

$\sim 10^{16}$ t. Si esta masa de agua se enfríase tan sólo en 1° , se liberarían 10^{21} kcal = $4,18 \cdot 10^{21}$ J de calor, lo que equivale a la combustión completa de 10^{14} t de carbón. Un tren cargado con esta cantidad de carbón tendría $\sim 10^{10}$ km de longitud, lo que en orden de magnitud coincide con las dimensiones del sistema solar.

El móvil perpetuo de segunda especie es una máquina térmica capaz de funcionar con foco caliente, pero sin foco frío. Esta máquina podría funcionar un solo tiempo; el gas que se encontrara en el recipiente con émbolo podría expandirse, pero aquí terminaría el funcionamiento del motor, ya que para su continuación es necesario transmitirle al foco frío el calor recibido por el gas. De un modo formal, la imposibilidad del móvil perpetuo de segunda especie se deduce de la fórmula del rendimiento máximo. Si no existe transmisión de calor ($T_2 = T_1$), el valor máximo del rendimiento es igual a cero.

Es imposible construir un móvil perpetuo de acción periódica combinando una expansión isotérmica con un proceso adiabático de compresión. Este proceso sería imposible incluso si se consiguiera hacerlo reversible. Durante la expansión isotérmica del agente de transformación, la entropía disminuye. Esto significa que el proceso de compresión debe efectuarse con aumento de la entropía. Pero esto es imposible de conseguir en una transformación adiabática, ya que ésta transcurre a entropía constante.

También está en completo acuerdo con el enunciado aceptado aquí del segundo principio de la termodinámica el postulado de Clausius, que consiste en la afirmación de la imposibilidad de que el calor pase de un cuerpo menos caliente a otro más caliente sin compensación. Un proceso que contradiga el postulado de Clausius debe transcurrir con disminución de la entropía; esta propiedad de la entropía se demostró desde el principio.

Volveremos a tratar del segundo principio de la termodinámica en el § 77, donde lo juzgaremos desde el punto de vista de la teoría cinético-molecular.

12

TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES

§ 67. *Conceptos fundamentales*

Teniendo en cuenta que en los cuerpos sólidos las moléculas están estrechamente ajustadas unas a otras, se pueden determinar con buena precisión, por medio del análisis estructural roengenográfico

fico (pág. 411), las dimensiones de las moléculas. Comparando estas dimensiones con el volumen correspondiente a una molécula de gas, se descubren inmediatamente las peculiaridades fundamentales del estado gaseoso de la materia.

La dimensión lineal máxima de las moléculas diatómicas de oxígeno es aproximadamente igual a 4 Å, esta misma dimensión tienen las moléculas de nitrógeno; las moléculas de hidrógeno son mucho más pequeñas. El volumen de una molécula de oxígeno será aproximadamente igual a 10^{-23} cm³. En condiciones normales, en 1 cm³ de oxígeno hay $2,7 \cdot 10^{19}$ moléculas. Por consiguiente, a cada molécula le corresponde un volumen de cerca de $0,4 \cdot 10^{-19}$ cm³. Comparando estas dos cifras —el volumen propio de la molécula y el volumen que le corresponde a cada una— vemos lo espaciadas que se encuentran las moléculas. Está claro que siendo tan pequeña la densidad, los encuentros entre moléculas serán relativamente raros. Por término medio, el camino recorrido por una molécula entre dos choques consecutivos es de 1000 Å. Pero la velocidad de las moléculas es grande, de cerca de 500 m/s. Por esto los choques ocurrirán, en promedio, cada diezmilmillonésima fracción de segundo (10^{-10} s). De dónde salen estas cifras quedará claro de lo que sigue.

Las moléculas sólo comienzan a atraerse cuando la distancia entre ellas se hace comparable con sus dimensiones propias. Por esto, la mayor parte de su camino lo recorren las moléculas con movimiento rectilíneo y uniforme. Las fuerzas de interacción entre las moléculas sólo se manifiestan cuando en el camino de una de ellas se encuentra otra. Como la interacción se pone de manifiesto en una parte insignificante del recorrido de las moléculas, puede hablarse de choques entre ellas. El tiempo durante el cual interactúan sensiblemente las moléculas, es decir, el tiempo de colisión, es igual aproximadamente a 10^{-13} s. De este modo, la molécula pasa la parte inmensamente mayor de su «vida» en movimiento libre por inercia.

Esto tiene lugar en los gases que se hallan en las condiciones ordinarias. Un aumento de la presión conducente al aumento de la densidad puede hacer que todo varíe sensiblemente.

La energía interna de los gases en los cuales la interacción entre las moléculas se produce únicamente durante colisiones casi instantáneas no contiene energía potencial de acción mutua entre las moléculas. Estos gases son los que llamamos *perfectos* o *ideales* y justificamos por segunda vez el empleo de este término demostrando la validez de la ecuación del estado gaseoso para estos gases.

Así, pues, una sustancia gaseosa es de por sí un número enorme de partículas pequeñísimas que recorren grandes espacios sin chocar, por fin chocan como un par de bolas de billar y salen despedidas

en sentidos distintos, con otras velocidades, hasta que se produce una nueva colisión. Si siguiéramos a una molécula de un gas (lo que únicamente puede hacerse, como es natural, mentalmente), veríamos que unas veces se mueve hacia la izquierda, otras hacia la derecha, ya hacia adelante, ya hacia atrás. En unas ocasiones se desplazará a gran velocidad, en otras, lentamente. En virtud del carácter totalmente caótico del movimiento térmico en el gas, se puede afirmar que las moléculas de un gas libre, que se encuentre en equilibrio térmico, estarán uniformemente repartidas en el espacio según la densidad. También es indudable que, en un instante dado, en todas las direcciones se moverán cantidades iguales de moléculas. Así mismo estarán uniformemente distribuidos otros sucesos casuales. Por ejemplo, en todos los puntos serán iguales las cantidades de moléculas que recorren sin chocar caminos de 100 a 200 Å por segundo de observación.

Sin embargo hay que hacer una salvedad: todos los razonamientos expuestos anteriormente tienen carácter estadístico. Son correctos tomados como promedio y en un grado tanto mayor, cuanto más elevado sea el número de moléculas de gas.

Hemos afirmado, por ejemplo, que el número de moléculas que se mueven «hacia la derecha» y «hacia la izquierda» será igual. Está claro que esto no significa que dichas cantidades serán iguales con la exactitud de hasta una unidad. Pero el número de moléculas en movimiento es tan enorme, que si estas cantidades difieren no ya en una unidad, sino en millones, la diferencia expresada en tantos por ciento será insignificante.

Si se «cuentan» repetidas veces las moléculas que hay en un volumen cualquiera, cada cómputo arrojará una cantidad algo distinta de los demás. Midiendo la densidad se establece el valor medio del número de moléculas que hay en el volumen que nos interesa. Si fuera posible hacer la medición con una exactitud de mil moléculas por lo menos, cada medida oscilaría muy poco en torno a dicho valor medio (muy poco en tantos por ciento).

Cuando se dice que cierto número de moléculas tiene una velocidad, o se mueve en una dirección o choca según un mecanismo cualquiera, siempre se trata del valor medio del número correspondiente. Si el número de moléculas del gas es grande, las desviaciones de los valores instantáneos respecto a los medios (*fluctuaciones*) serán insignificantes. En los gases muy enrarecidos las fluctuaciones pueden ser considerables.

En el cálculo de probabilidades se demuestra que la desviación media, en valor absoluto, de la densidad de un gas con respecto al número medio de moléculas que hay en la unidad de volumen es aproximadamente igual a $1/\sqrt{n}$, donde n es el número de moléculas. Como en un cm^3 de gas hay $2,7 \cdot 10^{19}$ moléculas, la fluctua-

ción de la densidad del gas dentro de los límites de un centímetro cúbico constituirá el

$$\frac{1}{\sqrt{2,7 \cdot 10^{16}}}$$

es decir, el $2 \cdot 10^{-16}$ del valor medio. Está claro que semejantes desviaciones quedan fuera de los límites de detección experimental.

Lo mismo ocurre con todas las demás propiedades de los gases que dependen de las cantidades medias de moléculas.

El origen de la teoría cinética de los gases se remonta a Daniel Bernoulli (1700—1788). En los trabajos de M. V. Lomonósov (1711—1765) adquiere la teoría cinética un desarrollo considerable. En el siglo XIX fue perfeccionada y extendida por Clausius (1822—1888), Maxwell (1831—1879) y Ludwig Boltzmann (1844—1906) y tomó ya su forma actual.

§ 68. Recorrido libre

La distancia que recorre una molécula entre dos colisiones consecutivas (recorrido de la molécula) es, naturalmente, una magnitud casual que, para moléculas aisladas, puede ser a veces muy pequeño o muy grande. Sin embargo, en virtud del carácter caótico del movimiento de las partículas, el valor medio de dicha magnitud, para un estado dado del gas, será indudablemente constante. El recorrido libre medio l , simplemente, recorrido l puede ligarse con la velocidad media v del movimiento de las moléculas y con el tiempo medio entre dos colisiones τ por medio de la simple relación $l = v\tau$ *). En la pág. 197 damos los valores típicos de estas magnitudes.

El recorrido de las moléculas debe depender, ante todo, del número de moléculas que haya en la unidad de volumen del gas. Está claro, además, que cuanto mayores sean las dimensiones de las moléculas, tanto menor será el recorrido libre.

Para poder figurarnos el carácter de esta relación, consideraremos un volumen cilíndrico de gas por el cual, y a lo largo del eje del cilindro, se mueve una molécula. ¿Qué espacio logrará recorrer esta molécula?

Las moléculas no son puntos, sino que tienen dimensiones que se determinan por las distancias a las cuales comienza a notarse la interacción molecular.

*) Como sólo se trata de hallar las relaciones existentes entre magnitudes físicas, y no fórmulas exactas, no haremos distinción entre velocidad media y velocidad media cuadrática (véase más adelante).

Basándose en las mediciones cristaloquímicas (véase la pág. 658), a las moléculas se les puede atribuir con bastante exactitud cierta forma. A distancias que estén fuera del «ámbito» de la molécula, desde el punto de vista de este simple modelo geométrico, no actúan las fuerzas de interacción. Si el gas no es muy denso, este modelo coincide con la realidad.

Proyectemos las moléculas sobre el fondo del cilindro representando sus secciones máximas. Cada molécula se proyecta de una forma distinta; pero como hay muchas moléculas, la superficie media de la sección será una característica bastante exacta de las moléculas. Esta superficie media de la sección σ se llama *sección eficaz* o *diámetro eficaz* de la molécula.

La colisión tendrá lugar con toda seguridad en el transcurso del cilindro, si la superficie de su base está llena de secciones de moléculas. Si el área de la base del cilindro es igual a 1 cm^2 , la longitud del cilindro es l y el número de moléculas en la unidad de volumen es n , en todo el cilindro habrá nl moléculas. Las proyecciones de las secciones de estas moléculas taparán el fondo del cilindro si $nl \cdot \sigma = 1$. En estas condiciones el valor de l , por el orden de magnitud, debe aproximarse al recorrido medio de la molécula, es decir, $l \approx 1/n\sigma$. Un cálculo más riguroso, que no haremos aquí, confirma este cómputo aproximado. En la fórmula exacta figura en el denominador la cantidad $\sqrt{2}$:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}.$$

σ es una magnitud constante para cada gas. Por lo tanto, el recorrido libre viene determinado únicamente por la densidad; disminuyendo 100 veces, por ejemplo, la densidad, el recorrido libre aumentará la misma cantidad de veces.

Para el aire en condiciones normales la sección eficaz es igual aproximadamente a $5 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$. Esto concuerda perfectamente con las dimensiones de las moléculas de oxígeno y nitrógeno que conocemos por las mediciones llevadas a cabo en los cristales. La dimensión máxima es igual a $4,3 \text{ \AA}$, y la mínima, a 3 \AA ; el radio de un círculo de $5 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$ de superficie es igual a 4 \AA .

Las dimensiones de las moléculas, como ya dijimos, se determinan por las investigaciones realizadas en los cristales. No obstante, el estudio de los choques de partículas se puede considerar como un método para establecer su sección eficaz. Este procedimiento es válido para la investigación de los núcleos atómicos (pág. 606).

Recorrido libre medio en condiciones normales: en el aire 600 \AA , en el nitrógeno 600 \AA , en el hidrógeno 1100 \AA , en el helio 1800 \AA .

§ 69. Presión de un gas.

Velocidad cuadrática media de las moléculas

Se nos plantea el problema siguiente: aplicando los conceptos simplificados acerca del movimiento y de la interacción de las moléculas gaseosas, expresar la presión del gas en función de las magnitudes que caracterizan la molécula.

Consideremos el gas contenido en un espacio esférico de radio R y volumen v . Prescindiendo de las colisiones entre las moléculas

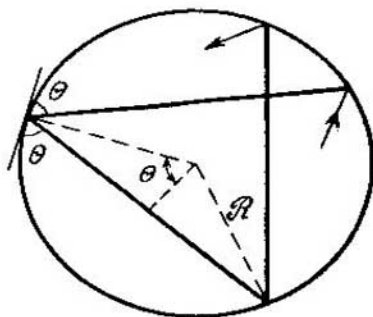


FIG. 83.

del gas, es correcto admitir el siguiente esquema del movimiento de cada molécula. La molécula se mueve rectilínea y uniformemente con cierta velocidad v , choca con la pared del recipiente y es rechazada formando con ella un ángulo igual al de incidencia (fig. 83). Recorriendo durante todo el tiempo cuerdas de igual longitud, $2R \times \text{sen } \theta$, la molécula le dará a la pared del recipiente $v/(2R \text{ sen } \theta)$ golpes en 1 s. En cada choque el impulso de la molécula variará en $2mv \text{ sen } \theta$ (véase la pág. 71). La variación del impulso en 1 s será igual a mv^2/R .

Vemos que el ángulo de incidencia se reduce. Si la molécula incide sobre la pared formando un ángulo muy agudo, los choques serán frecuentes pero débiles; si incide formando un ángulo próximo a 90° , los choques serán menos frecuentes pero más fuertes.

La variación del impulso en cada choque de una molécula con la pared da su aportación a la fuerza total de presión del gas. De acuerdo con la ley fundamental de la mecánica se puede admitir que la fuerza de presión no es más que la variación del impulso de todas las moléculas que se produce en un segundo

$$\frac{mv_1^2}{R} + \frac{mv_2^2}{R} + \dots \text{ o, sacando fuera del paréntesis el factor constante, } \frac{m}{R} (v_1^2 + v_2^2 + \dots).$$

Supongamos que en el gas hay n moléculas. En este caso se puede introducir en la consideración el cuadrado medio de la velocidad de las moléculas, que se determina por la fórmula

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{n} (v_1^2 + v_2^2 + \dots).$$

La expresión de la fuerza de presión se escribe ahora brevemente:

$$F = \frac{mn\bar{v}^2}{R}.$$

La presión del gas la obtenemos dividiendo la expresión de la fuerza por el área de la esfera $4\pi R^2$:

$$p = \frac{mn\bar{v}^2}{4\pi R^3}.$$

Sustituyendo $4\pi R^3$ por $3V$, se obtiene una fórmula interesante:

$$pV = \frac{1}{3} nm\bar{v}^2 \quad \text{ó} \quad pV = \frac{2}{3} n \left(\frac{m\bar{v}^2}{2} \right).$$

Por consiguiente, la presión del gas es proporcional al número de moléculas de gas y al valor medio de la energía cinética de su movimiento de traslación.

Comparando la ecuación que hemos obtenido con la ecuación del estado gaseoso llegamos a una conclusión muy importante. La confrontación de los segundos miembros de dichas igualdades demuestra que

$$\mu RT = \frac{2}{3} n \left(\frac{m\bar{v}^2}{2} \right) \quad \text{ó} \quad \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{\mu R}{m} T,$$

es decir, la energía cinética media del movimiento de traslación de las moléculas depende únicamente de la temperatura absoluta y es directamente proporcional a ella.

La deducción hecha demuestra que los gases que cumplen la ley del estado gaseoso son perfectos o ideales en el sentido de que se aproximan al modelo ideal del conjunto de partículas cuya interacción carece de importancia. Esta deducción demuestra también que el concepto, introducido empíricamente, de temperatura absoluta como magnitud proporcional a la presión de un gas enrarecido, tiene un sentido cinético molecular simple. La temperatura absoluta es proporcional a la energía cinética del movimiento de traslación de las moléculas. $n\mu = N$ es el número de Avogadro, es decir, el número de moléculas que hay en una molécula-gramo, este número es una constante universal: $N = 6,02 \times 10^{23}$. La magnitud inversa $1/N$ será igual a la masa del átomo de

hidrógeno:

$$m_H = \frac{1}{N} = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g.}$$

También es universal la magnitud

$$k = \frac{\mu R}{n} = \frac{R}{N} = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/}^\circ\text{K.}$$

Esta magnitud se conoce con el nombre de *constante de Boltzmann*. Entonces

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Si el cuadrado de la velocidad v^2 se representa por la suma de las componentes, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, es evidente a cualquier componente le corresponderá en promedio la energía

$$\frac{1}{2} kT.$$

Esta magnitud se llama energía correspondiente a un grado de libertad.

La constante universal de los gases es bien conocida por los experimentos con gases. La determinación del número de Avogadro o de la constante de Boltzmann (que se expresan la una en función de la otra) es un problema relativamente difícil, para cuya resolución hay que realizar mediciones exactas.

La deducción que hemos hecho pone a nuestra disposición unas fórmulas que permiten calcular la velocidad media de las moléculas y el número de moléculas que hay en la unidad de volumen.

Así, para el cuadrado medio de la velocidad obtenemos

$$\bar{v}^2 = \frac{3RT}{mN} = \frac{3RT}{M},$$

donde M es el peso molecular. La raíz cuadrada del cuadrado medio de la velocidad se llama *velocidad cuadrática media*. Esta velocidad

$$v_{\text{med}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad \text{o} \quad v_{\text{med}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

es decir, es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura e inversamente proporcional a la raíz cuadrada del peso molecular. Se halla con facilidad que, a la temperatura ambiente, las moléculas de oxígeno tienen la velocidad de 480 m/s, y las de hidrógeno, 1900 m/s. A la temperatura del helio líquido estas mismas moléculas tendrían respectivamente las velocidades

de 40 m/s y 160 m/s, y a la temperatura de la superficie del Sol, 6000°, las velocidades de 2160 m/s y 8640 m/s. Es cierto que hemos puesto unos ejemplos irreales, porque a la temperatura del helio líquido tanto el hidrógeno como el oxígeno se solidifican y en ellos no existe movimiento de traslación de las moléculas, y a la temperatura de la superficie del Sol las moléculas se disgregan en átomos.

Para el número de moléculas en la unidad de volumen obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{n}{V} = \frac{3p}{mv^2} = \frac{p}{kT}.$$

De aquí se deduce la *ley de Avogadro*: a igualdad de presión y temperatura todos los gases contienen el mismo número de moléculas en la unidad de volumen. Por ejemplo, en condiciones normales (1 atm de presión y 0°C de temperatura) en 1 cm³ hay $2,683 \times 10^{19}$ moléculas (*número de Loschmidt*).

§ 70. Energía interna de un gas

Las propiedades de los gases monoatómicos se determinan por la energía cinética del movimiento de traslación de las moléculas. La energía interna del átomo no influye en la termodinámica del gas. Es evidente que esta energía interna deberá tenerse en cuenta únicamente en aquellos casos en que el gas se halle a una temperatura muy alta y cuando los choques de los átomos pueden ocasionar su excitación e ionización. Sobre esto hablaremos detenidamente a su debido tiempo.

De este modo tendrá gran aplicación la fórmula de la energía interna del gas monoatómico

$$U = N \frac{mv^2}{2},$$

donde N es el número de moléculas. Valiéndonos de las fórmulas del párrafo anterior, para 1 mol de gas monoatómico perfecto obtenemos la expresión

$$U = \frac{3}{2} RT.$$

De donde, por las fórmulas dadas en el § 60, para las capacidades caloríficas de 1 mol de gas monoatómico obtenemos los valores

$$c_v = \frac{3}{2} R$$

y

$$c_p = \frac{5}{2} R.$$

La proporcionalidad directa a la temperatura de la energía interna y la correspondiente constancia de las capacidades caloríficas de un gas monoatómico se verifica en un amplio intervalo de condiciones externas.

En los gases poliatómicos, esta simple circunstancia, si se da, sólo es en un intervalo de temperaturas mucho más estrecho. La causa de que esto sea así consiste en que la energía de las moléculas poliatómicas está formada por la energía del movimiento de traslación, por la energía de rotación y por la energía de oscilación de unas partes de la molécula (es decir, de los átomos que la componen) con respecto a otras. El cálculo de la energía media correspondiente a una molécula se hace bastante complicado. Resulta que la energía de la molécula no dependerá ya linealmente de la temperatura y, respectivamente, la capacidad calorífica del gas ya no será constante ni dependiente del valor de T . No obstante, por lo general se consigue hallar un estrecho intervalo de temperaturas dentro del cual la capacidad calorífica del gas no depende de la temperatura. Esto suele ocurrir a aquellos valores de la temperatura en las que la energía media de la molécula es todavía insuficiente para que las colisiones entre moléculas puedan ocasionar la variación de su estado oscilatorio y, al mismo tiempo, dicha energía es lo suficientemente grande para que no se note el carácter discreto (cuántico) de la energía de rotación. Adelantándonos, y remitiendo al lector a la fig. 266 (pág. 673), podemos decir que la marcha lineal de la energía con la temperatura y la constancia de la capacidad calorífica se cumplirán si la magnitud kT , que caracteriza, por su orden de magnitud, la energía del movimiento de traslación de la molécula, es considerablemente mayor que la distancia entre los niveles rotacionales de la energía y menor que la distancia entre los niveles oscilatorios de la energía.

Si este intervalo existe, la energía de 1 mol de gas y su capacidad calorífica vienen expresadas por las siguientes fórmulas simples:

$$U = 3RT, \quad c_v = 3R, \quad c_p = 4R.$$

El aumento al doble de la energía interna y de c_p con respecto al gas monoatómico se puede interpretar del modo siguiente. La molécula poliatómica tiene seis grados de libertad, mientras que la monoatómica sólo tiene tres. La duplicación del número de grados de libertad acarrea la duplicación de la energía interna. En esta afirmación, como es natural, no hay nada indudable. Sin embargo hallamos la confirmación de este punto de vista al considerar un gas de moléculas diatómicas. Como una molécula diatómica es un sistema de dos puntos materiales, tiene cinco grados de libertad (véase la pág. 46). Si la energía interna es en realidad proporcional

al número de grados de libertad, el gas de moléculas diatómicas deberá satisfacer las fórmulas

$$U = \frac{5}{2} RT, \quad c_v = \frac{5}{2} R \quad \text{y} \quad c_p = \frac{7}{2} R.$$

La experiencia demuestra que, en el intervalo de temperaturas en que la capacidad calorífica permanece invariable, estas fórmulas se cumplen bien. La energía interna de un mol de gas diatómico a la temperatura ambiente de 300°K será igual a $1500 \text{ cal} = 6250 \text{ J}$.

La marcha típica de la curva de capacidad calorífica en un amplio intervalo de temperatura se representa en la fig. 84.

§ 71. Distribución estadística

Existen muchos sucesos imposibles de predecir. Estos sucesos se llaman casuales. La estatura de los mozos que se incorporan al ejército, el número de peatones que pasan por un cruce de calles

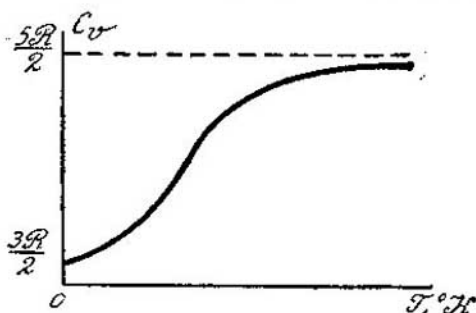


FIG. 84.

dado a una hora determinada, el número de billetes de lotería premiados en un sorteo correspondientes a cada serie de cien números, todos éstos son ejemplos de sucesos casuales. Observando una multitud de sucesos del mismo tipo, por ejemplo, midiendo la estatura de un gran número de mozos, contando durante muchos días el número de transeúntes que pasan en un minuto o analizando el número de billetes premiados en muchos sorteos de lotería, podemos representar los resultados de estas observaciones en forma de las llamadas curvas de distribución. Si se trata de la talla de los reclutas, los datos se pueden preparar en forma de cifras que indiquen cuántos de ellos median de $1,70$ a $1,71$ m, de $1,71$ a $1,72$ m y así sucesivamente. La probabilidad de encontrar entre los llama-

dos a filas uno que tenga exactamente una estatura dada (por ejemplo, 171,34 cm) es en realidad igual a cero. Por esto tiene sentido hablar únicamente del número de reclutas cuya talla se encuentre en cierto intervalo.

Si nos referimos al análisis de las listas de número premiados en la lotería, la curva de distribución se puede construir sobre la base de los datos acerca de la cantidad de series de cien números en que no cayó ni un solo premio, en que salió un número premiado, en que salieron dos, etc.

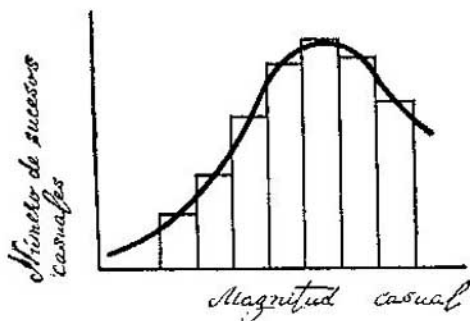


FIG. 85.

Construyendo la gráfica de modo que sobre el eje horizontal se tome la magnitud casual (la estatura, el número de transeúntes, la cantidad de números premiados) y sobre el eje vertical, el número de sucesos casuales (el número de reclutas cuya estatura se encuentra en un intervalo dado, el de casos en que una cantidad dada de premios cae en una centena de números, etc.), la curva que se obtiene es la de distribución. La fig. 85 representa un ejemplo de curva de este tipo. La curva se ha trazado por los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos. Cada rectángulo tiene un área numéricamente igual a la cantidad de casos en que el suceso casual ocurre de acuerdo con la magnitud comprendida en el intervalo dado.

Una peculiaridad notable de las curvas de distribución es la de reproducirse. Si durante una serie de años se construyen curvas de distribución que analicen la talla de los reclutas, puede comprobarse que su semejanza es completa. Esta semejanza no la encontraremos si estudiamos curvas de distribución de la talla construidas sobre la base de un número pequeño de mediciones. Si aumenta el material que sirve de base para la construcción de cada curva, las correspondientes a diversos años serán cada vez más semejantes. Esto ocurre con las curvas de distribución de cualquier tipo de

sucesos, siempre que estos sean casuales y las condiciones de las curvas de distribución obtenidas no varíen.

La ley de distribución de cualquier magnitud, que se cumple tanto mejor cuanto mayor sea el número de sucesos en que se base la construcción de cada ordenada de la curva, se llama *ley estadística*.

El conocimiento de la curva de distribución no puede, claro está, predecirnos el número de la lotería que saldrá premiado en el sorteo próximo. Sin embargo, puede indicarnos cuál será la fracción de las series de cien números en que toque un premio. Esta predicción será tanto más exacta cuanto mayor sea la cantidad de números de lotería que se sometan a análisis.

La enorme cantidad de moléculas que hay incluso en el volumen más pequeño de una sustancia hace que sea extraordinaria la exactitud de todo género de predicciones acerca del comportamiento de las moléculas. La curva de distribución de cualquier magnitud casual, construida para las moléculas de una sustancia, se reproducirá con una enorme precisión, porque a cada «rectángulo» de dicha curva corresponderán millares de millones de moléculas.

§ 72. Ley de Boltzmann

Algunos conceptos sobre la distribución de las moléculas se deducen inmediatamente del carácter caótico del movimiento térmico. Esto se refiere a la distribución de las moléculas según las direcciones de las velocidades o a la distribución de las moléculas por el volumen en el caso en que sobre el gas no actúan fuerzas algunas. No obstante, hay muchos casos en que no son evidentes a priori las consecuencias de la hipótesis sobre el carácter caótico del movimiento térmico.

Ante todo se plantea el problema de la distribución de las moléculas según los valores de las velocidades. ¿Cuál es el porcentaje de moléculas rápidas, de velocidad media y lentas? Puede plantearse después el problema de hallar cómo varía la distribución uniforme de las moléculas por densidades al someter el gas a un campo de fuerzas, por ejemplo, al campo de la gravedad o a un campo eléctrico o magnético si las moléculas poseen propiedades eléctricas o magnéticas. A éstos y otros problemas da respuesta la ley de Boltzmann, que se puede deducir aplicando el formalismo de la teoría de probabilidades.

Consideremos un pequeño volumen del espacio —un cubo de lados Δx , Δy , Δz , construido en el punto x , y , z —. Supongamos que en este cubo hay un número considerable de moléculas. Entre ellas elegimos aquellas que tienen componentes de velocidad com-

prendidas entre los límites de v_x a $v_x + \Delta v_x$, de v_y a $v_y + \Delta v_y$ y de v_z a $v_z + \Delta v_z$. Las magnitudes Δv_x , Δv_y , Δv_z se eligen de tal modo que en dicho intervalo de velocidades se encuentre un gran número de moléculas. Esto es necesario para que a estos datos se les puedan aplicar las leyes de la física estadística (volúmenes físicamente infinitesimales). En adelante diremos de estas moléculas que poseen coordenadas *próximas* a x , y , z y velocidades *próximas* a v_x , v_y , v_z . Subrayamos una vez más que no se puede hablar de una cantidad de moléculas que poseen *exactamente* una velocidad determinada, ya que la probabilidad de encontrar una molécula de este tipo es infinitamente pequeña. Como la energía cinética de una molécula se determina por el valor de la velocidad, y su energía potencial en un campo exterior depende de sus coordenadas en el espacio, todas las moléculas elegidas por nosotros tendrán prácticamente una misma energía \mathcal{E} .

La ley de Boltzmann, cuyo fundamento debe buscarse en los cursos de física teórica, da la expresión general para el número de moléculas que poseen coordenadas próximas a x , y , z y velocidades próximas a v_x , v_y , v_z ; este número es

$$\Delta n = A e^{-\mathcal{E}/kT} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z;$$

aquí A es una constante que puede hallarse para un problema concreto, T es la temperatura absoluta y k es la constante de Boltzmann.

La energía que figura en el exponente es la suma de la energía cinética del movimiento de traslación de la molécula y de su energía potencial en el campo exterior: $\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} + U$. Por esto

$$\Delta n = A e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2 + U}{kT}} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z.$$

Esta fórmula se extiende también al caso en que la molécula posee otras formas de la energía, por ejemplo, rotacional u oscilatoria. En este caso estas componentes de la energía deben incluirse en \mathcal{E} .

La ley de Boltzmann, o, como también se llama, la *distribución de Boltzmann*, demuestra que a la mayor energía corresponde el menor número de partículas cuyas velocidades y coordenadas se hallan en el intervalo dado.

La ley de Boltzmann la aplicaremos para resolver dos problemas importantes concernientes a la distribución de las partículas por alturas y a la distribución de las moléculas por velocidades.

§ 73. *Distribución de las partículas por alturas en el campo de la gravedad*

Si en un líquido se encuentra una gran cantidad de partículas pequeñas indisolubles y más pesados que él, a primera vista puede parecer que más pronto o más tarde estas partículas deben bajar al fondo. Sin embargo no ocurre así, aunque sí ocurriría de no existir el movimiento térmico.

En efecto, la fuerza de gravedad tira de la partícula hacia abajo, pero el movimiento térmico caótico, que es una propiedad inseparable de todas las partículas, dificultará constantemente la acción de dicha fuerza. La partícula se mueve hacia abajo, pero por el camino puede sufrir un choque que la rechaza hacia arriba; vuelve a comenzar el movimiento hacia abajo y otro choque puede lanzar a la partícula hacia arriba o hacia un lado. Si una partícula cualquiera consigue llegar al fondo del recipiente, los choques casuales con otras partículas pueden levantarla del fondo y otros choques casuales pueden hacer que suba hasta las capas altas del líquido. Está claro que como resultado de esto se establece cierta distribución irregular de las partículas. En las capas superiores habrá menos partículas, cerca del fondo del recipiente será donde haya más. Cuanto más pesadas sean las partículas y menor la temperatura, tanto más «apretada al fondo» estará la distribución de las partículas por alturas.

La parte cuantitativa de este interesante fenómeno, que ocurre con cualquier tipo de partículas que se hallen en el campo de la gravedad (sean las moléculas de un gas o partículas de una emulsión suspendidas en un gas o en un líquido), es interpretada por la ley de Boltzmann. En este caso el factor exponencial de la fórmula de la distribución de Boltzmann se escribe de la forma

$$e^{-\frac{mv^2}{2kT}} e^{-\frac{mgh}{kT}};$$

en lugar de la energía potencial de la gravedad U hemos puesto su expresión mgh . Nos interesa conocer el número total de moléculas (de velocidades cualesquiera) que se encuentren a una altura entre h y $h+\Delta h$. Este número será

$$\Delta n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \Delta h.$$

Aquí el coeficiente de proporcionalidad n_0 , por su sentido, no es más que el número específico de partículas $\frac{\Delta n}{\Delta h}$ cuando $h=0$. La ley de disminución del número de partículas con la altura se muestra en la fig. 86.

La forma de la fórmula demuestra que la afirmación hecha anteriormente era correcta: cuanto mayor sea la masa de las partículas y menor la temperatura, más rápido será el descenso de la curva. Por la fórmula puede verse también que la rapidez de la disminución depende de la aceleración de la gravedad. En planetas distintos deberá ser diferente la distribución de las partículas por alturas.

De acuerdo con la fórmula que hemos dado, cierto número (aunque sea muy pequeño) de moléculas existe a cualquier altura sobre la superficie de la Tierra. Esto significa que las moléculas se pueden alejar de la Tierra, escapar al espacio universal,

puesto que no está excluido que, por choques fortuitos, ya una, ya otra molécula reciba la velocidad de 11,5 km/s, suficiente, como sabemos, para que salga de la esfera de atracción de la Tierra. Por esto puede decirse que la Tierra pierde paulatinamente su atmósfera. Pero la evaluación de

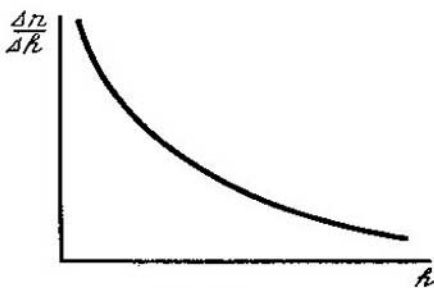


FIG. 86.

la velocidad con que se dispersa la atmósfera demuestra que ésta es insignificante. La cantidad de aire perdida durante todo el tiempo de existencia de la Tierra carece de importancia. Otra cosa es lo que ocurre en la Luna, donde la velocidad necesaria para vencer la atracción es igual a ~ 2 km/s. Esta velocidad es relativamente pequeña y las moléculas la alcanzan con mucha facilidad, por esto no hay atmósfera en la Luna.

La fórmula de la disminución del número de partículas al aumentar la altura se puede escribir para la densidad y para la presión del gas. Como la presión del gas es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen, la fórmula se puede escribir de la forma

$$p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

Aquí p_0 es la presión en el nivel cero. Esta fórmula se llama *barométrica*. Valiéndose de esta fórmula, los meteorólogos, que miden la presión atmosférica a grandes alturas, reducen los resultados de sus mediciones «al nivel del mar».

Conviene señalar otra aplicación importante de la fórmula de la distribución de las partículas por altura: esta fórmula fue utilizada por el científico francés Perrin para determinar empíricamente el número de Avogadro. De acuerdo con las

condiciones del experimento, Perrin tuvo que modificar un poco dicha fórmula. El estudió la emulsión resultante de disolver gomaguta (una variedad de resina) en agua. En esta emulsión se puede observar con un microscopio todo un hormiguero de gránulos de forma esférica. Valiéndose de una centrifugadora, Perrin clasificó los gránulos de gomaguta por dimensiones. Al cabo de varios meses de trabajo obtuvo 20—30 g de granos de dicha resina de 0,74 micras de diámetro. La densidad de la gomaguta $D=1,195 \text{ g/cm}^3$, es decir, la masa de un gránulo era igual a $7 \cdot 10^{-14} \text{ g}$. La determinación exacta de las dimensiones de los granos fue un problema complicado. Perrin hizo esto utilizando tres procedimientos independientes:

1) observándolos al microscopio, determinaba la longitud de una cadena de varias decenas de granos apretados entre sí;

2) pesando varios millares de granos, las dimensiones de éstos se calculaban partiendo de la conocida densidad de la gomaguta;

3) por la fórmula de Stokes (véase la pág. 233), observando la velocidad de descenso, en la emulsión, de una nube de granos. En este caso se suponía que, por la ley de Arquímedes, cada grano desciende por la acción de la fuerza $\frac{3}{4}\pi r^3(D-d)g$,

donde d es la densidad del líquido y r el radio del gránulo. Esta fuerza, cuando el descenso es uniforme, está equilibrada por la del rozamiento viscoso, que se calcula por la fórmula de Stokes. Partiendo de esta condición se determina r .

Los tres procedimientos dieron resultados que coincidían bien. Esto significaba que el peso activo de un grano microscópico suspendido en el líquido se podía escribir de la forma $mg(1-d/D)$. Recordemos que $k=R/N$. De aquí se obtiene la fórmula barométrica para la «atmósfera» de granos de gomaguta suspendidos en el agua:

$$n = n_0 e^{-\frac{Nmg h}{RT} \left(1 - \frac{d}{D}\right)}.$$

El experimento se reducía, pues, a determinar la relación de las concentraciones de n a niveles situados a distancias iguales. Esto se conseguía enfocando un microscopio a una capa suficientemente delgada de emulsión y contando el número de partículas que aparecían en el campo visual en espacios de tiempo iguales. Variando la viscosidad de la emulsión en cientos de veces, Perrin observó rigurosamente que la relación de las concentraciones concordaba con la fórmula barométrica. Sustituyendo n_0 , n , h , m , d , D y T por sus valores, se podía determinar N . Resultó que a pesar de las amplias variaciones de la viscosidad de la emulsión y de las dimensiones de los granos, el valor de N hallado por este procedimiento coincide brillantemente con los valores predichos por la teoría cinética molecular: Perrin obtuvo $6 \cdot 10^{23} \leq N \leq 7 \cdot 10^{23}$ (según los datos modernos $N=6,0225 \cdot 10^{23}$). Esto evidenciaba, sin lugar a dudas, que la distribución de Boltzmann por energías puede aplicarse incluso a aquellas partículas cuya «molécula-grano» es igual a 50 000 toneladas (!).

§ 74. Distribución de las moléculas por velocidades

La distribución de moléculas por velocidades deducida teóricamente por el eminente físico inglés Maxwell, se puede considerar como una consecuencia de la ley de Boltzmann.

El número de moléculas cuyas velocidades se encuentran en el intervalo de v_x a $v_x + \Delta v_x$, de v_y a $v_y + \Delta v_y$ y de v_z a $v_z + \Delta v_z$ será,

según la ley de Boltzmann

$$\Delta n = C e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z.$$

Se sobrentiende que nos interesa la distribución de las velocidades en un pequeño volumen de gas y que la distribución de las moléculas según las coordenadas se tiene en cuenta por medio del factor constante C , que ahora carece de interés para nosotros.

La fórmula que hemos escrito toma en consideración la distribución de las moléculas tanto por sus magnitudes como por las direcciones de sus velocidades. Pero la distribución por direcciones ya la conocemos, puesto que el número de moléculas lanzadas en una u otra dirección debe ser el mismo, si el movimiento de éstas es totalmente caótico. Nos interesa conocer el número total de moléculas que, independientemente de sus direcciones, tienen una velocidad comprendida entre v y $v + \Delta v$, donde $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Si se construye una gráfica tridimensional, sobre cuyos ejes se toman las proyecciones de las velocidades de las moléculas v_x , v_y , v_z y se divide mentalmente este espacio en cubos infinitesimales de volumen $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$, nos podremos figurar claramente los datos acerca de la distribución de las velocidades de las moléculas en forma de los números de moléculas correspondientes a un cubo infinitesimal. La fórmula de Boltzmann nos da precisamente el número de moléculas que hay en cada uno de los cubitos. Pero examinando atentamente la fórmula vemos que el número de moléculas será igual para todos los cubos infinitesimales que se hallen dentro de una zona esférica cuyo radio sea de v a $v + \Delta v$, porque en el factor exponencial de la fórmula figura únicamente el valor absoluto de la velocidad. El número de moléculas que poseen velocidades dentro de los límites de v a $v + \Delta v$ será proporcional al volumen de la capa esférica, es decir, a $4\pi v^2 \Delta v$; de este modo, si el número de moléculas que se encuentran en un cubo infinitesimal es igual a

$$C e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z,$$

el número de aquellas que hay en la zona esférica, es decir, que poseen velocidades dentro de los límites de v a $v + \Delta v$, vendrá representado por la fórmula

$$\Delta n = C e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 \Delta v.$$

¿Qué carácter tiene esta dependencia? Cuando $v=0$ y $v=\infty$ el número de moléculas se anula. Está claro que la curva debe tener un máximo. Por las reglas generales hallamos el máximo del factor de Δv . Tomando la derivada de esta expresión e igualándola

a cero, obtenemos

$$\frac{d}{dv} \left(e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \right) = 0,$$

de donde el valor de la velocidad con el cual la función de distribución tiene el máximo es

$$c = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

¿Qué velocidad es ésta? Como sobre el eje de ordenadas de la curva de distribución se toma el número de moléculas que poseen la velocidad v , resulta que c es una especie de frontera: las moléculas que se mueven con velocidades tanto mayores como menores que c se encuentran con menos frecuencia que las que lo hacen con velocidades c .

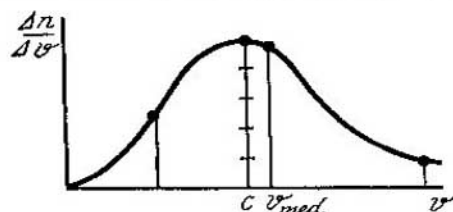


FIG. 87.

Esta velocidad se llama la más probable. La curva de distribución de las moléculas de un gas por velocidades (distribución de Maxwell) se da en la fig. 87.

Conviene comparar las fórmulas de la velocidad más probable y de la cuadrática media:

$$c = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad \text{y} \quad v_{\text{med}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

La velocidad media es mayor que la probable. La causa de que esto sea así se ve claramente en la curva de distribución. Como la curva de distribución se aleja mucho hacia la derecha, hacia allí se desplazan también los valores medios de la velocidad.

Citaremos algunos números que caracterizan la distribución de las velocidades de las moléculas de los gases. El número de moléculas con velocidades próximas a la más probable c es 1,1 veces mayor que el de moléculas con velocidades próximas a la cuadrática media; 1,9 veces mayor que el de moléculas con velocidades próximas a $0,5 c$ y 5 veces mayor que el de moléculas con velocidades próximas a $2 c$ (véase la fig. 87).

§ 75. *Medición de las velocidades de las moléculas de un gas*

Aunque la ley de distribución de las moléculas por velocidades se deduce de condiciones teóricas extraordinariamente precisas, cuya corrección ha sido confirmada por una enorme cantidad de hechos, sería interesante someter la fórmula de la distribución a una comprobación experimental directa.

Las velocidades de las moléculas de un gas en un volumen solamente se pueden medir de un modo indirecto: si la molécula emite luz, la velocidad de su movimiento se refleja en la anchura de las rayas espectrales (efecto Doppler). El método de los haces moleculares ofrece posibilidades directas.

En un tubo largo y ancho se disponen dos diafragmas con orificios bastante pequeños. En uno de los compartimientos extremos se introduce un gas. Las moléculas comienzan entonces a penetrar primero en el compartimiento de en medio y a veces llegan hasta el segundo compartimiento extremo. Es evidente que sólo podrán pasar todo el tubo aquellas moléculas cuyo vector velocidad esté dirigido a lo largo del eje del tubo en el instante en que atraviesan el primer orificio. Por este procedimiento se separa del gas un haz molecular. Las moléculas de este haz tienen las velocidades igualmente dirigidas. En cuanto al valor de la velocidad, es evidente que, por el principio del caos molecular, la distribución de estas moléculas por velocidades será la misma que la de las moléculas de otra dirección cualquiera de movimiento.

Para medir las velocidades de las moléculas del haz se puede recurrir a un dispositivo que recuerda el aparato de medir la velocidad de las balas. Figurémonos dos discos de cartón ajustados rígidamente a un eje, que giran con la velocidad ω alrededor de éste. Si una bala se dispara paralelamente al eje de rotación, los discos serán agujereados por ella sucesivamente en dos puntos, que estarán desplazados en el ángulo acimutal φ en que giró el sistema mientras la bala recorrió la distancia l entre los discos. El tiempo de giro en el ángulo φ es igual a φ/ω , por lo tanto, la velocidad de la bala

$$v = l : \frac{\varphi}{\omega} = \frac{l\omega}{\varphi}.$$

Como las moléculas no agujerean el cartón, el experimento análogo para los haces moleculares se hace con discos en los cuales se practican ranuras radiales a todo el rededor. La distancia angular entre las ranuras es igual a φ . Es evidente que las moléculas, cuya velocidad es v , sólo podrán pasar por los dos discos giratorios ranurados cuando éstos tengan una velocidad ω determinada que satisfaga la condición $\varphi/\omega = l/v$. De este modo, cambiando ω , se

pueden filtrar las moléculas por velocidades, recoger las moléculas de una misma velocidad y medir sus cantidades relativas.

Multitud de experimentos realizados han confirmado las fórmulas de distribución por velocidades antes expuestas y, por lo tanto, las fórmulas de los valores medio y probable de la velocidad de las moléculas.

§ 76. Probabilidad de un estado

Consideremos una caja dividida en dos partes iguales por un tabique. El tabique tiene un orificio. Si en la caja hay moléculas de un gas, éstas serán capaces, a consecuencia de las colisiones fortuitas con las paredes de la caja y entre sí, de pasar de una mitad a otra. A pesar de que el movimiento de las moléculas en la caja sea totalmente desordenado, existe un método mediante el cual se puede predecir cuántas moléculas habrá en la parte izquierda y cuántas en la parte derecha. Este método se basa en aplicar a la sustancia la teoría de probabilidades.

Si en la caja hubiera una sola molécula, podría encontrarse con la misma probabilidad en la parte derecha o en la izquierda. Como en total son posibles dos casos (la molécula puede estar o en la parte izquierda o en la derecha de la caja) y a nosotros nos interesa la realización de uno de estos dos casos, se dice que la probabilidad de que la molécula se encuentre en una mitad de la caja será igual a $1/2$. Supongamos ahora que en la caja hay dos moléculas, que designaremos con las cifras 1 y 2. Las situaciones de las moléculas en este caso pueden ser en total cuatro: las dos moléculas en la parte izquierda, las dos en la derecha, la molécula № 1 en la izquierda y la № 2 en la derecha y, finalmente, la № 2 en la izquierda y la № 1 en la derecha. Nos interesa conocer la probabilidad de que las dos moléculas se hallen en la parte izquierda; éste es un caso de los cuatro posibles y su probabilidad es igual a $1/4$, es decir, $(1/2)^2$. Para tres moléculas tendremos el cuadro siguiente:

en la izquierda	1,	2,	3	0	1,2	1,3	2,3	3	2	1
en la derecha		0		1, 2, 3	3	2	1	1,2	1,3	2,3

Está claro que la probabilidad de que las tres moléculas se encuentren en la mitad izquierda será igual a $1/8$, o sea, $(1/2)^3$. No es difícil comprender que en el caso de N moléculas la probabilidad de que todas ellas se encuentren en una parte de la caja será igual a $(1/2)^N$. Porque al añadir una nueva molécula siempre tenemos la posibilidad de colocarla bien en la izquierda o bien en la derecha. Esto quiere decir que, al añadir cada nueva molécula, la probabili-

dad de que todas las moléculas se encuentren en una de las dos partes de la caja se reduce a la mitad.

Para un ciento de moléculas el número $(1/2)^N$ es ya tan pequeño que podemos prácticamente no tener en cuenta la probabilidad de que todas las moléculas se concentren en una mitad de la caja. Pero en un centímetro cúbico de gas no hay un ciento de moléculas, sino cerca de 10^{20} . Si dividimos mentalmente en dos partes el recipiente que lo contiene, la probabilidad de que todas las moléculas se concentren en una mitad de dicho recipiente será igual a $(1/2)^{10^{20}}$. Tomando logaritmos, este mismo número se puede expresar en la forma $10^{-3 \cdot 10^{19}}$. Para poner la unidad en esta fracción decimal habría que escribir previamente $3 \cdot 10^{19}$ ceros (!). Admitiendo que se pueden escribir tres cifras por segundo (que ya es bastante), se necesitarían para escribir dicho número 10^{19} segundos, es decir, más de 300 mil millones de años, lo que supera diez veces la edad del sistema solar.

Volvamos a referirnos ahora a la tabla de ubicación de las tres moléculas. Sólo en una ubicación, de las ocho posibles, todas las moléculas se concentran en la izquierda. Cualquier otra ubicación se presenta también una sola vez. Pero hay que recordar que las moléculas se numeran convencionalmente. No existen procedimientos que hagan posible distinguir las ubicaciones en que a la izquierda se encuentran las moléculas N_2N_2 1, 2 de las que en esta posición se hallen las N_2N_2 2, 3 ó 1,3. Por consiguiente, a una ubicación, en que en la parte izquierda hay tres moléculas, le corresponden tres ubicaciones en las cuales hay dos moléculas y la misma cantidad de ubicaciones en las cuales se encontrará en la parte izquierda una sola molécula. Por esto, la probabilidad de cierta distribución característica, independiente de los números que tengan las moléculas que la creen, puede medirse por el número de ubicaciones que pueden hacer efectiva dicha distribución. Cuanto mayor sea este número, con tanta más frecuencia se encontrará esta distribución y tanto más probable será.

Este ejemplo nos conduce al concepto de probabilidad del estado de un cuerpo.

Los átomos que constituyen un cuerpo poseen en cada instante unas coordenadas y unas velocidades determinadas. A esta estructura instantánea le llamaremos microestado.

Cualquier cuerpo que se halle en estado de equilibrio con un medio y que conserve invariables todas sus propiedades no se encontrará siempre, sin embargo, en un mismo microestado. Debido al movimiento térmico de las partículas, el cuerpo cambiará continuamente de microestado. Si se trata de un gas, estas variaciones se deben a los movimientos de traslación, a las oscilaciones y a las rotaciones de las moléculas; si de un líquido, a las oscilaciones de

las partículas y al paso de un medio a otro, y si de un sólido, principalmente a las oscilaciones. En cualquier caso, el equilibrio del cuerpo será dinámico.

Pasando de un microestado a otro, el cuerpo retornará repetidas veces a unos mismos estados. Unos de ellos se verificarán con más frecuencia y otros con menos, como se deduce claramente del ejemplo que hemos puesto.

Si durante un gran espacio de tiempo T el cuerpo «vivió» en cierto microestado un tiempo Δt , la probabilidad de este microestado será $\Delta t/T$.

La probabilidad de un microestado viene expresada por la fórmula, hallada por Gibbs, siguiente:

$$\omega = Ae^{-\mathcal{E}/kT},$$

donde \mathcal{E} es la energía. La constante A tiene en cuenta el número de ubicaciones con las cuales se puede efectuar dicho microestado. Cuando los valores de A son iguales, la probabilidad de un microestado viene determinada por su energía.

La fórmula de Gibbs coincide por su forma con la ley de Boltzmann. ¿En qué relación se encuentra el contenido de estas dos leyes? La fórmula de Boltzmann considera un gran número de moléculas (cuerpos) en un instante y nos dice cómo están distribuidas estas moléculas (cuerpos) por energías. La de Gibbs se aplica a un solo cuerpo (molécula), que «observamos» durante mucho tiempo, y nos da información acerca de la distribución de la energía de dicho cuerpo con el tiempo. Se comprende que esta coincidencia no es casual, pero nosotros no podemos detenernos en esto.

Una de las leyes fundamentales de la naturaleza, como ya dijimos, es el carácter discreto (cuántico) del estado del cuerpo.

Por esto puede hablarse del número de microestados con que se realiza un macroestado dado del cuerpo. Este número se llama peso estadístico del estado macroscópico (o probabilidad termodinámica).

La probabilidad termodinámica W va ligada unívocamente a las funciones termodinámicas del cuerpo. No es difícil comprender que el peso estadístico de un estado crece al aumentar la temperatura, crece cuando se funde y se vaporiza el cuerpo, etc. Puede decirse que la probabilidad termodinámica del estado de un cuerpo será tanto más elevada cuanto mayor sea la libertad de movimiento de las partículas que lo constituyen.

La relación entre las magnitudes (microscópicas) que se observan y la probabilidad de los microestados nos la podemos figurar claramente. Se comprende, claro está, que las magnitudes que se observan son el promedio de los valores que la magnitud dada

toma para los microestados. Si, por ejemplo, en el n -ésimo microestado la energía es igual a E_n , la energía media (observada) será

$$E = \omega_1 E_1 + \omega_2 E_2 + \omega_3 E_3 + \dots$$

Las probabilidades ω_n deben normalizarse, como es natural, a la unidad ($\sum \omega_n = 1$).

§ 77. Transformaciones irreversibles desde el punto de vista molecular

Del ejemplo que hemos puesto de la caja con el gas, se deduce claramente que la mayor probabilidad la tiene el grupo de estados en que las moléculas están repartidas «uniformemente». Toda desviación de la «uniformidad» —como el desplazamiento de una parte de las moléculas hacia el lado izquierdo de la caja, la ubicación a la izquierda de las moléculas más rápidas, el movimiento dirigido de la mayor parte de las moléculas y, en general, cualquier desviación del desorden en la distribución de las moléculas por puntos y velocidades—, reporta una disminución de la probabilidad del estado. Esta observación nos permite comprender el sentido cinético-molecular del carácter irreversible de las transformaciones reales.

Como quedó antes establecido, el segundo principio de la termodinámica para las transformaciones irreversibles, es decir, la ley del crecimiento de la entropía en los sistemas térmicamente aislados, es una generalización del hecho de que prácticamente sean imposibles una serie de transformaciones. Así, el calor no puede pasar sin compensación de un cuerpo frío a otro caliente, un cuerpo no puede adquirir energía cinética a expensas únicamente de la pérdida de energía interna del medio circundante, un gas puede expandirse espontáneamente, pero no puede comprimirse.

La existencia de las transformaciones irreversibles es una peculiaridad de los fenómenos moleculares. En un fenómeno puramente mecánico, es decir, en una transformación sin rozamiento, el proceso siempre puede invertirse. Un péndulo, al moverse hacia la derecha, pasa en orden inverso por los mismos estados que recorrió cuando se movía hacia la izquierda; una bola de billar despedida por una banda en una dirección cualquiera, si se coloca en su camino una pared elástica, será rechazada por ella y recorrerá en sentido contrario todo el camino que hizo a la «ida». La completa equivalencia de la «ida» y la «vuelta» es evidente en las transformaciones puramente mecánicas. ¿Por qué, entonces, carecen de la propiedad de ser reversibles los procesos moleculares que consideramos como conjunto de movimientos mecánicos de las moléculas? La causa no es más que una. En todas las transformaciones irreversibles au-

menta la probabilidad del estado. Una transformación reversible es un proceso imaginable: su realización es posible en esencia, pero, observado en los espacios de tiempo, de que dispone el hombre, este proceso es prácticamente imposible.

Esto no es difícil de demostrar para cualquiera de las transformaciones irreversibles. El calor pasa del cuerpo caliente al frío, pero no al contrario. En el caso de cuerpos gaseosos, esta transformación se puede representar gráficamente como un proceso de mezcla de moléculas rápidas con moléculas lentas. El proceso inverso no puede ocurrir por la ley del azar, ya que representa la clasificación de las moléculas en rápidas y lentas, es decir, el paso a un estado más ordenado.

Por esta misma causa podemos, con bastante rapidez, mezclar con una pala dos sacos de granos diferentes. Pero aunque continuásemos removiendo el contenido de los dos sacos durante siglos, los granos no se separarían de tal modo que arriba quedasen los de un tipo y abajo los de otro. Y esto a pesar de que el número de granos que hay en los sacos es infinitamente menor que el de moléculas en un milímetro cúbico de sustancia.

Tampoco es difícil comprender la completa improbabilidad del fenómeno inverso a la expansión espontánea de un gas. Si en la caja con tabique que consideramos hace poco hay un gas en la parte izquierda, mientras que en la derecha existe el vacío, al cabo de un corto espacio de tiempo las dos partes de la caja se llenarán uniformemente de gas. Teóricamente puede ocurrir que las moléculas vuelvan a concentrarse en la parte izquierda de la caja. Pero la probabilidad de que esto ocurra es extremadamente pequeña. Su valor, que ya calculamos antes, es de $(1/2)^N$.

Cualquiera que sea la transformación irreversible que sometamos a consideración, el resultado será siempre el mismo: cada proceso irreversible está ligado al crecimiento de la probabilidad del estado.

