cero.

A su debido tiempo llamamos choque inelástico al encuentro de dos cuerpos después del cual ambos se mueven juntos. Algo semejante se puede conseguir también en el caso del movimiento de rotación si

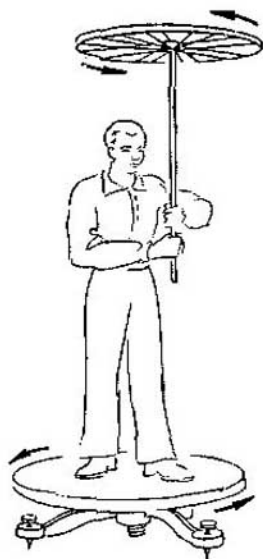


FIG. 32.

se dispone de los mismos objetos que acabamos de utilizar. Haga que gire la rueda y désela a una persona que esté sentada en el taburete. Estado inicial: el taburete y la persona están en reposo, la rueda de bicicleta gira con el impulso  $I_1\omega_1$ . Si ahora el hombre coge la rueda con la mano, el impulso de rotación  $I_1\omega_1$  no puede desaparecer, pero como ya pertenece a todo el sistema, el hombre que está sentado en el taburete y la rueda giran al mismo tiempo y, naturalmente, en el mismo sentido que antes giraba la rueda. Es evidente que  $I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega$ . Si antes de la «unificación» el hombre gira con la velocidad  $\omega_2$ , debe conservarse el impulso de rotación  $I_1\omega_1 + I_2\omega_2$  y, por consiguiente,

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega, \quad \omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2},$$

lo que, tanto por su forma como por su sentido, se asemeja mucho a la expresión para el choque inelástico.

*Ejemplos.* 1. Un volante de motor de barco cuyo momento de inercia es de  $1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  a 300 r. p. m. tiene un impulso de rotación de  $\sim 30\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ .

2. Una bola de billar de 2,5 cm de diámetro tiene un momento de inercia  $I = 250 \text{ g}\cdot\text{cm}^2$  y se mueve, sin resbalar por la mesa, con una velocidad de 5 m/s. En estas condiciones su impulso de rotación es de  $\sim 50\,000 \text{ g}\cdot\text{cm}^2/\text{s} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ .

3. El impulso de rotación de la Tierra al girar alrededor de su eje es de  $\sim 10^{34} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ .

## § 22. Ejes de rotación libres

Supongamos que un cuerpo recibió un impulso de rotación alrededor de un eje fijo cualquiera. Figurémonos ahora que se suprime la sujeción del eje. Aunque el impulso de rotación debe conservarse (si se desprecia el rozamiento), la posición del cuerpo en el espacio puede, en cambio, variar; si en este caso cambia el momento de inercia, esto se compensará con la variación correspondiente de la velocidad angular.

Pero en una serie de casos el carácter de la rotación no cambia; el cuerpo continúa girando establemente, alrededor de la dirección inicial, lo mismo que si el eje de rotación estuviera fijo como antes. La teoría y la experiencia demuestran que los ejes de rotación libres y estables que pasan por el centro de inercia, pueden ser dos: el eje del momento de inercia máximo y el eje del momento de inercia mínimo.

Si el eje de rotación fijo pasaba por el centro de inercia (fig. 33) pero estaba inclinado con relación a los ejes de simetría y, por lo tanto, con respecto a las direcciones que hemos citado antes, una vez que el eje se libera, el cuerpo comienza a cambiar de posición

respecto del eje de rotación. En el dibujo puede verse que la causa de que varíe la posición es el par de fuerzas que originan las fuerzas centrífugas. El cuerpo seguirá cambiando de posición hasta que el eje libre se convierta en eje de rotación.

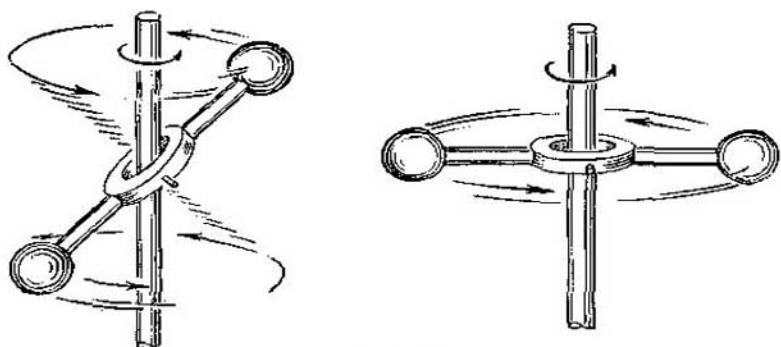


FIG. 33.

Por una serie de procedimientos puede demostrarse, que un cuerpo en libre rotación estará cambiando de eje de giro mientras la rotación no se efectúe alrededor del eje libre. Atando a un hilo cuerpos de diversa configuración y sujetando el otro extremo de dicho hilo al eje de un motor rápido, podemos transmitir a cada

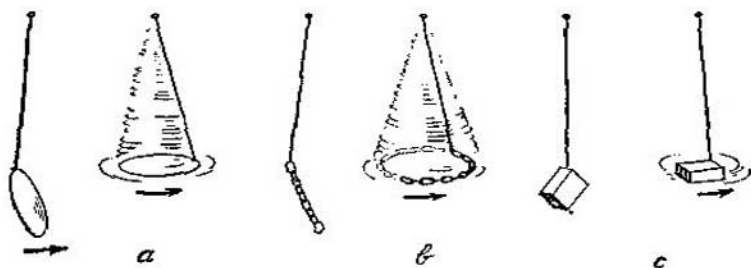


FIG. 34.

cuerpo un movimiento de rotación sin fijar el eje de ésta. En la fig. 34 se muestran las sucesivas posiciones de un disco, una cadena y una caja de cerillas al girar. La caja de cerillas comienza a girar alrededor de un eje paralelo a la arista más corta o a la arista más larga. La teoría demuestra que la rotación alrededor de un eje con momento de inercia medio no será estable incluso si dicho eje lo es de simetría.

Al construir una de las primeras turbinas, cuya velocidad era de 30 000 r. p. m., no supieron establecer la posición del eje fijo con la exactitud necesaria para anular los pares de fuerzas centrífugas que actúan sobre los cojinetes. A velocidades tan grandes estas fuerzas alcanzan valores intolerables. Se salvó la dificultad utilizando para eje del disco de la turbina un árbol flexible. La rotación tenía lugar alrededor del eje libre, y el árbol flexible se adaptaba a él.

Estudieemos este fenómeno con un poco de más detenimiento. Llamemos a  $\Delta$  el desplazamiento del centro de gravedad de la rueda de la turbina, debido a su asimetría, y  $\Delta$  a la magnitud de la flexión del árbol por la acción de la fuerza centrífuga. El árbol se cimbra hacia el lado de la asimetría, por lo tanto la expresión de la fuerza centrífuga se puede escribir de la forma  $4\pi^2 n^2 M (a + \Delta)$ . Esta fuerza es equilibrada por la fuerza elástica  $k\Delta$ , donde  $k$  es la rigidez del árbol. De este modo,

$$\Delta = a \frac{1}{\frac{k}{4\pi^2 n^2 M} - 1}.$$

De la fórmula se deduce que, cuando el número de revoluciones  $n$  es grande, la flexión del árbol  $\Delta$  no aumenta, sino que tiende a hacerse igual a la magnitud de la asimetría de la rueda con signo contrario. Esto significa que, al aumentar la velocidad de rotación de la turbina, el desplazamiento total de la rueda con el árbol respecto del eje es nulo. En esto consiste la capacidad de adaptación del árbol flexible: en que puede combarse lo necesario para anular la fuerza centrífuga, sin romperse.

De la fórmula dada se deduce también que la condición  $k/4\pi^2 n^2 M = 1$  es crítica. Con esta relación, la flexión del árbol se hace igual a una magnitud infinitamente grande. Este es el instante de resonancia (la frecuencia externa  $n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}}$ ,

es decir, coincide con la frecuencia propia de la rueda de la turbina, que tiene la masa  $M$  y va montada en un árbol cuya rigidez es  $k$ ; véase el cap. 5), que debe pasarse rápidamente al acelerar la marcha de la turbina.

### § 23. Giroscopios

Se entiende generalmente por giroscopio o trompo, un aparato que puede girar alrededor de un eje orientado de cualquier forma. Si un trompo se hace girar y se abandona a sí mismo, conserva invariable su eje de rotación mientras sobre él no actúen fuerzas ( $I\omega$  no debe variar en este caso).

La acción de una fuerza sobre el eje de rotación de un trompo se pone de manifiesto de un modo bastante inesperado. Esto se demuestra por medio de un giroscopio (fig. 35) equilibrado con una pesa de tal manera, que el eje del aparato sea horizontal. Hagamos girar el giroscopio en el plano vertical y colguemos del eje una carga  $G$ . Al parecer toda la parte derecha, es decir, el giroscopio, debería subir. Así ocurriría en realidad si el giroscopio no girara. Pero el giroscopio en rotación comienza a girar a velocidad constante, alrededor del eje vertical, en el sentido que indica la línea de trazos y la flecha. El movimiento tiene lugar en una dirección que forma un ángulo recto con la de la fuerza que actúa.

El fenómeno descrito, en el cual el eje de rotación comienza a girar alrededor de la dirección de la fuerza, se llama *precesión*. El movimiento de precesión de un trompo es bien conocido por todos. En cuanto el eje del trompo se desvía un poco de la vertical, sobre el trompo comienza a actuar el momento de vuelco de la fuerza de gravedad. Si el trompo estuviera quieto, se caería, pero el trompo que está girando entra en precesión alrededor de la ver-

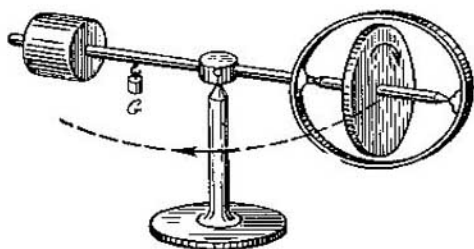


FIG. 35.

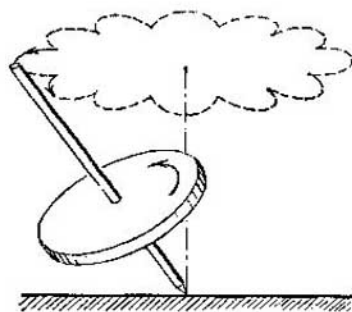


FIG. 36.

tical y su eje describe un cono cuyo vértice se encuentra en el punto de apoyo del trompo.

La rotación de un trompo tiene generalmente un carácter todavía más complejo. Al movimiento de precesión se añade la nutación. Resulta que una pequeña sacudida (siempre posible) puede hacer que el eje del trompo oscile (fig. 36). A consecuencia del fenómeno llamado nutación, el eje del trompo describe, en este caso, no una circunferencia, sino la línea cicloidal que se ve en la figura. Sin embargo, los fenómenos de nutación suelen notarse poco.

## 5

### OSCILACIONES

#### § 24. Desviaciones pequeñas de la posición de equilibrio

En la naturaleza se encuentran con frecuencia movimientos realizados por un cuerpo o una partícula en torno a su posición de equilibrio. Se balancea un cuerpo colgado de un hilo, tiembla un muelle, oscila el átomo que forma parte de una red cristalina.

Si un cuerpo o punto material sobre el cual actúan fuerzas se encuentra en la posición de equilibrio, su energía potencial es mínima, el sistema se halla en un pozo de potencial (fig. 37). Si las desviaciones de la posición de equilibrio (elongación) no son grandes, hay que considerar una parte pequeña del pozo de potencial. La marcha de las curvas de potencial en las cercanías

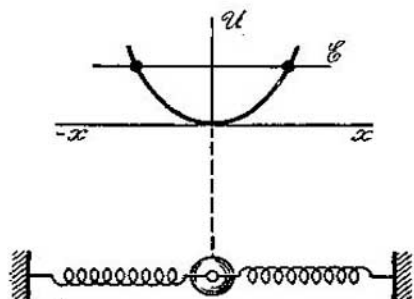


FIG. 37.

de la posición de equilibrio pueden representarse siempre como una función parabólica, es decir, de la forma  $U = 1/2 kx^2$ . Aquí  $\frac{1}{2} k$  es un coeficiente de proporcionalidad; la mitad se toma con fines de comodidad que ahora se harán evidentes.

El fundamento de la dependencia que hemos escrito consiste en lo siguiente. La energía potencial es función de la elongación. Como es sabido, haciendo suposiciones suficientemente amplias, cualquier función, si los valores de  $x$  son pequeños, se puede desarrollar en serie de Taylor según las potencias crecientes de  $x$ :

$$U = ax + \frac{1}{2} kx^2 + bx^3 + cx^4 + \dots$$

Pero si  $x$  es pequeña, los términos con potencias elevadas se pueden desechar, el primer término desaparece si el pozo de potencial es simétrico, y los valores de la energía potencial a iguales distancias, a derecha e izquierda, de la posición de equilibrio deben ser iguales.

La fuerza que actúa sobre el punto que se desvía de la posición de equilibrio será igual a la derivada de la energía potencial con signo contrario. Por lo tanto, si la energía se expresa por medio de la fórmula  $U = \frac{1}{2} kx^2$ ,  $F = -kx$ . La significación del signo menos es evidente: la fuerza hallada restituye siempre el cuerpo a su posición de equilibrio y está dirigida siempre en sentido contrario a la desviación. La fuerza  $F = -kx$  se llama por esto *fuerza restauradora*, y el coeficiente  $k$  se denomina a veces coeficiente de la fuerza restauradora.

¿Qué carácter tendrá el movimiento producido por la acción de la fuerza restauradora? A esta pregunta debe responder la ley de Newton, que para el movimiento cerca de la posición de equilibrio se escribe de la forma  $ma = -kx$ .

Esta ecuación será satisfecha si el punto realiza oscilaciones armónicas en torno a la posición de equilibrio, es decir, oscilaciones según la ley

$$x = A \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

donde  $T$  es el período de las oscilaciones.

Comprobemos esta afirmación. La velocidad del movimiento del punto, para la dependencia que hemos escrito de la elongación respecto del tiempo, será

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi A}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Recordamos que el valor máximo de la velocidad de un movimiento oscilatorio, es decir, de la amplitud de la velocidad, es igual a  $v_{\max} = 2\pi A/T$ . Ahora podemos hallar la aceleración como derivada de la velocidad. Obtenemos que

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2} A \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Sustituyendo en la ley de Newton  $ma = -kx$  las expresiones de la velocidad y de la elongación, tenemos

$$-m \frac{4\pi^2}{T^2} A \cos \frac{2\pi}{T} t = -kA \cos \frac{2\pi}{T} t;$$

donde vemos que los factores en que figura el tiempo se simplifican. Es decir, la ecuación de las oscilaciones armónicas satisface la ley de Newton para pequeñas desviaciones de la posición de equilibrio.

Es notable el hecho de que la ley de Newton impone una restricción al período de las oscilaciones posibles. Como se deduce de la última fórmula, el período de las oscilaciones libres en torno a la posición de equilibrio  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ . El período de las oscilaciones viene determinado por las propiedades del sistema que oscila, o sea, por el coeficiente de la fuerza restauradora  $k$  y por la masa del punto. Por esta razón dicho período se llama *período propio* o *característico* del sistema oscilante.

A la amplitud de las oscilaciones  $A$  no se le imponen condiciones, a excepción, claro está, de que las oscilaciones deben ser desviaciones *pequeñas* de la posición de equilibrio.

### § 25. Casos particulares de oscilaciones

De acuerdo con el hecho de que en la mecánica operamos con dos formas de energía potencial —la de elasticidad y la de gravitación—, las oscilaciones mecánicas también se pueden dividir en estos dos casos.

Los cuerpos que oscilan por la acción de fuerzas de elasticidad realizan de ordinario oscilaciones lineales de compresión y alargamiento; también son corrientes las oscilaciones de torsión.

Si un cuerpo colgado de un cordón de goma, de un muelle, o de un alambre, se desvía de su posición de equilibrio en la dirección del cordón, del eje del muelle o del alambre, se producen oscilaciones lineales por la acción de la fuerza restauradora de la elasticidad. El coeficiente  $k$  es, en este caso, la rigidez del cuerpo oscilante.

En qué medida determina este coeficiente el período y la frecuencia de la oscilación que se produce, puede verse en el siguiente ejemplo. Tres pesas iguales, de 1 kg de masa, se cuelgan de tres muelles de diferente rigidez. Por la acción de estas cargas los muelles se alargan respectivamente 1 mm, 1 cm y 1 m. En este caso los coeficientes de rigidez tendrán respectivamente los valores:

$$k_1 = \frac{981 \cdot 10^3}{0,1} = 0,981 \cdot 10^7 \text{ din/cm}; \quad k_2 = 0,981 \cdot 10^6 \text{ din/cm};$$

$$k_3 = 0,981 \cdot 10^4 \text{ din/cm}.$$

Los períodos y las frecuencias de estos péndulos serán

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{10^3}{0,981 \cdot 10^7}} = 6,34 \cdot 10^{-2} \text{ s}, \quad \nu_1 = 15,8 \text{ Hz};$$

$$T_2 = 0,2 \text{ s}, \quad \nu_2 = 5 \text{ Hz};$$

$$T_3 = 2 \text{ s}, \quad \nu_3 = 0,5 \text{ Hz}.$$

En las oscilaciones torsionales el retorno al equilibrio se efectúa por la acción de un momento de torsión que, si las desviaciones de la posición de equilibrio son pequeñas, es directamente proporcional a la elongación angular. Si, por ejemplo, de un alambre pende una arandela pesada de momento de inercia  $I$  y el alambre está torcido cierto ángulo, la ecuación de las oscilaciones torsionales de la arandela tendrá la forma  $I \frac{d\omega}{dt} = -D\varphi$ . El papel de coeficiente de la fuerza restauradora  $D$  lo desempeña aquí el momento de torsión referido a la unidad de elongación angular, y el papel de la masa lo desempeña el momento de inercia. Por lo tanto, el período de las oscilaciones torsionales libres está dado por la fórmula

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}.$$

Cuanto mayor sea el momento de inercia, tanto menor será la frecuencia de las oscilaciones.

*Ejemplo.* Sea un disco, de 100 g de masa y 5 cm de radio, que está colgado de un hilo de acero y oscila torsionalmente con un período de 1 s. El momento de inercia del disco  $I_1 = mr^2/2 = 1250 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$ . En estas condiciones el coeficiente de la fuerza restauradora  $D = 4\pi^2 I_1 / T^2 = 49\,400 \text{ din} \cdot \text{cm/rad}$ . Si a este mismo hilo se



cuelga un disco de la misma masa que antes, pero de 1 cm de radio, el período de las oscilaciones torsionales no será ya 1 s, sino  $T_2 = 2\pi\sqrt{I_2/D} \approx 0.2$  s.

Los cuerpos que oscilan por la acción de las fuerzas de gravitación son péndulos. Si un péndulo se puede representar, aproximadamente, como un punto material colgado de un hilo exento de peso, se dice que es un *péndulo matemático* o *simple* (fig. 38).

Por la figura podemos hallar fácilmente que la expresión de la fuerza restauradora  $mg \sin \alpha$  es la componente del peso tangencial a la trayectoria. Si las elongaciones son pequeñas, el seno se puede sustituir por el valor del ángulo  $\alpha$  y después, por el cociente de dividir la elongación  $x$  por la longitud del hilo  $l$ . En esta aproximación las elongaciones según la cuerda y según el arco coinciden por su magnitud. De este modo, la fuerza restauradora es igual a  $mg \frac{x}{l}$  y su coeficiente, igual a  $mg/l$ . En la expresión del período de las oscilaciones se simplifica la masa del punto oscilante  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ .

La independencia del período de las oscilaciones del péndulo respecto de la masa es ejemplo de una peculiaridad general del movimiento de los puntos materiales en el campo de la gravedad. En efecto, la fuerza que actúa, en este caso, sobre un punto material, según la ley de gravitación será proporcional a la masa, por lo cual en la ecuación del movimiento se simplifica la masa. Así, pues, llegamos a la conocida conclusión que consiste en que, en un punto dado del campo de gravitación, el período de las oscilaciones de un péndulo matemático dependerá únicamente de su longitud.

Las medidas del período de las oscilaciones de un péndulo pueden servir para determinar  $g$ . Estas mediciones son extraordinariamente exactas, por lo que hasta las variaciones más pequeñas de la magnitud  $g$  pueden ser descubiertas. En esto se basan los métodos para determinar la figura de la Tierra y la prospección gravimétrica (variaciones del valor de  $g$  pequeñas, pero que

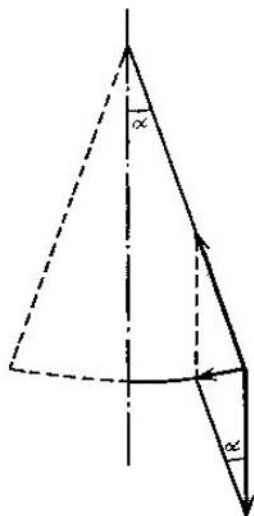


FIG. 38.

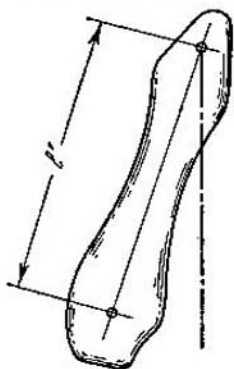


FIG. 39.

exceden en mucho los límites de los errores posibles del experimento; pueden ocurrir debido a la existencia de yacimientos subterráneos de minerales más o menos densos).

Si se trata de las pequeñas oscilaciones de un cuerpo físico imposible de sustituir aproximadamente por un punto se dice que este cuerpo es un *péndulo físico* o *compuesto*. En la fig. 39 se muestra un cuerpo sólido; un eje de rotación (oscilación) pasa por él. El período de oscilación de un péndulo físico se calcula por la misma fórmula que el período de las oscilaciones torsionales:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}},$$

puesto que la ecuación

$$I \frac{d\omega}{dt} = -D\varphi$$

es correcta para cualquier movimiento de un cuerpo que gire alrededor de un eje. Pero en el caso de un campo gravitatorio podemos expresar fácilmente el momento de rotación, referido a la unidad de desplazamiento angular, por medio de unas características más directas del péndulo. En la fig. 39 vemos que el momento de rotación es igual al producto del peso del cuerpo por la distancia  $r$ , desde el centro de gravedad al punto de suspensión, y por el seno del ángulo de elongación, es decir,  $mgr \sin \alpha$ . Considerando, como hacemos siempre en este capítulo, que las elongaciones son pequeñas obtenemos para el momento de rotación la expresión  $mgr\alpha$ , de donde  $D = \frac{mgr \alpha}{\alpha} = mgr$ . De este modo, el período de las oscilaciones de un péndulo físico viene dado por la expresión

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{g}}.$$

La magnitud  $I' = I/mr$  se llama *longitud reducida* del péndulo físico. Esta es la longitud que tendría un péndulo matemático de igual período.

### § 26. Transformaciones de la energía. Oscilaciones amortiguadas

En las oscilaciones en torno a una posición de equilibrio, si no existe rozamiento, la energía total  $\mathcal{E}$  del cuerpo permanece, como es natural, invariable. Como la energía potencial se da generalmente con exactitud de hasta una constante arbitraria, en la posición de equilibrio (elongación  $x=0$ ) podemos suponer que

dicha energía es nula. En cualquier instante del movimiento

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

En la posición de equilibrio la energía cinética es máxima. En las posiciones extremas el cuerpo se para ( $v=0$ ,  $x=A$ ) y la energía potencial es máxima. De aquí resulta evidente que

$$\mathcal{E} = \frac{kA^2}{2},$$

o sea, que la energía de oscilación es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Para los tres péndulos de resorte que consideramos en el ejemplo de la pág. 94, si las amplitudes de sus oscilaciones son idénticas e iguales a  $A=0,1$  cm, las energías totales de estas oscilaciones tendrán, respectivamente, los valores

$$\mathcal{E}_1 = 0,49 \cdot 10^5 \text{ erg}; \quad \mathcal{E}_2 = 0,49 \cdot 10^4 \text{ erg} \text{ y } \mathcal{E}_3 = 49 \text{ erg}.$$

Estos razonamientos no tienen en cuenta las fuerzas de rozamiento que experimenta, por lo general, todo cuerpo oscilante. Estas son oscilaciones ideales que pueden continuar eternamente sin que varíe su amplitud. Sin embargo, la existencia del rozamiento hace que las oscilaciones sean amortiguadas. En este caso también se puede escribir, desde un punto de vista formal, la ecuación de la elongación de la forma

$$x = A \cos \omega t,$$

pero  $A$  disminuirá con el tiempo (fig. 40). Para determinar cómo  $A$  debe depender del tiempo, hay que conocer las fuerzas de rozamiento, es decir,  $f_{roz}$  en cada instante de las oscilaciones. La aproximación más simple, y que más o menos satisfactoriamente se cumple en la práctica, consiste en suponer que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad del movimiento:

$$f_{roz} = \alpha v;$$

$\alpha$  es una constante que se llama *coeficiente de resistencia*.

Para una bola de 0,53 mm de radio, el coeficiente de resistencia  $\alpha$  a la temperatura de 15°C será igual en la glicerina a 13,93 g/s, en el ácido sulfúrico, a 0,35 g/s, y en el agua, a 0,01 g/s.

La ecuación de la energía tiene ahora la forma

$$d\mathcal{E} = -\alpha v dx;$$

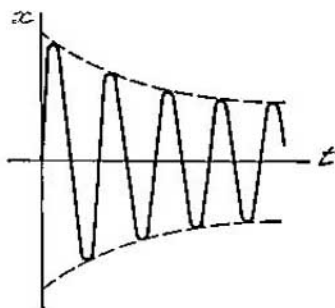


FIG. 40.

el punto oscilante pierde continuamente una cantidad de energía igual al trabajo de las fuerzas de resistencia. La ecuación del movimiento se escribe, en este caso, así:

$$ma = -kx - \alpha v.$$

No es difícil demostrar, haciendo una sustitución, que la solución  $x = A \cos \omega t$  satisface esta ecuación si la amplitud de las oscilaciones  $A$  disminuye con el tiempo según la ley exponencial

$$A = A_0 e^{-\frac{\alpha}{2m} t},$$

donde  $A_0$  es la amplitud en el instante  $t=0$ .

Llamamos la atención sobre el hecho de que la relación de dos amplitudes sucesivas se conservará. En efecto, escribamos las expresiones de las amplitudes al cabo de  $(n-1)$  períodos y al cabo de  $n$  períodos:

$$A_{n-1} = A_0 e^{-\frac{\alpha}{2m} (n-1) T}, \quad A_n = A_0 e^{-\frac{\alpha}{2m} n T}.$$

Dividamos estas expresiones entre sí. La relación

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} = e^{\frac{\alpha}{2m} T}$$

no depende en realidad de  $n$ . A veces la rapidez de la amortiguación se caracteriza por el *decremento logarítmico*  $\delta$ :

$$\delta = \ln \frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{\alpha}{2m} T.$$

Así, pues, la amortiguación será tanto más rápida cuanto mayor sea el coeficiente de resistencia, menor sea la masa y mayor sea el período de las oscilaciones.

Conviene advertir que el período de las oscilaciones amortiguadas difiere del período de las oscilaciones libres. El mismo cálculo que conduce a la fórmula de la dependencia de la amplitud respecto del tiempo, da para el período la expresión

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4mk}}}.$$

Esto significa que, cuando la resistencia es pequeña,  $T$  se diferencia poco de  $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ ; al aumentar la resistencia, aumenta el período de las oscilaciones y, finalmente, cuando

$$\frac{\alpha^2}{4mk} = 1$$

las oscilaciones cesan. En este último caso se dice, que el cuerpo sacado de la posición de equilibrio vuelve a ella aperiódicamente.

Valores aproximados de los decrementos logarítmicos de las amortiguaciones de algunos sistemas oscilantes:

Sistemas oscilantes acústicos	0,1
Circuitos oscilantes eléctricos	0,02—0,05
Diapasón	$10^{-3}$
Lámina de cuarzo	$10^{-3}$ — $10^{-5}$

Veamos algunos ejemplos de oscilaciones amortiguadas.

a) Oscilaciones de un diapasón. El decremento logarítmico  $\delta = \frac{\alpha}{2m} T = 10^{-3}$ . Sea el período de las oscilaciones del diapasón  $T = 0,01$  s. Entonces  $\alpha/2m = 0,1$  s $^{-1}$ . Esto quiere decir que, en  $2m/\alpha = 10$  s, la amplitud de las oscilaciones disminuye  $e$  veces:

$$A_t = A_0 e^{-\frac{\alpha}{2m} t}; \quad A_{t=10} = A_0 e^{-1}.$$

La magnitud  $2m/\alpha = \tau$  se llama *constante de tiempo* del sistema oscilante dado.

b) En los sistemas oscilantes acústicos, como puede verse en la tabla anterior, el decremento logarítmico de amortiguación es grande. Esto significa que las oscilaciones se amortiguan rápidamente. Si  $\delta = \frac{\alpha}{2m} T = 0,1$ , la amplitud de la décima oscilación  $A_{10}$  será ya  $e$  veces menor que la amplitud inicial  $A_0$ . Efectivamente,

$$\frac{A_0}{A_1} \frac{A_1}{A_2} \cdots \frac{A_8}{A_9} \frac{A_9}{A_{10}} = e^{\frac{\alpha}{2m} T \cdot 10}, \quad \text{o sea, } \frac{A_0}{A_{10}} = e.$$

c) La variación del período de las oscilaciones amortiguadas puede ilustrarse con el ejemplo de las de un péndulo de resorte. Sea un peso, de masa  $m = 50$  g, colgado de un muelle al que alarga 2 cm. La rigidez del muelle será  $k = 24\,500$  din/cm. Si no existiera amortiguación

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,28 \text{ s.}$$

Supongamos que la amortiguación es tal, que la constante de tiempo  $\tau_1 = 2m/\alpha = 5$  s, es decir, el coeficiente de resistencia  $\alpha = 20$  g/s. En este caso el período de las oscilaciones será

$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4mk}}} \approx T_0 (1 + 4,08 \cdot 10^{-5}).$$

Sumerjamos este péndulo en un líquido. Sea ahora la constante de tiempo  $\tau_2 = 1$  s (esto quiere decir, que la amplitud de la cuarta oscilación será ya, aproximadamente,  $e$  veces menor que la inicial, es decir, que la amortiguación es bastante intensa):

$$T_2 \approx T_0 (1 + 102 \cdot 10^{-5}) = 1,001 T_0,$$

o sea, incluso en este caso, el período aumentó tan sólo en un 0,1%.

§ 27. Oscilaciones forzadas

Si un cuerpo se saca de su posición de equilibrio y después se suelta, sus oscilaciones tendrán una frecuencia propia, independiente del carácter de la excitación, y definida únicamente por las propiedades del sistema. Las oscilaciones de una cuerda pulsada tienen la misma frecuencia, independientemente de si se la hizo sonar por medio de un golpe o punteándola.

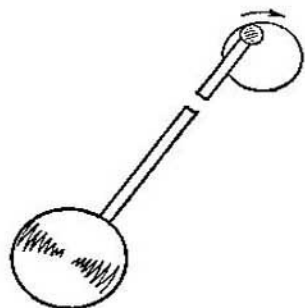


FIG. 41.

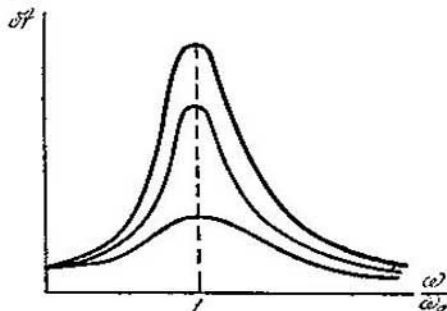


FIG. 42.

Sin embargo, existen una serie de procedimientos por medio de los cuales se puede «obligar» a un cuerpo a que oscile con una frecuencia externa. Estas oscilaciones forzadas se pueden conseguir si se crea una ligazón entre dos cuerpos capaces de oscilar. Uno de ellos obligará al otro a oscilar. Un motor mal equilibrado oscila, y estas oscilaciones se transmiten al cimiento; el cimiento efectuará, en este caso, oscilaciones forzadas. Puede hacerse el siguiente experimento: un reloj de bolsillo se coloca en una caja pequeña, la cual se cuelga a su vez de tres hilos; la caja entrará en un estado de oscilación forzada. La fig. 41 representa un dispositivo con ayuda del cual, haciendo girar la excéntrica, se consigue que el péndulo entre en el estado de oscilaciones forzadas. En todos estos casos actúa sobre el cuerpo una fuerza periódica, que varía con cierta frecuencia  $\omega$ ; a esta fuerza conviene llamarle *externa*.

Las oscilaciones forzadas no se establecen inmediatamente. Debe transcurrir algún tiempo hasta que el cuerpo ligado con el sistema oscilante empieza a oscilar. En fin de cuentas se establece cierta amplitud, y la frecuencia de las oscilaciones será exactamente igual a  $\omega$ .

El hecho de que el cuerpo tenga una frecuencia propia de oscilación  $\omega_0$  influye, a pesar de todo, en el fenómeno de las oscilaciones forzadas. Más exactamente, como ahora veremos, es considerable la diferencia entre la frecuencia propia y la externa.

En la fig. 42 se muestra la dependencia de las amplitudes de las oscilaciones forzadas, respecto de la relación  $\frac{\omega}{\omega_0}$ , para tres sistemas que se diferencian por el rozamiento. Cuando la frecuencia externa coincide con la propia, la amplitud de la oscilación es máxima. Este fenómeno se conoce generalmente con el nombre de *resonancia*.

Las curvas representadas en la fig. 42 se pueden hallar teóricamente. La ecuación del movimiento de un cuerpo que efectúa oscilaciones forzadas por la acción de una fuerza periódica externa  $F_0 \cos \omega t$ , tiene la forma

$$ma = -kx - \alpha v + F_0 \cos \omega t.$$

No es difícil demostrar, haciendo una sustitución, que la elongación del punto oscilante satisfará la ecuación

$$x = A \cos (\omega t + \beta),$$

donde la amplitud

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}},$$

y el corrimiento de fase  $\beta$  satisface la ecuación

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\alpha \omega}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Teniendo en cuenta que  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$  y  $v = \frac{dx}{dt}$ , sustituimos estos valores en la ecuación del movimiento. Después de unas transformaciones sencillas, agrupando los términos en que figuran  $\cos \omega t$  y  $\sin \omega t$ , obtenemos

$$\begin{aligned} [(-m\omega^2 + k) A \cos \beta - \alpha \omega A \sin \beta - F_0] \cos \omega t - \\ - (-m\omega^2 + k) A \sin \beta + \alpha \omega A \cos \beta \sin \omega t = 0. \end{aligned}$$

Como el resultado obtenido debe cumplirse en cualquier instante, debemos imponer que los coeficientes de  $\cos \omega t$  y  $\sin \omega t$  sean nulos. De este modo obtenemos dos ecuaciones para determinar  $A$  y  $\beta$ .

$$\begin{aligned} \{(-m\omega^2 + k) \cos \beta - \alpha \omega \sin \beta\} A = F_0, \\ \{(-m\omega^2 + k) \sin \beta + \alpha \omega \cos \beta\} A = 0. \end{aligned}$$

Elevando ambas ecuaciones al cuadrado y sumándolas, se obtiene

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2 \omega^2}},$$

donde  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  es la frecuencia de las oscilaciones propias. De la segunda ecuación hallamos el corrimiento de fase  $\beta$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\alpha \omega}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

De la primera fórmula se deduce que la amplitud  $A$  depende de  $\omega$  del modo siguiente: cuando  $\omega < \omega_0$ , la amplitud crece al aumentar  $\omega$ ; cuando  $\omega = \omega_0$ , la amplitud alcanza el valor máximo y en adelante cae. El efecto (agudez de la resonancia) será tanto más brusco cuanto menor sea el coeficiente de resistencia  $\alpha$ . Cuando el rozamiento es pequeño la resonancia destruye el sistema: para  $\alpha = 0$ , la amplitud resonante se hace infinita. Esta posibilidad debe tenerse en cuenta por los constructores. Para asegurar la insensibilidad de una construcción a las oscilaciones del suelo hay que conocer la curva de resonancia, que es semejante a la de la fig. 43. La curva inferior representa las oscilaciones del suelo; la superior, las del edificio. En el caso de la resonancia, que se presenta cuando el período de las oscilaciones es de 0,32 s, la amplitud alcanza 20—25 micras. Esta cantidad, en general, no es pequeña.

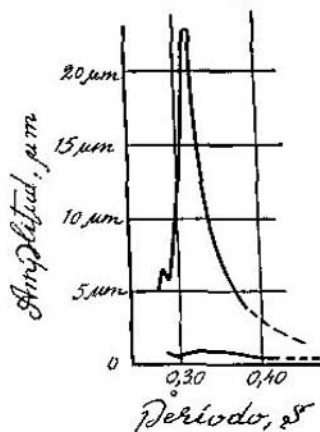


FIG. 43.

La agudez de la resonancia se refleja además en una circunstancia importante: cuanto más aguda sea la resonancia, tanto más lentamente se establecerán las oscilaciones de amplitud constante.

Otra peculiaridad de las oscilaciones forzadas es el corrimiento de fase. Hasta ahora hemos supuesto tácitamente que para medir el tiempo se tomaba como origen aquel en que, cuando  $t=0$ , la elongación es máxima en el sentido positivo. Está claro que si se estudia una oscilación determinada no hay por qué hacer otra elección del punto de referencia. Pero si comparamos dos oscilaciones y elegimos el origen de los tiempos de manera que para una de ellas  $x=A$  cuando  $t=0$ , para la otra oscilación, en este mismo instante, la elongación podrá tener un valor arbitrario. Esta circunstancia se puede tener en cuenta introduciendo en el argumento del coseno el corrimiento de fase  $\beta$ : si  $x=A \cos(\omega t + \beta)$ , esto significa que en el instante  $t=0$ ,  $x=A \cos \beta$ . Con ayuda del corrimiento de fases  $\beta$ , el desfaseamiento se describe de manera completamente unívoca.

Retornemos ahora a los fenómenos de resonancia.

La magnitud  $\beta$  en la fórmula de una oscilación forzada significa que la fase de la oscilación forzada está desplazada con respecto a la fase de la oscilación impulsora. La magnitud de la diferencia de fases depende de la razón de la frecuencia externa a la frecuencia propia  $\omega/\omega_0$  y también de la amortiguación. En la gráfica de la



fig. 44 se ve que cuando se produce la frecuencia de resonancia independientemente de la amortiguación, tiene lugar un desplazamiento de fase de  $90^\circ$ . Si nos apartamos un poco de las condi-

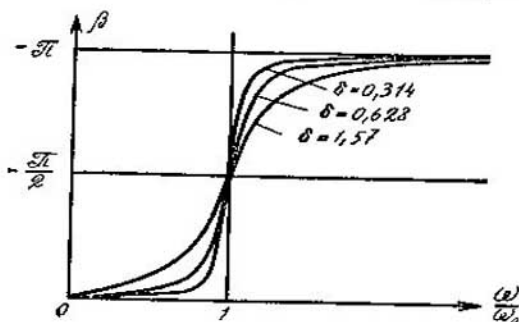


FIG. 44.

ciones de resonancia, la influencia de la amortiguación se hace evidente. Cuando la amortiguación es débil (pequeños valores del decremento logarítmico  $\delta$ ) y las frecuencias algo menores que la

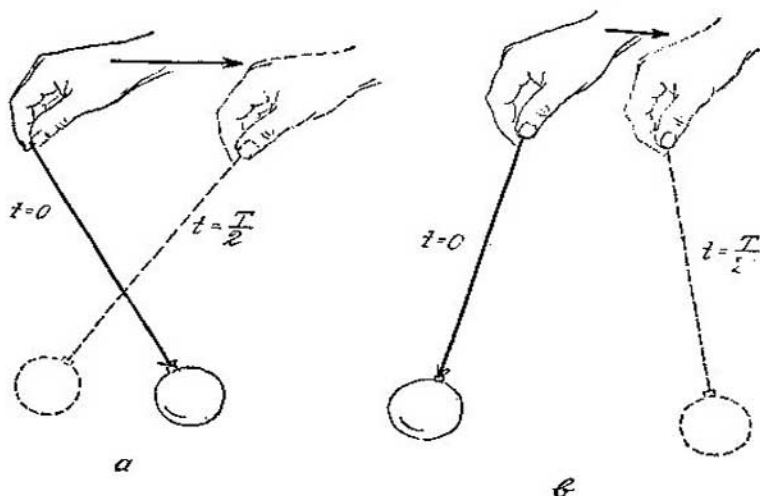


FIG. 45.

resonancia, la diferencia de fases es próxima a cero, y cuando las frecuencias son algo mayores, dicha diferencia se aproxima a  $180^\circ$ . Esta misma tendencia, aunque no tan claramente expresada, se

observa también si la amortiguación es intensa. En el caso de un rozamiento insignificante se puede hablar del salto de  $180^\circ$  que sufre la diferencia de fases al pasar la frecuencia por la condición de resonancia.

Para asimilar la esencia de estas interesantes regularidades se puede hacer un experimento elemental (fig. 45). Colguemos un peso de un hilo y dejemos que se balancee libremente. Cuando se ponga de manifiesto el período de las oscilaciones libres de este péndulo, detengámoslo y moviendo periódicamente la mano hagámosle entrar en un estado de oscilaciones forzadas. Al principio moveremos la mano con rapidez para que el período de las oscilaciones propias sea mayor que el de las forzadas, y después lentamente, de manera que el período de las oscilaciones propias sea menor que el de las forzadas. Nos convenceremos de que, en el primer caso, el péndulo y la mano se mueven en oposición de fase o antifase, y, en el segundo, en concordancia de fase o fase.

Volvamos a ocuparnos del péndulo de resorte que consideramos en la pág. 99, que tenía el coeficiente de amortiguación  $\alpha=20$  g/s, la masa de 50 g y el período  $T_0=0,28$  s ( $\omega_0=22,4$  s $^{-1}$ ). Si sobre este péndulo actúa una fuerza sinusoidal externa de frecuencia  $\omega$ , la amplitud de las oscilaciones forzadas resultará ser ya  $A=4$  cm cuando la amplitud de fuerza impulsora  $F_0=1790$  din  $\approx 1,8$  gf. La discrepancia de la frecuencia de la fuerza impulsora respecto de  $\omega_0$  provoca la variación de la amplitud de las oscilaciones forzadas y del ángulo de fase  $\beta$  entre las oscilaciones del péndulo y la fuerza exterior. En la tabla que sigue se dan los datos correspondientes obtenidos por las fórmulas de este párrafo.

Frecuencia de la fuerza externa $\omega$ , Hz	Amplitud de las oscilaciones forzadas $A$ , cm	Ángulo de fase $\beta$
2	3,58	$0^\circ 05'$
10	3,95	$0^\circ 35'$
15	4,48	$0^\circ 15'$
22,4	4,04	$90^\circ$
30	2,48	$188^\circ 50'$
40	1,31	$189^\circ 10'$

Se ve que, cuando existe amortiguación, la amplitud máxima de las oscilaciones forzadas se alcanza cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es algo menor que la frecuencia propia de las oscilaciones. Cuanto menor sea la amortiguación, tanto menos se notará este corrimiento.

### § 28. Autooscilaciones

La fig. 46, *a* representa un baño, de sección triangular, sujeto a un eje alrededor del cual puede balancearse. Este baño tiene cierto período de oscilaciones libres propias y, desviándolo de su

posición de equilibrio, podemos observar estas oscilaciones propias hasta que el rozamiento y la resistencia del aire no las paran. Colquemos este baño debajo de un grifo de agua y dejemos salir un chorro uniforme de modo que caiga sobre la pared del baño en un punto lo más alejado posible de su línea central. No es difícil imaginarse lo que ocurrirá en este caso. A medida que el baño se vaya llenando de agua, su centro de gravedad se irá elevando y llegará un instante en que se encuentre más alto que el eje que sostiene al baño. Una presión pequeña del chorro bastará entonces para que el baño se vuelque, se derrame el agua y el baño vuelva a su antigua posición. Este fenómeno se repetirá mientras que el chorro de agua caiga en el baño. Este último oscilará. Pero el carácter de estas oscilaciones y la esencia del fenómeno son muy distintos del de las oscilaciones que hemos estudiado antes.

En primer lugar es importante advertir que la acción exterior no tiene carácter de oscilación. Esta acción exterior (presión del chorro de agua) da una fuerza constante. La segunda circunstancia es que un sistema real, sometido a la acción del rozamiento o de otras resistencias, realiza oscilaciones no amortiguadas. Y, finalmente, otra circunstancia importante: las oscilaciones que se producen no son armónicas, y no se pueden representar por medio de una senoide.

En el ejemplo que hemos puesto hay un poco de común con la senoide. Haciendo este experimento podemos cerciorarnos de que la cantidad de agua que hay en el baño se puede representar, en función de tiempo, por una curva serriforme como la que se muestra en la fig. 46, b.

Las oscilaciones que acabamos de describir pertenecen a las llamadas *autooscilaciones*. Las autooscilaciones son un fenómeno peculiar, diferente en esencia de las oscilaciones libres mantenidas originadas sin la acción de fuerzas, así como de las oscilaciones forzadas que se producen por la acción de una fuerza periódica. El ejemplo elegido anteriormente puede parecer artificial. Sin embargo, los sistemas autooscilantes están muy difundidos y nos

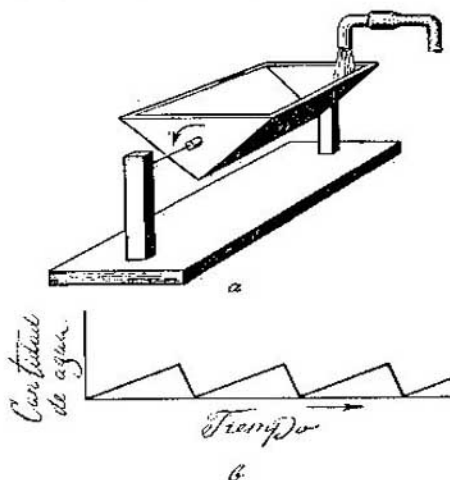


FIG. 46.

encontramos con ellos frecuentemente en todas partes donde tienen lugar oscilaciones mecánicas o de otro tipo.

A los sistemas autooscilantes pertenecen los relojes de péndulo más simples (fig. 47). Como es sabido, a estos relojes se les da cuerda subiéndola una pesa pendiente de una cadena que pasa por una rueda dentada. Esta rueda, por medio de un engranaje, transmite la rotación a la rueda de escape, cuyos dientes actúan sobre una palanca angular de brazos iguales llamada áncora. Al áncora va rígidamente sujeto un péndulo. En los instantes en que la rueda de escape toca con sus dientes los del áncora, el péndulo experimenta

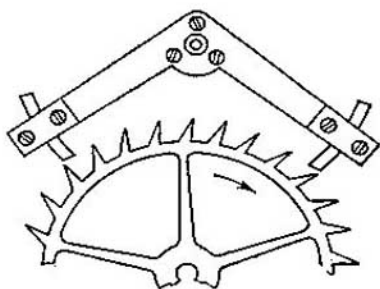


FIG. 47.

un impulso y la rueda citada gira en un diente. El tiempo restante el péndulo con el áncora se balancea libremente asegurando la exactitud de la marcha del reloj. El áncora y la rueda de escape se construyen de tal forma, que el péndulo recibe dos impulsiones en el sentido de su movimiento: una, cuando va de izquierda a derecha, y otra, cuando va de derecha a izquierda.

En estos relojes encontramos los mismos indicios de sistema autooscilante que vimos en el baño de sección triangular. Las oscilaciones se producen por la acción de una fuerza constante (no periódica), y las oscilaciones no son amortiguadas, a pesar de la existencia de rozamiento, ni tienen carácter armónico.

En los ejemplos que hemos puesto se ve una propiedad general de las autooscilaciones, la *reacción*. El péndulo efectúa oscilaciones mantenidas obligando al mecanismo a empujarle en los instantes convenientes. El mecanismo le empuja al péndulo y éste opone su reacción al mecanismo. Si el péndulo no se mueve, cesan las impulsiones. Las oscilaciones del péndulo las rige el propio péndulo.

Del mismo modo, el balanceo del baño triangular lo rige el propio baño. El agua que llega regula las oscilaciones del baño, y la propia estructura de éste regula la entrada del agua.

Una cuerda tocada con los dedos y soltada se halla en estado de oscilaciones libres. Pero si por la cuerda pasa el arco un músico, la situación cambia; ahora realiza oscilaciones de tipo serriforme. El arco arrastra a la cuerda; cuando el desplazamiento de la última alcanza cierto límite, la cuerda se desprende del arco y retorna a la posición inicial. El arco vuelve a arrastarla y el proceso se repite. Durante un segundo, mientras el músico pasa el arco, este fenómeno se reitera periódicamente centenares de veces. Esto es

una autooscilación típica, puesto que la provoca una fuerza que actúa constantemente. La propia cuerda con su elasticidad dirige las oscilaciones.

Los chirridos de los goznes mal engrasados de las puertas son un fenómeno que tiene el mismo origen.

Hablaremos de reacción en todos aquellos casos en que un aparato o máquina introduce automáticamente correcciones en su comportamiento cuando varían las condiciones de trabajo. El principio de reacción es una de las ideas fundamentales que se utilizan en la automática moderna.

### § 29. Composición de oscilaciones de una misma dirección

En una serie de casos puede plantearse el problema del movimiento de un cuerpo que toma parte simultáneamente en dos procesos oscilatorios. Por ejemplo, un péndulo oscilante puede hallarse sobre una plataforma o sobre un barco que se balancee.

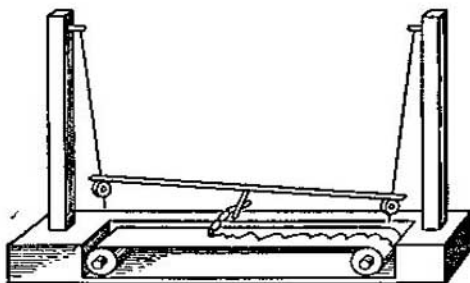


FIG. 48.

Si se trata de oscilaciones de una misma dirección, esta composición se puede hacer valiéndose del modelo que reproduce la fig. 48. En ella se representan dos péndulos que oscilan en planos paralelos. Sobre ellos descansa libremente un palo liviano, a cuyo centro va sujeta una pluma registradora. Aproximadamente se puede considerar que, cualesquiera que sean los movimientos de los péndulos, la pluma se encontrará en un plano que diferirá poco de los de oscilación de aquéllos, y el desplazamiento de la pluma en un instante dado será igual a la suma algebraica de las elongaciones de dichos péndulos. También se puede utilizar otro dispositivo: una bola oscila en un muelle que está colgado de una tabla. La tabla, a su vez, va sujeta por medio de otro muelle a un soporte,

de modo que la bola toma parte simultáneamente en dos oscilaciones de una misma dirección.

Si  $x_1$  es la elongación de la primera de las oscilaciones, en ausencia de la segunda, y  $x_2$  es la elongación de la segunda, en ausencia de la primera, cuando los dos procesos oscilatorios se desarrollan al mismo tiempo, en cada instante,

$$x = x_1 + x_2.$$

En el caso más general las oscilaciones que se componen pueden tener diferentes amplitudes, frecuencias y fases.

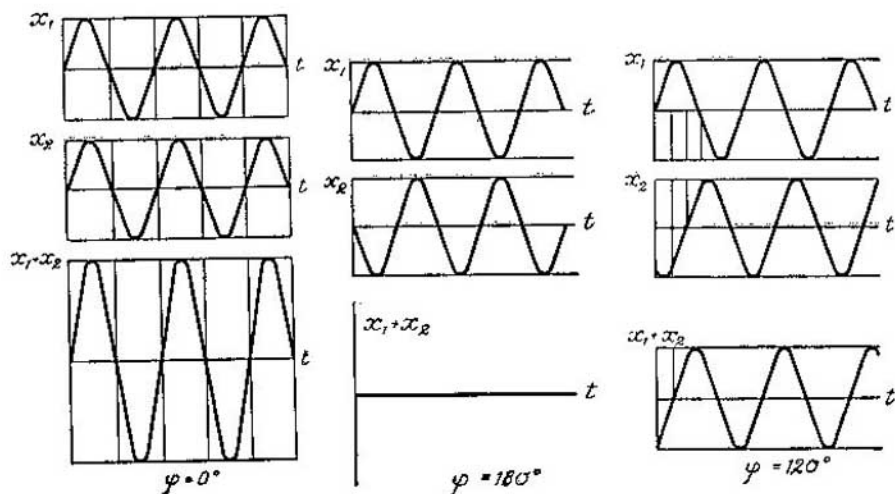


FIG. 49.

Consideremos primero el caso en que las oscilaciones tienen la misma amplitud y frecuencia, pero distintas fases. Entonces ( $\omega = 2\pi/T$ )

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad x_2 = A \cos (\omega t + \varphi)$$

y

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \left( \omega t + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Esto significa que la oscilación resultante también será armónica y tendrá la amplitud

$$2A \cos \frac{\varphi}{2}.$$

De aquí se deduce que las amplitudes se suman aritméticamente, si las oscilaciones están en fase, y se restan, si las oscilaciones

están en oposición de fase ( $\varphi=180^\circ$ ). En los casos intermedios la amplitud toma valores comprendidos entre cero y  $2A$ . En particular, cuando  $\varphi=120^\circ$  la amplitud de la oscilación resultante es igual a  $A$ . La fig. 49 sirve de ilustración a lo dicho.

Otro caso importante es la composición de oscilaciones de distintas frecuencias. Para simplificar suponemos  $\varphi=0$  y que las amplitudes son iguales. Entonces

$$x_1 = A \cos \omega_1 t \quad \text{y} \quad x_2 = A \cos \omega_2 t,$$

$$x = 2A \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t.$$

En el caso general, al componer estas oscilaciones, se produce cierto movimiento oscilatorio, pero no se consigue notar una

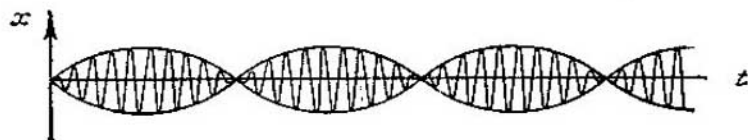


FIG. 50.

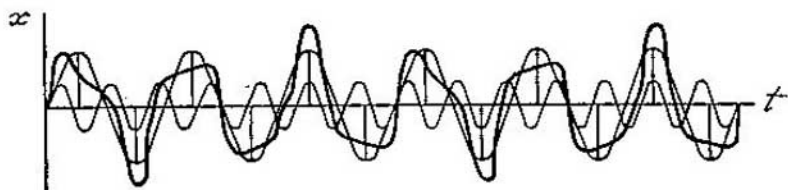


FIG. 51.

periodicidad rigurosa en las variaciones de la elongación  $x$ . No obstante, hay dos casos particulares que merecen especial atención.

En primer lugar consideraremos el caso de dos oscilaciones de frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  próximas. Entonces  $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1 + \omega_2$  y la elongación  $x$  es el producto de dos cosenos: uno, que varía rápidamente con el tiempo, y otro, que varía muy lentamente. Por lo tanto

$$2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$$

se puede considerar la amplitud, lentamente variable, de unas oscilaciones que se efectúan con la frecuencia media  $\omega_{med} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ . Estas oscilaciones, llamadas *pulsaciones*, se representan en la fig. 50. Aquí se ven perfectamente dos periodos: el de la oscilación fundamental y el de la pulsación.

El segundo caso importante es el de la composición de dos oscilaciones cuyas frecuencias se encuentran en relación de números enteros. Es evidente que la oscilación resultante será periódica. Si, por ejemplo, el período de una oscilación es 3 s y el de la otra 7 s, al cabo de 21 s la oscilación resultante se repetirá. Esto puede verse en la fig. 51.

### § 30. Espectro de las oscilaciones

Ya hemos hablado de las oscilaciones que se repiten exactamente al cabo de intervalos de tiempo determinados, pero que no son armónicas. Por ejemplo, mencionamos las oscilaciones serriformes. Si se hace un análisis suficientemente riguroso resulta, que las oscilaciones armónicas, es decir, las que se representan por una senoide, son menos frecuentes en la naturaleza que las inarmónicas.

Al final del párrafo anterior señalamos que la suma de las sinusoides, aunque no dé una senoide, origina una oscilación periódica siempre que sus frecuencias se relacionen entre sí como números enteros. Está claro que esto es también correcto para cualquier número de oscilaciones armónicas, y no sólo para dos.

La suma de dos oscilaciones de períodos  $T$  y  $1/2 T$  da una oscilación de período  $T$ ; este mismo período tendrán las oscilaciones resultantes de la composición de tres oscilaciones cuyos períodos sean  $T$ ,  $1/2 T$ ,  $1/3 T$ , de cuatro, añadiendo a las anteriores otra de período  $1/4 T$ , de cinco, agregándoles una más de período  $1/5 T$ , etc. Pasando a las frecuencias, esto se puede expresar así: la resultante de la composición de cualquier número de oscilaciones cuyas frecuencias sean múltiplos de  $\omega$ , es decir, de frecuencias  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ , ..., será una oscilación de frecuencia  $\omega$ .

Ahora se nos plantea una pregunta natural. Si componemos un número arbitrariamente grande de oscilaciones con frecuencias múltiplos de  $\omega$ , tomando diversas oscilaciones ya con unas, ya con otras amplitudes, ¿no se podría conseguir siempre seleccionar una suma tal, que dé la peculiaridad de cualquier oscilación, incluso serriforme? A esta pregunta le dio una respuesta afirmativa el científico francés Fourier. El teorema que lleva su nombre demuestra que siempre es posible escoger unos valores de  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , ... y  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ , ..., que permitan representar cualquier oscilación periódica de frecuencia  $\omega$  en forma de suma de oscilaciones armónicas:

$$x + a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + a_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) + \dots$$



La frecuencia  $\omega$  se llama *frecuencia principal*, y las  $2\omega$ ,  $3\omega$ , ... son las *sobretonos* o *armónicas* (se dice: segunda armónica, tercera armónica, etc). Cuanto más se aproxime la gráfica de la oscilación a una senoide, tanto menores serán las amplitudes de las armónicas. Y al contrario, si la gráfica de la oscilación se asemeja a una senoide, las amplitudes de varias armónicas no diferirán mucho de la amplitud de la frecuencia fundamental.

La representación de las oscilaciones en forma de suma de oscilaciones armónicas se llama *descomposición* de dichas oscilaciones en su *espectro*, y se da el nombre de espectro al conjunto de datos acerca de las frecuencias y amplitudes de las oscilaciones armónicas que

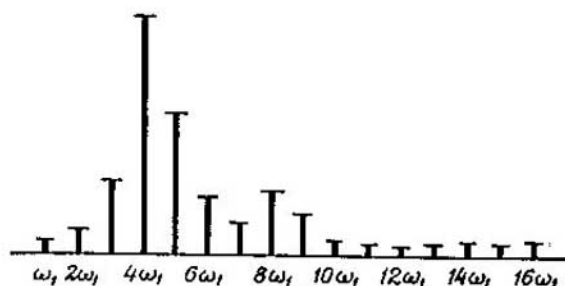


FIG. 52.

componen la oscilación de frecuencia  $\omega$ . Los datos relativos al espectro de una oscilación se pueden escribir en forma de tabla. Cuando las frecuencias son muchas se suele recurrir a la representación gráfica del espectro (fig. 52).

La idea del espectro puede hacerse extensiva a los procesos no periódicos. Se puede hablar, por ejemplo, del espectro de las oscilaciones elásticas producidas al dar un puñetazo en la mesa, y tiene sentido el concepto de espectro de un disparo o de un grito.

Para que esto quede claro, estudiaremos primero un proceso consistente en impulsos periódicos amortiguados. Esto no es un grito o un disparo, sino más bien una serie de gritos o de disparos que se repiten a intervalos iguales de tiempo. El elemento de este proceso es una oscilación que se amortigua rápidamente, y la curva en total tiene la forma que se ve en la fig. 53, a. El espectro de esta oscilación puede establecerse por los medios existentes y tendrá la forma que muestra la figura de la derecha. En ella vemos que (como era de esperar) el espectro está formado por un conjunto de frecuencias múltiplos de la fundamental. Adviértase que el espectro tiene un máximo: la armónica que con más fuerza representa este espectro es la octava. Esto no es casual, porque, si re-

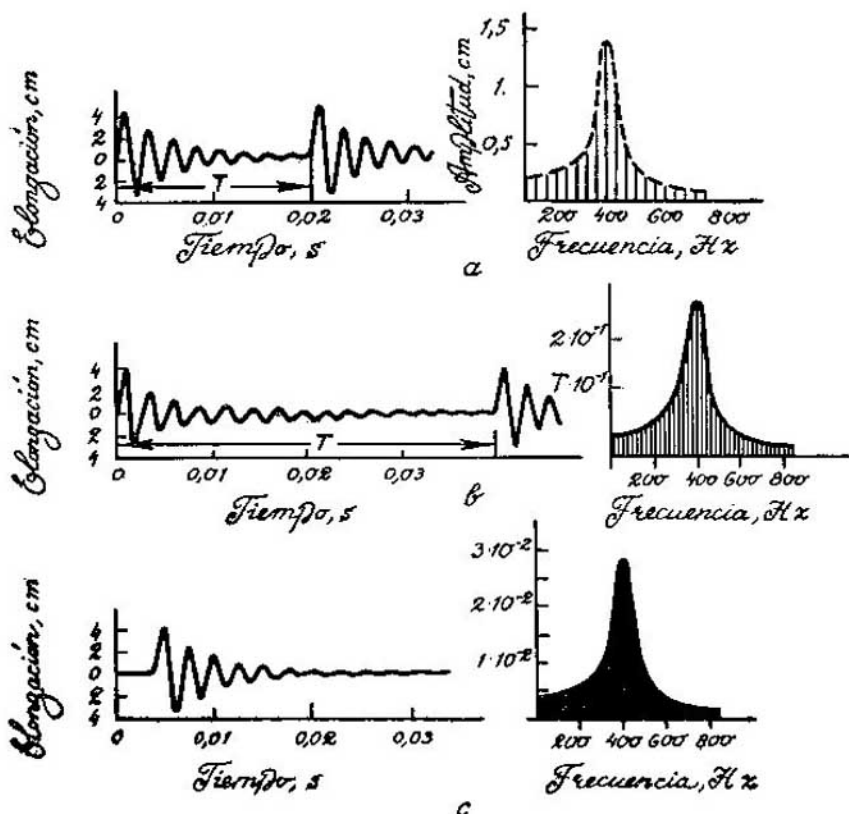


FIG. 53.

tornamos a la figura de la oscilación, vemos que en cada uno de los impulsos amortiguados la oscilación tiene una «frecuencia» 8 veces mayor que la frecuencia del tono fundamental (fig. 53, a).

La fig. 53, b representa unos impulsos semejantes a los anteriores, pero que se producen con una frecuencia dos veces menor que aquéllos. Compárese el espectro de esta oscilación con el de la precedente. Como la frecuencia fundamental es ahora dos veces menor, la «frecuencia» del proceso elemental amortiguado (que siguió siendo la misma que antes) será ahora la armónica decimosexta del tono fundamental. La distribución de las amplitudes de las armónicas continúa siendo la misma que en el caso anterior, pero su número en un mismo intervalo de frecuencias se hace dos veces mayor.

Ahora no es difícil comprender que el espectro de un proceso no periódico — de un impulso — será continuo. En él no habrá frecuencias aisladas, pero el carácter del espectro en un mismo intervalo de frecuencias será muy semejante al que hemos considerado antes (fig. 53, b).

La demostración matemática de los razonamientos que hemos expuesto se da en la teoría de las llamadas integrales de Fourier.

### § 31. Composición de oscilaciones perpendiculares entre sí

Para estudiar las leyes de una oscilación compleja, resultante de la suma de dos oscilaciones perpendiculares entre sí, lo mejor es utilizar un oscilógrafo electrónico. De este aparato trataremos más adelante (pág. 488). Por ahora bastará decir que este oscilógrafo permite realizar la oscilación de un rayo electrónico en dos direcciones perpendiculares entre sí. La huella del rayo electrónico sobre la pantalla luminescente describe la trayectoria resultante de la participación del punto luminoso en los dos movimientos oscilatorios mutuamente perpendiculares.