Así, pues, tenemos dos magnitudes que aumentan cuando las transformaciones son irreversibles: la entropía S , que estudiamos antes, y la probabilidad termodinámica W , que acabamos de considerar. Se nos figura natural que estas dos magnitudes físicas estén relacionadas entre sí. La existencia de esta ligazón fue demostrada por Boltzmann. La fórmula dada por él tiene la forma $S = k \ln W$. La entropía es proporcional al logaritmo de la probabilidad termodinámica del estado.

De este modo, el segundo principio de la termodinámica adquiere otro enunciado: en las transformaciones reversibles no varía la probabilidad del estado; en las irreversibles (refiriéndonos a sistemas aislados) aumenta dicha probabilidad.

§ 78. *Fluctuaciones. Límites de aplicación del segundo principio*

Cualquier propiedad física será invariable si no varía la distribución de las moléculas por puntos y velocidades. En principio las moléculas de una sustancia pueden cambiar con el tiempo el carácter de la distribución. Pero, como acabamos de decir, entre todas las distribuciones se destacan tan ostensiblemente las más probables, que las desviaciones de ellas deben considerarse como sucesos muy raros. Las características físicas correspondientes a esta distribución más probable se pueden llamar *características medias*. La discrepancia de una característica física medida, respecto de su valor medio para un sistema con gran número de moléculas, es prácticamente imposible de descubrir. Así ocurre cuando las propiedades físicas se estudian en volúmenes que contienen un gran número de moléculas. Pero si el número de partículas que hay en el sistema se hace pequeño, resulta posible observar distribuciones menos frecuentes de las moléculas por puntos y velocidades. Estas distribuciones menos frecuentes corresponderán a valores de las características físicas distintos de los valores medios. Las desviaciones de las características físicas, respecto de sus valores medios, que se ponen de manifiesto en los sistemas con un número de partículas relativamente pequeño, reciben el nombre de *fluctuaciones*. La temperatura y la presión, la capacidad calorífica y la conductibilidad térmica y, en general, cualesquiera propiedades de las partes de un cuerpo que contengan cantidades pequeñas de moléculas, están sujetas a fluctuaciones en torno a los valores medios. Este mismo problema puede abordarse de un modo algo distinto.

Si en un medio gaseoso se sitúa un pequeño espejo suspendido de un hilo delgado, desde el punto de vista macroscópico no puede manifestarse la presión del gas sobre el espejo, ya que las fuerzas que actúan sobre él por todas partes son iguales. Sin embargo, desde el punto de vista molecular, en principio, las variaciones del impulso producidas por los choques de las moléculas en el espejo no tienen que estar necesariamente equilibradas en las diversas partes de su superficie. El espejito, como es muy liviano, puede entrar en oscilaciones de fluctuación. Como se dijo antes, a un grado de libertad del movimiento de cualquier partícula (moléculas, partículas brownianas, gránulos) le corresponde una energía del movimiento térmico caótico igual a $\frac{1}{2}kT$. Esta energía es la que percibe en promedio el espejito. Por otra parte, el trabajo de torsión del hilo en el ángulo $\Delta\varphi$ es igual a $M\Delta\varphi$. Por esto las desviaciones en un ángulo igual, por el orden de magnitud, a $\Delta\varphi \approx \frac{kT}{M}$ serán bastante frecuentes.

Estas fluctuaciones se observan en realidad y su medición puede utilizarse para determinar empíricamente la constante de Boltzmann y, por consiguiente, el número de Avogadro.

Los fenómenos de fluctuación limitan la exactitud de las mediciones. El índice, el espejo o alguna otra pieza del aparato indicador están sometidos a fluctuaciones. A la temperatura ambiente, el límite del error en unidades de energía está próximo a 10^{-20} J. En muchos instrumentos no hemos alcanzado aún este límite, sin embargo, en los mejores aparatos de medida este límite ya se ha conseguido.

Las fluctuaciones limitan las posibilidades de aplicación del segundo principio de la termodinámica. En las oscilaciones de fluctuación se observan transformaciones en las cuales el sistema pasa de un estado más probable a otro menos probable, es decir, la entropía disminuye.

De magnífico ejemplo puede servir el movimiento browniano. En estos experimentos observamos las fluctuaciones de la presión en el pequeño volumen correspondiente a una partícula. Debido a estas oscilaciones casuales de la presión, la partícula puede ser lanzada, por ejemplo, hacia arriba. Pero el movimiento en contra de la fuerza de la gravedad exige trabajo. En este caso el trabajo se realiza a costa del movimiento térmico caótico de las moléculas, o sea, a expensas únicamente de la energía interna de la sustancia y en completa contradicción con el segundo principio de la termodinámica.

A pesar de que en algunos pequeños volúmenes se produzcan a veces efectos con disminución de la entropía, es decir, que contradicen el segundo principio, el sistema en conjunto se subordinará siempre a dicha ley. Debido al carácter fortuito de estos sucesos, el número de transformaciones que se realizan a costa de la energía interna será igual al número de las que se efectúan en sentido contrario. Se puede demostrar rigurosamente que serán inútiles todos los intentos que se hagan de «seleccionar» las transformaciones que contradicen el segundo principio, y que ocurren en pequeños volúmenes aislados, para utilizarlas en la creación de un móvil perpetuo de segunda especie.

El segundo principio de la termodinámica también tiene un límite «por el extremo opuesto». Además de ser inaplicable a los sistemas constituidos por un número muy pequeño de partículas, deja de ser correcto para los sistemas cuyo número de partículas es infinito, como ocurre en el universo o en cualquier parte infinita de él. Como se explicó antes, la esencia del segundo principio de la termodinámica consiste en que el número de estados de equilibrio es inmensamente mayor que el de distribuciones no equilibradas. Pero en el universo, que está formado por un número infinito de

partículas, esta afirmación pierde su sentido. En efecto, tanto el número de estados de equilibrio como el de estados no equilibrados se hacen, en este caso, infinitos. Como resultado de esto es imposible hablar, refiriéndose al universo en conjunto, de estados distintos por su probabilidad.

13

PROCESOS DE TRANSICIÓN AL ESTADO DE EQUILIBRIO

§ 79. *Difusión*

Un cuerpo que interacciona con el medio, cambia de estado para establecer el equilibrio con los cuerpos que lo rodean. El estado del cuerpo varía en este caso de manera que su energía interna tiende a un mínimo y la entropía aumenta y se hace máxima cuando el equilibrio se establece. Estas dos tendencias son de ordinario contradictorias y, por esto, es difícil predecir el fenómeno cuando pueden variar la energía y la entropía. Ahora queremos estudiar los fenómenos de difusión, conductibilidad térmica y rozamiento interno que tienen lugar en los sistemas aislados. En otras palabras, vamos a referirnos a la igualación de las concentraciones, temperaturas y velocidades de unas partes del cuerpo con respecto a otras (esto último sólo atañe a los cuerpos líquidos y gaseosos). Como la energía de estos sistemas no puede cambiar, el paso al estado de equilibrio consiste únicamente en un aumento de la entropía.

Las leyes fundamentales de los fenómenos de difusión, conductibilidad térmica y rozamiento interno son bastante semejantes. Comenzaremos su estudio por los procesos de difusión. De igual modo podríamos hablar del equilibrio de la concentración de un gas o de una disolución. Nuestros razonamientos son correctos incluso para las disoluciones sólidas (véase la pág. 689), ya que también en este caso la tendencia al máximo de la entropía obliga a los átomos o a las moléculas de las sustancias a mezclarse, para que en todas las partes del cuerpo se establezca la misma concentración.

Consideremos dos volúmenes, físicamente próximos e infinitesimales, de sustancia, en los cuales las concentraciones de los átomos (o moléculas) que se difunden son respectivamente c y $c + dc$. Si estos dos volúmenes se hallan entre sí a la distancia dx , la relación $\frac{dc}{dx}$ caracterizará la rapidez con que varía la concentra-

ción. Esta relación se llama *gradiente de concentración*. Si el eje x se elige de manera que su sentido positivo coincida con la dirección de la difusión, $\frac{dc}{dx}$ será una magnitud negativa. La sustancia se desplazará hacia la parte en que las concentraciones son menores.

Esto no significa que todas las moléculas, formando un flujo continuo, se desplacen incesantemente hacia un lado. Al contrario, el movimiento de difusión conserva en un grado considerable los rasgos del desorden propios del movimiento molecular. Las moléculas se mueven desordenadamente, se mueven en todos los sentidos, incluso hacia la parte en que la concentración es mayor, pero la probabilidad de que las moléculas se desplacen hacia el lado «correcto», es mayor. Esto quiere decir que, a través de una superficie imaginaria colocada transversalmente al flujo, serán más las partículas que pasen de la parte de mayor concentración a la de menor que al contrario.

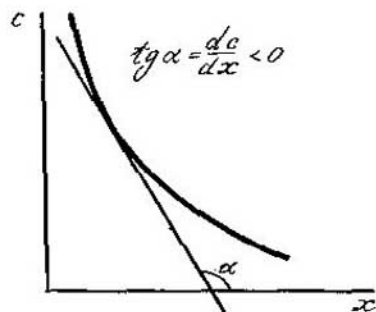


FIG. 88.

La ley fundamental de la difusión afirma que el flujo de sustancia μ , es decir, la masa de dicha sustancia que pasa en la unidad de tiempo por la unidad de superficie, debe ser directamente proporcional al gradiente de concentración negativo:

$$\mu = -D \frac{dc}{dx}.$$

El coeficiente de proporcionalidad D se llama *coeficiente de difusión*. Esta ley se justifica porque, dentro de unos límites amplios, el coeficiente de difusión es una constante de la sustancia y del medio.

Tanto la concentración como el flujo de masa deben medirse en las unidades correspondientes. Si la concentración se mide en gramos por cm^3 , el flujo debe medirse en gramos por cm^2 y por s. De aquí se deduce que el coeficiente de difusión debe tener una dimensión perfectamente determinada: en el sistema CGS se medirá en cm^2/s .

La caída de la concentración se efectúa generalmente siguiendo la curva colgante que representa la fig. 88. Si nos interesa la parte en que la caída de concentración se puede representar por una línea recta, tenemos que

$$\mu = -D \frac{c_2 - c_1}{x_2 - x_1},$$

donde c_1 y c_2 son los valores de la concentración en los puntos x_1 y x_2 .

Los coeficientes de difusión oscilan dentro de límites amplios. He aquí algunos ejemplos:

1) Para los gases a temperaturas de 0—15°C:

hidrógeno → oxígeno,	$D = 0,778 \text{ cm}^2/\text{s};$
aire → oxígeno,	$D = 0,178 \text{ cm}^2/\text{s};$
aire → sulfuro de carbono,	$D = 0,099 \text{ cm}^2/\text{s}.$

2) Para las soluciones de vitriolo azul que se difunden en agua pura (concentración c , en gramos equivalentes por litro):

c	D , $\text{cm}^2/\text{día}$
0,1	0,39
0,5	0,29
0,95	0,23

§ 80. Conductibilidad térmica y viscosidad

Razonamientos muy semejantes a los anteriores podemos hacer para explicar el proceso de igualación de la temperatura. Si la temperatura de un cuerpo en distintos puntos es diferente, la entropía no es máxima. Para que se establezca el equilibrio, la velocidad media de las moléculas, y, por consiguiente, las temperaturas deben igualarse.

Si en dos puntos contiguos las temperaturas son T y $T+dT$ y dichos puntos se hallan entre sí a la distancia dx , la relación $\frac{dT}{dx}$ caracterizará la rapidez con que desciende la temperatura. Esta relación se llama *gradiente de temperatura*.

Al igualarse las temperaturas, las partes del cuerpo que tienen más energía la disminuyen, y las partes con energía menor reciben el calor de las más ricas. En cierto sentido convencional, el calor «pasa» de una parte a otra. La cantidad de calor que pasa de una parte del cuerpo a otra a través de una intersuperficie de área igual a la unidad, en la unidad de tiempo, recibe el nombre de *flujo de calor* q . Lo mismo que en los fenómenos de difusión, puede suponerse que el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura negativo. Cuanto mayor sea la diferencia de temperaturas, con tanta mayor rapidez pasará el calor. La fórmula

$$q = -\kappa \frac{dT}{dx}$$

también se justifica aquí por el hecho de que el coeficiente de proporcionalidad κ , que se denomina *coeficiente de conductibilidad térmica*, es una constante de la sustancia y no depende de las magnitu-

des de los flujos caloríficos que pasan. Cuando la temperatura desciende linealmente, la fórmula se simplifica y toma la forma

$$q = -\kappa \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}.$$

No es difícil hallar la dimensión del coeficiente de conductibilidad térmica. En el sistema CGS se medirá en $\text{cal}/(\text{cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{K})$. De la fórmula que define el sentido de κ se deduce claramente que κ es el flujo de calor que pasa por la superficie de 1 cm^2 en 1 s cuando la temperatura disminuye 1°K en la longitud de 1 cm .

Los valores del coeficiente de conductibilidad térmica, lo mismo que los del coeficiente de difusión, oscilan dentro de amplios límites.

Ofrecemos algunos ejemplos:

1) Cuerpos sólidos ($0-18^\circ\text{C}$): corcho $0,00012$, madera $0,0008$, cuarzo fundido $0,0033$, plata $1,06 \text{ cal}/(\text{cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{K})$.

2) Líquidos: sulfuro de carbono (14°C) $2 \cdot 10^{-4}$, ácido sulfúrico 30% (32°C) $62,4 \cdot 10^{-4}$, mercurio (0°C) $0,2 \text{ cal}/(\text{cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{K})$.

3) Gases (0°C): anhídrido carbónico $3,4 \cdot 10^{-5}$, aire $5,7 \cdot 10^{-5}$, hidrógeno $40,6 \cdot 10^{-5} \text{ cal}/(\text{cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{K})$.

El tercer fenómeno de este tipo consiste en la igualación de las velocidades. Si un gas, o un líquido, se mueve en cierta dirección, de manera que diversas capas suyas se trasladan con velocidades distintas, este movimiento será inestable. Más tarde o más temprano las velocidades de movimiento deberán igualarse: las capas lentas se acelerarán y las rápidas se retardarán. Este fenómeno se llama también *rozamiento interno* o *viscosidad*. Este fenómeno se observa en todos los cuerpos excepto en el helio II (véase la pág. 700).

Consideremos un líquido, o un gas, que se mueve en la dirección del eje x . Supongamos que las capas del líquido se mueven a distinta velocidad. Sobre el eje y , perpendicular a la dirección de la corriente del líquido o del gas, tomamos dos puntos próximos situados entre sí a la distancia dy . Las velocidades de la corriente en estos dos puntos se diferencian en dv . La relación $\frac{dv}{dy}$ es el gradiente de la velocidad de la corriente y caracteriza la rapidez con que varía dicha velocidad a medida que la corriente se aleja de la superficie del líquido. Para mayor claridad podemos suponer que se trata de un río rápido en que las velocidades de las corrientes son máximas en la superficie y decrecen paulatinamente hacia el fondo del río.

Si en un instante cualquiera se eliminan las causas del movimiento del líquido, las velocidades con que se mueven las distintas capas empezarán a igualarse de acuerdo con la ley del aumento de la entropía. Para que esta igualación sea posible es necesario que exista la fuerza de rozamiento interno, que actúa entre las capas del líquido o del gas. La magnitud de esta fuerza referida a la uni-

dad de superficie de la capa se supone proporcional al gradiente de la velocidad, es decir,

$$f = -\eta \frac{dv}{dy}.$$

Aquí η es el *coeficiente de viscosidad* (o de rozamiento interno). Su dimensión en el sistema CGS es $\text{g}/(\text{cm} \cdot \text{s})$. Esta unidad se conoce con el nombre de *poise* (P). En el SI su dimensión es $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 = 10 \text{ P}$.

La viscosidad de los diversos cuerpos oscila entre límites aún más amplios que los dos coeficientes análogos que hemos estudiado antes. Véanse unos ejemplos:

1) Sólidos: vidrio (710°C) $4,5 \cdot 10^{10}$, vidrio (420°C) $4 \cdot 10^{16}$, plomo (9°C) $4,7 \times 10^{14}$, hielo (-14°C) $8,5 \cdot 10^{12}$ P.

2) Líquidos: éter etílico (25°C) 0,0022, agua (20°C) 0,01, glicerina (0,8% agua, a 18°C) 13,93 P.

3) Gases: hidrógeno (0°C) $8,49 \cdot 10^{-6}$, aire (0°C) $17,19 \cdot 10^{-6}$ P.

Es curioso que el hidrógeno tenga la mitad de viscosidad que el aire y una conductibilidad térmica siete veces mayor que él. Esto explica por qué se utiliza el hidrógeno para la refrigeración de los turbogeneradores potentes.

§ 81. Rapidez de igualación

Es bien conocido que el equilibrio puede establecerse en los plazos más diversos. La temperatura de un trozo de hierro caldeado que se echa al agua y la temperatura de esta última se equilibran muy pronto. Por el contrario, la temperatura del aire y la de un ladrillo calentado se equilibran lentamente. El nitrógeno se difunde en oxígeno en un instante, pero la igualación de las concentraciones de una solución de vitriolo azul tarda muchos días. La igualación de velocidades también puede realizarse en tiempos notoriamente distintos según se trate de un gas o de un líquido viscoso.

No es posible dar una respuesta universal (o fórmula general) acerca de los tiempos de igualación, ya que la geometría del experimento influye en estos tiempos. El cuerpo que se enfría puede tener la forma de un cilindro o de una lámina; el gas que se difunde puede hallarse en el instante inicial dentro de un pequeño volumen esférico o puede estar repartido por una superficie cualquiera; el rozamiento interno se puede observar en tubos de secciones distintas o en depósitos abiertos. Estas circunstancias deben tenerse especialmente en cuenta cada vez y el cálculo de los valores exactos de los tiempos de igualación es un problema matemático difícil. No obstante, prescindiendo de las particularidades geométricas, se puede intentar resolver el problema en forma general, si renunciamos al objetivo de obtener una fórmula exacta y nos conformamos con encontrar solamente las proporciones que existen entre las magnitudes físicas. Por este camino le ayudan al físico los razonamientos acerca

de las dimensiones de las magnitudes físicas que deben estar ligadas entre sí.

Consideremos, por ejemplo, el fenómeno de la difusión. Está claro que el tiempo t que tarda en igualarse la concentración depende ante todo de las dimensiones de la región en que ocurre la difusión (longitud característica L) y de las propiedades de las sustancias que se difunden (coeficientes de difusión característicos D). La ecuación de la difusión tiene la forma $\mu = -D \frac{dc}{dx}$. Escribamos para ella la ecuación de las dimensiones:

$$\frac{M}{L^2 T} = [D] \frac{M}{L^4}.$$

Vemos que $T = \frac{L^2}{[D]}$, es decir, el tiempo de igualación $t = \text{const} \cdot \frac{L^2}{[D]}$ y no depende de la concentración.

De aquí podemos hacer la siguiente conclusión: cualquier solución rigurosa del problema del tiempo de igualación de la concentración en los procesos de difusión nos conducirá siempre a la ecuación

$$t = \text{const} \cdot \frac{L^2}{D},$$

donde const es una magnitud adimensional constante que depende de las condiciones geométricas del problema. La magnitud L , de cuyo cuadrado depende la velocidad de igualación de la concentración, tiene el sentido de la medida geométrica de la región en que tiene lugar dicha igualación. Por lo tanto, si dentro de los límites de un centímetro se iguala la concentración en 10 s, por ejemplo, se tendrá que en los límites de dos centímetros se igualará en 40 s.

De un modo exactamente igual se puede resolver el problema de la igualación de la temperatura. En la ley fundamental de este fenómeno figuran la cantidad de calor, el coeficiente de conductibilidad térmica, la temperatura y la distancia. Pero el incremento de la cantidad de calor por unidad de volumen se puede representar de la forma

$$dq = \rho c_p dT;$$

c_p es el calor específico a presión constante, ρ es la densidad (de modo que $c_p \rho$ es la capacidad calorífica de la unidad de volumen). Por lo tanto, deberán estar ligadas entre sí las magnitudes siguientes: la temperatura, la longitud, el tiempo, la densidad, la capacidad calorífica y la conductibilidad. Puede comprobarse sin dificultad que el tiempo t no puede depender de la temperatura y viene expresado por las demás magnitudes de una forma única:

$$\frac{L^2 \rho c_p}{\kappa}.$$

Por consiguiente, el tiempo de igualación de la temperatura se expresa por la fórmula

$$t = \text{const} \cdot \frac{L^2}{\chi},$$

donde llamamos χ a la combinación de constantes $\frac{\kappa}{\rho c_p}$. La magnitud χ se llama *difusividad térmica*. La introducción de este coeficiente está completamente justificada por el deseo de hacer análogas las fórmulas de igualación de la concentración y de la temperatura. Los coeficientes de difusión y de difusividad térmica tienen la misma dimensión y son completamente análogos en los dos fenómenos de igualación que hemos estudiado.

Vemos, pues, qué es lo que determina el enfriamiento del cuerpo. El proceso transcurre tanto más despacio cuanto mayor es la densidad y capacidad calorífica y cuanto menor es el coeficiente de conductibilidad térmica.

Ejemplo. Se tienen dos barras de iguales dimensiones, una de cuarzo fundido y otra de plata. Para el cuarzo $\kappa=0,0033 \text{ cal}/(\text{cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{K})$, $\rho=2,65 \text{ g}/\text{cm}^3$, $c_p=0,1844 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{K})$, es decir, $\chi=0,676 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$. Para la plata $\kappa=1,06 \text{ cal}/(\text{cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{K})$, $\rho=10,5 \text{ g}/\text{cm}^3$, $c_p=0,0558 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{K})$, o sea, $\chi=1,71 \text{ cm}^2/\text{s}$. Esto significa que el tiempo que tarda en igualarse la temperatura en la plata es 253 veces menor que el que tarda en el cuarzo.

Lo mismo que para la difusión, para la igualación de las temperaturas es característica la dependencia del cuadrado de la distancia: el tiempo de igualación es proporcional al cuadrado de la medida lineal de la región.

Sin repetir razonamientos análogos puede escribirse la fórmula del tiempo de igualación de las velocidades de las partes de un líquido o de un gas. Es natural que pueda dársele la misma forma:

$$t = \text{const} \cdot \frac{L^2}{\nu}.$$

El coeficiente ν que determina la rapidez con que se igualan las velocidades de movimiento, es igual a $\frac{\eta}{\rho}$ y se llama *viscosidad cinemática*.

Ejemplo. Para el agua $\eta=0,01 \text{ P}$, $\rho=1 \text{ g}/\text{cm}^3$, es decir, $\nu=0,01 \text{ cm}^2/\text{s}$; para la glicerina $\eta=13,9 \text{ P}$, $\rho=1,25 \text{ g}/\text{cm}^3$, o sea, $\nu=11,1 \text{ cm}^2/\text{s}$. Esto quiere decir, que si cualquier perturbación en la glicerina tarda en amortiguarse 0,1 s, esta misma perturbación tardará en amortiguarse en el agua 2 min.

§ 82. *Procesos estacionarios*

Si un cuerpo se abandona a sí mismo, las diferencias de temperaturas, de concentraciones y de velocidades del movimiento de sus partes se acaban igualando necesariamente de acuerdo con el principio del aumento de la entropía. Sin embargo, es completamente posible que haya un estado del cuerpo en el cual, durante largo tiempo, exista un flujo invariable de calor o de sustancia o una distribución invariable de las velocidades del movimiento de unas partes del cuerpo con respecto a otras. Los procesos de este tipo se denominan *estacionarios*. Es natural que durante un proceso estacionario el cuerpo no se encuentre en estado de equilibrio.

¿En qué condiciones son posibles estos procesos? Figurémonos una barra metálica a la que por un extremo se le suministra cierta cantidad de calor cada instante y cuyo otro extremo se halla en contacto térmico con un cuerpo más frío. Las condiciones con que la temperatura a lo largo de la barra no varían, es decir, las condiciones de constancia del gradiente de temperatura en todo el recorrido del flujo calorífico, se cumplirán en el caso en que la cantidad de calor que absorbe el cuerpo frío sea exactamente igual a la cantidad de calor suministrado durante el mismo tiempo por el cuerpo más caliente. En condiciones análogas es posible también un proceso de difusión estacionario. Para crearlo hay que suministrar en un punto del cuerpo y absorber en otro cantidades iguales de una sustancia, conservando invariable de este modo una determinada diferencia de concentraciones entre dos partes del cuerpo.

Un proceso estacionario de viscosidad se puede conseguir, por ejemplo, en el espacio entre dos cilindros coaxiales que giren a velocidades distintas. Como junto a las paredes sólidas tendrá el líquido, o el gas, una velocidad igual a la de ellas, dentro del propio líquido se creará una diferencia de velocidades constante.

El proceso estacionario no se produce inmediatamente. Durante cierto tiempo se efectúa el establecimiento del mismo.

Supongamos que la barra por la cual se transmite el calor tiene un extremo sumergido en nieve. En el instante inicial la temperatura de la barra será igual a cero en todos sus puntos. Si ahora ponemos el otro extremo en contacto térmico con agua hirviendo, la temperatura comenzará a elevarse en todos los puntos de la barra, aunque, claro está, no con la misma rapidez. El extremo puesto en contacto con el agua en ebullición se calentará casi inmediatamente hasta una alta temperatura. Donde más lentamente se elevará ésta será en el extremo de la barra sumergido en la nieve. Al cabo de cierto tiempo cesará el aumento de la temperatura en todos los puntos de la barra y se establecerá una distribución completamente determinada, el proceso se habrá hecho estacionario. El carácter

de la distribución de las temperaturas depende de la cantidad de calor que se suministra (absorbe) en la unidad de tiempo.

En una plancha eléctrica, calentada por una resistencia en espiral, la parte central está a la temperatura más elevada, luego ésta desciende hacia los bordes exteriores. En el medio circundante, el más caliente, como es natural, es el aire que está en contacto con la plancha. Después la temperatura decrece más rápidamente, debido a la pequeña conductibilidad térmica del aire.

Para cálculos aproximados y pequeñas dimensiones del cuerpo en contacto con el aire o un líquido, se puede no tener en cuenta la curva de caída de la temperatura y referirse a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y del medio, $T - T_0$. El flujo de calor transmitido por el cuerpo al medio en la unidad de tiempo se puede suponer, en este caso, que es proporcional a la antedicha diferencia de temperaturas:

$$q = k(T - T_0).$$

El coeficiente k se llama *coeficiente de traspaso de calor*. Esta es una magnitud técnica importante. Su valor y los cálculos ligados a ella se estudian en el curso de termotécnica.

Llamemos P a la potencia suministrada al cuerpo, por ejemplo, la potencia eléctrica en el caso de la plancha. La condición para que el proceso sea estacionario impone la igualdad

$$P = k(T - T_0).$$

Aquí T es la temperatura del cuerpo que se estableció en este proceso estacionario, $T = T_0 + \frac{P}{k}$. Esta temperatura puede variar considerablemente en dependencia de la potencia que se suministre y de las condiciones del intercambio térmico.

Conviene hacer aquí una observación acerca de la temperatura que marca un termómetro puesto «al sol». El termómetro participa en el proceso estacionario de transmisión del calor solar al aire circundante. En dependencia del valor que tenga el coeficiente de traspaso de calor, el termómetro sometido a los rayos del sol puede indicar, literalmente, cualquier cosa. La temperatura medida en estas condiciones es la del termómetro, pero en modo alguno puede caracterizar el estado del tiempo.

En los problemas análogos relativos a la difusión no nos detendremos.

§ 83. *Movimiento en un medio viscoso*

Los criterios concernientes a las dimensiones de las magnitudes físicas ayudan a resolver problemas de enorme importancia práctica, como, por ejemplo, los problemas acerca del paso estacionario

de un fluido junto a un obstáculo sumergido en él o, lo que es lo mismo, del movimiento de un sólido en un medio.

El problema más importante es el de la fuerza de la resistencia que experimenta un cuerpo al moverse en un medio. Esta fuerza de resistencia puede depender de las dimensiones L del cuerpo, de la velocidad de su movimiento u y de las propiedades del fluido, concretamente, de su densidad ρ y de su viscosidad η . Otras magnitudes no deben intervenir en este proceso.

Elijamos primeramente una cantidad adimensional constituida por L , u , ρ y η . Recordaremos que la viscosidad cinemática $\nu = \eta/\rho$ tiene la dimensión L^2T^{-1} , pero esta misma dimensión la tiene el producto Lu . Por consiguiente

$$Re = \frac{\rho Lu}{\eta} = \frac{Lu}{\nu}$$

es una cantidad adimensional que se designa como hemos indicado y se llama *número de Reynolds*. Se puede comprobar que Re es la única combinación adimensional de las magnitudes antedichas. Otras magnitudes adimensionales pueden ser únicamente funciones del número de Reynolds, $f(Re)$. Si los movimientos de distintos cuerpos en líquidos diferentes se reducen a un mismo valor de Re , estos movimientos se dice que son semejantes. Existe una gran disciplina técnica —la teoría del modelo—, en la cual las conclusiones acerca de las peculiaridades de un fenómeno se sacan basándose en la observación de un fenómeno semejante en un modelo.

Volvamos ahora al problema planteado: buscar la expresión de la fuerza de la resistencia que experimenta un cuerpo que se mueve en un medio.

La dimensión de esta fuerza es MLT^{-2} . Expresémosla en función de las dimensiones de las magnitudes con que operamos, puesto que de otras no puede depender. Entonces

$$MLT^{-2} = [\rho]^\alpha [u]^\beta [L]^\gamma [\eta]^\delta,$$

es decir,

$$MLT^{-2} = M^\alpha L^{-3\alpha} L^\beta T^{-\beta} L^\gamma M^\delta L^{-\delta} T^{-\delta}.$$

Por consiguiente,

$$\alpha + \delta = 1, \quad -3\alpha + \beta + \gamma - \delta = 1, \quad -\beta - \delta = -2.$$

Expresando α , β , y γ en función de δ , obtenemos

$$\alpha = 1 - \delta, \quad \beta = 2 - \delta, \quad \gamma = 2 - \delta.$$

De este modo, en el caso más general, la fuerza F puede representarse en forma de una suma, cada uno de cuyos sumandos tiene la

dimensión hallada, es decir,

$$F = A [\rho^{1-\delta} u^{2-\delta} L^{2-\delta} \eta^{\delta}] = \rho u^2 L^2 A \left[\left(\frac{Lu\rho}{\eta} \right)^{-\delta} \right],$$

donde A son unos coeficientes numéricos. Así, pues, queda demostrado que la fuerza deberá expresarse por la fórmula

$$F = \text{const} \cdot \rho u^2 L^2 f(\text{Re}).$$

Este resultado lo hemos obtenido partiendo exclusivamente de razonamientos acerca de la dimensión (!) La función $f(\text{Re})$ nos es desconocida y habrá que hallarla experimentalmente.

Por medio de simples consideraciones podemos obtener las fórmulas definitivas para los casos de frontera. Si la velocidad es pequeña, F deberá ser proporcional a la primera potencia de la velocidad u . Para esto $f(\text{Re})$ tendrá que ser igual a $1/\text{Re}$ y, por lo tanto,

$$F = \text{const} \cdot \eta u L.$$

El valor numérico de la constante depende de la forma del cuerpo. Para una bola

$$F = 6\pi\eta r$$

(siendo r el radio de la bola). Esta expresión se llama fórmula de Stokes.

Ejemplo. Una bolita de mercurio ($r=0,53$ mm), al descender en glicerina con la velocidad de $0,6$ cm/s, experimenta una fuerza de rozamiento de cerca de 8 din.

Si las velocidades son muy grandes, el movimiento del líquido respecto del cuerpo deja de ser estacionario. Se produce un movimiento vortiginoso o turbulento. El cuerpo puede moverse estacionariamente, pero las partículas del líquido se mueven de un modo más o menos casual. Debido a la remoción intensiva, la transición del movimiento de una capa a otra deja de depender de la viscosidad. Esto puede suceder únicamente en el caso en que $f(\text{Re})$ tienda al límite al aumentar la velocidad. Por esto, a grandes velocidades del movimiento, la fuerza de resistencia se hace proporcional al cuadrado de la velocidad:

$$F = \text{const} \cdot \rho u^2 L^2.$$

§ 84. Coeficientes de difusión, de viscosidad y de conductibilidad térmica de los gases

El proceso de establecimiento del equilibrio en los gases está ligado estrechamente con las características examinadas en el párrafo anterior. La igualación de las temperaturas, concentracio-

nes o velocidades de unas partes del gas con respecto a otras se produce gracias a que las moléculas se mezclan. La rapidez con que se efectúa esta mezcla depende del papel que desempeñan los choques entre las moléculas. Cuando el tiempo de recorrido libre es grande, ocurre, por ejemplo, lo siguiente: las moléculas rápidas penetran en poco tiempo en las regiones en que estaban las lentas; las moléculas de la mezcla se propagan pronto por el gas fundamental.

Es muy natural la afirmación de que el tiempo de igualación deberá ser en los tres procesos próximo, en orden de magnitud, al tiempo de recorrido libre de las moléculas. En ejemplos concretos esto se puede confirmar por medio de cálculos teóricos en los que nosotros no nos detendremos.

De la igualdad, tiempo de igualación $\tau=l/v$, precindiendo del coeficiente de proporcionalidad adimensional, que generalmente es igual a la unidad por el orden de magnitud, obtenemos, basándonos en el § 81, una expresión totalmente equivalente para los coeficientes de difusión D , viscosidad cinemática χ y difusividad térmica (suponemos $L \approx l$): $D \sim v \sim \chi \sim vl$.

La tabla siguiente muestra cómo se cumple esta predicción:

para el aire	para el hidrógeno
$v = 0,13$	$v = 0,94$
$\chi = 0,18$	$\chi = 1,3$
$vl = 0,27$	$vl = 1,9$

Los resultados deben tenerse por buenos. La coincidencia en el orden de magnitud no puede considerarse casual si se recuerda lo amplios que son los límites en que varían las magnitudes a que nos referimos.

Conociendo la expresión del coeficiente de conductibilidad térmica en función de la difusividad térmica, obtenemos:

$$\kappa \sim \rho v l c_p \sim \frac{m c_p v}{\sigma},$$

donde m es la masa de la molécula.

En esta fórmula se ha simplificado el número de moléculas por unidad de volumen n . De aquí se deduce que la conductibili-

^{*)} Debe tenerse en cuenta que junto con la difusión de una sustancia en otra está totalmente justificado el concepto de autodifusión, es decir, el movimiento de las moléculas entre sus semejantes, por ejemplo, la difusión de hidrógeno en hidrógeno, de oxígeno en oxígeno, etc. La investigación de este fenómeno se hizo posible después de introducir el método de los átomos, y, por consiguiente, de las moléculas, trazadores.

De acuerdo con lo que acabamos de decir, D es aquí el coeficiente de autodifusión.

dad térmica de un gas no depende de su densidad, ni, por lo tanto, de la presión. Hay que prestarle atención a esta deducción que, aunque inesperada, es completamente correcta. El aumento de la densidad de un gas no determina la elevación de su conductibilidad térmica.

Estudiando la fórmula del coeficiente de conductibilidad térmica se puede hacer otra predicción. Como el diámetro eficaz depende poco de la temperatura (en general, σ disminuye un poco al aumentar ésta), lo mismo que la capacidad calorífica, y la velocidad térmica es proporcional a \sqrt{T} , el coeficiente de conductibilidad térmica debe ser proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura.

Las cifras que citamos a continuación dan una idea de la exactitud con que se cumplen ambas predicciones.

Por ejemplo, para el nitrógeno tomado a 0°C, 325°C y 500°C,

$$\kappa_3 : \kappa_2 : \kappa_1 = 1,93 : 1,65 : 1,$$

$$\sqrt{T_3} : \sqrt{T_2} : \sqrt{T_1} = 1,68 : 1,48 : 1.$$

La conductibilidad térmica aumenta con la temperatura algo más de prisa que proporcionalmente a \sqrt{T} , debido a la variación del diámetro eficaz y de la capacidad calorífica. En cuanto se refiere a la independencia respecto de la presión, como acabamos de ver, tiene lugar en un intervalo muy amplio de presiones.

Exactamente igual, tampoco depende de la presión y de la densidad del gas su viscosidad dinámica $\eta \sim \rho v l$. El comportamiento térmico de la viscosidad de un gas perfecto debe coincidir con el comportamiento de la conductibilidad térmica, es decir, la proporcionalidad debe ser la misma. Unos ejemplos numéricos ayudarán a recordar lo dicho.

Para el nitrógeno ($T_1=273^\circ\text{K}$, $T_2=289^\circ\text{K}$, $T_3=296^\circ\text{K}$)

$$\eta_3 : \eta_2 : \eta_1 = 1,06 : 1,04 : 1,$$

$$\sqrt{T_3} : \sqrt{T_2} : \sqrt{T_1} = 1,04 : 1,03 : 1.$$

Es sorprendente la constancia de la viscosidad del gas (CO_2): cuando la presión aumenta 380 veces, de 2 a 760 mm de la columna de mercurio, la viscosidad de hecho no cambia, permanece todo el tiempo igual a $14,8 \cdot 10^{-6}$ P salvo una unidad en la tercera cifra.

§ 85. Gases ultraenrarecidos

Se llaman así los gases en que el recorrido libre es mayor que las dimensiones lineales del recipiente. En condiciones normales el recorrido libre es una magnitud del orden de 10^{-6} cm. El recorrido libre es inversamente proporcional a la densidad. Por consi-

guiente, a presiones del orden de 10^{-4} mm de la columna de mercurio, el recorrido libre medirá decenas de centímetros. En un recipiente cuya dimensión sea de cerca de 10 cm, a esta presión obtenemos el vacío o el gas ultraenrarecido.

Debemos advertir que en el vacío también se mide la densidad molecular en números enormes. A la presión antes indicada, en 1 cm³ de gas hay billones de moléculas.

Las moléculas que dejan de chocar entre sí y chocan únicamente con las paredes del recipiente introducen una particularidad específica en el comportamiento del gas de este tipo. Pierde su sentido una serie de conceptos. Ya no puede hablarse de rozamiento interno de las moléculas del gas, puesto que en dicho gas no pueden formarse capas de moléculas que intercambien velocidades. No puede hablarse de la presión que ejerce una parte del gas sobre otra (aunque el concepto de presión del gas sobre las paredes del recipiente conserva su sentido). También pierde su sentido el concepto de intercambio calorífico entre las partes del gas y, en general, todos los conceptos relacionados con la interacción de las partes del gas. Un gas ultraenrarecido interacciona solamente con los cuerpos sumergidos en él.

Las peculiaridades del vacío como estado físico especial del gas conviene ilustrarlas con unos ejemplos.

Dos placas, cuyas temperaturas respectivas son T_1 y T_2 , se encuentran en el vacío, ¿cómo se escribirá la expresión del flujo de calor transportado de la una a la otra? La esencia del intercambio calorífico consistirá en este caso en que las moléculas del gas, al chocar con una placa, serán despedidas por ella con la velocidad media correspondiente a su temperatura. En cuanto se refiere a la expresión del flujo de calor, observando la conocida fórmula

$$q = \kappa \frac{T_1 - T_2}{L} = \rho cvl \frac{T_1 - T_2}{L},$$

vemos que la variación consiste en que el papel de recorrido medio lo desempeña ahora la distancia entre las placas L . Por lo tanto, la expresión del flujo de calor debe tomar, en el caso de los gases ultraenrarecidos, la forma siguiente:

$$q = \rho cv (T_1 - T_2).$$

Si se continúan enrareciendo los gases ultraenrarecidos, de acuerdo con esta fórmula el flujo de calor debe decrecer una vez que el recorrido libre se hace igual a las dimensiones lineales del recipiente. Esto se observa en realidad.

También son peculiares del gas ultraenrarecido las condiciones de equilibrio de gas contenido en dos vasijas comunicantes a distinta temperatura. En el caso de un gas ordinario, las presiones en

las dos vasijas comunicantes serán iguales a distintas temperaturas; las densidades del gas, por el contrario, serán diferentes e inversamente proporcionales a las temperaturas. La igualdad de las presiones es necesaria para el equilibrio, ya que, de lo contrario, debido a las colisiones de las moléculas, el gas de una vasija expulsaría al de la otra.

En el caso del vacío todo ocurre de un modo completamente distinto. Las colisiones entre moléculas no existen, por lo que el flujo de moléculas de una parte de la vasija a la otra no encuentra dificultad. La condición de equilibrio consistirá en la igualdad de los flujos de moléculas. Si en la unidad de volumen hay n partículas y éstas se mueven con la velocidad v , en la unidad de tiempo pasarán por la unidad de superficie nv moléculas. Por lo tanto, cuando existe equilibrio, $n_1v_1 = n_2v_2$. Como el número de moléculas en la unidad de volumen es proporcional al cociente de dividir la presión por la temperatura (lo que se deduce de la ecuación de estado del gas perfecto) y como la velocidad de las moléculas es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura, la condición de equilibrio toma la forma

$$\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}.$$

De este modo, son iguales entre sí, no las presiones, sino las relaciones de las presiones a las raíces cuadradas de las temperaturas. Si se aumenta la densidad del gas, las presiones comenzarán a igualarse paulatinamente y llegaremos al equilibrio ordinario cuando el recorrido libre se haga suficientemente pequeño.

II

CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

14

CAMPO ELÉCTRICO

§ 86. Características vectoriales de un campo eléctrico: intensidad y desplazamiento

La existencia de un campo eléctrico en el espacio puede conocerse por muchos indicios. En primer lugar, por la propiedad que posee dicho campo de crear una fuerza que actúa sobre las cargas eléctricas y por la propiedad de inducir cargas eléctricas en la superficie de un cuerpo metálico neutro.

La medida de la fuerza que actúa sobre una carga q nos lleva a la conclusión de que la fuerza \mathbf{F} puede tener diversos valores y direcciones en distintos puntos del espacio, y en un punto dado es proporcional a la carga q . De aquí se deduce que es posible caracterizar el campo eléctrico por su *intensidad* \mathbf{E} , definida como

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

En este caso hay que convenir que q es pequeña; entonces, primero, puede medirse \mathbf{E} en puntos del espacio suficientemente próximos entre sí y, segundo, el campo propio de la carga q no altera sensiblemente el campo que se mide.

El campo de cualquier vector se caracteriza frecuentemente por las llamadas líneas vectoriales. La tangente a cada punto de una línea vectorial coincide con la dirección del vector en este punto. Esto también se refiere al campo eléctrico, que se puede caracterizar por medio de las líneas del vector intensidad eléctrica \mathbf{E} .

Ejemplos numéricos. 1. La intensidad del campo eléctrico de un conductor para el alumbrado es de decenas de voltios por centímetro.

2. La intensidad del campo eléctrico de la Tierra cerca de su superficie constituye $\sim 100 \text{ V/m} = 1/300$ unidades CGS.

3. La intensidad del campo eléctrico del núcleo del átomo de hidrógeno a la distancia correspondiente al radio de la «órbita» del electrón es de $19,2 \cdot 10^8$ unidades CGS $= 57,6 \cdot 10^{10} \text{ V/m}$.

4. La intensidad del campo eléctrico con que se produce la descarga disruptiva en el aire es de $30 \text{ kV/cm} = 100$ unidades CGS.

Un experimento para determinar las cargas inducidas por un campo puede hacerse valiéndose de dos placas metálicas pequeñas montadas en un mango aislante (placas de Mie, en honor del físico alemán G. Mie) (fig. 89). Introduciendo en el campo las dos placas unidas y separándolas con cuidado después, puede recogerse en una de las dos placas la carga positiva y en la otra, la negativa y

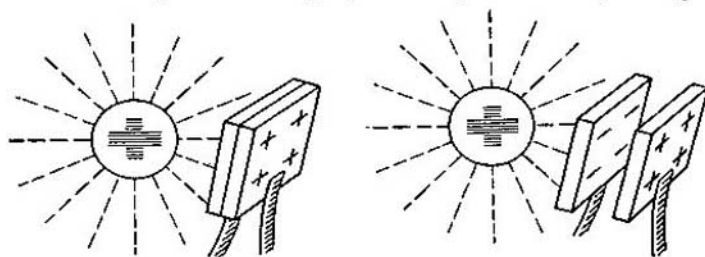


FIG. 89.

medir la cantidad de electricidad inducida con un electrómetro o con un galvanómetro balístico.

La experiencia demuestra que siempre puede hallarse una posición de la superficie en la cual no se inducirá en ella electricidad. En los cuerpos isótropos homogéneos (y, por ahora, no consideramos otros) ocurre esto cuando la superficie se coloca paralelamente al vector E . Por el contrario, la inducción eléctrica será máxima si la superficie se coloca perpendicularmente al vector E . De aquí se deduce la posibilidad de introducir otro vector más para describir el campo eléctrico, concretamente, el vector *desplazamiento eléctrico* \mathfrak{D} , que se define por la siguiente condición. El vector \mathfrak{D} estará dirigido según la normal a las placas de Mie, cuando éstas ocupan la posición óptima con respecto a la inducción, es decir, cuando en ellas se induzca la carga máxima. Si miramos de frente al vector \mathfrak{D} , debemos ver la placa de Mie positiva. En todos los casos, excepto en los cuerpos anisótropos, los vectores \mathfrak{D} y E coinciden en dirección. En valor absoluto

$$|\mathfrak{D}| = \sigma,$$

donde σ es la densidad superficial de la carga que se encuentra en la placa de Mie. Como la densidad superficial σ puede escribirse

así: $\frac{dq}{dS_{\perp}}$, tendremos que

$$|\mathfrak{D}| = \frac{dq}{dS_{\perp}}.$$

Hemos dicho anteriormente que el campo eléctrico puede caracterizarse por las líneas del vector \mathbf{E} . Está claro que también puede caracterizarse por las líneas del vector \mathfrak{D} . Estas últimas se llaman *líneas de fuerza eléctricas*. Se admite que el número de líneas de fuerza que pasan por la unidad de superficie perpendicular a ellas es igual a $|\mathfrak{D}| = \mathfrak{D}$, y la magnitud

$$dN = \mathfrak{D} dS_{\perp},$$

se llama *flujo eléctrico* a través del área dS_{\perp} . Si una superficie oblicua dS es atravesada por el mismo flujo eléctrico que la dS_{\perp} , se tendrá que

$$dS = \frac{dS_{\perp}}{\cos \alpha},$$

donde α es el ángulo comprendido entre la normal a la superficie y las líneas de fuerza, es decir,

$$dN = \mathfrak{D} \cos \alpha dS.$$

El flujo que pasa por una superficie grande se escribe de la forma

$$N = \int \mathfrak{D} \cos \alpha dS,$$

y el que pasa por una superficie cerrada se suele designar con una circunferencia en el signo de integración:

$$N = \oint \mathfrak{D} \cos \alpha dS.$$

§ 87. Constante dieléctrica

Como demuestra la experiencia, entre los dos vectores que caracterizan a un campo eléctrico existe ligazón. En el caso en que los vectores del campo son paralelos el uno al otro, también son proporcionales entre sí en el punto dado del espacio^{*)}. Una variación del vector \mathbf{E} lleva consigo un cambio proporcional del vector \mathfrak{D} . La razón \mathfrak{D}/\mathbf{E} sólo depende del medio.

Las propiedades eléctricas del medio se suelen caracterizar por una magnitud adimensional ϵ , elegida de manera que para el

^{*)} En la pág. 270 consideraremos el caso de medios anisótropos, en que los vectores \mathfrak{D} y \mathbf{E} no son paralelos entre sí.

vacío $\epsilon=1$. Como veremos más adelante, esta condición se debe a que no pueden existir cuerpos que tengan $\epsilon < 1$. Por esta razón el vacío es el «origen de referencia» natural de ϵ . La magnitud ϵ se llama *permitividad* o *constante dieléctrica* y viene determinada por la igualdad

$$\frac{\mathfrak{D}}{E} = \epsilon_0 \epsilon,$$

donde ϵ_0 depende de la unidad que se elija. Si el estado del medio es igual en todos los puntos, ϵ también será constante. En el límite entre dos medios ϵ cambia bruscamente. Los cuerpos heterogéneos por su densidad y otras propiedades, también lo son generalmente respecto de la permitividad.

Permitividad de algunas sustancias a 18°C: para el aire $\epsilon=1,00059$; para el vidrio, 7,00; para el papel, 2—2,5; para el agua 80,5.

En el SI la magnitud \mathfrak{D} se mide en culombios por m² (C/m²), y la intensidad del campo, en newtones por culombio (N/C). En este caso ϵ_0 se medirá en C²/(m²·N). En estas unidades

$$\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{C}^2/(\text{m}^2 \cdot \text{N}).$$

En el sistema CGS, ϵ_0 carece de dimensión y se toma igual a $1/(4\pi)$:

$$\mathfrak{D} = \frac{\epsilon}{4\pi} E.$$

En vez del desplazamiento se utiliza también una magnitud D , que es 4π veces mayor, llamada *inducción*; en el sistema absoluto $D=\epsilon E$.

Ambas elecciones del valor de ϵ_0 tienen sus ventajas relativas, como veremos después. El primer sistema simplifica un grupo de fórmulas, pero complica otro; el segundo sistema conduce a un resultado inverso.

Hay que subrayar que los conceptos de desplazamiento e inducción tienen completamente el mismo contenido físico. La diferencia en el factor numérico se reduce únicamente a la diferencia de relaciones entre la unidad de inducción (desplazamiento) y la unidad de densidad de carga.

El desplazamiento eléctrico (véase la pág. 239) es igual a la unidad, si la densidad de carga de las placas de Mie es igual a la unidad. La inducción eléctrica es igual a la unidad, si la densidad de carga en las placas de Mie es igual a $1/(4\pi)$.

En electrotecnia sólo se utiliza, por lo general, la magnitud \mathfrak{D} , es decir, el desplazamiento; en física, por el contrario, se utiliza exclusivamente la inducción eléctrica D .

Conviene hacer algunas observaciones acerca de las fórmulas y unidades de medida que utilizaremos en esta parte del libro.

En mecánica y termodinámica, aunque se utilizan diversos procedimientos para elegir las magnitudes físicas fundamentales y distintas unidades de medida, se admiten unánimemente unos mismos coeficientes de proporcionalidad, iguales a una unidad adimensional. Todas las fórmulas de estos capítulos de la física tienen por esto la misma forma, independientemente del sistema de unidades que se elija.

Desgraciadamente, en la teoría del campo electromagnético ocurre de otro modo. Existen dos maneras generalizadas de enfocar esta cuestión: una, adoptada en electrotecnia y otra, en física. En estos dos enfoques no sólo son distintas las magnitudes fundamentales y las unidades de medición, sino que también son diferentes los coeficientes de proporcionalidad en las mismas fórmulas físicas. No hay más remedio, pues, que estudiar los dos sistemas de plantear las fórmulas.

Haremos esto a medida que exponamos la materia. Aquí bastará con que nos limitemos a hacer varias observaciones generales.

En electrotecnia se utiliza el SI. Al metro, kilogramo y segundo se añade una unidad de intensidad de la corriente. Esta unidad es el Amperio (A), que es la intensidad de la corriente con la cual el coeficiente de proporcionalidad μ (permeabilidad magnética del vacío), que figura con las fórmulas de la interacción electrodinámica (véase la pág. 288), tiene el valor

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ J/(A}^2 \cdot \text{m)}.$$

Esta elección de la unidad de intensidad de la corriente se reduce, como demuestra la experiencia, a que cuando pasa una corriente de 1 A de intensidad por dos conductores paralelos, de longitud infinita y sección circular insignificante por su pequeñez, situados en el vacío a 1 m de distancia uno del otro, entre ellos se produce una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ newtones por metro de longitud. La causa de esta elección, que puede parecer rara, no vamos a estudiarla *).

Todas las demás unidades de medida del SI pueden expresarse por medio del kilogramo, metro, segundo y amperio.

Como en electrotecnia el sistema de unidades de medición se construye sobre cuatro magnitudes fundamentales, ya no puede conducir al mismo sistema de fórmulas que el sistema CGS, que se construye sobre tres unidades fundamentales. Pero existen además otras diferencias entre estos sistemas, que se manifiestan en que la elección de los coeficientes adimensionales numéricos es distinta. En el transcurso de la exposición del material daremos a veces las fórmulas en dos sistemas, y al final del libro, en el apéndice, hay una relación de las fórmulas que se estudian en el texto, escritas en ambos sistemas con indicación de las unidades de medida.

§ 88. Leyes del campo eléctrico

Figurémonos un sistema de cuerpos cargados eléctricamente que crea un campo arbitrario. Tracemos en este campo una superficie cerrada. Una parte de las cargas quedará dentro del espacio abarcado por la superficie y otra parte quedará fuera. Puede medirse el flujo eléctrico que sale fuera de los límites de esta superficie. El resultado será muy sencillo y natural. La carga eléctrica total

*) Este problema se trata detenidamente en el libro *Л. А. Сена, Единицы физических величин и их размерности, «Наука», 1969.* (L. A. Sena, Unidades de las magnitudes físicas y sus dimensiones).

inducida en la superficie (y esto es por definición el flujo $N = \oint \mathfrak{D} \cos \alpha \, dS$) será igual a la carga eléctrica total que se halla dentro del volumen abarcado por dicha superficie:

$$\oint \mathfrak{D} \cos \alpha \, dS = \sum q_i.$$

Este teorema, que lleva el nombre de Gauss y Ostrogradski, demuestra que las líneas eléctricas (líneas \mathfrak{D}) comienzan en las cargas de un signo y terminan en las cargas de signo contrario. No existen líneas de fuerza rotas.

En un campo eléctrico continuo no existen líneas de intensidad eléctrica que se cierren sobre sí mismas^{*)}. Esto se deduce de otra ley de los campos eléctricos que dice: el campo eléctrico (o más exactamente, el campo del vector intensidad \mathbf{E}) es un campo de potencial. El trabajo que se realiza al transportar una carga a lo largo de un contorno cerrado será, en este campo, igual a cero (es decir, no hay líneas cerradas del vector \mathbf{E}); el trabajo de transporte de una carga desde un punto a otro dependerá únicamente de la posición de estos puntos y no variará si varía la forma del camino recorrido. En este sentido las propiedades del campo eléctrico coinciden con las propiedades del campo gravitatorio.

Tomemos en el campo eléctrico un punto de referencia y calculemos con respecto a él la energía potencial. En trasladar la carga desde el punto de referencia hasta un punto dado del espacio, cualquiera que sea la trayectoria, se necesitará siempre realizar un mismo trabajo A . Por esto, al encontrarse la carga en un punto cualquiera del espacio, poseerá una energía potencial U , numéricamente igual al trabajo realizado A .

Análogamente a como la energía potencial de gravitación es proporcional a la masa del cuerpo, la energía potencial de un campo eléctrico es proporcional a la carga:

$$U = \varphi q.$$

La magnitud $\varphi = U/q$, es decir, la energía potencial que tendría una carga unitaria positiva situada en el punto dado del espacio, se llama *potencial eléctrico del campo* o simplemente *potencial*.

De la definición del potencial se deduce la expresión del trabajo realizado al trasladar la carga de un punto del campo a otro. Como el trabajo es igual a la variación de la energía, $dA = -dU$, tendremos que

$$dA = \mathbf{F} d\mathbf{l} = q\mathbf{E} d\mathbf{l} = -q d\varphi,$$

^{*)} En el vacío y en un medio homogéneo las líneas de los vectores \mathbf{E} y \mathfrak{D} coinciden. En este caso puede hablarse de las líneas de fuerza eléctricas sin necesidad de especificar a cuál de los vectores nos referimos.

o sea,

$$E dl = -d\varphi,$$

donde $d\varphi$ es la variación del potencial.

Para un trozo de camino finito

$$\int_1^2 E dl = \varphi_1 - \varphi_2;$$

la diferencia de potencial *) es igual al trabajo realizado en trasportar la carga unitaria.

Si una carga se mueve a lo largo de una línea de fuerza, se puede prescindir del signo de vector. Entonces

$$\int_1^2 E dl = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Finalmente, si el campo es homogéneo, la fórmula se simplifica y toma la forma

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d},$$

donde d es la distancia entre los puntos 1 y 2.

Las fórmulas que relacionan E y φ se escriben sin coeficientes de proporcionalidad. Estas fórmulas tienen la misma forma en todos los sistemas de unidades.

Ejemplos. 1. Supongamos que dos electrodos planos, de $S = 10 \text{ cm}^2$ de superficie, se hallan en el aire a una distancia de 5 mm y que la diferencia de potencial entre ellos es igual a 5000 V. La intensidad del campo eléctrico creado será $E = 10^6 \text{ V/m} = 33 \text{ u. CGS}$. El desplazamiento eléctrico en el campo de este condensador será $\mathcal{D} = \epsilon_0 E = 9 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$. Esto significa que la densidad de carga en las placas del condensador será $\sigma = 9 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2 = 2,7 \text{ u. CGS}$. El flujo eléctrico a través de toda la superficie del electrodo $N = \mathcal{D}S = 9 \cdot 10^{-9} \text{ C}$. La carga de una placa $q = \sigma S = 9 \cdot 10^{-9} \text{ C}$. Es evidente que $N = q$, como se deduce del teorema de Gauss — Ostrogradski.