Supongamos que la oscilación de la huella del rayo en la dirección vertical se efectúa según la ley  $y = b \cos(\omega t + \delta)$ , y en la dirección horizontal, de acuerdo con la fórmula  $x = a \cos \omega t$ . Para determinar el carácter de la trayectoria resultante hay que eliminar el tiempo en estas dos ecuaciones y hallar la ecuación  $f(x, y) = 0$ . Escribiendo las expresiones de la elongación en la forma

$$\frac{x}{a} = \cos \omega t, \quad \frac{y}{b} = \cos(\omega t + \delta) = \cos \omega t \cdot \cos \delta - \sin \omega t \cdot \sin \delta$$

y sustituyendo en la segunda ecuación  $\cos \omega t$  por  $x/a$  y  $\sin \omega t$  por  $\sqrt{1 - (x/a)^2}$ , obtenemos, después de unas transformaciones elementales, la ecuación de la elipse girada con respecto a los ejes de coordenadas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Comencemos ahora a cambiar los parámetros de las oscilaciones y observemos el comportamiento de la elipse. Si se varía la diferencia de fases, la elipse cambiará de forma y, al mismo tiempo, girará (fig. 54). Cuando la diferencia de fases sea igual a  $90^\circ$  los ejes de la elipse coincidirán con los ejes de coordenadas. Si se varía la diferencia de fases, aumentándola o disminuyéndola, la elipse comienza a girar hacia la izquierda o hacia la derecha y, al mismo tiempo, se hace más estrecha. Cuando la diferencia de fases se anula, la elipse degenera en una línea recta. Esto debe compro-

barse haciendo en la ecuación de la elipse escrita anteriormente  $\delta=0, 90, 180^\circ$ .

Si las amplitudes de las oscilaciones a lo largo de las verticales y horizontales son iguales, cuando las diferencias de fases sean de  $90$  y  $270^\circ$  la trayectoria será una circunferencia. Estas dos diferencias de fases, aunque dan trayectorias idénticas, difieren entre sí. En un caso el rayo recorre la circunferencia en el sentido de las agujas del reloj, y en el otro, en sentido contrario. Para esto

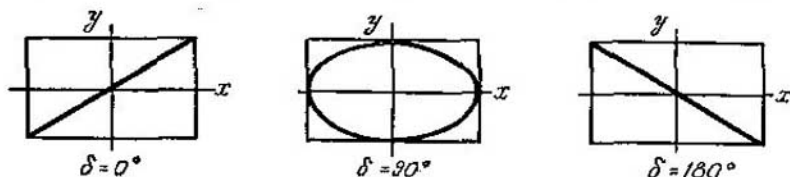


FIG. 54.

hay que volver a las ecuaciones iniciales. Estas ecuaciones se escribirán así:

$$\begin{array}{ll} \text{para } 90^\circ & x = a \cos \omega t, & y = b \cos (\omega t + 90^\circ); \\ \text{para } 270^\circ & x = a \cos \omega t, & y = b \cos (\omega t + 270^\circ). \end{array}$$

El primer par de ecuaciones indica que al aumentar el tiempo, a partir de  $t=0$ , el punto con las coordenadas  $x=a$ ,  $y=0$  comenzará a moverse en sentido de las  $y$  negativas, es decir, de las agujas del reloj. El segundo par de ecuaciones denota el movimiento inverso.

Si la demostración se hace por medio del oscilógrafo, se puede notar que las elipses no permanecen quietas en un sitio, sino que se desplazan lentamente como si ocurriera una variación continua de la diferencia de fases. Prestando atención se verá que la elipse no gira, sino que la curva que describe el punto luminoso parece que pasa continuamente de una elipse a otra. Este fenómeno se produce cuando las frecuencias de las oscilaciones se diferencian un poco. En efecto, la diferencia de frecuencias equivale por completo al caso en que la diferencia de fases cambia continuamente. Por ejemplo, la frecuencia de la oscilación vertical  $\omega_2$  es mayor que la frecuencia de la horizontal  $\omega_1$  en la cantidad  $\Delta\omega$ , entonces

$$\omega_1 t + \delta = \omega_2 t + (\Delta\omega t + \delta)$$

donde entre paréntesis figura la diferencia de fases variable.

Si las frecuencias difieren sensiblemente entre sí, el rayo no tiene tiempo de recorrer una parte considerable de una elipse,

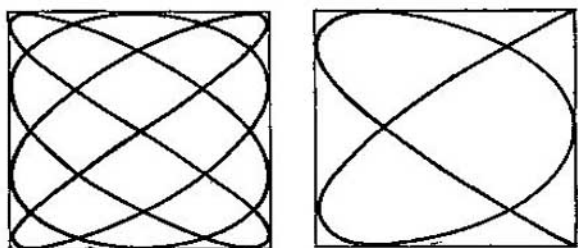


FIG. 55.

cuando ya su fase cambia de valor. Como resultado, las curvas descritas se parecen cada vez menos a elipses. Unos ejemplos de estas raras curvas, llamadas figuras de Lissajous, se dan en la fig. 55. Las curvas representadas corresponden a las relaciones de frecuencias 3 : 4 y 1 : 2.

## 6

### ONDAS VIAJERAS

#### § 32. *Propagación de la deformación*

Cada cuerpo posee cierto grado de elasticidad, es decir, capacidad de restablecer su forma alterada como consecuencia de la acción breve de una fuerza. Esta capacidad de los cuerpos es causa de que toda acción mecánica sea transmitida por el cuerpo con una velocidad finita. Si existiera una varilla absolutamente rígida, incapaz de deformarse, podría moverse solamente como un todo, las acciones de las fuerzas se propagarían por este cuerpo instantáneamente. Por el contrario, un cuerpo absolutamente plástico, que se deformara sin recuperar lo más mínimo su forma, sería incapaz de transmitir en forma alguna una acción mecánica.

En un cuerpo elástico la deformación se transmite sucesivamente de un punto del cuerpo al vecino. Si a una varilla se le da con un martillo un golpe que la comprima, en su extremo se forma una condensación que se propaga con una velocidad determinada  $c$  a lo largo del cuerpo. Si en un cuerpo sólido se crea una flexión local de carácter breve, también se transmitirá con una velocidad finita por el cuerpo sólido. Esto mismo es correcto para cualquier deformación. Como la deformación recorre el cuerpo al ser sometido

a diversas acciones, se demuestra generalmente valiéndose de muelles (fig. 56).

La elasticidad de compresión y alargamiento la poseen tanto los cuerpos sólidos como los líquidos y gaseosos. Por lo tanto, en todos los cuerpos es posible la transmisión de estas deformaciones. En cuanto se refiere a las deformaciones de cizallamiento, torsión y flexión, éstas solamente pueden ser transmitidas por los cuerpos sólidos poseedores de la correspondiente elasticidad. En el caso de una deformación de compresión y alargamiento los movimientos de las partículas se producen en la misma dirección en que se tras-

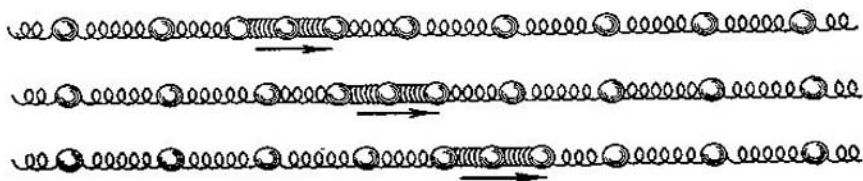


FIG. 56.

mite la acción mecánica. En los casos como éste se dice que la propagación de la deformación es longitudinal. Cuando existe cizallamiento, flexión o torsión, la dirección del movimiento de las partículas puede formar, en general, un ángulo arbitrario con la dirección en que se transmite la energía.

Siempre es posible destacar la dirección en que se transmite la acción mecánica y después descomponer el desplazamiento de las partículas del cuerpo según tres ejes perpendiculares entre sí, de los cuales uno se encontrará a lo largo de la línea de propagación y los otros, en un plano perpendicular a ella. Por esto, en el caso más complejo puede considerarse la deformación que se propaga como un conjunto de tres movimientos: dos transversales y uno longitudinal.

La velocidad de propagación de una deformación elástica depende de las propiedades mecánicas del cuerpo; como demuestra la física teórica, esta velocidad puede ligarse a otras constantes físicas del cuerpo. Así, para las ondas longitudinales la velocidad de propagación viene expresada por la simple fórmula

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \kappa}}.$$

Aquí  $\rho$  es la densidad del cuerpo y  $\kappa$ , su compresibilidad. Una gran densidad del cuerpo ocasiona el aumento de la inercia de sus partículas y, por consiguiente, disminuye la velocidad de pro-

pagación de las ondas elásticas. Las pequeñas compresibilidades nos dicen que incluso a las deformaciones pequeñas corresponden grandes fuerzas elásticas. Esta circunstancia conduce al aumento de la velocidad de propagación de la deformación.

Esta fórmula se aplica de esta forma, generalmente, a los líquidos. Así, por ejemplo, el agua, cuando la presión varía en 1 atm se comprime en un  $5 \cdot 10^{-6}$  de su volumen. Esto significa que su compresibilidad, igual (véase la pág. 166) por definición a  $\kappa = -\frac{1}{\Delta p} \frac{\Delta v}{v}$ , es  $10^{-6} \text{ cm}^2/\text{din} \cdot 5 \cdot 10^{-6}$ . La densidad del agua es de  $1 \text{ g/cm}^3$ . De aquí obtenemos que la velocidad de propagación de una deformación en el agua es

$$c^2 = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2/\text{s}^2, \\ c = 1400 \text{ m/s}.$$

Para los gases es preferible transformar la fórmula de la velocidad de propagación. Como el proceso de propagación de una condensación, en un gas, es muy rápido, la compresión y el enrarecimiento de éste pueden considerarse adiabáticos, es decir, que se producen sin intercambio de calor. Más adelante (pág. 179) obtendremos la ecuación del proceso adiabático, de la cual es fácil deducir la relación que existe entre el coeficiente de compresibilidad y la presión del gas:  $\kappa = 1/\gamma p$ , donde  $\gamma = 1,4$  \*). En este caso  $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ . Para un gas perfecto  $\rho = \mu/v$  ( $\mu$  es la masa de un mol de gas y  $v$  es su volumen) será proporcional a la fracción  $p\mu/T$  (ya que  $p\mu/T = \text{const}$ ), es decir, la velocidad de propagación de una deformación en un gas

$$c = \sqrt{\alpha \frac{T}{\mu}}.$$

\*) La ecuación del proceso adiabático es  $p v^\gamma = \text{const}$ . Si  $p$  y  $v$  son los valores en equilibrio de la presión y del volumen de una determinada masa de gas y  $p + \Delta p$  y  $v - \Delta v$  son los valores correspondientes en el instante de la deformación,

$$(p + \Delta p) (v - \Delta v)^\gamma = p v^\gamma.$$

De donde

$$1 + \frac{\Delta p}{p} = \left(1 - \frac{\Delta v}{v}\right)^{-\gamma} = 1 - \gamma \frac{\Delta v}{v} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2 + \dots$$

Prescindiendo de los términos, de orden superior del desarrollo del binomio, obtenemos que

$$\Delta p = -\gamma p \frac{\Delta v}{v}.$$

De aquí se deduce que

$$\kappa = \frac{1}{\gamma p}.$$

Aquí  $a$  es un coeficiente cuyo valor se calcula fácilmente por medio de las ecuaciones que estudiaremos más tarde (pág. 179).

De este modo, la velocidad de propagación de una deformación en un gas, incluida la velocidad de propagación de las ondas sonoras, a las que nos referiremos más adelante, es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura y no depende de la presión del gas. Ofrece interés la dependencia con respecto al peso molecular: la velocidad de propagación de una deformación en el hidrógeno es igual a 1263 m/s, mientras que en el aire tenemos el bien conocido número 331 m/s.

Para las ondas longitudinales que se propagan en un sólido, se cambia, de ordinario, el coeficiente de compresibilidad por el módulo de elasticidad. Como por definición el módulo de elasticidad

$$E = \frac{F}{S} : \frac{\Delta l}{l} = \Delta p : \frac{\Delta l}{l},$$

es evidente que, en ausencia de movimientos transversales,  $\kappa = 1/E$ , puesto que la compresión lineal relativa será igual a la de volumen. La fórmula de la velocidad se escribe, en este caso, en la forma

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

De la fidelidad con que se cumple esta fórmula se puede juzgar por los siguientes datos aproximados:

	Módulo de Young $E$ , N/m <sup>2</sup>	Densidad $\rho$ , g/cm <sup>3</sup>	$c$ calculada, m/s	$c$ obtenida experimentalmente, m/s
Vidrio . . . . .	$7,65 \cdot 10^{10}$	2,4	5700	5990
Acero . . . . .	$2,16 \cdot 10^{10}$	8	5200	5000
Madera . . . . .	$7,05 \cdot 10^{10}$	0,7	4130	4200
Agua (13° C) . .	$\kappa = 4,75 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$	1	1450	1440

La comprobación de esta fórmula debe hacerse estudiando la velocidad de propagación del sonido en varillas delgadas. Un estudio más profundo de esta cuestión demuestra que la fórmula  $c = \sqrt{E/\rho}$  debe ser correcta únicamente en el caso de estos cuerpos. Para cuerpos de otra forma, así como para la propagación del sonido en un medio continuo, la teoría conduce a otras expresiones que nosotros no vamos a mencionar.



También debe advertirse que los valores de la tabla anterior pueden servir solamente de orientación. Las velocidades del sonido en vidrios, maderas, aceros, etc. de diferente calidad pueden diferir sensiblemente.

### § 33. Origen del movimiento ondulatorio

Por multitud de procedimientos se puede hacer llegar a un punto determinado de un cuerpo o de un medio una oscilación incesante. Una fuerza actuando periódicamente en un punto cualquiera de un cuerpo, crea una deformación, variable periódicamente, que se transmitirá de un punto a otro de dicho cuerpo con una velocidad determinada. Todos los puntos del cuerpo entrarán en oscilación. Pero como la velocidad con que se propaga la deformación es finita, los puntos del cuerpo entrarán en vibración unos después que otros. Si el cuerpo es ilimitado, esta oscilación avanzará todo el tiempo formando una onda viajera.

Aunque cuerpos ilimitados no existen, la longitud de un gran cuerpo no influye en el carácter del fenómeno, porque las oscilaciones no llegan hasta su fin debido a las inevitables pérdidas de energía.

Consideremos una onda que avanza por un cuerpo prácticamente ilimitado a lo largo de una dirección cualquiera.

Supongamos que un punto, que se encuentra en el origen de coordenadas, oscila de acuerdo con la ecuación  $y=A \cos \omega t$ . Escribamos la ecuación de las oscilaciones de un punto que se encuentre en la línea de propagación de la deformación a una distancia  $x$  del inicial. No podemos escribirla de la misma forma, ya que este punto empezará a oscilar con el retraso de  $\tau=x/c$  necesario para que la deformación se propague hasta la distancia  $x$ . Por lo tanto, la oscilación del punto  $x$  debe estar desplazado en fase respecto del punto inicial. El punto  $x$  se encontrará en el instante  $t$  en la fase de oscilación en que se encontraba el punto inicial en un instante  $x/c$  anterior. Por consiguiente, la ecuación de las oscilaciones de un punto que se encuentra a la distancia  $x$  del origen de coordenadas tiene la forma

$$y = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right),$$

donde  $\omega x/c$  es el desplazamiento de fase.

Esta ecuación se llama *ecuación de onda* y abarca las oscilaciones de todos los puntos situados a distancias cualesquiera con respecto al inicial.

Supongamos que el foco de la onda está lejos del observador y que el frente de onda hace ya tiempo que pasó adelante. Vamos

a considerar una zona de la línea situada a lo largo del eje  $x$  animada por el movimiento ondulatorio. A primera vista puede parecer que la introducción de este nuevo término no está justificada. Todos los puntos de la zona oscilarán, eso está claro. Pero, ¿podremos ver, acaso, el movimiento de la onda?, ¿podremos decir que se mueve hacia la derecha o hacia la izquierda? Un estudio atento demuestra que la peculiaridad de un movimiento ondulatorio es fácil de describir. Si la onda avanza de izquierda a derecha, el punto vecino de la derecha se retrasará en fase respecto del de la izquierda. En el caso contrario se adelantará a él.

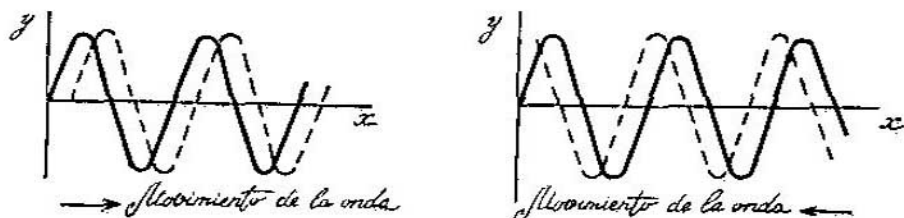


FIG. 57.

En la fig. 57 se representan dos ondas, una que avanza hacia la derecha y otra que lo hace hacia la izquierda. Cada una de estas sinusoides es una fotografía instantánea de la onda. En cada instante posterior esta sinusoide, como si fuera un todo rígido, se trasladará en la dirección en que se transmite la energía.

Por esto se comprende cómo se refleja la dirección (el sentido) de la onda en la forma de su ecuación. Si la onda avanza a lo largo del eje de coordenadas, el valor de la coordenada  $x$  figurará con signo menos. Y cuando la onda avanza en sentido contrario a la dirección en que se forman los valores crecientes de la coordenada, en el argumento del coseno habrá que cambiar el signo:

$$y = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right), \quad y = A \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right).$$

a lo largo del eje                      en sentido contrario al eje

Escribamos la ecuación de la «foto instantánea» de la onda para cualquier tiempo múltiplo del período:

$$y = A \cos \omega \frac{x}{c} = A \cos 2\pi \frac{x}{cT}.$$

Del signo menos se puede prescindir, porque el coseno es una función par. De la forma de esta ecuación se deduce inmediatamente que el período de la sinusoide es

$$\lambda = cT.$$

Este período espacial, es decir, la distancia al cabo de la cual se repite la distribución ondulatoria, recibe el nombre de *longitud de onda*. Hemos obtenido, pues, la conocida relación que liga la velocidad del movimiento de la onda con su longitud y con el período de las oscilaciones del punto.

Cuando una deformación se transmite ondulatoriamente a través de un cuerpo según la ley del seno, cambia una serie de magnitudes físicas, a saber: la elongación del punto, la velocidad de las partículas oscilantes, la presión y la densidad. Por esto, la expresión de la onda con que nosotros operamos es muy general. Por *y* se puede entender cualquiera de las magnitudes físicas enumeradas que varían según la ley del seno al moverse la onda a lo largo de la dirección *x*. Conviene advertir, sin embargo, que las ondas de la presión, de la velocidad y de la elongación pueden no estar en la misma fase. Por ejemplo, es evidente que la onda de las velocidades de las partículas oscilantes estará desplazada en fase  $90^\circ$  respecto de la onda de elongaciones, puesto que la velocidad del punto es máxima cuando éste pasa por la posición del equilibrio.

#### § 34. Ondas de presión y de velocidad de oscilación

Es interesante conocer la relación que existe entre las amplitudes de las ondas de las diversas magnitudes físicas. Nos detendremos en esta cuestión para ocuparnos solamente del caso de las ondas longitudinales que se propagan en un gas. Nos pueden interesar las ondas de elongación, de velocidades de las partículas y de sobrepresión. Como la teoría se estableció en un principio para las ondas percibidas por el oído, la sobrepresión  $\Delta p$  se llama frecuentemente presión sonora y, prescindiendo del signo  $\Delta$ , se designa por *p*.

Si la amplitud de la onda de elongación es *A*, la amplitud de la onda de velocidades será  $\omega A$ . Estas dos ondas estarán desplazadas en fase  $90^\circ$ .

Veamos ahora la relación que existe entre la amplitud de la velocidad de oscilación y la amplitud de la presión. Comparando la definición general de  $\kappa$  con su expresión para los gases (pág. 117), obtenemos para la presión sonora la fórmula

$$p = -\gamma P \frac{\Delta v}{v},$$

donde *P* es la presión del gas o, aplicando la relación  $c^2 = \gamma P / \rho$ ,

$$p = -c^2 \rho \frac{\Delta v}{v}.$$

Es completamente natural que exista una ligazón directa entre la sobrepresión  $p$  y la compresión relativa en el mismo punto del gas.

Pero la magnitud de la compresión relativa del volumen  $\Delta v/v$  se puede ligar con la amplitud del desplazamiento de las partículas oscilantes. En la línea de propagación de la onda señalaremos dos puntos:  $x_1$  y  $x_2$ . En una onda longitudinal la variación de la densidad se produce únicamente debido a los desplazamientos en la dirección de propagación. Aislemos mentalmente en el gas un volumen limitado por las secciones  $x_1$  y  $x_2$ . Cuando la onda avanza, las moléculas que se hallan dentro de este volumen se desplazan. Debemos prestar atención a las secciones fronterizas solamente. Si las moléculas de la capa  $x_1$  se desplazan en  $y_1 = A \cos \omega \left( t - \frac{x_1}{c} \right)$ , y las de la capa  $x_2$ , en  $y_2 = A \cos \omega \left( t - \frac{x_2}{c} \right)$ , la dimensión lineal del volumen variará, desde el valor  $x_2 - x_1$  en ausencia de la onda, en la cantidad  $y_2 - y_1$ . La variación relativa de la longitud, y, por consiguiente, del volumen, será  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ . Pasando al límite, para obtener la magnitud característica en un punto del espacio, obtenemos

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{dy}{dx} = -\frac{\omega}{c} A \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right),$$

y para la presión

$$p = -c\rho A\omega \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right).$$

Con esto se demuestra que la presión varía en fase con la velocidad de oscilación de las partículas en la onda.  $A\omega = u_0$  es la amplitud de la velocidad de oscilación. De este modo, la amplitud de la presión  $p_0$  se expresa en función de la amplitud de la velocidad de la forma siguiente:

$$p_0 = \rho c u_0.$$

En acústica  $u$  se mide generalmente en cm/s, y la presión, en din/cm<sup>2</sup>. Para el aire a la temperatura ambiente, en estas unidades,  $p_0 = 41 u_0$ . La magnitud  $\rho c$  se llama *resistencia acústica* u *ondulatoria*. El sentido de esta denominación se comprende que es el siguiente: cuanto mayor es la resistencia, tanto menor es la velocidad de oscilación de las partículas para los mismos valores de la sobrepresión. He aquí las resistencias acústicas de algunos materiales:

	$\rho$ , g./cm <sup>3</sup>	$c$ , cm/s	$\frac{\rho c}{g/(cm^3s)}$
Vidrio . . . . .	2,6	$5,5 \cdot 10^5$	$14 \cdot 10^5$
Acero . . . . .	7,9	$5 \cdot 10^5$	$40 \cdot 10^5$
Madera . . . . .	0,7	$4,2 \cdot 10^5$	$2,9 \cdot 10^5$
Agua . . . . .	1	$1,44 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^5$

### § 35. Flujo de energía

El movimiento ondulatorio transporta energía de un lugar del espacio a otro. Pero conviene recordar que todos los puntos del medio que toman parte en la transmisión de la energía oscilan todo el tiempo en torno a la posición de equilibrio invariable.

Todos los puntos del cuerpo participan en las oscilaciones. Por lo tanto, la unidad de volumen tendrá una energía oscilatoria

$$\omega = \frac{\rho v_{\text{máx}}^2}{2},$$

donde  $\rho$  es la densidad, es decir, la masa de la unidad de volumen del cuerpo, y  $v_{\text{máx}}$  es el valor de la amplitud de la velocidad de oscilación. Tomando para esta última magnitud la expresión que ya conocemos

$$v_{\text{máx}} = \omega A,$$

donde  $A$  es la amplitud del desplazamiento y  $\omega$  es la frecuencia; la densidad de la energía oscilatoria del cuerpo se puede escribir de la forma

$$\omega = \frac{\rho \omega^2 A^2}{2}.$$

Esta energía se propaga con la velocidad  $c$ . Puede plantearse la pregunta siguiente: ¿a qué es igual la *intensidad de la onda*, es decir, la cantidad de energía que pasa, en la unidad de tiempo, a través de una unidad de superficie perpendicular a la dirección en que se propaga dicha onda? En lugar de hablar de la densidad de una onda suele hablarse del flujo de energía oscilatoria, entendiéndose por esto la energía que pasa en la unidad de tiempo (potencia) por un área dada. Este razonamiento no difiere en nada del que se hace en el caso del agua que pasa por un tubo. Al cabo de una unidad de tiempo la onda recorre un espacio  $c$  y trae la energía contenida en el volumen de un cilindro de longitud  $c$  y área de la base igual a la unidad. Como a la unidad de volumen le corres-

ponde la energía  $w$ , a este volumen le corresponderá la energía  $wc$ . Esta es la intensidad de la onda:

$$I = wc.$$

Vemos, pues, que la intensidad de una onda tiene el sentido de flujo de energía que pasa por la unidad de superficie. Esto fue propuesto primeramente por N. A. Úmov, que elaboró la teoría del movimiento de la energía en los cuerpos.

Hasta ahora se ha supuesto que el movimiento ondulatorio se propaga a lo largo de una línea recta (rayo). Esta consideración es válida para el estudio de una deformación que corre a lo largo de una varilla, de una cuerda, de columnas de aire, etc. Sin embargo, a nosotros nos interesan también los casos en que el movimiento ondulatorio invade una región del espacio tridimensional.

Para describir una onda tridimensional hay que conocer cómo se mueve su frente. Para hallar el frente de onda es necesario saber indicar, en un instante dado, todos los puntos del espacio que se encuentran en las mismas fases de oscilación. Indicando la posición sucesiva de esta superficie de fases iguales, es decir, el *frente de onda*, obtenemos una idea clara del carácter del movimiento ondulatorio.

La superficie de onda puede tener, en general, cualquier forma. ¿Qué sentido tiene entonces obtener la dirección de propagación de una onda? Es natural que como esta dirección se tome la normal al frente de onda.

Si el medio es completamente homogéneo y la onda se irradia en un punto cualquiera del medio, el frente de onda será esférico. Esta onda se propagará desde el centro siguiendo los radios. A grandes distancias del centro de radiación zonas considerables del frente de onda parecerán ya planas dentro de la precisión del experimento. Así aparece la idea acerca de la onda plana, que se propaga en la dirección de la normal al frente. Si el foco de onda tiene la forma de una recta, se produce una onda cilíndrica, que se propaga según los radios de un cilindro. La fig. 58 representa varios tipos de ondas.

No prestando atención a las pérdidas de energía de todo género que se producen durante el movimiento de una onda plana, se puede afirmar la necesidad de que sea igual la cantidad de energía que pasa por las sucesivas posiciones de las superficies de igual fase. Por esto la intensidad de una onda plana no variará durante el proceso de su propagación. Pero cuando se trata de ondas esféricas o cilíndricas la cosa varía. Como las superficies de igual fase aumentan en área en proporción directa al cuadrado de la distancia, para las ondas esféricas, y a la primera potencia de la distancia, para las ondas cilíndricas, la intensidad de estas ondas debe variar

en proporción inversa al cuadrado de la distancia para las ondas esféricas, o a la primera potencia de la distancia, para las ondas cilíndricas. Sólo en este caso se cumplirá la ley de conservación de la energía.

La intensidad de una onda es proporcional a la densidad de la energía oscilatoria, que, a su vez, es proporcional al cuadrado de la amplitud de la oscilación. De aquí se deduce que la amplitud de una onda esférica es inversamente proporcional a la primera potencia de la distancia desde el centro de radiación, y la amplitud

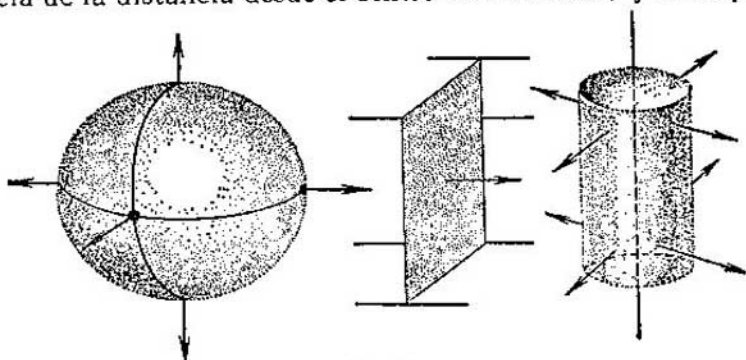


FIG. 58.

de una onda cilíndrica es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde la línea radiante:  $y = \frac{A}{r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)$ , para la onda esférica, e  $y = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)$ , para la onda cilíndrica. Aquí la distancia  $r$ , lo mismo que antes la  $x$ , se toma a lo largo de la dirección en que se propaga la onda.

Supongamos que debajo del agua se encuentra un foco de oscilaciones de 1 kHz que crea un flujo de energía  $I = 1 \text{ W/cm}^2$ . Hay que valuar la amplitud del desplazamiento  $A$  de las moléculas del agua, su aceleración  $B$  y la amplitud de la velocidad oscilatoria  $\omega A = u_0$ .

De las fórmulas de los párrafos anteriores se deduce que

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2I}{\rho c} \cdot 10^7} \text{ cm}, \quad B = \omega \sqrt{\frac{2I}{\rho c} \cdot 10^7} \text{ cm/s}^2,$$

$$u_0 = \sqrt{\frac{2I}{\rho c} \cdot 10^7} \text{ cm/s}.$$

Para el agua  $c = 1450 \text{ m/s}$ ;  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$  y

$$A \approx 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ cm}, \quad \rho = 740 \text{ m/s}^2 \text{ y } u_0 \approx 12 \text{ cm/s}.$$

Si un flujo de energía igual que éste y de la misma frecuencia de oscilaciones se crea en el aire, para el cual  $c = 330 \text{ m/s}$  y  $\rho = 1,293 \cdot 10^{-3}$ ,

$$A = 0,04 \text{ cm}, \quad B = 14 \cdot 10^6 \text{ cm/s}^2 = 14 \text{ 000 m/s}^2 \text{ y } u_0 = 220 \text{ cm/s}.$$

§ 36. *Amortiguación de las ondas elásticas*

Las ondas reales que se propagan en un medio (sólido, líquido o gaseoso) disminuyen de intensidad con mucha más rapidez que según la ley de los cuadrados inversos. Influyen en esto las pérdidas de energía mecánica, su transformación en calor.

La ley de la disminución de la intensidad de cualquier radiación al pasar por un medio se puede obtener casi siempre (para cualquier medio y cualquier radiación) del siguiente razonamiento. Si la onda atravesó una capa de espesor  $dx$ , la pérdida de intensidad deberá ser en todo caso proporcional a la intensidad incidente y al espesor de la capa, o sea,  $dI = -\mu I dx$ .

Esta ecuación puede integrarse; suponiendo que la intensidad es igual a  $I_0$  en el punto  $x=0$  e igual a  $I$  en el punto  $x$ , obtenemos la ley, correcta para las distancias finitas,

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\mu \int_0^x dx, \text{ es decir, } I = I_0 e^{-\mu x}.$$

De este modo, la intensidad de la onda disminuye según una ley exponencial.

En acústica se puede hablar de amortiguación de la amplitud de la oscilación. Como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la amortiguación de la amplitud de una oscilación vendrá expresada por la misma ley, pero el coeficiente de amortiguación (o de absorción) será dos veces menor:

$$A = A_0 e^{-\frac{1}{2} \mu x}.$$

Indiquemos el sentido que posee el coeficiente de absorción  $\mu$  (ó  $\frac{1}{2} \mu$ ). Si se mide en centímetros recíprocos (en el exponente debe figurar como magnitud adimensional), nos da una magnitud recíproca del espesor en cuyo transcurso la intensidad o la amplitud de la radiación se debilita  $e$  veces.

Está claro que la formulación de la ley de la amortiguación exponencial sólo resuelve parcialmente el problema de la absorción de una onda elástica por el medio. Tiene más importancia hallar la dependencia del coeficiente de absorción respecto de las propiedades del medio y de la frecuencia de la radiación.

Para muchas sustancias se ha hallado que la amortiguación de una onda elástica (los datos fundamentales se refieren a ondas sonoras en el aire) aumenta con la frecuencia de oscilación. Concretamente, el coeficiente de absorción

$$\mu = a\omega^2.$$



Para el aire  $a=4 \cdot 10^{-13} \text{s}^2/\text{cm}$ . Por lo tanto, en el transcurso de 1 km una onda plana de 100 Hz de frecuencia se debilita  $\sim 1,015$  veces, mientras que un sonido muy alto, de 20 000 Hz de frecuencia, se debilitará  $10^{27.4}$  veces (!). Las oscilaciones ultrasonoras se amortiguan con tal rapidez, que su transmisión a distancias mayores de varios cientos de metros es irreal totalmente.

No obstante la marcha monótona de la absorción con la frecuencia puede alterarse. Algunas sustancias poseen absorción selectiva del sonido en una zona de frecuencias relativamente estrecha. Así, por ejemplo, la absorción del ultrasonido por el anhídrido carbónico presenta un pico cuando las frecuencias se aproximan a 277 kHz. Si se traza una parábola lisa, de acuerdo con la fórmula  $\mu = a \omega^2$ , para el coeficiente de absorción, coincidirá bien con los datos experimentales en todas las zonas, menos en la que hemos indicado. Cuando las frecuencias sean ya de cerca de 277 kHz, la absorción será, aproximadamente, 20 veces mayor que lo es según la ley parabólica.

En lo tocante a la dependencia del coeficiente de absorción respecto de las propiedades del medio, para las ondas longitudinales en los gases y los líquidos existe la siguiente regularidad. El coeficiente de absorción es inversamente proporcional al cubo de la velocidad de la onda elástica y directamente proporcional a la viscosidad cinemática. Esta dependencia tan brusca de la velocidad de propagación y el valor considerable de la viscosidad cinemática del aire conducen a que la absorción de las ondas sonoras y ultrasonoras en un líquido es aproximadamente 1000 veces menor que en el aire; esto significa que, con una misma frecuencia, las ondas elásticas se propagarán en el agua a una distancia mil veces mayor que en el aire.

La absorción de las ondas transversales en los sólidos también depende mucho de las propiedades del cuerpo; así, la absorción en la goma, el corcho y el vidrio es, respectivamente, 13 000, 8500 y 130 veces mayor que en el aluminio.

En las teorías de la absorción de las ondas elásticas por los cuerpos no nos detendremos debido a su complejidad.

### § 37. Interferencia de ondas

Si existe no un foco de ondas, sino varios, cada punto del medio toma parte simultáneamente en varios movimientos ondulatorios. Siempre resulta que es posible considerar las oscilaciones de una magnitud física, que se producen gracias a la acción de varias ondas, como una suma de oscilaciones en la que cada una de ellas tendría lugar si actuara una sola onda.

Supongamos que de dos puntos, situados a cierta distancia uno del otro, parten ondas esféricas. Valiéndose de la ecuación de onda se puede hallar el valor de la amplitud de oscilación en cualquier instante para cualquier punto vecino. Si el lugar que nos interesa se halla a la distancia  $r_1$  del primer foco de ondas y  $r_2$  del segundo, la oscilación en este punto vendrá representada por la fórmula

$$y = A \cos 2\pi \left( vt - \frac{r_1}{\lambda} \right) + A \cos 2\pi \left( vt - \frac{r_2}{\lambda} \right).$$

El resultado de la composición de dos oscilaciones que difieren únicamente en las fases es también, como ya sabemos, una oscilación armónica, de amplitud  $2A \cos (\delta/2)$ , que depende de la diferencia de fases de las oscilaciones que se componen. La diferencia de fases  $\delta$  será igual en este caso a

$$2\pi \left( \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \right).$$

Así, pues, en términos generales, todos los puntos del campo ondulatorio que consideramos oscilarán. Pero las amplitudes de estas oscilaciones serán distintas en diferentes puntos. Llamen la atención dos casos extremos. En primer lugar, existen puntos en los cuales las oscilaciones que se componen se anulan entre sí. Estos puntos satisfarán la condición

$$2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} = (2k + 1)\pi,$$

donde  $k=0, 1, 2, 3, \dots$ ; la diferencia de fases es igual a un número impar de  $\pi$ . Por el contrario, si

$$2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} = 2k\pi,$$

la diferencia de fases es igual a un número par de  $\pi$  y las amplitudes de oscilación se sumarán aritméticamente, o sea, se reforzarán mutuamente en grado máximo.

La diferencia  $r_1 - r_2$  se llama *diferencia de marcha* o *de recorrido* de las ondas; este término no requiere explicaciones. Valiéndose de este concepto, la condición de los máximos y los mínimos de la amplitud se puede formular de un modo algo distinto. La condición de máximo

$$r_1 - r_2 = k\lambda$$

indica que la diferencia de marcha de las ondas que llegan a un punto dado deberá ser igual a un número entero de longitudes de

onda. Y la condición de mínimo

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2} (2k + 1)$$

nos dice que la diferencia de marcha deberá ser igual a un número impar de semiondas. Estas condiciones tienen un sentido muy gráfico: las ondas se refuerzan mutuamente cuando se superpone una cresta a otra cresta, y se anulan si se superpone una cresta a un valle.

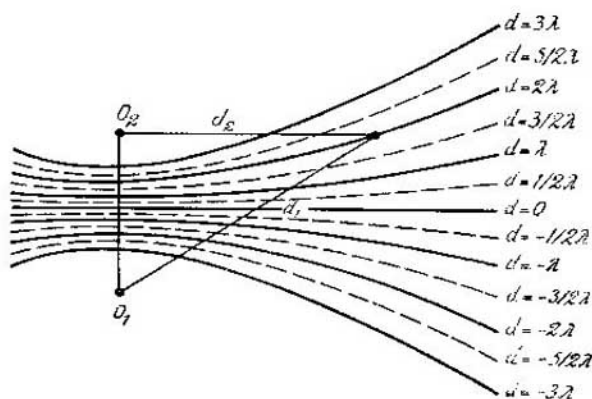


FIG. 59.

La superposición de ondas en la cual se produce la suma de sus amplitudes se llama *interferencia*.

Como sabemos por la geometría analítica, las curvas que satisfacen la condición de mantener constante la diferencia de distancias desde sus puntos hasta dos focos, son hipérbolas. Si se hace pasar una sección plana por los dos focos puntuales y se señalan en un dibujo los lugares de reforzamiento máximo y los de anulación de las ondas, veremos que se encuentran en hipérbolas. Las curvas correspondientes se muestran en la fig. 59. Esta figura se puede observar sin dificultad en el agua si se hacen interferir dos focos que produzcan circunferencias en su superficie desde puntos vecinos.

Por este mismo procedimiento se puede observar la interferencia de cualquier número de focos de ondas.

§ 38. Principio de Huygens-Fresnel.  
Reflexión y refracción de las ondas

Salta a la vista la completa equivalencia de todos los puntos oscilantes de un campo de ondas. Sólo se diferencian por sus fases. Desde este punto de vista se nos ocurre naturalmente una idea: cualquier punto del campo de ondas puede considerarse correctamente como una fuente independiente de ondas esféricas.

La validez de esta idea, expresada primeramente en 1690 por Christian Huygens, se puede comprobar intentando construir el frente de onda por los datos acerca del campo de ondas en cierta

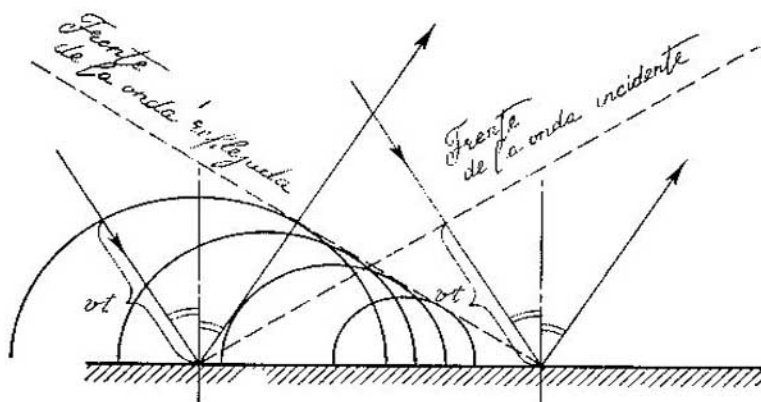


FIG. 60.

superficie límite. Al hacer esto hay que tener en cuenta que ondas esféricas independientes (llamadas elementales) interferirán entre sí. En la demostración de que esto es posible consiste el principio de Huygens completado por Fresnel.

¿Cuál es la importancia de este principio? Supongámonos que una onda incide sobre una pantalla opaca en la que hay varios orificios. Del principio de Huygens—Fresnel se deduce que es posible hallar el campo ondulatorio detrás de la pantalla sin conocer en absoluto las fuentes de los campos. Basta saber la intensidad del campo en el plano de la pantalla y admitir que desde cada punto de ésta se propaga una onda esférica. La amplitud de la onda en cualquier lugar del espacio se halla por la composición (interferencia) de todas las ondas elementales que parten de los orificios de la pantalla. Dejando por ahora el estudio de los problemas relacionados con el paso de las ondas a través de una pantalla (estos problemas ofrecen mayor interés cuando se trata de ondas luminosas),

nos detendremos en aplicar el principio de Huygens — Fresnel a la explicación de fenómenos de reflexión y refracción de las ondas.

Consideremos la zona de una onda plana que incide sobre el límite de separación de dos medios. Como sabemos, una onda, cualquiera que sea su origen, se refleja formando un ángulo igual al

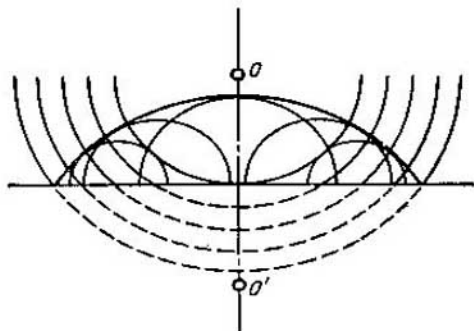


FIG. 61.

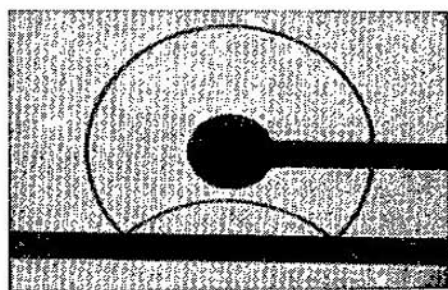


FIG. 62.

ángulo de incidencia. Pero, ¿por qué tiene que ser así? A esta pregunta da respuesta el principio de Huygens. Todos los puntos de un límite entre medios se pueden considerar como focos de ondas elementales. La primera onda elemental parte del punto a que llega antes la onda incidente. Después se irán excitando sucesivamente otros puntos de límite divisorio y, finalmente, el último a entrar en oscilación será el punto al cual llega la onda incidente después que a los demás. La fig. 60 representa las posiciones de las ondas elementales en el instante en que la onda incidente alcanza el último punto. Las ondas elementales generan un frente que forma con el límite divisorio un ángulo igual que el formado por la onda

incidente. En efecto, las velocidades de propagación de la onda incidente y de las ondas reflejadas son iguales, por consiguiente, el radio de la esfera mayor debe ser igual al camino recorrido por la onda incidente durante el tiempo transcurrido desde el instante en que se excitó el primer punto hasta el instante en que se excitó el último.

De un modo idéntico puede construirse sin dificultad el frente reflejado de una onda esférica. Esta construcción se da en la fig. 61. En la fig. 62 se reproduce la fotografía de la reflexión de una onda sonora en una pared.

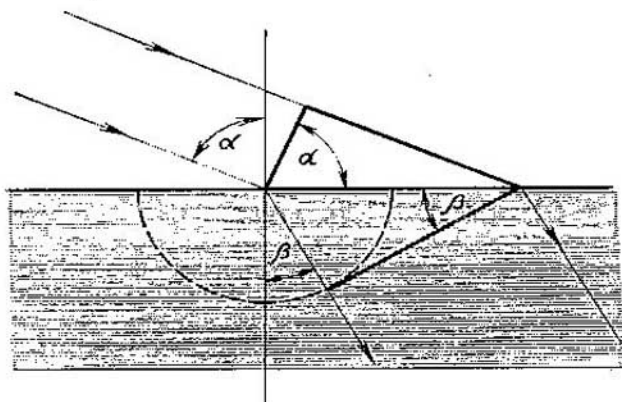


FIG. 63.

Consideremos ahora las ondas elementales que van desde el límite de separación hacia el segundo medio y que forman el frente de la onda refractada (fig. 63). Los medios distintos se diferencian por sus densidades (y por sus propiedades elásticas) y, por lo tanto, por las velocidades de propagación de las ondas en ellos. En el medio más denso la velocidad de la onda es menor. Hagamos una construcción análoga a la del caso de la reflexión, es decir, representemos en un dibujo el frente de las ondas elementales en el instante en que la onda incidente llega al último punto. El frente se desvía debido a la diferencia que existe entre las velocidades de propagación. Si la onda entra en un medio más denso, el radio de la onda elemental mayor debe ser menor que el camino recorrido por la onda incidente mayor desde el instante en que excitó al primer punto del límite divisorio hasta el instante en que excitó al último. En este caso la relación entre estas longitudes debe ser igual precisamente a la razón entre las velocidades de propagación de las ondas en ambos medios. Por otra parte, como puede verse en la fig. 63,

la relación entre las longitudes mencionadas es igual a la que existe entre los senos de los ángulos de incidencia y de refracción. De este modo llegamos a la conocida regla de la refracción de las ondas:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = \frac{c_1}{c_2}.$$

La dirección de propagación se acerca a la normal al límite divisorio, si la onda pasa de un medio menos denso a otro más denso, y al contrario, cuando pasa a un medio menos denso, la onda se aleja de la normal. La relación  $c_1/c_2 = n$  recibe el nombre de *coeficiente de refracción*.

### § 39. Coeficiente de reflexión

La explicación de la geometría de la reflexión y la refracción puede parecer un apéndice poco importante de la teoría. No obstante, la teoría ondulatoria permite hacer mucho más, a saber: resolver el problema de las fracciones correspondientes a las ondas reflejadas y refractadas en dependencia de las propiedades de los medios separados por el límite que examinamos. Nos limitaremos al caso más sencillo de la incidencia normal de una onda longitudinal sobre el límite de separación de dos medios. Con esto simplificaremos los cálculos. Pero el carácter de las demostraciones es el mismo para todos los casos imaginables.

El postulado que sigue es el punto de partida para los razonamientos de este tipo. En el límite entre los dos medios ni la velocidad de oscilación de las partículas  $u$ , ni la sobrepresión  $p$  pueden cambiar de repente. Por intuición está claro que no puede ser de otra forma. Haciendo un análisis riguroso se puede demostrar que este postulado se deduce de las leyes fundamentales de la física.

Por una parte del límite tenemos ondas cuyos valores instantáneos de velocidad son  $u_{inc}$  y  $u_{refl}$ , y por otro lado de dicho límite, una onda cuyo valor instantáneo de velocidad es  $u_{refr}$ . La continuidad de las velocidades da la condición:  $u_{inc} + u_{refl} = u_{refr}$ ; y la continuidad de las presiones:  $u_{inc}\rho_1c_1 + u_{refl}\rho_1c_1 = u_{refr}\rho_2c_2$ . Pero si prestamos atención a las dos ecuaciones escritas vemos que son *incompatibles*, puesto que  $\rho_1c_1 \neq \rho_2c_2$ . ¿Qué ocurre? Que nos hemos olvidado de que los valores instantáneos de las velocidades y las presiones son magnitudes vectoriales e incluso en el caso más simple, cuando los vectores elongación se encuentran en un mismo plano, las amplitudes pueden diferir por su signo. Volviendo a examinar las ecuaciones antes escritas, vemos que se hacen compatibles únicamente cuando se admite que los signos de la amplitud de las ondas reflejadas de velocidad de oscilación y

de presión son contrarios y se escriben las ecuaciones de continuidad de la forma

$$u_{\text{inc}} + u_{\text{refl}} = u_{\text{refr}}, \quad (u_{\text{inc}} - u_{\text{refl}}) \rho_1 c_1 = u_{\text{refr}} \rho_2 c_2,$$

o bien

$$u_{\text{inc}} - u_{\text{refl}} = u_{\text{refr}}, \quad (u_{\text{inc}} + u_{\text{refl}}) \rho_1 c_1 = u_{\text{refr}} \rho_2 c_2.$$

Damos al lector la posibilidad de comprobar que todas las demás combinaciones de signos no hacen compatibles las ecuaciones.

Como quiera que las amplitudes son magnitudes positivas, su suma deberá ser mayor que la diferencia. Por esto el primer par de ecuaciones será correcto si  $\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2$ , y el segundo par, en el caso contrario. El primer par de ecuaciones se plantea cuando todos los vectores amplitud de velocidad de oscilación están orientados hacia un mismo lado y la fase de la onda reflejada de presión difiere en  $180^\circ$ , es decir, la onda reflejada tiene el vector amplitud orientado en sentido contrario con respecto al de las ondas incidente y refractada. El segundo par corresponde al caso contrario.

$\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2$		$\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2$	
Onda de velocidades	Onda de presiones	Onda de velocidades	Onda de presiones
Incidente $\rightarrow$ Reflejada $\rightarrow$ Refractada $\rightarrow$	Incidente $\rightarrow$ Reflejada $\leftarrow$ Refractada $\rightarrow$	Incidente $\rightarrow$ Reflejada $\leftarrow$ Refractada $\rightarrow$	Incidente $\rightarrow$ Reflejada $\rightarrow$ Refractada $\rightarrow$

El interesante fenómeno del giro del vector amplitud en la reflexión se conoce con el nombre de pérdida de media onda o de salto de fase en  $180^\circ$ . En efecto, el cambio de signo en la ecuación de onda  $y = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$ , donde  $y$  es una magnitud física cualquiera, se puede obtener introduciendo en el argumento del coseno un desplazamiento de fase de  $180^\circ$ . Por otra parte, un desplazamiento de  $180^\circ$  equivale a un traslado de la distribución ondulatoria en una semionda.

Así, pues, en el límite entre los dos medios las ondas incidente y reflejada o se refuerzan entre sí al máximo o se debilitan al máximo.

Debemos recordar que para las ondas de velocidades de oscilación la pérdida de la semionda en la reflexión se produce cuando inciden en un medio con mayor resistencia (a veces se dice ine-



xactamente: en un medio de mayor densidad). La onda de elongación está ligada inseparablemente con la onda de velocidades de oscilación y sufre junto con ella la pérdida de semionda.

La onda que pasa al segundo medio no experimenta salto de fase.

De las ecuaciones escritas, resolviéndolas conjuntamente, hallamos el valor del coeficiente de reflexión  $r$ , es decir,  $u_{\text{refl}}/u_{\text{inc}}$ :

$$r = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}$$

( $r$  es siempre  $>0$ ); también hallamos el coeficiente de refracción  $g$ , o sea,  $u_{\text{refr}}/u_{\text{inc}}$ :

$$g = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

Para el aire y los cuerpos sólidos las resistencias ondulatorias difieren mucho. Para el primero, como ya dijimos,  $\rho c=41$ , mientras que para el acero ( $\rho=7,9 \text{ g/cm}^3$  y  $c=5000 \text{ m/s}$ )  $\rho c=40 \cdot 10^6$ , de donde  $r=0,99999$ . Esto significa que un sonido procedente del aire que incida sobre acero, se reflejará en la práctica totalmente y casi no penetrará en el segundo medio. Es fácil calcular que para el límite aire — agua  $r=0,9997$ .

#### § 40. Efecto Doppler

Hasta ahora hemos supuesto tácitamente que tanto el foco de ondas como el receptor de ellas (o sea, el observador) estaban en reposo con respecto al medio en el cual se propagaba la onda. Unos efectos peculiares, advertidos primeramente por Doppler (1842), se observan cuando el foco o el observador o, tanto más, ambos a la vez, se mueven con respecto al medio. Estos efectos consisten ante todo en que, cuando se mueve el foco de ondas, el observador mide la frecuencia de las oscilaciones  $\nu'$ , y cuando se mueve el observador, éste mide la frecuencia de las oscilaciones  $\nu''$ . Estas frecuencias se diferencian entre sí y también de la frecuencia  $\nu$  que se mide cuando tanto el observador como el foco están en reposo.

Al estudiar el efecto Doppler hay que prestar atención ante todo al hecho de que la onda que parte de la fuente se propaga con independencia absoluta del movimiento del foco y del observador. Por esto, al moverse con respecto al medio, el foco o el observador pueden acercarse o alejarse de la onda que avanza.

¿Por qué pueden estos movimientos ocasionar medidas de la frecuencia distintas de su valor «verdadero»? Porque el observador determina la frecuencia de las oscilaciones como el número de ondas

que llegan a su instrumento de medida en la unidad de tiempo, mientras que por la fórmula  $v=c/\lambda$  este número es el de longitudes de onda que caben en el camino recorrido en la unidad de tiempo. Si el observador se mueve hacia el foco con la velocidad  $u$ , durante 1 s registrará no la llegada de  $v$  ondas, sino de un número mayor de ellas, número que será tantas veces mayor como la velocidad relativa de la onda y del observador,  $c+u$ , sea mayor que  $u$ . De este modo,

$$\frac{v'}{v} = \frac{c+u}{c}, \quad v' = v \left( 1 + \frac{u}{c} \right).$$

Si el foco se mueve hacia el receptor, el observador percibirá un número de ondas mayor que en el caso en que el foco y el receptor están en reposo. Pero aquí la causa es otra.

A primera vista esto no es evidente. Pero es el caso, que el movimiento del foco, permaneciendo invariable la frecuencia de las oscilaciones, ocasiona una variación de la distancia entre los puntos cósmicos de la onda. Si el primer caso se puede interpretar, aproximadamente, como el movimiento de un observador al encuentro de una columna de deportistas que corren a la misma velocidad con intervalos constantes  $\lambda$  entre sí, está claro que en el segundo caso el esquema de razonamiento debe ser otro. Ahora se puede decir que la línea de salida (start) se desplaza lentamente (los corredores saltan, a intervalos iguales de tiempo, de un automóvil que se desplaza a lo largo de la ruta), lo que hace que varíe la distancia entre ellos. En vez de  $\lambda'$  será  $\lambda''$ . Si la línea de salida (foco) se desplaza en dirección al observador y durante 1 s se dejan salir  $v$  deportistas, éstos, durante 1 s, se distribuirán en un trazo de camino  $c-u$ . De este modo, el intervalo entre los deportistas (longitud de onda)  $\lambda''=(c-u)/v$ . La frecuencia con que los deportistas, cuya velocidad es  $c$ , cruzan la línea de la meta (frecuencia de las oscilaciones percibidas por el observador) será

$$v'' = \frac{c}{\lambda''}, \quad v'' = v \frac{1}{1-u/c}.$$

Las dos fórmulas obtenidas sirven también si el foco o el observador se alejan el uno del otro; en estos casos hay que cambiar el signo de la velocidad  $u$ .

Hemos demostrado, pues, que cuando el foco y el observador se acercan, aumenta la frecuencia de las oscilaciones, emitidas por el foco, que se mide. Cuando se alejan, la frecuencia disminuye.

Un buen ejemplo del efecto Doppler referido a las ondas sonoras lo ofrece la percepción del pitido de una locomotora que se acerca y que se aleja. Cuando se acerca la locomotora oímos un sonido de frecuencia más alta que la verdadera. La altura del tono

cambia de repente cuando la locomotora pasa junto al observador. La locomotora se aleja. Ahora oímos un sonido cuya frecuencia es más baja que la verdadera. Si la locomotora lleva una velocidad de 70 km/h, la magnitud del salto de frecuencia constituye, aproximadamente, un 12% de la frecuencia verdadera.

## 7

### ONDAS ESTACIONARIAS

#### § 41. Superposición de dos ondas que se propagan en sentidos opuestos

Supongamos que dos ondas planas de características completamente iguales van al encuentro una de la otra. Nos interesa conocer el movimiento oscilatorio que se produce en el medio en que se propagan estas ondas.

Como se indicó con anterioridad, la diferencia en las direcciones de propagación se tiene en cuenta poniendo los signos distintos a las coordenadas en la ecuación de onda. Por consiguiente, la figura resultante del desplazamiento debe venir dada por la expresión

$$\begin{aligned} y &= A \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + A \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) = \\ &= 2A \cos \frac{\omega x}{c} \cos \omega t = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t. \end{aligned}$$

El resultado del cálculo es muy interesante. La suma de las dos ondas viajeras no da un movimiento ondulatorio. La fórmula obtenida pone de manifiesto la existencia de oscilaciones de amplitud  $2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$  distinta en diferentes lugares del espacio. Este estado oscilatorio singular del medio, producido por dos ondas viajeras iguales que se mueven en sentidos opuestos, recibe el nombre de *onda estacionaria*. Subrayamos una vez más que la onda estacionaria no es una onda. Una onda viajera transporta energía: en la onda estacionaria no existe transmisión alguna de energía de un punto a otro. Una onda viajera puede moverse hacia la derecha o hacia la izquierda; la onda estacionaria carece de sentido de propagación. Esta denominación sirve, pues, para caracterizar un estado oscilatorio del medio.

¿En qué consiste la peculiaridad de este estado oscilatorio? En primer lugar vemos que no todos los puntos del medio oscilan.

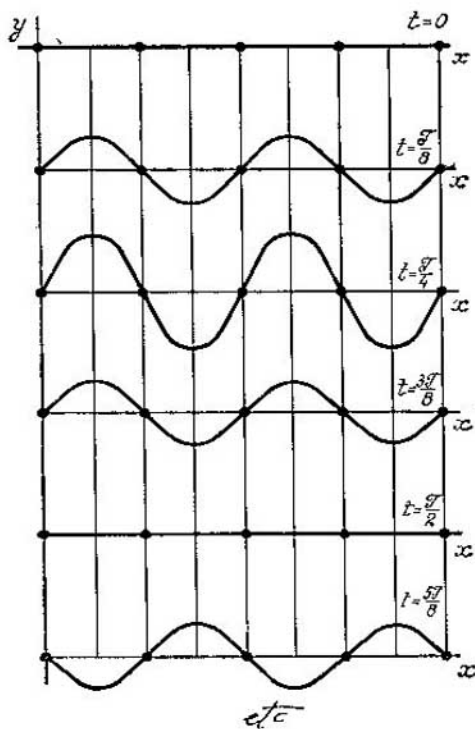


FIG. 64.

En los lugares del espacio que satisfacen la condición  $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$ , la amplitud de la oscilación es nula. Estos puntos se llaman *nodos* de la onda estacionaria. La distancia entre dos nodos vecinos, a lo largo del eje  $x$  que siguen las ondas viajeras, es igual a la mitad de la longitud de onda. Entre cada dos nodos se encuentran puntos que oscilan con la máxima amplitud, igual a  $2A$ . Estos puntos se llaman *vientres* de la onda estacionaria.

La fig. 64 representa el estado oscilatorio correspondiente a una onda estacionaria en varios instantes consecutivos. Vemos que la denominación está plenamente justificada. En cada instante se ve una onda. Esta onda permanece en su sitio. Si se hacen fotografías instantáneas, una a continuación de otra, veremos que los puntos de intersección de la onda con el eje de abscisas —nodos— permanecen en un mismo sitio. La onda no se mueve. Las variaciones que se noten en las fotografías instantáneas consistirán en cam-

bios de magnitud de la elongación. Llega un instante en que todos los puntos del medio están quietos. Una vez pasado este instante, los puntos que se desviaron hacia arriba irán hacia abajo, y viceversa. Está claro que la figura dibujada no tiene nada de común con una onda viajera, de la que dos «fotografías instantáneas» consecutivas darán la impresión que reproducimos antes en la fig. 57. Allí la onda se mueve, y los máximos y mínimos de la onda pasan a ocupar un sitio nuevo en cada instante.

Hemos dicho que en la onda estacionaria no existe transmisión de energía. ¿Cómo describir, entonces, en términos de energía, los procesos que ocurren en este singular movimiento oscilatorio? Es evidente que la energía de una onda estacionaria (es decir, de cualquier región en la cual existe dicha onda) es una magnitud constante.

En el instante en que todos los puntos pasan por la posición de equilibrio, toda la energía de los puntos que toman parte en la oscilación es cinética. Por el contrario, en la posición de elongación máxima, la energía de todos los puntos es potencial.

La onda estacionaria es un proceso ondulatorio de gran importancia: diversas formas de ondas estacionarias se producen en los cuerpos de dimensiones limitadas por los cuales se propagan ondas elásticas. En el caso, que las ondas elásticas se reflejan en el límite del cuerpo con el medio y retornan al cuerpo. En el cuerpo limitado se origina entonces un estado oscilatorio complejo, debido a que a la onda inicial se superponen todas las demás ondas, que se reflejaron en las paredes y retornaron al medio constituido por el cuerpo. Ahora examinaremos una serie de casos típicos.

#### § 42. *Oscilaciones propias de las varillas*

Por medio de un golpe o por otro procedimiento, en toda varilla sólida se puede excitar una onda elástica longitudinal que se propague a lo largo de su longitud. Esta onda se refleja en el extremo opuesto de la varilla y, de este modo, toda la varilla entra en un estado oscilatorio que se representa por una onda estacionaria. Este estado oscilatorio será libre, puesto que se debe a un impulso de breve duración y después continúa sin actuación de fuerzas externas. Una serie de datos sobre el carácter de estas oscilaciones libres se puede obtener suponiendo conocida la longitud de la varilla e indicando cómo está sujeta. La longitud de la varilla y el modo de sujeción nos dan las llamadas condiciones de frontera. Estas condiciones se reducen a lo siguiente: en el sitio sujeto de la varilla existe un nodo de onda estacionaria y en el extremo libre de aquélla se origina un vientre.

Consideremos varios procedimientos de excitación de oscilaciones libres longitudinales en una varilla de longitud  $L$ .

**VARILLA SUJETA POR SUS DOS EXTREMOS.** En este caso en los extremos de la varilla deben formarse nodos de onda de desplazamientos. Como la distancia entre los nodos es igual a la mitad de la longitud de onda, las posibles longitudes de onda estarán ligadas con la longitud de la varilla por la condición  $L = n \frac{\lambda}{2}$ ,

es decir,  $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ , donde  $n$  es cualquier número entero.

Utilizando para la velocidad de la onda elástica la expresión  $c = \sqrt{E/\rho}$  y recordando la relación que existe entre la frecuencia y la longitud de onda, obtenemos la expresión de las frecuencias propias de las oscilaciones longitudinales libres de la varilla

$$v_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Ante todo es necesario subrayar un resultado esencialmente nuevo para nosotros. Un cuerpo continuo tiene, no una, sino muchas frecuencias propias (características) de oscilación. De acuerdo con esto, las posibles oscilaciones libres de la varilla son diversas. La varilla puede también realizar oscilaciones inarmónicas de cualquier espectro\*<sup>1</sup> constituidas por las frecuencias  $v_n$ .

La frecuencia  $v_1$  es la fundamental de la varilla. A ella corresponde el movimiento oscilatorio determinado por la condición  $L = \lambda/2$ . Esto quiere decir que, con la oscilación fundamental, el centro de la varilla se encuentra en el vientre de una onda estacionaria y entre los extremos de aquella no hay nodos. A la onda en segundo sobretono (segunda armónica) le corresponde la condición  $L = \lambda$ . En este caso en el centro de la varilla hay un nodo. Si está excitada la tercera armónica, entre los extremos de la varilla habrá dos nodos y así sucesivamente.

*Ejemplo.* Para una varilla de hierro ( $\rho = 7700 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 20,6 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ) de 7 m de longitud, la frecuencia  $v_1 = 365 \text{ Hz}$ .

**VARILLA CON AMBOS EXTREMOS LIBRES.** Si la varilla se cuelga de unos hilos y después se excitan en ella oscilaciones, la onda estacionaria que se produce debe satisfacer la condición siguiente: en ambos extremos de la varilla existirán vientres. Lo mismo que en el caso anterior, entre la longitud de la varilla y las

\*<sup>1</sup> La palabra «espectro» se usa con bastante frecuencia en física cuando se trata de un conjunto de partículas que tienen distintas velocidades, masas, etc., de un conjunto de ondas de distintas longitudes (frecuencias), etc.

longitudes de las ondas aparecerá la relación  $L = n \frac{\lambda}{2}$ . Por consiguiente, la fórmula de las frecuencias propias será la misma.

La diferencia con el caso anterior consiste en la distribución de los nodos y vientres. En la oscilación fundamental el centro de la varilla estará en reposo (nodo). Si se excita la segunda armónica, en el centro de la varilla habrá un vientre, a un cuarto de onda de él habrá nudos y en los extremos, vientres.

**VARILLA SUJETA POR UN EXTREMO.** En este caso en uno de los extremos habrá un nodo (en el sujeto) y en el otro, un vientre. Cuando la varilla oscile con la frecuencia fundamental, tendrá la forma correspondiente a un cuarto de período de senoide. Como la distancia entre el nodo y el vientre es igual a  $\lambda/4$ , la relación entre las longitudes de las ondas y la longitud de la varilla vendrá dada por la condición

$$L = n \frac{\lambda}{4}, \text{ donde } n = 1, 3, 5, \dots$$

Las frecuencias propias de las oscilaciones de esta varilla se expresan por la fórmula

$$v_n = \frac{n}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

Si en los dos primeros casos las frecuencias se relacionaban entre sí como números enteros, ahora la relación entre ellas se da por la de los números impares.

Una varilla sujeta por su centro tendrá en este sitio un nodo y en los extremos, unos vientres. Este problema no difiere en nada del que acabamos de considerar.