2. El desplazamiento eléctrico del campo de la Tierra cerca de su superficie es $\mathcal{D} \sim 9 \cdot 10^{-10} \text{ C/m}^2$. La superficie de la Tierra $S \sim 5 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ y la densidad superficial de carga es $\sigma \sim 9 \cdot 10^{-10} \text{ C/m}^2$. De esto se deduce que la carga de la Tierra será $q \sim 4,5 \cdot 10^5 \text{ C}$. El flujo eléctrico que atraviesa la superficie de la Tierra es $N \sim 4,5 \cdot 10^5 \text{ C}$.

*) En un campo alternativo no se cumple esta igualdad. Para evitar confusiones es preferible introducir, para denominar $\int_1^2 E dl$, un término especial: *tensión eléctrica* entre los puntos 1 y 2. En los campos continuos coinciden la tensión y la diferencia de potencial.

§ 89. *Cálculo de los campos de los sistemas más simples*

Las leyes del campo eléctrico expuestas en el párrafo precedente, así como las consideraciones generales acerca de la simetría, pueden ayudarnos a calcular los campos de algunos sistemas no complejos. Hallar un campo quiere decir calcular su intensidad, inducción o potencial. Advertimos que el conocimiento del potencial es completamente suficiente para caracterizar un campo. Conociendo φ en todos los puntos del espacio se pueden hallar los valores del vector \mathbf{E} derivando φ . Este procedimiento se comprende mucho mejor si se construyen las superficies de igual potencial (superficies equipotenciales), que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y, z) = \text{const}$. Como el trabajo de traslación de la carga por una superficie equipotencial es nulo, las líneas de fuerza seguirán las normales a los planos equipotenciales. Por lo tanto, para hallar el valor numérico de $|\mathbf{E}|$ hay que derivar $\varphi(x, y, z)$ en las direcciones de las normales. Las operaciones matemáticas de este tipo se estudian en el análisis vectorial. Pero esta derivación puede hacerse con facilidad gráficamente, si se construye un diagrama en el cual el valor de φ se representará en función de una coordenada tomada a lo largo de una línea de fuerza. La tangente del ángulo de inclinación de esta curva da el valor de E con signo contrario para cualquier punto de la línea de fuerza.

Teniendo en cuenta que el lector debe asimilar estas nuevas ideas, analizaremos en unos ejemplos las particularidades tanto del potencial como de las características vectoriales del campo, aunque repetimos que, en principio, el conocimiento del potencial resuelve el problema.

CARGA PUNTUAL. Por razones de simetría está claro que el campo de una carga puntual aislada debe ser un campo simétrico esférico radial.

Tracemos una esfera de radio r . El flujo de desplazamiento que parte de la carga será igual a

$$\int \mathfrak{D} \cos \alpha dS = q.$$

El ángulo α es el comprendido entre las líneas de fuerza y la superficie de la esfera construida; este ángulo es igual a 90° . En todos los puntos de la superficie, \mathfrak{D} tiene un mismo valor y, por lo tanto, puede sacarse del signo de integración. Entonces

$$\mathfrak{D} \oint dS = q,$$

y como $\oint dS = 4\pi r^2$ (superficie de la esfera), el desplazamiento en un punto situado a la distancia r de la carga será $\mathfrak{D} = q/(4\pi r^2)$, y la inducción $D = q/r^2$.

La intensidad del campo eléctrico

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}.$$

En este caso resulta ser más cómodo el sistema CGS, en el que $\epsilon_0 = 1/(4\pi)$. Aplicando este sistema, $E = q/(\epsilon r^2)$ o, en el caso del vacío,

$$E = \frac{q}{r^2}.$$

Como la intensidad del campo es igual a la derivada del potencial (con signo contrario) tomada a lo largo de una línea de fuerza, es decir,

$$E = -\frac{d\psi}{dr},$$

para el potencial de la carga puntual obtenemos la expresión

$$\psi = \frac{q}{r}.$$

Suponemos que la constante de integración es igual a cero. Con esto introducimos una referencia del potencial: en el infinito $\psi = 0$.

Así, pues, el potencial de una carga puntual decrece en proporción inversa a la primera potencia de la distancia, y la intensidad, en proporción inversa al cuadrado de esta última.

Si la carga se encuentra en un medio de constante dieléctrica ϵ , la intensidad y el potencial disminuyen ϵ veces.

El potencial de la Tierra es de 0,07 V. En este caso se toma como nulo el potencial en el infinito. En electrotecnia se considera nulo el potencial de la Tierra.

SISTEMA DE CARGAS PUNTUALES. Consideremos los procedimientos de cálculo de los campos creados por sistemas de cargas puntuales. Supongamos $\epsilon = 1$ y utilicemos el sistema absoluto de unidades. En este caso, para el potencial del sistema de cargas se puede escribir:

$$\psi = \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \dots = \sum_k \frac{q_k}{r_k},$$

donde r_k es la distancia desde las cargas hasta el punto de observación.

Para dos cargas iguales de signos contrarios obtenemos

$$\psi = q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

y para dos cargas de signos iguales

$$\psi = q \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Valiéndose de estas fórmulas puede resultar dificultoso resolver un problema. Con frecuencia hay que introducir un sistema de coordenadas cartesianas y expresar los radios r_k por medio de x , y , z . Si las cargas son dos y se hallan a una distancia $2a$ una de otra, el origen de coordenadas conviene tomarlo en el punto medio, y el eje x dirigirlo a lo largo de la línea que los une. Entonces

$$r_1^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2,$$

$$r_2^2 = (x+a)^2 + y^2 + z^2.$$

También conviene a veces representar el potencial en función de las coordenadas polares R y φ . De la fig. 90 se deduce que

$$r_1 \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR \cos \varphi}, \quad r_2 \sqrt{R^2 + a^2 + 2aR \cos \varphi}.$$

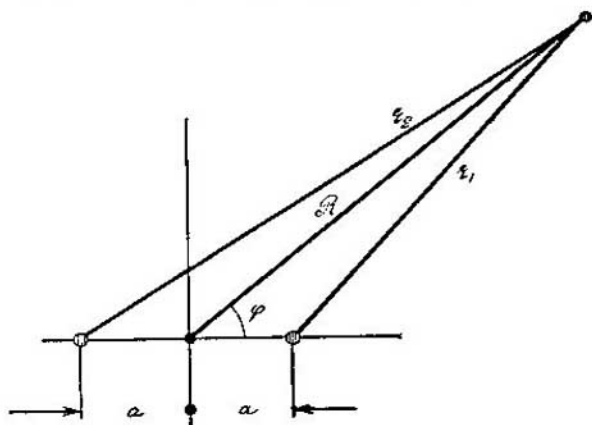


FIG. 90.

La intensidad del campo de un sistema de cargas puntuales viene dada por la igualdad vectorial

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r_1^2} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} + \frac{q}{r_2^2} \frac{\mathbf{r}_2}{r_2} + \frac{q}{r_3^2} \frac{\mathbf{r}_3}{r_3} + \dots = \sum \frac{q_k}{r_k^2} \frac{\mathbf{r}_k}{r_k}.$$

Aquí $\frac{\mathbf{r}_k}{r_k}$ es el vector unitario que tiene la dirección del radio \mathbf{r}_k .

El cuadro de las líneas de fuerza se construye haciendo la suma geométrica.

FÓRMULAS UNIVERSALES DEL POTENCIAL. Si las cargas que crean el campo no son puntuales, sino volumétricas y superficiales, el potencial del campo se puede calcular si se conoce la distribución de la carga.

Dividamos la región de la carga volumétrica en volúmenes infinitamente pequeños dv y la región de la carga superficial en partes infinitamente pequeñas de superficie dS . Si $\rho = \frac{dq}{dv}$ es la densidad volumétrica y $\sigma = \frac{dq}{dS}$ es la densidad superficial de la carga, el potencial creado por el volumen dv será igual a $\frac{\rho dv}{r}$ y el potencial creado por el elemento de superficie dS será igual a $\frac{\sigma dS}{r}$. Sumando los potenciales que crean todos los elementos obtenemos:

$$\varphi = \int \frac{\rho dv}{r} + \int \frac{\sigma dS}{r}.$$

El radio r se considera trazado desde el punto de observación y su extremo recorre todos los puntos del espacio en que se concentran las cargas ρdv y σdS .

Estas fórmulas se aplican poco, porque generalmente no se da la distribución de la carga caracterizada por las funciones de densidad ρ y σ , sino al contrario, se busca.

CAMPO DE UN CONDENSADOR ESFERICO. Una esfera de radio r_A , cargada con una cantidad de electricidad $+q$, está rodeada por una superficie esférica concéntrica de radio r_B . La esfera externa conviene considerarla puesta a tierra. En su superficie interna se induce una carga $-q$. Las razones de simetría determinan el carácter radial del campo. Si mentalmente se construye una esfera de radio r entre las esferas del condensador y se aplica la ley de Gauss — Ostrogradski, el resultado no diferirá del obtenido para la carga puntual:

$$E = \frac{q}{r^2}.$$

La ecuación del potencial tiene la forma

$$\varphi = \frac{q}{r} + \text{const},$$

pero a diferencia de lo dicho antes, ya no se puede prescindir de la constante. Como sabemos, el potencial de las piezas metálicas puestas a tierra se suele considerar nulo. Por esto resultará más cómodo si suponemos $\varphi=0$, no en el infinito, sino cuando $r=r_B$. Entonces $\text{const} = -\frac{q}{r_B}$.

La expresión del potencial en los puntos entre las esferas tiene la forma

$$\varphi = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_B}.$$

En la superficie de la esfera interna

$$\varphi = \frac{q}{r_A} - \frac{q}{r_B}.$$

Recordando que la relación de la carga a la diferencia de potencial en las armaduras se llama *capacidad* del condensador, obtenemos para la del condensador esférico la expresión

$$C = \frac{1}{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}} = \frac{r_A \cdot r_B}{r_B - r_A}.$$

Si la esfera externa se aleja ($r_B \rightarrow \infty$), la capacidad se hace igual a

$$C = r.$$

La capacidad de una esfera aislada se mide por la magnitud de su radio.

Si entre las armaduras del condensador se encuentra un dieléctrico de coeficiente ϵ , la intensidad E y el potencial φ disminuyen ϵ veces.

De la fórmula

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{q}{r_A} - \frac{q}{r_B} \right)$$

obtenemos para la capacidad del condensador

$$C = \epsilon \frac{r_A \cdot r_B}{r_B - r_A};$$

y para una esfera

$$C = \epsilon r.$$

La capacidad del condensador aumenta ϵ veces.

Las fórmulas del potencial y del campo con que operamos ahora son aplicables a los puntos del espacio entre las armaduras del condensador. Estas fórmulas no pueden hacerse extensivas a los puntos del espacio que se encuentra dentro de la primera capa o que abarca ambas capas, ya que la ley de Gauss da para estos puntos otro resultado.

Si la carga de la esfera interna se concentra en su superficie, para los puntos de dentro de la esfera

$$\oint D \cos \alpha \, dS = 0.$$

Como una afirmación semejante es correcta para cualquier superficie que pase por dentro de la esfera, esto será posible únicamente en el caso en que $D=0$ y, por lo tanto, la intensidad será también nula. Por consiguiente, la ley de Gauss demuestra la inexistencia de campo dentro del volumen, o que las cargas están situadas únicamente en su superficie. En cuanto se refiere al potencial φ ,

cuando $E=0$ puede ser igual a una magnitud constante igual al valor de φ en la superficie de la esfera. Las curvas E y φ en función de r , que muestra la fig. 91, aclaran lo dicho.

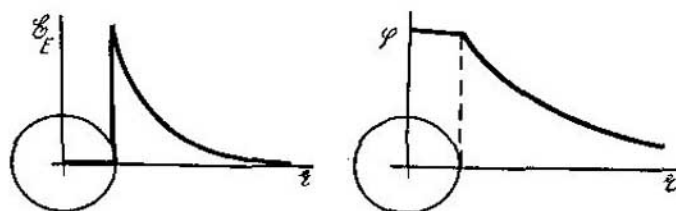


FIG. 91.

Ejemplos. 1. A 1000 km de distancia de la superficie de la Tierra, la intensidad de su campo eléctrico disminuye $\left(\frac{7400}{6400}\right)^2 = 1,33$ veces.

2. La capacidad de la Tierra $C=6,4 \cdot 10^8$ u. CGS= $700 \mu\text{F}$.

3. La capacidad de los condensadores que se utilizan en radiotécnica oscila dentro de amplios límites, desde fracciones de pF ($1 \text{ pF}=10^{-12} \text{ F}$) hasta millares de μF .

CAMPO DE UNA ESFERA CARGADA UNIFORMEMENTE. Es evidente que fuera de esta esfera el campo será lo mismo que en el caso de la carga puntual o de la esfera cargada superficialmente, es decir,

$$E = \frac{q}{r^2},$$

donde r es la distancia desde el centro de la esfera y $q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$ (siendo ρ la densidad de la carga y a , el radio de la esfera).

Para hallar el campo dentro de la esfera trazaremos una esfera auxiliar de radio $r < a$. Dentro de esta esfera habrá una cantidad de electricidad menor que q , y que será igual a

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{r^3}{a^3} q.$$

De acuerdo con la ley de Gauss

$$\mathcal{D} \cdot 4\pi r^2 = \frac{r^3}{a^3} q,$$

es decir,

$$\mathcal{D} = \frac{q}{4\pi a^3} r.$$

De aquí, la intensidad del campo eléctrico

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon a^3} r \text{ (SI)}$$

o bien

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 a^3} r \text{ (CGS).}$$

Llamamos la atención sobre el hecho de que el campo sólo es nulo en el centro de la esfera. Después el campo crece linealmente (fig. 92) y en la superficie de la esfera ($r=a$) se hace igual a $q/(\epsilon_0 a^2)$. Aquí coinciden los resultados de las fórmulas para el espacio exterior y para el interior. Más adelante se produce la caída del campo según la ley de la inversa del cuadrado. El potencial fuera de esta esfera puede ser, lo mismo que antes, representado como a/r . El valor de φ dentro de la esfera no ofrece interés y no lo estudiaremos.

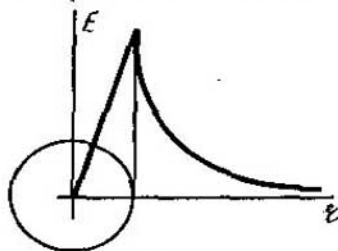


FIG. 92.

CAMPO DE SIMETRÍA CILÍNDRICA. Si el campo es creado por un hilo cargado uniformemente o por un cilindro en los que, por unidad de longitud, corresponde una carga q/l , los campos de estos sistemas serán iguales (fuera de los cuerpos cargados) y tendrán la particularidad siguiente: las líneas de fuerza formarán un ángulo recto con el eje de simetría y el flujo será igual en cualquiera de las direcciones radiales.

Para aplicar la ley de Gauss, en torno a la superficie cilíndrica del cuerpo se construye una superficie cilíndrica auxiliar de radio r y altura unitaria. El flujo sólo pasa a través de la superficie lateral de este cilindro. Por lo tanto, $\oint \mathcal{D} \cos \alpha dS$ se reduce a la integral respecto de la superficie lateral del cilindro y, una vez más, debido a la simetría ($\cos \alpha = 1$ y \mathcal{D} es igual en todos los puntos del cilindro),

$$\mathcal{D} \int dS = \frac{q}{l},$$

es decir,

$$\mathcal{D} \cdot 2\pi r = \frac{q}{l}; \quad \mathcal{D} = \frac{q/l}{2\pi r}.$$

De aquí, la intensidad del campo

$$E = \frac{q/l}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ (SI)}$$

o bien

$$E = \frac{2q/l}{\epsilon r} \text{ (CGS).}$$

El campo de un cilindro disminuye de manera inversamente proporcional a la primera potencia de la distancia. Esta fórmula

es válida lo mismo para el espacio que rodea a un hilo cargado que para el espacio exterior de un cilindro, también cargado, y para el comprendido entre las armaduras de un condensador cilíndrico.

Como $d\varphi = -E dr$, para el potencial obtenemos

$$\varphi = \frac{2}{\epsilon} \frac{q}{l} \ln \frac{l}{r} + \text{const.}$$

El potencial disminuye mucho más lentamente, al variar la distancia, que en el caso de los sistemas esféricos. Así, por ejemplo, cuando la distancia r aumenta 10 veces, el potencial no disminuye ya 10 veces, sino 2,3.

Para un condensador cuyos cilindros tengan respectivamente los radios a y b , obtenemos

$$\varphi_b - \varphi_a = \frac{2}{\epsilon} \frac{q}{l} (\ln a - \ln b) = \frac{2}{\epsilon} \frac{q}{l} \ln \frac{a}{b}.$$

La capacidad de un condensador de este tipo referida a la unidad de longitud es

$$C = \frac{\epsilon}{2 \ln(a/b)}.$$

Ejemplo. Un cable coaxial, de $a=18$ mm y $b=6$ mm, está relleno de un aislante cuya constante dieléctrica $\epsilon=4,2$; su capacidad por unidad de longitud será $C=1,91$ u. CGS, $\text{cm}=2,12$ pF/cm.

Conviene recordar que ninguna de las fórmulas citadas tiene en cuenta la deformación del campo en los extremos del cilindro, por lo que, rigurosamente hablando, se refieren a cilindros de longitud infinita. En la práctica estas fórmulas son válidas si el volumen del espacio ocupado por el campo «deformado» es considerablemente menor que el volumen no deformado del campo radial.

CAMPOS HOMOGÉNEOS. Los campos homogéneos o uniformes, es decir, los campos en los cuales las líneas de fuerza son paralelas y están dispuestas con igual densidad, son creadas por planos extendidos infinitamente. Está claro que el flujo de fuerza es perpendicular a este plano. La magnitud del campo la hallamos valiéndonos de la ley de Gauss — Ostrogradski. Con este fin construimos una superficie auxiliar en forma de cilindro que pasa por el plano cargado. Si la superficie lateral del cilindro es perpendicular al plano, el flujo a través de ella se reducirá a los flujos a través de sus dos bases. La integral $\oint \mathfrak{D} \cos \alpha dS$ será igual a $2 \mathfrak{D} S$, donde S es el área de la base. La carga dentro del cilindro es igual a σS . De aquí tenemos para el desplazamiento la fórmula

$$\mathfrak{D} = \frac{\sigma}{2}.$$

La intensidad del campo eléctrico en el SI sera $E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$, y en el sistema CGS, $E = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon}$; la intensidad no depende de la distancia a las fuentes del campo. Consideremos ahora un condensador plano. En los condensadores esférico y cilíndrico el campo se crea únicamente por la superficie cargada interna, mientras que en el condensador plano el campo entre sus armaduras es creado por ambas superficies. Fuera del condensador no existirá campo; en esto se conserva la analogía con los condensadores que hemos examinado antes. Entre las armaduras del condensador $\mathcal{D} = \sigma$ y la intensidad es

$$E = \frac{4\pi}{\epsilon} \sigma \text{ (CGS).}$$

Para escribir la expresión del potencial de un campo homogéneo tomaremos la distancia x , desde una de sus placas cargadas, en la dirección de una línea de fuerza. Si esta placa es única, el potencial se escribirá de la forma $\varphi = -\frac{2\pi}{\epsilon} \sigma x + \text{const.}$ Pero si trata de un condensador, la expresión del potencial entre sus armaduras tendrá la forma

$$\varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \sigma x + \text{const.}$$

De aquí, la diferencia de potencial

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{4\pi}{\epsilon} \sigma (x_b - x_a) = \frac{4\pi}{\epsilon} \sigma d,$$

donde d es la distancia entre las armaduras. Por lo tanto, la capacidad de un condensador plano por unidad de superficie $C = \frac{\epsilon}{4\pi d}$ (CGS) o $C = \frac{\epsilon_0\epsilon}{d}$ (SI).

Todas estas fórmulas son rigurosamente correctas para las placas infinitamente extensas. En la práctica podemos aplicarlas si la influencia de los bordes del condensador, en los cuales el campo es claramente no homogéneo, es pequeña. La determinación del campo en un punto cualquiera, aplicando las fórmulas dadas, sólo es posible si dicho punto se encuentra suficientemente lejos de los bordes. Más exactamente, esta condición se reduce a que el campo creado por las cargas elementales situadas en los bordes de las placas sea mucho menor que los que crean las partes de las placas más próximas al punto de observación.

Volvamos al condensador que analizamos en el ejemplo de la pág. 244. Dupliquemos la distancia entre las placas por dos procedimientos.

1. Las placas permanecen unidas a una fuente de tensión $U=5$ kV. En este caso $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d_1} = 1,8$ pF, $q_1 = C_1 U = 9 \cdot 10^{-9}$ C, $E_1 = \frac{U}{d_1} = 10^6$ V/m, $\mathfrak{D}_1 = 9 \cdot 10^{-6}$ C/m², $N_1 = 9 \cdot 10^{-9}$ C.

Después de duplicar la distancia entre las placas, obtenemos: $C_2 = 0,9$ pF, $q_2 = 4,5 \cdot 10^{-9}$ C, $E_2 = 0,5 \cdot 10^6$ V/m, $\mathfrak{D}_2 = 4,5 \cdot 10^{-6}$ C/m², $N_2 = 4,5 \cdot 10^{-9}$ C. La mitad de la carga se retiró a la fuente.

2. Antes de duplicar la distancia desconectamos las placas de la fuente (la carga del condensador $q = \text{const}$). $C_2 = 0,9$ pF, $q = q_1 = 9 \cdot 10^{-9}$ C, $U_2 = \frac{q}{C_2} = 10$ kV,

$E_2 = \frac{U_2}{d_2} = E_1$, $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1$, $N_2 = N_1$. La tensión en las placas se duplicó a expensas del trabajo realizado por las fuerzas externas.

CAMPO EN LA SUPERFICIE DE UN METAL. Dentro del metal no existe campo eléctrico. Esto se deduce de que todas las cargas de un conductor se encuentran en su superficie. Según la ley de Gauss el campo estará dirigido al espacio exterior.

La superficie del metal tiene una propiedad evidente: la de ser una superficie equipotencial. Efectivamente, en el caso contrario las cargas eléctricas se desplazarán por la superficie del conductor. De aquí se deduce que las líneas del flujo de fuerza que sale de la superficie del metal al espacio exterior deben formar en los puntos de la superficie un ángulo recto con ella. Como todo el flujo sale de la superficie hacia un lado, de la unidad de superficie deberán salir, según la ley de Gauss, $\mathfrak{D} = \sigma$ líneas. En otras palabras, la intensidad del campo en la superficie de un conductor

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \text{ (CGS).}$$

IMAGEN ELECTRICA. Consideremos el campo eléctrico que aparece si cerca de una superficie metálica plana se sitúa una carga eléctrica puntual. En virtud del fenómeno de la inducción eléctrica, en la superficie del metal cercana a la fuente puntual se concentra una carga eléctrica de signo contrario. La densidad de esta carga será máxima en los sitios más próximos a la fuente puntual, en cambio, lejos de ella la densidad de la carga inducida disminuirá hasta anularse. Del mismo modo, el campo eléctrico también será más intenso en los sitios más próximos al punto cargado. Existe la posibilidad de estudiar este problema cuantitativamente.

Como la superficie del conductor es una superficie equipotencial, se puede, sin mermar en absoluto la generalidad del problema, considerar puesta a tierra la superficie conductora y, por consiguiente, nulo el potencial del metal. Dentro del metal no hay campo, y nos interesa conocer el campo eléctrico en la parte derecha del semiespacio. Las propiedades eléctricas de este semiespacio quedarán definidas uniformemente si se indica la magnitud de la carga y

la distancia a que se encuentra de la superficie equipotencial. Lo importante es lo siguiente: a nosotros no nos interesa en absoluto qué es lo que hay a la izquierda de la superficie de potencial nulo. Esta circunstancia se demuestra rigurosamente en la física matemática: el campo que hay dentro de un espacio cualquiera está definido uniformemente si se dan las cargas que hay dentro del mismo y se indican las condiciones de frontera para el potencial.

Observando la fig. 93, *a*, que representa el campo de dos cargas de signos distintos, y dividiendo mentalmente en dos partes simétricas el espacio ocupado por este campo, vemos que el semiespacio de esta figura equivale exactamente al semiespacio de una

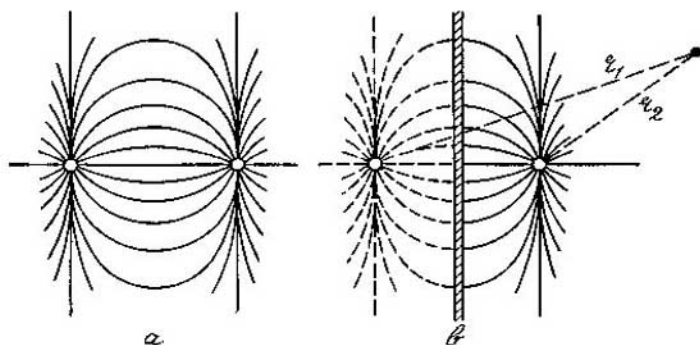


FIG. 93.

carga situada cerca del metal (fig. 93, *b*). Los campos de estos semiespacios deben ser idénticos. De este razonamiento se deduce la validez del siguiente procedimiento. Nosotros «reflejamos» la carga eléctrica en la superficie del metal. En la parte derecha del espacio, el campo eléctrico de la carga y su «imagen» deben coincidir con el campo buscado. De este modo, el campo eléctrico que buscamos viene expresado por la fórmula

$$\psi = q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

donde r_1 es la distancia de la carga al punto de observación y r_2 es la distancia desde la imagen de la carga a dicho punto.

La segunda deducción que hacemos es: la carga eléctrica es atraída por la superficie metálica con la misma fuerza que por su imagen eléctrica, es decir, con la fuerza $q^2/(4a^2)$, donde a es la distancia de la carga a la superficie.

Finalmente, esta misma manera de enfocar la cuestión permite hallar la distribución de la carga eléctrica inducida en la

superficie metálica. Para esto hay que derivar la expresión del potencial según la dirección de la normal a la superficie, lo que da el valor de la intensidad del campo eléctrico; luego, de acuerdo con la fórmula dada en el párrafo anterior, hay que multiplicar E por $\varepsilon/(4\pi)$.

El método de las imágenes eléctricas tiene una serie de aplicaciones y da la posibilidad de resolver los problemas de electrostática en el caso de sistemas constituidos por varios cuerpos metálicos no planos y por cargas puntuales situadas cerca de ellos.

§ 90. Energía eléctrica

ENERGÍA DE UN CONDENSADOR. De que un condensador eléctrico cargado posee energía, no es difícil convencerse. Tampoco ofrece dificultad medir el valor de esta energía. Para esto hay que, por ejemplo, descargar el condensador por medio de un conductor y medir el calor de Joule que se desprende al hacerlo. Para esclarecer de qué factores depende la energía eléctrica de un condensador no hace falta recurrir a ningún experimento. La fórmula de la energía eléctrica del condensador es consecuencia de postulados teóricos que ya conocemos.

Consideremos un condensador que, para facilitar los razonamientos, supondremos que tiene una de sus armaduras puesta a tierra. El proceso de descarga de este condensador (puesta a tierra de la segunda armadura), cargado hasta una diferencia de potencial φ con una cantidad de electricidad q , nos lo podemos figurar como si las cargas elementales dq , sometidas a la acción de las fuerzas del campo eléctrico, se fueran consecutivamente a tierra. El trabajo realizado por el campo en este acto elemental es igual a φdq . A medida que se va descargando el condensador, el trabajo de transporte a tierra de cada porción siguiente de cargas se irá haciendo menor, porque la diferencia de potencial $\varphi = q/C$ disminuye durante todo el tiempo. El trabajo total que realizará el campo al descargarse el condensador será igual a

$$\int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C}$$

A esta magnitud conviene llamarla *energía eléctrica del condensador*. Aprovechando la ligazón del potencial con la carga, a la fórmula de la energía se le pueden dar otras formas

$$W_{el} = \frac{q^2}{2C} = \frac{\varphi q}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}$$

De aquí se deduce que, si la diferencia de potencial es constante, la energía eléctrica es proporcional al cuadrado de la carga. La

constancia de la diferencia de potencial se consigue conectando el condensador a una pila de corriente constante. Si las armaduras del condensador están aisladas, la carga será constante; en este caso la energía es proporcional al cuadrado del potencial y directamente proporcional a la capacidad del condensador.

ENERGÍA DE UN CAMPO. En el caso de un condensador plano infinito, la fórmula de la energía puede escribirse de la forma $W_{el} = \frac{\epsilon_0 \epsilon \varphi^2}{2d}$, si se utiliza el SI, o de la forma $W_{el} = \frac{\epsilon \varphi^2}{8\pi d}$, si se emplea el sistema CGS. Hemos escrito las fórmulas de la energía correspondiente a la unidad de superficie de un condensador plano.

Estas fórmulas se pueden transformar introduciendo en ellas la intensidad E en vez de la diferencia de potencial φ . Haciendo la sustitución $\varphi = Ed$, obtenemos

$$W_{el} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} d \text{ (SI)} \quad \text{ó} \quad W_{el} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} d \text{ (CGS)}.$$

De la forma de estas fórmulas se deduce que a la unidad de volumen le corresponde la energía $\frac{\epsilon E^2}{8\pi}$. Llamémosle a $w = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$ *densidad de la energía eléctrica*.

Consideremos ahora un campo eléctrico arbitrario. Construimos mentalmente las superficies equipotenciales y las líneas de fuerza y dividimos el espacio en pequeños volúmenes dv limitados por dos superficies equipotenciales contiguas y por una superficie lateral que pase por las líneas de fuerza. A cada uno de estos volúmenes, que no difiere de una parte del volumen de un condensador plano, le pertenece una energía eléctrica igual a $dW = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} dv$. Si esta expresión se integra respecto de todo el espacio ocupado por el campo eléctrico, podemos esperar que la fórmula obtenida dé la energía eléctrica del sistema creador del campo.

Así, pues, la fórmula de la energía eléctrica tiene la forma

$$W_{el} = \int \frac{\epsilon E^2}{8\pi} dv.$$

El significado de las transformaciones matemáticas que se han hecho rebasan los límites de un formalismo conveniente para la aplicación de tal o cual fórmula. La nueva expresión de la energía permite hablar, no de la energía del sistema creador del campo, sino de la energía del propio campo eléctrico, y nos lleva a la idea de la realidad del campo eléctrico. Dentro de los marcos del estudio de los campos continuos esta idea no puede ser confirmada ni desmentida. Pero al pasar a los campos alternativos hallamos pruebas directas de la realidad del campo electromagnético (véase la pág. 338), y entonces la fórmula de la energía del campo que hemos

deducido (energía de la materia electromagnética) adquiere un significado fundamental.

Ejemplo. Continuemos el ejemplo considerado en la pág. 254. Hasta que se alejaron las placas, la energía acumulada en el campo eléctrico del condensador era $W_1 = 22,5 \cdot 10^{-6}$ J, y la densidad de la energía era $w_1 = 4,5$ J·m³. Después de apartar las placas por el primer procedimiento (tensión $U = \text{const}$) la energía se hace igual a $W_2 = \frac{W_1}{2} = 11,25 \cdot 10^{-6}$ J, y la densidad de energía $w_2 = 1,12$ J·m³ (el volumen del campo aumentó al doble). La energía de la fuente aumenta a expensas del trabajo de las fuerzas externas y de la disminución de la energía del campo. Después de separar las placas por el segundo procedimiento ($q = \text{const}$), la energía $W_2 = 2W_1 = 45 \cdot 10^{-6}$ J y la densidad de la energía no varía, $w_2 = 4,5$ J·m³.

ENERGÍA DE INTERACCIÓN. Si dos cuerpos cargados, de signos opuestos, se atraen, las fuerzas, del campo eléctrico realizan trabajo, a costa, como es natural, de la energía de dicho campo: $dA = -dW_{el}$. Por lo tanto, de acuerdo con lo dicho en la pág. 57, el trabajo de las fuerzas eléctricas se realiza a expensas de la disminución de la energía potencial $\frac{q_1 q_2}{r}$. A esta energía conviene llamarle *energía de interacción de las cargas*.

¿En que relación se halla esta fórmula con la fórmula de la energía eléctrica del campo, estudiada en el punto anterior? No es difícil ver que la energía de interacción es parte de la energía eléctrica del campo de las cargas que se estudian. Observando atentamente la fórmula de la energía del campo nos damos cuenta de que la energía eléctrica también tiene un valor determinado cuando en el espacio hay una sola carga eléctrica. Es oportuno llamarle a la energía del campo creado por un solo cuerpo cargado *energía intrínseca de la carga eléctrica*. La energía de un campo eléctrico puede descomponerse siempre en la suma de las energías intrínsecas de las cargas eléctricas y la suma de las energías de interacción de estas cargas.

Llamemos E_1, E_2, \dots a las intensidades de los campos creados por las cargas primera, segunda, etc. El campo resultante será igual en cada punto del espacio a la suma vectorial de las intensidades: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$

La densidad de la energía eléctrica será igual a

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{8\pi} (E_1 + E_2 + \dots)^2 &= \frac{\epsilon}{8\pi} E_1^2 + \frac{\epsilon}{8\pi} E_2^2 + \dots + \\ &+ \frac{\epsilon}{4\pi} E_1 E_2 + \frac{\epsilon}{4\pi} E_1 E_3 + \dots \end{aligned}$$

Vemos claramente el sentido, antes indicado, del desarrollo en las componentes ocurrido. Los cuadrados de E dan las energías intrínsecas, y los dobles productos, las energías de interacción. Está claro que la energía de interacción de las cargas puede ser una magnitud

tanto positiva como negativa; en cuanto se refiere a las energías intrínsecas de las cargas y a la energía resultante del campo, son magnitudes positivas.

Por lo general nos encontramos con energía de interacción de cargas eléctricas. Por esto da lo mismo calcular el trabajo de las cargas eléctricas como resultado de la disminución de la energía de interacción o como resultado del decrecimiento de la energía del campo. Conviene hacer el cálculo que sea más fácil.

*§ 91. Radio del electrón y límites
de la electrodinámica clásica*

Calculemos la energía eléctrica intrínseca de una carga esférica en la cual la electricidad se halla distribuida por la superficie. En este caso sólo existe campo eléctrico fuera de la carga y, por lo tanto, hay que sumar la energía del campo en el espacio exterior respecto de la esfera. La intensidad del campo de la carga, si está en el vacío, viene expresada por la fórmula $\frac{q}{r^2}$, y la densidad de la energía en cualquier punto del espacio tendrá la forma $\frac{1}{8\pi} \frac{q^2}{r^4}$. Descompongamos mentalmente todo el espacio en capas esféricas. Dentro de una de estas capas, limitada por los radios r y $r+dr$, estará comprendida la energía $\frac{1}{8\pi} \frac{q^2}{r^4} \times$ (volumen de la capa). Como el volumen de la capa es igual a $4\pi r^2 dr$, la energía que hay en dicha capa esférica podrá representarse por la simple expresión $\frac{1}{2} \frac{q^2}{r^2} dr$. Para hallar la energía total del campo hay que integrar esta expresión entre los límites a (así llamamos al radio de la esfera) e infinito. Así,

$$W = \frac{q^2}{2} \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{2a}.$$

Esta es la forma que tiene la fórmula de la energía de una bolita cargada de electricidad.

Demos al lector la posibilidad de comprobar que para una carga distribuida por todo el volumen de la bolita obtendríamos una fórmula casi igual de la energía, que sólo diferiría de ésta en un coeficiente numérico próximo a la unidad.

Si aplicamos la fórmula obtenida a las partículas elementales, por ejemplo, al electrón, ¿a qué resultado llegaremos?

Según el principio de la relatividad (véase la pág. 448), la energía interna de un cuerpo de masa m se expresa por la fórmula

mc^2 , donde c es una constante universal igual a la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío. Igualando entre sí las dos expresiones de la energía, tendremos la posibilidad de calcular el radio del electrón:

$$a = \frac{q^2}{2mc^2}.$$

La sustitución en esta fórmula de las letras por sus valores *) da $1,4 \cdot 10^{-13}$ cm. Un número considerable de hechos físicos indirectos indican que, por el orden de magnitud, la dimensión del electrón así calculada es bastante correcta.

No obstante, la idea de que el electrón es una partícula eléctrica «ordinaria» es claramente infundada. De admitirla, se plantea inmediatamente el problema de las fuerzas que retienen a las partes del electrón tan próximas entre sí. Las fuerzas de repulsión de las partículas eléctricas que se encuentran a distancias del orden de 10^{-13} cm deben ser enormes.

Esta teoría tropieza con otras dificultades. Así, de la teoría de la relatividad se deduce que el electrón debe ser un punto matemático. Pero al mismo tiempo, la energía eléctrica de una carga concentrada en un punto debe ser infinitamente grande.

Esta dificultad es típica de la llamada física clásica, creada en lo fundamental en el siglo XIX. La física clásica explica magníficamente el comportamiento de los cuerpos macroscópicos. A muchos investigadores de finales del siglo XIX y comienzos del XX les parecía que el edificio de la física clásica era tan perfecto, que la física, como ciencia, estaba próxima a consumarse. Después del descubrimiento de las partículas elementales se produjo la tendencia natural a propagar las leyes establecidas para los cuerpos grandes a las partículas elementales. Entonces comenzaron los «fracasos» de la física clásica. Ahora sabemos que no es correcto trasladar los conceptos sacados de las observaciones del macro-mundo a los átomos, núcleos y electrones.

El problema del electrón no puede resolverse dentro de los límites de las ideas clásicas. Durante los últimos años se han alcanzado serios éxitos en la teoría del electrón, pero aún no existe una teoría perfecta. Por esta razón la teoría clásica de la electricidad que se expone en esta parte del libro (electrodinámica) tiene ciertas limitaciones con las cuales nos encontraremos al estudiar las interacciones de las partículas elementales. En todos los casos en que se trate del comportamiento de una partícula elemental en campos creados por cuerpos grandes, y tanto más si se consideran las interacciones de cuerpos macroscópicos, los resultados de la

*) $q = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C; $m = 9,1091 \cdot 10^{-31}$ kg; $c = 2,99792 \cdot 10^8$ m/s.

electrodinámica clásica coinciden intachablemente con los datos experimentales.

§ 92. Fuerzas eléctricas

Al calcular las fuerzas de interacción entre cuerpos cargados utilizamos siempre el concepto de campo eléctrico de fuerzas. En vez de hablar de la fuerza con que el cuerpo A actúa sobre el cuerpo B , introducimos el campo de fuerzas y decimos: el cuerpo A crea un campo y este campo actúa sobre el cuerpo B . Como veremos en el cap. 16, esta representación rebasa los límites de las consideraciones formales: el campo electromagnético es una realidad física, y la naturaleza efectúa la interacción que se transmite desde un punto del espacio a otro («acción próxima»). La introducción de concepto de campo permite prescindir de las fuentes del campo y resolver el problema de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo cargado conociendo únicamente las intensidades del campo en aquellos puntos en que se encuentran las cargas del sistema que nos interesa.

Cada cuerpo cargado es un sistema de cargas. Si se trata de un sistema de cargas discretas, la fuerza que actúa sobre él $\mathbf{F} = q_1 \mathbf{E}_1 + q_2 \mathbf{E}_2 + \dots$, donde $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots$ son las intensidades del campo en los puntos en que se hallan las cargas. Si la carga eléctrica está distribuida continuamente en un volumen determinado, la fuerza que actúa sobre el cuerpo puede representarse por una integral: $\mathbf{F} = \int \mathbf{E} \rho \, dv$, y si las cargas están distribuidas por la superficie, por una integral de superficie $\mathbf{F} = \int \mathbf{E} \sigma \, dS$.

Sin embargo, debe tenerse en cuenta una peculiaridad de este cálculo directo de las fuerzas: en la fórmula hay que poner el valor de la intensidad que habría en ausencia de la carga sobre la cual actúa la fuerza. En aquellas fórmulas en que la fuerza se expresa por una suma, en la intensidad \mathbf{E}_1 no entra la acción de la carga q_1 sobre sí misma, es decir, al calcular \mathbf{E}_1 no se tiene en cuenta el campo creado por q_1 y así sucesivamente. Esto mismo es correcto también para las fórmulas integrales: por la intensidad del campo que figura en el integrando debe entenderse la intensidad creada por toda la distribución de la carga eléctrica a excepción de la cantidad de electricidad que se encuentra en el punto que se considera.

Explicaremos esto valiéndonos del ejemplo de la fuerza que actúa sobre una superficie metálica cargada. Como sabemos, sobre la superficie del metal que linda con un dieléctrico, la intensidad del campo eléctrico por el lado de este último es igual, en el

sistema CGS, a $4 \pi \sigma / \epsilon$, y por el lado del metal es nula. La intensidad del campo sufre una interrupción en esta superficie. Si queremos determinar la fuerza que actúa sobre un elemento de superficie, debemos multiplicar la cantidad de electricidad σdS por la intensidad que existiría en este punto si se eliminara el elemento considerado de la superficie cargada. Por esto sería erróneo multiplicar σdS tanto por el valor del campo por el lado del dieléctrico, $4 \pi \sigma / \epsilon$, como por el valor del campo por el lado del metal, es decir, por cero. Como demuestra el estudio riguroso, el campo que existiría en este punto después de eliminar el elemento considerado sería igual a la media aritmética de los dos valores, 0 y $4 \pi \sigma / \epsilon$ o sea, igual a $2 \pi \sigma / \epsilon$. De este modo la fórmula de la fuerza que actúa sobre un elemento de área de la superficie cargada de un cuerpo conductor tiene la forma

$$\frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} dS$$

y para todo el cuerpo

$$F = 2\pi \int \frac{\sigma^2}{\epsilon} dS,$$

debiendo extenderse la integración a toda la superficie, teniendo en cuenta las posibles variaciones de la densidad de carga y de la constante dieléctrica a lo largo de la superficie del metal.

En el caso de un campo uniforme (idealmente un condensador plano infinito), la fuerza F que actúa sobre el área S de una placa se puede calcular con una exactitud suficientemente buena por la fórmula

$$F = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} S \text{ (CGS).}$$

La magnitud de esta fuerza se puede medir con la llamada balanza de Thomson, cuyo esquema de funcionamiento se muestra en la fig. 94. Cuando la diferencia de potencial en la armadura del condensador es igual a 600 V, una placa de 50 cm² de área que se encuentre a 5 mm de distancia de la otra placa, será atraída hacia ella con una fuerza que calcularemos en los dos sistemas de unidades que utilizamos.

Sistema CGS

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d} = 8 \text{ cm,}$$

$$q = CU = 8 \cdot 2 = 16 \text{ u. CGS,}$$

$$\sigma = 0,32 \text{ u. CGS,}$$

$$F = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} S =$$

$$= \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,32^2}{1} 50 = 32 \text{ din.}$$

SI

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} = \frac{1 \cdot 10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F,}$$

$$b = CU = 8,9 \cdot 10^{-12} \cdot 600 = 5,3 \cdot 10^{-9} \text{ C,}$$

$$\sigma = 1,06 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon\epsilon_0} S =$$

$$= \frac{(1,06 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 1 \left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)} = 32 \cdot 10^{-6} \text{ N.}$$

Por lo tanto, para equilibrar la fuerza de atracción electrostática, en el otro platillo de la balanza habrá que colocar una pesa igual a $32 \text{ din} = 32 \cdot 10^{-6} \text{ N}$.

La fuerza que actúa sobre un cuerpo en el que la electricidad está distribuida volumétricamente es aún más difícil de valorar: en la expresión $\rho E dv$, la intensidad E es la intensidad del campo creado por todas las cargas menos ρdv .

Si el cuerpo cargado se halla en un medio dieléctrico, el cálculo de la fuerza se complica también por la circunstancia de que,

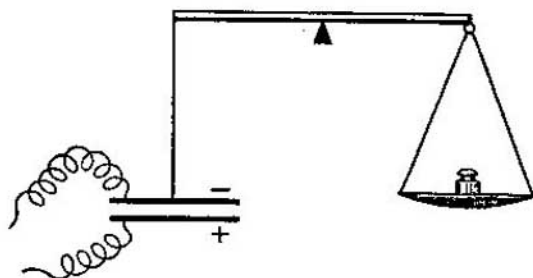


FIG. 94.

al eliminar mentalmente la carga hay que suprimir también mentalmente la parte correspondiente de dieléctrico, lo que se refleja en una variación del estado de polarización (véase más adelante).

Si queremos soslayar las dificultades relacionadas con la «resta» de la acción de la carga sobre sí misma, debemos recurrir al cálculo de la fuerza por medio de la expresión de la energía. La disminución de la energía es igual al trabajo; conociendo la magnitud del desplazamiento se puede hallar el valor de la fuerza. Por lo general éste es el procedimiento que se utiliza para valorar la fuerza.

El cálculo, por este procedimiento, de la fuerza que actúa sobre la placa de un condensador plano, $F = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} S$, puede servir de clara ilustración a lo dicho. Al considerar la atracción de las placas del condensador (desconectado de la fuente de tensión) podemos escribir inmediatamente la variación de la energía que se produce al aproximar dichas placas una distancia Δ :

$$S\Delta \cdot \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} S\Delta,$$

de donde la fuerza buscada

$$F = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} S.$$

§ 93. Momento dipolar de un sistema de cargas

Retornemos a los sistemas eléctricos que pueden representarse como sistemas de cargas puntuales. Supongamos que, en toda la extensión del sistema de cargas que nos interesa, el campo eléctrico es uniforme. En este caso la fórmula de la fuerza que actúa sobre el sistema tendrá la forma

$$F = (q_1 + q_2 + \dots) E = QE,$$

donde Q es la carga total del sistema. Si el cuerpo es eléctricamente neutro, como por ejemplo, un átomo o una molécula, la fuerza que actúa sobre este cuerpo, que contiene cantidades

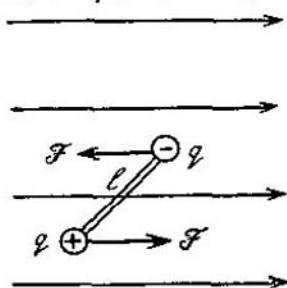


FIG. 95.

iguales de partículas positivas y negativas, será nula. ¿Quiere esto decir que un cuerpo eléctricamente neutro no interacciona con el campo eléctrico? No es difícil ver que no. En un campo uniforme, las fuerzas que actúan sobre las cargas del sistema son paralelas entre sí. Podemos componer por separado las fuerzas que actúan sobre las cargas positivas y las aplicadas a las cargas negativas. Como es bien sabido, la resultante de las fuerzas paralelas estará aplicada al centro de «gravedad» del cuerpo. La palabra «gravedad»

la hemos escrito entre comillas porque ahora nos referimos al centro de gravedad eléctrico. Como resultado, todas las fuerzas que actúan sobre las cargas de un sistema que se halla en un campo homogéneo se reducen a dos fuerzas antiparalelas aplicadas respectivamente a los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas (fig. 95). Si el sistema es eléctricamente neutro, ambas fuerzas serán iguales; la fuerza total será nula, pero sobre el cuerpo actuará un par de fuerzas cuyo momento será $M = qEl \sin \alpha$.

El momento de fuerza sólo puede actuar sobre el sistema de cargas en el caso en que los centros de «gravedad» de las cargas positivas y negativas estén desplazadas entre sí.

El vector $p = ql$, igual, por su magnitud, al producto de la carga positiva del sistema por la distancia entre los centros de gravedad, recibe el nombre de *momento dipolar* o de *dipolo* del sistema. El momento dipolar se considera dirigido del centro negativo al positivo. Este momento determina el comportamiento del sistema en un campo homogéneo. El sistema, abandonado a sí mismo, se vuelve en el campo eléctrico uniforme de manera que su momento dipolar coincida con la dirección del campo eléctrico ($\sin \alpha = 0$).

En un campo uniforme, toda la acción sobre un sistema de cargas eléctricas neutro se reduce a un momento de fuerza $M =$

$=pE \sin \alpha$, donde p es el momento de dipolo del sistema, que es igual al producto de la cantidad de electricidad de un signo por el brazo del dipolo. De esta forma no hay necesidad de considerar en el campo homogéneo la compleja disposición del sistema de cargas cualquiera que sea; basta sustituirlo por el dipolo correspondiente.

Si el sistema se encuentra en un campo no uniforme, el momento de dipolo no podrá ya definir completamente sus propiedades.

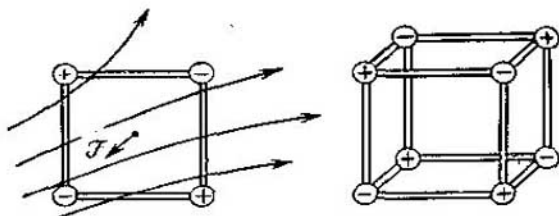


FIG. 96.

Esto puede verse en la fig. 96. Cuatro cargas situadas en los vértices de un cuadrado forman un sistema eléctricamente neutro cuyo momento dipolar es nulo (los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas coinciden). En un campo uniforme, sobre otro sistema no actuarían fuerzas ni momento de fuerza. En campos no uniformes, está claro que este cuadrado puede trasladarse y girar, ya que las fuerzas que actúan sobre las cargas son, en general, distintas. Por analogía con el dipolo, este sistema debe llamarse *cuadripolo*. En la misma figura se representa otro sistema neutro con momento dipolar neutro, el *octopolo*.

Para la teoría de la estructura de los cuerpos, de la que nos ocuparemos bastante más adelante, tiene considerable interés el estudio de las interacciones de los sistemas eléctricos más simples. Veamos algunas de ellas.

CARGA — CARGA. La interacción de dos cargas puntuales se realiza según la ley de Coulomb $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$.

CARGA — DIPOLO. Un dipolo abandonado a sí mismo tiende a volverse de manera que quede situado a lo largo de las líneas de fuerza. Una vez realizado este giro, si el campo es homogéneo, el dipolo permanecerá inmóvil, y si el campo no es homogéneo, será atraído hacia la región en que el campo es más intenso, como puede verse en la fig. 97. En el caso en que el campo no homogéneo sea el de una carga puntual, el dipolo será atraído hacia la carga,

La fuerza de atracción será igual a

$$F = q_0 \left(\frac{q}{r^2} - \frac{q}{(r+l)^2} \right).$$

Si el brazo del dipolo es pequeño, reduciendo a un común denominador y prescindiendo de l^2 , por su pequeñez en comparación

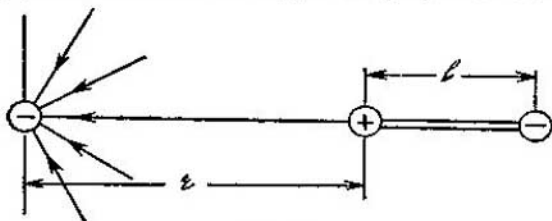


FIG. 97.

con rl , y rl , en comparación con r^2 , obtenemos la interesante fórmula siguiente:

$$F = q_0 \frac{2p}{r^3}.$$

Llamamos la atención sobre el hecho de que la fuerza de interacción de la carga y del dipolo disminuye, al aumentar la distancia, más de prisa que la fuerza de Coulomb, siendo inversamente proporcional al cubo de la distancia.

Ejemplo. La distancia entre los átomos de H y Cl en la molécula de ClH es igual a 1,28 Å, el momento de dipolo de la molécula $p=6 \cdot 10^{-18}$ u. CGS. Entonces, un electrón que se encuentre a la distancia $r=10$ Å de la molécula será atraído por ella con una fuerza de $\sim 6 \cdot 10^{-6}$ din.

DIPOLO — DIPOLO. Aquí conviene resolver los dos problemas que plantean las disposiciones mutuas de los dipolos que muestra la fig. 98. Las fórmulas exactas de las interacciones tienen la forma

$$F = \frac{2q^2}{r^2} - \frac{2q^2}{r^2 + l^2} \quad (\text{para la disposición } a),$$

$$F = \frac{2p^2}{r^2} \cdot \frac{3r^2 - l^2}{(r^2 - l^2)^2} \quad (\text{para la disposición } b).$$

Si el brazo del dipolo es pequeño, estas fórmulas se pueden sustituir por siguientes expresiones aproximadas:

$$F = \frac{3p^2}{r^4} \quad (\text{para la disposición } a),$$

$$F = \frac{6p^2}{r^4} \quad (\text{para la disposición } b).$$

Las fuerzas de interacción disminuyen en proporción inversa a la cuarta potencia de la distancia.

Ejemplo. Dos moléculas de ClH , que se hallan a 10 \AA entre sí, se atraen con una fuerza $F \sim 10^{-6} \text{ din}$ en el caso *a*, y $F \sim 2 \cdot 10^{-6}$ en el caso *b*.

CARGA — CUADRIPOLO. El cálculo se hace para la orientación representada en la fig. 99. La fuerza de interacción puede escribirse

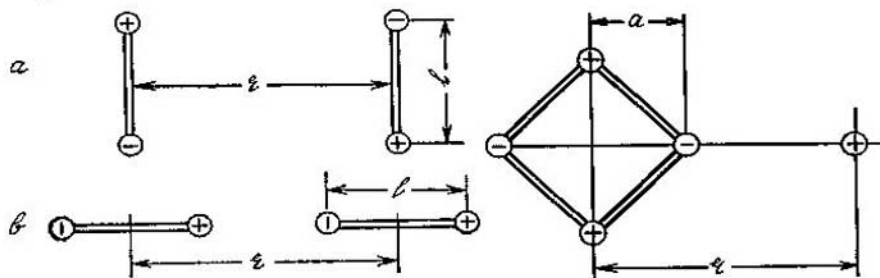


FIG. 98.

FIG. 99.

de la forma

$$F = 2q_0q \left(\frac{r^2 + a^2}{(r^2 - a^2)^2} - \frac{r}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right).$$

La fórmula aproximada para un cuadrupolo pequeño es: $F = \frac{9q_0qa^2}{r^4}$.

La fuerza disminuye en proporción inversa a la cuarta potencia de la distancia.

§ 94. Polarización de un dieléctrico isótropo

Como sabemos, si el espacio en que existe un campo eléctrico creado por cierto sistema de cargas se llena de un dieléctrico homogéneo, la intensidad de dicho campo y el valor de su potencial eléctrico disminuyen ϵ veces. El desplazamiento eléctrico (y la inducción), por el contrario, permanece invariable. La capacidad de un condensador disminuye ϵ veces. Esta circunstancia se aprovecha en la práctica para medir la constante dieléctrica. La razón de la capacidad del condensador entre cuyas armaduras se encuentra el dieléctrico a la capacidad del mismo condensador sin dieléctrico, se puede considerar como la definición de la constante dieléctrica.

Ahora avanzaremos un poco y nos preguntaremos cuáles son las causas de esta influencia del dieléctrico sobre el campo eléctrico. El experimento que sigue nos pondrá vías de explicar los fenómenos dieléctricos.

Consideremos un condensador plano conectado a una fuente de tensión. La densidad de las cargas eléctricas en las armaduras del condensador y, por consiguiente, el número de líneas D por unidad de superficie viene determinada uniformemente por la intensidad del campo eléctrico: $\sigma = E/(4\pi)$. Llenemos este condensador de un dieléctrico homogéneo. Ahora la relación entre intensidad del campo eléctrico y la densidad de carga en las armaduras del condensador se expresará por medio de la igualdad $\sigma = \epsilon E/(4\pi)$, es decir, el flujo de líneas de fuerza (o sea, de líneas D) aumenta. En el experimento hecho por este procedimiento, la intensidad del campo eléctrico, que es igual al cociente de dividir la diferencia de potencial por la distancia entre las armaduras, no puede variar. Por consiguiente, cambia la densidad de cargas en las armaduras, aumentando precisamente ϵ veces. Este aumento puede encontrar experimentalmente: a medida que el condensador se llena de dieléctrico, la fuente de tensión aumentará la carga de aquél. Midiendo esta corriente eléctrica y el tiempo que pasa, podemos cerciorarnos de que por cada unidad de superficie del condensador será suministrada una cantidad adicional de electricidad igual a

$$\frac{\epsilon E}{4\pi} - \frac{E}{4\pi} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E.$$

Si se quita el dieléctrico, esta carga adicional retornará a la fuente, y la cantidad adicional de líneas de fuerza desaparecerá. Para explicar la atracción de nuevas cargas hacia las placas del condensador, nos vemos obligados a admitir que en las superficies del dieléctrico que lindan con las armaduras se forman cargas de signo contrario cuya densidad $\sigma = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E$.

La carga superficial del dieléctrico se puede explicar suponiendo que el dieléctrico está constituido por cargas positivas y negativas ligadas entre sí formando parejas, que no pueden desplazarse por el cuerpo, pero que son capaces de moverse la una con respecto a la otra engendrando un momento dipolar en cada unidad de volumen del dieléctrico. La transformación de un sistema de cargas eléctricamente neutro en un sistema poseedor de momento de dipolo recibe el nombre de *polarización*, y el vector del momento dipolar de la unidad de volumen del dieléctrico se denomina *vector de polarización* P .

La polarización del dieléctrico no ocasiona la creación de cargas volumétricas; las cantidades de cargas positivas y negativas que hay en la unidad de volumen después de la polarización siguen siendo iguales entre sí. Sin embargo, la polarización da lugar a la creación de una carga en la superficie del dieléctrico, como evidencia el esquema elemental de la fig. 100. La densidad de esta carga

es igual a la magnitud que antes hallamos

$$\sigma_{pol} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E.$$

Hasta aquí hemos razonado acerca de un dieléctrico contiguo a la placa de un condensador plano. Pero estos mismos razonamientos son válidos si se trata de un conductor de superficie arbitraria. Es más, resulta que la expresión escrita para σ_{pol} es válida en general para las superficies perpendiculares a las líneas de fuerza, es decir, siempre

$$\sigma = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E_n.$$

Aquí E_n es la proyección de la intensidad sobre la normal a la superficie. Esta fórmula puede aplicarse a cualquier frontera real o imaginaria dentro del dieléctrico.

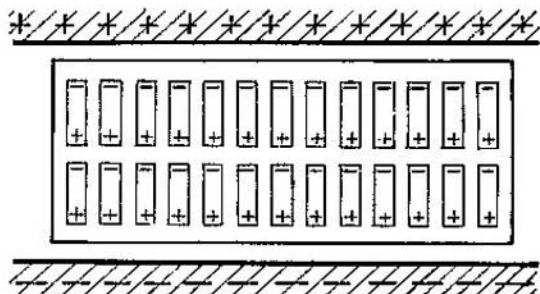


FIG. 100.

La carga de polarización (que también suele llamarse carga ligada) puede expresarse en función del momento de dipolo de la unidad de volumen. Si se trata de cuerpos isótropos, el desplazamiento de las cargas ligadas al superponerse los campos se produce a lo largo de las líneas de fuerza eléctrica. Por esto el vector de polarización es paralelo al vector intensidad. Recortemos de la lámina dieléctrica un cilindro de base S y longitud l . En virtud de la polarización, en las bases del cilindro se concentran cargas ligadas iguales en magnitud y de signo contrario. El momento dipolar de la varilla cilíndrica recortada será igual, por definición, al producto de la carga σS por el brazo del dipolo l , es decir, $p = \sigma_{pol} S l$. El momento de dipolo referido a la unidad de volumen será igual a $|\mathbf{P}| = \sigma_{pol}$. Al hacer este cálculo hemos considerado que las bases del cilindro son perpendiculares a la dirección de polarización. Si estas superficies estuvieran inclinadas, formando un ángulo φ con las líneas de fuerzas, la densidad de carga en ellas sería menor,

proporcionalmente al coseno del ángulo de inclinación. Por lo tanto, en el caso general, se cumplirá la relación

$$\sigma_{pot} = P_n, \text{ donde } P_n = P \cos \varphi.$$

Ahora obtenemos la posibilidad de hallar la relación entre el vector polarización y el vector intensidad del campo eléctrico. Unificando la última fórmula con la expresión de la densidad de las cargas ligadas, que consideramos al principio de este párrafo, obtenemos, para cualquier dirección n , que

$$P_n = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E_n.$$

De este modo, si la constante dieléctrica no depende de la intensidad, entre los vectores P y E existe la dependencia lineal

$$P = \alpha E.$$

La expresión $\alpha = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}$ suele llamarse *polarizabilidad*. Para el agua $\alpha = 6,38$, para el vidrio $\alpha = 0,48$.

Como $D = \varepsilon E$, la relación entre los vectores D , E y P puede escribirse de la forma

$$D = E + 4\pi P.$$

Los vectores D , E y P son paralelos en el caso de medios homogéneos.

§ 95. Polarización de los cuerpos cristalinos

Hasta ahora hemos estudiado el comportamiento de la sustancia típica del cuerpo amorfo o microcristalino o del monocristal en ciertas posiciones especiales respecto del campo. Pero si de un monocristal se corta una lámina que forme un ángulo cualquiera con sus caras y se coloca dicha lámina entre las armaduras de un condensador, se puede observar el efecto siguiente: la lámina se polariza no sólo longitudinal, sino transversalmente a las líneas de fuerza, el vector P no es paralelo al E . Por consiguiente, el vector D tampoco será, en este caso, paralelo a la intensidad del campo.

En los monocristales, la dirección en que se desvía la carga eléctrica libre (E), no coincide con la dirección de la normal a la superficie situada de manera que en ella se induzca la carga máxima (D). La relación entre D y E se hace más compleja, y para poder hallar D por el valor de E , o al contrario, resulta que es insuficiente conocer sólo la constante dieléctrica. En cualquier monocristal resulta ser posible encontrar tres direcciones (ejes principales) en las cuales $D \parallel E$. Es importante conocer ε para estas tres direcciones, porque entonces puede establecerse también

la relación entre D y E para una orientación arbitraria del cristal en el campo. ¿Cuál será la relación entre los vectores D , E y P en este caso? Resulta que la ecuación $D=E+4\pi P$, dada en el párrafo precedente y deducida para el caso en que los vectores son paralelos, conserva su validez cuando los vectores dejan de ser paralelos. Existe otra diferencia entre los cuerpos cristalinos y los amorfos relacionada con sus propiedades dieléctricas. De entre las sustancias cristalinas se puede destacar una clase relativamente reducida de cuerpos que poseen propiedades de histéresis. Como estas propiedades se observaron por primera vez en la sal de Seignette o de la Rochelle, las sustancias de este tipo se llaman *eléctricos Seignette* o *eléctricos Rochelle* o más generalmente, *ferroeléctricos*. La peculiaridad de su comportamiento consiste en lo siguiente (véase también la pág. 655).

Coloquemos un ferroeléctrico (para simplificar vamos a suponer que se trata de polvo o de un cristal situado con respecto del campo de manera que $D\parallel E$) entre las armaduras de un condensador. Variemos la tensión en estas últimas y, por lo tanto, la intensidad del campo $E=U/d$ y midamos la densidad de las cargas σ en dichas armaduras, la cual, cuando sea $D\parallel E$, nos dará el valor de la inducción D . A medida que aumente E , el valor de D crecerá, pero no de manera directamente proporcional a E . El crecimiento de D se irá haciendo más lento, hasta que al final se produce la saturación. Está claro que la saturación de D corresponde a la saturación de polarización. Comencemos ahora a disminuir la tensión en las armaduras. El desplazamiento y la polarización empiezan a decrecer y la curva desciende, pero no por el mismo camino que al subir. Como resultado, cuando la tensión se quite por completo ($E=0$), la inducción y la polarización no serán iguales a cero. El dieléctrico se hace semejante a un imán permanente. Tendrá un polo «norte» y un polo «sur» eléctricos y se comportará como un gran dipolo permanente.

El comportamiento posterior de los ferroeléctricos se ve claramente en la fig. 101, que representa el bucle de histéresis. Para «deselectrizar» el dieléctrico hay que cambiar el signo de la tensión en las armaduras del condensador. Aumentando el campo E de sentido contrario, le quitamos la polarización al dieléctrico y después volvemos a electrizarlo, pero cambiando entre sí los puestos de los polos. Finalmente, alcanzamos otra vez la saturación y, en ade-

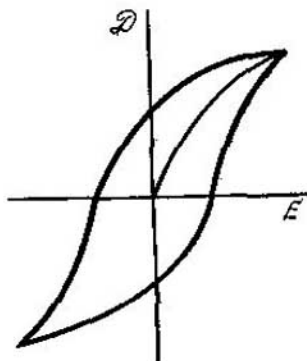


FIG. 101.

lante, el proceso puede repetirse en sentido contrario. ¿Por qué se llama histéresis este fenómeno? La palabra griega *hystéresis* significa retraso. El lazo representado en la figura muestra que el valor de D , lo mismo que los de P y ϵ , depende del estado que tuvo antes la muestra, es decir, de su historia.

Todos los cristales que carecen de centro de simetría (véase la pág. 655) manifiestan una interesante capacidad de variar sus dimensiones cuando se les aplica un campo eléctrico. Este fenómeno se conoce con el nombre de *electrostricción*.

Los razonamientos termodinámicos demuestran, que si el campo eléctrico produce una deformación, la deformación deberá conducir a su vez a la polarización. Este efecto se llama *piezoeléctrico*. Acerca de las aplicaciones del efecto piezoeléctrico dijimos ya unas palabras en la parte I. De la relación de este fenómeno con la estructura de la sustancia se tratará en la pág. 739.

§ 96. *Cuerpos dieléctricos finitos en un campo eléctrico*

Con respecto a un cuerpo finito, no conductor, introducido en un campo eléctrico pueden plantearse las siguientes preguntas: ¿qué fuerzas y momentos de fuerza actúan sobre este cuerpo? y ¿qué distorsión experimenta el campo cuando se introduce en él un dieléctrico?

El cuerpo dieléctrico introducido en el campo se polariza y adquiere cierto momento de dipolo. Por lo tanto, el comportamiento de este cuerpo en el campo eléctrico, en general, no difiere del comportamiento de un dipolo. Si el vector polarización forma un ángulo con la intensidad del campo, esta posición del dieléctrico será inestable. Sobre el cuerpo actuará un momento de fuerzas que tenderá a volver el cuerpo de tal forma, que los vectores P y E sean paralelos.

Esto hace que el cuerpo dieléctrico introducido en el campo eléctrico uniforme dado se coloque en una posición determinada de equilibrio, que dependerá de la forma del cuerpo. Veamos cómo ocurre esto en el ejemplo siguiente de una varilla dieléctrica.

La experiencia nos convence de que la posición de equilibrio es aquella en que el eje mayor de la varilla coincide con una línea de fuerza. Como sabemos, en la varilla no existen polos fijos, ¿por qué ocurre, entonces, esto? La causa de este comportamiento peculiar se explica en la fig. 102. En la sección rectangular de la varilla que en ella se representa, las fuerzas que actúan sobre las cargas ligadas se pueden reducir a cuatro, que estarán aplicadas a las cuatro superficies de la varilla rectangular. Vemos que las fuerzas que actúan sobre las caras mayores de la varilla casi se equilibran, y que

las fuerzas que lo hacen sobre las caras menores forman un par de fuerzas que hacen que la varilla se coloque en posición longitudinal a las líneas de fuerza.

Si el cuerpo se encuentra en un campo no homogéneo, además del momento de fuerzas, actuarán sobre él las fuerzas que arrastran el dieléctrico hacia la región en que el campo es más intenso.

Este fenómeno puede demostrarse eficazmente con líquidos dieléctricos, obligando al líquido, que se halla en un tubo, a elevarse cuando se aplica tensión al condensador. Fuerzas de este mismo tipo, es decir, que actúan sobre el dipolo en el campo no homogéneo son las que obligan a los pedacitos de papel a adherirse a la varilla de vidrio o de ebonita frotada previamente con una piel.

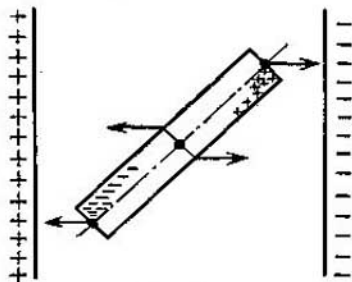


FIG. 102.

Pasemos ahora a tratar el problema de la distorsión del campo eléctrico que se produce al introducir en él un cuerpo dieléctrico. Ante todo demostraremos que las leyes generales del campo eléctrico conducen a relaciones importantes que ligan los valores de los campos eléctricos a uno y otro lado de los límites entre los dieléctricos.

Los vectores intensidad del campo eléctrico en dos puntos contiguos que se hallen en lados distintos del límite entre dos dieléctricos cuyas permitividades sean ϵ_1 y ϵ_2 deberán diferir el uno del otro tanto por su magnitud como por su dirección. Descompongamos estos vectores en sus componentes a lo largo de la frontera y según la normal a ella. Podemos asegurar que el campo dirigido a lo largo de la frontera debe ser igual a ambos lados de ella. Supongamos que esta afirmación fuera falsa y que por un lado de la frontera el campo fuera mayor que por el otro. En este caso se podría crear un móvil perpetuo transportando a lo largo de la frontera cargas en contra del campo, allí donde éste es menor, y dándole después a la carga la posibilidad de que se mueva por el otro lado de la frontera (donde el campo es mayor) bajo la acción de las fuerzas del campo eléctrico. Por esto las componentes tangenciales de la intensidad a ambos lados de la superficie de separación deben ser iguales,

$$E_{t_1} = E_{t_2}.$$

Para estudiar las componentes normales en el límite entre los dos medios aplicaremos la ley de Gauss — Ostrogradski. Construiremos una superficie auxiliar en forma de cilindro infinitamente bajo, una de cuyas bases se halla a un lado de la frontera y la otra,

al otro. Dentro de este cilindro no hay carga. Por esto el flujo total de inducción a través del cilindro debe ser nulo y los flujos a través de ambas bases deben ser iguales. Esto sólo puede ocurrir si las componentes normales de los vectores de inducción son iguales entre sí: $D_{n1} = D_{n2}$. De aquí, para las intensidades de los campos, tenemos:

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}.$$

De este modo la relación de las componentes normales de los vectores intensidad es inversamente proporcional a las constantes dieléctricas.

En la fig. 103 puede verse que al pasar del medio cuya constante dieléctrica es menor a cuerpo en que ϵ es mayor, las líneas de fuerza se apartan de la normal a la frontera. Esto significa que el número de líneas de fuerza que pasan por la unidad de superficie aumenta.

El problema de la distorsión del campo eléctrico cuando se introduce en él dieléctrico de forma determinada no puede resolverse. Este problema es complejo incluso en el caso en que el campo sea uniforme antes de que en él se introduzca el dieléctrico. Si el cuerpo tiene una forma arbitraria, al introducirlo en el campo homogéneo lo hace no homogéneo

no sólo en sus proximidades, sino también dentro de sí. Una excepción interesante son los elipsoides. Es ésta una extensa clase de cuerpos, ya que a ella pertenecen las esferas, los elipsoides achatados, que prácticamente no difieren de las placas, y los elipsoides alargados, que se aproximan a los cuerpos cilíndricos. Aplicando los métodos de la física matemática se demuestra que dentro del elipsoide el campo será homogéneo, como puede verse en la fig. 104. La ley de la refracción de las líneas de fuerza nos conduce a las figuras típicas de los cuerpos más densos sumergidos en un medio de menor densidad ($\epsilon_1 < \epsilon_2$) y del caso contrario ($\epsilon_1 > \epsilon_2$), por ejemplo, de una burbuja de aire en un vidrio o de un elipsoide de vidrio en el aire.

Puede demostrarse que el campo homogéneo E_0 en el vacío, en el cual introdujimos el cuerpo dieléctrico simétrico, está ligado con el campo E_i , que se establece dentro del dieléctrico, por medio de la relación

$$E_i = E_0 - NP,$$

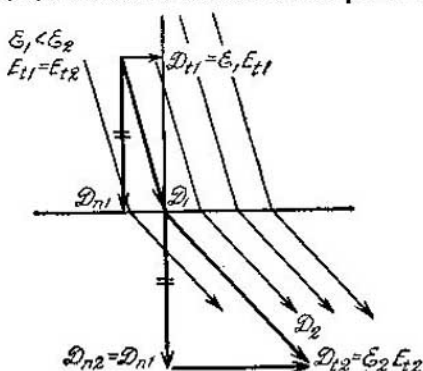


FIG. 103.

donde P es el vector polarización y N es un coeficiente que sólo depende de la forma del cuerpo. Cuando se definen fenómenos magnéticos, N suele llamarse coeficiente de desimantación (véase la pág. 309).

Como en la mayoría de los casos $P = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E_i$, después de hacer unas transformaciones fáciles llegamos a la expresión siguiente:

$$E_i = \frac{E_0}{1 + (\epsilon - 1) \frac{N}{4\pi}}$$

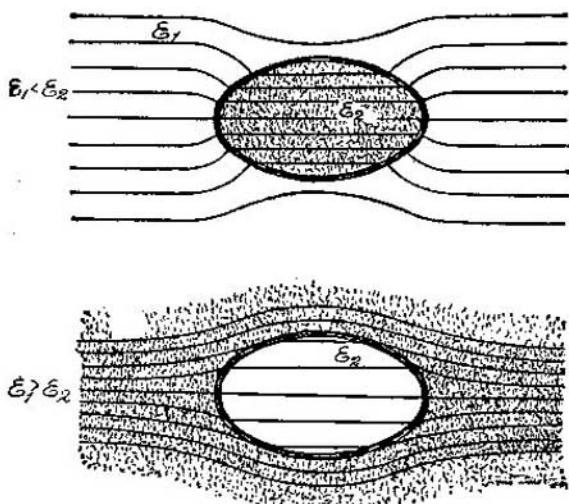


FIG. 104.

La constante dieléctrica es siempre mayor que la unidad. Por lo tanto, la intensidad del campo dentro del dieléctrico será siempre menor que la intensidad que había en este mismo punto del campo antes de introducir el dieléctrico.

El coeficiente N , para una placa plana perpendicular al campo, es igual a 4π . Este es el valor máximo de N ; el decrecimiento del campo en ϵ veces, que se produce en este caso, nos lleva al resultado para el medio homogéneo que ya consideramos anteriormente. El otro caso límite es el de un cilindro dirigido longitudinalmente al campo. Para él $N=0$, este cuerpo no debilita el campo. En todos los demás casos el debilitamiento del campo dependerá ya de la constante dieléctrica. Para una esfera $N=4\pi/3$ y, por consiguiente,

$E_i = \frac{3E_0}{\epsilon + 2}$. Para un cilindro, colocado de manera que forme un ángulo recto con el campo, $N = 4\pi/2$.

La causa de que el campo E se debilita consiste en que las cargas ligadas crean un campo dirigido en sentido contrario. En cuanto se refiere al campo del vector inducción, las cargas ligadas sólo influyen sobre él indirectamente. En efecto, el número de líneas D permanece invariable cuando se introduce un dieléctrico en el campo. No obstante, debido a la refracción de las líneas, la inducción dentro del dieléctrico aumenta.

15

CAMPO MAGNÉTICO

§ 97. *Momento magnético*

Los campos magnéticos actúan sobre las corrientes, partículas o cuerpos cargados que se mueven y sobre los cuerpos imantados. Se pueden hacer muchos dispositivos diversos que permiten juzgar acerca de las propiedades del campo magnético. Lo más conveniente es caracterizar las propiedades del campo magnético estudiando su acción mecánica sobre un circuito de corriente. Con un alambre puede hacerse perfectamente una espira plana de superficie muy pequeña. Este dispositivo permite medir el campo magnético bastante detalladamente. De este modo, el circuito de corriente de «ensayo» (espira plana) desempeña en la teoría del campo magnético el mismo papel que la carga de «ensayo» en la teoría del campo eléctrico.

Haciendo experimentos con este dispositivo llegamos a establecer los hechos fundamentales siguientes. En cada punto del campo, la espira, si puede girar libremente, ocupa una posición de equilibrio determinada. En este caso la posición de equilibrio estable estará definida no sólo por la posición que tenga en el espacio el eje de la espira, sino también por la posición que tenga en el espacio una cara determinada de dicha espira, por ejemplo, aquella mirando a la cual vemos pasar la corriente en sentido contrario al de las agujas del reloj. Llamemos a esta cara positiva o norte y convengamos en trazar la normal al circuito de manera que forma un sistema dextrógiro con la dirección de la corriente. Mirando en sentido contrario al de la normal, veremos entonces la cara positiva (norte) de la espira.

Comparando el comportamiento del circuito de corriente con el de unas agujas magnéticas se puede descubrir que la normal al circuito que se halla en equilibrio estable tiene la misma dirección y sentido que la aguja magnética. Por lo tanto, al llamar dirección del campo magnético a la dirección que señala la normal a la espira de ensayo libre, no nos apartamos de la definición elemental.

Desviando el circuito de ensayo de la posición de equilibrio, descubrimos la acción que sobre él ejerce el momento de fuerzas (fig. 105). En este caso la desviación de la espira de la posición de equilibrio viene definida unívocamente por la desviación de la normal al circuito respecto de la dirección del campo —el seno del ángulo α y el momento de fuerzas rotacional N resultan ser proporcionales: $N \sim \text{sen } \alpha$. Para un mismo ángulo α , el momento rotacional es proporcional al producto del área de la espira S por la intensidad de la corriente I que pasa por ella. La disminución de la superficie un número cualquiera de veces ocasiona una variación del momento rotacional igual a la que se produciría si la intensidad de la corriente disminuyera el mismo número de veces.

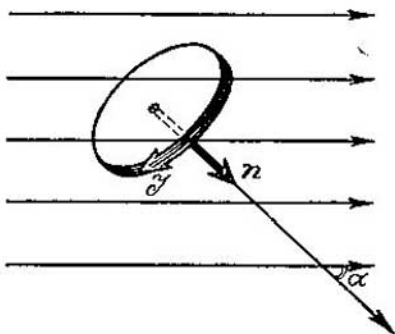


FIG. 105.

De lo dicho se deduce que el comportamiento magnético del circuito depende de la posición que tenga la normal a él y del valor del producto IS . Estos datos pueden unificarse en una magnitud vectorial que se llama *momento magnético de corriente circular o anular*. En electrotecnia, donde se utiliza el SI, suele llamarse momento magnético al vector $\mathbf{M} = IS \mathbf{n}$ (donde \mathbf{n} es la normal unitaria). En el sistema CGS, que es el que más se emplea por los físicos, en esta fórmula se introduce el coeficiente de proporcionalidad $1/c$, por lo que $\mathbf{M} = \frac{1}{c} IS \mathbf{n}$ (siendo c la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío). La introducción de un coeficiente numérico, y por añadidura dimensional, puede parecer una complicación innecesaria. Sin embargo, haciendo esto se simplifican otras fórmulas; el lector podrá apreciar esta simplificación mucho más adelante.

Los resultados de los experimentos hechos con la espira de ensayo pueden escribirse de la forma: $N = BM \text{ sen } \alpha$, donde B es un coeficiente de proporcionalidad. Para campos diferentes o para distintos puntos del espacio de un mismo campo, la magnitud B

tendrá valores diversos. Por el sentido de la fórmula que hemos escrito, B es igual al momento de rotación máximo que actúa sobre un circuito de ensayo unitario ($M=1$). Este coeficiente B , que caracteriza al campo magnético, se llama *inducción magnética*. La magnitud vectorial que tiene la dirección del campo magnético y que numéricamente es igual a B , recibe el nombre de *vector inducción magnética*.

Si el momento de rotación se describe por medio de un vector dirigido a lo largo del eje de giro (de acuerdo con las reglas del sistema dextrógiro), su fórmula puede escribirse en la forma llamada producto vectorial de los vectores, a saber: $\mathbf{N}=[\mathbf{MB}]$.

Si $N=0$, \mathbf{M} será paralelo a \mathbf{B} ; esto significa que todo circuito de corriente tiende a orientarse en el campo magnético de manera que su momento magnético coincida con la dirección del campo. Sobre un cuerpo actuará el momento magnético máximo en el caso en que dicho momento forme un ángulo de 90° con la dirección del campo. Para el circuito de ensayo esta circunstancia se da cuando el plano de la espira de alambre ocupa la posición longitudinal a las líneas de fuerza.

Después de haber determinado el campo magnético por medio de un circuito de corriente, cuyo momento magnético se calcula midiendo la intensidad de la corriente y el área, podemos aplicar la fórmula $\mathbf{N}=[\mathbf{MB}]$ para determinar los momentos magnéticos de aquellos sistemas en que no puede medirse la intensidad de la corriente. Es más, podemos extender el concepto de momento magnético a sistemas en los cuales la idea de corriente eléctrica anular pierde su sentido. Así, precisamente, obra el físico cuando habla del momento magnético del electrón o de una partícula nuclear. El momento de una aguja magnética también es un concepto imposible de desintegrar. Pero acerca del momento magnético de un imán permanente volveremos a tratar en la pág. 516, considerando ciertas influencias específicas del medio. Como quiera que sea, el momento magnético de un sistema que se halle en el vacío puede determinarse siempre por la fórmula dada del momento de rotación.

Para hacer girar, a partir de la posición de equilibrio, un cuerpo que posee momento magnético, hay que realizar trabajo. Si el giro es de un ángulo α pequeño, el trabajo de rotación se puede representar de la forma

$$N d\alpha = BM \sin \alpha d\alpha = -d(BM \cos \alpha).$$

La desviación del cuerpo de la posición de equilibrio va ligada a un incremento de energía potencial $U = -BM \cos \alpha$. Esta expresión es el producto escalar de dos vectores; por consiguiente, $U = -\mathbf{BM}$.

En la posición de equilibrio la energía potencial es mínima e igual a $-BM$, cuando el momento magnético se hace girar 90° , la energía potencial crece hasta cero y, finalmente, cuando el momento magnético se sitúa antiparalelamente al campo (posición de equilibrio inestable), la energía potencial es máxima e igual a $+BM$.

Ejemplos. 1. El momento magnético del núcleo del átomo de hidrógeno (magnetón nuclear) es igual a $0,505 \cdot 10^{-23}$ u. CGS. El momento magnético del electrón (magnetón de Bohr) es de $0,927 \cdot 10^{-20}$ u. CGS $= 9,27 \cdot 10^{-24}$ A·m².

2. Una corriente eléctrica de 1 A, pasando por una espira de 50 cm² de superficie, crea un momento magnético de $5 \cdot 10^{-3}$ A·m² $= 5$ u. CGS.

3. En el sistema absoluto de unidades, la inducción magnética se mide en gauss (GS); en el SI, B se mide en teslas (T) y tiene la dimensión V·s/m²; 1T $= 10^4$ Gs. Para el campo magnético de la Tierra $B=0,49$ Gs.

4. En el entrehierro de una máquina eléctrica potente, la inducción magnética alcanza varios millares de gauss. El académico soviético P. L. Kapitsa obtuvo campos magnéticos impulsivos de $B \sim 10^6$ Gs $= 10$ T.

§ 98. Fuerza de Ampere

La existencia del momento de rotación que actúa sobre el circuito de corriente es indudablemente el resultado de la acción de unas fuerzas sobre cada trozo del conductor por el cual pasan las cargas. La ley de la fuerza que actúa sobre un elemento de corriente se puede establecer empíricamente. Para esto hay que separar un trozo del conductor, por ejemplo, por medio de unos contactos de mercurio. Entonces este trozo podrá desplazarse por la acción de la fuerza. Si este desplazamiento se equilibra con la tensión de un muelle, la fuerza magnética puede medirse (fig. 106).

La ley de la fuerza que actúa sobre un elemento de corriente de pequeña longitud fue establecida primeramente por Ampere y tiene la forma

$$dF = \frac{I}{c} [d\mathbf{l}, \mathbf{B}],$$

es decir,

$$dF = \frac{I}{c} dl \cdot B \widehat{d\mathbf{l}, \mathbf{B}}.$$

La notación vectorial nos recuerda la conocida regla de la mano izquierda. La fuerza que actúa sobre un elemento de longitud de un conductor forma siempre un ángulo recto con el plano que pasa por la corriente y por el vector inducción magnética en este punto. Para conocer la dirección de la fuerza hay que ver por qué lado la rotación del vector $d\mathbf{l}$ hacia el vector \mathbf{B} se nos presenta en sentido contrario al de las agujas del reloj por el camino más corto. Este lado será el positivo en el sistema dextrógiro y el vector fuerza

«señalará» al observador. La fuerza tendrá su valor máximo cuando el elemento de corriente forme un ángulo recto con el vector del campo. La fuerza será nula para el elemento del conductor que se halle a lo largo de una línea de fuerza.

Antes hemos escrito las fórmulas en el sistema CGS. En el SI no figura el coeficiente $\frac{1}{c}$ y la fórmula de la fuerza de Ampere toma la forma $d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$.

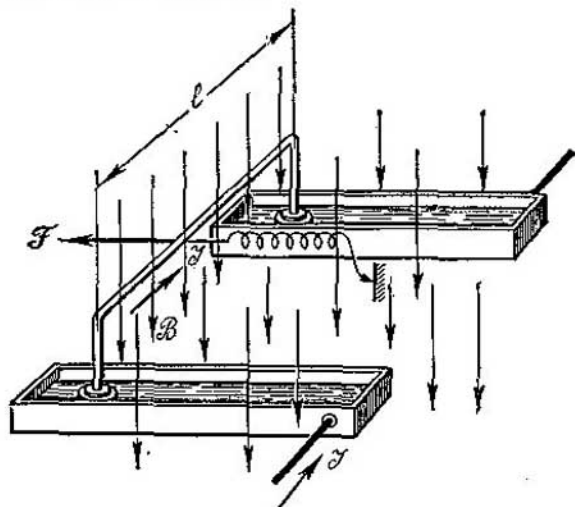


FIG. 106.

Para determinar la fuerza que actúa sobre un trozo de conductor de longitud finita hay que integrar la expresión de la fuerza:

$$F = \frac{1}{c} \int [d\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

Únicamente en el caso más simple de un trozo rectilíneo de conductor de longitud l , que se encuentre en un campo magnético uniforme B , puede aplicarse la ley de Ampere directamente, en la forma

$$F = \frac{1}{c} I l B \sin \widehat{l, B}.$$

Se nos figura que es completamente natural la relación entre la ley de Ampere y la expresión del momento de rotación que dedujimos en el párrafo anterior. Consideraremos solamente el simple caso de un cuadro rectangular situado en un campo magnético

uniforme paralelamente a las líneas de fuerza (fig. 107). Dos lados del cuadro son perpendiculares a las líneas de fuerza y los otros dos son longitudinales a ellas. Por consiguiente, todas las fuerzas que actúan sobre los elementos del alambre conductor se pueden reducir a dos, como muestra la fig. 107. Estas fuerzas son iguales entre sí y, por la ley de Ampere, pueden escribirse de la forma $F = IIB$. La misma figura muestra que las fuerzas de Ampere ocasionan el momento de fuerzas $N = IIBd$. Pero $ld = S$ es el área del cuadro, por lo tanto, $N = ISB = MB$, lo que coincide con la fórmula del momento de fuerzas deducida en el párrafo precedente. Damos al lector la posibilidad de hacer más general esta demostración.

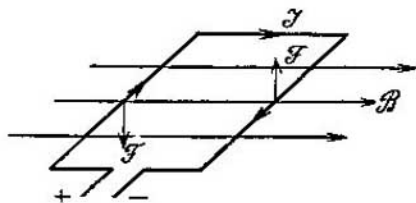


FIG. 107.

Ejemplo. Sobre un conductor de 3 m de longitud, por el que pasa una corriente de 50 A y que se encuentra en un campo de 3000 Gs = 0,3 T, actúa una fuerza $F = BI l = 0,3 \cdot 50 \cdot 3 = 45$ N. Si el diámetro del rotor en que está dicho conductor es ~ 1 m, sobre la espira actuará un momento de rotación ~ 45 N·m. Esta cantidad corresponde a los parámetros de una máquina eléctrica grande. En un instrumento de medición eléctrico, sobre un hilo conductor de 2 cm de longitud, que se halla en un campo de 100 Gs, con una corriente de 0,01 A, actúa una fuerza $F = 2 \cdot 10^{-5}$ N = 2 din. Si el diámetro del cuadro es de ~ 1 cm, sobre la espira actuará un momento de rotación $\sim 2 \cdot 10^{-7}$ N·m.

§ 99. Fuerza que actúa sobre una carga en movimiento

Ahora podemos dar un paso adelante e intentar el estudio de las fuerzas magnéticas que actúan sobre la corriente como fuerzas aplicadas a partículas elementales de electricidad.

La corriente eléctrica no es más que un flujo de partículas eléctricas. Si la carga de cada partícula es e , su velocidad dirigida, v , y la concentración de partículas (es decir, su número por unidad de volumen), n , la expresión de la intensidad de la corriente puede representarse de la forma $I = ne \cdot vS$. En efecto, a través de la sección S del conductor pasarán en 1 s todas las partículas que ocupaban el volumen vS , o sea, pasará una cantidad de electricidad $ne \cdot vS$ (fig. 108). Sustituyendo esta expresión en la ley de Ampere, obtenemos

$$dF = \frac{e}{c} [\mathbf{vB}] nS dl.$$

Pero $nS dl$ es el número de partículas que hay en el volumen considerado del conductor; por lo tanto, sobre una partícula actuará

la fuerza

$$f = \frac{e}{c} [\mathbf{vB}].$$

Esta fuerza suele llamarse *fuerza de Lorentz*, en honor del eminente físico holandés H. Lorentz, que contribuyó notablemente al desarrollo de la teoría de los electrones.

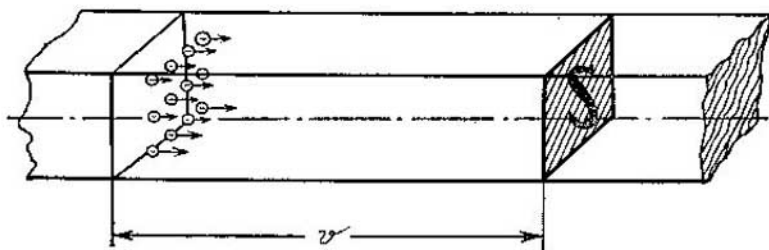


FIG. 108.

Esta expresión de la fuerza (que sólo escribiremos en el sistema cegesimal, con el coeficiente $\frac{1}{c}$) permite responder inmediatamente a la cuestión extremadamente interesante del carácter del movimiento de las partículas eléctricas (electrón, protón, etc.) en un campo magnético. La fuerza que actúa sobre una carga en movimiento está dirigida perpendicularmente a las líneas de fuerza y al vector velocidad de la partícula. Si la partícula se mueve a lo largo de las líneas de fuerza, sobre ella no actúa la fuerza. Por el contrario, la fuerza tiene su valor máximo cuando el movimiento tiene lugar en un plano perpendicular a las líneas de fuerza. En este último caso $f = \frac{1}{c} cvB$.

Si el campo es uniforme, la partícula eléctrica que se mueva perpendicularmente a él describirá circunferencias, puesto que el movimiento debido a la acción de una fuerza constante cuya dirección forme con él un ángulo recto, según la ley fundamental de la mecánica, no puede ser otro. Del movimiento de las partículas en el campo magnético volveremos a tratar en la pág. 475.

Ejemplo. En un tubo catódico, los electrones acelerados por una diferencia de potencial de 70 V adquieren la velocidad de $5 \cdot 10^{-8}$ cm/s. Al penetrar en un campo magnético de 500 Gs, perpendicularmente a él, el electrón experimenta una fuerza de Lorentz desviadora $f = \frac{1}{c} evB = 4 \cdot 10^{-11}$ din. Sometido a la acción de esta fuerza, el electrón comienza a moverse siguiendo una órbita circular cuyo radio R es tal, que $f = mv^2/R$, de donde $R = 5,6$ cm.

§ 100. Campo magnético creado por los imanes permanentes

Todo imán permanente tiene/dos polos *): del polo norte salen las líneas, y entran por el polo sur. Construyamos mentalmente una superficie que abarque al polo norte de un imán. Podremos hallar el número total de líneas que penetran esta superficie. A este número, por analogía con la correspondiente magnitud eléctrica, le daremos el nombre de *flujo magnético* y lo designaremos por Φ . El flujo a través de un área elemental perpendicular a las líneas de fuerza será $d\Phi = B dS_{\perp}$; y a través de un área cualquiera $d\Phi = B dS \cos \alpha$, siendo α el ángulo que forma con las líneas de fuerza la normal al área; a través de una superficie $S\Phi = \int B \cos \alpha dS$ y, finalmente, a través de una superficie cerrada $\Phi = \oint B \cos \alpha dS$.

El flujo Φ_N , que sale del polo norte del imán y entra por el sur, es la característica fundamental del imán. Cuanto más fuerza tiene el imán, mayor es Φ_N . Esto justifica hasta cierto punto la denominación de «cantidad de magnetismo» (que sólo tiene un significado histórico) dada a una magnitud proporcional al flujo y que precisamente es igual a $m = \frac{1}{4\pi} \Phi$. A veces se le da a m el nombre (aún menos adecuado) de masa magnética. En electrotecnia se utiliza la masa magnética $m = \Phi$.

Si los polos del imán tienen pequeñas dimensiones (aguja magnética), las líneas de fuerza divergen radialmente en las proximidades de ellos.

Valiéndonos de la ley de Gauss — Ostrogradski

$$\oint D \cos \alpha dS = 4\pi q$$

sentamos las bases de la fórmula de la inducción eléctrica de una carga aislada, $D = q/r^2$. Es evidente que un polo magnético «aislado» debe dar también una inducción magnética que satisfaga a una igualdad análoga:

$$B = \frac{m}{r^2}, \text{ ya que } \oint B \cos \alpha dS = 4\pi m \text{ (CGS),}$$

o bien

$$B = \frac{m}{4\pi r^2}, \text{ puesto que } \oint B \cos \alpha dS = m \text{ (SI).}$$

Está claro que no existen polos magnéticos «aislados». La fórmula que hemos escrito sólo tiene sentido en el caso de un imán

*1) También es posible la creación de imanes con cualquier número de pares de polos.

largo de polo puntual y no muy lejos de dicho polo. Este modo de tratar el polo magnético de un imán permanente está plenamente justificado, como puede verse claramente al plantear la expresión del campo de un imán rectilíneo, considerado como dipolo magnético con dos polos m situados a la distancia l uno del otro. En la fig. 109 se muestra el campo de un imán rectilíneo y un campo ideal calculado por la fórmula

$$B = \frac{m}{r_1^2} \frac{r_1}{r_1} - \frac{m}{r_2^2} \frac{r_2}{r_2},$$

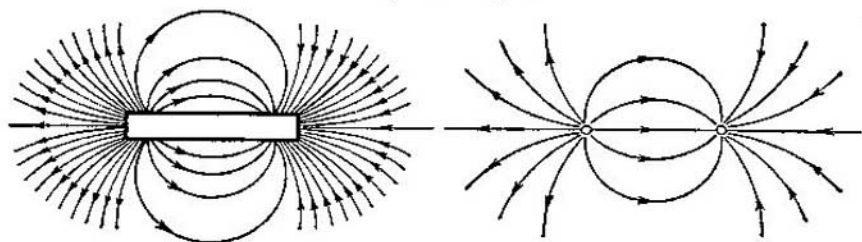


FIG. 109.

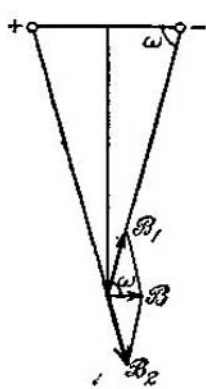


FIG. 110.

donde r_1 y r_2 son las distancias desde los polos hasta el punto considerado. La coincidencia de estas figuras es enteramente satisfactoria.

Se obtienen buenos resultados cuando se calculan los campos a grandes distancias del imán. En efecto, si las distancias r_1 y r_2 son grandes comparadas con la longitud l del imán (brazo del dipolo magnético), la consideración de los polos como puntos está totalmente justificada. Estos cálculos no difieren en nada de los correspondientes, relativos a las interacciones eléctricas. Comparemos, por ejemplo, el valor de la inducción magnética creada por un imán rectilíneo, a una distancia grande de él, a lo largo de su eje y perpendicularmente a éste. En el primer caso tendremos

$$B = \frac{m}{r^2} - \frac{m}{(r+l)^2} = \frac{2ml}{r^3} = \frac{2M}{r^3},$$

donde $M=ml$ se llama momento magnético del imán permanente. En el segundo caso (fig. 110)

$$B = 2 \frac{m}{r^2} \cos \omega = \frac{M}{r^3}.$$

Así, pues, el campo a lo largo del eje es el doble de intenso. En el

sistema SI las dos últimas fórmulas tendrán respectivamente las formas

$$B = \frac{M}{2\pi r^3} \text{ y } B = \frac{M}{4\pi r^3}.$$

Ejemplo. Calculemos la inducción magnética que crea un imán rectilíneo de longitud $l=10$ cm, a la distancia $r=1$ m del imán, a lo largo de su eje. El área de la sección transversal del imán $S=3$ cm², la inducción en el imán es de 500 Gs.

El flujo magnético en el imán (que es el mismo que sale del polo) $\Phi=500 \times 3=1500$ maxwellios (Mx). En este caso en el polo del imán se halla concentrada una «masa magnética» $m=\frac{1500}{4\pi}=120$ u. CGS. El momento magnético del imán

$$M = ml = 120 \cdot 10 = 1200 \text{ u. CGS (erg/gs).}$$

La inducción magnética que buscamos será

$$B = \frac{2M}{r^3} = \frac{2 \cdot 1200}{(100)^3} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ Gs.}$$

§ 101. Intensidad del campo magnético

Consideraremos la interacción de un polo magnético aislado y de un elemento de corriente (fig. 111). El polo magnético crea un campo B en el punto en que se encuentra la corriente eléctrica. Por consiguiente, por la ley de Ampere, sobre el elemento de corriente actuará la fuerza

$$dF = \frac{1}{c} I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

La inducción magnética puede sustituirse por su expresión para un polo puntual. Teniendo en cuenta que el campo tiene dirección radial, para la fuerza de interacción obtenemos las expresiones siguientes:

$$dF = \frac{m}{cr^2} I \left[d\mathbf{l}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right],$$

o bien

$$dF = \frac{mI}{cr^2} dl \cdot \widehat{\text{sen}} d\mathbf{l}, \mathbf{r}.$$

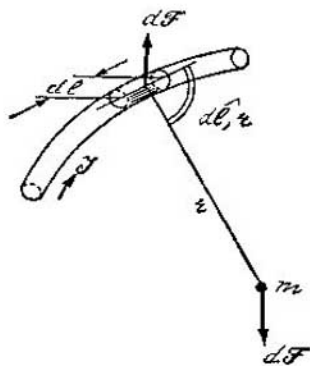


FIG. 111.

Resulta completamente natural admitir que la fuerza con que el elemento de corriente actúa sobre el polo magnético debe estar representada por esta misma fórmula, invirtiendo la dirección de la fuerza. Esta suposición no puede comprobarse directamente en la práctica, porque no podemos aislar un polo ni tomar separadamente

un elemento de corriente continua. Sin embargo podemos comprobar la validez de dicho postulado integrando las fuerzas de interacción para casos experimentales. Y, en efecto, la teoría coincide con la experiencia.

Por lo tanto, la fuerza con que actúa un elemento de corriente sobre un polo magnético puede representarse de la forma

$$d\mathbf{F} = \frac{m}{cr^2} I \left[d\mathbf{l}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right]$$

o en el SI, sin coeficiente $1/c$ y sustituyendo m por $m/4\pi$,

$$d\mathbf{F} = \frac{m}{4\pi r^2} I \left[d\mathbf{l}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right].$$

En esta fórmula no ponemos el signo menos porque suponemos que el radio vector ha sido invertido. Como dirección de \mathbf{r} se toma siempre la que va desde la fuente del campo hasta el punto en observación. Por esto, cuando nos referíamos a la fuerza que actúa sobre la corriente, \mathbf{r} se consideraba dirigido del polo al elemento de corriente. Pero ahora, cuando se trata de la fuerza que por parte de la corriente actúa sobre el polo, el radio vector \mathbf{r} se supone dirigido del elemento de corriente al polo.

La fuerza que actúa sobre un polo magnético único recibe el nombre de *intensidad del campo magnético*:

$$d\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{F}}{m}.$$

Con nuestros razonamientos hemos demostrado que la intensidad del campo magnético que crea un elemento de corriente viene expresada por la fórmula

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{cr^2} \left[d\mathbf{l}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right].$$

En el SI, la fórmula que define la intensidad del campo magnético creado por la corriente tendrá la forma

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi r^2} \left[d\mathbf{l}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right].$$

Existen, pues, dos características del campo magnético: el vector inducción, que se mide por la acción del campo magnético sobre las corrientes, y el vector intensidad, que puede obtenerse experimentalmente midiendo la acción del campo sobre el imán.

Desde el punto de vista práctico, lo más cómodo es reducir la medición de la intensidad a la medida del momento de rotación que actúa sobre una aguja magnética (fig. 112). Una aguja de este tipo, colocada en un campo uniforme, estará sometida a la acción de un par de fuerzas; la magnitud de la fuerza será igual a mH y

su brazo, igual a $l \sin \alpha$. De aquí obtenemos para el momento de rotación la expresión

$$N = MN \sin \alpha$$

o, en forma vectorial, $\mathbf{N} = [\mathbf{M}\mathbf{H}]$, donde $\mathbf{M} = m\mathbf{l}$ es el momento magnético de la aguja, lo que recuerda mucho la fórmula del momento de fuerzas que actúan sobre un circuito de corriente.

El problema acerca de la relación entre la intensidad del campo magnético y la inducción magnética debe resolverse experimentalmente. Resulta que en todos los casos, a excepción de los cuerpos anisótropos, los vectores intensidad e inducción son paralelos entre sí. Esto significa que la aguja magnética y el eje del circuito de ensayo se situarán siempre paralelamente. Además, en todos los casos, excepto en las sustancias ferromagnéticas, entre \mathbf{H} y \mathbf{B} existe una dependencia lineal simple: $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$, donde μ_0 es una constante universal llamada *permeabilidad magnética del vacío*, y μ es un coeficiente característico del medio que se llama *permeabilidad magnética relativa del medio*.

En el sistema CGS se supone $\mu_0 = 1$. Esto hace que la inducción y la intensidad magnéticas tengan la misma dimensión. No obstante, esta igualdad dimensional no se consigue graciosamente, sino a costa de introducir el coeficiente dimensional $1/c$ en la ley de Ampere. En el SI, la permeabilidad magnética del vacío es $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ J}/(\text{A}^2 \cdot \text{m})$.

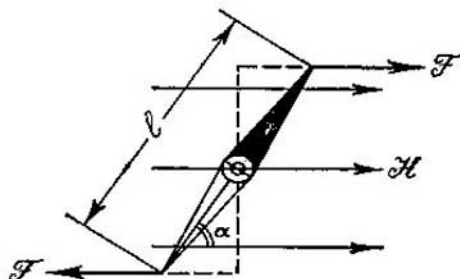


FIG. 112.

§ 102. Interacciones de las corrientes con los imanes

Las leyes estudiadas en los párrafos anteriores permiten, en principio, calcular las interacciones de los sistemas magnéticos cualesquiera que sean. Disponemos de las fórmulas de las fuerzas y de los pares o momentos de fuerzas que actúan sobre los aparatos por parte del campo magnético, cualquiera que sea su origen:

Sobre la corriente		Sobre el imán
CGS	SI	
$F = \frac{I}{c} [dl, B]$	$F = I [dl, B]$	$F = mH$
$N = [MB]$	$N = [MB]$	$N = [MH]$
donde $M = \frac{I}{c} IS$	donde $M = IS$	donde $M = ml$

Fórmulas que relacionan los campos con sus fuentes

Campos de corrientes		Campos de imanes	
CGS	SI	CGS	SI
$dH = \frac{I}{cr^2} \left[dl, \frac{r}{r} \right]$	$dH = \frac{I}{4\pi r^2} \left[dl, \frac{r}{r} \right]$	$B = \frac{m}{r^2}$	$B = \frac{m}{4\pi r^2}$
$B = \mu H$	$B = \mu_0 \mu H$	$B = \frac{2M}{r_3}$	$B = \frac{M}{2\pi r^3}$

Sustituyendo cualquiera de las fórmulas del segundo cuadro en cualquiera de las del primero y teniendo en cuenta que $B = \mu_0 \mu H$, obtenemos las fórmulas de las interacciones magnéticas, electromagnéticas, magnetoeléctricas y electrodinámicas. Cada tipo de interacción lo aclararemos con un ejemplo.

Interacción magnética, es decir, acción de un imán sobre otro. Dos polos situados a la distancia r entre sí interaccionan de acuerdo con la ley de Coulomb, o sea,

$$F = \frac{m_1 m_2}{\mu r^2} \text{ (CGS)}, \quad F = \frac{m_1 m_2}{4\pi \mu_0 r^2} \text{ (SI)}.$$

La fuerza de interacción es inversamente proporcional a la permeabilidad magnética.

Acción electromagnética, es decir, acción de una corriente sobre un imán. La aguja magnética experimenta un momento de rotación por parte del elemento de corriente. Para simplificar admitimos que $M \perp H$, o sea, la aguja magnética está situada transversalmente a las líneas de fuerza.

$$dN = \frac{MI}{cr^2} dl \sin \widehat{dl, r} \text{ (CGS)}, \quad dN = \frac{MI}{4\pi r^2} dl \sin \widehat{dl, r} \text{ (SI)}.$$

Esta interacción no depende de la permeabilidad magnética, es decir, de las propiedades del medio.

Acción magnetoeléctrica, es decir, acción de un imán sobre una corriente. El circuito de corriente se encuentra en la prolongación del eje de un imán rectilíneo y a una distancia r de él (fig. 113). El circuito experimenta un momento de rotación

$$N = M_{\text{cor}} B \operatorname{sen} \alpha = \frac{M_{\text{cor}} M_{\text{magn}}}{r^3} \operatorname{sen} \alpha \text{ (CGS),}$$

ó

$$N = \frac{M_{\text{cor}} M_{\text{magn}}}{2\pi r^3} \operatorname{sen} \alpha \text{ (SI).}$$

La interacción no depende de la permeabilidad magnética.

Ejemplo. Un circuito (espira) de área $S=20 \text{ cm}^2$, por el que pasa una corriente $I=10 \text{ A}$, interacciona a la distancia de 100 cm con un imán rectilíneo cuyo momento magnético $M_{\text{magn}}=1000 \text{ u. CGS}=1 \text{ A}\cdot\text{m}$. Sobre el circuito actuará el momento de rotación

$$N = \frac{2M_{\text{cor}}M_{\text{magn}}}{r^3}.$$

$$M_{\text{cor}} = \frac{1}{3} \cdot 10^{10} \cdot 10 \cdot 20 = \frac{2}{3} \cdot 10^{-8} \text{ u. CGS,}$$

$$N = 4 \cdot 10^{-5} \text{ din}\cdot\text{cm} = 0,04 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Acción electrodinámica, es decir, acción de una corriente sobre otra. Dos corrientes paralelas se atraen con una fuerza

$$dF = \frac{I_1}{c} dl_1 B,$$

o sea,

$$dF = \mu \frac{I_1 I_2 dl_1 dl_2}{c^2 r^2} \text{ (CGS), } \text{ ó } dF = \mu_0 \mu \frac{I_1 I_2 dl_1 dl_2}{4\pi r^2} \text{ (SI).}$$

Esta interacción es directamente proporcional a la permeabilidad magnética.

Igualmente se pueden plantear las fórmulas para otras interacciones cualesquiera de sistemas magnéticos.

Ejemplo. La interacción electromagnética debe tenerse muy en cuenta cuando se tienden barras conductoras de corriente. En el caso de un corto circuito, tanto las barras como los aisladores que las sostienen deben tener suficiente resistencia para aguantar grandes cargas electrodinámicas. Supongamos que por dos barras paralelas, situadas entre sí a la distancia $d=20 \text{ cm}$, pasan las corrientes $I_1=I_2=3 \cdot 10^4 \text{ A}$. Sobre la unidad de longitud de una de las barras actúa la fuerza $F=B I = \mu_0 H I$, donde $H=I_1/(2\pi d)$ es la intensidad del campo magnético que crea

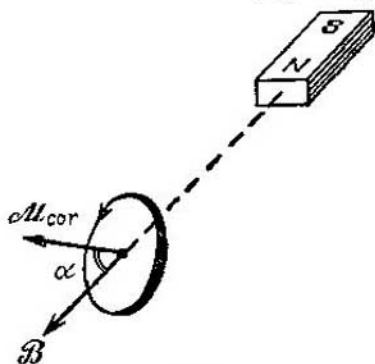


FIG. 113.

la corriente rectilínea que pasa por la otra barra (véase la pág. 294). Tenemos

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 0,2} = 900 \text{ N},$$

es decir, sobre cada metro de barra actúa una fuerza de ~ 90 kgf. Este mismo resultado hubiera podido obtenerse integrando la última fórmula de dI' .

§ 103. Equivalencia de las corrientes y los imanes

Ya hemos advertido la semejanza que existe entre las expresiones de momentos de rotación que actúan sobre una aguja magnética y sobre una espira con corriente. En efecto, el comportamiento de estos dos sistemas en un campo exterior es extraordinariamente parecido. Si cada uno de los sistemas se caracteriza por la aguja indicadora de su momento magnético, la semejanza será aún más completa. Cada sistema tiende a colocarse en el campo magnético de manera que su momento coincida con las líneas de fuerza de aquél. Si el momento magnético está desviado de su posición de equilibrio estable, sobre el sistema actúa un momento de rotación $\mathbf{N} = \{\mathbf{MH}\}$, si se trata de una aguja magnética, y $\mathbf{N} = \{\mathbf{MB}\}$, si de una espira de corriente. Respectivamente, las energías potenciales de estos dos sistemas vienen representadas por las fórmulas $U = -\mathbf{MH}$ y $U = -\mathbf{MB}$.

Como $B = \mu_0 \mu H$, se hace evidente la diferencia entre estas fórmulas: la una se transforma en la otra introduciendo en ellas la permeabilidad magnética. De aquí se deduce que, en cuanto se refiere a la acción mecánica, una aguja magnética de momento M equivale a una espira con corriente de momento $M_{\text{cor}} = M/(\mu_0 \mu)$.

Pero la semejanza de estos dos sistemas no se reduce a lo dicho. Ahora demostraremos que la aguja magnética y la espira con corriente poseen campos propios que coinciden salvo en un factor constante. Esta semejanza tiene lugar a distancias considerablemente mayores que la dimensión del sistema. Demostraremos esto para un punto del espacio que se encuentre en la línea del momento magnético y a la distancia r del centro del sistema. El campo del imán en este punto lo hemos calculado ya y es igual a $\mathbf{B} = 2\mathbf{M}/r^3$. Nos queda por hallar el campo de la corriente anular sobre su eje.

En la fig. 114 se han construido los vectores intensidad creados por los dos elementos de longitud de la circunferencia que corta el plano del dibujo. Los vectores intensidad están dirigidos perpendicularmente al correspondiente elemento de corriente y al radio vector, es decir, se encuentran en el plano del dibujo. Hacia qué lado señala precisamente el vector intensidad, es una cosa que debe determinarse por medio de la regla del producto vectorial o valiéndose de la regla del sacacorchos (que en general es lo mismo).

El campo elemental, en el caso en que consideramos, es igual a $dH = \frac{Idl}{cr^2}$, ya que el elemento de corriente y el radio vector forman un ángulo recto. Compongamos los dos vectores representados

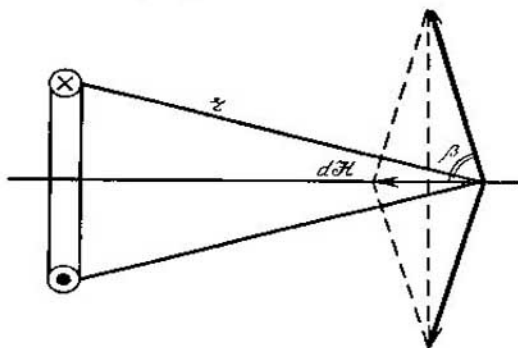


FIG. 114.

en la figura. Para el campo creado por dos elementos «opuestos» obtenemos

$$dH = \frac{2I dl}{cr^2} \cos \beta;$$

el sentido de las designaciones se deduce claramente del dibujo. Esta misma magnitud de campo dará cualquier par de elementos «opuestos». Por esto, el campo total lo obtenemos sustituyendo en la última expresión la longitud del elemento dl por la longitud de la semicircunferencia, πa . La intensidad del campo de la corriente anular, en su eje, a la distancia r de la corriente *) viene representada por la fórmula

$$H = \frac{2\pi a^2 I}{cr^3}.$$

Pero $\frac{1}{c} IS$, donde $S = \pi a^2$, es el momento de la corriente anular.

Por consiguiente, $H = \frac{2M}{r^3}$, y la inducción magnética $B = \mu \mu_0 \frac{2M}{r^3}$.

Con esto queda demostrado que un dipolo magnético y una espira con corriente son equivalentes no sólo en lo que respecta a las fuerzas que actúan sobre ellos, sino también en lo que se refiere a los campos que ellos crean. La equivalencia también aquí tiene el mismo carácter. Para sustituir una aguja magnética de momento

*) Como nos interesan las distancias grandes, la diferencia entre r y la distancia hasta el centro del sistema es despreciable por su pequeñez.

M hay que tomar una espira con corriente cuyo momento sea $M_{\text{cor}} = M/(\mu\mu_0)$.

En el vacío y para el sistema CGS $\mu\mu_0 = 1$ y el principio de la equivalencia es todavía más simple: una aguja magnética de momento M es equivalente a una espira con corriente que tenga el mismo momento magnético.

Ejemplos. 1. Volvamos al ejemplo de la pág. 285 y calculemos la inducción magnética del mismo imán en el SI:

$$B = 0,05 \text{ T}, \quad S = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \quad \Phi = 15 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{s},$$

$$m = 15 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{s}, \quad l = 0,1 \text{ m}, \quad M = ml = 15 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1 = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{m},$$

$$B = \frac{M}{2\pi r^3} = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ T},$$

en total acuerdo con el resultado de la pág. 285.

2 Una espira con corriente $I = 5 \text{ A}$, cuya superficie $S = 2 \text{ cm}^2$, crea a la distancia $r = 50 \text{ cm}$, a lo largo del eje perpendicular a su plano, un campo magnético de intensidad $H = 2 M/r^3$.

$$M = \frac{1}{c} IS = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 2 = 1 \text{ erg/Gs},$$

$$H = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ oerstedios (Oe)}$$

§ 104. Carácter rotacional del campo magnético

El estudio de la marcha de las líneas magnéticas demuestra la diferencia esencial que existe entre el campo eléctrico y el magnético. Las líneas eléctricas tienen principio y fin, en un campo eléctrico continuo no existen líneas cerradas. Por el contrario, la experiencia demuestra que las líneas de fuerza de un campo magnético (es decir, las líneas vectoriales de inducción magnética) son siempre cerradas y que no existen líneas con principio y fin.