Las condiciones de frontera que utilizamos al estudiar el estado oscilatorio de las varillas son el caso límite de condiciones de frontera de reflexión de las ondas que se expusieron en la pág. 133. Como se explicó antes, al reflejarse en el límite que separa el medio (en que se propaga la onda) de otro medio con mayor resistencia, se produce la reflexión de la onda de elongación con pérdida de media onda. Si la varilla está sujeta, la onda no penetra en absoluto en el segundo medio. En este caso se puede decir que la resistencia del segundo medio es infinita. El coeficiente de reflexión se hace igual a la unidad y la reflexión se produce con pérdida de una semionda. No es difícil comprender que esto corresponde a la existencia de un nodo en la frontera entre los dos medios. La reflexión de la onda en el extremo no sujeto de una varilla corresponde al caso de la reflexión de un medio de resistencia nula. La igualdad a 1 del coeficiente de reflexión y la ausencia de pérdida de semionda conduce a la necesidad de que exista un vientre en dicha frontera.

También se pueden excitar ondas propias longitudinales en columnas de líquido o de gas.

Oscilaciones propias transversales se pueden excitar fácilmente en una cuerda sujeta y tensada. La distribución de los nodos y vientres está claro que será la misma, en este caso, que para una varilla sujeta por los dos extremos. El conjunto de frecuencias viene expresado por una fórmula análoga a la dada para la varilla, con la única diferencia de que en la expresión de la velocidad de la onda transversal en la cuerda hay que sustituir  $E$  por la tensión de la cuerda, es decir, por el cociente de dividir la fuerza que tensa la cuerda por la sección transversal de ésta.

### § 43. *Oscilaciones propias de los sistemas bidimensionales y tridimensionales*

En las varillas, cuerdas, columnas de aire, etc., las superficies de igual fase son planos paralelos. El estado oscilatorio nos lo podemos figurar como resultado de la superposición de ondas planas que se propagan a lo largo de una línea. Pero son posibles casos más complicados, como aquellos en que el movimiento oscilatorio abarca un campo bidimensional (una lámina o membrana) o un cuerpo cuyas tres dimensiones tienen igual orden de magnitud.

Con los problemas de dos dimensiones nos encontramos al considerar las oscilaciones de diafragmas elásticos y rígidos. Oscilaciones de diversos tipos se producen si, en un caso, se sujeta una lámina por los bordes y, en otro, si se sujeta en un punto o incluso no se sujeta por ninguna parte. Además de las oscilaciones de láminas rígidas se observan oscilaciones de películas no rígidas tensadas, de goma, de jabón, etc.

Las leyes generales de las oscilaciones libres, en este caso, no se diferencian en esencia de las que hemos estudiado. En virtud del carácter bidimensional del problema, los nudos y los vientres deben caracterizarse ahora por líneas curvas. Por ejemplo, una lámina circular sujeta por los bordes efectuará la oscilación fundamental teniendo un vientre único en el centro del círculo. El punto central oscilará con la amplitud máxima, decreciendo luego esta amplitud hacia los bordes sujetos (es decir, hacia el círculo nodal) conservando la simetría circular. Este es el aspecto de la oscilación más simple de la frecuencia fundamental (más baja). La membrana se puede excitar también en armónicos más altos, en este caso su superficie se divide en sectores por las líneas nodales. Resulta que, en las láminas circulares, las líneas nodales pueden tener forma de círculos o de diámetros.



Un experimento sencillo y llamativo es la demostración de las líneas nodales por el procedimiento de Chladni (llamado así en honor al científico alemán que lo propuso). En una lámina se echa arena y después, dándole un golpecito o frotando el borde con un arco de violín, se la hace entrar en un estado de oscilación. La arena se desliza de los vientres y se concentra en las líneas nodales. En la fig. 65 se dan varios ejemplos de figuras de Chladni.

Como es natural, el estado de oscilación más complejo es el de un cuerpo continuo tridimensional. No vamos a estudiar este fenómeno en cuerpos de forma compleja, sino que nos limitaremos a considerar las oscilaciones propias de un paralelepípedo rectangu-

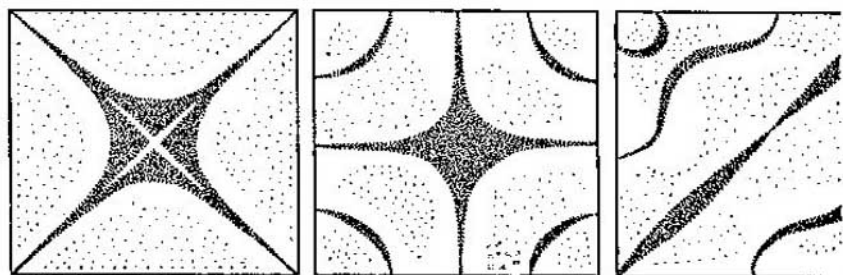


FIG. 65.

lar. Si en este cuerpo existieran únicamente ondas estacionarias debidas a la composición de las ondas que marchan paralelamente a las aristas del paralelepípedo, las frecuencias propias de las oscilaciones se limitarían a los valores

$$\frac{n_1 c}{2l_1}, \frac{n_2 c}{2l_2}, \frac{n_3 c}{2l_3},$$

y los números de onda (así se llaman las magnitudes recíprocas de la longitud de onda) serán

$$k_1 = \frac{n_1}{2l_1}, \quad k_2 = \frac{n_2}{2l_2}, \quad k_3 = \frac{n_3}{2l_3},$$

donde  $n_1, n_2, n_3$  son unos números cualesquiera y  $l_1, l_2, l_3$  son las longitudes de las aristas del paralelepípedo.

Pero en el cuerpo pueden propagarse ondas en una dirección que forme un ángulo arbitrario con las caras. En este caso se producirán ondas estacionarias si, después de una serie de reflexiones, el rayo vuelve al punto de donde partió. El número de onda de este rayo debe calcularse, partiendo de  $k_1, k_2, k_3$ , según la regla de

composición de vectores. Por lo tanto

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}, \text{ es decir, } v = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} + \frac{n_3^2}{l_3^2}}.$$

Es claro que, en los casos más simples de propagación de las ondas paralelamente a las aristas del cuerpo, la frecuencia de las oscilaciones se puede obtener también por esta fórmula suponiendo distinto de cero uno solo de los tres números enteros que figuran en ella.

El espectro de las oscilaciones de un cuerpo tridimensional se representa en un espacio tridimensional (fig. 66), que puede llamarse espacio de frecuencias o espacio recíproco. Si las magnitudes

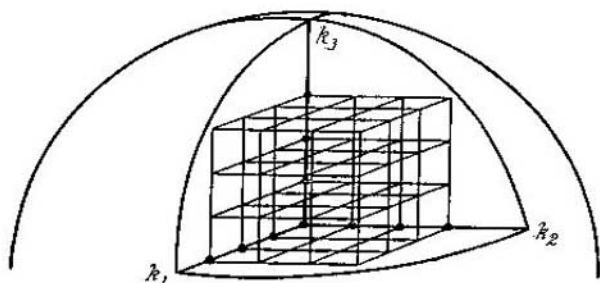


FIG. 66.

$\frac{c}{2l_1}, \frac{c}{2l_2}, \frac{c}{2l_3}$  se toman respectivamente sobre tres ejes, se obtiene una red (red recíproca), cada uno de cuyos nodos representará una de las frecuencias propias de oscilación del cuerpo con los números  $n_1, n_2, n_3$ . El radio vector del espacio recíproco trazado a un nodo de la red será igual a una posible frecuencia de oscilación. Si se traza una esfera de radio  $v$ , en ella estarán comprendidos todos los puntos que representan las frecuencias menores que  $v$ . El volumen de esta esfera será igual a  $4/3 \pi v^3$ , y el volumen de cada celda de la red recíproca será igual a  $(c/2)^3/v$ , donde  $v$  es el volumen del cuerpo. Por consiguiente, el número de oscilaciones propias del cuerpo con frecuencias menores que  $v$  (el número de nodos en un octante de la esfera) viene expresado por la fórmula

$$\frac{4}{3} \pi v \cdot \frac{v^3}{c^3}.$$

Esta interesante ley demuestra que el número de frecuencias propias aumenta bruscamente si se empieza a aumentar el intervalo de frecuencias a considerar. Cuando las frecuencias son grandes, el carácter discreto del espectro comienza a difuminarse, las frecuencias se hacen muy próximas entre sí.

§ 44. *Oscilaciones forzadas de varillas  
y láminas*

Si las oscilaciones de una varilla, lámina u otro cuerpo tienen lugar no en el vacío, sino en un medio cualquiera <sup>\*)</sup>, líquido o gaseoso, cierta parte de la intensidad, dependiente, como ya sabemos, de la relación entre las resistencias ondulatorias de los medios en contacto, pasa del cuerpo oscilante al medio. Esta idea se puede expresar de una forma más concreta: el cuerpo oscilante irradia energía. Debido a la radiación, las oscilaciones libres de una varilla, de una cuerda, etc., se amortiguan rápidamente. Si hace falta que un cuerpo de este tipo sea fuente constante de radiación, las oscilaciones hay que excitarlas con un foco exterior. Lo mismo que en el caso de las oscilaciones de un punto, el suministro de energía puede efectuarse tanto por el esquema de autooscilaciones como por la creación de oscilaciones forzadas.

En dependencia del procedimiento y del sitio a que se hace llegar la energía exterior, se puede excitar, en general, cualquiera de las frecuencias o cualquier combinación de frecuencias propias con que es capaz de oscilar el cuerpo. Por ejemplo, se pueden crear oscilaciones forzadas, en una cuerda tensada, del modo siguiente. Junto a una cuerda de acero se sujeta un electroimán alimentado por la corriente sinusoidal procedente de un generador de ondas acústicas. Las oscilaciones de la cuerda debidas a la acción de la fuerza exterior variable periódicamente se notarán únicamente en el caso de la resonancia. Cambiando la tensión de la cuerda y variando la frecuencia externa se puede demostrar la oscilación de aquella con la frecuencia fundamental, así como con sobretonos más altos.

Tiene una importancia práctica enorme la creación de oscilaciones forzadas (ondas estacionarias) en láminas piezoeléctricas y varillas ferromagnéticas. Estos cuerpos oscilantes son focos de ondas ultrasonoras.

Los cuerpos ferromagnéticos tienen la propiedad de alargarse y acortarse por la acción de un campo magnético. La teoría de este fenómeno es complicada y nosotros, tanto ahora como más adelante, diremos poco de ella. Por ahora nos bastará saber cómo varía la longitud de una varilla ferromagnética en función de la intensidad del campo. A esta pregunta da respuesta la fig. 67, de la cual se deduce que el níquel y el cobalto recocido se acortan en campos de cualquier intensidad, el cobalto fundido se acorta en los campos débiles y se alarga en los intensos y, finalmente, el hierro se alarga en los campos débiles y se acorta en los intensos. De cualquier

<sup>\*)</sup> Hay que conformarse con el hecho de que acerca de las oscilaciones de un cuerpo se puede hablar en dos sentidos: en el de oscilaciones del cuerpo como un todo, y en el de las oscilaciones de unas partes del cuerpo con respecto a otras.

modo, cualquier varilla ferromagnética será capaz de efectuar oscilaciones forzadas al introducirse en un campo magnético alternativo. Con este fin, la varilla se coloca, de ordinario, en el orificio del núcleo de un transformador por el que pasa corriente alterna. Para que la onda estacionaria sea suficientemente intensa en la varilla, hay que trabajar en condiciones de resonancia: la frecuencia de la corriente alterna debe coincidir con la frecuencia propia de oscilación de la varilla.

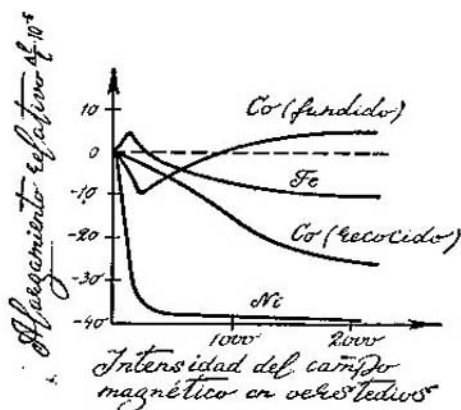


FIG. 67.

Como la varilla se sujeta por su centro, la frecuencia propia de las oscilaciones

$$v = \frac{n}{2l} c,$$

pudiendo oscilar la varilla únicamente en los armónicos impares. La frecuencia fundamental para el níquel, si se sustituyen los valores de las constantes físicas, resulta ser

$$v = \frac{237}{l} \text{ kHz (} l \text{ en centímetros).}$$

Por ejemplo, una varilla de 40 cm de longitud oscilará con la frecuencia fundamental de 6 kHz.

La fuente más difundida de oscilaciones ultrasonoras es el piezocuarzo.

## § 45. Oscilaciones de los piezoeléctricos

Como se dirá más adelante (§ 262), todos los cristales que, entre sus elementos de simetría, no cuentan con un centro, pueden poseer efecto piezoeléctrico. Este fenómeno consiste en la variación de las dimensiones del cristal por la acción de un campo eléctrico y, viceversa, en la aparición de un campo eléctrico en el cristal si éste se somete a la acción de unas fuerzas. Cuando utilizamos un piezoeléctrico como foco de oscilaciones, es natural que nos interese el primer fenómeno, llamado también *electrostricción* o *efecto piezoeléctrico inverso*. Como piezoeléctricos se usan el cuarzo, la sal de la Rochela o de Seignette, el titanato de bario, el dihidrofosfato de amonio y otros cristales. En general, existen centenares de sustancias conocidas que podrían ser utilizadas para este mismo fin. Pero las condiciones adicionales que se imponen (resistencia mecánica y a la humedad y otras) y, como es natural, el deseo de elegir los cristales que producen un efecto más intenso, limitan la lista práctica de estas sustancias.

Un cristal situado en un campo eléctrico experimenta cambios de dimensiones distintos en diferentes direcciones (con respecto a sus ejes de simetría). Por esto, cortando del cristal varillas o láminas orientadas de formas diversas con respecto a los ejes de simetría y colocándolas entre las armaduras de un condensador, obtendremos deformaciones de tipos diversos. Lo más frecuente es que la lámina de cuarzo o de otro piezoeléctrico se corte de tal modo que al someterla a la acción del campo eléctrico se produzcan en ella desplazamientos longitudinales. En este caso, por la acción de un campo eléctrico alternativo en esta lámina se producirán ondas estacionarias longitudinales forzadas (mantenidas).

Si  $l$  es el espesor de la lámina en la dirección del movimiento de la onda, las frecuencias propias de oscilación se representan, como de ordinario, por la fórmula  $v = nc/2l$ . Para el cuarzo, con esta orientación tan simple, la velocidad de las ondas elásticas es igual a 5400 m/s. Por lo tanto, la frecuencia propia fundamental de oscilación de esta lámina de cuarzo se hallará por la fórmula

$$v = \frac{2700}{l} \text{ kHz (} l \text{ en centímetros)}$$

(la experiencia de un valor algo distinto:  $2880/l$  kHz).

Las amplitudes de las oscilaciones dependen de la magnitud del campo que se aplica. Entre la magnitud de la elongación y la intensidad del campo eléctrico existe una dependencia lineal. Generalmente se utilizan campos bastante intensos. El cuarzo es un magnífico aislador, por esto, cuando los espesores llegan hasta

un centímetro, se utilizan campos eléctricos del orden de 30 000 V/cm.

Lo principal para obtener una señal ultrasonora fuerte es el efecto de resonancia. La elongación debida a la acción de un campo estático es millares de veces menor que las de resonancia, y hay que tener presente que la energía de oscilación es proporcional al cuadrado de la elongación.

Elevando la frecuencia del generador se puede excitar la lámina en todos sus sobretonos. Las frecuencias de los generadores ultrasonoros industriales más difundidos se hallan entre los límites de centenares y millares de kilohertzios.

## 8

### PROBLEMAS DE ACÚSTICA

#### § 46. Características objetiva y subjetiva del sonido

Los órganos auditivos del hombre son capaces de valuar la intensidad de un sonido, su altura o tono y su timbre. Investigando diversos sonidos con ayuda de un oscilógrafo eléctrico se pueden comparar detalladamente las valoraciones, objetiva y subjetiva, de un sonido.

Como el sonido es el resultado de un proceso oscilatorio que tiene lugar en el aire, se puede describir de un modo completo por medio de la gráfica de variación de la amplitud (de elongación, de velocidad de oscilación o de presión, esto es bastante indiferente) con el tiempo. Esta gráfica da la posibilidad de saber si el proceso es periódico y, si lo es, de determinar el tono fundamental de la oscilación. Estudiando la forma de la curva de la oscilación periódica se puede establecer también qué sobretonos hay en ella y cuáles son sus amplitudes. En otros términos y expresándonos con más amplitud, la gráfica de la dependencia de la oscilación respecto del tiempo permite siempre hallar el espectro de dicha oscilación, es decir, conocer qué frecuencias que hay en ella y con qué amplitudes están representadas en el espectro. Esta gráfica se obtiene valiéndose de un micrófono conectado a un oscilógrafo. En las instalaciones más modernas la gráfica de la oscilación se transforma automáticamente en su espectro.

La fig. 68 reproduce el esquema simplificado de un analizador de este tipo. La señal acústica de entrada, transformada por el micrófono en eléctrica, se amplifica por medio del preamplificador

$PA$  y va a parar a un dispositivo constituido por un gran número de filtros  $F1 \div F27$ , cada uno de los cuales deja pasar una determinada franja de frecuencias, por ejemplo,  $1/3$  de octava (36—48, 48—60, 60—72 Hz y así sucesivamente).

De los filtros se puede decir que descomponen la señal en un espectro y de tal forma que el poder resolutivo es tanto mayor cuanto menor es el intervalo de frecuencias del filtro. La parte del espectro separada por el filtro se conduce a los contactos del conmutador  $K_1$ , y después, pasando por el amplificador  $A$  y el detector (rectificador), se dirige a las placas del oscilógrafo que desvían el

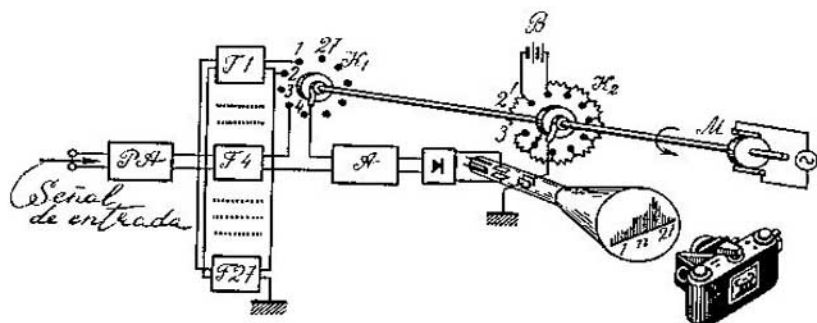


FIG. 68.

rayo electrónico en sentido vertical. Si al segundo par de placas del oscilógrafo no se le diera tensión, al conectar cada uno de los filtros el rayo electrónico se desviaría una altura proporcional a la amplitud correspondiente a la componente frecuencial del espectro. Pero esto puede hacerse mucho mejor conectando, por medio de un segundo par de placas, la exploración horizontal del rayo electrónico, de manera que la rotación automática del conmutador  $K_1$  esté ligada unívocamente con la rotación del conmutador  $K_2$  que manda la exploración y que se pone en movimiento por medio del motor  $M$ . De este modo se puede conseguir que las amplitudes de las componentes que dejan pasar los distintos filtros se marquen con desviaciones horizontales diferentes, pero completamente determinadas, del rayo electrónico, dadas por la batería  $B$ .

En este caso en la pantalla del oscilógrafo aparece el espectro.

Los espectros de rayas aparecen cuando las oscilaciones son periódicas, y los continuos, cuando las oscilaciones carecen de período. A las primeras pertenecen los sonidos musicales, a las segundas, ruidos de tipos diversos.

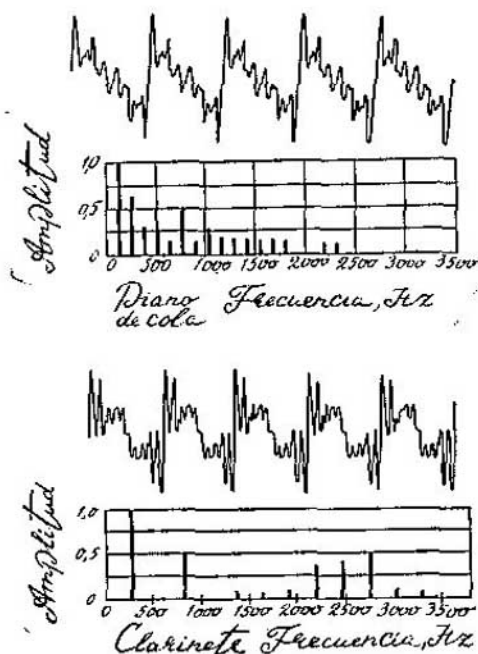


FIG. 69.

Un mismo tono musical producido por distintos instrumentos tendrá la misma frecuencia fundamental, pero espectro distinto. El matiz del timbre de un sonido viene determinado por la distribución de las intensidades de los sobretonos (véase, por ejemplo, la fig. 69). Cuanto más complejo es el espectro, más rico es el timbre del sonido en el sentido musical. Es interesante el hecho de que los desplazamientos de fase de los sobretonos (véase de nuevo la fórmula de la pág. 111) no influyen en la percepción subjetiva del sonido. El oído distingue solamente la intensidad de los sobretonos.

El análisis de los ruidos tiene importancia práctica. Si se conocen las frecuencias, sobre todo las que intervienen mucho en el ruido, esto simplifica la determinación de las causas de éste y, por lo tanto, su eliminación.

#### § 47. Intensidad y nivel de intensidad sonora

En la fig. 70 las curvas de trazo grueso limitan la región de oscilaciones que percibe el oído de una persona normal (media). Sobre el eje de ordenadas se han tomado dos magnitudes relaciona-



das uniformemente: la amplitud de la presión sonora y la intensidad del sonido. La presión sonora  $p$  y la intensidad del sonido  $I$  están ligadas, en el caso más simple, por la fórmula

$$I = \frac{p^2}{2\rho c}.$$

Efectivamente, la intensidad de una onda

$$I = \omega c,$$

donde  $\omega$  es la densidad de la energía, es decir,  $\omega = \rho u^2/2$ . Pero (véase la pág. 122)  $u = p/\rho c$ . Haciendo la sustitución, obtenemos la fórmula antes escrita. La intensidad del sonido se puede medir en  $W/cm^2$ .

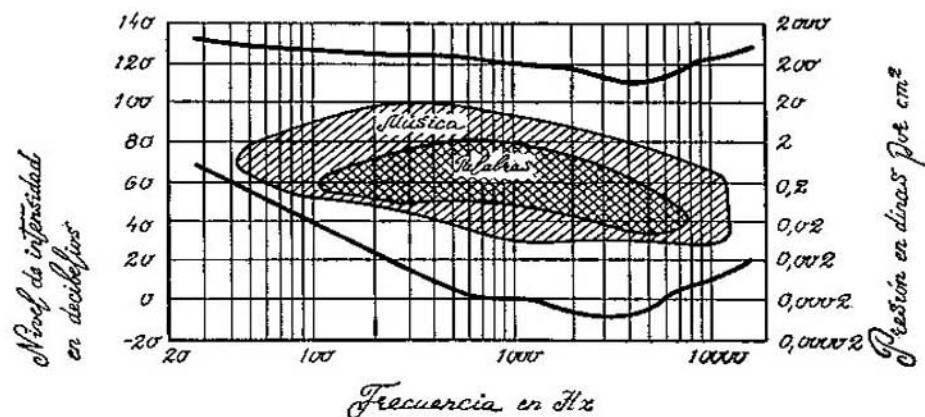


FIG. 70.

Para el aire  $\rho c = 41$ . Los sonidos más intensos, que provocan la sensación de dolor, se generan por presiones del orden de 2000 bar, los muy débiles, pero que aún percibe una persona media, tienen la presión de  $2 \cdot 10^{-4}$  bar (1 bar = 1 din/cm<sup>2</sup>). Para las intensidades límites del sonido obtenemos las cifras desde  $0,5 \cdot 10^5$  erg/s · cm<sup>2</sup> =  $0,5 \cdot 10^{-2}$  W/cm<sup>2</sup> hasta  $0,5 \cdot 10^{-16}$  W/cm<sup>2</sup>.

Una gama tan grande de intensidades hace que sea conveniente la introducción de la escala logarítmica. Si la intensidad de un sonido es  $I_1$ , y la de otro  $I_2$ , se dice que  $I_2$  es  $K$  decibelios más intenso que  $I_1$  si

$$K = 10 \lg \frac{I_2}{I_1}.$$

La magnitud  $K$  se llama *nivel de intensidad* del sonido. De este modo, si la intensidad de un sonido es un millón de veces mayor que la de otro, por el nivel de intensidad diferirán en 60 decibelios.

Cuando la intensidad de un sonido se valúa en decibelios hay que indicar qué nivel se toma como nulo. Generalmente se toma una magnitud próxima al umbral de audición ( $10^{-16}$  W/cm<sup>2</sup>), en este caso un susurro tendrá una intensidad del orden de 15 dB, y el ruido de un avión será del orden de 120 dB.

Volviendo de nuevo al diagrama de las percepciones auditivas, señalaremos que la región de los sonidos emitidos al hablar está comprendida dentro de un marco más estrecho, tanto por las frecuencias (de 100 a 10 000 Hz) como por las intensidades (de 40 a 80 dB). Sonidos de distinta frecuencia tienen diferente audibilidad. Los sonidos que mejor percibe el oído son los de frecuencia de varios miles de hertzios. Por debajo de 20 Hz se encuentra la región de los infrasonidos, y por encima de 10 000—20 000 Hz, la región del ultrasonido.

A continuación damos los valores aproximados de la presión sonora  $p$ , de la intensidad  $I$  y del nivel de intensidad del sonido  $K$ :

	$p$ , en bar	$I$ , en W/cm <sup>2</sup>	$K$ , en dB
Umbral de audición . . . . .	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$10^{-16}$	0
Goteo . . . . .	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$10^{-14}$	20
Conversación en voz baja a 5 m de distancia . . . . .	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$10^{-12}$	40
Orquesta sinfónica (fortísimo) . . . . .	2,9	$10^{-8}$	80
Motor de aviación a 5 m de distancia . . . . .	290	$10^{-4}$	120

#### § 48. Acústica arquitectónica

En algunos locales un discurso se percibe ininteligiblemente, aunque con intensidad, mientras que en otras salas el orador tiene que elevar la voz para ser oído. Tiene interés hallar las constantes físicas de un local que caracterizan sus propiedades acústicas.

La experiencia demuestra que uno de los factores más importantes de este tipo es el llamado *tiempo de reverberación*, que es el tiempo durante el cual el sonido emitido se debilita un millón de veces respecto de su intensidad inicial. Desde el punto de vista acústico, los mejores locales son aquellos en que el tiempo de reverberación  $\tau$  es de 0,5—1,5 s. Si  $\tau$  es menor que 3 s, se considera que el local es bueno. En cambio, si el tiempo de reverberación supera

a 5 s, la acústica del local es muy mala y se caracteriza por su «resonancia».

Un sonido emitido en cualquier punto de una gran sala se refleja en las paredes, en el suelo, en el techo, en los muebles, en las cortinas y tapices y en los vestidos del público, que hay en ella. Si en cada reflexión el sonido pierde una gran parte de su energía, su amortiguación es muy rápida. En este caso el tiempo de reverberación es muy pequeño y el sonido será «sordo». La resonancia se produce cuando el sonido se refleja muchas veces con pequeña amortiguación. El oyente percibirá, en este caso, no sólo la onda sonora que llega directamente a su oído, sino también las reflejadas dos, tres y más veces. Si el tiempo que transcurre entre la llegada de estas ondas sonoras no supera  $\frac{1}{15}$  s, el oído no percibe dos o tres sonidos, como en el caso del bien conocido fenómeno del eco, sino únicamente un sonido difuso y, por consiguiente, ininteligible.

Es evidente que el tiempo de amortiguación del sonido depende de su absorción por los cuerpos circundantes. Como el sonido se refleja muchas veces, poco tiempo después de estar sonando continuamente una fuente cualquiera, todo el local se llena más o menos uniformemente de energía sonora, es decir, oscilatoria. Al cabo de un lapso breve se establece el equilibrio entre la energía que emite la fuente y la energía que absorbe el medio. Conviene advertir, sin embargo, que si no existiera la absorción y el foco sonara de manera continua, la energía sonora aumentaría indefinidamente en el local cerrado.

Supongamos que el foco sonoro deja de funcionar. En este caso sólo tendrá lugar un fenómeno, el de la absorción de la energía sonora por la superficie de los cuerpos que hay en el local. Cada uno de los materiales que toman parte en este proceso posee un coeficiente de absorción  $\alpha$  característico. Si en el local hay una ventana abierta, para ella se puede tomar un coeficiente de absorción igual a 1, ya que el sonido sale por completo del local (lo que equivale a ser absorbido). El valor de  $\alpha$  para una pared lisa y dura es próximo a cero (para el hormigón es 0,015). La absorción del sonido característica de todo el local se puede describir con la magnitud  $A = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3 + \dots$ ; en esta suma se tienen en cuenta todas las superficies que limitan el local. La teoría demuestra que el tiempo de reverberación depende de la magnitud  $A$  y del volumen del local, a saber,  $\tau = 0,16 \frac{V}{A}$ . En esta fórmula el volumen debe expresarse en metros cúbicos y la magnitud  $A$ , en metros cuadrados (0,16 es un factor dimensional).

Aplicando esta fórmula no es difícil hallar los valores típicos de los tiempos de reverberación. El coeficiente de absorción para el

hormigón acabamos de darlo; no es mucho mayor (3%) la energía que absorben el vidrio, la madera y el enlucido. La absorción aumenta bruscamente cuando en el local se introducen materiales blandos. Basta decir que la ropa de un hombre absorbe tanto sonido como 20 m<sup>2</sup> de pared. Para los materiales blandos los coeficientes de absorción oscilan de 0,5 a 0,9. Para solucionar los problemas acústicos que se plantean en la construcción de edificios tienen gran importancia los materiales porosos, cuyo coeficiente de absorción  $\alpha$  puede aproximarse al de los materiales blandos (espuma de vidrio, hormigón alveolar).

### § 49. Acústica atmosférica

Si una onda pasa de un medio a otro, la dirección en que se propaga cambia de acuerdo con la ley de la refracción. El ángulo en el cual varía la dirección de propagación viene determinado por el índice de refracción, es decir, por la relación entre las velocidades de propagación.

Sabemos (§ 32) que la velocidad de propagación del sonido depende sensiblemente de la temperatura. Una variación de 1°C

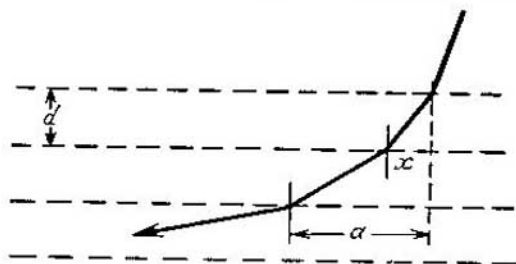


FIG. 71.

de la temperatura hace que aumente la velocidad del sonido en 0,5 m/s. En la atmósfera terrestre, por lo general, los valores de la temperatura en sus diferentes capas son distintos. Esto significa que, en diferentes capas del aire, el sonido tendrá velocidades distintas. ¿Cómo influirá en la propagación del sonido la circunstancia de que ésta ocurra en un medio donde el coeficiente de refracción cambia continuamente?

La respuesta a esta pregunta la da el esquema representado en la fig. 71. Supongamos que el sonido pasa por una serie de capas, dentro de las cuales es constante el índice de refracción, y que éste cambia a saltos al pasar de una capa a otra. La trayectoria de la onda sonora

será una línea quebrada. Pero si el espesor de las capas es pequeño y las diferencias entre los coeficientes de refracción comienzan a disminuir, la línea quebrada acabará no pudiéndose distinguir de una curva. Esto quiere decir, que en un medio de índice de refracción variable, las ondas sonoras se propagan, en general, siguiendo líneas curvas. En este caso la línea se tuerce siempre de tal modo, que de un punto a otro la onda se traslada en el menor tiempo posible (este postulado se conoce con el nombre de principio de Fermat). En este caso, la línea recta, en cierto sentido, no es la más corta.