Por causas que consideramos anteriormente, las fuerzas y los campos de fuerzas en que el trabajo siguiendo un camino cerrado es nulo, se llaman potenciales. Los campos vectoriales caracterizados por líneas de fuerza cerradas reciben el nombre de rotacionales. El campo magnético es rotacional.

Si en un campo magnético se traza una superficie cerrada, el flujo magnético $\Phi = \oint B \cos \alpha \, dS$ a través de esta superficie será siempre nulo. En otros términos, el número de líneas que entran en esta superficie será igual al de las líneas que salen de ella. La ecuación $\oint B \cos \alpha \, dS = 0$ es la expresión matemática del hecho de que las líneas magnéticas no tengan principio ni fin.

La ligazón de las líneas magnéticas con las corrientes que crean el campo consiste en que las líneas magnéticas siempre rodean a

las corrientes. Por esto las integrales tomadas a lo largo de una línea de fuerza de inducción o de intensidad $\oint B \, dl$ o $\oint H \, dl$, deberán ser distintas de cero. Resulta más conveniente considerar la segunda integral, ya que su magnitud debe ser proporcional a la intensidad de la corriente eléctrica rodeada por la línea de fuerza; porque, según la fórmula fundamental de la intensidad, entre H y la intensidad de la corriente existe una proporción directa.

Por analogía con la electrostática, $\int H \, dl$ se llama *tensión magnética*. Si la integral se toma a lo largo de la línea de fuerza,

$$\int H \, dl = \int H \, dl.$$

La tensión magnética a lo largo de una línea cerrada deberá ser proporcional a la corriente en torno a la cual dicha línea se envuelve:

$$\oint H \, dl = kI,$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad.

La línea de fuerza puede abarcar no a una corriente, sino a varias. Para el campo que se crea tiene importancia la suma algebraica de las corrientes, y la ecuación toma entonces la forma

$$\oint H \, dl = k \sum I.$$

Un análisis teórico más profundo, en el que aquí no podemos detenernos, demuestra que la ecuación escrita sufre dos generalizaciones más. En primer lugar, la tensión magnética se puede tomar no sólo a lo largo de una línea de fuerza, sino también a lo largo de un contorno arbitrario; y en segundo, el coeficiente de proporcionalidad de la ecuación es constante, depende únicamente de las propiedades del medio y es igual para todas las condiciones geométricas. De este modo, la tensión magnética tomada para cualquier línea curva cerrada será la misma siempre que dicha curva abarque corrientes de una intensidad determinada. Tanto la forma de la curva como sus dimensiones son indiferentes; la curva puede rodear a una corriente o a una decena de ellas; estas corrientes pueden ser rectilíneas, curvilíneas. . . , nada de esto tiene importancia, la tensión magnética será la misma siempre que la suma algebraica de las corrientes que atraviesan la curva tenga el mismo valor.

Como el coeficiente de proporcionalidad en la fórmula de la tensión magnética es una magnitud universal, podremos hallar k si conseguimos calcular la tensión magnética de cualquier sistema cuyo campo conozcamos.

Ya conocemos la expresión general de la intensidad del campo magnético de una corriente elemental. El cálculo de la tensión

magnética mediante la fórmula de la intensidad

$$dH = \frac{I}{cr^2} \left[dl, \frac{r}{r} \right]$$

ofrece dificultades matemáticas. Pero además, conocemos la fórmula de la intensidad del campo magnético en el eje de una corriente circular, $H = 2M/r^3$. El cálculo matemático de la tensión magnética a lo largo del eje de una corriente circular no es difícil. El hecho de que la integración se haga a lo largo de una línea recta, cuando lo que nos interesa es la tensión magnética a lo largo de una curva cerrada, no nos debe desconcertar; puesto que una recta que va desde el infinito negativo hasta el infinito positivo es una curva cerrada —se cierra en el infinito—. La expresión de la tensión magnética $\int H dl$ tomada a lo largo de esta curva cerrada, es decir, a lo largo del eje de una corriente circular desde el infinito negativo hasta el infinito positivo, puede escribirse de la forma

$$2M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{(\sqrt{l^2 - a^2})^3},$$

donde a es el radio y l la distancia medida por el eje del contorno. Esta integral es fácil de resolver si se pasa a una nueva variable β , de acuerdo con la fórmula $l/a = \text{ctg } \beta$, y resulta ser igual a $2/a^2$. Haciendo la sustitución $M = (1/c)I \cdot \pi a^2$ e igualando el valor de la tensión magnética a la magnitud kI , obtenemos

$$k = \frac{4\pi}{c} \text{ (CGS),}$$

$$k = 1 \text{ (SI).}$$

La ley de la tensión magnética tiene la forma

$$\oint H dl = \frac{4\pi}{c} \sum I \text{ ó } \oint H dl = \sum I.$$

La ley de la tensión magnética puede ser muy conveniente para calcular los campos magnéticos de una serie de sistemas. En su aplicación deben ayudarnos las razones de simetría, y en este sentido los razonamientos a que vamos a pasar ahora son muy semejantes a los correspondientes problemas que resolvimos en electrostática valiéndonos de la ley de Gauss — Ostrogradski.

Consideremos ante todo una corriente rectilínea infinita. Por razones de simetría es evidente que la línea de fuerza sólo puede tener la forma de una circunferencia cuyo centro coincide con el eje del conductor. También es indudable que en todos los puntos de la circunferencia el valor numérico de la intensidad será el mismo. Aplicando a esta línea de fuerza la ley de la tensión magnética,

obtenemos: $H \oint dl = \frac{4\pi}{c} I$. En este caso $\oint dl$ no es más que la longitud de la línea de fuerza. Si se consideran los puntos situados a la distancia r del eje del conductor, $\oint dl = 2\pi r$ y, por lo tanto, para el campo magnético de una corriente rectilínea infinita, en el espacio exterior al conductor, obtenemos:

$$H = \frac{2I}{cr} \quad (\text{CGS}),$$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (\text{SI}).$$

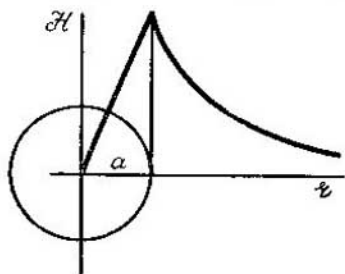


FIG. 115.

Hallemos ahora la intensidad del campo magnético dentro del conductor. Llamemos a al radio del conductor y supongamos que la corriente está distribuida uniformemente a lo largo de su sección. Dentro del conductor las líneas de fuerza también deberán tener forma de circunferencias. Consideremos una de estas líneas de radio r . Por ella pasará una fracción de corriente $\frac{r^2}{a^2} I$ y, por consiguiente, la ley de la tensión magnética da:

$$H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \frac{r^2}{a^2} I, \text{ es decir, } H = \frac{2}{c} \frac{r}{a^2} I,$$

o en el SI

$$H = r \frac{I}{2\pi a^2}.$$

Vemos que la intensidad del campo magnético en el eje del conductor es nula, después va aumentando hasta alcanzar su valor máximo en la superficie del conductor y luego disminuye en proporción inversa a la distancia (fig. 115).

Si el campo se determina en un punto para el cual la distancia r es mucho menor que su distancia hasta el extremo del conductor, la fórmula $H = I/2\pi r$ puede aplicarse para un conductor de dimensiones finitas.

Ejemplo. Calculemos la intensidad del campo magnético a 5 cm de distancia del eje de una corriente rectilínea de 20 A de intensidad.

En el sistema CGS $I = 20 \cdot 3 \cdot 10^9 = 6 \cdot 10^{10}$ u. CGS.

$$H = \frac{2I}{cr} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{10} \cdot 5} = 0,8 \text{ oe.}$$

En el sistema SI $I = 20$ A, $r = 0,05$ m,

$$H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{20}{2\pi \cdot 0,05} = 64 \text{ A/m}$$

Otro ejemplo importante de aplicación de la ley de la tensión magnética es el cálculo del campo de un solenoide.

Supongamos que sobre una circunferencia de longitud L están arrolladas uniformemente las espiras de un solenoide. El campo dentro del solenoide anular debe ser uniforme y todas las líneas de fuerza deben ser circunferencias concéntricas a L . En la teoría del campo magnético este sistema desempeña el mismo papel que el condensador plano infinito en la teoría del campo eléctrico. Cada línea de fuerza envuelve a todas las n espiras, por lo que la tensión magnética tomada a lo largo de una línea de fuerza de longitud L será igual a

$$\oint H \, dl = \frac{4\pi}{c} nI.$$

Y como $\oint H \, dl = HL$, tenemos que

$$H = \frac{4\pi}{c} \frac{n}{L} I \text{ (CGS),}$$

$$H = \frac{n}{L} I \text{ (SI).}$$

La intensidad del campo magnético de una bobina se determina por sus «amperios-vueltas», es decir, por el producto de la intensidad de la corriente por el número de espiras por unidad de longitud del solenoide. La última fórmula es una de las justificaciones del sistema electrotécnico de escritura de la ecuación del campo. El solenoide es uno de los elementos fundamentales de los dispositivos electrotécnicos, por lo que la simplificación de la fórmula para el cálculo de la intensidad de su campo magnético es muy útil en la práctica.

La fórmula $H = \frac{n}{L} I$ puede aplicarse también para un solenoide abierto, pero únicamente en aquellos puntos internos que se encuentran suficientemente alejados de los extremos.

Ejemplo. La intensidad del campo magnético en el centro de un solenoide estrecho y largo ($L=15$ cm, $n=1500$ vueltas, $I=0,1$ A) será

$$H = 1000 \text{ A/m.}$$

En el sistema CGS este mismo cálculo toma la forma

$$H = \frac{4\pi}{c} \frac{n}{L} I = \frac{4\pi}{3 \cdot 10^{10}} \cdot \frac{1500}{15} (0,1 \cdot 3 \cdot 10^9) = 12,50 \text{ Oe,}$$

$$1 \text{ A/m} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Oe, } 1 \text{ Oe} \approx 80 \text{ A/m.}$$

§ 105. Ley de la inducción electromagnética
y fuerza de Lorentz

Como sabemos, el fenómeno de la inducción electromagnética, descubierto por el gran físico inglés Faraday, consiste en que en un conductor cerrado aparece corriente eléctrica en cuanto varía el valor del flujo magnético que pasa por el conductor cerrado. En este caso la f. e. m. de inducción resulta ser proporcional a la velocidad con que varía el flujo magnético, es decir, a la derivada con respecto al tiempo

$$\frac{d\Phi}{dt}, \text{ donde } \Phi = \int B \cos \alpha dS.$$

Demostremos que la ley de la inducción electromagnética está ligada estrechamente a la existencia de la fuerza de Lorentz. Si la inducción electromagnética aparece cuando el conductor se traslada en un campo magnético, la ley de inducción es consecuencia directa de la expresión de la fuerza de Lorentz.

Para no complicar la exposición con dificultades puramente matemáticas, hacemos una demostración simplificada, para la cual suponemos que la f. e. m. de inducción aparece en una espira rectangular situada perpendicularmente a las líneas de fuerza de un campo magnético uniforme. La variación del flujo es provocada por la traslación de uno de los lados del rectángulo, de longitud l , de la forma que indica la fig. 116. En el conductor que se traslada hay cargas libres, por lo cual, cuando el conductor se mueve con la velocidad v , estas cargas se someten a la acción de la fuerza de Lorentz $f = \frac{e}{c} vB$. (Como los ángulos entre la dirección de la velocidad, el campo magnético y la dirección del conductor son iguales a 90° , hemos prescindido de los símbolos vectoriales en la fórmula de la fuerza, y el seno del ángulo es en este caso igual a la unidad). La fuerza de Lorentz tiene la dirección perpendicular al plano que pasa por la dirección v de la velocidad de traslación de las cargas (junto con el conductor) y de las líneas de fuerza, es decir, a lo largo del conductor. De este modo las cargas se ponen en movimiento a lo largo del conductor, es decir, se crea una corriente de inducción.

Se llama *fuerza electromotriz* (f. e. m.) al trabajo de traslación de la unidad de carga a lo largo de un circuito cerrado. La fuerza

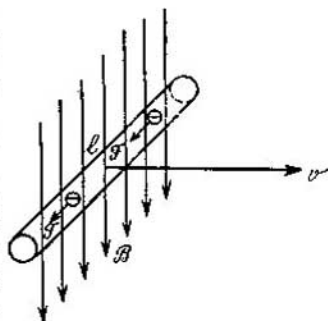


FIG. 116.

que actúa sobre la unidad de carga es igual a $(1/c)vB$; el trabajo de esta fuerza a lo largo del conductor en movimiento es igual a $(1/c)vBl$; pero en las demás partes del circuito no se efectúa trabajo. Por esto la última expresión es la fórmula buscada de la f. e. m. de inducción.

Esta fórmula tiene la forma

$$\mathcal{E}^{\text{ind}} = \frac{1}{c} vBl \text{ (CGS),}$$

$$\mathcal{E}^{\text{ind}} = vBl \text{ (SI).}$$

Supongamos que en un tiempo dt el conductor se trasladó una distancia dx . Al ocurrir esto el área del circuito (espira) aumentó en la magnitud $ldx = dS$, y el flujo magnético, en la magnitud $d\Phi = BdS$. Como $v = \frac{dx}{dt}$, la f. e. m. de inducción también puede representarse en la forma $\frac{1}{c} \frac{BdS}{dt}$. Pero esta expresión — $\mathcal{E}^{\text{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$, en el sistema CGS, y $\mathcal{E}^{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$, en el SI — es la ley de inducción electromagnética de Faraday.

Con esto queda demostrado que la inducción electromagnética y la desviación de las cargas eléctricas que se mueven en un campo exterior son manifestaciones de unas mismas leyes de la naturaleza. En el capítulo siguiente volveremos a tratar de este interesante problema. Aquí sólo es necesario recordar el sentido y el contenido de la ley de la inducción electromagnética.

§ 106. Medición del campo magnético por el método del impulso de inducción

Aplicando el fenómeno de la inducción electromagnética pueden elaborarse procedimientos bastante perfectos para medir el campo magnético. Supongamos que es necesario determinar el valor del campo magnético en un punto cualquiera del espacio. Se hace una bobina plana de pequeñas dimensiones (o se toma una espira de alambre) y se introduce en el campo magnético en posición perpendicular a las líneas de fuerza. La bobina (o espira) se une por medio de unos conductores con las bornas de un galvanómetro balístico. Si en estas condiciones se hace girar rápidamente el plano de la bobina 90° , de modo que su plano coincida con las líneas de fuerza, durante el giro pasará por la bobina una corriente eléctrica de inducción. Esta breve corriente, que alcanza rápidamente el máximo y a continuación decrece hasta cero, se llama *impulso de inducción* (fig. 117). En el tiempo que dura el impulso, por el conductor pasa

una cantidad de electricidad determinada, que puede medirse muy exactamente con el galvanómetro balístico. Este último es un instrumento que, en virtud de la inercia de su cuadro móvil, permite integrar la corriente eléctrica que pasa durante el impulso.

Si la resistencia de la bobina es R y el número de sus espiras n , la intensidad de la corriente de inducción que pasa por ella se escribe de la forma

$$I = \frac{n}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

La cantidad de electricidad que pasa por el conductor en el tiempo que dura el impulso de inducción será

$$Q = \int_0^{\tau} I dt = R^{-1} n \int_1^2 d\Phi = R^{-1} n (\Phi_2 - \Phi_1),$$

donde Φ_1 es el valor del flujo que pasa por la bobina en la primera posición y Φ_2 , el que pasa por la segunda.

Si Φ_1 o Φ_2 es nula (las líneas magnéticas no pasan por la bobina en la posición inicial o en la final), la medición efectuada da el valor de la inducción magnética. No queda más que dividir la magnitud del flujo magnético por el área de la sección S de la bobina $B = QR$ (μS).

Como es natural, también son posibles otras variantes de medición. Por ejemplo, en vez de hacer girar la bobina se puede conectar o desconectar el campo. Si hace falta aumentar el efecto, también puede hacerse girar la bobina no 90° , sino 180° , con lo cual se duplica dicho efecto. Con este mismo objeto se recurre, en vez de conectar o desconectar el campo, a cambiar su signo por el opuesto.

Toda vez que la bobina de medición puede hacerse muy pequeña —hasta de un milímetro cuadrado—, las mediciones hechas por este procedimiento pueden contribuir al sondeo exacto del campo magnético en volúmenes pequeños.

Este mismo método se utiliza para medir la tensión magnética. Con este fin se hace un cinturón de medida (llamado cinturón de Rogovski), consistente en un cinturón flexible sobre el que se arrolla una bobina larga. Al cinturón puede dársele cualquier forma y sus dos extremos pueden hacerse llegar a dos puntos cualesquiera del espacio. Estos extremos, si se quiere, también pueden ponerse en contacto. Demostremos que un cinturón de medida de este tipo, unido a un galvanómetro balístico, dará, al conectar un campo, una magnitud proporcional a la tensión magnética que existe a lo largo del camino por el cual está tendido.

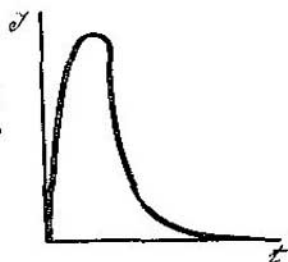


FIG. 117.

El galvanómetro balístico mide la magnitud del flujo magnético que pasa por todas las espiras de la bobina. Sea n la densidad del bobinado, es decir, el número de espiras por unidad de longitud del cinturón de medida. En este caso, en un trozo pequeño de cinturón Δl_i habrá $n \Delta l_i$ espiras, y el flujo magnético que pase por estas $n\Delta l_i$ espiras será igual a $\Phi_i n\Delta l_i$.

Si el medio es homogéneo y todas las espiras tienen el mismo área,

$$\Phi_i = \mu S H_i,$$

y el flujo magnético total que penetra a todo el cinturón de medida será

$$\Phi = \sum_i \mu S n H_i \Delta l_i.$$

Pasando al límite, cuando $\Delta l_i \rightarrow 0$, obtenemos

$$\Phi = \mu S n \int_1^2 H dl.$$

Como la medición se lleva a cabo en un medio en que μ se diferencia poco de μ_0 , resulta que $\mu S n$ es la constante del instrumento. Las desviaciones que marca el galvanómetro balístico en las medidas que se hacen por medio del cinturón serán exactamente proporcionales a la tensión magnética que existe entre los puntos en que se encuentran sus extremos.

Con este instrumento es fácil demostrar la ley que consideramos en el § 104. Envolviendo con la bobina una misma corriente veremos que, cualquiera que sea su configuración, la tensión será la misma; también puede comprobarse fácilmente que la tensión magnética a lo largo de un contorno que no rodee a la corriente será nula. Rodeando con la bobina una misma corriente varias veces, nos cercioramos de que la tensión magnética aumenta el número de veces correspondiente, etc.

Hay que subrayar la gran importancia que tiene la medición del campo magnético por el método del impulso de inducción en aquellos casos en que nos interesa conocer el campo magnético que existe dentro de un sólido. Aparte de este método sólo puede recurrirse a practicar ranuras en el sólido, pero esto, en general, no es posible.

Detengámonos en el problema más corriente, en la medición de la permeabilidad magnética de los cuerpos féreos. Los resultados más exactos pueden obtenerse si al cuerpo a analizar se le da la forma de toroide. Sobre este anillo se hacen dos devanados, uno de ellos se une a la fuente de corriente y el otro a un galvanómetro balístico. Si la corriente está conectada, por el anillo pasará el

flujo magnético $\Phi = BS$. Invertiendo el sentido de la corriente primaria, provocamos en la segunda bobina una corriente de inducción. La cantidad de electricidad Q que pasa por el galvanómetro estará ligada a la inducción magnética dentro del anillo por medio la relación, que ya hemos razonado,

$$B = \frac{QR}{n_2 S},$$

donde S es la sección del toroide (se supone que las espiras están bien ajustadas al toroide), n_2 es el número de espiras del devanado secundario y R su resistencia. En cuanto se refiere a la intensidad del campo magnético, podemos determinarlo por la fórmula, correcta para el solenoide anular, $H = \frac{n_1 I}{L}$. El cociente de dividir B por H da el valor de la permeabilidad magnética del material del anillo.

§ 107. Cuerpos finitos en un campo magnético

En mayor o menor grado, todos los cuerpos poseen propiedades magnéticas. Las propiedades magnéticas se manifiestan, en primer lugar, en que los cuerpos experimentan las fuerzas y momentos de fuerzas debidos al campo magnético, y en segundo lugar, en que el campo magnético sufre una distorsión si se coloca en él un cuerpo. Como se indicó antes, las propiedades magnéticas de una sustancia se caracterizan por el coeficiente μ , permeabilidad magnética de dicha sustancia. Por los valores de μ , los cuerpos pueden dividirse claramente en tres clases: ferromagnéticos, a los cuales pertenecen el hierro, níquel y cobalto y que poseen valores positivos de la permeabilidad magnética relativa mucho mayores que la unidad; paramagnéticos, cuya permeabilidad es algo mayor que la unidad; y diamagnéticos, con una permeabilidad magnética que es poco menor que la unidad. En la tabla que sigue se dan las cifras típicas.

Sustancia	μ	κ
Cobre	0,999990	$-10 \cdot 10^{-5}$
Agua	0,999991	$-9 \cdot 10^{-6}$
Platino	1,000300	$-300 \cdot 10^{-6}$
Silicio	0,999986	$-14 \cdot 10^{-6}$
Volframio	1,000079	$79 \cdot 10^{-6}$

La distorsión del campo magnético que se produce al introducir en él cuerpos diamagnéticos y paramagnéticos es insignificante.

En cambio, el campo magnético se deforma considerablemente si en el espacio se introducen cuerpos ferromagnéticos.

Las acciones de las fuerzas del campo magnético pueden descubrirse sin dificultad tanto cuando se trata de cuerpos paramagnéticos como diamagnéticos. Y no hablemos ya de las considerables fuerzas que sufren por parte del campo magnético los cuerpos férreos; estas fuerzas son conocidas perfectamente por todos.

Nos detendremos primeramente a estudiar las fuerzas magnéticas. Todo cuerpo carente de propiedades magnéticas se transforma en magnético al ser introducido en un campo. Este proceso es la imanación, imantación o magnetización del cuerpo, que se manifiesta porque el cuerpo adquiere momento magnético. Como sabemos, un sistema que posee momento magnético puede manifestarse de dos maneras. En un campo uniforme, el cuerpo de este tipo gira hasta que la dirección del momento coincide con la del campo exterior. Si el campo no es uniforme, el cuerpo, además de esto, sufre una fuerza cuya acción hace que se mueva a lo largo de las líneas de fuerza.

En los cuerpos ferromagnéticos el momento de rotación puede descubrirse sin dificultad. Por la fórmula $N=[MH]$ se puede hallar el momento magnético del cuerpo. Pero lo más frecuente suele ser que nos interese no un cuerpo de forma casual, sino una sustancia. Por esta razón, siempre que es posible, el valor medido del momento magnético se refiere a la unidad de volumen. El vector dirigido a lo largo del momento magnético y numéricamente igual a la magnitud de dicho momento correspondiente a la unidad de volumen se llama *vector magnetización J*. Está claro que la reducción del momento magnético de un cuerpo al vector de magnetización no ofrece dificultad solamente en el caso en que existe la seguridad de que la imanación de la probeta es uniforme. Esto ocurre cuando dicha probeta tiene la forma de elipsoide o de elipsoide degenerado, es decir, de cilindro, placa o esfera (véase la pág. 274). Con estos cuerpos son con los que se hacen los experimentos.

La determinación del vector de magnetización, midiendo el momento de rotación, es fácil en los cuerpos ferromagnéticos. En los cuerpos paramagnéticos y diamagnéticos son muy pequeños los momentos de rotación y medirlos es difícil. En estos casos es preferible medir la fuerza que actúa sobre el cuerpo cuando éste se encuentra en un campo no uniforme.

Consideremos un elemento de volumen de material magnético que se encuentre en un campo no uniforme. Para simplificar supondremos que dicho campo varía a lo largo de un eje y que el gradiente del campo es igual a $\frac{dH}{dx}$. Cada elemento de volumen del magnético se comportará como un dipolo magnético; por lo tanto,

la energía potencial de la unidad de volumen puede escribirse de la forma $U = -JH$. Si su momento fue establecido a lo largo del campo, la fuerza que actúa sobre la unidad de volumen del magnético será igual a la derivada de la energía potencial con respecto a la coordenada, es decir,

$$f = -I \frac{dH}{dx}.$$

De este modo, conociendo el gradiente del campo y midiendo la fuerza, se puede hallar la magnitud del momento magnético de la unidad de volumen del cuerpo que se analiza. En la práctica esto se lleva a cabo en diversos aparatos. El más simple de ellos es la llamada balanza magnética. En uno de los platillos de una microbalanza de precisión se practica un orificio, a través del cual se hace pasar un hilo. Del extremo libre de este hilo se cuelga la probeta y se coloca entre los polos de un electroimán. La probeta se equilibra primero antes de conectar el electroimán y luego, después de crear el campo. La diferencia de pesos que indica la balanza da el valor de la fuerza f .

La balanza debe ser de suficiente precisión, como se deduce del siguiente ejemplo. Un trocito de bismuto (la sustancia diamagnética más enérgica) colocado en un campo magnético, cuya intensidad $H \sim 1000$ Oe, tiene un vector magnetización $J = 2 \cdot 10^{-2}$ u. CGS. Si el gradiente del campo no uniforme $\frac{dH}{dx} \sim 50$ Oe/cm, sobre cada centímetro cúbico de bismuto actuará una fuerza de sólo 1 din, es decir, $f \sim 1$ din/cm³.

La experiencia demuestra que para los cuerpos diamagnéticos y paramagnéticos, entre el vector magnetización y la intensidad del campo magnético existe una dependencia simple

$$J = \mu_0 \kappa H,$$

donde κ es la *susceptibilidad magnética*. Para los cuerpos diamagnéticos κ es negativa, y para los paramagnéticos, positiva. Los valores de κ se incluyen en la tabla de la pág. 301. Cuando los valores de κ son positivos, el vector magnetización es paralelo al vector intensidad del campo, y cuando los valores de κ son negativos, o sea, para los cuerpos diamagnéticos, el sentido del vector magnetización es opuesto al del vector intensidad del campo.

Esta diferencia de signo hace que el comportamiento de estas dos clases de cuerpos difiera bastante en condiciones idénticas. La fig. 118 ilustra lo dicho. Las diferencias son en realidad sorprendentes. El cuerpo paramagnético es atraído en la zona de campo intenso,

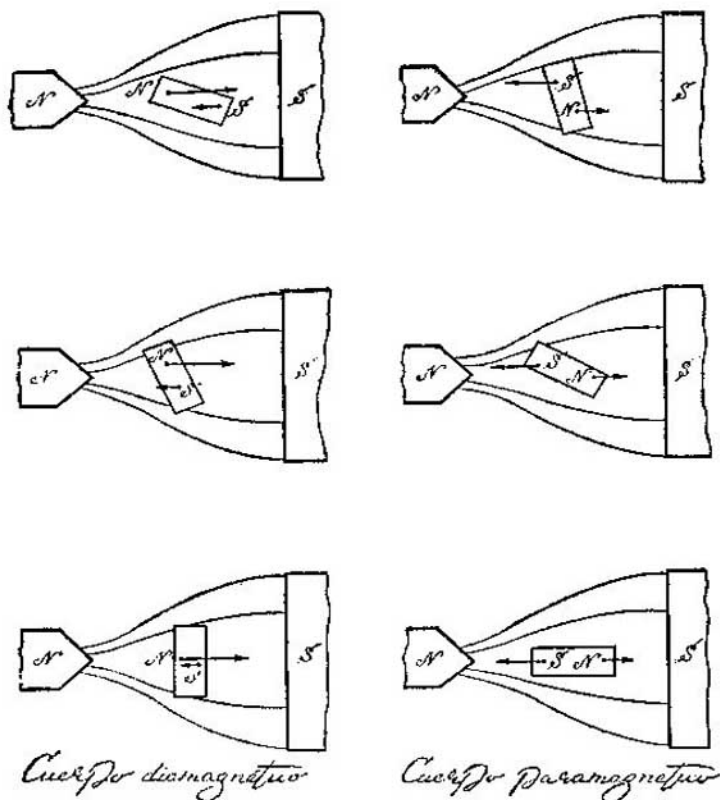


FIG. 118.

mientras que el diamagnético es repelido. En un campo uniforme la aguja paramagnética tiende a situar su eje a lo largo de las líneas de fuerza, la diamagnética, a ponerlo transversal (compárese con el ejemplo análogo acerca del dieléctrico que se puso en la pág. 273).

La determinación de la susceptibilidad magnética midiendo la fuerza en un campo no uniforme puede hacerse tanto con sólidos en forma de monocristales como en forma de polvos. Este método también puede aplicarse sin dificultad a los líquidos. En este caso el experimento se puede hacer de tal forma que la magnitud a medir sea la elevación o el descenso del nivel del líquido atraído o repelido del espacio entre los polos del imán.

§ 108. Relación entre la permeabilidad magnética y la susceptibilidad

Estas dos magnitudes pueden medirse directamente: la permeabilidad magnética se determina midiendo la inducción y la intensidad y calculándola después por la fórmula $\mu = B/H$, y la susceptibilidad, por las acciones que ejercen las fuerzas sobre el magnético, de la forma que acabamos de describir. Está claro que puede establecerse experimentalmente la relación que existe entre estas dos características de las propiedades magnéticas de la sustancia. Pero no hay necesidad de hacer esto, ya que entre μ y κ existe una simple y severa relación que se deduce de los razonamientos que siguen.

Retornemos a la experiencia que hicimos para determinar la permeabilidad magnética del cuerpo en forma de toroide. La bobina primaria que envuelve al toroide crea un campo cuya intensidad $H = nI/L$ no depende de la sustancia del toroide; sin toroide esta misma fórmula representaría también la intensidad del campo. Otra cosa es lo que ocurre con el flujo magnético. Experimentalmente llegamos al convencimiento de que el valor de B depende de la permeabilidad magnética. Si el núcleo de la bobina es de hierro, B se hace centenares y millares de veces mayor. Este aumento del flujo magnético lo relacionamos con el efecto de magnetización.

Prestemos atención en primer lugar al hecho de que, en ausencia del hierro, la inducción magnética del solenoide anular $\mu_0 H$ tiene el sentido del momento magnético de la unidad de volumen.

El momento magnético de una espira de la bobina es igual a IS (haremos los razonamientos refiriéndoos al SI). El momento magnético total del sistema será nIS , y el momento magnético de las corrientes en la unidad de volumen, $\frac{nIS}{LS}$, no será, ni más ni menos, que la intensidad del campo. El momento magnético de los dipolos equivalentes será μ_0 veces mayor (véase el § 103). Por consiguiente, la inducción magnética del campo magnético uniforme creado por las espiras del solenoide anular en ausencia del núcleo, $\mu_0 H$, puede considerarse como el momento magnético de los dipolos equivalentes que le corresponden a la unidad de volumen.

Con todo fundamento podemos suponer que la inducción magnética conservará su sentido si, sin alterar la uniformidad del campo, se llena uniformemente el espacio de la bobina con un número adicional de dipolos magnéticos. Si a la unidad de volumen le corresponde de los dipolos adicionales un momento magnético J , la inducción magnética aumentará en esta magnitud y se hará igual a

$$B = \mu_0 H + J.$$

Este aumento de B ocurre cuando el solenoide se llena de materia. Como $J = \mu_0 \kappa H$, tendremos que $B = \mu_0(\kappa + 1)H$ y, por consiguiente, la susceptibilidad magnética y la permeabilidad se relacionan por medio de la igualdad

$$\mu = 1 + \kappa.$$

Razonamientos análogos aplicados al sistema CGS conducen a fórmulas con otros coeficientes. El momento magnético de las corrientes (y dipolos) por unidad de volumen es igual a

$$\frac{n \frac{1}{c} IS}{LS} = \frac{1}{4\pi} H.$$

Por esto, cuando existe medio,

$$\frac{1}{4\pi} B = \frac{1}{4\pi} H + J, \text{ es decir, } B = H + 4\pi J.$$

Suponiendo $J = \kappa' H$, obtenemos

$$B = (1 + 4\pi\kappa') H,$$

por consiguiente,

$$\mu = 1 + 4\pi\kappa', \text{ donde } \kappa' = \frac{\kappa}{4\pi}.$$

Ejemplo. Haremos el cálculo del ejemplo de la pág. 303 en el SI. Para el bismuto $\kappa' = 2 \cdot 10^{-5}$, o sea, $\kappa = 4\pi\kappa' = 8\pi \cdot 10^{-5}$; el trozo de bismuto se halla en un campo magnético de $H = 1000 \text{ Oe} = \frac{1}{4\pi} \cdot 10^3 \cdot 1000 \text{ A/m} = \frac{10^6}{4\pi} \text{ A/m}$, cuyo gradiente de heterogeneidad

$$\frac{dH}{dx} = 50 \text{ Oe/cm} = 50 \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot 10^3 \cdot 100 \text{ A/m}^2 = \frac{5 \cdot 10^6}{4\pi} \text{ A/m}^2.$$

La magnetización del bismuto será $J = \mu_0 \kappa' H = 8\pi \cdot 10^{-6} \text{ B} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$. En este caso sobre la unidad de volumen (1 m^3) actuará una fuerza

$$f = J \frac{dH}{dx} = 8 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{5 \cdot 10^6}{4\pi} = 10 \text{ N/m}^3.$$

Está claro que $10 \text{ N/m}^3 = 1 \text{ din/cm}^3$, lo que coincide con el resultado del ejemplo anterior.

§ 109. Distorsión del campo al introducir en él un material magnético

La distorsión del campo magnético sólo tiene importancia práctica cuando se introducen en él cuerpos férricos. En gran parte tendremos que repetir aquí razonamientos análogos a los que hicimos en la pag. 274 refiriéndonos a los dieléctricos.

En el límite de separación de dos medios poseedores de distintas permeabilidades magnéticas, los vectores del campo magnético

(tanto de inducción como de intensidad) se refractan. Para hallar las leyes de esta refracción consideremos en primer lugar la tensión magnética tomada a lo largo de un pequeño contorno $ABCD$ ajustado estrechamente a la superficie de separación, como muestra la fig. 119. Como por este contorno no pasan corrientes, la tensión magnética será nula. Descompongamos el vector intensidad del campo magnético, por ambos lados de la frontera, en una componente normal y otra tangencial. En la figura se ve claramente que

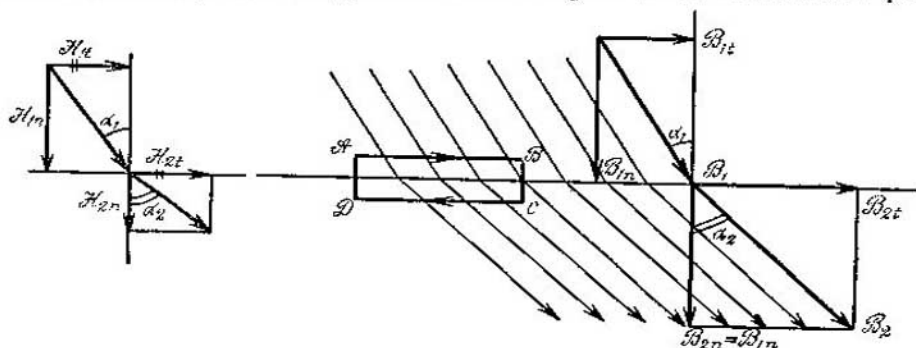


FIG. 119.

la anulación de la tensión magnética sólo puede ocurrir si las componentes tangenciales son iguales entre sí:

$$H_{1t} = H_{2t}.$$

Otra condición en la frontera de los dos medios la hallamos considerando el flujo magnético que pasa por un pequeño cilindro adyacente a la superficie de separación (en la figura no está representado). Como las líneas magnéticas carecen de fuentes, el número de ellas que entran por la base superior del cilindro deberá ser igual al número de las que salen por la base inferior. La superficie lateral es infinitamente pequeña y el flujo a través de ella es nulo. Descompongamos el vector inducción magnética, a ambos lados de la frontera, en dos componentes: una normal y otra tangencial. Es evidente que los flujos que pasan por las bases del cilindro sólo podrán ser iguales si las componentes normales del vector inducción no varían al pasar la frontera: $B_{1n} = B_{2n}$.

Partiendo de estas dos reglas hallamos la ley de la refracción de las líneas de fuerza. En la figura se ve claramente que

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Al pasar del aire al hierro, las líneas magnéticas se desvían de la perpendicular extraordinariamente, por lo que se condensan mucho.

Precisamente por esto el cuerpo de hierro, cuya permeabilidad magnética es centenares y millares de veces mayor que μ_0 , «absorbe» las líneas de fuerza. En este fenómeno se basa el blindaje magnético. En el espacio protegido por el hierro no penetra el flujo magnético: la inmensa mayoría de las líneas magnéticas pasará por dentro del hierro (fig. 120).

En completa analogía con los dieléctricos se resuelve el problema del carácter de las distorsiones provocadas en el campo magnético

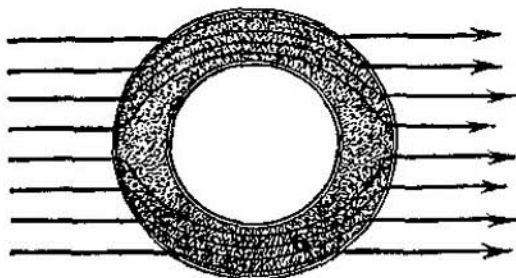


FIG. 120.

por un cuerpo de forma determinada. Si el cuerpo tiene forma de elipsoide, cilindro o placa, el campo dentro de dicho cuerpo, según demuestran los cálculos teóricos, será uniforme si el campo era uniforme antes de que en él se introdujera el cuerpo férreo. Entre el campo exterior uniforme H_0 (que existía) y el campo dentro del cuerpo de hierro H_i (tal como queda después) existe una relación totalmente análoga a la que se consideró en el § 96. La intensidad del campo que se crea en el cuerpo de hierro será menor, que la que existía antes, en una magnitud proporcional a la magnetización:

$$H_i = H_0 - \frac{N'}{\mu_0} J.$$

Para que el factor de desimanciación sea adimensional, la magnetización se divide por la permeabilidad magnética del vacío. Utilizando, como hasta ahora, las relaciones del sistema SI y haciendo la sustitución

$$J = \mu_0 (\mu - 1) H_i,$$

obtenemos la siguiente relación entre el campo exterior y el interior

$$H_i = \frac{H_0}{1 + (\mu - 1) N'}.$$

En el sistema CGS

$$\begin{aligned} H_i &= H_0 - NJ, \\ J &= \frac{\mu - 1}{4\pi} H_i \end{aligned}$$

y la relación entre el campo exterior y el interior tendrá la forma

$$H_i = \frac{H_0}{1 + (\mu - 1) N / (4\pi)}.$$

El coeficiente de desimanciación tiene el mismo valor que en el caso de los dieléctricos: $N = 4\pi/3$ ($N' = 1.3$) para una esfera, $N = 4\pi$ ($N' = 1$) para una placa, etc.

§ 110. Histéresis magnética

Al hablar de la permeabilidad magnética de los cuerpos de hierro podría crearse la idea errónea de que las propiedades de los ferromagnéticos sólo difieren de las de los paramagnéticos en el valor de dicha permeabilidad. Pero esto no es así. Lo que diferencia esencialmente a los ferromagnéticos de los demás cuerpos es la ausencia de dependencia lineal y, más aún, unívoca del estado magnético del cuerpo respecto de la intensidad del campo magnético. Por esto el concepto de permeabilidad magnética tiene un carácter bastante convencional en el caso de los ferromagnéticos. Una idea correcta de las propiedades magnéticas del hierro puede obtenerse estudiando la curva de la magnetización en función de la intensidad, o de la inducción magnética en función de la intensidad del campo. Estas dos curvas son bastante semejantes.

Vamos a medir la magnetización de un cuerpo férreo en función de la intensidad. La magnetización aumentará al principio lentamente, después, con rapidez, y finalmente llega la saturación magnética. Este tipo de curvas de magnetización, que por vez primera fueron construidas por A. G. Stolétov, son características de todos los cuerpos ferromagnéticos (fig. 121). Volvemos a repetir que las curvas de la magnetización y de la inducción magnética son muy parecidas. La marcha de la curva de magnetización da la susceptibilidad magnética, y la de la curva de inducción, la permeabilidad magnética. En la curva que hemos dado se ve que la permeabilidad magnética (o la susceptibilidad) varía según una curva con máximo. Cuando los campos son pequeños, la permeabilidad magnética es pequeña, después crece hasta el máximo, luego decrece y en cuanto llega la saturación permanece invariable. En la mayoría de los casos, cuando se dan los valores de la permeabilidad magnética sin mencionar las condiciones externas, se sobreentiende que es la permeabilidad magnética máxima.

Pero lo expuesto no agota las peculiaridades del comportamiento de los ferromagnéticos. Supongamos que un hierro se hace llegar hasta el estado de saturación magnética y se comienza a disminuir la intensidad del campo magnético. Resulta que la inducción dismi-

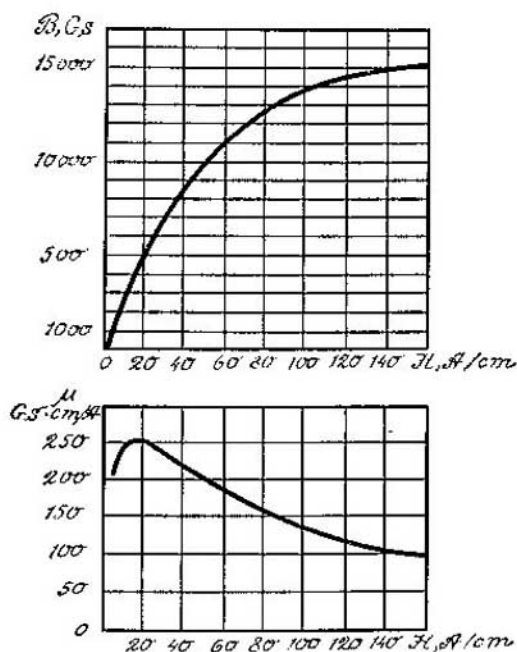


FIG. 121.

nuirá en este caso siguiendo otra curva, más alta que la de la magnetización inicial. La intensidad del campo se puede llegar a anular, pero la imanación no desaparece. Los valores correspondientes de la magnetización y de la inducción reciben el nombre de *remanentes*. Para quitar la imanación remanente hay que invertir el sentido del campo. Si se tiene en cuenta la experiencia de que hablamos en la pág. 300, esto quiere decir que hay que cambiar el sentido de la corriente en la bobina primaria arrollada al cuerpo de hierro. La desimanación se produce cuando la intensidad del campo alcanza cierto valor H_c , que se llama *fuerza coercitiva*. Si se continúa aumentando la corriente, el cuerpo empieza a imanarse en sentido contrario, es decir, donde estuvo el polo sur aparecerá el polo norte. El flujo magnético crecerá hasta llegar al mismo grado de saturación que en el proceso inicial. Una vez alcanzado el máximo negativo de la inducción, se puede invertir el sentido del proceso y obtener el bucle de histéresis representado en la fig. 122.

De esta figura se deduce que la intensidad del campo en que se encuentra el hierro no basta para definir la inducción magnética ni, por consiguiente, la permeabilidad magnética. Por ejemplo,

para la abscisa $H=400$ Oe existen tres valores posibles de la inducción: el primero, en la magnetización inicial, el segundo, en el proceso de desimantación, y el tercero, después de recorrido casi todo el bucle, durante la segunda imanación. El valor de la inducción y de la permeabilidad magnéticas depende de la «historia» de la probeta. De aquí el nombre de «bucle o lazo de histéresis».

El bucle se puede dibujar como construido con la condición de que el cuerpo ferromagnético se hace llegar hasta la saturación magnética. Pero está claro al mismo tiempo que con un trozo de hierro se pueden obtener bucles de histéresis cualesquiera de dimensiones menores, como si estuvieran inscritos en el lazo fundamental.

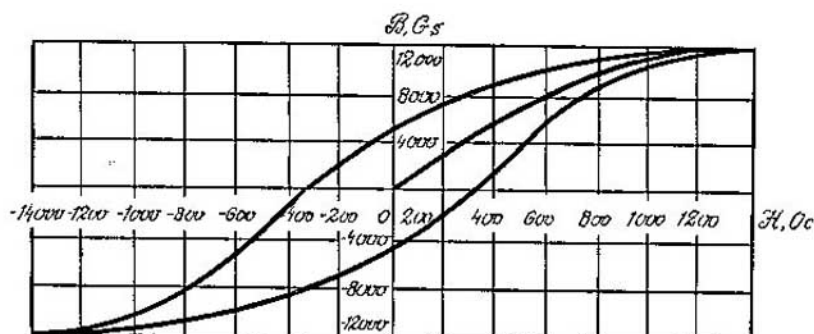


FIG. 122.

Para esto hay que comenzar la desimantación antes de llegar a la saturación. En este caso, a cada valor de H le corresponde un número tan grande como se quiera de valores de B .

De aquí se deduce el procedimiento para conseguir que un cuerpo ferromagnético se encuentre en el estado en el cual son nulas simultáneamente la inducción y la intensidad. Esta «puesta a cero» del cuerpo magnético se lleva a cabo por medio de una serie de reimanaciones sucesivas, empezando cada nuevo ciclo cuando el valor de la intensidad sea menor que el que tenía al comenzar el anterior.

El estado magnético del hierro no puede caracterizarse únicamente por el valor de la permeabilidad o por el de la intensidad o la inducción. Hay que conocer dos magnitudes, por ejemplo, la inducción y la intensidad que determinen el estado magnético del hierro por un punto situado dentro del bucle de histéresis fundamental.

El carácter del lazo de histéresis depende mucho del material. Se llaman magnéticamente blandos los cuerpos en que la fuerza coercitiva es pequeña (y, por lo tanto, el área de su bucle es también pequeña). A los materiales magnéticamente blandos pertenecen el

hierro, el acero al silicio, las aleaciones de hierro y níquel (entre las que destaca el permalloy, con un 78% de níquel). Los aceros al carbono y otros pertenecen a los materiales magnéticamente duros; se utilizan para fabricar imanes permanentes.

La experiencia demuestra que cuando un ferromagnético se reimana, se calienta. Esto tiene gran importancia para la electro-tecnia, ya que si se coloca hierro en un campo magnético alternativo, el punto del diagrama $B=f(H)$, que representa el estado magnético del hierro, recorrerá continuamente el lazo de histéresis. Este recorrido va acompañado de un desprendimiento de calor que la teoría del campo magnético relaciona con el área del bucle. Está claro que cuanto menor sea la inducción máxima, menor será el área del lazo. Por esto puede intentarse buscar una fórmula empírica que relacione el calor que se desprende con la inducción máxima. En electrotecnia se usa frecuentemente una fórmula de este tipo:

$$Q = \eta B_{\text{máx}}^{1.6},$$

donde η es un coeficiente cuyo valor se da en ciertas tablas.

Ejemplo. En un buen hierro para transformadores $\eta=0,0011$. Si $B_{\text{máx}}=10\ 000$ Gs, las pérdidas serán

$$Q = \eta B_{\text{máx}}^{1.6} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ erg/cm}^3 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ J/cm}^3.$$

Esto quiere decir, que si el hierro se reimana con una corriente alterna de frecuencia $\nu=50$ Hz, la potencia de las pérdidas en el hierro será de $12,5 \cdot 10^{-3}$ W por centímetro cúbico de su volumen.

16

CAMPO ELECTROMAGNÉTICO. ECUACIONES DE MAXWELL

§ 111. Generalización de la ley de inducción electromagnética

En el capítulo anterior hemos demostrado que el movimiento de un conductor en un campo magnético va acompañado de efectos de inducción. Si este conductor móvil forma parte de un circuito por el que pasa un flujo magnético que varía con el movimiento, en este circuito aparece una corriente, que corresponde a la f. e. m. de inducción $\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$. La causa de la aparición de dicha corriente

es la acción de la fuerza de Lorentz: sobre la unidad de carga eléctrica actúa una fuerza igual a $\frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ (en el sistema CGS).

Para la aparición de la corriente de inducción lo único que tiene importancia es la traslación relativa del conductor y el campo magnético. Con la misma razón puede hablarse de que la fuerza de Lorentz aparece cuando la carga se mueve en un campo magnético, o cuando el campo magnético se mueve y la carga «está en reposo». Este hecho se deduce del principio de la relatividad.

Elijamos un sistema de coordenadas con respecto al cual varíe el campo magnético; por ejemplo, liguemos el sistema de coordenadas con una mesa de laboratorio a lo largo de la cual se mueve el polo de un imán permanente. En este caso, sobre las cargas que se hallen en reposo, con respecto a la mesa de laboratorio, actuará la fuerza de Lorentz. Figurémonos que no sabemos nada acerca del imán permanente que se mueve. Al establecer que hay una fuerza que actúa sobre las cargas eléctricas en reposo, podemos hacer la deducción, totalmente correcta, de que en este sistema existe un campo eléctrico cuya intensidad es igual a la fuerza de Lorentz referida a la magnitud de la carga. Así, pues, la intensidad del campo eléctrico en el sistema de coordenadas «en reposo», con respecto al cual la fuente del campo magnético constante se mueve con la velocidad \mathbf{v} , viene expresada por la fórmula

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Está claro que las leyes del campo eléctrico creado por cargas, y del campo eléctrico creado por el movimiento del sistema con respecto al campo magnético, serán distintas. En primer lugar, en el nuevo campo que estamos estudiando no hay fuentes, o sea, cargas. Por lo tanto, sus líneas de fuerza no tienen principio ni fin. Por otra parte, no es difícil ver que las líneas de fuerza de este campo eléctrico serán cerradas, es decir, el campo eléctrico creado por un campo magnético en movimiento es un campo rotacional.

Construyamos mentalmente un circuito arbitrario (en reposo con respecto a la mesa de laboratorio). El campo magnético móvil cortará a este circuito. Si en vez del circuito ideal hubiera uno de alambre, de acuerdo con la ley de Faraday aparecería en él una f. e. m. igual, como ya sabemos, a $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l}$. Por consiguiente, la integral $U = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l}$ no es nula; lo que significa que el campo eléctrico $\mathbf{E} = \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]$, creado por el campo magnético móvil, es un campo rotacional.

Para el circuito real de alambre $U = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$, donde Φ es el flujo magnético que pasa a través del circuito. Pero la presencia o ausencia del alambre, en lugar de la curva cerrada, no cambia nada. La igualdad $U = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$ debe cumplirse también para el circuito imaginario construido en el espacio donde se mueve la fuente del campo magnético.

Nos queda por hacer la última generalización. La experiencia demuestra que las causas de la variación del campo magnético no desempeñan ningún papel en el efecto de inducción. Siempre es posible elegir variaciones equivalentes de los campos creados por el movimiento de un imán permanente o por la variación de la intensidad de la corriente en una bobina inmóvil, por ejemplo, por la aproximación de un imán permanente o por la intensificación de la corriente en la bobina que crea el campo. Por esto, la ley hallada debe ser correcta siempre y en todos los casos, independientemente de la causa por que varíe el campo magnético. Así, pues, si en una región cualquiera del espacio varía el campo magnético (o el flujo magnético), aparece un campo eléctrico rotacional, relacionado con la variación de dicho campo por la ley siguiente: la tensión $U = \oint \mathbf{E} \, dt$ a lo largo de un circuito cerrado es igual a la derivada, respecto del tiempo, del flujo magnético que pasa a través de dicho circuito:

$$U = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

o, en el SI,

$$U = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

En esto consiste la *ley de la inducción generalizada*, que es una de las leyes de la naturaleza más importantes.

Explicaremos el contenido matemático de esta ley. Sustituyendo las expresiones de la tensión eléctrica y del flujo magnético, escribamos la ley en la forma desarrollada

$$\oint \mathbf{E} \, dt = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int B \cos \alpha \, dS \quad (\text{CGS}),$$

$$\oint \mathbf{E} \, dt = - \frac{d}{dt} \int B \cos \alpha \, dS \quad (\text{SI}).$$

Detengámonos ante todo en el signo menos que hay que introducir en la fórmula desarrollada. Esto se explica porque, en el álgebra vectorial, el sentido del rodeo de un contorno y el sentido de la normal a la superficie de dicho contorno están ligados entre sí; el sentido positivo de la normal en un sistema helicoidal

dextrógiro es aquel, en que cuando se mira desde el extremo del vector, se ve la rotación en sentido contrario al de las agujas del reloj (fig. 123). Construyamos en el espacio una curva cerrada y asignémosle un sentido de rodeo arbitrario. Con esto estará ya definido el sentido de la normal a la superficie abarcada por dicha curva. A través de un contorno pasa un flujo magnético. En un instante dado este flujo puede ser positivo o negativo, es decir, el vector inducción formará un ángulo agudo u obtuso con la normal. La derivada, con respecto al tiempo, del flujo será positiva si el flujo aumenta, y negativa, si el flujo disminuye. De este modo, teniendo en cuenta el signo menos que figura en la fórmula de la ley de la inducción, se puede decir lo siguiente: la tensión eléctrica será positiva, es decir, el sentido de la línea de fuerza eléctrica coincidirá con el sentido del rodeo que se considera positivo, si el flujo positivo disminuye o el flujo negativo aumenta, y, al contrario, la tensión

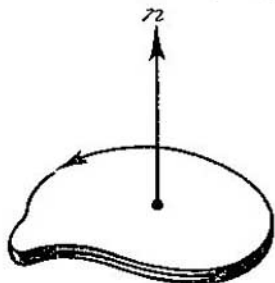


FIG. 123.

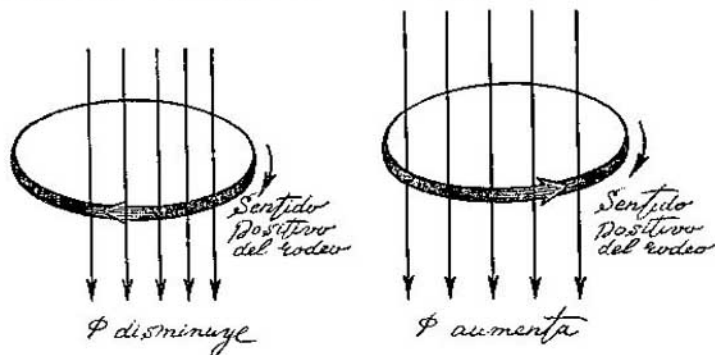


FIG. 124.

será negativa si el flujo positivo aumenta o el negativo disminuye. Estas relaciones se ven claramente en la fig. 124.

Demostremos ahora que el signo menos de la fórmula de la inducción es la expresión matemática de la ley de Lenz. Supongamos, por ejemplo, que a una bobina se le acerca el polo norte de un imán recto. Admitamos que el sentido del rodeo del contorno es el que indica la fig. 125. En este caso será positivo el flujo magnético y positiva su derivada con respecto al tiempo. La tensión eléctrica deberá ser negativa y el flujo inducido tendrá el sentido contrario

al tomado como positivo en el rodeo. El campo magnético de la corriente de inducción lo hallamos inmediatamente recordando que las líneas de fuerza salen por la parte de la corriente anular en que el sentido de ésta nos lo figuramos como contrario al de las agujas del reloj. Por consiguiente, cuando el imán se acerca al circuito, en este último se produce una corriente de sentido tal, que con su campo se opone al efecto que la produce. Esta es la ley de Lenz.

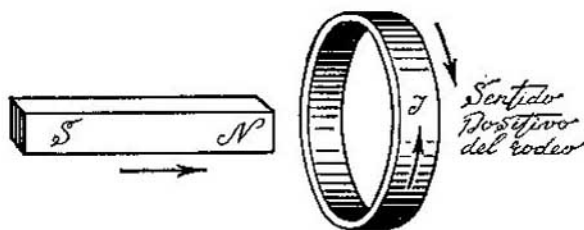


FIG. 125.

Tampoco ofrece dificultad demostrar esta importante ley para otros casos particulares.

Resumamos lo expuesto. El campo magnético alternativo es inseparable del campo eléctrico. Es más, vemos que la división de los campos en eléctricos y magnéticos tiene carácter relativo. Desde un punto de vista, en el espacio sólo existe campo magnético. Desde otro punto de vista, además del campo magnético está presente el eléctrico.

El campo eléctrico rotacional es producido por las líneas eléctricas que envuelven a los vectores inducción magnética, con la condición de que el flujo magnético, que penetra en la línea de fuerza cerrada, varíe con el tiempo. Cuando el flujo aumenta, la línea de fuerza tiene el sentido de las agujas del reloj, si se mira desde el extremo del vector inducción.

§ 112. Corriente de desplazamiento

La teoría del campo electromagnético, cuyas bases sentó Faraday, fue acabada matemáticamente por el científico inglés James Clerk Maxwell. Una de las nuevas ideas más importantes propuestas por Maxwell fue la de la necesidad de la simetría en las interacciones de los campos magnético y eléctrico.

Nosotros acabamos de estudiar el problema de la creación de un campo eléctrico por un flujo magnético variable. Se plantea ahora la pregunta natural siguiente: ¿Crea también un campo magnético propio el flujo variable de las líneas de fuerza eléctricas?

Maxwell responde afirmativamente a esta pregunta y plantea la hipótesis de que existe una ligazón entre el flujo eléctrico variable y el campo magnético, la cual es completamente simétrica a la ley generalizada de la inducción. Esta hipótesis consiste en lo siguiente: si en cierta región del espacio se produce una variación del flujo eléctrico, se crea un campo magnético rotacional; la tensión magnética U , tomada a lo largo de una curva cerrada, es igual a la variación del flujo eléctrico que atraviesa a esta curva cerrada, es decir,

$$U = \frac{dN}{dt},$$

donde

$$U = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l}$$

y el flujo eléctrico

$$N = \int_S D \cos \alpha dS.$$

En el sistema CGS

$$U = \frac{1}{c} \frac{dN}{dt}.$$

La simetría de las relaciones entre los campos magnético y eléctrico no se extiende al signo que figura delante de la derivada del flujo.

Como sabemos, cuando existen corrientes, la tensión magnética por la curva cerrada es igual a $U=I$ (ó $\frac{4\pi}{c} I$ en el sistema CGS). ¿Cómo escribir la ecuación de la tensión magnética para una curva cerrada que abarque a la corriente eléctrica y al flujo variable de líneas de fuerza eléctricas? Maxwell supone que las tensiones magnéticas se componen, de manera que la fórmula general tendrá la forma

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I + \frac{dN}{dt} \text{ (SI)}$$

o

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \left(I + \frac{dN}{dt} \right) \text{ (CGS).}$$

La expresión $\frac{dN}{dt}$ tiene la dimensión de la intensidad de la corriente eléctrica. Maxwell le dio el nombre de *flujo de desplazamiento*, dándole a esta denominación el sentido, muy difundido a finales del siglo XIX, de que, en el vacío, el campo desplaza las partículas de «éter» de sus posiciones de equilibrio. Esta denominación se ha conservado en la ciencia, aunque ahora no ligamos la existencia del campo en el vacío con la idea del desplazamiento de partículas de medio alguno. En un medio dieléctrico, la corriente

de desplazamiento $\frac{dN}{dt}$ puede descomponerse en dos, de acuerdo con la posibilidad de descomponer el vector inducción D en una suma de los vectores intensidad y polarización (véase la pág. 270). Por esto la parte de la corriente de desplazamiento que «va» por el dieléctrico se determina por la variación del vector polarización, es decir, por los desplazamientos relativos de los centros de gravedad de las cargas positiva y negativa.

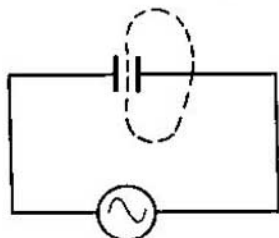


FIG. 126.

Antes de pasar a considerar el papel de la corriente de desplazamiento en unos u otros procesos, demostraremos un postulado muy importante referente a la suma de las corrientes de conducción y de desplazamiento. Consideremos un sistema arbitrario de corrientes eléctricas y tracemos mentalmente una superficie cerrada, de manera que las corrientes la atraviesen. Si las corrientes son continuas, la ley de la conservación de la electricidad nos conduce inmediatamente a la siguiente condición: la suma de las corrientes que afluyen a la superficie cerrada debe ser igual a la suma de las corrientes que salen de ella o, resumiendo, la suma algebraica de las corrientes que salen de una superficie cerrada es nula. Se comprende perfectamente que esta ley puede no cumplirse cuando se trata de corrientes alternas; figurémonos, por ejemplo, una superficie cerrada que envuelva a una de las placas de un condensador conectado a un circuito de corriente alterna (fig. 126), o una superficie cerrada atravesada en un punto por el extremo superior de una antena.

Demostraremos, sin embargo, que este teorema conserva su validez también para las corrientes alternas si se formula, no para las corrientes de conducción, sino para la corriente «total», compuesta por la corriente de conducción y la corriente de desplazamiento. Para esta demostración basta figurarse una curva cerrada arbitraria y una superficie que se apoye en ella y para la cual sea correcta la ley

$$\oint H dl = I + I_{\text{despl}} .$$

Empecemos a estrechar la curva cerrada de modo que tienda a cero; en este caso la superficie S que se apoyaba en este contorno (fig. 127) se convertirá en cerrada (operación semejante a la de cerrar un saco de viaje). La tensión magnética se anula y, por lo tanto, se anula también la suma de las corrientes de conducción y de desplazamiento que pasan a través de la superficie cerrada.

Ahora podemos considerar el papel de las corrientes de desplazamiento en los fenómenos electromagnéticos.

Los cálculos demuestran que las corrientes de desplazamiento son despreciables por su pequeñez allí donde las corrientes de conducción son distintas de cero. Por esto se desprecian siempre los valores de las corrientes de desplazamiento dentro de los conductores.

Al interesarnos por la magnitud de la corriente de desplazamiento en los dieléctricos, debemos estudiar dos casos: el de las co-

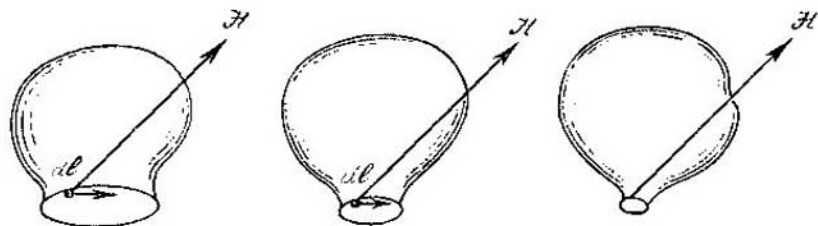


FIG. 127.

rrientes de desplazamiento en un dieléctrico que rodea a un conductor cerrado, y el de las corrientes de desplazamiento que se comportan como prolongación de los conductores en los circuitos abiertos.

Consideremos un conductor cerrado por el que pasa corriente eléctrica y cortémoslo con una superficie cerrada. Si la corriente es continua, en cada instante entrará en la superficie la misma cantidad de electricidad que sale de ella. En el caso de corrientes alternas no ocurre lo mismo. La intensidad de la corriente alterna puede tener valores distintos en diferentes trozos del circuito (véase más adelante, en la pág. 340). Por esta razón, en cualquier instante, las intensidades de las corrientes que entran y que salen de la superficie pueden no ser iguales; en este caso, desde el punto en que la corriente es menor hasta el punto en que la corriente es mayor, «pasa» por el dieléctrico una corriente de desplazamiento que, a su manera, compensa la diferencia entre la corriente menor y la mayor. Está claro que las variaciones con el tiempo de la corriente de desplazamiento seguirán rigurosamente a las variaciones de la corriente de conducción. Este fenómeno sólo desempeña un papel apreciable en las corrientes de frecuencia suficientemente alta.

Si las corrientes de conducción no son cerradas (caso de un circuito de corriente alterna con un condensador), las corrientes de conducción y de desplazamiento son simplemente iguales entre sí. En este caso puede decirse que la corriente de desplazamiento cierra la corriente de conducción.

A pesar de que en estas circunstancias las corrientes de desplazamiento son bastante considerables, toda una serie de cálculos pueden hacerse sin tenerlas en cuenta. En efecto, al cerrar la corriente de conducción entre las armaduras del condensador, la corriente de desplazamiento crea en este espacio un campo magnético igual al que se crearía si la corriente de conducción pasara por un circuito ininterrumpido. Por esta razón la corriente de desplazamiento no influye en el cálculo del campo magnético, del coeficiente de autoinducción, etc.

§ 113. Representación del campo electromagnético

Las ecuaciones estudiadas en los dos párrafos anteriores

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{y} \quad \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I + \frac{dN}{dt}$$

se llaman *ecuaciones de Maxwell*. Estas ecuaciones expresan concisamente el conjunto de nuestros conocimientos acerca del campo magnético.

Las ecuaciones de Maxwell no pueden deducirse. Los dos párrafos precedentes no son deducción, sino únicamente la exposición de las conjeturas que condujeron a Maxwell al descubrimiento de dichas ecuaciones.

Una clase enorme de fenómenos que interesan a los físicos y a los técnicos en electricidad y radio se subordinan a las ecuaciones de Maxwell. Las reglas que cumplen estos fenómenos son consecuencia de las ecuaciones de Maxwell y pueden deducirse de ellas. El extraordinario valor de predicción de las ecuaciones de Maxwell las coloca a la altura de las grandes leyes de la naturaleza, tales como las ecuaciones de la mecánica de Newton o los principios de la termodinámica.

No entra en nuestros propósitos describir los procedimientos matemáticos de resolución de las ecuaciones de Maxwell. Pero las ecuaciones integrales antes escritas pueden transformarse en diferenciales. Resolviendo las ecuaciones diferenciales de Maxwell se puede, en principio, hallar el campo electromagnético de una distribución dada de cargas y corrientes.

Nos detendremos una vez más en la esencia física de los efectos electromagnéticos que interpretan las ecuaciones de Maxwell. Esta esencia se reduce a lo siguiente.

La división del campo electromagnético en eléctrico y magnético sólo tiene un sentido relativo. Si desde el punto de vista de un sistema inercial de coordenadas sólo existe el campo magnético, desde el punto de vista de un sistema que se mueva en relación al

primero, además del campo magnético existirá el eléctrico. También es correcta la afirmación inversa: si el observador de un sistema establece que sólo existe campo eléctrico, el observador de otro sistema inercial establecerá que existe tanto el campo eléctrico como el magnético.

Consideremos ahora el campo electromagnético tal como se nos figura desde el punto de vista de un sistema inercial de referencia cualquiera. Primero prestaremos atención a la región del

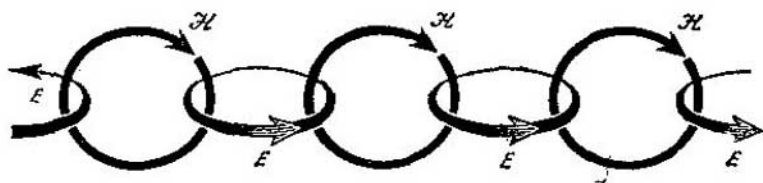


FIG. 128.

espacio en que no existen cargas eléctricas libres y, por lo tanto, corrientes de conducción. Las ecuaciones de Maxwell tienen en este caso la forma

$$\oint E dl = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \oint H dl = \frac{dN}{dt}.$$

Ambos campos, magnético y eléctrico, tienen carácter puramente rotacional: las líneas de fuerza son cerradas y entrelazadas, las líneas eléctricas se arrollan en las magnéticas y éstas en las eléctricas. Del carácter del campo electromagnético puede dar cierta idea su representación en forma de una cadena de anillos, en la cual las líneas de fuerza cerradas, magnéticas y eléctricas, se suceden entre sí (fig. 128). Esta cadena existe únicamente cuando el campo es alternativo. Un flujo magnético anular creciente crea a su alrededor un flujo eléctrico anular. La variación del campo eléctrico ocasiona la creación de otro flujo magnético anular y así sucesivamente.

Si en la región considerada del espacio hay cargas y corrientes, además de los campos rotacionales de líneas enlazadas, descubrimos un campo magnético rotacional, cuyas líneas se cierran alrededor de las corrientes, y un campo eléctrico potencial, cuyas líneas comienzan en las cargas positivas y terminan en las negativas.

17

TRANSFORMACIONES ENERGÉTICAS EN
EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO§ 114. Transformaciones en un circuito de corriente
continua

Consideremos un trozo de conductor por el que pasa una corriente eléctrica continua. Si la resistencia del trozo considerado es R y la tensión eléctrica en sus extremos es igual a U , la intensidad de la corriente se determina por la ley de Ohm, $I=U/R$. El campo eléctrico realiza trabajo en trasladar las cargas a lo largo del circuito. Si este trabajo se refiere a la unidad de cargas, será igual a U . Como, por definición, la intensidad de la corriente es la cantidad de electricidad que pasa por la sección en la unidad de tiempo, el producto IU da el trabajo, que realiza el campo en trasladar la electricidad, referido a la unidad de tiempo. IU es la potencia de la corriente. Si la corriente es continua, todo este trabajo se transforma en calor (llamado calor de Joule). Las fórmulas para calcular el efecto calorífico de la corriente son:

$$IU = \frac{U^2}{R} = I^2R.$$

La transformación del trabajo del campo eléctrico en calor tiene lugar en cada punto del conductor. Para expresar esta afirmación por medio de una fórmula, transformaremos la ley de Ohm de modo que no se refiera a un trozo de conductor, sino a un punto del mismo. Introduciendo la densidad de la corriente $j=I/S$, donde S es la sección del conductor, sustituyendo la expresión de la tensión eléctrica por El y, finalmente, expresando la resistencia por la longitud del conductor l y su sección, o sea, $R=\frac{1}{\lambda} \frac{l}{S}$, obtenemos:
 $j=\lambda E$.

De este modo puede afirmarse que la densidad de la corriente es directamente proporcional a la intensidad del campo eléctrico. El coeficiente de proporcionalidad es la conductividad λ . Suponemos que el sentido de la corriente en cada punto coincide con el de la intensidad del campo. La fórmula

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$$

recibe el nombre de *ley de Ohm diferencial*. Esta ley, que debe considerarse como empírica, generaliza las leyes del paso de la corriente por los conductores. La forma ordinaria (integral) de la ley de Ohm es consecuencia de esta ecuación.

Aislemos en el conductor un elemento de volumen infinitesimal $d\tau$, de forma cilíndrica, cuya generatriz a lo largo de las líneas de fuerza sea dl y cuya base, de área dS , sea perpendicular a la corriente. En la unidad de tiempo pasará por la sección de este cilindro la cantidad de electricidad $j dS$ y la tensión en los extremos del elemento será igual a $E dl$; por consiguiente, el trabajo realizado por el campo en transportar la electricidad a través de este volumen será igual a $jE d\tau$. Esta misma fórmula expresará el calor que se desprende dentro del volumen $d\tau$. Si nos interesa conocer el trabajo de la corriente en un volumen pequeño del conductor, hay que integrar la última expresión. En cambio, la fórmula

$$jE = \frac{j^2}{\lambda} = \lambda E^2$$

nos da la expresión del trabajo de la corriente (calor de Joule) que desprende la unidad de volumen del conductor.

Así, pues, si se considera un trozo cualquiera de circuito conductor de corriente eléctrica continua, las transformaciones energéticas que tienen lugar en él se reducen a la transformación del trabajo del campo en calor. Pero el cuadro varía si nos interesamos por el balance energético dentro de los límites de todo el circuito cerrado de corriente continua. El trabajo de las fuerzas eléctricas a lo largo de una curva cerrada, en el caso de un campo continuo, es nulo, ya que el trabajo que las fuerzas eléctricas realizan al transportar la carga por la parte externa del circuito es igual y de signo contrario al trabajo necesario para transportar la carga por la parte interna del circuito. Por consiguiente, el desprendimiento de calor de Joule en el circuito de corriente continua se produce únicamente a expensas de la energía que proporciona la fuente de corriente —el acumulador, la máquina eléctrica, etc.—, es decir, a costa de una energía de procedencia no eléctrica (o, como a veces se dice, «extraña»). El papel de la corriente eléctrica se reduce simplemente a «transportar» la energía desde la fuente de corriente hasta el lugar en que se desprende el calor. La energía que es capaz de proporcionar la fuente se caracteriza por la fuerza electromotriz \mathcal{E} , que, por definición, se mide por el trabajo realizado al transportar la unidad de carga a lo largo del circuito cerrado. De hecho, las fuerzas extrañas realizan este trabajo únicamente en los cortos espacios del circuito en que la carga tiene que moverse venciendo las fuerzas del campo eléctrico.

La potencia desprendida por un circuito de corriente continua viene expresada por la fórmula $I\mathcal{E}$. Esta expresión puede referirse a la unidad de volumen si se supone que las fuerzas extrañas están distribuidas volumétricamente. En este caso el trabajo de las fuer-

zas extrañas se representa de la forma

$$jE^{\text{ext}},$$

donde E^{ext} es la «intensidad» de las fuerzas extrañas.

Llamando P al trabajo de las fuerzas extrañas y Q al calor de Joule que se desprende, podemos expresar concisamente la esencia de las transformaciones eléctricas que tienen lugar en un circuito de corriente continua por la fórmula

$$P - Q = 0.$$

Ejemplo. Para un alambre de cobre aislado, de sección $S=4 \text{ mm}^2$, cuando el tendido es al descubierto se tolera una densidad de corriente $j=9 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$. Un trozo, de este tipo de conductor, de 1 m de longitud tiene una resistencia de $4,25 \cdot 10^{-3} \Omega$. Cuando el valor de j es el indicado, por el alambre pasa una corriente $I=36 \text{ A}$. La pérdida de energía, en calor de Joule, por segundo, en este trozo de circuito será igual a $I^2 R = 1296 \cdot 4,25 \cdot 10^{-3} \approx 6 \text{ J}$, es decir, en la unidad de volumen se desprenderán $0,33 \text{ cal} = 1,38 \text{ J}$ por segundo.

§ 115. Transformaciones en un circuito cerrado de corriente alterna

El paso de la corriente alterna va acompañado inevitablemente de fenómenos de inducción. En efecto, a una intensidad de corriente variable le corresponde un flujo magnético Φ también variable. Se entiende por Φ el número de líneas de fuerza que crea el circuito de corriente que se considera y que atraviesan el circuito conductor. En este caso los fenómenos de inducción serán provocados por su propio flujo magnético, por lo que dicho fenómeno se llama *autoinducción*. Como Φ varía continuamente, en el circuito de corriente, además de la f. e. m. extraña, existirá en cada instante una f. e. m. de inducción igual a $\mathcal{E}^{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$.

El flujo magnético es siempre proporcional a la primera potencia de la corriente. La fórmula $\Phi = LI$ es universalmente correcta. El coeficiente L es la *inductancia* (o *coeficiente de autoinducción*) del circuito. El valor de L depende de las propiedades geométricas del circuito y del carácter de la disposición de los cuerpos magnéticos en el sistema, y no depende de las condiciones en que funciona este sistema de alambres y cuerpos magnéticos. Por lo tanto, para la f. e. m. de autoinducción se cumple la igualdad

$$\mathcal{E}^{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}.$$

El sentido que tiene el signo menos en esta fórmula se reduce a lo siguiente. La f. e. m. de inducción se opone a la fuerza extraña en aquellos instantes en que la corriente aumenta; la f. e. m. de induc-

ción, en este caso, está dirigida contra la fuerza extraña. En cambio, cuando la corriente disminuye, la f. e. m. de inducción tiene el mismo sentido que la f. e. m. extraña. Esta circunstancia determina la analogía que se establece con frecuencia entre el fenómeno de la inercia mecánica y el fenómeno de la autoinducción. La autoinducción se opone tanto al aumento de la corriente como a su disminución. La ley de Ohm, que liga la f. e. m. y la intensidad de la corriente, sigue en vigor. Por esto, el producto de la intensidad de la corriente por la resistencia total del circuito tendrá en cada instante el valor

$$IR = \mathcal{E}^{\text{ext}} + \mathcal{E}^{\text{ind}} = \mathcal{E}^{\text{ext}} - L \frac{dI}{dt}.$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la intensidad instantánea de la corriente, obtenemos una igualdad energética de la forma

$$I^2R = I\mathcal{E}^{\text{ext}} - LI \frac{dI}{dt}.$$

Aquí $I\mathcal{E}^{\text{ext}} = P$ es el trabajo de las fuerzas extrañas, y $I^2R = Q$ es el calor de Joule. Como puede verse, en un circuito de corriente alterna no existe la igualdad de estas dos magnitudes. La diferencia $P - Q$ es igual en cada instante a $LI \frac{dI}{dt}$, es decir, a la derivada de $\frac{1}{2} LI^2$. En otras palabras, el trabajo de las fuerzas extrañas, que excede al calor de Joule desprendido, va a incrementar la magnitud $\frac{1}{2} LI$. Y al contrario, el calor desprendido, que excede al trabajo de las fuerzas extrañas, implica una merma de la magnitud $\frac{1}{2} LI^2$. La ecuación

$$P - Q = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right)$$

expresa la ley de conservación de la energía.

La magnitud $W = \frac{1}{2} LI^2$ tiene indudablemente sentido de energía. Esta es la energía magnética del sistema, que va ligada indisolublemente con la existencia del campo magnético en él (en el sistema CGS la fórmula de esta energía toma la forma $\frac{1}{c^2} \frac{1}{2} LI^2$).

La energía magnética existe también en el circuito de corriente continua. Pero en este caso no se manifiesta, permanece invariable. Los fenómenos de inducción se producen únicamente al conectar y desconectar la corriente. Al cerrar el circuito, las fuerzas extrañas realizan un trabajo que se gasta, además de en desprendimiento de calor, en acumular energía magnética. Y al contrario, cuando se abre el circuito, el desprendimiento de calor de Joule se efectúa a costa de la energía magnética de la corriente.

La fórmula de la energía magnética se podría comprobar experimentalmente estudiando la conexión o, mejor aún, la desconexión de la corriente. El calor de Joule, que se desprende en el instante de desconectar la fuente, debe ser numéricamente igual a la energía magnética de la corriente. Si el coeficiente de autoinducción es grande, el desprendimiento de calor dura bastante y se puede medir, por ejemplo, por procedimientos calorimétricos.

La inductancia puede medirse haciendo diversas experiencias, y en los casos más simples se puede calcular por la fórmula $L = \Phi / I$. El problema se reduce a calcular el flujo magnético que pasa por el sistema.

Más adelante nos hará falta la expresión de la inductancia de un solenoide circular. El flujo magnético a través de una espira de la bobina será $\Phi = \mu_0 \mu HS$, donde S es el área de la espira; y el flujo a través de n espiras $\Phi = n \mu_0 \mu HS$. Sustituyendo aquí la expresión de la intensidad del campo (utilizando el SI):

$$\Phi = n \mu_0 \mu S \frac{nI}{l}.$$

Dividiendo por la intensidad de la corriente, obtenemos la expresión de la inducción de la bobina (en cálculos aproximados, esta fórmula es aplicable también al solenoide abierto):

$$L = \mu_0 \mu \frac{n^2}{l} S.$$

La inductancia de la bobina es directamente proporcional a la permeabilidad magnética del medio y depende mucho del número de espiras. La inductancia se aumenta utilizando hierro y aumentando el número de espiras. Para que quede clara la relación entre el valor del coeficiente de autoinducción y las dimensiones de la bobina, multipliquemos el numerador y el denominador por l . Entonces

$$L = \mu_0 \mu \left(\frac{n}{l} \right)^2 V,$$

y está claro que la inductancia es directamente proporcional al volumen ocupado por el campo magnético y al cuadrado de la densidad con que las espiras se arrollan en la bobina.

Ejemplo. Sea un solenoide largo y estrecho ($l=15$ cm, $n=1500$ espiras, $S=1$ cm², $I=0,1$ A). En el centro del solenoide se produce un flujo magnético $\Phi = n \mu_0 \mu I S = 6 \cdot 10^{-6}$ V·s. La inductancia de este solenoide

$$L = \mu_0 \mu \frac{n^2}{l} S = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot \frac{1500^2}{0,15} \cdot 10^{-4} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ henrios (H)}.$$

En el SI la inductancia se mide en henrios, $1\text{H}=1\Omega \cdot \text{s}$. En radiotecnía la inductancia de las bobinas se mide en millonésimas y milésimas de henrio. El coeficiente de autoinducción de las bobinas de reactancia con núcleo de hierro puede alcanzar el valor de henrios enteros.

§ 116. *Energía magnética del campo*

En el capítulo dedicado al campo eléctrico demostramos que la energía eléctrica de un sistema podemos figurárnosla como una magnitud distribuida en el espacio con la densidad $\frac{1}{2} \epsilon E^2$ (en el SI). La energía eléctrica total de un sistema puede hallarse integrando esta expresión con respecto al espacio ocupado por el campo. Subrayamos la importancia de este hecho, ya que permite expresar la energía por medio de la intensidad del campo y fundamenta la idea acerca de la localización del campo.

Es natural esperar que semejantes razonamientos sean correctos también para el campo magnético. Esto es así en efecto y puede demostrarse mediante cálculos rigurosos el paso de la fórmula de la energía magnética $\frac{1}{2} LI^2$ a la expresión de la densidad de dicha energía $\frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2$, que es totalmente análoga a la expresión correspondiente del campo eléctrico.

Hagamos esta transición para el caso más simple del campo uniforme de un solenoide circular. Sustituyendo el valor de la inductancia en la fórmula de la energía magnética, obtenemos

$$W_m = \frac{\mu_0 \mu \left(\frac{n}{l}\right)^2 I^2}{2} V.$$

Pero $\frac{nI}{l}$ es la intensidad del campo. Por consiguiente, la energía magnética de la bobina se puede representar de la forma

$$W_m = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V,$$

de manera que la densidad de la energía magnética vendrá representada por la expresión

$$w_m = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} \quad (\text{SI}),$$

$$w_m = \frac{1}{8\pi} \mu H^2 \quad (\text{CGS}).$$

De este modo, para un sistema cualquiera de corrientes, la energía magnética puede representarse por la integral con respecto al volumen ocupado por el campo:

$$W_m = \frac{\mu_0}{2} \int \mu H^2 d\tau \quad (\text{SI}),$$

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int \mu H^2 d\tau \quad (\text{CGS}).$$

Consideremos la energía magnética de dos corrientes. Su expresión se descompone naturalmente en tres integrales, si la intensidad del campo resultante H nos la figuramos como la suma de las intensidades de ambas corrientes: $H=H_1+H_2$. El sentido de cada una de las integrales que figuran en la expresión de la energía magnética

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int \mu H_1^2 d\tau + \mu_0 \int \mu H_1 H_2 d\tau + \frac{\mu_0}{2} \int \mu H_2^2 d\tau,$$

es bastante evidente. La primera integral y la última dan las energías magnéticas de la primera y de la segunda corriente. En cuanto a la segunda integral, puede llamársele energía de interacción de las corrientes. En efecto, esta integral puede tener diversos valores para magnitudes iguales de las intensidades de los campos H_1 y H_2 . Figurémonos que varía la posición mutua de ambas corrientes; en este caso, los vectores de los campos H_1 y H_2 , hablando en general, se vuelven el uno hacia el otro y el valor de la energía de interacción varía.

Las integrales primera y tercera pueden, desde luego, representarse, por medio de la intensidad de la corriente y de la inductancia, como $\frac{1}{2} L_1 I_1^2$ y $\frac{1}{2} L_2 I_2^2$. En lo referente a la integral de en medio, está claro que su magnitud debe ser proporcional al producto de las intensidades de las corrientes. Por lo tanto,

$$\int \mu H_1 H_2 d\tau = M I_1 I_2.$$

El coeficiente de proporcionalidad M se llama *coeficiente de inducción mutua*. Lo mismo que la inductancia, M depende de la geometría del sistema y de la distribución de los cuerpos magnéticos en él.

De este cálculo se deduce claramente que con la variación de la energía magnética del sistema de corrientes no sólo están ligados el trabajo de las fuerzas extrañas y el desprendimiento de calor de Joule, sino también el trabajo del campo que se gasta cuando se trasladan los conductores por la acción de la fuerza de Ampere. La ley de conservación de la energía exige por esto el cumplimiento de la igualdad

$$dW_m = -A - (Q - P) dt.$$

Aquí A es el trabajo mecánico. De este modo se confirma que la energía magnética se invierte, en el caso general, en trabajo de traslación de los conductores y en el desprendimiento de calor de Joule que supera el trabajo de las fuerzas extrañas.

En las relaciones que hemos dado en este párrafo sólo no se toma en consideración un fenómeno, el de la histéresis magnética. Como esta cuestión tiene un carácter especial, no nos detendremos en ella.

Ejemplo. La energía almacenada en el campo magnético de la bobina (del ejemplo de la pág. 326) será

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{1,9 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1^2}{2} = 0,95 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

y la densidad de la energía

$$w_m = \mu_0 \mu \frac{H^2}{2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot \frac{1000^2}{2} = 0,63 \text{ J/m}^3.$$

Está claro que este mismo resultado puede obtenerse dividiendo la energía total del campo magnético por el volumen de la bobina: $w_m = W_m / Sl$.

§ 117. Oscilaciones eléctricas

Para la electrodinámica tienen una importancia fundamental los procesos de transformación de la energía eléctrica en magnética y viceversa. En calidad de sistema simplísimo en el cual tienen lugar transformaciones de este tipo, podemos considerar un condensador, eléctrico cargado cuyas armaduras se unen en un instante determinado con los extremos de una bobina (fig. 129). Cuando el condensador se descarga, a través de la bobina pasa corriente eléctrica y alrededor de ella se crea un campo magnético. En este sistema existen en cada instante dos campos ligados estrechamente entre sí: el eléctrico del condensador y el magnético de la bobina. La energía de este circuito se compone en cada instante de la energía eléctrica del campo, concentrado principalmente entre las armaduras del condensador, y la energía magnética, concentrada en lo fundamental dentro de la bobina. Como sabemos, en un circuito de este tipo se producen oscilaciones eléctricas. Ahora demostraremos la necesidad de que dichas oscilaciones se produzcan.

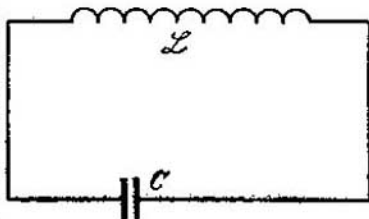


FIG. 129.

Al principio no tomaremos en consideración la pérdida de energía en calor de Joule. En este caso la ley de conservación de la energía exige que se cumpla la igualdad

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} LI^2 = \text{const.}$$

La suma de las energías eléctrica y magnética es la misma en cada instante y, por consiguiente, la derivada con respecto al tiempo de la expresión que acabamos de escribir debe ser nula:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + L \frac{I}{dt} = 0.$$

Y como la intensidad de la corriente debe ser igual a la disminución de la carga en las placas del condensador,

$$I = \frac{dQ}{dt},$$

la ecuación se simplifica y toma la forma

$$\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0.$$

Esta relación entre la carga en las placas del condensador y la intensidad de la corriente, que es la derivada de la carga respecto del tiempo, sólo puede satisfacerse si la carga y la corriente oscilan según una ley armónica.

Esto queda claro si comparamos las ecuaciones de una oscilación armónica (pag. 92) con las halladas:

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt}, & v &= \frac{dx}{dt}; \\ L \frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{C} Q, & m \frac{dv}{dt} &= -kx. \end{aligned}$$

La analogía existe entre la carga y la corriente, de una parte, y la elongación y la velocidad del movimiento, de otra. En cuanto a los parámetros del sistema, la inductancia desempeña el papel de la inversa de la capacidad, el de la rigidez del sistema.

Tomando el origen del tiempo en el instante en que el condensador está totalmente cargado, suponemos que

$$Q = Q_0 \cos \omega t.$$

Entonces

$$I = -Q_0 \omega \sin \omega t.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación diferencial, obtenemos

$$-LQ_0 \omega^2 \cos \omega t = -\frac{1}{C} Q_0 \cos \omega t$$

o después de simplificar

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

De este modo, cualquiera que sea la carga inicial en las armaduras del condensador, se producen en él oscilaciones armónicas de frecuencia propia $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. La frecuencia de las oscilaciones eléctricas será tanto mayor cuanto menor sea la capacidad y la inductancia del circuito.

Pero, ¿qué ocurre en un circuito de corriente real, en el que no pueden despreciarse las pérdidas en calor de Joule? Es evidente que en este caso disminuirá la energía total del sistema de acuerdo

con la igualdad

$$dW = -I^2 R dt,$$

es decir,

$$-I^2 R = \frac{1}{C} Q \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt}.$$

Volviendo a derivar con respecto al tiempo y aplicando la relación entre la carga y la corriente, llegamos a una ecuación de la forma

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0.$$

Aquí también se puede apreciar la analogía entre las correspondientes magnitudes eléctricas y mecánicas. Comparando la última ecuación con la de las oscilaciones mecánicas con rozamiento (pág. 97), notamos la analogía entre la resistencia R y el coeficiente α que caracteriza la resistencia mecánica.

La resolución de estas ecuaciones diferenciales lineales se estudia en los cursos de matemáticas superiores. Nosotros nos limitaremos a dar la fórmula definitiva, cuya corrección no es difícil de comprobar haciendo la sustitución en la ecuación

$$I = I_0 e^{-\beta t} \cos \omega t.$$

La frecuencia de las oscilaciones

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Por lo tanto, el proceso viene determinado por dos características: la frecuencia propia de las oscilaciones libres no amortiguadas $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ y el coeficiente de amortiguación $\beta = R/(2L)$. Vemos, en primer lugar, que una amortiguación pequeña se obtiene disminuyendo la resistencia con respecto a la inductancia (está claro que esto es difícil de conseguir; por ejemplo, aumentando el número de espiras de la bobina, aumentamos al mismo tiempo ambas magnitudes, aunque L crecerá más de prisa). En segundo lugar, podemos señalar que si se da la condición

$$\omega_0^2 < \beta^2, \text{ es decir, } 4L < CR^2,$$

las oscilaciones serán imposibles. La descarga del condensador en estas condiciones da lugar a un proceso aperiódico análogo al retorno de un péndulo, desviado en un medio viscoso, a su posición de equilibrio.

Ejemplo. Tenemos un condensador variable cuya capacidad máxima $C = 500$ pF. Calculemos la inductancia de las bobinas necesarias para el circuito de un receptor de radio que funcione en las bandas 1500 m y 15 m.

1. La frecuencia de las ondas eléctricas correspondientes a $\lambda_1 = 1500$ m es $\nu_1 =$

$\approx 2 \cdot 10^5 \text{ Hz} \approx 200 \text{ k Hz}$. Como $\omega = 2\pi\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}$, tendremos que $L_1 = \frac{1}{4\pi^2\nu_1^2 C} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ H} = 1,2 \text{ mH}$. Para que el proceso que tiene lugar en el circuito sea periódico, la resistencia de éste debe ser menor que $R_1 = 2\sqrt{L_1/C} = 3000 \Omega$.

2. $\lambda_2 = 15 \text{ m}$, $\nu_2 = 2 \cdot 10^7 \text{ Hz} = 20 \text{ MHz}$, $L_2 = 0,12 \cdot 10^{-6} \text{ H} = 0,12 \mu\text{H}$. Para que las oscilaciones sean posibles, la resistencia del circuito debe ser menor que $R_2 = \sqrt{L_2/C} = 30 \Omega$.

§ 118. Energía electromagnética

En un sistema como un circuito oscilante formado por un condensador (sobre todo si está constituido por placas próximas de gran superficie) y una bobina (especialmente si tiene muchas espiras superpuestas), los campos eléctrico y magnético se concentran cada uno en su región. Por esto puede hablarse de las energías eléctrica y magnética como de dos magnitudes que, aunque ligadas entre sí, son distintas. Esta división pierde en un grado considerable su sentido físico cuando pasamos a considerar campos rápidamente variables, en los cuales los campos magnéticos y eléctricos son considerables por su magnitud y se encuentran en las mismas regiones del espacio. Recordando lo dicho en el § 113 acerca del carácter relativo de la división del campo electromagnético en eléctrico y magnético, se comprende la necesidad de introducir en la teoría el concepto de energía electromagnética, igual formalmente a la suma de las energías eléctrica y magnética del campo. La energía electromagnética está distribuida en el espacio con la densidad

$$w = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2).$$

Un volumen V contiene la energía electromagnética

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V (\varepsilon E^2 + \mu H^2) dV.$$

En los campos rápidamente variables pierde su sentido físico el problema de la transformación de la energía magnética en eléctrica y viceversa. Sin embargo, hay que tener en cuenta todas las transformaciones energéticas que ocurren en el campo electromagnético, incluyendo en el balance energético el valor de la energía electromagnética considerada como un todo único.

Si admitimos que la expresión escrita para la energía electromagnética es correcta, aplicando las ecuaciones del campo electromagnético, que estudiamos en el capítulo anterior, puede demostrarse rigurosamente el siguiente teorema para las disminuciones de la energía electromagnética dentro de un volumen determinado

del espacio:

$$-\frac{dW}{dt} = (P - Q) + \oint K \cos \alpha \, dS.$$

Este teorema fue demostrado en 1884 por J. H. Poynting, y en una forma más general (aplicable no concretamente al campo electromagnético), por N. A. Umov en el año 1874. La integral que figura en el segundo miembro de la igualdad es el flujo del vector K^{**} . Este vector, como demuestran los cálculos que debido a su complejidad omitimos, es perpendicular al plano que pasa por los vectores del campo E y H (fig. 130) e igual a

$$K = \frac{c}{4\pi} [EH] \text{ en el sistema CGS y}$$

$$K = [EH] \text{ en el SI.}$$

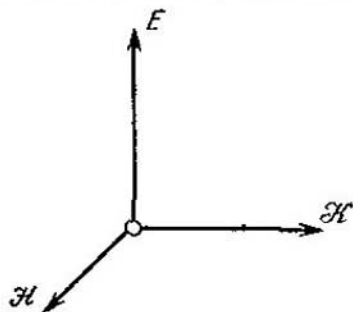


FIG. 130.

Como al alejarse de las fuentes del campo hacia el infinito los valores de las intensidades disminuyen bastante de prisa, el flujo del vector de Poynting se anula, si nos referimos a todo el espacio. En este caso, el teorema afirma que la variación de la energía electromagnética es igual al exceso de trabajo de las fuerzas extrañas sobre el desprendimiento de calor.

No obstante, lo que ofrece más interés es la aplicación del teorema a un volumen finito, es decir, cuando el flujo del vector de Poynting no es nulo. Supongamos que el volumen que se considera no abarca las corrientes; en este caso la igualdad tiene la forma

$$-\frac{dW}{dt} = \oint K \cos \alpha \, dS.$$

La variación de la energía electromagnética es igual al flujo del vector de Poynting a través de la superficie que limita el volumen considerado.

El vector de Poynting caracteriza al flujo de energía electromagnética, y la última ecuación expresa el siguiente hecho fundamental: la variación de la energía electromagnética dentro de un volumen cualquiera va acompañada de la entrada o salida en este volumen de una cantidad equivalente de energía.

^{**} Recordamos que, en matemáticas, una expresión del tipo $\int_S A \, dS$ recibe el nombre de flujo del vector A a través de la superficie S .

En realidad, el teorema de Poynting es una consecuencia necesaria de la ley de conservación de la energía y de la hipótesis sobre la localización de la energía electromagnética en el espacio.

Si el vector de Poynting tiene en efecto el sentido de un flujo de energía, debe estar ligado a la densidad de la energía por la relación $K = v w$ (véase la pág. 123, donde se estudia un problema análogo relacionado con la propagación de las ondas elásticas en un medio). La teoría de Maxwell permite calcular la velocidad de propagación v de la energía electromagnética. Esta velocidad resulta ser

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Por lo tanto, la energía electromagnética debe propagarse en el vacío con la velocidad $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s, lo que de un modo brillante está de acuerdo con la experiencia. La coincidencia de los valores de c determinados a partir de los experimentos electrodinámicos puros (por ejemplo, de la medida de la interacción de dos corrientes), con el valor de esta constante hallado por medición directa de la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas, es una magnífica y casi concluyente demostración de que la teoría de Maxwell es correcta.

En un medio, la velocidad de propagación del campo electromagnético es $\sqrt{\epsilon\mu}$ veces menor. Más adelante veremos en qué casos se cumple esta relación y explicaremos las desviaciones de ella.

Consideremos ahora las transformaciones energéticas que ocurren en las regiones limitadas del espacio, que incluyen corrientes de conducción.

Supongamos que en la región que analizamos hay un conductor cilíndrico de radio r por el que pasa una corriente de densidad j . La intensidad del campo magnético en la superficie del conductor (véase la pág. 295) será en el sistema CGS, $H = \frac{2\pi}{c} r j$, y las líneas de fuerza magnéticas son en este caso circunferencias que rodean al eje de la corriente. Con ayuda de la fig. 131 nos convencemos de que el vector de Poynting estará dirigido hacia dentro del conductor, puesto que la intensidad del campo y el vector de corriente coinciden en dirección. En cuanto al valor numérico del vector de Poynting, obtenemos (en la superficie del conductor), que

$$\frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi} \frac{j}{\lambda} H = \frac{j^2 r}{2\lambda}.$$

Determinemos ahora el flujo del vector de Poynting que entra en un trozo de conductor de longitud l . Este flujo es igual a

$$K \cdot 2\pi r l = \frac{j^2}{\lambda} \pi r^2 l = \frac{j^2}{\lambda} V,$$

donde V es el volumen del trozo de conductor. Pero j^2/λ no es más que el calor de Joule que se desprende en la unidad de volumen del conductor. Hemos demostrado, pues, de esta forma, que el flujo del vector de Poynting entra en el conductor y trae una energía cuya cantidad es precisamente igual a la que se gasta en calor de Joule.

¿De dónde proviene este flujo? Por este mismo procedimiento puede demostrarse que el flujo de energía proviene de aquellos trozos del conductor en que están localizadas las fuerzas extrañas.

Este cuadro hace comprensible la propagación de la energía electromagnética a lo largo de los conductores. Si la corriente eléctrica se conecta en Kúibishev, y una lámpara eléctrica se enciende en Moscú, la energía habrá sido traída por las ondas electromagnéticas, y no por los primeros electrones que comenzaron a moverse a lo largo del cable.

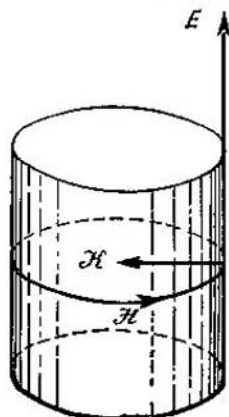


FIG. 131.

Ejemplos. 1. Calculemos de qué orden será la tensión que aparece en la antena de un receptor de radio que se halla a la distancia $R=100$ km de una emisora que radia con la potencia $P=100$ kW= 10^5 J/s.

El valor numérico del vector de Poynting en el punto en que se encuentra la antena receptora será

$$K = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{10^5}{4\pi (10^5)^2} = 8 \cdot 10^{-7} \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}) \text{ (W}/\text{m}^2).$$

En el sistema CGS los vectores E y H tienen las mismas dimensiones ($\text{g}^{1/2} \text{cm}^{-1/2} \text{s}^{-1}$). Puede demostrarse que, para una onda electromagnética que se propague en el vacío, los valores numéricos de los vectores E y H , medidos en el sistema CGS, son iguales entre sí: $E=H$. Recordemos la relación que existe entre las unidades de E y H en el sistema CGS y SI

$$1 \text{ V}/\text{m} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4} \text{ u. CGS}; \quad 1 \text{ A}/\text{m} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Oe.}$$

En este caso, los valores numéricos de los vectores E y H en el SI serán

$$E' = \frac{1}{3} 10^{-4} E \quad \text{y} \quad H' = 4\pi \cdot 10^{-3} H.$$

Para la onda electromagnética ($E'=H'$) se obtiene de aquí que $E=120\pi H$. En el SI, $K=EH$, por consiguiente, $K=E^2/(120\pi)$,

$$E = \sqrt{120\pi K} = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ V/m.}$$

Esto quiere decir, que en una antena receptora de 1 m de longitud se producirá una diferencia de potencial del orden de 20 mV.

2. Comparemos el valor de K que hemos obtenido, con la constante solar, es decir, con la energía que la Tierra recibe del Sol por 1 cm² en 1 s, descontando las pérdidas en la atmósfera:

$$K_{\text{Sol}} = 0,15 \text{ W/cm}^2 = 1500 \text{ W/m}^2.$$

§ 119. Impulso y presión de un campo electromagnético

De acuerdo con la teoría de la relatividad (véase la pág. 448) la materia que posee energía tiene también masa. La relación entre la masa y la energía viene dada por la ley $E=mc^2$, donde c es la velocidad de propagación de la luz. Como ya sabemos, la energía del campo electromagnético puede considerarse distribuida en el espacio con una densidad determinada:

$$w = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2).$$

De este modo, una unidad de volumen ocupada por un campo electromagnético posee una masa $m=w/c^2$.

La materia en movimiento, que posee masa, debe tener también un impulso, igual al producto de la masa por la velocidad con que se mueve. De aquí puede deducirse que la unidad de volumen del campo electromagnético posee el impulso

$$g = mc = \frac{w}{c}.$$

A esta expresión es oportuno llamarle densidad del impulso.

Como ya hemos dicho antes (pág. 333), el vector de Poynting, que tiene el sentido de flujo de energía, debe estar ligado con la densidad de la energía por medio de la relación $K=wc$. Comparando las dos últimas fórmulas vemos que la densidad del impulso y el vector de Poynting están ligados por un coeficiente de proporcionalidad —el cuadrado de la velocidad de propagación de las ondas, c^2 —, y que, precisamente, la densidad del impulso es $g=K/c^2$.

El flujo de materia electromagnética, que posee masa e impulso, debe ejercer presión sobre una superficie que se interponga en su camino. El valor de esta presión puede expresarse en función de la densidad del impulso. Este valor puede ser distinto en dependen-

cia de si la energía de la onda es absorbida por la superficie o se refleja en ella. Como es natural, puede haber casos intermedios.

Durante un tiempo Δt , a la superficie S llega el campo magnético contenido en el volumen $Sc \Delta t$. Si la absorción es completa, durante este tiempo desaparecerá el impulso $gSc\Delta t$. Pero el cociente de dividir la variación del impulso por el tiempo, es una fuerza, y la fuerza dividida por la superficie es una presión. De este modo, la presión que sufre la superficie que absorbe la energía electromagnética es igual al producto de la densidad del impulso por la velocidad de la luz, $p=gc$ o, como $g=w/c$, la presión es igual a la densidad de la energía w .

Consideremos ahora el encuentro perfectamente elástico del campo con la superficie. Si se refleja toda la energía del campo (onda) electromagnético, la variación del impulso será dos veces mayor, puesto que el impulso cambia su dirección por la contraria. Absolutamente lo mismo ocurre en los casos puramente mecánicos (pág. 71), en los cuales la fuerza de un choque elástico es el doble que la de un choque inelástico. Así, pues, la presión que ejerce la onda sobre una placa perfectamente reflectora será

$$p = 2gc \quad \text{ó} \quad p = 2w.$$

Ahora ya es fácil obtener la fórmula para el caso general. Si sobre una placa se refleja parte de la energía y el coeficiente de reflexión es ρ , la presión del flujo (onda) vendrá representada por la fórmula

$$p = w(1 - \rho) + 2\rho w = (1 + \rho)w.$$

La comprobación experimental de estas fórmulas, llevada a cabo, para la luz, en 1900 por P. N. Lébedev, desempeñó un papel muy importante en el establecimiento de nuestros puntos de vista sobre la naturaleza de las ondas electromagnéticas. La presión de la luz es extraordinariamente pequeña incluso cuando se utilizan las fuentes más potentes. Por ejemplo, la presión que la luz de una «lámpara» de un millón de bujías (candelas), situada a 1 m de distancia, ejerce sobre un espejo, será una magnitud del orden de 10^{-4} din/cm². Precisamente por esto, el trabajo de Lébedev, para medir la presión de la luz con una exactitud del orden de 1—2%, se considera como la cumbre del arte de la experimentación.

La parte fundamental del aparato de Lébedev era una suspensión ligera (balanza de torsión) a la cual se sujetaban unas aletas. Una de estas aletas se hizo absorbente de la luz al máximo y la otra, reflectora. La luz se dirigía ya sobre una aleta, ya sobre la otra y se comparaban los ángulos de torsión, por los cuales se podía calcular la intensidad de la fuerza. Las grandes dificultades que tuvieron que vencerse en este experimento consistían, en primer lugar, en

que había que tener en cuenta la acción que el calentamiento de los restos de gas, que quedaban en el recipiente en que se encontraba la suspensión, ejercía sobre las aletas.

La teoría del campo electromagnético alternativo condujo, como hemos visto ahora, a la idea del campo como realidad física (materia electromagnética). La importancia enorme de los experimentos de Lébedev consiste en que demostraron directamente que esta idea es justa.

El campo electromagnético posee energía e impulso, se traslada en el espacio con una velocidad determinada y presiona sobre los obstáculos. Más tarde sabremos también (pág. 638) que el campo electromagnético puede transformarse en sustancia. Este conjunto de hechos demuestran indiscutiblemente que el campo electromagnético es una realidad física.

18

RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

§ 120. Dipolo elemental

La radiación electromagnética se produce en todos los casos en que en el espacio se crea un campo electromagnético variable. A su vez, el campo electromagnético variará con el tiempo, si cambia la distribución de la carga eléctrica en el sistema o si es variable la densidad de la corriente eléctrica. De este modo, son fuentes de radiación electromagnética todos los tipos de corriente alterna y de cargas eléctricas pulsantes.

Los sistemas más simples creadores de campo electromagnético son los dipolos magnéticos y eléctricos (y, antetodo, los últimos) de momento variable. Un dipolo eléctrico de este tipo es un sistema formado por una carga positiva en reposo y otra carga, negativa, que oscila en torno a la primera. Si esta oscilación se cumple según la ley armónica, el momento de dipolo variará también según esta ley, es decir, se representará por la fórmula $p = p_0 \cos \omega t$. La importancia de este modelo tan sencillo de emisor es muy grande, debido a que una multitud de sistemas reales se comportan, con buena aproximación, como dipolos ideales.

Debemos recordar el § 93, donde se indicó que las propiedades eléctricas de cualquier sistema en el cual los «centros de gravedad» de la carga positiva y negativa no coinciden, pueden definirse si se conoce el momento dipolar del sistema. Pero los sistemas eléctrica-

mente neutros, en los que las cargas positivas y negativas son capaces de desplazarse las unas respecto de las otras, constituyen la parte fundamental de los emisores de energía electromagnética, ante todo, porque bajo este rótulo se comprenden los sistemas moleculares y atómicos. Un electrón que gira alrededor de un núcleo atómico, es un sistema con momento de dipolo variable; una molécula neutra, cuyos átomos se encuentran en estado de oscilación, también es con frecuencia un sistema con momento dipolar variable. Sin embargo, esto no agota aún nuestro interés por el dipolo eléctrico. En el párrafo siguiente demostraremos que una antena radiotécnica lineal puede compararse a un dipolo (los términos análogos, como oscilador y vibrador, tienen un sentido más amplio que el término exacto «dipolo»).

En cuanto a los dipolos magnéticos, nos encontraremos con ellos en aquellos casos en que la distribución de la carga eléctrica y, por consiguiente, el momento de dipolo del sistema permanecen invariables, pero al mismo tiempo la densidad de la corriente y, por lo tanto, el momento magnético del sistema varían con el tiempo. El ejemplo principal es el de un cuadro por el que pasa corriente eléctrica alterna. Si la corriente se cierra, las cargas eléctricas no se concentrarán ni disiparán en parte alguna y el momento dipolar eléctrico de este cuadro será nulo e invariable. Pero al mismo tiempo, el campo magnético del cuadro, que está relacionado con el valor de su momento magnético, cambiará y, por consiguiente, ocasionará la emisión de energía electromagnética. Señalaremos el siguiente resultado de la teoría: si un sistema posee simultáneamente momento eléctrico y magnético, la emisión del dipolo magnético a grandes distancias de la fuente es generalmente menor que la emisión del dipolo eléctrico.

Si el dipolo emite cediendo su energía interna o, como ocurre en la antena, transformando en energía de emisión la energía de las fuentes extrañas, este dipolo puede llamarse *radiador o emisor primario*. Pero, además de éstos, también ofrece gran interés la *radiación secundaria*, es decir, el fenómeno en virtud del cual un dipolo entra en oscilación debido a la acción de una onda electromagnética y se convierte en emisor únicamente por esta causa. Las oscilaciones secundarias serán particularmente intensas en el caso en que la onda primaria tenga la misma frecuencia que la propia del dipolo (resonancia).

La acción de poner un dipolo en estado de oscilación nos la podemos figurar como un proceso mecánico: el de puesta en oscilación de las cargas por una fuerza exterior igual al producto de la carga por la intensidad. Pero al mismo tiempo, el proceso de generación, en una antena receptora, de oscilaciones secundarias se puede considerar como un proceso inducido de provocación de una

corriente eléctrica alterna por un campo magnético variable. Estas dos consideraciones coinciden dentro de la exactitud con que la antena puede sustituirse por un dipolo.

§ 121. Una antena como dipolo eléctrico

Entre el estado de oscilación de un circuito oscilante (pág. 329) y las oscilaciones de la corriente en la antena existe una diferencia esencial. Cuando hablábamos de la oscilación eléctrica de un circuito nos referíamos a una determinada intensidad instantánea de la corriente, a una determinada carga instantánea en las armaduras del condensador. Se sobrentendía fácilmente que la intensidad de la corriente era igual en todas las partes del circuito y que la carga eléctrica estaba concentrada en las armaduras del condensador y que, por consiguiente, en un instante dado podía tener sólo un valor único.

Al pasar a la antena deja de ser lícito considerar la oscilación eléctrica del mismo modo que estudiamos en su tiempo la oscilación del péndulo. No obstante, la oscilación de la corriente eléctrica en la antena tiene su analogía mecánica: se asemeja mucho a la oscilación (vibración) de una varilla o de una cuerda, es decir, es una onda estacionaria.

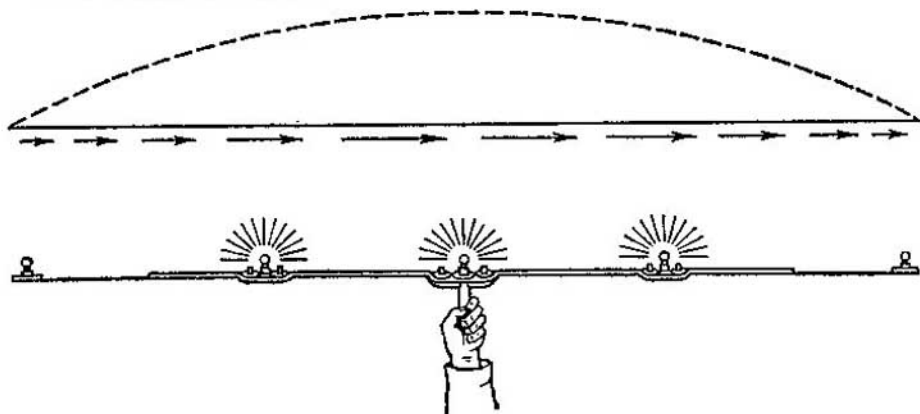


FIG. 132.

Este hecho se puede evidenciar demostrando que en una antena sometida a corriente existen nodos y vientres. De indicador de corriente puede servir una pequeña lámpara de incandescencia (fig. 132). Nos convenceremos de que en el punto medio del trozo de conductor libre en que se inducen las oscilaciones electromagnéticas existe

un vientre de corriente de conducción, mientras que en los extremos hay nodos de dicha corriente. En cada instante la corriente pasa por todas las partes de este conductor en el mismo sentido. En un instante determinado se anula la corriente en todos los puntos del conductor, y luego comienza a pasar en sentido contrario. Respectivamente varían las cargas eléctricas que se hallan repartidas continuamente a lo largo de dicho conductor. Es evidente que, mientras la corriente pasa en un sentido, se produce la concentración de la carga positiva en una mitad del conductor y la formación de una carga negativa en la otra. En el instante en que la corriente se anula, en los extremos se acumulan las cargas máximas de signos opuestos. Después la corriente empieza a pasar en sentido contrario y las cargas comienzan a disminuir hasta que se anulan en el instante en que la intensidad de la corriente es máxima en todos los puntos del conductor. Luego empieza la recarga; en las dos mitades del conductor comienzan a acumularse cargas de signo contrario y así sucesivamente.

Llamamos la atención sobre el hecho de que, en cada instante, en las dos mitades de la varilla hay cargas de signo contrario. Dos cargas de igual valor y signo contrario, situadas a cierta distancia una de otra, constituyen un dipolo eléctrico. Puede decirse por esto, que las oscilaciones eléctricas que tienen lugar en una antena son muy parecidas a las de un dipolo eléctrico, en que el momento dipolar varía desde su valor positivo máximo hasta cero y después, desde cero, crece en sentido contrario para luego volver a disminuir y así sucesivamente.

La diferencia entre la antena y el dipolo sólo se manifiesta a cortas distancias de ella. A distancias centenares de veces mayores que las dimensiones de la antena, el campo creado por ésta es prácticamente indistinguible del generado por un dipolo eléctrico ideal.

Retornemos una vez más a la analogía de la antena con una varilla. Las frecuencias propias de las oscilaciones eléctricas que pueden existir en una antena libre, no puesta a tierra, no se limitan al caso más simple en que en la longitud de dicha antena cabe una semionda (en la técnica de ondas ultracortas se utiliza principalmente este tipo de dipolo en media onda). Entre la longitud de la onda y de la antena existe una relación, comprensible desde el punto de vista expuesto en la pág. 140, $L = n \frac{\lambda}{2}$. Estas son las longitudes de onda que una antena de longitud L es capaz de emitir y captar.