Demostremos que este principio es correcto en el caso de dos trozos vecinos de la línea quebrada que acabamos de considerar. Supongamos para simplificar que las dos capas tienen el mismo espesor  $d$  y que las velocidades de propagación en ellas  $v_1$  y  $v_2$  son distintas. El tiempo que tarda la onda en recorrer el camino indicado en la figura será

$$\tau = \frac{1}{v_1} \sqrt{x^2 + d^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{(a-x)^2 + d^2}.$$

El tiempo se ha expresado por medio de la variable independiente  $x$ . Dándole a  $x$  distintos valores obtendremos diferentes refracciones y diversos tiempos de traslación desde un mismo punto inicial a un mismo punto final. El tiempo será mínimo si se cumple la condición  $\frac{d\tau}{dx} = 0$ , es decir, si

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} : \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + d^2}}.$$

Pero  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}$  es el seno del ángulo de incidencia y  $\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + d^2}}$  es el seno del ángulo de refracción. Hemos demostrado que la refracción de la onda se produce de tal modo, que el tiempo de traslación sea mínimo. Conviene subrayar que este resultado es correcto para todos los procesos ondulatorios y no sólo para las ondas elásticas.

De este modo, una onda que marcha por un medio heterogéneo cambia de dirección de manera que se alargue su camino en el medio en que la velocidad de propagación es mayor y se acorte en las capas en que dicha velocidad es menor. En otras palabras, las capas en que la velocidad de propagación es mayor serán atravesadas lo más oblicuamente posible, y las capas en que la velocidad de propagación es menor, más perpendicularmente posible.

Estas observaciones hacen que se comprenda perfectamente la fig. 72, en la cual se representa esquemáticamente la marcha de una onda sonora en los casos en que la temperatura del aire disminuye al aumentar la altura (lo que suele ocurrir de día) y cuando la temperatura aumenta con la altura (de noche).

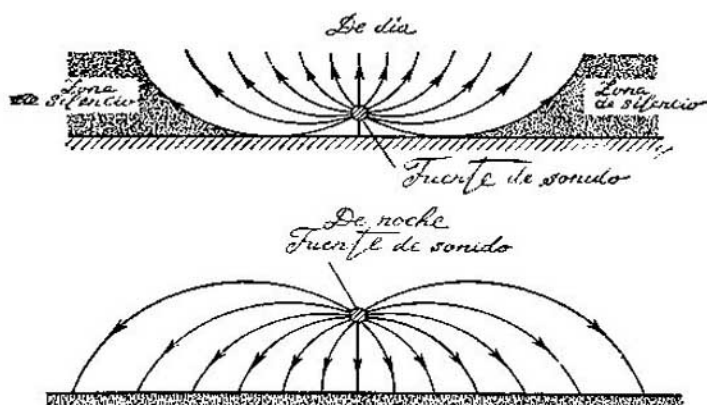


FIG. 72.

En este último caso la mayor velocidad de propagación del sonido se da en las capas próximas a la tierra. Si se observa cómo se propaga una onda sonora que sale de un punto sobre la tierra formando un ángulo pequeño con la vertical, se descubre lo siguiente. Cada capa sucesiva desvía la onda más lejos de la vertical. Cuando el ángulo de incidencia alcanza el valor  $i_0$ , para el que  $\frac{\sin i}{n} = 1$ , la refracción cesa y se produce la reflexión total. Desde un



FIG. 73.

punto de vista formal, la reflexión total es comprensible: el  $\sin i$  no puede ser mayor que la unidad. La esencia física de este interesante fenómeno se estudiará más adelante (§ 128) basándose en el ejemplo de las ondas electromagnéticas. Sea como fuere, la onda no sólo se propaga a lo largo de la superficie terrestre sino que, por el contrario, gira y se dirige hacia arriba. El dibujo hace comprensible el concepto de formación de «zonas de silencio». De noche el camino de la onda sonora tiene su parte convexa vuelta hacia arriba. Por esto la audibilidad es mayor por la noche que durante el día. Si el sonido se propaga sobre una superficie reflectora (como la del agua), sonidos no muy fuertes pueden oírse a varios kilómetros de distancia. En este caso la trayectoria de la onda es una sucesión de arcos convexos (fig. 73).

## § 50. Acción del ultrasonido

La energía ondulatoria por unidad de volumen del campo sonoro es proporcional al cuadrado de la frecuencia. En efecto, la densidad de energía oscilatoria  $w = \rho u^2/2$ , pero la amplitud de la velocidad  $u_0 = A\omega$  y, por consiguiente,  $w$  es proporcional a  $\omega^2$ . Los focos intensos de ultrasonido son capaces de crear oscilaciones con amplitud de presión de decenas de atmósferas. De este modo, en los microlúmenes de la sustancia, varios millares de veces por segundo, la tensión alcanza decenas de atmósferas de presión, desciende hasta cero, llega a decenas de atmósferas de extensión y así sucesivamente.

Está claro que una acción mecánica tan fuerte puede ocasionar una serie de fenómenos específicos. Entre ellos figura el fenómeno de la *cavitación*. En el instante de la oscilación correspondiente a la extensión máxima, en el líquido que se halla en el campo ultrasónico se produce una ruptura microscópica a donde tienden los gases disueltos y el vapor. En el instante de la oscilación correspondiente a la compresión, en la región de estas rupturas se crean presiones colosales, del orden de millares de atmósferas.

Estas acciones tan importantes del ultrasonido se pueden utilizar para vencer las fuerzas que actúan entre las moléculas. Las emulsiones (grasa en agua, benceno en agua y otras) se dispersan por la acción del ultrasonido. En la partícula suspendida en el agua se produce más pronto o más tarde la explosión debida a la cavitación. La acción trituradora del ultrasonido encuentra amplia aplicación en la industria.

No obstante, en ausencia de la cavitación también puede ser importante la acción del ultrasonido. Si una onda ultrasónica pasa a través de un aerosol (gas con partículas sólidas en suspensión, como el humo, por ejemplo) el resultado es la precipitación de las partículas. Las oscilaciones ultrasónicas concentran las partículas sólidas en los nodos de presión sonora, donde se aglutinan y se hacen lo suficientemente pesadas para caer a tierra.

La detección de sopladuras, grietas internas y otros defectos de los metales valiéndose de la inspección ultrasónica es también un campo importante de aplicación del ultrasonido. Este método se basa en la reflexión del ultrasonido en el límite medio — aire o metal básico — impureza. El efecto se nota si las dimensiones del defecto son mayores que la longitud de onda. Para descubrir un defecto de 1 mm hace falta que la longitud de onda sea menor que 0,1 mm y, por lo tanto, la frecuencia debe ser del orden de  $10^9$  Hz. Generalmente se trabaja con frecuencias mucho menores ( $10^7$  Hz) y el método se utiliza para descubrir defectos grandes.

Es muy conocida también la aplicación del ultrasonido en los eco-sonda y sonares (radares acústicos).

## 9

## TEMPERATURA Y CALOR

§ 51. *Equilibrio térmico*

Se dice que el estado de un cuerpo no varía, cuando todas las propiedades de dicho cuerpo permanecen invariables. Y al contrario, si cambia una propiedad cualquiera del cuerpo, se dice que varía su estado. El estado de un cuerpo se puede variar realizando sobre él un trabajo. Pero los mismos resultados se pueden obtener por medio no mecánico. El agua se calienta después de agitarla intensamente o después de someterla a la acción de un mechero de gas. Si el medio ambiente o los cuerpos circundantes influyen sobre el cuerpo o sistema de cuerpos que se considera y varían su estado por un medio no mecánico, se dice que existe intercambio de calor.

Si entre los cuerpos no existe intercambio de calor, están en equilibrio térmico, es decir, tienen la misma temperatura. Si los cuerpos están en contacto entre sí, la existencia de equilibrio térmico se pone de manifiesto directamente: los estados de dichos cuerpos continúan siendo los mismos durante largo tiempo. El intercambio calorífico también es posible cuando los cuerpos están lejos uno del otro. En este caso se puede descubrir el equilibrio térmico valiéndose de un tercer cuerpo, que hace las veces de termómetro. Si el termómetro se halla en equilibrio con ambos cuerpos, la temperatura de éstos será la misma. Esto significa que, si estuvieran en contacto directo, se hallarían en estado de equilibrio térmico. Por medio de un «tercer cuerpo», termómetro, se puede determinar siempre si los cuerpos poseen temperaturas distintas o iguales.

Valiéndose de un termómetro no solo se puede establecer si existe equilibrio térmico o no, sino que también se puede juzgar acerca del grado de desviación de dicho equilibrio. Para que un termómetro pueda servir a este fin hay que ponerse de acuerdo en cuanto a la sustancia del termómetro (mercurio, alcohol, agua, gas) y acerca de la propiedad (indicio) con respecto a la cual vamos a juzgar si existe equilibrio térmico o desviación de él entre un objeto y el termómetro. Como siempre ocurre en la física, lo principal es convenir qué instrumentos de medición, en este caso termómetros, deben servir de base. Luego siempre es posible graduar cualquier termómetro por un patrón. Como patrón de cuerpo (sustancia) termométrico se toma hidrógeno gaseoso. El indicio que sirve para juzgar la temperatura es la presión  $p$  del gas. La temperatura del cuerpo se considera proporcional a la presión del hidrógeno en el



termómetro de gas, siendo constante el volumen que ocupa el hidrógeno.

La escala de temperaturas se establece del modo siguiente. La temperatura del hielo fundente se llama  $0^{\circ}$ , la del agua en ebullición,  $100^{\circ}$  (a la presión de 760 mm de la columna de mercurio). Midiendo la presión del hidrógeno  $p_0$  y  $p_{100}$  en estos dos puntos, tomando sus valores sobre una gráfica y trazando por ellos una recta,

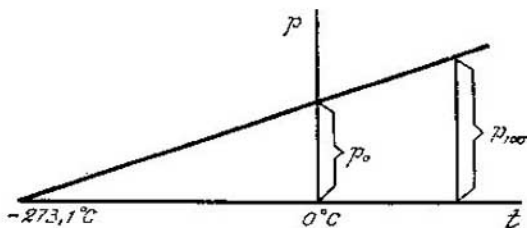


FIG. 74.

obtenemos la escala de temperaturas de Celsius. La ecuación de esta recta, que se representa en la fig. 74, tiene la forma

$$t = \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0} \cdot 100.$$

La recta corta el eje  $t$  a la temperatura de  $-273,1^{\circ}\text{C}$ . Este es el cero absoluto. Por definición del concepto, es imposible la existencia de temperaturas más bajas. En la mayoría de los casos se utiliza en física la temperatura medida a partir del cero absoluto,  $T = t + 273,1^{\circ}$ . Esta temperatura se llama absoluta o temperatura en grados Kelvin ( $^{\circ}\text{K}$ ).

La graduación de los termómetros de trabajo por medio del patrón de hidrógeno puede hacerse en un intervalo de temperaturas limitado. A temperaturas elevadas puede comenzar la difusión del hidrógeno a través de las paredes del recipiente. Si las temperaturas son bajas el hidrógeno puede convertirse en líquido. No obstante, la definición adoptada de la temperatura tiene, como veremos más adelante (pág. 169), un sentido completamente general.

### § 52. Energía interna

Los rasgos fundamentales del comportamiento de los cuerpos durante una interacción mecánica y térmica son reflejados perfectamente por el llamado modelo cinético-molecular. El cuerpo,

constituido por moléculas, se considera como un sistema de partículas que se mueven e interaccionan sometidas a las leyes de la mecánica. Este sistema de moléculas debe tener una energía compuesta por la energía potencial de interacción de las partículas y por la energía cinética de sus movimientos. Esta energía se llama *energía interna* del cuerpo.

A un estado determinado del cuerpo le corresponde una energía interna determinada. Una variación de la disposición mutua de las partículas o del carácter de su movimiento va ligada a un cambio de la energía interna. Cualquiera que sea el procedimiento de variación de la energía interna de un cuerpo, los cuerpos que lo rodean deben ceder energía a las moléculas de dicho cuerpo. Si el cuerpo se somete a una acción mecánica, la transmisión de energía se produce de un modo ordenado; cuando se trata de un intercambio calorífico, la energía es cedida por el medio en forma de impulsos casuales que se transmiten ya a una molécula ya a otra.

La cantidad de energía transmitida al cuerpo mecánicamente se mide por la cantidad de trabajo realizado sobre el cuerpo. La cantidad de energía cedida en el intercambio calorífico se mide por la cantidad de calor.

Como el cálculo riguroso de la energía interna de un cuerpo es difícil, y en la mayoría de los casos, imposible, y como el propio concepto de energía interna como magnitud mecánica pura es solamente aproximado, hay que introducir una definición rigurosa de esta magnitud. Esto se consigue estudiando los procesos que transcurren sin intercambio de calor con el medio circundante. Estos fenómenos se llaman *adiabáticos*. Haciendo el experimento dentro de una envoltura termoaislante y limitándose a medir en plazos cortos (antes de que el calor tenga tiempo de «salir» del volumen que se estudia), se consigue cumplir con bastante exactitud las condiciones adiabáticas. Los numerosos experimentos que condujeron en su tiempo al establecimiento de la ley de conservación de la energía demuestran, que cualquiera que sea el camino seguido para variar, en este proceso, el estado del cuerpo, el trabajo que se necesita para ello es el mismo. La cantidad  $A$  de este trabajo es igual, por definición, al incremento de la energía interna  $U$  del cuerpo:

$$A = U_2 - U_1.$$

Es natural que el valor absoluto de la energía interna no se pueda hallar por los datos del experimento.

Si el modelo mecánico del cuerpo fuera completamente exacto, la afirmación que hemos escrito sería una simple consecuencia de la ley de conservación de la energía mecánica. Pero el modelo cinético-molecular es sólo un modelo, por esto el hecho de que a

cada estado del cuerpo se pueda equiparar una energía determinada, de manera que la diferencia de las energías de dos estados sea igual al trabajo adiabático de transición, es una de las leyes más importantes de la naturaleza que conduce a la ley de conservación de la energía.

Un intercambio calorífico y una acción mecánica pueden conducir en una serie de casos a un mismo cambio de estado, es decir, a cambios iguales de la energía interna del cuerpo. Esto nos da la posibilidad de comparar el calor con el trabajo y de medir la cantidad de calor en las mismas unidades que el trabajo y la energía.

Para dar una idea de los valores de la energía interna citamos las cifras que siguen.

Cuando se calienta agua en  $1^{\circ}\text{C}$  la energía de 1 g de este líquido aumenta en  
 $1 \text{ cal} = 0,427 \text{ kgf}\cdot\text{m} = 4,18 \cdot 10^7 \text{ erg} = 4,18 \text{ J} = 2,61 \cdot 10^{19} \text{ eV}$ .

En este caso la energía de una molécula de agua aumenta por término medio en  
 $3 \cdot 10^{-23} \text{ cal} = 1,28 \cdot 10^{-23} \text{ kgf}\cdot\text{m} = 1,25 \cdot 10^{-25} \text{ erg} =$   
 $= 12,5 \cdot 10^{-23} \text{ J} = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$ .

Al quemarse 1 g de carbón la sustancia cede una cantidad de energía interna igual a

$$7000 \text{ cal} = 2990 \text{ kgf}\cdot\text{m} = 2,93 \cdot 10^{11} \text{ erg} = 2,93 \cdot 10^4 \text{ J} = 18,3 \cdot 10^{22} \text{ eV}.$$

Calculadas para un átomo de carbono estas cifras toman la forma

$$1,4 \cdot 10^{-19} \text{ cal} = 5,98 \cdot 10^{-20} \text{ kgf}\cdot\text{m} = 5,86 \cdot 10^{-12} \text{ erg} = 5,86 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,66 \text{ eV}.$$

La difusión nuclear de 1 g de uranio 235 desprende una energía de

$$2,03 \cdot 10^{10} \text{ cal} = 8,65 \cdot 10^9 \text{ kgf}\cdot\text{m} = 8,49 \cdot 10^{17} \text{ erg} =$$

$$= 8,49 \cdot 10^{10} \text{ J} = 5,29 \cdot 10^{29} \text{ eV}.$$

En este caso un núcleo atómico cede una cantidad de energía interna igual a

$$7,9 \cdot 10^{-12} \text{ cal} = 3,38 \cdot 10^{-12} \text{ kgf}\cdot\text{m} = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ erg} =$$

$$= 3,3 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 206 \cdot 10^6 \text{ eV} \approx 200 \text{ MeV},$$

lo que supera en más de 50 millones de veces la energía de las reacciones químicas ( $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ ).

### § 53. Primer principio de la termodinámica

En el caso más general, intercambiando energía con el medio o con los cuerpos circundantes, el sistema que se considera puede percibir o ceder una cantidad de calor  $Q$  y puede realizar trabajo o sobre él puede hacerse un trabajo  $A$ . El calor y el trabajo son dos formas en las cuales la energía del cuerpo puede transmitirse al medio o, al contrario, la energía del medio puede transferirse al cuerpo. La ley de conservación de la energía excluye la posibilidad de cualquier tipo de pérdidas en el intercambio energético. La diferencia de energías de un sistema en dos estados debe ser igual a

la suma del calor y el trabajo recibidos por el sistema de los cuerpos circundantes.

Esta afirmación no podría comprobarse experimentalmente si no añadiésemos que el incremento de la energía al pasar el sistema de un estado a otro es siempre el mismo independientemente del carácter o del procedimiento de paso del estado inicial al final. El principio de conservación de la energía está contenido en este postulado precisamente. A él sí que podemos, indudablemente, someterlo a una comprobación experimental completa, midiendo el calor y el trabajo transmitidos al sistema en diversas transiciones de un mismo estado inicial a un mismo estado final. El incremento de la energía en todos los casos debe ser el mismo.

La ley de conservación de la energía en la forma concreta que acabamos de exponer recibe el nombre de *primer principio de la termodinámica*. Esta importantísima ley de la naturaleza fue establecida en virtud de los trabajos de una serie de científicos llevados a cabo a mediados del siglo pasado. El papel de Robert Mayer, de Joule y, ante todo, de Helmholtz merece ser altamente valorado.

Para poder escribir el primer principio de la termodinámica en forma de fórmula hay que ponerse de acuerdo acerca del signo a elegir para el trabajo y el calor. Nosotros aceptaremos que el calor es positivo cuando se le transmite al sistema, y consideraremos que el trabajo es positivo cuando el cuerpo lo realice contra la acción de las fuerzas externas. En este caso el primer principio de la termodinámica se escribe en la forma

$$\Delta Q = dU + dA,$$

es decir, el calor proporcionado al cuerpo se invierte en cambiar su energía interna y en el trabajo que él realiza. Pueden imaginarse, evidentemente, toda clase de transformaciones en las cuales cada una de las magnitudes que figuran en la igualdad puede ser positiva y negativa.

No es casualidad que al escribir la fórmula del primer principio sólo se utilice el signo diferencial para la energía. El trabajo y el calor no son diferenciales totales. Al pasar el cuerpo de un estado a otro las cantidades de trabajo y de calor percibidas o cedidas por el cuerpo dependerán del «camino» de transición, y únicamente el incremento de la energía, como ocurre con la diferencial total de cualquier función, no depende del procedimiento de transición:

$$\int_1^2 dU = U_2 - U_1.$$

La aplicación de la ley de conservación de la energía y, en particular, el primer principio de la termodinámica se extiende a todas

las partes de la física. El valor de esta ley para la ciencia consiste en su excepcional fuerza de predicción. Sin tener noticia alguna sobre el carácter de un proceso, conociendo únicamente los estados inicial y final del sistema se puede hacer una serie de deducciones. Supongamos, por ejemplo, que ocurre una reacción química de unión de las moléculas  $A$  y  $B$  para formar una molécula  $AB$ . Supongamos también que conocemos las energías internas de las moléculas  $U_A$ ,  $U_B$  y  $U_{AB}$ . Si  $U_{AB}$  es mayor que  $U_A + U_B$  podemos predecir que la reacción se desarrolla con absorción de calor y que la cantidad de él necesaria es  $Q = U_{AB} - (U_A + U_B)$ . O conociendo  $U_A$  y  $U_B$  y midiendo con un calorímetro el calor de reacción, podemos hallar  $U_{AB}$  y utilizar estos datos para predecir la marcha de cualquier otra reacción en la cual intervenga el compuesto  $AB$ .

#### § 54. Energía de los sistemas microscópicos

La ley de conservación de la energía y la regla de intercambio de la energía son correctas, como es natural, tanto para los cuerpos grandes como para las partículas que componen los cuerpos. Pero al estudiar las partículas (átomos, núcleos, moléculas) o los sistemas formados por un pequeño número de ellas hay que tener en cuenta otra de las leyes más importantes de la naturaleza. La energía de los sistemas microscópicos no puede tomar unos valores cualesquiera. Cada sistema posee su serie, característica y exclusivamente suya, de posibles valores de la energía:  $E_1, E_2, \dots$  La fig. 214 (pág. 491) representa el esquema de los posibles niveles de energía del átomo de hidrógeno. Con figuras semejantes se pueden representar los niveles energéticos de otros sistemas atómicos. Cuando se le transmite calor o trabajo a un sistema, la energía de los átomos, de las moléculas o de los otros sistemas microscópicos puede aumentar únicamente a saltos, en porciones determinadas (cuantos) de energía. Del mismo modo, por cuantos aislados, se cede la energía a los cuerpos circundantes.

Rigurosamente hablando, la ley acerca del carácter cuántico de la energía y de la existencia de una «escala» de posibles niveles energéticos para cada sistema microscópico es una ley completamente general de la naturaleza, correcta también para los cuerpos grandes. Sin embargo, como demuestra la física teórica, en un cuerpo grande el número de niveles energéticos, en términos aproximados aumenta  $n$  veces si el cuerpo consta de  $n$  átomos.

A medida que aumenta la energía, como puede verse en la figura representativa del átomo de hidrógeno, los niveles se encuentran cada vez más próximos. La aproximación de estos niveles se produce en el cuerpo grande con una rapidez incomparablemente mayor que

en un átomo aislado. Sólo los niveles más bajos, pobres en energía, aparecen separados. Los niveles más altos se juntan, resultando en la práctica que el cuerpo grande puede cambiar su energía de un modo continuo. Si al cuerpo se le quita energía, «desciende» a niveles más bajos. Por esta razón, el carácter cuántico de la variación de la energía se pone de manifiesto tanto más ostensiblemente cuanto más baja es la temperatura del cuerpo, cuanto más se aproxima ésta al cero absoluto.

Una acción mecánica hace que los niveles de energía del cuerpo o del sistema se desplacen. En la inmensa mayoría de los casos es imposible seguir este desplazamiento. En los sistemas microscópicos — átomos y moléculas — la influencia de la presión es muy pequeña.

Una interacción térmica consiste en transiciones de los sistemas de un nivel de energía a otro.

El equilibrio térmico es un equilibrio móvil. Cada uno de los cuerpos no tiene durante todo el tiempo una energía determinada, sino que continuamente intercambia energía con el medio de tal modo, que, por término medio, la energía permanece invariable. El intercambio de energía se efectúa a porciones, es decir, por cuantos. Si en un instante cualquiera la energía es igual a  $E_1$ , en el instante siguiente varía de un salto hasta  $E_2$ .

La energía se entrega en forma de radiación. Si  $E_1 > E_2$ ,  $E_1 - E_2 = h\nu$ , donde  $\nu$  es la frecuencia de la radiación y  $h$  es la constante de Planck, que es igual a  $6,62 \cdot 10^{-27}$  erg · s. La adquisición de energía puede efectuarse como resultado de la absorción de una radiación o a consecuencia del choque mecánico de cualquier partícula.

Si la temperatura no permanece constante, sino que desciende, el número de transiciones de niveles superiores a inferiores es enormemente mayor que el de transiciones en el sentido contrario. La energía desciende a saltos, el cuerpo cede un cuanto de radiación tras otro.

Los fenómenos de intercambio energético que hemos descrito esquemáticamente fueron establecidos primeramente para los átomos. Poco después se hizo evidente su carácter universal. Por ahora nos limitamos a hacer estas consideraciones generales y remitimos al lector a la parte III de este libro, donde encontrará más detalles.

### § 55. Ecuación de estado

Entre las diversas propiedades de un cuerpo se pueden destacar tres fundamentales llamadas parámetros de estado. Son éstas la presión  $p$ , el volumen  $v$  y la temperatura  $T$ . El conocimiento de

estos tres parámetros no siempre es suficiente para caracterizar por completo un cuerpo. Si un sistema está formado por muchas sustancias, hay que conocer sus concentraciones. Si un cuerpo se halla en un campo eléctrico o magnético, hay que saber la intensidad de éste. Siempre se puede elegir cierto conjunto de parámetros que defina uniformemente el estado del cuerpo. Las demás características se pueden calcular, en este caso, partiendo de los parámetros fundamentales.

Si no prestamos atención a los campos electromagnéticos y nos limitamos a considerar los sistemas más simples — gases, líquidos y sólidos isótropos—, resulta que dos parámetros son suficientes para definir el estado del cuerpo. En calidad de estos dos parámetros puede tomarse indistintamente cualquier par formado por  $p$ ,  $v$ ,  $T$ . Lo más frecuente es elegir  $v$  y  $T$ . Entonces la presión  $p$  será función de  $v$  y  $T$ . La ecuación

$$p = f(v, T)$$

se llama *ecuación de estado*. El conocimiento de esta ecuación para un cuerpo cualquiera, y en particular para una clase de cuerpos, tiene una gran importancia para la física. Las ecuaciones de estado se pueden establecer experimentalmente. El carácter de la dependencia de la presión respecto del volumen y la temperatura es extremadamente individual en los líquidos y sólidos. Estableciendo la ecuación de estado de un cuerpo dado obtenemos una información completa de su comportamiento en distintos casos, pero no adquirimos ningunos conocimientos acerca del comportamiento de otros cuerpos.

Al investigar el comportamiento de una sustancia, ésta se suele caracterizar con bastante frecuencia no por su ecuación de estado, sino por la derivada de uno de los parámetros respecto de otro.

Para saber cómo se dilata un cuerpo al aumentar la temperatura, permaneciendo invariable la presión, hay que calcular la derivada  $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$  (este símbolo significa: derivada respecto de  $T$  a  $p$  constante).  
La magnitud

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

recibe el nombre de *coeficiente de dilatación cúbica*. Como puede verse en esta fórmula,  $\alpha$  indica la fracción en que varía el volumen del cuerpo al variar la temperatura en un grado.

*El coeficiente térmico de presión*

$$\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

es igual a la variación relativa de la presión cuando la temperatura varía en un grado (a volumen constante). Los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  tienen dimensión, recíproca del grado ( $^{\circ}\text{K}^{-1}$ ).

Una tercera magnitud útil es la *compresibilidad*

$$\kappa = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T,$$

que es igual a la disminución relativa del volumen al aumentar la presión en una unidad (a temperatura constante).

Estos tres coeficientes están ligados por una relación que ahora deduciremos fácilmente. Como

$$p = f(v, T),$$

tenemos que

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T dv.$$

Si la presión es constante,  $dp=0$  y

$$\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_p \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = -1$$

de donde

$$\frac{\beta\kappa}{\alpha} = \frac{1}{p}.$$

Este interesante resultado demuestra que, conociendo, por ejemplo, la compresibilidad y el coeficiente térmico de presión, se puede calcular el valor del coeficiente de dilatación. La relación que hemos deducido es válida para todos los cuerpos.

Los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\kappa$ , en general, no son magnitudes constantes para la sustancia dada. Para valores distintos de la presión y la temperatura estos coeficientes pueden tomar valores diferentes. Por esto, al indicar el valor de cualquier coeficiente, hay que hacer mención de los valores de la presión y de la temperatura para los cuales se da la cifra. En algunos casos se indica el valor medio de los coeficientes para tal o cual intervalo de temperaturas o presiones.

He aquí varios ejemplos.

a) Coeficiente de dilatación cúbica  $\alpha$  y compresibilidad  $\kappa$  de algunos líquidos

	$\alpha, ^{\circ}\text{K}^{-1}$	$\kappa, \text{m}^2/\text{N}$
Agua, a 10—30° C y presión normal . . . . .	$2,07 \cdot 10^{-4}$	$48,5 \cdot 10^{-11}$
Mercurio, a 10—30° C . . . . .	$1,81 \cdot 10^{-4}$	$3,05 \cdot 10^{-11}$
Éter, a 0° C . . . . .	$16,56 \cdot 10^{-4}$	$149 \cdot 10^{-11}$



Los coeficientes de dilatación cúbica y de compresibilidad de los sólidos pueden ser muy distintos. Así, por ejemplo, a temperatura y presión constantes el cuarzo fundido tiene  $\alpha = 1,29 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$  y  $\kappa = 2,76 \cdot 10^{-11} \text{m}^2/\text{N}$ , mientras que la ebonita tiene  $\alpha = 77 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$  y  $\kappa = 18,4 \cdot 10^{-11} \text{m}^2/\text{N}$ .

b) Calculamos, para el agua, el mercurio y el éter, el coeficiente térmico de presión  $\beta$  a la presión atmosférica ( $\frac{\beta \kappa}{\alpha} = 1$ ):

	Agua	Mercurio	Eter
$\beta, \text{K}^{-1}$ . . . . .	4,4	61,4	11,3

Esto quiere decir que si cierto volumen *constante* de mercurio se calienta en  $10^{-3}$  grados, su presión aumentará en un 6% (!).

### § 56. Ecuación del estado gaseoso

La ecuación de estado más simple es la de los gases enrarecidos. Esta ecuación la escribió Mendeléiev unificando en una fórmula la ecuación de Clapeyron y la ley de Avogadro. La ecuación de Clapeyron dice que la expresión  $\frac{pv}{T}$  es una magnitud constante para una masa dada de gas, es decir,

$$\frac{pv}{T} = \text{const.}$$

Pero las moléculas — gramo de los distintos gases ocupan, a igualdad de presión y temperatura, volúmenes iguales (22,41 l a  $0^\circ\text{C}$  y a una atmósfera \*) — ley de Avogadro—. Por consiguiente, referida a una molécula-gramo, la constante de la ecuación de Clapeyron debe tener un valor universal. Esta constante se representa por  $R$  y se llama *constante universal de los gases*. Para un mol de cualquier gas, la ecuación toma la forma  $pv = RT$ ; aquí  $v$  es el volumen de un mol de gas. La constante  $R$  tiene dimensión de trabajo referido a un grado y a un mol; sus valores en distintas unidades son:

$$R = 8,31 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{mol} \cdot ^\circ\text{K}} = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot ^\circ\text{K}} = 0,0821 \frac{\text{atm} \cdot \text{l}}{\text{mol} \cdot ^\circ\text{K}} = 2 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot ^\circ\text{K}}.$$

Como el volumen de una masa arbitraria de gas  $V = \mu v$ , siendo  $\mu$  el número de moles, en el caso más general la ecuación de estado

\*) Aquí se sobrentiende una atmósfera física, 1 atm = 1,033 atmósferas técnicas =  $1,01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ .

de los gases enrarecidos toma la forma

$$pV = \mu RT \text{ o } pV = \frac{m}{M} RT,$$

donde  $m$  es la masa y  $M$  el peso molecular del gas.

Para una serie de cálculos puede ser útil la fórmula de la densidad  $\rho$  del gas, que se obtiene de esta ecuación:

$$\rho = \frac{Mp}{RT}.$$

Los gases que cumplen la ecuación del estado gaseoso se llaman *perfectos* o *ideales*. Este término estaría justificado ya por la extrema sencillez de la ecuación, sin embargo, como veremos más tarde (pág. 202), esta ecuación se puede deducir representando el gas por un modelo ideal que puede definir así: un gas perfecto es un sistema de moléculas cuyas fuerzas de atracción y dimensiones se pueden despreciar.

Los coeficientes de dilatación, presión y compresibilidad de los gases perfectos vienen expresados por las siguientes fórmulas simples:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{T}, \quad \kappa = \frac{1}{p}.$$

A la temperatura de  $0^{\circ}\text{C}$  ( $T=273,1^{\circ}\text{K}$ )  $\alpha$  y  $\beta$  son iguales a

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273,1} \text{ }^{\circ}\text{K}^{-1} = 0,00366 \text{ }^{\circ}\text{K}^{-1}.$$

Las siguientes cifras dan cierta idea de en qué medida los gases reales se aproximan a los perfectos.

	$\alpha$ , a $V=\text{const}$		$\alpha$ , a $V=\text{const}$
Hidrógeno . . . . .	$3660 \cdot 10^{-6}$	Anhidrido carbónico . .	$3726 \cdot 10^{-6}$
Helio . . . . .	$3660 \cdot 10^{-6}$	Aire . . . . .	$3674 \cdot 10^{-6}$
Nitrógeno . . . . .	$3674 \cdot 10^{-6}$		

Las sustancias gaseosas que se hallan a presiones considerablemente mayores que la atmosférica dejan de cumplir la fórmula del gas perfecto. Los cálculos pueden ya conducir a errores de varios tantos por ciento a presiones de varias decenas de atmósferas.