Los procedimientos para variar las frecuencias propias de una antena son bien conocidos por los especialistas en radiotecnica. Se reducen a acoplar a la antena una bobina de autoinducción o un

condensador. Cambiando la inductancia o la capacidad pueden variarse las frecuencias propias de la antena dentro de límites muy amplios.

§ 122. Radiación de un dipolo

La radiación de dipolo puede estudiarse experimentalmente. El resultado coincide totalmente con el estudio teórico que realizó por primera vez Hertz. Nosotros consideraremos únicamente los resultados de las experiencias y de los cálculos teóricos, limitándonos al estudio del campo del dipolo lejos de él, en la llamada zona de onda, es decir, a distancias considerablemente mayores que las dimensiones del dipolo.

Por muy complejas que sean las leyes por que oscila un dipolo, sus oscilaciones siempre se pueden descomponer, por el teorema de Fourier, en un espectro, o sea, se pueden representar en forma de una suma de oscilaciones armónicas de frecuencias ω , 2ω , 3ω , etc. Por esta razón basta estudiar el campo electromagnético de un dipolo cuyo momento varíe según la ley armónica $p = p_0 \cos \omega t$.

El cálculo y la experiencia demuestran que el campo de un sistema de este tipo es una onda esférica que se propaga con la velocidad $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$. Los vectores eléctrico y magnético de esta onda forman entre sí un ángulo de 90° y un ángulo igual con la dirección de propagación. La última circunstancia se deduce del teorema de Poynting.

Los vectores eléctrico y magnético varían en la zona de onda en una misma fase, realizando en cada punto del espacio oscilaciones armónicas. Entre los valores numéricos de los vectores intensidad existe una relación simple, a saber:

$$\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H.$$

De aquí se deduce la siguiente representación del vector de Poynting:

$$K = \frac{c}{4\pi} E^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{v}{4\pi} \epsilon E^2.$$

De este modo, la intensidad de la onda, o sea, la energía correspondiente a la unidad de superficie en la unidad de tiempo es proporcional al cuadrado de la amplitud de la intensidad del campo eléctrico.

La radiación del dipolo no es igual en distintas direcciones. La amplitud, y junto con ella la intensidad, dependen del ángulo de inclinación de la línea de propagación con respecto al eje del dipolo. La radiación es máxima en la dirección perpendicular al eje del dipolo, y nula, en la dirección del momento dipolar. La

teoría da la siguiente expresión de la intensidad del campo eléctrico:

$$E = \frac{p_0 \omega^2}{c^2 R} \sin \theta \cos \omega \left(t - \frac{R}{v} \right),$$

donde el factor que figura delante del coseno es la amplitud de la onda del vector \mathbf{E} . El ángulo θ es el formado entre la dirección de propagación y el eje del dipolo. La expresión para el campo magnético sólo difiere, de la escrita, en un factor no esencial.

La dependencia de la intensidad de la radiación respecto de la dirección suele representarse por un diagrama como el de la fig. 133. Aquí el radio vector, trazado en la dirección que nos interesa, corta a la curva de intensidades. El segmento formado en esta intersección da,

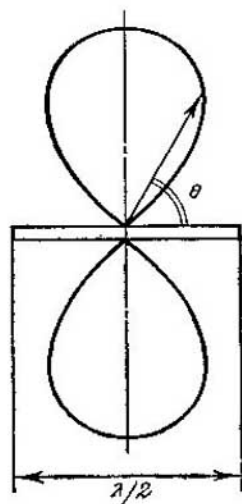


FIG. 133.

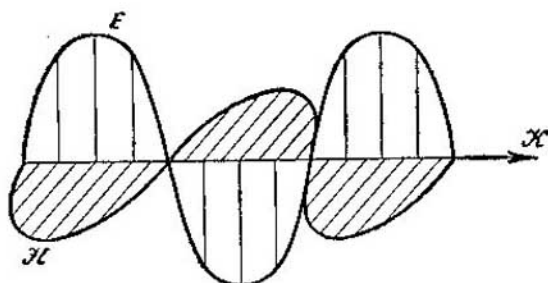


FIG. 134.

en una escala determinada, la intensidad de la radiación.

Un resultado muy importante es la proporcionalidad de la amplitud al cuadrado de la frecuencia de radiación. Es evidente que la intensidad de radiación de un dipolo dependerá mucho de la frecuencia; concretamente es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia:

$$K \sim \frac{\omega^4}{R^2} \sin^2 \theta.$$

Así, por ejemplo, si la frecuencia se reduce a la mitad, la intensidad se hará 16 veces menor.

La teoría condujo a una importante conclusión acerca del carácter transversal de la onda electromagnética. Esto se ve claramente en la fig. 134. Los vectores eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación. En virtud de esto, al girar alrededor de la dirección de propagación, la onda electromagnética cam-

bia de propiedades. Estas últimas reciben el nombre de *propiedades de polarización*.

La figura de las líneas de fuerza de un dipolo radiante no ofrece gran interés. En la fig. 135 se representan los vectores intensidad del campo eléctrico para ciertos puntos del espacio. El campo es rotacional y las líneas de fuerza son cerradas. Durante la emisión, las líneas cerradas se mueven, extendiéndose hacia el lado opuesto al emisor. En lo tocante a las líneas de fuerza magnética, estas líneas son circunferencias que rodean al eje del dipolo.

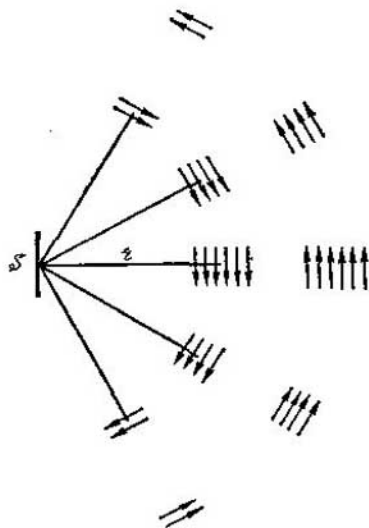


FIG. 135.

A grandes distancias del dipolo, la onda esférica no difiere prácticamente de una onda plana. La disposición de los vectores E , H y K en la onda plana y las relaciones numéricas que hemos dado más arriba continúan, claro está, siendo las mismas.

§ 123. Espectro electromagnético

La teoría demuestra que la radiación electromagnética se produce cuando el movimiento de las cargas eléctricas es variado, es decir, acelerado. Un flujo de cargas con movimiento uniforme (libre)

no radia. También carecen de radiación de campo electromagnético las cargas que se mueven por la acción de una fuerza constante, por ejemplo, las cargas que describen una circunferencia en un campo magnético.

En los movimientos oscilatorios la aceleración varía continuamente, por lo que las oscilaciones de las cargas eléctricas dan radiación electromagnética. Además de esto, la radiación electromagnética se produce cuando las cargas se retardan bruscamente, por ejemplo, cuando un haz de electrones se encuentra con un obstáculo (producción de rayos X). En el movimiento térmico caótico de las partículas también se genera radiación electromagnética (radiación térmica). Las pulsaciones de la carga nuclear ocasiona la radiación electromagnética conocida con el nombre de rayos γ . Los rayos ultravioleta y la luz visible son producidos por el movimiento de los electrones atómicos. Las oscilaciones de una carga eléctrica a escalas cósmicas origina la radioemisión de los cuerpos celestes.

Además de los procesos naturales, como resultado de los cuales se producen radiaciones electromagnéticas de las más diversas propiedades, existen distintas posibilidades experimentales de crear una radiación electromagnética.

La característica fundamental de la radiación electromagnética es su frecuencia (si se trata de oscilaciones armónicas) o su banda de frecuencias. Está claro que por medio de la relación $c=v\lambda$ se puede reducir la frecuencia de la radiación a la longitud de la onda electromagnética en el vacío.

La intensidad de la radiación es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia. Por esta razón, una radiación de frecuencias muy bajas, con longitud de onda del orden de centenares de kilómetros, es inobservable. La gama de las ondas radioeléctricas comienza prácticamente en las longitudes del orden de 1—2 km, lo que corresponde a frecuencias del orden de 150 kHz; las longitudes de onda del orden de 200 m pertenecen a la gama de ondas medias, y las de decenas de metros son ya ondas cortas. Las ondas ultracortas se salen de la gama ordinaria de las ondas radioeléctricas; las longitudes de onda del orden de varios metros y fracciones de metro e incluso hasta un centímetro (es decir, las frecuencias del orden de 10^{10} — 10^{11} MHz) se utilizan en la televisión y en la radiolocalización (radar).

Ondas electromagnéticas aún más cortas fueron obtenidas en 1924 por la física soviética A. Glagóleva-Arkádieva. Utilizó como generador las chispas eléctricas que saltaban entre limaduras de hierro suspendidas en aceite y obtuvo ondas de hasta 0,1 mm de longitud. Aquí ya se llega a la superposición con las longitudes de onda de la radiación térmica.

La región de la luz visible es bastante pequeña: comprende solamente las longitudes de onda desde $7,6 \cdot 10^{-5}$ hasta $4 \cdot 10^{-5}$ cm. Después siguen los rayos ultravioletas, imperceptibles a la vista, pero que se detectan bien con aparatos físicos. Estos rayos tienen longitudes de onda desde $4 \cdot 10^{-5}$ hasta 10^{-5} cm.

A continuación de los rayos ultravioletas van los rayos X, cuyas longitudes de onda se extienden desde 10^{-6} hasta 10^{-10} cm. Cuanto menor es la longitud de onda, tanto más débilmente son absorbidos los rayos X por las sustancias. Las radiaciones electromagnéticas más cortas y penetrantes son las llamadas rayos γ (con longitud de onda desde 10^{-9} cm en adelante).

La característica de cualquiera de las radiaciones electromagnéticas enumeradas será exhaustiva si se efectúan las siguientes medidas. En primer lugar hay que, por cualquier método, descomponer la radiación electromagnética en su espectro. En el caso de la luz, de los rayos ultravioletas y de la radiación infrarroja, esto puede conseguirse mediante la difracción por un prisma o

haciendo pasar la radiación a través de una red de difracción (véase más adelante). En el caso de los rayos X y γ , la descomposición en el espectro se logra por reflexión en un cristal (véase la pág. 410).

Las ondas de la gama que se usa en radiotecnica se desdoblan en el espectro aplicando el fenómeno de la resonancia.

El espectro que se obtiene de la radiación puede ser continuo o de rayas, es decir, puede llenar sin interrupción cierta banda de frecuencias o puede estar formado por rayas nítidas aisladas correspondientes a un intervalo de frecuencias extremadamente estrecho. En el primer caso, para la característica del espectro hay que dar la curva de la intensidad en función de la frecuencia (o de la longitud de onda), en el segundo, el espectro quedará definido si se dan todas las rayas que hay en él, indicando sus frecuencias e intensidades.

La experiencia demuestra que una radiación electromagnética de frecuencia e intensidad dadas puede distinguirse por su estado de polarización. Junto a las ondas en que el vector eléctrico oscila a lo largo de una línea determinada (onda linealmente polarizada), nos encontramos también con una radiación en la cual las ondas linealmente polarizadas han girado la una con respecto a la otra alrededor del eje del rayo y se superponen entre sí. Cuando se da una característica completa de una radiación, hay que indicar su polarización.

Conviene advertir que, incluso en las oscilaciones electromagnéticas más lentas, no es imposible medir los vectores eléctricos y magnéticos de la onda. El cuadro del campo que hemos pintado antes tiene carácter teórico. Sin embargo, teniendo en cuenta la integridad e indisolubilidad de toda la teoría electromagnética, su veracidad no ofrece duda.

La afirmación de que tal o cual tipo de radiación pertenece a las ondas electromagnéticas tiene siempre un carácter indirecto. No obstante, las consecuencias que se deducen de esta hipótesis son tantísimas y concuerdan entre sí tan estrechamente, que la hipótesis sobre el espectro electromagnético hace ya mucho tiempo que adquirió todos los rasgos de una realidad natural.

§ 124. Naturaleza cuántica de la radiación

Ya hemos dicho (pág. 163) que el estudio de los fenómenos atómicos condujo al descubrimiento de la ley según la cual la energía interna de un sistema no puede tener un valor arbitrario, sino que se caracteriza por un sistema de niveles energéticos. La radiación de energía está ligada al paso del sistema de un nivel más alto a otro más bajo. La absorción de energía guarda relación con la elevación a un nivel más alto.

Esto se refiere en primer término a la radiación electromagnética. La naturaleza cuántica de los fenómenos ultramicroscópicos fue descubierta al estudiar una serie de hechos contradictorios hallados en relación con la radiación electromagnética a principios ya de nuestro siglo. De este modo, la emisión por un dipolo de una radiación electromagnética de frecuencia ν no se efectúa de manera continua, sino por cuantos (porciones). El valor de la energía de un cuanto es igual a $h\nu$, donde h es la constante de Planck, que es igual a $6,62 \times 10^{-27}$ erg \cdot s = $6,62 \cdot 10^{-34}$ J \cdot s.

La naturaleza cuántica de las ondas electromagnéticas se manifiesta en la emisión o en la absorción, ya que también la absorción sólo puede efectuarse por cuantos de energía. Si el valor de un cuanto de energía es igual a la diferencia entre dos niveles de energía cualesquiera, del sistema sobre el cual incide la onda, el proceso de absorción será bastante claro. En este caso se dice que la absorción es por resonancia. Desde el punto de vista de la física clásica este hecho se produce cuando la frecuencia del campo exterior es igual que la frecuencia de la oscilación de las partículas que constituyen el sistema. Si el valor del cuanto de la onda electromagnética es menor que la diferencia entre dos niveles de energía, la absorción no puede producirse y esta onda pasará libremente a través del sistema.

La radiación secundaria de un sistema se define en términos cuánticos del modo siguiente. El sistema absorbe un cuanto de energía electromagnética y se eleva a un nivel de energía más alto. En este nivel permanece el sistema cierto tiempo, y después retorna al nivel de energía en que estaba antes, cediendo en este caso energía también en forma de un cuanto.

Como esto se deduce evidentemente de la fórmula del cuanto de energía $h\nu$, los fenómenos cuánticos se revelan con tanta mayor claridad cuanto mayor es la frecuencia de la radiación. A pesar de esto, en la actualidad puede decirse que se ha puesto ya de manifiesto la naturaleza cuántica de la radiación de todas las zonas del espectro electromagnético. Resulta posible detectar la absorción cuántica de ondas radioeléctricas de varios cientos de metros de longitud (radioespectroscopia, véase la pág. 578). El origen de un espectro electromagnético de radiación depende, en primer lugar, de la distribución de los niveles de energía en el sistema y, en segundo, de las probabilidades de que éste pase desde el nivel n -ésimo al nivel m -ésimo. Si estas probabilidades se conocieran previamente, al mismo tiempo que el cuadro de los niveles de energía, la predicción del espectro irradiado por el sistema sería un problema fácil.

En más de una ocasión volveremos a ocuparnos de problemas de radiación y absorción de la energía electromagnética, pero ahora vamos a estudiar los relacionados con la propagación de las ondas

electromagnéticas en que la naturaleza cuántica de la radiación no se manifiesta si el fenómeno no va acompañado de absorción y radiación de energía.

19

PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 125. *Dispersión y absorción*

En un medio uniforme las ondas electromagnéticas se propagan con velocidad invariable y en dirección invariable. La velocidad de la onda en el vacío es máxima. Su velocidad en un medio es

$$v = c/\sqrt{\epsilon\mu}.$$

o, como en la mayoría de los casos que nos interesan $\mu=1$,

$$v = c/\sqrt{\epsilon}.$$

La relación de la velocidad de propagación de la onda en el vacío a la velocidad de propagación en el medio recibe el nombre de *índice de refracción*. De este modo, la teoría electromagnética nos lleva a la igualdad $n = \sqrt{\epsilon}$, que se cumple bien cuando se trata de ondas muy largas. Cuando la longitud de onda varía, también cambia el índice de refracción. Este fenómeno, que se llama *dispersión*, es ajeno a la teoría electromagnética de Maxwell, que supone que el espacio es continuo y no tiene en cuenta la interacción de la radiación con la sustancia. Como quiera que sea, la igualdad $n = \sqrt{\epsilon}$ no se cumple para oscilaciones electromagnéticas rápidas.

Al propagarse por una sustancia, la onda electromagnética hace entrar en estado de oscilación a las cargas eléctricas de las moléculas. Como la nube electrónica se mueve fácilmente comparada con los núcleos pesados, la oscilación eléctrica consiste en una desviación del centro de gravedad de los electrones con respecto al centro de gravedad de las cargas positivas de los núcleos atómicos, el cual permanece en reposo. Llamando m y e , respectivamente, a la masa y a la carga de los electrones oscilantes, puede escribirse la ecuación de las oscilaciones de la forma

$$m\ddot{x} = -kx - eE_0 \cos \omega t$$

o, dividiendo por m y aplicando la fórmula de la frecuencia propia de las oscilaciones $\omega_0^2 = k/m$,

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t.$$

Hemos igualado el producto de la masa por la aceleración a dos fuerzas: la fuerza de recuperación $-kx$ y la fuerza exterior variable periódicamente $eE_0 \cos \omega t$. Esta es la ecuación de las oscilaciones armónicas forzadas, que se cumple suponiendo que

$$x = x_0 \cos \omega t.$$

Después de hacer la sustitución en la ecuación, hallamos que

$$x_0 = \frac{\frac{e}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

El momento de dipolo de la molécula será igual a

$$e x_0 = \frac{\frac{e^2}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

El vector de polarización, es decir, el momento de dipolo en la unidad de volumen, será N veces mayor, si N es el número de moléculas que hay en la unidad de volumen:

$$P = \frac{Ne^2}{\omega_0^2 - \omega^2} E.$$

Recordando la fórmula que relaciona la polarización con la intensidad,

$$P = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E,$$

vemos que hemos expresado la permitividad del medio en función de los parámetros del dipolo molecular

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

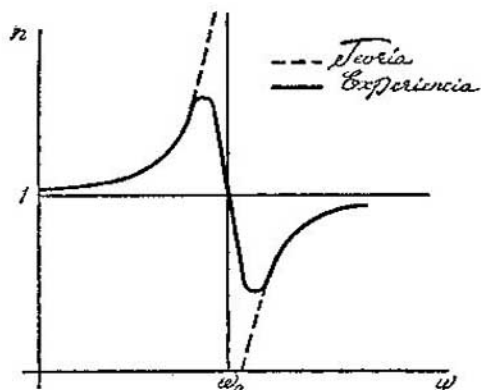


FIG. 136.

El índice de refracción del medio debe ser igual a la raíz cuadrada de esta expresión.

El carácter general de la dependencia se confirma bien en la práctica, como demuestra la fig. 136, en la cual se comparan la curva del índice de refracción, en función de la frecuencia, calculada por la fórmula que hemos dado, con la curva de las mediciones

para una sustancia concreta *). ¿En qué consiste el resultado principal de los experimentos y del cálculo? El índice de refracción crece, en general, al aumentar la frecuencia en todo el intervalo de frecuencias, a excepción de la región inmediatamente contigua a la frecuencia de absorción por resonancia. Esta región se llama *zona de dispersión anómala*. Una sustancia puede tener no una, sino varias frecuencias de resonancia, correspondientes a las diferencias entre sus niveles energéticos. En este caso también serán varias las zonas de dispersión anómala.

Así, pues, la velocidad de propagación de la onda, o sea, el índice de refracción, depende considerablemente de la relación entre su frecuencia y las frecuencias propias de los dipolos moleculares.

Está claro que de estas mismas causas depende el grado de absorción de la onda electromagnética por el cuerpo. Repitiendo los razonamientos hechos en la pág. 126 para las ondas elásticas, llegamos a una fórmula totalmente análoga

$$I = I_0 e^{-\mu d},$$

que permite valorar la relación entre la intensidad de la radiación transmitida I y la incidente I_0 , si se conoce el coeficiente de absorción μ y el espesor de la capa d . Recordamos que el coeficiente de absorción es igual a una magnitud recíproca del espesor de la capa que debilita la intensidad de la radiación e veces. Debido al complejo sistema de niveles de energía peculiar de la sustancia, la dependencia del coeficiente de absorción respecto de la frecuencia de la onda incidente puede ser rara y «a saltos».

Hasta ahora nos hemos referido a los medios dieléctricos en cuya composición entran solamente cargas eléctricas ligadas. Pero las leyes que rigen cuando las ondas electromagnéticas se propagan en un medio en el que hay un número apreciable de electrones libres son otras. A los medios de este tipo pertenecen los metales y la ionosfera, que es un conjunto de cargas libres semejante a un gas. Aplicando la teoría que hemos expuesto, deberemos suponer que la frecuencia propia ω_0 de la carga libre en la fórmula de ϵ es igual a cero (ya que la frecuencia es proporcional a la rigidez del enlace). En este caso, la constante dieléctrica se representa por la fórmula

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi N e^2 / m}{\omega^2}.$$

Cuando los valores de ω son suficientemente grandes, el índice de refracción $n = \sqrt{\epsilon}$ tiende a la unidad. Y al contrario, cuando

*) Una teoría más exacta proporciona también la coincidencia en la región próxima a ω_0 .

$\omega^2 < 4\pi Ne^2/m$, el índice de refracción se convierte en imaginario. Esto último quiere decir que, con dichos valores de la frecuencia, las ondas no pueden penetrar en un metal o en la ionosfera. Por el contrario, cuando las frecuencias son grandes, las ondas «no notan» el medio en que hay electrones. Estas predicciones se cumplen bien para las ondas radioeléctricas. En efecto, las ondas largas y medias se reflejan en la ionosfera y no penetran en ella, las ondas cortas son capaces de penetrar en la ionosfera, y las ondas ultracortas pasan sin dificultad a través de ella.

Estas consideraciones son simplificadas en extremo y, por eso, no hay que asombrarse si no se justifican en la gama óptica, donde los valores del índice de refracción pueden ser próximos a cero y mucho mayores que la unidad.

§ 126. *Comportamiento de las ondas electromagnéticas en el límite de separación de dos medios*

Lo mismo que la onda elástica, la onda electromagnética se refleja y se refracta si encuentra en su camino un límite de separación entre dos medios. Las leyes fundamentales de estos fenómenos pueden analizarse teóricamente mediante las condiciones de frontera de los vectores del campo electromagnético. Estas condiciones, que estudiamos en las págs. 272 y 307 son consecuencia a su vez de las ecuaciones de Maxwell. Como las relaciones entre los campos por ambos lados de la frontera no son arbitrarias, la división de la onda en reflejada y transmitida tampoco puede ser arbitraria.

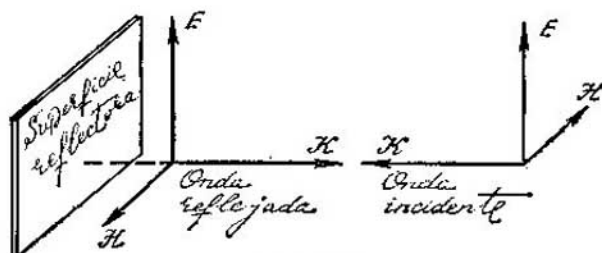


FIG. 137.

Las relaciones fundamentales son dos: las componentes tangenciales de los vectores eléctrico y magnético deben ser iguales por ambos lados del límite de separación.

Veamos qué limitaciones imponen estas relaciones en el caso más simple de la incidencia normal. La fig. 137 representa este

caso. Supongamos que en el plano del dibujo se encuentran los vectores eléctricos, en este caso los magnéticos serán perpendiculares a dicho plano. Ya sabemos que en la dirección de propagación de los vectores eléctrico y magnético debe formarse un sistema dextrógiro: el vector E girará, siguiendo el camino más corto, hacia el vector H en sentido contrario al de las agujas del reloj; si se mira en sentido opuesto al de propagación. Vemos que esta consecuencia indispensable de la teoría electromagnética puede satisfacerse por dos procedimientos: invirtiendo la dirección del vector H de la onda reflejada o haciendo lo mismo con la del vector E . Por lo tanto uno de los vectores, el eléctrico o el magnético, sufre un salto de fase de 180° durante la reflexión.

La solución del problema de cuál de estos dos casos es el que ocurre la encontramos al estudiar la incidencia oblicua. Resulta que se producen ambos casos; uno, cuando la onda pasa a un medio de mayor ϵ , y otro, cuando lo hace a un medio de menor ϵ .

Si la incidencia es normal, el cálculo ulterior no depende del esquema que se elija. Las condiciones de frontera las escribiremos de la forma

$$\begin{aligned} E_{\text{inc}} &= E_{\text{refl}} + E_{\text{trans}}; \\ H_{\text{inc}} &= -H_{\text{refl}} + H_{\text{trans}}. \end{aligned}$$

Pero entre los valores numéricos de los vectores H y E existe la relación

$$H = \sqrt{\epsilon} E = nE.$$

Por consiguiente, obtenemos las ecuaciones

$$E_{\text{inc}} = E_{\text{refl}} + E_{\text{trans}}$$

y

$$n_1 E_{\text{inc}} = -n_1 E_{\text{refl}} + n_2 E_{\text{trans}}$$

de las cuales pueden hallarse las relaciones $E_{\text{refl}}/E_{\text{inc}}$ y $E_{\text{trans}}/E_{\text{inc}}$. Como la intensidad de la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud y al índice de refracción (véase la pág. 342), para los factores de reflexión y de transmisión obtenemos, introduciendo el índice relativo $n = n_2/n_1$, las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} \text{factor de reflexión} &= \left(\frac{E_{\text{refl}}}{E_{\text{inc}}} \right)^2 = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}, \\ \text{factor de transmisión} &= \left(\frac{E_{\text{trans}}}{E_{\text{inc}}} \right)^2 = \frac{4n}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

La analogía con las ondas elásticas (véase la pág. 135) es bastante grande.

Por medio de cálculos análogos, hechos para el caso de una inclinación arbitraria y cualquier estado de polarización de la onda, se han obtenido todos los resultados generales a cuya exposición pasamos ahora. Todos ellos coinciden bastante satisfactoriamente con la experiencia.

Como quiera que la suma de los factores de reflexión y de transmisión es igual a la unidad, los resultados de la teoría vienen definidos completamente por la fig. 138, en la cual la intensidad de la onda reflejada se representa como función del ángulo de incidencia.

Los cálculos y la experiencia demuestran que el carácter de la reflexión depende esencialmente del estado de polarización de la onda incidente con respecto al plano de incidencia. El vector intensidad del campo eléctrico E es «más importante» que el vector H aunque sólo sea en el sentido de que la acción fotoquímica la posee el vector E . Por esta razón, cuando se define el estado de polarización de una onda, se acostumbra hacerlo con respecto al vector eléctrico. La posición del vector H siempre es fácil de hallar si se conoce la dirección de propagación. Así, pues, resulta que el

factor de reflexión es diferente para dos ondas que incidan formando el mismo ángulo φ sobre una misma frontera divisoria, si en un caso el vector eléctrico se encuentra en el plano de incidencia y en el otro caso es perpendicular a dicho plano. La curva I corresponde en la figura al caso en que el vector E es perpendicular al plano de incidencia; la curva III corresponde al vector E que se encuentra en el plano de incidencia, y la curva II , al caso en que la onda incidente no está polarizada.

En el primer caso el factor de reflexión varía monótonamente; cuando la incidencia es normal, la reflexión es pequeña — el factor es del orden de un 5% —, al aumentar el ángulo, el factor de reflexión crece, siendo este crecimiento tanto más rápido cuanto más se aproxima a la posición de deslizamiento. Totalmente distinto es el comportamiento del rayo cuyo vector eléctrico se encuen-

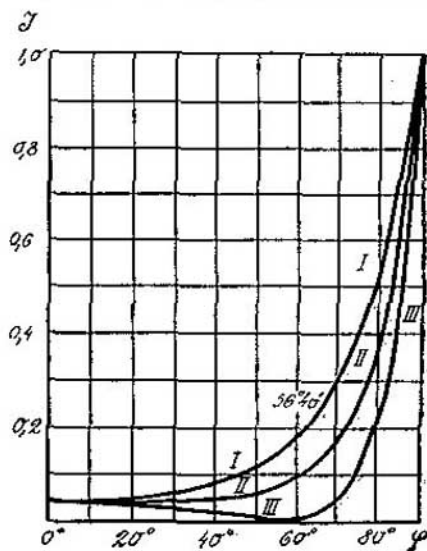


FIG. 138.

tra en el plano de incidencia. Su intensidad de reflexión decrece y llega a anularse cuando el ángulo φ_B satisface la interesante igualdad $n = \operatorname{tg} \varphi_B$. Nuestra figura se construyó para el valor $n = 1,52$ (paso del aire al vidrio), de acuerdo con lo cual el ángulo de anulación del factor de reflexión es igual a $56^\circ 40'$. En adelante dicho factor aumenta hacia la unidad.

¿A qué se debe la ausencia de reflexión precisamente en este caso?, ¿qué tiene de particular? Es evidente que deberemos buscar la respuesta en las mismas condiciones de frontera de que se deduce toda la teoría del fenómeno. Damos al lector la oportunidad de construir los vectores del campo para este ángulo y de demostrar lo que hace falta.

Al lector puede plantearse la siguiente cuestión. Si las condiciones de frontera permiten comprender todos los fenómenos en el límite entre dos medios, ¿cómo explicar la reflexión total, en que existe campo en uno de los medios ($E_{1t} \neq 0$), mientras que en el otro medio no lo hay? La pregunta es lógica, y la teoría da respuesta a ella. Resulta que, en las condiciones de la reflexión total, el campo penetra en el segundo medio pero no se propaga dentro de él. La igualdad $E_{1t} = E_{2t}$ no se infringe.

Existe una serie de experiencias que demuestran la penetración, en el segundo medio, de las ondas luminosas en las condiciones de la reflexión total. Mencionaremos únicamente un experimento, cuya idea es sencilla, que describe L. I. Mandelstam. Un prisma de vidrio se introduce en una solución de fluoresceína, sustancia que posee la propiedad de producir luminiscencia característica por la acción de la luz. Se hace que un rayo de luz incida sobre el prisma de manera que ocurra la reflexión total por la parte interior de la cara del prisma introducida en la solución. En este experimento la fluoresceína se ilumina intensamente en una capa extraordinariamente delgada contigua al vidrio, lo que demuestra que la onda electromagnética penetra en la disolución.

§ 127. Luz natural y polarizada. Polarización por reflexión

Coloquemos una lámina de vidrio de modo que forme un ángulo φ_B con un rayo de luz. El rayo se reflejará. Hagamos girar alrededor de su eje (en realidad giraremos la fuente de luz en torno al eje a lo largo del cual va el rayo), contando con que más temprano o más tarde desaparecerá el rayo reflejado. Pero si para hacer el experimento utilizamos un rayo de luz natural, nuestras esperanzas no se verán cumplidas: el rayo reflejado tendrá la misma intensidad cualquiera que sea la posición acimutal del rayo inci-

dente. No obstante, sería un error sacar de aquí una conclusión que contradijera la teoría que acabamos de exponer. Con esta experiencia sólo se demuestra una cosa: que el estado de polarización del rayo de luz natural es más complejo que el que proporciona el esquema de los dos vectores E y H con dirección de oscilación fija.

Continuando este experimento, hagamos que el rayo, después de reflejado bajo el ángulo φ_B , incida sobre una segunda lámina de vidrio, igual que la primera, que forme con él un ángulo igual a φ_B . Comencemos ahora a girar el rayo alrededor de sí mismo. Pero como lo que importa, claro está, es solamente la posición relativa del rayo y del espejo, resulta ser más fácil hacer girar la segunda lámina de vidrio. Observando el rayo doblemente reflejado veremos que no se reflejará siempre igualmente, y no será difícil hallar una posición en la cual no existe reflexión. Es evidente que esta posición mutua del rayo y el espejo será aquella en la cual el vector eléctrico del rayo se encuentra en el plano de incidencia. De aquí podemos hacer la deducción siguiente: la reflexión en el primer espejo hizo que el rayo de luz natural entrase en un estado polarizado en el cual el vector eléctrico tiene una sola dirección determinada de oscilación.

A diferencia de los rayos de luz natural, los rayos con direcciones determinadas de oscilación de los vectores reciben el nombre de polarizados. ¿Cómo debemos figurarnos el estado de polarización de un rayo de luz natural? Hay que suponer que en la onda electromagnética natural están representadas todas las direcciones posibles de oscilación del vector eléctrico. Subrayamos la palabra «posibles», puesto que la teoría electromagnética nos habla del carácter transversal del vector eléctrico. Por consiguiente, una onda natural no polarizada es, en esencia, la superposición de una cantidad innumerable de ondas polarizadas linealmente con las direcciones de oscilación de los vectores uniformemente representadas. Todas las direcciones transversales son direcciones de oscilación de los vectores eléctricos del rayo de luz natural.

La reflexión en dos espejos sucesivos, colocados formando ángulos φ_B con el rayo, es uno de los posibles procedimientos de polarizar los rayos de luz.

Los vectores eléctricos de la luz natural siempre se pueden descomponer según dos direcciones perpendiculares entre sí. Cuando se estudia la reflexión, lo más cómodo es descomponer los vectores en una componente que se encuentre a lo largo del plano de incidencia y otra que sea perpendicular a ella. El comportamiento del rayo de luz natural es equivalente al de dos ondas de este tipo, si se tiene en cuenta que la diferencia de fases entre ellas varía según la ley de la casualidad. Por esto, cuando se habla de la polarización de la luz, se utiliza la expresión: una de las componentes no

se transmitió o sólo se transmitió una fracción de ella. Si al reflejarse o refractarse la luz una de sus componentes se transmite en mayor grado que la otra, como suele ocurrir y puede verse en la figura de las curvas de refracción, se produce una polarización parcial de la luz.

Este fenómeno puede utilizarse para polarizar totalmente un rayo cualquiera. El empleo de dos espejos colocados formando ángulos φ_B con los rayos es incómodo. Resulta más fácil hacer pasar el rayo de luz a través de una pila de láminas de vidrio. En este caso cada refracción aumentará en un porcentaje determinado la fracción de una de las componentes del rayo. De este modo se puede efectuar prácticamente la polarización total.

El estado natural de un rayo luminoso es el no polarizado. Pero de esto no debe sacarse la conclusión de que todo rayo que no haya sufrido reflexión o refracción no está polarizado. Esto se refiere en primer lugar a las ondas radioeléctricas. Las ondas electromagnéticas cortas que se emplean en la televisión están intensamente polarizadas. Precisamente esta circunstancia es la que permite determinar, por la orientación de una antena de televisión, la dirección en que se encuentra la estación transmisora. La onda electromagnética portadora de la transmisión de televisión está intensamente polarizada; la antena debe orientarse de tal modo que la dirección de las oscilaciones del vector eléctrico coincida con la de dicha antena.

§ 128. *Propagación de las ondas luminosas en un medio con gradiente del índice de refracción*

Las diferencias de densidad acarrear, por regla general, diferencias en los índices de refracción. Se plantea naturalmente el problema del carácter que tiene la propagación de una onda en un medio en que el valor del factor de refracción varía de un punto a otro (es decir, el gradiente del índice de refracción es distinto de cero).

La diferencia en los índices de refracción denota que las velocidades de avance del frente de onda son distintas. De aquí se deduce que el frente de onda, a medida que avance en un medio de este tipo, se deformará continuamente. Si construimos las normales al frente de onda obtendremos una línea curva. Puede decirse que, en un medio no homogéneo, la luz no se propaga siguiendo líneas rectas, sino curvas.

A su debido tiempo analizamos ya un problema análogo referido a las ondas sonoras (pág. 154). Las leyes aquí son las mismas y la marcha de los rayos se rige por el mismo principio de Fermat.

uando un rayo de luz se propaga en un medio ilimitado con gradiente del índice de refracción, lo hace de manera que en recorrer la distancia entre dos puntos tarda el tiempo mínimo. Por esto el rayo de luz se torcerá para acortar su camino en las partes del espacio en que el índice de refracción es grande, y, al contrario, tenderá a que la mayor parte del camino pase por regiones del espacio cuyo índice de refracción sea pequeño.

El ejemplo más conocido de propagación de la luz en un medio con gradiente n es el del paso de un rayo de luz a través de la atmósfera. La densidad y el índice de refracción del aire disminuyen al aumentar la altura. Esto ocasiona el fenómeno de la refracción astronómica: un rayo que va desde una estrella cualquiera a la Tierra y que entra en la atmósfera no en dirección radial, sino formando ángulo, se torcerá y la posición aparente de la estrella estará desviada con respecto a su posición verdadera. Para las estrellas situadas en el horizonte, el ángulo de desviación alcanza la enorme magnitud, desde el punto de vista de la astronomía, de $1/2$ de grado.

La existencia de gradiente del índice de refracción en la atmósfera da lugar a que se produzcan los espejismos. Los espejismos se observan en los desiertos africanos a causa de que sobre la arena caldeada pueden formarse con facilidad corrientes de calor, que ocasionan diferencias de temperatura y, por lo tanto, el gradiente de la densidad y del índice de refracción. Como resultado, el rayo de luz sigue una línea curva y aparece la imagen del paisaje en el lugar en que mentalmente la sitúa el observador, que está acostumbrado a que la luz se propague en línea recta.

Está claro que cuando se trata de la propagación de la luz en un medio heterogéneo no puede hablarse de ondas esféricas o planas. Debe recordarse que la velocidad variable de propagación significa que la longitud de onda también varía de un punto a otro. ¿Qué ecuación define el movimiento de la onda en un medio en que el índice de refracción varía de un punto a otro? Teniendo en cuenta la variación de los parámetros de la onda de un punto a otro, debemos buscar la ecuación diferencial que define este fenómeno, puesto que sólo una ecuación diferencial puede establecer la ley que relaciona las magnitudes físicas para un punto dado del espacio.

Esta ecuación puede hallarse por medio de las ecuaciones de Maxwell. La deducción es algo complicada y no podemos darla aquí. El resultado de los cálculos es el siguiente: tanto para el vector \mathbf{E} (o sus proyecciones) como para el vector \mathbf{H} (o sus proyecciones) es correcta la siguiente ley:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} .$$

La función Ψ se llama *función de onda*. Esta función representa al vector E o H o a sus componentes, ya que para todos ellos la ecuación es la misma. s es la coordenada en el sentido de propagación de la onda, t es el tiempo y v , la velocidad de propagación.

La ecuación que hemos escrito se llama *ecuación de la onda* y es correcta para los puntos del espacio que se encuentran fuera de las fuentes del campo (es decir, fuera de las regiones con carga o de aquellas por las cuales pasan corrientes eléctricas).

Demostraremos ante todo que el proceso ondulatorio más simple, o sea, la onda plana, satisface esta ecuación diferencial. Como sabemos (pág. 119), la expresión de una onda plana de frecuencia ω , que se propaga a lo largo de la dirección s , tiene la forma

$$\Psi = A \cos \omega \left(t - \frac{s}{v} \right).$$

Calculando las segundas derivadas de la función de onda Ψ con respecto al tiempo y a la coordenada, obtenemos

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \Psi.$$

Como puede verse, entre las segundas derivadas existe la relación que hace falta:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2},$$

esto quiere decir que la ecuación diferencial propuesta contiene la ecuación de la onda plana. Pero esta ecuación diferencial es mucho más amplia. Solución suya es cualquier función del argumento $\left(t - \frac{s}{v} \right)$, ya que para cualquier función $\Psi \left(t - \frac{s}{v} \right)$, las expresiones de las derivadas por medio de Ψ serán las mismas.

La dependencia de la función respecto del argumento $\left(t - \frac{s}{v} \right)$ se considera como el único criterio de proceso ondulatorio. El sentido de este argumento consiste en lo siguiente: si el estado en el punto $s=0$ se caracteriza en el instante $t=0$ por un valor determinado de la función de onda, este mismo estado se dará en el punto s_1 al cabo de un tiempo $t_1 = \frac{s_1}{v}$ en el punto s_2 al cabo del tiempo $t_2 = \frac{s_2}{v}$ y así sucesivamente. En este caso s es la coordenada, que se toma a lo largo de cualquier trayectoria rectilínea o curvilínea.

La ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

es la ecuación general del proceso ondulatorio y es válida para cualquier medio, incluido el no homogéneo en que v varía de un punto a otro.

Si la función de onda debe expresarse por medio de las tres coordenadas del espacio x, y, z , la generalización de la ecuación de la onda es la fórmula siguiente:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}.$$

Para la suma de las segundas derivadas parciales de cualquier función existe el símbolo $\Delta \Psi$ (que se lee «laplaciano de Ψ »). Así, pues,

$$\Delta \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}.$$

La ecuación diferencial de la onda es correcta para un proceso arbitrario en el cual los valores de la longitud de onda y de la amplitud de onda varían de un punto a otro.

Llamemos ψ a la amplitud de la función de onda Ψ . Precisamente ψ es la que interesa en la mayoría de los problemas. Si en el espacio existe un proceso oscilatorio de frecuencia ω ,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi$$

en el caso más general. Por consiguiente, la función de onda satisfará siempre la ecuación

$$\Delta \Psi = -\frac{\omega^2}{v^2} \Psi.$$

La parte de la expresión de Ψ que depende del tiempo se simplifica siempre en semejante igualdad, por esta razón, la última ecuación es la de la *amplitud* de onda ψ . Haciendo uso de la relación $\lambda = v \frac{2\pi}{\omega}$, la ecuación anterior se puede escribir de la forma

$$\Delta \psi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi = 0.$$

A veces también esta expresión recibe el nombre de ecuación de la onda.

§ 129. Propagación de las ondas radioeléctricas

Las leyes de la reflexión y la refracción determinan las de la propagación de las ondas radioeléctricas. Para analizar los resultados concretos basta generalizar la teoría al caso de un medio con factor de refracción continuamente variable. Pero estos razonamien-

tos se hicieron ya (pág. 154) para las ondas elásticas. Su carácter también se conserva para la onda electromagnética, sea luminosa o sea radioeléctrica. Trasladándose en el medio con n variable, es decir, con velocidad variable, la onda se propaga de manera que el tiempo necesario para recorrer la distancia entre dos puntos sea mínimo. El camino a recorrer por la onda será curvilíneo, con la particularidad de que al pasar de una capa con menor n a otra capa con n mayor, la onda se desviará hacia el lado de la normal trazada al límite de separación.

Para poder formarse una idea del carácter de la propagación de las ondas radioeléctricas hay que conocer las propiedades eléctricas de la tierra y de la atmósfera. Los valores de la conductibilidad eléctrica y de la constante dieléctrica de estos dos medios influyen decisivamente en el campo electromagnético de la onda.

¿Cómo se explica que el comportamiento de las ondas electromagnéticas de distinta longitud sea diferente? Está claro que un papel muy importante lo desempeña la dispersión. Sin embargo podemos formarnos un juicio aproximado acerca del comportamiento de la onda electromagnética si valoramos la relación entre la corriente de desplazamiento y la corriente de conducción. Se comprende que el medio pone de manifiesto sus propiedades dieléctricas si la corriente de desplazamiento es mucho mayor que la de conducción. Por el contrario, si la corriente de desplazamiento puede despreciarse, el medio se puede llamar conductor.

Desde este punto de vista deben evaluarse las propiedades de la superficie terrestre y de la atmósfera.

Pondremos un ejemplo característico. En radiotecnica es sabido que un terreno llano cubierto de bosques se caracteriza por un coeficiente dieléctrico ϵ del orden de 12 y una conductividad eléctrica γ (en el sistema CGS) de $7 \cdot 10^7$. Cuando las ondas se propagan sobre el mar los que importan son los valores de ϵ y γ para el agua del mar. Las cifras correspondientes son: $\epsilon=80$ y $\gamma=10^{10}$. La razón de la densidad de la corriente de conducción a la densidad de la corriente de desplazamiento (en la pág. 335 se dan las fórmulas necesarias) viene expresada por la fórmula

$$\frac{j_{\text{cond}}}{i_{\text{desp}}} = \frac{2}{c} \frac{\gamma \lambda}{\epsilon} = 0,7 \cdot 10^{10} \frac{\gamma \lambda}{\epsilon}$$

(en el sistema CGS). Para las ondas largas (tomemos, por ejemplo, 2000 m) esta relación es igual en el terreno de bosque a 77, y en la superficie del mar a 1600. El medio puede considerarse buen conductor en ambos casos, y en particular cuando se trata de la propagación sobre el mar. Para las ondas cortas (por ejemplo, para 20 m) la primera cifra cae hasta 0,77, y la segunda, hasta 16. Esto significa que para las ondas cortas el agua del mar continúa siendo en

lo fundamental un medio conductor, pero el terreno de bosque se comporta en un grado considerable como dieléctrico.

Cuando las ondas se propagan sobre una superficie conductora, esta última «no deja» que las ondas se aparten de ella. Las líneas de fuerza eléctricas llegan a la Tierra formando un ángulo recto y se propagan a lo largo de su superficie. Por esto precisamente la onda electromagnética rodea fácilmente la esfera terrestre (en lo que emplea 0,13 s; este tiempo puede determinarse con bastante exactitud y, por consiguiente, también la velocidad de propagación de las ondas radioeléctricas). Esto se refiere a las ondas largas. Las ondas cortas se mantendrán solamente sobre la superficie del mar. En otros lugares pueden comportarse como ondas completamente libres. Cuando se mueve a lo largo de la superficie de la Tierra, la onda penetra dentro de ésta y es absorbida por ella con tanta mayor intensidad cuanto más elevada sea la frecuencia de las oscilaciones.

Toda una serie de notables peculiaridades en el comportamiento de las ondas radioeléctricas se explica por la existencia, en la parte superior de la atmósfera, de una capa que contiene una cantidad considerable de iones y electrones libres (ionosfera). De este modo, el espacio en que se mueve la onda electromagnética nos lo podemos figurar aproximadamente como una capa dieléctrica comprendida entre dos capas conductoras.

La ionización de la atmósfera no es uniforme, es decir, el número de cargas libres por unidad de volumen varía de una capa a otra. Como vimos en el § 125, al aumentar el número de cargas, disminuye el factor de refracción. Y como el factor de refracción del medio conductor es menor que la unidad, la onda que llega del medio dieléctrico a la ionosfera formando cierto ángulo, se desvía alejándose de la normal. Si la ionización aumenta, la desviación aumentará de una capa a otra.

Luego, como muestra la fig. 139, la onda puede salir de la ionosfera y alejarse de la Tierra o continuar doblándose y volver a la Tierra. En términos generales (sin tener en cuenta la heterogeneidad de la ionosfera), la onda vuelve a la Tierra si llega a la ionosfera formando un ángulo mayor que el ángulo de reflexión total:

$$\operatorname{sen} \theta_0 > n = \sqrt{1 - \frac{4\pi N^2 e^2}{m\omega^2}},$$

en el caso contrario la onda se escapa al espacio extraterrestre. Reflejándose repetidas veces ya en la ionosfera, ya en la superficie de la Tierra, la onda corta es capaz de contornear la esfera terrestre con pérdidas de energía considerablemente menores que las que sufren las ondas largas.

Las ondas ultracortas pasan a través de la capa de cargas libres, por esto no se reflejan en la ionosfera. Esto hace que la radiorecepción por ondas ultracortas sólo sea posible dentro de los límites de la visibilidad directa.

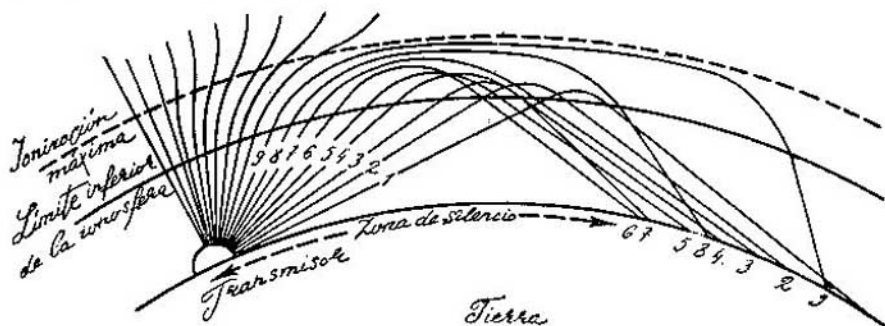


FIG. 139.

Hasta ahora hemos simplificado mucho el cuadro de la atmósfera. Las investigaciones llevadas a cabo demuestran que la distribución de las densidades de las cargas eléctricas libres en la atmósfera se caracteriza por tener varios máximos, de modo que la ionosfera se descompone en varias capas. Estas capas poseen distinta estabilidad en las diversas estaciones del año. Es interesante que la existencia de estas capas está ligada a la actividad del Sol, ya que se observan variaciones del estado de la ionosfera que se corresponden con el ciclo de 11 años de las manchas solares. La ionización de las capas superiores de la atmósfera está ligada indudablemente con la llegada a la Tierra de la radiación cósmica.

Del análisis de las propiedades eléctricas de la ionosfera y de la superficie terrestre, la radiotecnica saca una serie de conclusiones acerca de las condiciones más favorables para la radioemisión y recepción por ondas de diversa longitud. Pero en esto no nos detendremos.

§ 130. Radiolocalización

Una instalación de radiolocalización consta de una parte emisora y otra receptora. El emisor lanza al espacio impulsos de duración a (del orden de microsegundos) con intervalos de diezmilésimas de segundo (λ) (fig. 140). Si en el ángulo sólido «iluminado» por las ondas radioeléctricas hay un objeto capaz de reflejar la onda, ésta se refleja y retorna a la instalación de radiolocalización, la cual recibe la señal reflejada al cabo de un tiempo $\tau=2R/c$ de haber sido lanzado al espacio el impulso correspondiente.

Este tiempo se mide por medio de un oscilógrafo electrónico. La exploración del rayo se sincroniza con el lanzamiento al espacio de los impulsos del emisor. La tensión que se produce en el receptor como resultado de la demodulación de la señal, se transmite al segundo par de placas del oscilógrafo. Entonces en la pantalla del oscilógrafo aparece un «diente» desplazado, con respecto al punto inicial de la exploración, una distancia proporcional al tiempo τ .



FIG. 140.

Si en el campo visual del localizador cae un objeto en reposo, el «diente» no se moverá en la pantalla del oscilógrafo; en efecto, la sincronización consiste en que el tiempo que dura la exploración se hace igual a una diezmilésima de segundo, es decir, al intervalo de tiempo al cabo del cual se suceden unos a otros los impulsos del emisor. Si el objeto «visto» por el localizador se mueve, también se desplaza el diente que se observa en la pantalla del oscilógrafo.

La técnica moderna de localización está ya muy lejos de este esquema. El rayo electrónico del oscilógrafo da la posibilidad de realizar un movimiento más complejo desde el centro de la pantalla, a lo largo de un radio, hacia el borde de la misma. Al mismo tiempo la línea que describe el rayo electrónico gira lentamente alrededor del centro de la pantalla, de modo análogo a como lo hacen las agujas del reloj.

Esta rotación está sincronizada con la rotación de la antena del radar, de manera que la línea luminiscente tiene la misma dirección que el haz de radio del emisor. Después se introduce una importante modificación en el funcionamiento del oscilógrafo: si el haz de radio no encuentra ningún obstáculo y, por consiguiente, el receptor no recoge el rayo reflejado, la pantalla del oscilógrafo se mantiene oscura. Por el contrario, si el impulso se recibe, en la pantalla resplandece un punto.

De este modo, el cuerpo, encontrado por el haz al explorar el horizonte, se manifiesta por medio de un punto luminiscente en la pantalla del oscilógrafo. En este caso la distancia desde este punto hasta el centro de la pantalla será proporcional a la distancia desde el radar hasta el objeto, y su ángulo acimutal indicará la dirección en que se encuentra dicho objeto.

Las pantallas de oscilógrafo poseen luminiscencia residual. Por esta razón, una vez que aparece un punto luminoso, no desaparece

ni después que el localizador, hecha la exploración, retorna a la misma posición.

Si el punto luminoso se produjo debido a que el haz se reflejó en un objeto en reposo, su imagen no se moverá en la pantalla del oscilógrafo. Pero si el objeto se mueve, en la pantalla se verá su imagen móvil.

En virtud de que los distintos objetos poseen diferentes factores de reflexión, en la pantalla del radar de exploración circular se ve una imagen peculiar del terreno. Los ríos y los lagos aparecen como franjas oscuras (poca reflexión), la tierra, más clara, y los bosques, aún más. Y, como es lógico, los objetos metálicos se «ven» con bastante nitidez.

Usando distintas longitudes de onda se puede variar el carácter de la visibilidad. Así, con la gama de ondas centimétricas se pueden observar bien las nubes. Las ondas más largas no son sensibles a las nubes ni a la lluvia, y los radares que funcionan con ellas sirven para todo tiempo, si no se plantea el problema especial de observar las nubes.

Los principios de la radiolocalización encuentran en la ciencia y la técnica aplicaciones muy diversas. Los radares permiten a los

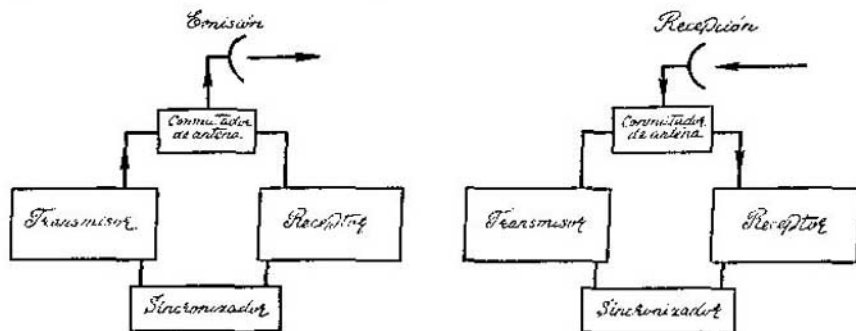


FIG. 141.

aviones efectuar sin dificultad vuelos nocturnos y aterrizar en aeródromos sin iluminación. La radiolocalización tiene una importancia especial para la meteorología; además de descubrir a grandes distancias o de noche las nubes, que tiene gran importancia para componer los partes meteorológicos, pueden seguir a los globos-sondas. Los radares montados en los barcos elevan considerablemente la seguridad de sus movimientos, anulando el peligro de choques fortuitos con obstáculos u otros navíos. Valiéndose de los métodos de la radiolocalización, en la astronomía se hallan las distancias a los meteoritos y se determina su dirección y su velocidad. Las ondas

se reflejan principalmente en las «colas» de los meteoritos, formadas por gases ionizados. Puede efectuarse la radiolocalización de la Luna, el Sol y los planetas. La radiolocalización astronómica o radar astronomía tiene gran importancia práctica, ya que permite crear aparatos de navegación con los cuales sea cual fuere el tiempo y a cualquier hora del día o de la noche se podrá determinar la posición de una nave observando los cuerpos celestes.

A los problemas de la radiolocalización se ha consagrado mucha literatura, y como esta es una cuestión de radiotecnía, y no de física, creemos que con esto queda suficientemente claro el principio en que se basa este magnífico método.

En la fig. 141 se representa el esquema sinóptico de un radiolocalizador.

20

FENÓMENOS DE INTERFERENCIA

§ 131. *Composición de las ondas de dos fuentes*

Consideremos en primer lugar dos fuentes o focos ideales que emitan ondas esféricas. Ambas fuentes oscilan sincrónicamente. Como sabemos, en este caso, sea cual fuere el tipo de ondas (lo más fácil es demostrar esto con ondas en el agua), se produce un campo característico en el que vemos «surcos» brillantes y oscuros que pasan por los puntos en que las ondas se refuerzan o se debilitan entre sí.

El cálculo de esta figura de interferencias no es difícil. Consideremos un punto cualquiera que se encuentre a la distancia r_1 de una de las fuentes de ondas y a r_2 de la otra. En este caso el reforzamiento máximo se producirá si la diferencia de marcha entre las ondas $r_1 - r_2$ es igual a un número entero de longitudes de onda $n\lambda$. Y, al contrario, la extinción tendrá lugar en los puntos en que la diferencia de marcha sea igual a un número impar de semiondas $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$.

Como sabemos por la geometría analítica, una superficie curva cuyos puntos satisfacen la condición de que la diferencia de las distancias desde ellos a dos focos es una magnitud constante, es un hiperboloide. En la fig. 59 (pág. 129) se representa la sección que pasa por los dos focos de ondas. En esta sección se muestran las hipérbolas, es decir, los lugares geométricos de los puntos en

los cuales las diferencias de marchas a lo largo de la curva tienen un mismo valor.

Veamos ahora (fig. 142) lo que ocurre en una superficie cilíndrica cuyo eje pase por los focos (que siempre suponemos puntuales).

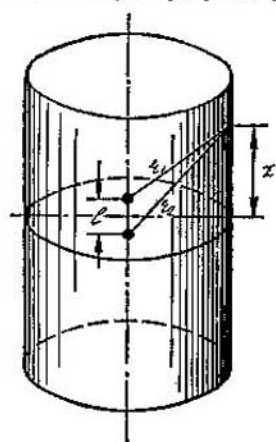


FIG. 142.

Por consiguiente, la condición de la n -ésima franja brillante tendrá la forma

$$\frac{2lz}{r_1+r_2} = n\lambda.$$

Si la pantalla está lejos, para las franjas próximas al centro

$$r_1+r_2 \approx 2R,$$

donde R es el radio del cilindro. Las franjas brillantes pasarán por los puntos z que cumplan la condición

$$\frac{lz}{R} = n\lambda.$$

La distancia entre dos franjas contiguas será $\Delta z = \lambda R/l$.