Una conclusión importante a que puede llegarse estudiando el comportamiento de los gases enrarecidos consiste en que cualquiera de ellos, en general, puede tomarse, de igual modo que el hi-

drógeno, como base para determinar la temperatura. El hidrógeno no destaca en nada entre los gases enrarecidos. Por esto puede decirse que la escala de temperaturas aceptada en la física no es la del hidrógeno, sino la escala de presiones del gas perfecto. Esta circunstancia precisamente justifica la elección hecha del procedimiento para determinar la temperatura: una clase grande de sustancias conduce a escalas de temperaturas que coinciden exactamente. El fundamento cinético molecular de la elección de la escala de temperaturas se dará más adelante (pág. 203).

### § 57. Ecuación de estado de los gases reales

Para los gases a grandes presiones, para los vapores próximos a la saturación y en una serie de otros casos la ecuación del estado gaseoso comienza a dar resultado muy poco preciso. En estos casos se recurre a otras ecuaciones de estado. Una parte de estas ecuaciones fue hallada empíricamente y algunas (como la más conocida de ellas, la ecuación de Van der Waals) poseen una base teórica cualitativa. Sea como fuere, el valor de una u otra ecuación se puede establecer únicamente comparando las cifras obtenidas en los experimentos con las calculadas por la ecuación. Citaremos algunos ejemplos de ecuaciones de estado.

La corrección más simple que puede introducirse en la ecuación de los gases perfectos es, naturalmente, la de tener en cuenta el volumen de las moléculas gaseosas. Es evidente que, incluso sometiéndolo a una presión infinitamente grande, es imposible comprimir un gas hasta un volumen nulo. Esto justifica la ecuación de estado de la forma

$$p(v-b) = RT,$$

donde  $b$  es una constante que tiene en cuenta el volumen finito de las moléculas.

Cuanto mayor sea el número de constantes que se introduzcan en la ecuación de estado, tanto más fácil será conseguir una buena coincidencia de las cifras experimentales con las calculadas. Pero serán menores las posibilidades de predicción de las fórmulas. No es de extrañar la magnífica coincidencia con los datos experimentales, en un amplio intervalo de valores de los parámetros de estado, que proporciona la fórmula de Bridgeman — Beattie, en la que figuran cinco constantes  $A$ ,  $B$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , que caracterizan la sustancia:

$$p = \frac{RT(1-\epsilon)}{v^2} (v + B') - \frac{A'}{v^2},$$

donde

$$A' = A \left( 1 - \frac{a}{v} \right), \quad B' = B \left( 1 - \frac{b}{c} \right), \quad \epsilon = \frac{c}{vT^3}.$$

En la fórmula de Dieterici figuran tres constantes  $a$ ,  $b$ ,  $s$ :

$$p(v-b) = RT e^{\frac{a}{RT^s v}}.$$

Dos constantes,  $a$  y  $b$ , tiene la fórmula de Van der Waals:

$$\left( p + \frac{a}{v^2} \right) (v-b) = RT.$$

El mérito de esta última ecuación consiste en que refleja correctamente el carácter general de la dependencia entre los parámetros para todas las sustancias gaseosas. Sin embargo, para una sustancia dada no se consigue elegir unos valores constantes de  $a$  y  $b$  tales, que los datos calculados coincidan bien con las mediciones en un intervalo amplio.

La ecuación de Van der Waals se basa en lo siguiente. La presión satisface la ecuación del estado gaseoso,  $p = \frac{RT}{v}$ , si las fuerzas de atracción entre las moléculas se desprecian. Debido a la atracción mutua de las moléculas, la presión sobre las paredes del recipiente debe disminuir en cierta cantidad  $p'$ . Por lo tanto,  $p = \frac{RT}{v} - p'$  o, teniendo en cuenta que el volumen de las moléculas es finito,

$$p = \frac{RT}{v-b} - p' \quad \text{o} \quad (p + p')(v-b) = RT.$$

Pero, ¿por qué  $p' = a/v^2$ ? En este caso razonamos del siguiente modo. Dividimos mentalmente el volumen del gas en dos partes. Una de ellas es atraída por la otra. La fuerza de atracción debe ser proporcional al número de moléculas que hay en la parte izquierda y al número de moléculas que hay en la parte derecha del volumen. En otras palabras, la fuerza de atracción deberá ser proporcional al cuadrado de la densidad, es decir, inversamente proporcional al cuadrado del volumen.

Acerca de las fuerzas de interacción entre las moléculas volveremos a hablar más detenidamente en la parte III de este libro.

## 10

## PROCESOS TERMODINÁMICOS

## § 58. Representación gráfica de las transformaciones

Si se dan dos parámetros del estado de un cuerpo, el tercero se calcula por medio de la ecuación de estado. Esto quiere decir, que en una gráfica en que sobre un eje se tome un parámetro (por ejemplo, la presión) y sobre el otro, el segundo parámetro (por ejemplo, el volumen), el estado del cuerpo estará caracterizado unívocamente por un punto representativo.

Es necesario, indudablemente, añadir que, al recurrir a la representación gráfica del estado de un cuerpo, suponemos tácitamente que dicho estado es de equilibrio. Únicamente en este caso los valores de los parámetros del estado serán iguales en todo el volumen del sistema y se podrá hablar de la temperatura, presión, densidad, etc., de todo el cuerpo (sistema) en conjunto.

Puede plantearse la siguiente pregunta: ¿de qué procesos o transformaciones puede hablarse, si vamos a considerar estados de equilibrio? La respuesta es: si una transformación se desarrolla con suficiente lentitud, los valores de los parámetros del estado se pueden considerar iguales en todo el volumen. Un proceso de este tipo es una especie de sucesión continua de estados de equilibrio. Esta transformación es *reversible*. Esto significa que cualquier transformación representada gráficamente se puede pensar que está trazada en ambos sentidos. Una transformación consistente en estados de equilibrio sucesivos se puede cumplir del estado 1 al estado 2, y luego del estado 2 al estado 1 pasando por los mismos estados intermedios sin que ocurra variación alguna en el medio circundante.

Un proceso o transformación reversible es un proceso idealizado. Cualquier transformación real es, en mayor o menor grado, irreversible, en dependencia de lo que disten de ser equilibrados los estados intermedios del proceso.

La irreversibilidad de las transformaciones reales se comprende claramente por el siguiente razonamiento. Todo establecimiento de equilibrio es irreversible. Los ejemplos de esto son sencillos y de todos conocidos: el enfriamiento de un cuerpo en un medio más frío, la «resorción» de una deformación mecánica, por ejemplo, el retorno al estado de reposo de un muelle comprimido y después soltado, la mezcla espontánea de dos gases, etc. Los procesos inver-

esos no pueden producirse de por sí ni pueden ser las únicas transformaciones que ocurran en un sistema cerrado (aislado).

Cualquier transformación real no consiste en estados equilibrados sucesivos, en ella tienen lugar inevitablemente fenómenos semejantes a los que hemos enumerado. Por lo tanto, al hacer esta transformación en sentido contrario, nunca conseguiremos hacerla pasando exactamente por los mismos estados. Al comprimir un gas, si se hace con suficiente rapidez, la presión de éste en las capas contiguas al émbolo será más alta. En el proceso inverso — de expansión del gas — la presión junto al émbolo, por el contrario, será más baja.

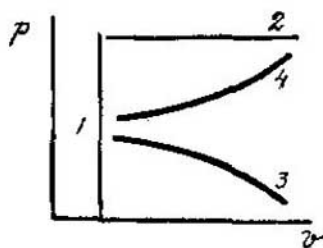


FIG. 75.

A pesar de que las transformaciones reversibles sean idealizadas, su estudio ofrece gran interés, ya que en muchísimos casos la diferencia entre los procesos reales y los reversibles es insignificante. Todo depende del *tiempo de relajación*, es decir, del tiempo durante el cual se establece el equilibrio. Este tiempo varía dentro de unos

límites muy amplios, comenzando desde el tiempo de igualación de la presión en un gas homogéneo ( $\sim 10^{-10}$  s) hasta tiempos del orden de minutos, horas e incluso semanas cuando se trata de procesos de mezcla de sustancias heterogéneas.

Supongamos que comprimimos un gas y que toda la transformación dura un segundo. El tiempo de relajación es una fracción insignificante de segundo. Por esto tenemos derecho a considerar que este proceso real es una sucesión de estados de equilibrio y, por consiguiente, tenemos derecho también a representarlo por una línea en la gráfica (diagrama)  $p, v$  o en cualquier otro dibujo análogo. Esto se refiere también a todas las demás transformaciones en que el tiempo de relajación es pequeño en comparación con el tiempo de medición.

Veamos la forma que tienen las líneas representativas de las transformaciones más simples (fig. 75). Utilizaremos la gráfica (diagrama) de coordenadas presión — volumen. En la termodinámica técnica se emplean también otras coordenadas, pero nosotros no necesitamos detenernos en ellas. La línea vertical *1* representa en esta gráfica una transformación a volumen constante. Si el punto representativo se mueve de abajo hacia arriba, la presión aumenta, en el caso contrario, disminuye. Está claro que en esta transformación se produce una variación, «invisible» en el dibujo, de la temperatura. La línea horizontal *2* es una transformación a presión constante (isobárica). De izquierda a derecha tendremos una

expansión. El movimiento inverso del punto representativo corresponderá a una compresión. La curva señalada con la cifra 3 representa una expansión acompañada de un descenso de la presión. La curva 4 es una expansión, a pesar de que la presión aumenta. La variación de la temperatura en cualquier transformación puede calcularse por medio de la ecuación de estado.

En la mayoría de las transformaciones termodinámicas varían simultáneamente todos los parámetros de estado. No obstante se puede destacar una serie de fenómenos muy simples, pero al mismo tiempo importantes en la práctica. A ellos pertenecen las transformaciones, recién mencionadas, a volumen constante (isócara), a presión constante (isobárica), así como la transformación que se cumple sin intercambio de calor (adiabática) y la que se efectúa a temperatura constante (isotérmica).

### § 59. Trabajo. Ciclos

En la mecánica se suele utilizar el trabajo concebido como producto de una fuerza por un espacio. En la termodinámica nos interesa, por lo general, el trabajo de variación del volumen de un cuerpo. La fig. 76 representa los contornos de un cuerpo en dos estados. El volumen del cuerpo varía desde  $v_1$  hasta  $v_2$ . El trabajo total de variación del volumen se puede considerar como la suma de los trabajos invertidos en trasladar los elementos de área  $dS$  el espacio  $dl$ . Si las fuerzas que actúan son perpendiculares a la superficie del cuerpo, el trabajo de traslación de un trozo de superficie será igual a  $\int dl$  o, introduciendo la presión,  $p dS dl$ , es decir,

$$dA = p dv,$$

donde  $dv$  es una variación local de volumen. Está claro que el trabajo total vendrá expresado por la integral definida

$$A = \int_{v_1}^{v_2} p dv.$$

En el diagrama  $p, v$  el trabajo de compresión o de expansión tiene un sentido simple: está representado por el área limitada por

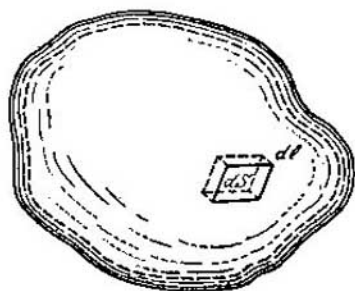


FIG. 76.

la curva de la transformación y las dos ordenadas extremas trazadas por los valores inicial y final del volumen.

Si durante una transformación de compresión o de expansión permanece invariable la presión y si, además, es la misma en todos los puntos de la superficie,  $p$  se puede sacar del signo de integración y calcular el trabajo por la fórmula

$$A = p (v_2 - v_1).$$

Como ya dijimos, el trabajo se puede considerar positivo o negativo según se convenga. Nosotros admitimos que es positivo el trabajo

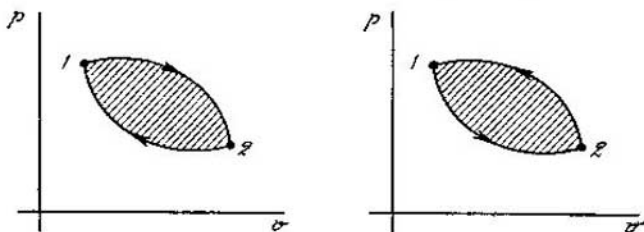


FIG. 77.

que cede el cuerpo al medio exterior, es decir, el trabajo de expansión. Respectivamente, el trabajo de compresión será negativo.

Si como resultado de una transformación cualquiera el cuerpo pasa de un estado 1 a un estado 2 y luego, siguiendo el mismo camino, vuelve al estado inicial, el trabajo total de esta transformación será, como es natural, nulo: el trabajo de expansión cedido a los cuerpos externos será igual al trabajo de compresión que dichos cuerpos ceden después al sistema considerado. Pero las cosas varían por completo cuando el camino «de ida» es distinto del «de vuelta». Las transformaciones en que el cuerpo retorna al estado inicial por un camino distinto se llaman *ciclos*. La fig. 77 representa dos ciclos, en los cuales las flechas indican el sentido de las transformaciones. Una de ellas se efectúa en el sentido de las agujas del reloj y la otra, en el contrario. La transformación que se cumple de izquierda a derecha es de expansión, por lo tanto, en el ciclo que se efectúa en el sentido de las agujas del reloj el trabajo de expansión es mayor que el de compresión. En este caso se cede trabajo al medio exterior. Es evidente que cuando el ciclo se realiza en el sentido contrario el sistema considerado recibe cierta cantidad de trabajo. El trabajo recibido o cedido durante el ciclo viene expresado por el área de éste (rayada en los dibujos).



### § 60. Transformaciones del estado de los gases

Vamos a estudiar las leyes de los cuatro procesos más simples de transformación del estado de los gases, limitándonos en la mayoría de los casos a los gases que satisfacen la ecuación del estado gaseoso. Ahora veremos que conociendo la ecuación de estado de una sustancia se puede, aplicando el primer principio de la termodinámica, deducir una serie de conclusiones valiosas sobre el comportamiento de un cuerpo en condiciones diversas. El primer principio de la termodinámica, para los gases, lo escribiremos de la forma

$$\Delta Q = dU + p dv.$$

TRANSFORMACIÓN ISÓCORA. A volumen constante, el primer principio de la termodinámica toma la forma

$$\Delta Q = dU.$$

El sistema considerado mantiene intercambio calorífico con el medio externo, no recibe trabajo ni el medio exterior ni el sistema que se considera. Pueden ocurrir dos fenómenos: 1) el cuerpo recibe calor del medio y su energía interna aumenta; 2) el cuerpo cede calor al medio y su energía interna disminuye.

La cantidad de calor necesaria para aumentar un grado de temperatura del cuerpo sin que varíe su volumen se llama *capacidad calorífica a volumen constante* y se designa por la letra  $c$  con el subíndice  $v$ :

$$c_v = \left( \frac{dU}{dT} \right)_{v=\text{const.}}$$

Si se conoce la dependencia de la energía interna respecto de la temperatura, la capacidad calorífica  $c_v$  puede calcularse.

A altas temperaturas la energía interna de los gases depende linealmente de la temperatura, ya que la capacidad calorífica  $c_v$  no depende de la última en este caso.

No tenemos posibilidad de demostrar un teorema importante. De las leyes generales de la termodinámica se deduce que, si  $p$  depende de  $T$  linealmente,  $c_v$  no puede depender del volumen. Como quiera que en los gases que satisfacen las ecuaciones del estado gaseoso y de Van der Waals existe esta dependencia lineal, tratándose de gases,  $c_v$  no depende de  $v$  y, por lo tanto, la indicación «cuando  $v=\text{const}$ » puede omitirse en la fórmula anterior:

$$c_v = \frac{dU}{dT} \quad (\text{para los gases}).$$

Si  $c_v$  depende poco de la temperatura, la energía interna de los gases se puede representar por la fórmula

$$U = c_v T + \text{const.}$$

En los gases perfectos la constante no depende del volumen y se puede prescindir de ella. Para un gas que satisfaga la ecuación de Van der Waals, la constante es igual a  $-a/v$ . De este modo,

$U = c_v T$  si el gas es perfecto y

$U = c_v T - \frac{a}{v}$  si el gas satisface la ecuación de Van der Waals.

En efecto, en el caso de los gases perfectos, la variación del volumen del gas conservando la temperatura no va ligada a una variación de la energía (véase más adelante, pág. 184). Pero si las moléculas se atraen con una fuerza, referida a la unidad de superficie,  $p' = a/v^2$ , al expandirse el gas aumenta la energía en la cantidad de trabajo invertido en vencer estas fuerzas, es decir, en

$$\int p' dv = -\frac{a}{v} + \text{const.}$$

**TRANSFORMACIÓN ISOBÁRICA.** En esta transformación los tres sumandos que figuran en el primer principio son distintos de cero. El sistema intercambia con el medio calor y trabajo sin que la presión en él varíe. La variante más frecuente de esta transformación consiste en que el cuerpo recibe calor del medio, pero no lo invierte por completo en aumentar su energía interna, sino que parcialmente lo devuelve al medio en forma de trabajo mecánico. En otras posibles variantes no nos detendremos.

Es evidente que la capacidad calorífica en esta transformación debe diferir de la que hemos estudiado en la transformación isócara. En la transformación isobárica el calor suministrado se invierte no sólo en calentar, por esto la capacidad calorífica  $c_p$  (así designaremos la *capacidad calorífica a presión constante*) deberá ser mayor que  $c_v$ . En algunos casos se puede valorar esta diferencia.

Dividamos la expresión del primer principio por el incremento de la temperatura:

$$c = \frac{\Delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + p \frac{dv}{dT}.$$

Esta es la expresión de la capacidad calorífica correcta para cualquier transformación, incluida la isobárica que ahora nos interesa. Para los gases esta fórmula se escribe así:

$$c_p = c_v + p \frac{dv}{dT}.$$

Para un gas perfecto se obtiene un resultado muy simple. Como  $p\nu = \mu RT$ , se tiene que  $\frac{d\nu}{dT} = \frac{\mu R}{p}$  y  $c_p = c_v + \mu R$ . De esta forma, la diferencia entre las capacidades caloríficas, a presión constante y a volumen constante, es igual al producto del número de moles de gas por la constante universal de los gases. En este caso, para las capacidades caloríficas molares (calores moleculares):

$$c_p - c_v = R.$$

Teniendo en cuenta que  $R \approx 2 \text{ cal}/(\text{mol} \cdot ^\circ\text{K}) = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot ^\circ\text{K})$ ,

$$c_p - c_v = 2 \text{ cal}/(\text{mol} \cdot ^\circ\text{K}).$$

**TRANSFORMACIÓN ISOTÉRMICA.** En primer lugar es necesario subrayar, para evitar confusiones, que invariación de la temperatura no significa en modo alguno la ausencia de intercambio calorífico entre el sistema y el medio. El sistema puede recibir calor del medio, pero no invertirlo en elevar su temperatura. Como sabemos muy bien, la energía interna de un cuerpo puede aumentar permaneciendo invariable la temperatura (recuérdese la fusión del hielo). Además existe otra posibilidad (más importante que la primera) para las transformaciones en los gases: al recibir calor del medio exterior, el sistema puede volvérselo a ceder a dicho medio, pero en forma de trabajo mecánico.

En el caso de gases reales ambos modos de gastar el calor en la transformación isotérmica son totalmente posibles: al recibir el calor, el gas se expande sin calentarse y, primero, cede trabajo al medio exterior y, segundo, emplea calor en variar la energía potencial de interacción de las moléculas.

En el caso de los gases perfectos, en los cuales la energía interna depende únicamente de la temperatura y, por consiguiente, no puede variar en la transformación isotérmica, el primer principio toma una forma extraordinariamente sencilla. Como  $dU=0$ , se tiene que  $\Delta Q = \Delta A$ . Por lo tanto, o el sistema se expande recibiendo calor del medio exterior y cediéndole trabajo o, al contrario, el sistema se comprime cediendo calor al medio y recibiendo de los cuerpos externos energía en forma de trabajo mecánico. En la transformación isotérmica el gas perfecto es un transformador de energía: la recibe del medio en una forma y la devuelve a él totalmente, pero en otra forma.

En el caso de un gas perfecto no es difícil pasar de la forma diferencial  $\Delta Q = p d\nu$  a la integral. El trabajo (o el calor, esto es indiferente, puesto que son iguales) de expansión isotérmica desde

el volumen  $v_1$  hasta el volumen  $v_2$  será

$$A = \int_{v_1}^{v_2} p \, dv;$$

poniendo aquí el valor de la presión de la ecuación del estado gaseoso y sacando la temperatura, como magnitud constante, del signo de integración, se obtiene:

$$A = \mu RT \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = \mu RT \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

Advertimos que las expansiones isotérmicas en un mismo número de veces pero a distintas temperaturas exigen un trabajo diferente, tanto mayor, cuánto más elevada sea la temperatura. Por ejemplo, la duplicación del volumen de un mol de cualquier gas perfecto a la temperatura de  $300^\circ\text{K}$  (ambiente) requiere un trabajo de  $8,31 \cdot 300 \cdot \ln 2 = 1730$  J, mientras que a la temperatura de  $3000^\circ\text{K}$  lo requiere diez veces mayor, es decir, de  $17\,300$  J.

La realización práctica de una transformación isotérmica puede ser difícil. En todo caso, para que la transformación sea por lo menos aproximadamente isotérmica, es necesario que las paredes del recipiente, a través de las cuales la sustancia está en contacto con el medio, sean perfectamente conductoras del calor y que la transformación se cumpla muy despacio, para que el calor (o el trabajo) tenga tiempo de retornar al medio en forma de trabajo (o de calor) sin detenerse en el sistema.

**TRANSFORMACIÓN ADIABÁTICA.** En ausencia de intercambio calorífico con el medio, lo que se puede conseguir imponiendo unas condiciones en cierto modo inversas en comparación con las de la transformación isotérmica (perfecto aislamiento térmico y desarrollo rápido de la transformación, para que el calor no tenga tiempo de pasar del sistema al medio y viceversa), se producen los fenómenos de compresión o expansión adiabática. En el primer caso, de acuerdo con el primer principio de la termodinámica, que ahora escribiremos de la forma

$$p \, dv = -dU,$$

el trabajo mecánico se transforma en energía interna del cuerpo; en el segundo caso, al contrario, el trabajo se realiza a costa de una disminución de la energía interna del sistema que se considera.

En las tres transformaciones que hemos estudiado hasta ahora la marcha de las variaciones de la presión, el volumen y la temperatura era bastante evidente, y para los gases se deducía inmediatamente de la ecuación de estado. En la transformación adiabá-

tica el carácter de la variación de los parámetros de estado no es evidente, ya que cambian los tres. La resolución conjunta de dos ecuaciones — la ecuación de estado de los gases y la del primer principio de la termodinámica — permite establecer estas dependencias. Como a nosotros nos interesa la parte esencial del problema, nos limitaremos al caso de un gas perfecto, para que los cálculos matemáticos resulten más fáciles. Aplicando la expresión de la capacidad calorífica de los gases a volumen constante  $\frac{dU}{dT} = c_v$  y sustituyendo la presión  $p$  por  $\frac{\mu RT}{v}$ , obtenemos  $-\frac{\mu R}{c_v} \frac{dv}{v} = \frac{dT}{T}$ . Supongamos que en el estado inicial los parámetros del gas eran  $v_1, p_1, T_1$ , y en el final,  $v_2, p_2, T_2$ . Integrando la última ecuación desde el punto inicial hasta el punto final de la transformación adiabática, obtenemos

$$-\frac{\mu R}{c_v} \int_1^2 \frac{dv}{v} = \int_1^2 \frac{dT}{T}; \quad -\frac{\mu R}{c_v} \ln \frac{v_2}{v_1} = \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Y recordando que  $c_p - c_v = \mu R$  y haciendo  $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$ , obtenemos

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma-1}.$$

De esta ecuación se deduce que en la compresión adiabática aumenta la temperatura, y en la expansión, disminuye. Esta circunstancia se aprovecha con frecuencia en la práctica. La expansión rápida de los gases se emplea cuando se quiere enfriarlos. Sabemos, por ejemplo, que el anhídrido carbónico que se deja salir de una botella puede, al expandirse, transformarse en hielo seco, esto demuestra que el descenso de la temperatura es muy intenso. Por el contrario, la compresión adiabática se puede utilizar, por ejemplo, para inflamar una sustancia cualquiera. Es corriente el experimento demostrativo en que un trozo de algodón empapado en éter se coloca en un cilindro en el que hay aire. El aire se puede comprimir con un émbolo. Cuando el émbolo se mueve rápidamente, el algodón se inflama.

Como convinimos representar las transformaciones en el diagrama  $p, v$ , conviene transformar la ecuación que hemos escrito del proceso adiabático sustituyendo la temperatura por medio de la ecuación del estado gaseoso. En este caso obtenemos:

$$p_1 v_1^\gamma = p_2 v_2^\gamma.$$

Comparando esta ecuación con la ley de Boyle — Mariotte, que se cumple en la transformación isotérmica, vemos una diferencia

esencial en el carácter que tiene la variación de la presión en la compresión y en la expansión. En la expansión o compresión isotérmica permanece invariable el producto  $pv$ , mientras que en la transformación adiabática se conserva el producto  $pv^\gamma$ . Como  $\gamma > 1$ , la curva representativa de la transformación adiabática en el diagrama (es decir, la *adiabática*) es más pendiente que la isotérmica. Si el volumen se reduce a la mitad en una transformación isotérmica, la presión aumenta al doble; en la transformación adiabática la presión varía más bruscamente. Por ejemplo, para la mayoría de los gases diatómicos, en los cuales  $\gamma = 1,4$ , cuando el volumen se reduce a la mitad la presión aumenta 2,63 veces.

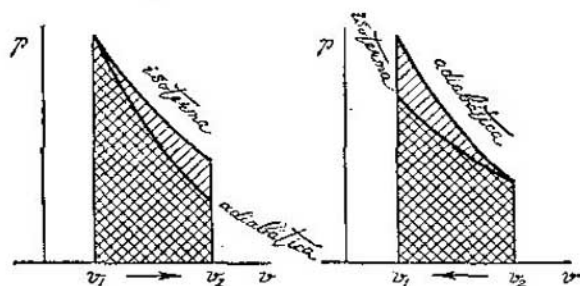


FIG. 78.

Ya hemos subrayado que ambas transformaciones tienen carácter ideal y que para crear las condiciones ideales necesarias para ellas las exigencias son opuestas. Por esto está claro que las transformaciones con gases que se efectúan en condiciones reales dan curvas intermedias entre la adiabática y la isotérmica.

No es difícil dar una explicación clara a la diferencia de marcha de la adiabática y la isoterma. En la compresión adiabática el gas se calienta; por esto, si la reducción del volumen es la misma, la presión aumenta más en la transformación adiabática, ya que el calentamiento a volumen constante conduce a un aumento de la temperatura.

Como puede verse en la fig. 78, el trabajo de expansión isotérmica es mayor que el de expansión adiabática. Y al contrario, el trabajo de compresión isotérmica es menor que el de compresión adiabática. Esto, como es natural, se refiere a aquellos casos en que los puntos iniciales de las transformaciones coinciden.

El trabajo de una transformación adiabática se puede calcular gráficamente y por las fórmulas. En primer lugar, del primer principio de la termodinámica para las transformaciones adiabáticas se deduce, que el trabajo debe ser igual a la variación de la energía

interna:

$$A = \int_1^2 p \, dv = U_1 - U_2.$$

En el caso de los gases perfectos la diferencia de energías se calcula de una forma elemental:  $U_1 - U_2 = c_v (T_1 - T_2)$ . Por lo tanto, cuando se trata de gases perfectos el trabajo también se puede calcular por esta fórmula.

A la definición del trabajo en la transformación adiabática se puede llegar también por otro camino. Como en cualquier punto intermedio de la transformación se cumple la igualdad  $p_1 v_1^\gamma = p v^\gamma$ , donde sin subíndices se representan los valores variables de la presión y el volumen, la integral del trabajo se puede escribir de la forma

$$A = p_1 v_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^\gamma},$$

lo que, después de integrar desde el punto inicial hasta el punto final de la transformación, da

$$A = \frac{p_1 v_1^\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{1}{v_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{v_2^{\gamma-1}} \right).$$

Se comprende que esta fórmula coincide completamente con la  $A = c_v (T_1 - T_2)$ , lo que se puede demostrar fácilmente aplicando la ecuación de estado del gas perfecto y transformando la fórmula obtenida (sacando fuera de paréntesis  $\frac{1}{v_1^{\gamma-1}}$ ) de manera que

$$A = \frac{\mu RT_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

En dependencia de los datos que se posean, una u otra fórmula puede resultar la más cómoda en la práctica.

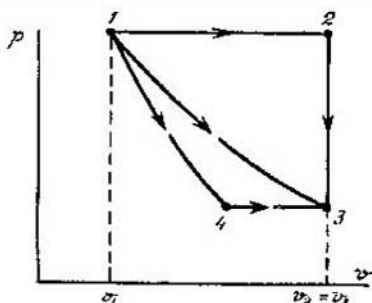


FIG. 79.

Pondremos un ejemplo ilustrativo de la afirmación, hecha en el cap. 9, de que los incrementos  $\Delta Q - \Delta A$  no son diferenciales totales, es decir, no caracterizan la variación del estado de un sistema.

Supongamos que el estado 1 de un mol de hidrógeno (fig. 79) se caracteriza por los datos siguientes:  $v_1 = 0,02 \text{ m}^3$ ,  $T_1 = 300^\circ \text{K}$ ,  $p_1 = \frac{RT_1}{v_1} = 125\,000 \text{ J/m}^3$  (aquí

$R=8,31 \text{ J/}^\circ\text{K}$ ,  $c_p - c_v=R$ , y como el hidrógeno es un gas diatómico,  $c_p/c_v=1,4$ . Entonces  $c_p=29,4 \text{ J/}^\circ\text{K}$  y  $c_v=21 \text{ J/}^\circ\text{K}$ . Consideremos tres caminos posibles de paso del gas al estado 3:  $v_3=0,04 \text{ m}^3$ ,  $T_3=300^\circ\text{K}$ ,  $p_3=63\,000 \text{ J/m}^3$ .

Camino 1-3. El trabajo por la isoterma  $A_{1-3}=RT_1 \ln \frac{v_3}{v_1}=1700 \text{ J}$ . Estos 1700 J se han tomado del foco caliente, y la energía interna  $U=\text{const}$ , puesto que  $T_1=T_3$ .

Camino 1-2-3. Aquí 1-2 es una isobara. Por consiguiente,  $T_2=600^\circ\text{K}$ . Del foco caliente se toman  $Q_{1-2}=c_p(T_2-T_1)=8600 \text{ J}$ , y el trabajo en vencer las fuerzas externas  $A_{1-2}=p_1(v_2-v_1)=2300 \text{ J}$ . Por lo tanto, la energía interna del gas aumentó en  $\Delta U=8600-2300=6300 \text{ J}$ . 2-3 es un enfriamiento isócoro, al foco frío se ceden  $Q_{2-3}=c_v(T_2-T_3)=6300 \text{ J}$ . Y como  $v_2=v_3$ , no se realiza trabajo mecánico.

Así pues, en el camino 1-2-3 el foco caliente perdió 8600 J, se realizó un trabajo de 2300 J y el foco frío recibió 6300 J. En el camino 1-3 el foco caliente perdió 1700 J y se realizó un trabajo de 1700 J, el estado del foco frío no cambió. La variación del estado del gas fue igual en ambos casos.

Camino 1-4-3. Aquí 1-4 es una adiabática y 4-3 es una isobara;

$$\frac{v_4}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p_4}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 2^{\frac{1}{\gamma}}, \quad v_4 = 0,020 \cdot 2^{\frac{1}{\gamma}} \text{ m}^3. \text{ La temperatura } T_4 \text{ la hallamos par-}$$

tiendo de la correlación  $\frac{T_4}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_4}\right)^{\gamma-1}$ ,  $T_4=300 \cdot 2^{\frac{1}{\gamma}-1}$ . En el camino 1-4 el trabajo en vencer las fuerzas externas se realiza únicamente a expensas de la disminución de la energía interna:

$$A_{1-4} = -c_v(T_4-T_1) = 6300 \left(1 - 2^{\frac{1}{\gamma}-1}\right) \text{ J.}$$

En el camino 4-3 el foco caliente cede  $Q_{4-3}=c_p(T_3-T_4)=8600 \left(1 - 2^{\frac{1}{\gamma}-1}\right) \text{ J}$  de calor y el trabajo realizado en vencer las fuerzas externas será

$$A_{4-3} = p(v_3-v_4) = 2300 \left(1 - 2^{\frac{1}{\gamma}-1}\right) \text{ J.}$$

Por consiguiente, en el camino 4-3 la energía interna aumentó precisamente en  $6300 \left(1 - 2^{\frac{1}{\gamma}-1}\right) \text{ J}$ . De este modo, el camino 1-4-3 tampoco condujo a una variación de la energía interna del gas determinada uniformemente por la temperatura.

MEDIDA DE LA CAPACIDAD CALORIFICA DE LOS GASES. Al parecer, lo más fácil sería determinar la capacidad calorífica del gas llenando con él un recipiente y colocando este último en un calorímetro. Pero al hacer la medición por este procedimiento no tendríamos en cuenta que la capacidad calorífica del gas es extraordinariamente pequeña comparada con la del recipiente, cualquiera que sea el material sólido de que esté hecho. Por esto la capacidad calorífica de un gas a volumen constante no se mide. Lo que se mide es la capacidad calorífica a presión constante. Para este fin se hace pasar por el calorímetro un serpentín, en el que circula el gas



a presión constante. Con un elemento termoeléctrico se mide la temperatura del gas a la entrada del calorímetro y a la salida de él. El gas, que entra en el calorímetro después de haber sido calentado previamente, cede parte de su calor al agua. Conociendo la cantidad de gas que pasa por el recipiente en un tiempo determinado y la cantidad de calor absorbida por el agua del calorímetro en este mismo plazo, hallamos sin dificultad la capacidad calorífica del gas a la presión constante  $c_p$ , dividiendo esta cantidad de calor por la masa de gas que ha pasado y por la diferencia entre las temperaturas del gas a la entrada y a la salida.

Para determinar la capacidad calorífica a volumen constante se utiliza la relación entre las capacidades caloríficas — coeficiente de Poisson  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ . Para hallar  $\gamma$  se han propuestos muchos procedimientos, parte de los cuales se basan en medir los volúmenes y presiones del gas en los estados sucesivos por que pasa durante una transformación adiabática. También se pueden utilizar otras ecuaciones que ligan las capacidades caloríficas, por ejemplo, la relación que determina la diferencia entre  $c_p$  y  $c_v$ .

En la tabla siguiente se dan las capacidades caloríficas de algunos gases.

Gas	$c_v$ , J/(mol·°K)	$c_p$ , J/(mol·°K)	$\gamma$
Helio, He . . . . .	12,5	20,9	1,67
Hidrógeno, H <sub>2</sub> . . . . .	20,4	28,8	1,41
Nitrógeno, N <sub>2</sub> . . . . .	20,39	28,6	1,41
Oxígeno, O <sub>2</sub> . . . . .	20,9	28,9	1,40
Vapor de agua, H <sub>2</sub> O . . . . .	27,8	36,2	1,31
Metano, CH <sub>4</sub> . . . . .	27,3	35,6	1,30
Alcohol etílico, C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> O	79,4	87,7	1,11

### § 61. Efecto Joule-Thomson

Se llama así el paso de un gas, a través de un orificio, de una región de presión mayor  $p_1$  a una región de presión menor  $p_2$ . El recipiente en que tiene lugar el proceso está térmicamente aislado del medio circundante.

Por las condiciones del proceso, las presiones  $p_1$  y  $p_2$  deben mantenerse invariables. Para conseguir esto, los dos émbolos (fig. 80) deben moverse hacia la derecha a medida que pasa el gas.

La masa de gas  $M$  que pasa de izquierda a derecha no conserva su volumen, sino que éste varía de  $v_1$  a  $v_2$ , puesto que pasa a una

región en la que hay otra presión. El paso se produce por la acción del émbolo izquierdo y existiendo la reacción constante  $p_1$ ; este trabajo es igual a  $p_1 \Delta v$ , donde  $\Delta v$  es la variación de volumen que experimenta el gas a la izquierda del tabique de separación. Pero el volumen a la izquierda varía precisamente en  $v_1$ , por lo tanto, el trabajo del émbolo izquierdo será igual a  $p_1 v_1$ . El émbolo derecho realiza un trabajo negativo, que también es igual al producto de la presión  $p_2$  por el incremento del volumen, que aquí es igual a  $v_2$ . Así, pues, al pasar la masa  $M$  de gas de izquierda a derecha se realiza el tra-

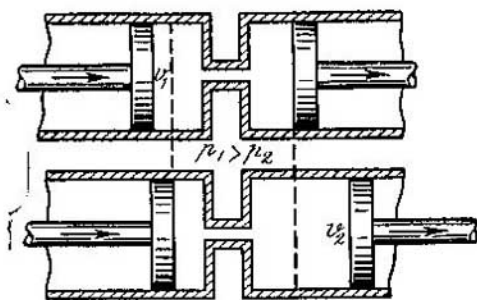


FIG. 80.

bajo  $p_1 v_1 - p_2 v_2$ . La ley de conservación de la energía impone que en esta misma cantidad varíe la energía interna del gas. Por consiguiente,

$$U_2 - U_1 = p_1 v_1 - p_2 v_2,$$

fórmula que es correcta para cualquier masa de gas. Esto significa que en el proceso de paso del gas de un cilindro a otro, la magnitud

$$U + pv = \text{const}$$

(que se llama *función térmica* o *entalpía*) permanece constante.

En un gas perfecto tanto  $U$  como  $pv$  dependen únicamente de la temperatura. Por lo tanto, en la transformación de Joule — Thomson la temperatura del gas perfecto permanece invariable.

En los gases reales las cosas ocurren de otro modo. Si el gas no se puede considerar perfecto, en la transformación de Joule — Thomson puede calentarse o enfriarse, en dependencia del carácter que tengan las fuerzas de interacción de sus moléculas.

Es notable el hecho de que, a temperaturas distintas, un mismo gas se puede comportar de modos diferentes. A alta temperatura los gases se calientan durante la transformación de Joule — Thomson, a baja, se enfrían. Para los gases más usuales se conocen los *puntos*

de inversión, es decir, las temperaturas a las cuales el efecto cambia de signo. La temperatura de inversión del oxígeno y del nitrógeno se encuentra más alta que la temperatura ambiente. Por esto en la transformación de Joule — Thomson se observa que el aire se enfría tanto a la temperatura ambiente como, tanto más, a temperaturas bajas. La temperatura de inversión del hidrógeno se encuentra a temperaturas bastante bajas. El efecto Joule — Thomson a temperaturas más bajas que la de inversión se utiliza en la técnica de licuefacción de los gases.

# 11

## ENTROPIA

### § 62. Principio de la existencia de la entropía

A mediados del siglo pasado se hizo un descubrimiento importante referente a las transformaciones termodinámicas reversibles. Resultó que, además de la energía interna, el cuerpo posee una notable función de estado, la entropía. Lo mismo que la energía interna, la entropía se determina salvo una constante arbitraria. La experiencia proporciona el valor de la diferencia del incremento de la entropía. Si un cuerpo o sistema al efectuar una transición infinitesimal de un estado a otro, a la temperatura  $T$ , recibe el calor  $\Delta Q$ , la relación  $\Delta Q/T$  es la diferencial total de cierta función  $S$ . Esta función es la *entropía*, que viene determinada por una de las dos igualdades equivalentes que siguen:

$$dS = \frac{\Delta Q}{T}, \quad S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\Delta Q}{T}.$$

La afirmación de que existe una función cuya diferencial es  $\Delta Q/T$  recibe el nombre de *principio de la existencia de la entropía* y es una de las leyes más importantes de la naturaleza. Este principio constituye una parte importante del segundo principio de la termodinámica, del que trataremos más adelante. El descubrimiento de este principio, como el de todo el segundo principio de la termodinámica está ligado ante todo con los nombres de Carnot y Clausius. La esencia de este principio, a pesar de su carácter hasta cierto punto abstracto, es fácil de comprender: el paso de un cuerpo de un estado a otro puede efectuarse por cantidad innumerable de

procedimientos (distintas curvas que en la gráfica empiezan y terminan en los mismos puntos); en estas transiciones el cuerpo puede recibir las cantidades de calor más diversas, pero en todos los casos

la integral  $\int_1^2 \frac{\Delta Q}{T}$  tendrá los mismos valores. La razón de la cantidad de calor a la temperatura con que este calor fue recibido,  $\Delta Q/T$ , se llama a veces *calor reducido*. Como una integral siempre se puede representar aproximadamente como una suma, la variación de la entropía al pasar de un estado a otro es igual a la suma de los calores reducidos. Supongamos que un cuerpo, calentado uniformemente desde 20 hasta 25°C, recibe, al elevarse su temperatura, un julio de calor por cada grado. En este caso el incremento de la entropía será aproximadamente igual a

$$S_1 - S_2 \approx \frac{1\text{J}}{293,5^\circ \text{K}} + \frac{1\text{J}}{294,5^\circ \text{K}} + \frac{1\text{J}}{295,5^\circ \text{K}} + \frac{1\text{J}}{296,5^\circ \text{K}} + \frac{1\text{J}}{297,5^\circ \text{K}}.$$

Las variaciones de la entropía más fáciles de expresar son las que ocurren en las transformaciones isotérmicas:

$$S_2 - S_1 = \frac{Q}{T},$$

donde  $Q$  es el calor recibido durante la transformación. Así, por ejemplo, al fundirse 1 kg de hielo la entropía de la sustancia aumenta en

$$\frac{33,6 \cdot 10^4 \text{ J}}{273^\circ \text{K}} = 1230 \text{ J/}^\circ \text{K}.$$

Como cero de entropía se puede tomar el valor de la entropía de cualquier estado (agua en ebullición, hielo fundente). Pero en ciertos casos se toma como cero el valor de la entropía de la sustancia a la temperatura de cero absoluto. Para esto, por otra parte, existen ciertos fundamentos teóricos (teorema de Nernst) en los cuales no nos detendremos.

Tomando  $S=0$  cuando  $T=0$ , la entropía de una sustancia a la temperatura  $T$  se puede hallar por la fórmula

$$S = \int_0^T \frac{c_p dT}{T},$$

si se calienta a presión constante. Como puede verse, para conocer la entropía hay que estudiar cómo varía la capacidad calorífica con la temperatura.

Si se conoce la ecuación del estado de la sustancia, la entropía (salvo una constante arbitraria) se puede calcular con bastante faci-

idad. Por definición  $dS = \frac{\Delta Q}{T}$ . Sustituyendo  $\Delta Q$  por el valor que para él da el primer principio de la termodinámica, obtenemos

$$dS = c_v \frac{dT}{T} + p \frac{dv}{T}.$$

Valiéndonos de la ecuación del estado gaseoso, eliminamos de aquí la presión. Obtenemos entonces que  $dS = c_v \frac{dT}{T} + \mu R \frac{dv}{v}$ . Si tomamos ahora la integral indefinida, obtenemos la expresión de la entropía salvo una constante arbitraria

$$S = c_v \ln T + \mu R \ln v + \text{const.}$$

Se puede tomar también la integral definida de  $dS$  cuyos límites sean dos estados. Entonces se obtiene la expresión de la diferencia de las entropías de los dos estados

$$S_2 - S_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \mu R \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

Esta es la expresión de la entropía de los gases perfectos. De ella se deduce que la entropía aumenta al elevarse la temperatura y al crecer el volumen del gas. Esto, como es natural, coincide totalmente con la afirmación general acerca de que la entropía aumenta cuando al cuerpo se le suministra calor.

*Ejemplo.* Demostremos que la entropía es realmente función del estado del sistema. Recurrirnos al ejemplo de la pág. 181 (fig. 79).

Camino 1—2—3. La variación de la entropía

$$S_2 - S_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} = 20,74 \ln 2 + 8,38 \ln 2 = 29,36 \ln 2 \text{ J}/(\text{mol} \cdot ^\circ \text{K}).$$

La variación de la entropía

$$S_3 - S_2 = 20,74 \ln \frac{1}{2} = -20,74 \ln 2 \text{ J}/(\text{mol} \cdot ^\circ \text{K}).$$

La variación total de la entropía en el camino 1—2—3

$$S_3 - S_1 = 8,38 \ln 2 \text{ J}/(\text{mol} \cdot ^\circ \text{K}).$$

Camino 1—3.  $S_3 - S_1 = 8,38 \ln 2 \text{ J}/(\text{mol} \cdot ^\circ \text{K}).$

Camino 1—4—3. Como 1—4 es la adiabática,  $S_4 - S_1 = 0,$

$$\begin{aligned} S_3 - S_4 &= c_p \ln \frac{T_3}{T_4} + 8,38 \ln \frac{v_3}{v_4} = 20,74 \ln 2^{1-\frac{5}{7}} + 8,38 \ln 2^{1-\frac{5}{7}} = \\ &= 29,36 \ln 2 \text{ J}/(\text{mol} \cdot ^\circ \text{K}). \end{aligned}$$

Puede verse que, en efecto, cualquiera que sea el camino seguido en la transición del gas del estado 1 al estado 3, la variación de la entropía es la misma.

§ 63. Principio del aumento de la entropía

Como ya se dijo, transformaciones reversibles no existen, aunque con la exactitud alcanzable por la experiencia se pueden realizar multitud de transformaciones que prácticamente no difieren de las reversibles. No obstante, existen ejemplos de transformaciones que siempre son unilaterales, por cuya razón no pueden invertirse de manera alguna. Así, por ejemplo, un gas puede expandirse de por sí, pero no puede comprimirse si no se le aplican fuerzas exteriores. El calor puede espontáneamente pasar de un cuerpo caliente a otro frío, pero sólo a costa de trabajo (energía eléctrica, por ejemplo) puede pasar del cuerpo frío al más caliente. Cuando existe rozamiento, la energía cinética de un movimiento macroscópico se transforma siempre en energía interna, pero la transformación inversa nunca se produce espontáneamente. La irreversibilidad de todas las demás transformaciones se debe, en fin de cuentas, a que en cada una de ellas existe, en mayor o menor grado, alguna de las transformaciones unilaterales que hemos mencionado. En las transformaciones reales es imposible evitar las expansiones espontáneas, el rozamiento y la difusión de calor.

¿Existe algún indicio común a todas las transformaciones unilaterales antedichas? Sí, este indicio consiste en que en todas las transformaciones unilaterales aumenta la entropía.

En el caso del intercambio calorífico entre dos cuerpos, la variación total (de todo el sistema) de la entropía es igual a

$$S_2 - S_1 = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2},$$

donde  $Q_1$  es el calor recibido por el cuerpo más frío y  $Q_2$ , el calor perdido por el cuerpo más caliente.

Si  $T_2$  es mayor que  $T_1$ , se tiene que  $Q_1 = -Q_2 > 0$ , puesto que consideramos positivo el calor que se le transmite al cuerpo. Por lo tanto,

$$S_2 - S_1 = Q_1 \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) > 0,$$

es decir, cuando existe intercambio de calor, la entropía total del sistema en que ocurre dicho intercambio aumenta.

Otro caso. Dentro de un recipiente que contiene gas tiene lugar un intenso movimiento mecánico (por ejemplo, gira una rueda). El volumen no cambia, la temperatura aumenta, por lo tanto la entropía variará,  $S_2 - S_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1}$ , es decir, aumentará.

Finalmente, cuando la expansión se produce en el vacío a temperatura constante, el incremento de la entropía  $S_2 - S_1 = \mu R \ln \frac{v_2}{v_1}$ ,

es también positivo. Así, pues, en todas las transformaciones unilaterales aumenta la entropía del sistema.

No es difícil comprender la importancia que tiene esta conclusión para todas las transformaciones irreversibles. Como cada transformación va acompañada de efectos unilaterales que se desarrollan con aumento de la entropía, el incremento de ésta en una transformación irreversible será mayor que el que se producirá si la transición fuera reversible. Sea  $\Delta Q$  el calor recibido por el cuerpo a la temperatura  $T$  en la transformación irreversible que nos interesa. Si la transformación fuera reversible, el incremento de la entropía sería igual a  $\Delta Q/T$ ; en el proceso real dicho incremento será mayor que esta cantidad

$$dS > \frac{\Delta Q}{T}.$$

Si el sistema está aislado térmicamente,  $\Delta Q=0$  y la afirmación anterior toma la forma

$$dS > 0,$$

es decir, en un sistema térmicamente aislado únicamente son posibles las transformaciones que se desarrollan con aumento de la entropía.

Se comprende perfectamente que la entropía, junto con la energía interna, son funciones importantísimas que definen la transformación termodinámica. Puede decirse que la entropía es el director de la transformación y que la energía interna es su contable: la entropía determina la dirección en que debe transcurrir la transformación, y la energía «paga los gastos» que ocasiona el realizarla.

Si en las fórmulas anteriores se sustituye el signo  $>$  por el  $\geq$ , la ley de la entropía, tanto para las transformaciones reversibles como para las irreversibles, se expresa por medio de la fórmula abreviada

$$dS \geq \frac{\Delta Q}{T}.$$

Esta fórmula refleja el contenido del *segundo principio de la termodinámica*. Referido a los sistemas cerrados (aislados), el segundo principio dice: la entropía de un sistema térmicamente aislado aumenta o permanece invariable.

Conviene unificar ambos principios de la termodinámica en una sola fórmula

$$dS \geq \frac{dU + p dv}{T},$$

que resulta cómoda para resolver todos los problemas prácticos de la termodinámica.

El principio del aumento de la entropía se refiere a los sistemas aislados. Pero si el sistema está en contacto con el medio, es decir, si se trata de un sistema abierto, su entropía puede disminuir.

A continuación se demostrará que los procesos de ordenación molecular van ligados a una disminución de la entropía. Un organismo vivo construye, con el sistema desordenado de moléculas pequeñas que recibe durante los procesos de alimentación y respiración, estructuras altamente organizadas, las macromoléculas biológicas (pág. 696). Al ocurrir esto disminuye la entropía del organismo.

Si nos figuramos un sistema cerrado formado por el organismo + el medio, cuya entropía debe aumentar, está claro que la entropía del medio tiene que aumentar de manera que supere la disminución de la entropía del organismo.

El aumento de la entropía del medio se lleva a cabo a expensas de las secreciones del organismo.

Si el proceso es estacionario,

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_{\text{org}} = - \left(\frac{dS}{dt}\right)_{\text{med}}.$$

Puede decirse que la actividad vital del organismo consiste en hacer pasar por él un flujo de entropía sustancial. En este caso la entropía de la sustancia que entra en el organismo es menor que la entropía de que éste entrega al medio, es decir, el organismo degrada los alimentos.

*Ejemplos. 1.* En el ejemplo de la pág. 71 consideramos el choque inelástico de una bala con un péndulo balístico y dedujimos que durante el choque desaparece en el sistema bala — péndulo, una energía mecánica de 3920 J. Esto significa que  $\Delta Q=3920$  J fueron cedidos al péndulo por la bala de un modo irreversible por medio de la conductibilidad térmica. Suponiendo que esta transformación fue isotérmica (es decir, que la conductibilidad térmica del péndulo es extraordinariamente grande) y que la temperatura del sistema era, por ejemplo, de 27°C, la entropía del sistema debió aumentar en esta transformación en

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = 13,1 \text{ J}^\circ \text{ K}.$$

2. Una pelota de goma de 0,3 kg de masa, después de caer desde 2 m de altura, bota y sube hasta 1 m del suelo. En esta transformación isotérmica (sea  $t=27^\circ\text{C}$ ) se ceden irreversiblemente  $\Delta Q=2,96$  J, es decir, la entropía del sistema pelota-suelo aumenta en

$$\Delta S = 12,87 \cdot 10^{-3} \text{ J}^\circ \text{ K}.$$

Si la pelota y el suelo fueran perfectamente elásticos, la entropía no variaría ( $\Delta S=0$ ) y continuaría botando eternamente.

3. Consideremos el proceso irreversible de transmisión del calor de una caldera de vapor a un condensador. Supongamos que la caldera de vapor se halla a la temperatura  $t_1=300^\circ\text{C}$  y el condensador, a  $t_2=30^\circ\text{C}$ . Si la potencia térmica de la caldera es de 10 000 kW y su rendimiento es de un 25%, cada segundo pasarán



de la caldera al condensador  $7,5 \cdot 10^6$  J. Para la caldera, como pierde calor, este  $\Delta Q$  será negativo, es decir, su entropía disminuye; en el condensador, por el contrario, la entropía aumenta. Pero como  $T_1 > T_2$ , la entropía del sistema caldera — condensador aumenta cada segundo en

$$\Delta S = \Delta Q \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) = 11,8 \cdot 10^3 \text{ J/}^\circ \text{K.}$$

#### § 64. Principio del funcionamiento de una máquina térmica

La máquina térmica transforma el calor en trabajo, es decir, recibe calor de unos cuerpos y lo transmite a otros en forma de trabajo mecánico. Para efectuar esta transformación hay que disponer de dos cuerpos a temperaturas diferentes entre los cuales sea posible el intercambio calorífico. Para simplificar llamaremos al cuerpo más caliente, foco caliente y al más frío, foco frío. Existiendo estos dos cuerpos, el proceso de transformación del calor en trabajo se lleva a cabo del modo siguiente: un cuerpo capaz de expandirse (sustancia activa o agente de transformación) se pone en contacto con el foco caliente. El calor  $Q_1$  se toma de dicho foco y se gasta en el trabajo de expansión  $A_1$  que se cede a los cuerpos circundantes. Después el agente de transformación se pone en contacto con el foco frío, al cual le cede el calor  $Q_2$  a expensas del trabajo  $A_2$  que las fuerzas externas realizan sobre el agente.

Para obtener una máquina térmica que funcione continuamente es necesario que el tiempo de compresión termine en el punto en que comienza el tiempo de expansión; el proceso debe ser cíclico. El agente de transformación después de realizar cada ciclo retorna al estado inicial. La ley de conservación de la energía impone en este caso que la energía recibida de los cuerpos circundantes sea igual a la energía cedida a dichos cuerpos. Del medio se recibe: el calor  $Q_1$  durante la expansión y el trabajo  $A_2$  durante la compresión del agente de transformación. Al medio se le cede: el trabajo  $A_1$  durante la expansión del agente y el calor  $Q_2$  durante su compresión. Por consiguiente,  $Q_1 + A_2 = Q_2 + A_1$  o  $A_1 - A_2 = Q_1 - Q_2$ . Si el ciclo se cumple en el sentido de las agujas del reloj, el trabajo de compresión es menor que el de expansión. Por esto, la última igualdad expresa el hecho de que el trabajo neto, que el agente de transformación cede al medio exterior, es igual a la diferencia entre el calor recibido del foco caliente y el cedido al foco frío. Respectivamente, el rendimiento o eficiencia del ciclo, y, por lo tanto, de toda la máquina será  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ .

El proceso de funcionamiento de la máquina térmica que acabamos de describir es, naturalmente, un esquema abstracto. No

obstante, los rasgos más esenciales de cada motor térmico se reflejan en este esquema. El agente de transformación es el gas o vapor que se expande y comprime, y el papel de foco frío lo desempeña el medio circundante. De foco caliente sirve una caldera de vapor o, en los motores de combustión interna, la mezcla combustible.

Estos tres sistemas son necesarios también para el funcionamiento de una máquina frigorífica, en la cual el ciclo transcurre en sentido contrario. El principio del funcionamiento de esta máquina consiste en lo siguiente: la expansión del agente de transformación se efectúa cuando está en contacto con el foco frío. Con esto, dicho foco se enfría aún más, que es, precisamente, el fin que cumple la máquina frigorífica. Luego, para que el ciclo sea posible, hay que comprimir el agente de transformación y transmitir el calor recibido del foco frío. Esto se realiza cuando el agente está en contacto con el foco caliente. De este modo el cuerpo más caliente se calienta aún más. El paso «antinatural» del calor de un cuerpo menos caliente a otro más caliente se «paga» en trabajo. En efecto, cuando el ciclo se efectúa en sentido contrario al de las agujas del reloj, la igualdad de la energía cedida al medio y la energía tomada de él (es decir,  $Q_1 + A_2 = Q_2 + A_1$  o  $Q_2 - Q_1 = -(A_1 - A_2)$ , donde, lo mismo que antes, designamos con el subíndice 1 la parte del proceso que transcurre en contacto con el cuerpo más caliente) tiene el sentido siguiente: la cantidad de calor absorbida del sistema debe ser compensada por una cantidad igual de trabajo mecánico.

El segundo principio de la termodinámica impone cierta condición al funcionamiento de una máquina térmica. Si suponemos que la transformación es reversible, la variación de la entropía del agente de transformación después de recorrer el ciclo debe ser nula. Dicho de otra forma: la variación de la entropía en la transformación de expansión debe ser igual (con signo contrario) a la variación de la entropía durante la compresión, es decir,

$$\int \frac{dQ}{T_1} = - \int \frac{dQ}{T_2}.$$

Pero en el caso de una transformación irreversible, la entropía del sistema aislado, constituido por el foco caliente, el foco frío y el agente de transformación, aumenta y, por lo tanto,

$$\int \frac{dQ}{T_1} + \int \frac{dQ}{T_2} > 0.$$

(Recordemos que  $Q$  es una magnitud algebraica. El calor que entra en el sistema se considera positivo). Calculando el valor de estas integrales para procesos concretos, en una serie de casos se puede hallar con bastante facilidad el valor del rendimiento máximo de uno u otro ciclo de la máquina térmica.

## § 65. Ciclo de Carnot. Rendimiento máximo

Ahora se plantea el problema de hallar la expresión del rendimiento máximo posible de una máquina térmica, alcanzable por una máquina ideal que trabaje sin pérdidas cumpliendo un ciclo reversible.

En primer lugar estudiaremos el ciclo teórico de cuatro tiempos, representado en la fig. 81, que se conoce con el nombre de *ciclo de Carnot*. Este ciclo consta de dos isotermas (para las temperaturas  $T_1$  y  $T_2$ ) y dos adiabáticas. Supongamos que el primer

t tiempo de este proceso es la expansión isotérmica desde el estado 1 hasta el estado 2, el agente de transformación está en contacto con el foco caliente, cuya temperatura es  $T_1$  y la transformación se hace muy despacio. Al llegar al estado 2 se interrumpe el contacto con el foco caliente, se aísla térmicamente el agente y se le da la posibilidad de que se expanda más. El trabajo se realiza a expensas de la energía interna y la temperatura del agente supon-

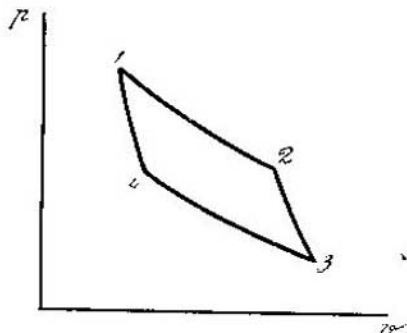


FIG. 81.

gamos que desciende hasta  $T_2$ . A partir de este punto (estado 3) comienza una compresión en dos tiempos. El agente se pone en contacto con el foco frío, que está a la temperatura  $T_2$ , y se comprime isotérmicamente hasta el estado 4. Aquí vuelve a aislarse térmicamente el agente y la compresión continúa por vía adiabática, calentándose el agente a costa del trabajo realizado hasta la temperatura  $T_1$ .

Las transformaciones adiabáticas del ciclo de Carnot tienen carácter auxiliar: ayudan a pasar de una isoterma a otra. En el balance energético no intervienen estas transformaciones, ya que el trabajo de expansión adiabática  $c_v(T_1 - T_2)$  y el trabajo de compresión adiabática  $c_v(T_2 - T_1)$  se compensan entre sí.

En el proceso adiabático no varía la entropía del sistema. Durante la expansión isotérmica la entropía del foco caliente disminuye en la cantidad  $\frac{Q_1}{T_1}$  y la entropía del foco frío aumenta

en  $\frac{Q_2}{T_2}$ . La entropía del agente de transformación al volver al estado inicial permanece invariable. Si el proceso es reversible,  $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$ . En los procesos irreversibles la entropía del sistema, formado por el foco frío, el foco caliente y el agente de transfor-

mación, aumenta y su incremento  $\frac{Q_2}{T_2}$  es mayor que la disminución  $\frac{Q_1}{T_1}$ , es decir,

$$\frac{|Q_2|}{T_2} > \frac{|Q_1|}{T_1},$$

de donde  $\left| \frac{Q_2}{Q_1} \right| \geq \frac{T_2}{T_1}$  y, por consiguiente, el rendimiento máximo del ciclo de Carnot es

$$\eta_{\text{máx}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

El rendimiento de este ciclo depende únicamente de las temperaturas del foco frío y foco caliente. Cuanto mayor es la diferencia de temperaturas, tanto mayor es el rendimiento de la máquina. No es difícil ver que el rendimiento del ciclo de Carnot da los valores óptimos de rendimiento. No hay ciclo mejor que el de Carnot y, en este sentido, él debe ser el modelo para los constructores de máquinas térmicas, los cuales deben tender a aproximar los ciclos reales al ciclo de esta máquina ideal.

Demostrar que esto es así no es difícil. En la fig. 82 se muestra un ciclo arbitrario inscrito en un ciclo de Carnot. La disminución de la entropía del foco caliente se puede representar por la integral

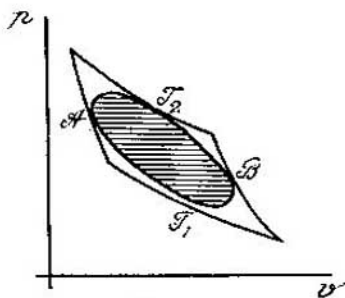


FIG. 82.

$$\int_B^A \frac{dQ}{T},$$

para la cual es correcta indudablemente la desigualdad

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} > \frac{1}{T_1} \int_A^B dQ = \frac{Q_1}{T_1},$$

puesto que  $T_1$  es el número mayor de todos los valores que recorre  $T$  en la integración. El aumento de la entropía del foco frío vendrá expresado por la integral

$\int_B^A \frac{dQ}{T}$ , para la cual es válida la desigualdad

$$\int_B^A \frac{dQ}{T} < \frac{1}{T_2} \int_B^A dQ = \frac{Q_2}{T_2},$$

ya que  $T_2$  es el número más pequeño de los valores que recorre  $T$  en la integración. Si el proceso es reversible

$$\left| \int_B^A \frac{dQ}{T} \right| = \left| \int_A^B \frac{dQ}{T} \right|,$$

por consiguiente,

$$\frac{|Q_2|}{T_2} > \frac{|Q_1|}{T_1},$$

lo que da la condición

$$\eta_{\text{máx}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Así, pues, de todos los procesos cíclicos posibles, el que posee el rendimiento máximo es el ciclo de Carnot.

La fórmula del rendimiento máximo muestra la causa del bajo rendimiento de las máquinas de vapor. Cuando  $T_2=300^\circ\text{K}$  y  $T_1=400^\circ\text{K}$ , el rendimiento es igual a un 25%. Pero esto es el rendimiento máximo alcanzable con una máquina ideal de funcionamiento reversible y sin pérdidas algunas de energía. Por esto, no es de extrañar que el rendimiento de las máquinas de vapor reales sea inferior a un 10%. En el curso de termodinámica se habla de las vías que sigue la técnica para aumentar el rendimiento. Está claro que la más importante es la elevación de la temperatura del foco caliente, es decir, del vapor o de la mezcla combustible.

### § 66. Segundo principio de la termodinámica

Como dijimos antes, el segundo principio de la termodinámica consiste en la afirmación de que la entropía de un sistema térmicamente aislado aumenta. Esta aseveración puede parecer algo abstracta. Además, esta enunciación no corresponde al desarrollo histórico de la idea. Teniendo en cuenta la enorme importancia de esta ley de la naturaleza, conviene detenerse brevemente en otros enunciados existentes del segundo principio de la termodinámica y demostrar su equivalencia con el mencionado antes.

Históricamente, el segundo principio de la termodinámica entró en la ciencia bajo la forma del postulado de Thomson acerca de la imposibilidad de crear un móvil perpetuo de segunda especie. Se llama móvil perpetuo de primera especie una máquina capaz de producir trabajo «de la nada», es decir, una máquina cuyo funcionamiento contradice el primer principio de la termodinámica. Móvil perpetuo de segunda especie es un motor que realiza trabajo, por medio de una máquina de acción periódica, a expensas únicamente del calor que toma del medio circundante. Si fuera posible construir este motor, sería prácticamente un móvil perpetuo, ya que las reservas de energía en el medio circundante son casi ilimitadas y, por ejemplo, el enfriamiento de las aguas de los océanos en un grado daría una cantidad de energía tan enorme que es difícil imaginar. La masa de agua que hay en el océano mundial es del orden de