Ejemplo. Si dos fuentes coherentes (véase el § 132), que se encuentran entre sí a una distancia $l=1$ mm, emiten luz de longitud de onda $\lambda=6000$ Å, en la superficie de un cilindro de radio $R=1$ m, que las circunde, aparecerán franjas de interferencia entre las cuales existirán distancias iguales a $\Delta z = \lambda R/l = 0,6$ mm.

Si una fuente de luz emite ondas de distinta longitud, la figura de interferencia resultará coloreada, porque las condiciones de máximo serán diferentes para las distintas λ .

Puede interesarnos conocer no sólo la posición que ocupan los máximos y los mínimos de interferencia, sino también la forma que tiene la curva de intensidad transversalmente a las franjas.

Si $lz'R$ es la diferencia de marcha entre las ondas,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{lz}{R}$$

será la diferencia de fases, y la amplitud total en cualquier punto se escribirá de la forma

$$A \cos \omega t + A \cos (\omega t + \delta).$$

Si las amplitudes son iguales, esto da la expresión que estudiamos en la pág. 109, o sea,

$$2A \cos \frac{\delta}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\delta}{2} \right).$$

La intensidad (cuadrado de la amplitud de la onda) que se mide en la práctica es igual al valor medio de esta expresión tomado durante un período de oscilación. Y como

$$\left[\cos^2 \left(\omega t + \frac{\delta}{2} \right) \right]_{\text{med}} = \frac{1}{2}$$

(véase lo que se dice acerca del cálculo del valor medio en el párrafo siguiente), se tiene que

$$I = 2A^2 \cos^2 \frac{\pi lz}{\lambda R}$$

La curva de intensidad puede construirse en el diagrama en función de la coordenada vertical z (fig. 143).

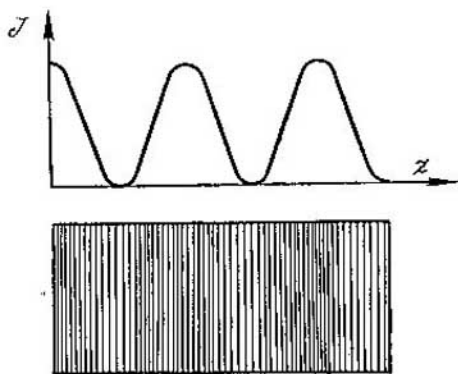


FIG. 143.

§ 132. Coherencia

La composición de las dos ondas descrita en el párrafo precedente puede intentarse realizar por diversos procedimientos y para distintas longitudes de onda. Pueden, por ejemplo, establecerse dos antenas, próximas entre sí, que emitan ondas radioeléctricas; se pueden poner dos lámparas eléctricas, de filamento de caldeo puntual, de manera que estén la una cerca de la otra; finalmente, puede reunirse un rayo incidente consigo mismo, después de reflejado en un espejo. La experiencia demuestra que los fenómenos de interfe-

rencia no se producen en todos los casos. Esto puede aclararse estudiando cómo se componen los campos de dos antenas. Es fácil demostrar que la figura de interferencia se observará únicamente si entre las ondas que se superponen existe una diferencia de fases constante mientras dura la observación. En este caso se dice que las oscilaciones son *coherentes*.

Si la diferencia de fases es fija, la oscilación electromagnética en el punto dado del espacio se produce siempre con la misma amplitud. De este modo, en el punto en que se produce un máximo, habrá siempre un máximo; y el sitio donde las ondas se extinguen entre sí conservará siempre una intensidad nula.

Pero si la diferencia de fases varía desordenadamente, el cuadro será completamente distinto. En un punto dado se producirán durante cierto tiempo oscilaciones de amplitud máxima, en el intervalo siguiente se producirán con amplitud media y después, durante un plazo determinado, las ondas se extinguirán entre sí. Si estos periodos duraran un tiempo commensurable con las posibilidades prácticas de los instrumentos, podríamos establecer la existencia de un campo de interferencia variable. Pero si las variaciones en la diferencia de fases se suceden con tanta rapidez que los instrumentos no pueden ponerlas de manifiesto, el campo de interferencia no se revela y los instrumentos indican el valor medio de la intensidad. En estos casos se dice que las oscilaciones no son coherentes.

¿A qué será igual la intensidad media que se manifiesta en el espacio en que los campos se superponen? Veámoslo haciendo un cálculo elemental.

La amplitud de la onda resultante en un punto dado, en un instante determinado, puede escribirse de la forma

$$A_1 \cos \omega t + A_2 \cos (\omega t + \delta).$$

La intensidad instantánea es proporcional al cuadrado de esta expresión, es decir, igual a

$$A_1^2 \cos^2 \omega t + A_2^2 \cos^2 (\omega t + \delta) + 2A_1 A_2 \cos \omega t \cos (\omega t + \delta).$$

La intensidad media de la radiación, con respecto al tiempo (que es la que nos interesa), será

$$I = A_1^2 (\cos^2 \omega t)_{\text{med}} + A_2^2 [\cos^2 (\omega t + \delta)]_{\text{med}} + 2A_1 A_2 [\cos \omega t \cdot \cos (\omega t + \delta)]_{\text{med}}.$$

Los valores medios de magnitudes trigonométricas se encuentran con bastante frecuencia en los cálculos físicos. Conviene por esto recordar que el valor medio de $\sin x$ y $\cos x$ es cero, y el de $\sin^2 x$ y $\cos^2 x$ es $\frac{1}{2}$, siempre que el argumento x de la función trigonométrica tome con igual probabilidad unos valores cuales-

quiera. El valor medio de una función cualquiera $f(x)$, por el sentido del concepto, es

$$[f(x)]_{\text{med}} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Esta fórmula es válida para calcular el valor medio si la variable x toma valores discretos. Pero si la variable x es continua y toma unos valores cualesquiera dentro de un intervalo comprendido entre a y b , la fórmula para el cálculo del valor medio se obtiene del modo siguiente. El intervalo $(b - a)$ se divide en n partes Δx , y multiplicando por Δx el numerador y el denominador de la fórmula anterior, se obtiene

$$[f(x)]_{\text{med}} = \frac{f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + \dots}{n \Delta x}.$$

Pasando al límite, tenemos que

$$[f(x)]_{\text{med}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Con esta fórmula puede calcularse el valor medio de cualquier función de una magnitud aleatoria continuamente variable. Si se calcula el valor medio de una función periódica hay que tomar como límites de integración la magnitud de un período, puesto que el valor medio correspondiente a un período será igual, indudablemente, al valor medio correspondiente a cualquier número de períodos. De este modo, por ejemplo,

$$[\cos^2 x]_{\text{med}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}.$$

Escribamos la fórmula de la intensidad de la forma

$$I = A_1^2 (\cos^2 \omega t)_{\text{med}} + A_2^2 [\cos^2 (\omega t + \delta)]_{\text{med}} + \\ + A_1 A_2 [\cos 2\omega t + \delta]_{\text{med}} + A_1 A_2 (\cos \delta)_{\text{med}}.$$

Haciendo uso de lo que sabemos acerca de los valores medios de $\cos x$ y $\cos^2 x$, obtenemos que: si la diferencia de fases de las dos ondas varía desordenadamente, es decir, si las oscilaciones no son coherentes,

$$I = \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2);$$

y, por el contrario, si la diferencia de fases es fija, las oscilaciones son coherentes e

$$I = \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \cos \delta)$$

o, cuando las amplitudes son iguales,

$$I = 2A \cos^2 \frac{\delta}{2},$$

que es la fórmula de la interferencia que vimos en el párrafo anterior.

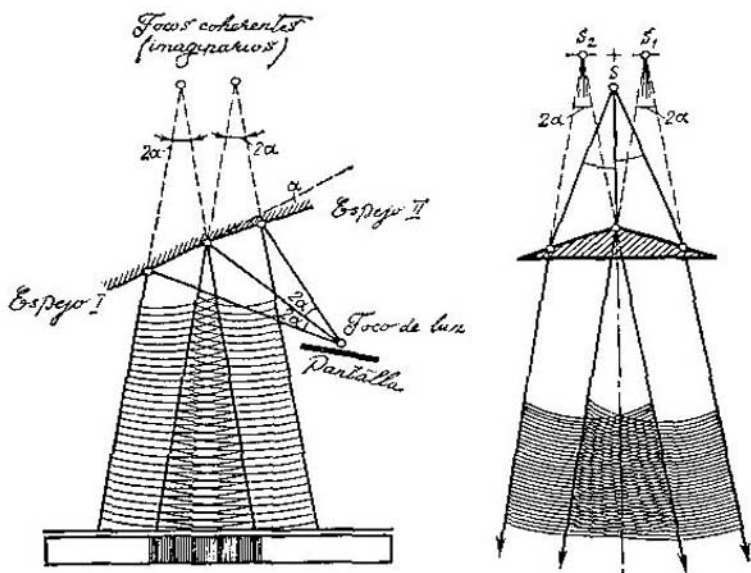


FIG. 144.

La coherencia de las ondas radioeléctricas emitidas por antenas vecinas puede evitarse o crearse por procedimientos técnicos.

En lo tocante a las oscilaciones luminosas, ante todo, hay que distinguir la luz de las fuentes ordinarias de la luz de los láseres. En las fuentes ordinarias las radiaciones de los distintos átomos no concuerdan entre sí. Las fases de las ondas emitidas por distintos átomos están desplazadas en magnitudes aleatorias. Es completamente natural que dos focos de luz, cuyas dimensiones se aproximen tanto como se quiera a las de un punto, no producirán un campo de interferencias. Sólo hay un procedimiento de crear oscilaciones luminosas coherentes: «desdoblando» una misma onda luminosa.

La figura 144 representa dos procedimientos para obtener fuentes coherentes artificiales. Dos espejos *I* y *II* ligeramente inclinados el uno con respecto al otro, o un doble prisma (biprisma) son las fuentes de ondas de dos focos virtuales. En cualquier punto del campo de interferencias puede colocarse una pantalla en la cual se observarán las franjas de interferencia. Los razonamientos teóricos antes expuestos son totalmente aplicables en estos casos; el paso de las franjas viene determinado por la distancia entre las imágenes virtuales del foco luminoso y por las distancias desde ellas hasta el punto de observación.

La causa de que las dos partes de un rayo «desdoblado» sean coherentes es evidente. Entre un par de átomos cualesquiera de la verdadera fuente no existen relaciones de coherencia. Pero al dividir el rayo en dos partes, creamos la posibilidad de que la radiación de cada átomo interfiera consigo misma.

Los múltiples dispositivos que existen para observar la interferencia valiéndose de fuentes de luz ordinaria difieren entre sí por los procedimientos de desdoblarse el rayo de luz por reflexión o refracción y la ulterior superposición de las partes de la onda desdoblada en la región del campo de interferencias.

El tamaño de la fuente de luz influye sensiblemente en la coherencia de sus rayos «desdoblados». Supongamos que la fuente de luz (fig. 145) tiene el tamaño b y que en la creación del campo de interferencias toman parte los rayos que salen constituyendo el ángulo sólido $2u$. Los rayos del tipo 1, 1' parten de un mismo átomo y, por consiguiente, son coherentes. Esto mismo puede decirse de los rayos 2, 2'.

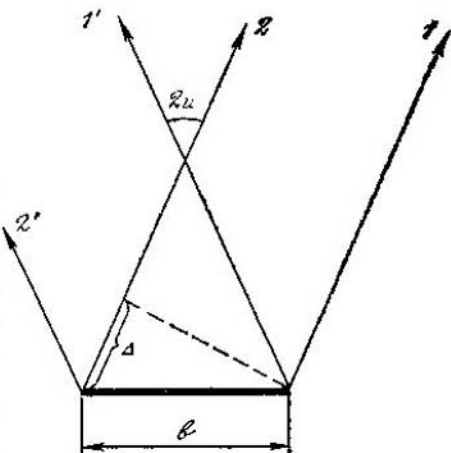


FIG. 145.

Supongamos ahora que queremos observar la interferencia superponiendo los campos de los rayos 1, 2 y 1' 2'. Para que se produzca la interferencia es necesario que los campos de los rayos coherentes 1, 1' y 2, 2' se mantengan el uno al otro. Pero las diferencias de marchas $\Delta = b \sin u$ que existen entre 1', 2' y 1 y 2 impiden que esto ocurra. La interferencia sólo es posible si se da la condición $b \sin u \leq \lambda/2$.

Está claro que sólo pueden interferir las ondas luminosas de igual longitud. Por consiguiente, la intensidad de una franja de interferencia vendrá determinada no por la potencia integral de la radiación, sino por la potencia de la radiación de la longitud de onda dada.

Los experimentos para obtener interferencias con luz ordinaria se ven muy limitados por la longitud de coherencia del rayo de luz. El problema consiste en que el átomo radia cada vez durante un tiempo del orden de 10^{-8} s. Teniendo en cuenta la velocidad de la luz, no es difícil comprobar que el «tren» de ondas emitido tendrá una longitud del orden de un metro. Por lo tanto, conservando el carácter rigurosamente monocromático, la longitud de coherencia de

la luz visible será del orden de un metro. Si se utiliza un foco luminoso como la lámpara de vapor de mercurio a alta presión, la longitud de coherencia será tan sólo del orden de un milímetro. Esto significa, que la radiación de un mismo átomo sometida a desdoblamiento y reunida después en un punto, con una diferencia de marchas mayor de un milímetro (es decir, mayor que la longitud de coherencia), ya no producirá el fenómeno de la interferencia.

La emisión estimulada del laser, cuyo origen se estudia en la pág. 471, es idealmente monocromática: su intervalo de frecuencias es millones de veces menor que la frecuencia de la luz. Lo principal es que todos los átomos del laser crean emisión estimulada en la misma fase. Por consiguiente, en este caso, las radiaciones de átomos distintos son capaces de interferir entre sí. Carece de importancia la longitud finita del tren de ondas. Los sucesivos actos de emisión se producen en una misma fase. Por esta razón pierde su sentido la longitud de coherencia, y la luz desdoblada de un laser interferirá incluso en el caso en que una parte del rayo recorra un camino que sea decenas y centenares de metros más largo que el recorrido por la otra parte. El desdoblamiento de un rayo de laser para conseguir interferencias no exige ni siquiera parte de las medidas que había que tomar para observar la interferencia con luz ordinaria. Basta colocar el laser detrás de una pantalla con dos rendijas y crear el campo común de la luz que sale por ambas rendijas.

La extraordinaria potencia de la luz del laser permite realizar con facilidad experimentos de interferencias que antes parecían extraordinariamente difíciles o imposibles.

§ 133. Interferencia en una lámina

Consideremos la reflexión y refracción de la luz que incide sobre una lámina plana de espesor d (fig. 146).

Supongamos que una onda plana incide sobre la lámina formando un ángulo i con la normal. El rayo de luz se refleja y se refracta. El rayo refractado incide sobre la cara inferior de la lámina y también se refleja y se refracta. Como resultado se produce una multitud de rayos paralelos al reflejado directamente, y otra multitud de rayos paralelos transmitidos al segundo medio. Todos estos rayos son coherentes y entre ellos existe diferencia de fases; por consiguiente se dan las condiciones para que interfieran tanto los rayos reflejados como los transmitidos.

Como sabemos (véase la pág. 352), el factor de reflexión, por lo menos cuando la incidencia es vertical, es pequeño. En este caso la intensidad de cada rayo «siguiente» será mucho menor que la del

anterior. Por ejemplo, si el factor de reflexión es del 5%, el primer rayo reflejado tendrá la intensidad $0,05 I_0$. El segundo rayo reflejado sufre dos refracciones y una reflexión. Su intensidad será, pues, $0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,05 I_0 = 0,045 I_0$. De este modo, las intensidades de los dos primeros rayos serán bastante próximas entre sí. Pero el

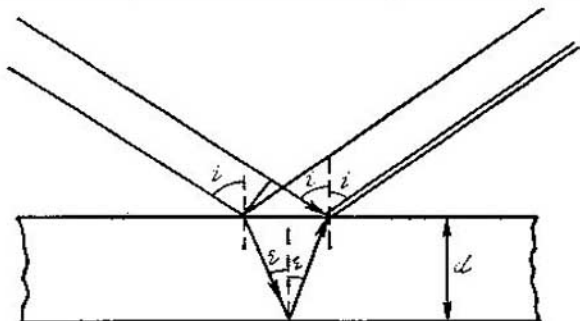


FIG. 146.

tercer rayo será ya mucho más débil, puesto que sufre tres reflexiones y dos refracciones. Su intensidad será igual a $0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,05 \times 0,05 \cdot 0,05 I_0$, es decir, será *cuatrocientas* veces más débil que el rayo precedente.

En las condiciones de un factor de reflexión pequeño, el fenómeno se reduce a la observación de la interferencia de los dos primeros rayos.

En cuanto a los rayos transmitidos, en las condiciones de un factor de reflexión pequeño no se observa su interferencia, ya que el segundo rayo es ya cuatrocientas veces (para el mismo ejemplo numérico) más débil que el primero, el tercero, cuatrocientas veces más débil que el segundo y así sucesivamente. Sin embargo no es difícil crear unas condiciones para el experimento en las cuales, tanto en la luz reflejada como en la transmitida, se produzcan multitud de rayos de interferencia.

Si sobre la lámina plana incide una onda monocromática, la figura del campo de interferencias vendrá determinada por la diferencia de fases entre el primer rayo reflejado y el segundo.

Partiendo de la fórmula de la onda

$$A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right),$$

es evidente que la fase de una onda que recorra el camino x con la velocidad v variará en $\omega \frac{x}{v}$ ó $\frac{2\pi}{\lambda} x$, donde λ es la longitud de la onda en el medio. Llamando λ_0 a la longitud de la onda en el vacío

y teniendo en cuenta que el factor de refracción es igual a $n = \frac{\lambda_0}{\lambda}$, podemos escribir la variación de fase como $\frac{2\pi}{\lambda_0} nx$. El producto nx suele recibir el nombre de trayectoria óptica de la onda. Si la onda atraviesa en su recorrido varios medios, su fase varía en $\frac{2\pi}{\lambda_0} S$, donde $S = (n_1x_1 + n_2x_2 + \dots)$ es la trayectoria óptica.

La diferencia de fases δ de las ondas que interfieren, que determina la intensidad del campo resultante, es

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta.$$

es decir, está definida por la diferencia óptica de las trayectorias S' y S'' de estas ondas $\Delta = S' - S''$.

El cálculo de Δ para el caso que nos interesa se hace valiéndose de la fig. 146. Lo más cómodo es expresar Δ en función del ángulo de refracción r , del espesor de la lámina d y del índice de refracción n . Como puede verse en la figura,

$$\Delta = 2dn \cos r.$$

Pero además debe tomarse en consideración el salto de fase que se produce durante la reflexión (véase la pág. 352). En este sentido el primer rayo difiere del segundo, ya que el primero se refleja en la cara externa de la lámina, mientras que el segundo lo hace en la interna. Por esto, el vector eléctrico de uno de ellos experimenta un salto de fase de 180° , mientras que el segundo, no. Por consiguiente, la diferencia de fases resultante será:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2dn \cos r \pm \pi.$$

El máximo de la interferencia se observa cuando se da la condición $\delta = m \cdot 2\pi$, siendo m un número entero; y el mínimo, cuando se da la condición $\delta = m \cdot \pi$. Por lo tanto,

$$\text{la condición de máximo es: } 2dn \cos r = m\lambda_0 \pm \frac{\lambda_0}{2};$$

$$\text{y la condición de mínimo: } 2dn \cos r = m\lambda_0$$

De este modo, en dependencia de λ , n , d y r , la interferencia reducirá a cero o a un máximo la intensidad de la onda reflejada en la lámina. En la experiencia ideal realizada con un rayo monocromático, variando, por ejemplo, el ángulo de incidencia, deberíamos fijar la extinción y aparición periódica del rayo reflejado. En el experimento análogo hecho con un rayo de luz blanca, la lámina debe pasar sucesivamente por todos los colores del iris.

§ 134. *Franjas de igual espesor y franjas de igual inclinación*

En la condición de extremo $2 dn \cos r = m\lambda$ figuran varios factores. La variación simultánea de todos ellos puede conducir a un resultado confuso. El fenómeno se observa con mayor claridad cuando se puede considerar que todos los parámetros menos uno son invariables.

Si la lámina tiene el espesor d variable, el factor de refracción es constante, y el ángulo de incidencia (y, por consiguiente, el de refracción) es prácticamente el mismo para la parte de la lámina que se considera, la interferencia se manifestará en forma de las llamadas *franjas de igual espesor*. Todos los puntos de la lámina que posean el mismo espesor d se encontrarán en las mismas condiciones. Por esta razón si la lámina no es plana aparece en ella un sistema de franjas oscuras y claras (o irisadas, si la luz es blanca) que caracterizan los puntos de igual espesor. En esto consiste la explicación de las manchas coloreadas que vemos de ordinario en las películas de petróleo o de aceite que flotan en el agua. Si la lámina tiene forma de cuña, las franjas de igual espesor serán rectas. Estas franjas son fáciles de observar en las películas de jabón. En una película vertical, el jabón escurre hacia abajo y la película se hace más delgada en sus partes altas. En este caso aparecen en la película franjas horizontales.

Si la luz incide verticalmente sobre la lámina, $\cos r \approx 1$; las franjas aparecen en aquellos sitios de la lámina cuyos espesores d satisfacen la relación $2 dn = m \lambda_0$.

Dos franjas contiguas corresponderán a espesores que difieran el uno del otro en $\frac{\lambda_0}{2n} = \frac{\lambda}{2}$, es decir, en media longitud de onda. Por lo tanto, las franjas luminosas de igual espesor revelan irregularidades del orden de décimas de micra que existen en los espesores de las láminas.

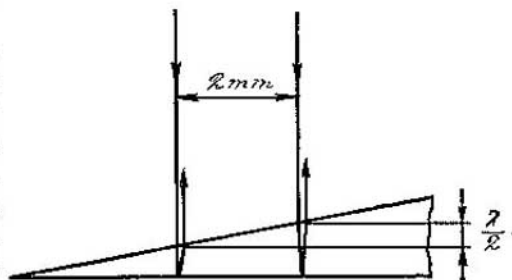


FIG. 147.

Si de un punto a otro el espesor varía muy lentamente, las franjas pueden estar a una distancia bastante grande unas de otras. Así, por ejemplo, en una película jabonosa escurrida puede formarse una cuña cuyo ángulo de abertura sea de 0,5 minutos de arco; en este caso, como no es difícil de calcular valiéndose de la fig. 147,

ángulos del orden de centésimas de radián impedirá ya el poder observar las franjas de igual espesor.

Pero incluso cuando la forma sea perfecta, los experimentos con láminas relativamente gruesas no crean figura de interferencia debido a que la longitud de coherencia es limitada.

Para la luz de laser desaparece esta dificultad en la observación de la interferencia producida por las láminas gruesas.

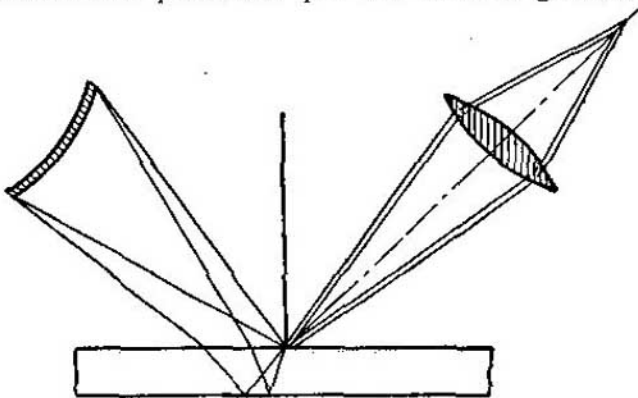


FIG. 148.

Pasemos ahora a analizar otro tipo de franjas, llamadas *franjas de igual inclinación*. Se observan en las láminas de caras planas y paralelas (d es igual en todos los puntos de la lámina) cuando sobre ellas incide un haz de luz cuyos ángulos de incidencia forman un conjunto continuo (fig. 148).

Del haz de rayos reflejados, presentes en el ángulo sólido, podemos siempre destacar aquellos que se encuentran en las generatrices de un mismo cono cuyo eje sea la normal a la lámina. Los rayos que descansan en este cono tienen un mismo valor de r . Estos rayos dan líneas de igual inclinación.

Conviene subrayar la diferencia que existe en el procedimiento de observar las líneas de igual espesor y las líneas de igual inclinación. Las líneas de igual inclinación se observan en el infinito, por esto hay que interponer una lente en el camino que siguen los rayos; las curvas de igual inclinación se observarán en su plano focal. En cuanto a las líneas de igual espesor, si la incidencia es normal sobre una lámina cuneiforme, se observan a simple vista en la superficie de dicha lámina. Pero si la luz incide sobre esta lámina formando ángulo, las líneas de igual espesor sólo se observan en la superficie de la cuña si se trata de películas muy delgadas. En el caso contrario la figura de interferencia se observa en dos planos

situados, uno sobre la cuña y otro debajo de ella, a la distancia $d \frac{\sin t}{\sin \alpha}$ (α es el ángulo de la cuña). Para deducir esta fórmula, cosa que recomendamos hacer al lector, hay que construir el rayo que incide sobre la superficie de la cuña formando el ángulo t , y los rayos reflejados en las caras superior e inferior de la misma cuña. El plano de observación de la figura de interferencia pasará por el punto de intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados. La fórmula que hemos dado es la de la cuña de aire.

§ 135. Aplicaciones prácticas de la interferencia

Los métodos de interferencia se utilizan mucho para medir pequeñas distancias o pequeñas variaciones de distancias. Estos métodos permiten notar variaciones del espesor menores que unas centésimas de la longitud de la onda luminosa. En las medidas interferométricas de las irregularidades de la superficie de un cristal se consigue una exactitud del orden de 10^{-7} cm.

Muchas de las aplicaciones se basan en la utilización del método de las curvas de igual espesor. Este método está muy difundido en la industria óptica. Si, por ejemplo, hay que comprobar la calidad de la superficie de una lámina de vidrio, se recurre a la observación de las franjas de igual espesor de la cuña de aire creada por la lámina que se ensaya y una lámina patrón de superficie idealmente plana. Si estas dos láminas se oprimen por uno de sus bordes, se forma una cuña de aire. Si ambas superficies son planas, las líneas de igual espesor serán rectas paralelas.



FIG. 149.

Figurémonos que la lámina que se ensaya tiene una cavidad o una prominencia. En este caso las líneas de igual espesor se torcerán y rodearán el lugar defectuoso. Si se varía el ángulo de incidencia de la luz, las franjas se mueven hacia un lado o hacia otro, dependiendo de que si el defecto es una prominencia o una cavidad. En la fig. 149

se muestra el aspecto que ofrece el campo visual del microscopio en estos casos. Los primeros dos dibujos corresponden a muestras defectuosas. En el primero el defecto se encuentra en la parte derecha junto al mismo borde, y en el segundo, en la parte izquierda. El tercer dibujo corresponde a una muestra sin defectos.

Este mismo método puede aplicarse para medir con bastante exactitud el coeficiente de dilatación. Con este fin hay que crear un espacio de aire entre la superficie del objeto que se analiza y un plano invariable. Si el objeto se dilata, el espesor de la capa de aire comienza a variar. Las franjas de igual espesor entran en movimiento. Si una de las franjas se desplaza y su lugar lo ocupa la siguiente, el espesor de la capa de aire habrá variado en este punto en $\lambda/2$.

Si, como se hace de ordinario, la medida se realiza con luz monocromática, las franjas se ven nítidamente y un desplazamiento del orden de la centésima parte de la distancia entre ellas puede medirse.

Medidas exactas del índice de refracción de una sustancia se pueden llevar a cabo con los llamados refractómetros de interferencia. En estos aparatos se observa la interferencia entre dos rayos luminosos alejados entre sí lo más posible (fig. 150). Para esto se

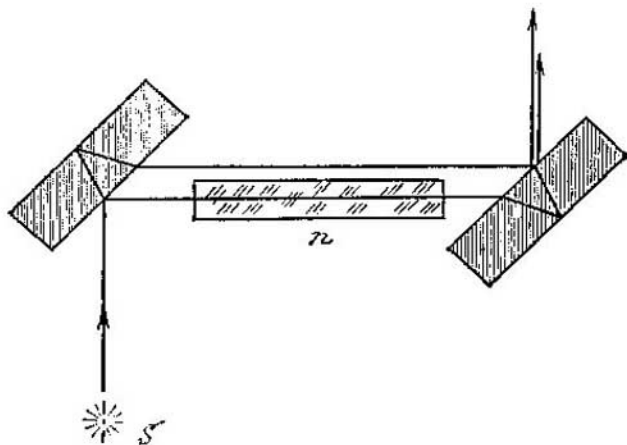


FIG. 150.

forma una lámina suficientemente gruesa y se elige el ángulo de incidencia más ventajoso (para el vidrio ordinario este ángulo es de 50°). Los rayos que pasan de una lámina a otra están separados y en la trayectoria de uno de ellos se puede colocar la sustancia que se ensaya. Con esto varía la trayectoria óptica de uno de los rayos y, por lo tanto, la diferencia de los caminos recorridos por los rayos que

interfieren a la salida. Si las láminas del interferómetro son exactamente iguales y están colocadas con un paralelismo perfecto, los dos rayos que interfieren tienen el mismo recorrido y se refuerzan el uno al otro. Cuando las láminas se inclinan se crea una diferencia de marchas y la claridad del campo visual variará.

Esto ocurre cuando se opera con un haz de rayos idealmente paralelos. Pero si sobre la lámina incide un haz ligeramente divergente, en el campo visual del anteojo aparece un sistema de franjas de igual inclinación. En este caso resulta más cómodo determinar la variación de la diferencia óptica de marcha contando las franjas de interferencia que se ven pasar por el encruzamiento.

Supongamos que en el camino a recorrer por uno de los rayos se ha colocado un cuerpo de longitud l y factor de refracción n . Si el factor de refracción del medio es n_0 , la diferencia óptica de marcha variará en $\Delta = l(n - n_0)$. En este caso ante el ocular del anteojo deberán pasar Δ/λ franjas. No es difícil valorar la exactitud de este método si se indica que el desplazamiento de 0,1 franja se percibe fácilmente. Con este desplazamiento $\Delta = 0,1\lambda = 0,5 \cdot 10^{-5}$ cm, lo que en una longitud $l = 10$ cm permite registrar una variación del factor de refracción de $0,5 \cdot 10^{-6}$.

Para las mediciones exactas de longitudes, así como para determinar la velocidad de la luz (véase también la pág. 441) se utiliza el conocidísimo interferómetro de Michelson (fig. 151). En este

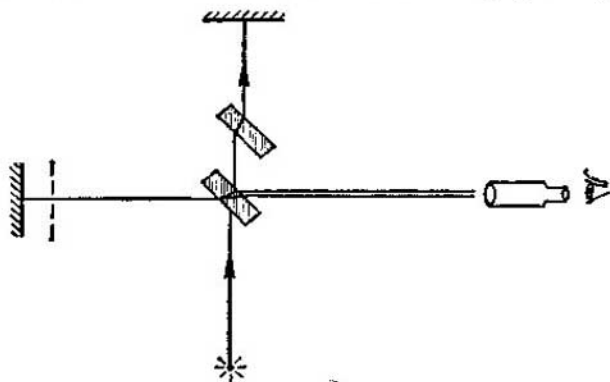


FIG. 151.

aparato un haz de rayos paralelos de luz monocromática incide sobre una lámina de vidrio de caras planas y paralelas recubierta por una parte con una capa semitransparente de plata. Este lámina está situada formando un ángulo de 45° con el rayo que proviene de la fuente de luz y lo divide en dos, uno de los cuales sigue paralelo al rayo incidente (es decir, lo continúa), y el otro sale perpendicular-

mente (hacia la izquierda). Los rayos desdoblados inciden sobre sendos espejos formando ángulos de incidencia nulos y retornan a los mismos puntos de la lámina semitransparente de donde partieron. Cada rayo, después de volver del espejo, se desdobla en la lámina. Una parte de la luz retorna a la fuente, y la otra se desvía hacia la derecha y entra en el anteojo. Como resultado de esto, en el campo visual del anteojo se observan dos rayos coherentes que interfieren. En la figura puede verse que, después del primer desdoblamiento en la capa semitransparente, el rayo que viene del espejo que se encuentra enfrente del anteojo pasa dos veces por la lámina de vidrio recubierta de plata. Por esto, para conseguir que los recorridos ópticos sean iguales, el rayo que viene del otro espejo se hace pasar por una lámina compensadora idéntica a la primera, pero sin capa semitransparente.

Por el anteojo se observarán las líneas de igual inclinación (anillos circulares) correspondientes a la interferencia que tiene lugar en la lámina de aire, cuyo espesor es igual a la diferencia de distancias desde la capa semitransparente a los espejos. El desplazamiento de uno de los espejos en un cuarto de longitud de onda corresponderá al paso de un máximo a un mínimo, es decir, el desplazamiento de la figura en medio anillo. Esto puede notarlos claramente el observador. De este modo, utilizando rayos violetas, la sensibilidad del interferómetro es de más de $1000 \text{ \AA} = 0,1 \text{ micra}$.

Una aplicación interesante del interferómetro de Michelson es el microinterferómetro creado por el físico soviético V. P. Linnik. El principio en que se basa su esquema consiste en que uno de los espejos del interferómetro se sustituye por el objeto a analizar. En el plano de la imagen se observan las líneas de igual espesor. Piezas del tamaño de $0,1 \text{ micra}$ dan una transición clara de la brillantez máxima a la mínima. El microinterferómetro se hace generalmente en forma de accesorio para un microscopio ordinario y se enrosca al tubo de éste en vez del objetivo. Para la ciencia tienen mucha importancia los microscopios de interferencia, cuya idea está próxima a la del microinterferómetro (en el microscopio, la interferencia no se efectúa en el plano de la imagen, sino ante un objetivo ordinario, es decir, la imagen de la interferencia tiene las mismas dimensiones que el microobjeto). El microscopio de interferencia de dos rayos no ofrece ventaja en los aumentos. Su valor reside en otra propiedad. Entre los objetos de observación microscópica se encuentran con extraordinaria frecuencia los que son casi transparentes o aquellos cuya transparencia varía poco en toda su superficie. Los detalles de estos objetos sólo pudieron hacerse visibles tiñéndolos artificialmente: los diversos elementos estructurales retienen de distinto modo el tinte. Pero este procedimiento es poco aplicable a los microorganismos vivos. Las posibilidades del microscopio de

interferencia se ilustran con la fig. 152, que representa una microfotografía a 300 aumentos de la sangre de una rana.

Entre los inconvenientes de este método figuran las grandes pérdidas de luz en el dispositivo interferencial y la considerable complicación del sistema óptico del microscopio.

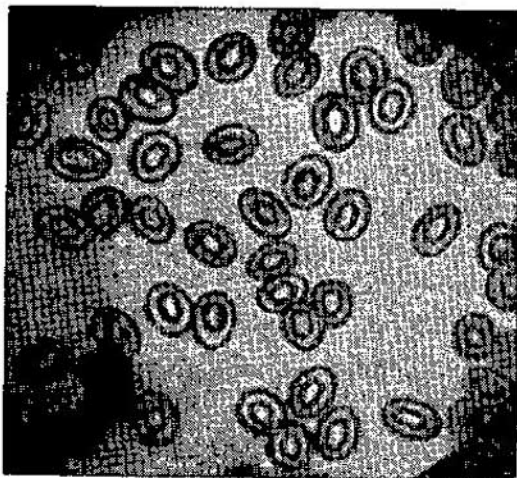


FIG. 152.

Una nueva elevación de la sensibilidad de los métodos interferenciales y, por consiguiente, nuevos éxitos en la microscopía de interferencia se pueden obtener pasando de los interferómetros de dos rayos a los de múltiples rayos. El problema está en que, en los interferómetros de dos rayos, la iluminación de la pantalla varía proporcionalmente al factor $(1 + \cos kh)$, donde h es la desviación a lo largo de la pantalla. Debido a la suavidad de la transición de un máximo de iluminación a un mínimo, no se consigue registrar con seguridad un pequeño desplazamiento de las franjas de interferencia. Los interferómetros de múltiples rayos mejoran considerablemente los resultados. Como ejemplo de interferómetro de múltiples rayos estudiaremos el de Fabry y Perrot.

El interferómetro de Fabry y Perrot (fig. 153) consta de dos láminas de vidrio o de cuarzo, bastante gruesas, recubiertas cada una de una capa semitransparente de plata. Las superficies metalizadas de estas láminas están enfrentadas entre sí y son rigurosamente paralelas. El espacio entre las láminas está lleno de aire. Cuando un haz de luz incide sobre el interferómetro, al llegar a cada uno de los

recubrimientos semitransparentes, se desdobra en un haz transmitido y otro reflejado. Como resultado de esto, tanto en la luz transmitida como en la reflejada se obtiene un conjunto de haces luminosos coherentes cuya intensidad decrece en progresión geométrica (véase la pág. 373), mientras que las fases se desplazan según una

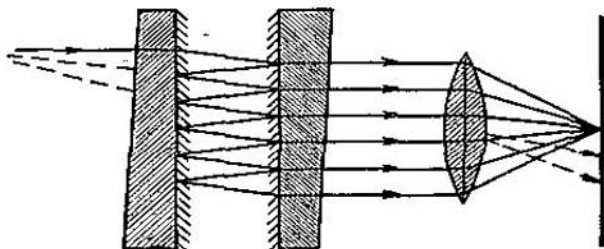


FIG. 153.

progresión aritmética. Para conseguir que sea posible la interferencia de un gran número de rayos hay que hacer que las amplitudes disminuyan poco en las sucesivas reflexiones. Esto se logra en virtud de que el recubrimiento metálico de las láminas tiene un factor de reflexión de 0,9 o aún mayor. En estas condiciones las intensidades de los rayos en la luz transmitida serán bastante pequeñas, pero en cambio variarán poco de un rayo a otro, lo que hace posible que un gran número de rayos (hasta 10 ó 15) tomen parte en la creación de cada máximo de iluminación.

La figura de interferencia se obtiene en la forma de los anillos de igual inclinación ordinarios, pero con una diferencia muy importante: los máximos principales, definidos por la condición $2dn \times \cos \alpha = m\lambda$, se contraen ahora fuertemente y su intensidad supera en decenas la del fondo que hay entre ellos. Por esto la figura de interferencia adquiere la forma de franjas brillantes bastante estrechas separadas por anchos espacios oscuros. El desplazamiento de un estrecho máximo de este tipo puede registrarse con mucha más exactitud que la de las franjas en el interferómetro de dos rayos. Un estrechamiento análogo de los máximos se produce cuando aumenta el número de rendijas de una red de refracción.

De esta forma los aparatos de múltiples rayos elevan sensiblemente la sensibilidad de los métodos interferenciales. Estos sistemas resultan ser insustituibles cuando se analiza con luz reflejada la estructura vertical de la superficie de un objeto. El aumento de los detalles en sentido vertical puede alcanzar a 400 000, lo que permite resolver con seguridad pormenores cuyas dimensiones sean del orden

de 5—10 Å, es decir, ¡de varios espacios interatómicos! De ejemplo de fotografía de este tipo puede servir la del crecimiento en espiral de un cristal que se inserta en la pág. 716.

En la actualidad los interferómetros que funcionan con focos de luz natural son sustituidos por los que utilizan laser. La ventaja de estos últimos es evidente: su luz es de una potencia incomparablemente mayor, rigurosamente monocromática, con haces idealmente paralelos y longitud de coherencia ilimitada.

Por medio de láseres se pueden hacer medidas con el telescopio de 200 pulgadas valiéndose de un interferómetro en que uno de los brazos tiene decenas de metros de longitud, y el otro, solamente unos centímetros.

Los interferómetros de laser que se utilizan para comprobar la esfericidad de las lentes pueden fabricarse con una sola superficie de comparación, mientras que si se empleara luz ordinaria, al variar el radio de la lente a comprobar, habría que cambiar también el patrón (ya que sería imposible trabajar con una diferencia de marcha grande). Sin hablar ya de que las figuras de interferencia son ahora incomparablemente más claras y, por lo tanto, se analizan con mayor facilidad y precisión.

La posibilidad de prescindir de la compensación del recorrido óptico de uno de los rayos permite fabricar interferómetros de un tipo completamente nuevo. Resulta posible observar los desplazamientos de las presas, las derivas geológicas y las oscilaciones de la corteza terrestre.

Se sabía desde hace tiempo que, midiendo la velocidad con que se mueven los anillos de interferencia, se puede calcular la velocidad de uno de los espejos, en virtud del efecto Doppler (véase la pág. 135). Valiéndose de la luz de un laser y haciendo que se refleje en objetos muy alejados e interfiera después con la inicial, puede medirse exactamente la velocidad con que se mueve un blanco lejano.

21

DISPERSIÓN

§ 136. Radiación secundaria

Toda molécula sometida a la acción de una onda electromagnética se convierte en emisor secundario de ondas electromagnéticas. Por la acción de la fuerza eléctrica, la nube electrónica se desplaza con respecto a los núcleos atómicos y la molécula adquiere un momento de dipolo que varía con el tiempo teniendo la misma frecuen-

cia que la onda incidente. El comportamiento de esta molécula no difiere en nada del de un dipolo elemental, del cual ya tratamos en el cap. 20. La intensidad de la onda secundaria vendrá expresada por la fórmula dada en la pág. 343 (la intensidad es $\sim \frac{\omega^4}{R^2} \sin^2 \theta$), y la distribución de intensidad de la radiación secundaria en el espacio tendrá el carácter que representa la fig. 133.

En una serie de casos, a los que nos referiremos más adelante, el fenómeno de la radiación secundaria ocasiona diversos fenómenos de dispersión de las ondas electromagnéticas. Se entiende por dispersión, todo fenómeno de propagación de ondas electromagnéticas que no encuadre en los conceptos de refracción, reflexión y propagación rectilínea.

La fórmula de la intensidad dada anteriormente es correcta para todas las ondas electromagnéticas. Sin embargo, la fuerte dependencia de la frecuencia de la radiación indica que los efectos de dispersión de la onda por una molécula se hacen sensibles cuando las ondas no son demasiado largas. La intensidad de la dispersión de las ondas de la luz visible es ya suficiente para producir efectos importantes.

La longitud de una onda luminosa es centenares y millares veces mayor que las dimensiones de las moléculas ordinarias. Por esta razón el campo exterior hace que todos los electrones de la molécula oscilen en una misma fase. Para las ondas luminosas, para las ultravioletas e incluso para los rayos X muy blandos (es decir, de onda larga), la molécula se comporta como un dipolo eléctrico elemental.

El cuadro cambia considerablemente si se trata de rayos X cuya longitud de onda sea del orden de 1Å. En este caso las dimensiones de la molécula son ya mayores que la longitud de la onda y distintas partes de la nube electrónica de la molécula oscilan en fases distintas. Para calcular la intensidad de la onda dispersada hay que tener en cuenta los fenómenos de interferencia que se producen entre las ondas dispersadas por las distintas partes de la molécula.

Este cálculo, en principio, no ofrece dificultad. En primer lugar hay que dividir la nube electrónica de la molécula en pequeños volúmenes Δv_k . Las dimensiones de cada uno de estos volúmenes deben ser mucho menores que la longitud de la onda. En este caso los electrones que haya en dicho volumen dispersarán en una misma fase. Si llamamos ρ a la densidad de la nube electrónica, en el volumen Δv_k habrá $\rho \Delta v_k$ electrones. La amplitud de la onda secundaria creada por el volumen k -ésimo será proporcional a $\rho \Delta v_k$. Las amplitudes de dispersión deben componerse teniendo en cuenta la diferencia de fases entre las ondas elementales, y la suma de las amplitudes debe elevarse al cuadrado. La distribución de la intensidad

de la onda dispersada diferirá considerablemente de la figura de radiación de un dipolo. Esto es comprensible, ya que existirán direcciones en que las ondas elementales, dispersadas por determinados volúmenes, se reforzarán entre sí, es decir, actuarán en fase, y, al contrario, habrá otras direcciones en las cuales las ondas elementales se debiliten unas a otras. Una consecuencia importante de este tipo de cálculos es la siguiente: cuando existe interferencia entre las ondas elementales que parten de los distintos volúmenes de la partícula, las ondas que van hacia otras se debilitan unas a otras y las que van hacia adelante se refuerzan entre sí.

Hasta ahora hemos hablado de la radiación secundaria de la molécula, pero es muy frecuente que el papel de radiador secundario lo desempeñe una partícula mayor, compuesta por un gran número de moléculas. Esta puede ser una partícula de polvo, una partícula coloidal, una gota de niebla, un cristalito pequeñísimo, una partícula de humo, una gran molécula proteínica, etc. El carácter de la dispersión de las ondas por las partículas vendrá determinado por la razón de su dimensión a la longitud de la onda magnética excitatriz. Si la partícula es pequeña en comparación con la longitud de onda, dispersará lo mismo que un dipolo elemental. En el caso contrario, se producen efectos de interferencia y predominará la dispersión hacia adelante.

Una partícula puede poseer diferente capacidad dispersora en sus distintas partes. Esto es lo que ocurre precisamente con una molécula que dispersa rayos X. El cuerpo dispersor más simple será una partícula cuyos volúmenes tengan todos la misma capacidad dispersora. Detendremos nuestra atención sobre un sistema de este tipo, el cual no sólo simplifica el cálculo, sino que, además, es fácil de reproducir en la práctica (un orificio en una pantalla opaca).

§ 137. Difracción de las ondas por orificios

La amplitud de la dispersión por una partícula aislada se determina por el carácter que tiene en ella la distribución de la sustancia dispersora. Podemos encontrar partículas («orificios») en las cuales la densidad de la sustancia dispersora disminuye suavemente a medida que se aleja del centro del átomo. Podemos figurarnos heterogeneidades más bruscas, como inclusiones o poros, en cuyos bordes la densidad cambia de golpe.

Cuando la dispersión se debe a cualquiera de estas heterogeneidades se producen efectos de difracción característicos. La intensidad de la dispersión decae suavemente al principio, a medida que aumenta el ángulo, y después se anula; al seguir aumentando el

ángulo, la intensidad vuelve a crecer, llega hasta cierto valor máximo, disminuye suavemente hasta cero y en adelante decrece de un modo ondulante. La dispersión en estos objetos ocasiona la formación de franjas de difracción y de manchas de diversa forma que dependen del carácter del objeto.

Donde los efectos de difracción se manifiestan con mayor claridad es en la dispersión por orificios practicados en una pantalla opaca. Cada orificio puede considerarse como una región uniformemente llena de dipolos emisores. Las figuras de dispersión por un orificio o por una partícula que tenga la forma de este orificio, deberán dar curvas de variación de la intensidad que coincidan con el ángulo de dispersión.

Si se trata de rayos luminosos, las figuras de difracción se observan mejor, haciendo que aquéllos sean paralelos, por medio del siguiente esquema. El haz luminoso, procedente de un foco, se hace paralelo e incide sobre una pantalla en la que se puede disponer de diversas inclusiones (si la pantalla es transparente) o de orificios (si es opaca). Una lente, situada detrás de la pantalla, reúne los rayos paralelos en el plano de una placa fotográfica (o de una pantalla para observar el efecto). Si los rayos no encuentran en su trayectoria heterogeneidades, orificios, etc., esta lente recogerá los rayos en un punto. En el caso contrario, aparecerá en la pantalla una figura de dispersión o de difracción.

En la fig. 154 se ven las figuras de difracción obtenidas por este procedimiento, producidas por unas agujas y un alambre delgado (a) y por un orificio redondo (b).

Para evidenciar la procedencia de estas figuras, haremos el cálculo de la distribución de la intensidad de la radiación dis-

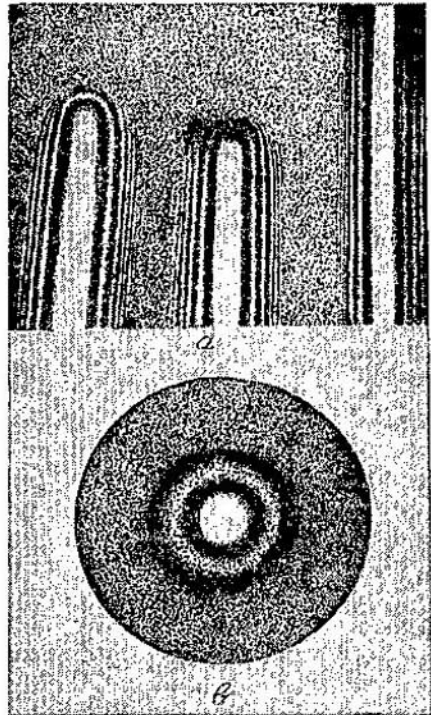


FIG. 154.

persa *) para el caso más simple de un orificio en forma de rendija.

Supongamos que una onda incide sobre una rendija, practicada en una pantalla opaca, formando un ángulo recto. Dividamos la rendija en volúmenes ΔV_k , como muestra la fig. 155, y escribamos la

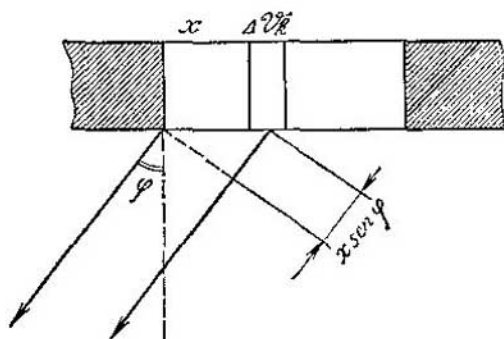


FIG. 155.

expresión de la onda que emite un volumen arbitrario ΔV_k en la dirección que forma un ángulo φ con la onda incidente. Las ondas procedentes de los distintos elementos ΔV_k llegarán al punto de observación en fases distintas. Si la diferencia de marchas se calcula con respecto al último rayo (hacia el lado de la desviación), el camino recorrido por los rayos que emiten los volúmenes siguientes será más largo en la magnitud $x \sin \varphi$ y, por consiguiente, estarán desfasados en $\frac{2\pi}{\lambda} x_k \sin \varphi$.

La amplitud de la onda dispersada por el volumen k -ésimo será proporcional al volumen «dispersor» ΔV , es decir, a la expresión

$$\Delta V_k \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_k \sin \varphi \right).$$

Hay que sumar las expresiones correspondientes a todos los volúmenes. Esta suma puede sustituirse por la integración a lo largo de la coordenada x , tomada transversalmente a la rendija. Sustituyendo ΔV_k por su valor proporcional Δx_k y pasando al límite, se obtiene

*) El contenido físico de los términos «radiación dispersa» y «radiación difractada» es idéntico. Generalmente se utiliza la palabra «difracción» cuando la figura de dispersión presenta varios máximos y mínimos bien definidos. En cambio, cuando el carácter interferencial de la figura es menos claro, se emplea la palabra dispersión.

la amplitud de dispersión bajo el ángulo φ :

$$A = k \int_0^a \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \operatorname{sen} \varphi \right) dx;$$

k es un coeficiente de proporcionalidad, y a , la anchura de la rendija. Introduciendo la variable

$$z = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \operatorname{sen} \varphi,$$

obtenemos

$$dz = -\frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \varphi dx$$

y, por consiguiente,

$$A = \frac{k}{\frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \varphi} \left[\operatorname{sen} \omega t - \operatorname{sen} \left(\omega t - \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen} \varphi \right) \right].$$

Haciendo $\frac{\pi a}{\lambda} \operatorname{sen} \varphi = u$, y después de la transformación trigonométrica correspondiente, resulta

$$A = \frac{k a}{u} \operatorname{sen} u \cos (\omega t - u).$$

Por lo tanto, la oscilación resultante en el punto de observación tiene la amplitud $\frac{k a}{u} \operatorname{sen} u$, es decir, la intensidad que se observa es

$$I = k^2 a^2 \frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}.$$

Esta es la fórmula de la distribución de la intensidad en función del ángulo de dispersión.

En la mayoría de los experimentos de difracción nos interesan ángulos de dispersión φ pequeños; el porqué esto es así quedará claro más adelante. Por lo tanto, sustituyendo $\operatorname{sen} \varphi$ por $\operatorname{tg} \varphi$ y teniendo en cuenta que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{f},$$

donde x es la distancia del punto de observación, en el plano de la placa fotográfica, al centro de la figura de difracción, y f es la distancia desde la rendija hasta la placa, obtenemos para u la expresión

$$u = \frac{\pi a}{\lambda} \frac{x}{f},$$

La fig. 156 representa la curva $\frac{\text{sen}^2 u}{u^2}$, y como u es proporcional a x , la figura de difracción en la placa fotográfica corresponderá a esta curva.

Los lugares de las franjas oscuras se encuentran fácilmente partiendo de la condición $u = \pm n\pi$, donde n es un número entero. Por consiguiente, el primer cero se halla donde $x = \frac{\lambda f}{a}$; a este mismo número es igual también la distancia entre las anulaciones sucesivas de la intensidad.

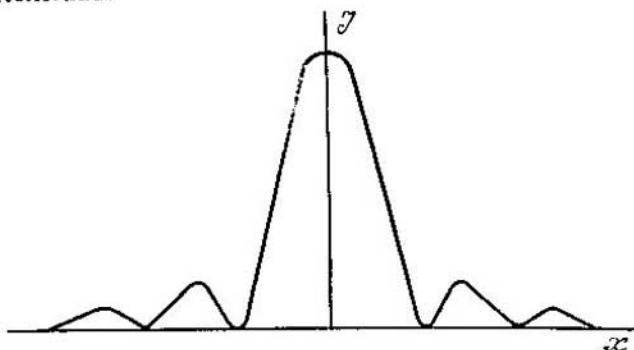


FIG. 156.

Esta fórmula indica cuándo se observarán fenómenos de difracción en diferentes longitudes de onda y en distintas condiciones. La difracción de la luz ($\lambda = 0,5 \cdot 10^{-7}$ cm) se observa bien en las condiciones de laboratorio si se toman orificios del orden de 0,1 cm y distancias del orden de 2 m entre la pantalla y la placa fotográfica. Con estas cifras, $x = 1$ mm y el efecto se ve claramente.

Los rayos visibles darán una difracción apreciable si se interpone una pelota de tenis ($a = 5$ cm), pero la distancia debe ser mayor. A la distancia $f = 100$ m y con la longitud de onda $\lambda = 5000 \text{ \AA}$, $x = 1$ mm. Por lo tanto, en este caso la distancia entre las anulaciones de la intensidad de la radiación dispersada será del orden de 1 mm.

En las condiciones correspondientes a la ecuación $x = \lambda f/a$ también puede observarse la difracción de las ondas radioeléctricas.

Supongamos que las magnitudes f y λ son fijas. La anchura de la rendija influye considerablemente en la figura de difracción. Si la rendija es grande, $x \rightarrow 0$, es decir, la imagen de la rendija enfocada por la lente es infinitamente estrecha. A medida que disminuye la anchura de la rendija, comienza a revelarse la figura de difracción y su primer mínimo empieza a alejarse cada vez más

del centro de la figura. Por fin, la rendija se hará tan estrecha, que la aproximación que admitimos en la fórmula de u (sustitución de $\sin \varphi$ por $\text{tg } \varphi$) no será correcta. La imagen de la rendija en la pantalla perderá nitidez y, en fin de cuentas, cuando la longitud de la onda y la dimensión de la rendija se igualen, la rendija producirá radiación secundaria como fuente única. La interferencia de las ondas elementales desaparecerá y de la rendija divergerá en todos los sentidos una sola onda elemental.

Para los orificios y partículas (o inclusiones en el medio) que tienen otra forma, las figuras de difracción, como puede verse en la fig. 154, tienen un aspecto totalmente distinto. No obstante, las peculiaridades principales de la figura y las leyes generales se conservan. Así, por ejemplo, cuando la difracción proviene de un orificio circular o de otra heterogeneidad redonda, se observan anillos concéntricos y el diámetro mínimo del anillo oscuro es $1,22\lambda f/D$, donde D es el diámetro del orificio.

Como las figuras de difracción tienen los máximos en distintos puntos para las diferentes longitudes de onda, cuando se difracta luz blanca se produce su descomposición en el espectro. En este caso, la difracción por una partícula u orificio circular tiene el aspecto de anillo irisado.

§ 138. Sistema de dispersores colocados desordenadamente

Hemos estudiado el comportamiento de diversos radiadores secundarios de ondas electromagnéticas en función de sus dimensiones con respecto a la longitud de la onda incidente. Las propiedades de un dispersor sólo vienen determinadas por sus dimensiones en los rasgos más generales; el cuadro detallado se determina por la distribución de la sustancia en la partícula dispersora. La distribución de la sustancia en la partícula no desempeña papel únicamente cuando sus dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda. En este caso la partícula dispersa como si fuera un todo único, es decir, como un dipolo eléctrico único. En el caso contrario la figura se complica, puesto que viene determinada por la interferencia de las ondas dispersadas en los distintos volúmenes de la partícula. Nosotros hemos considerado solamente un ejemplo de dispersor con dimensiones mayores que la longitud de la onda, a saber, el de una partícula uniformemente dispersora de la cual puede servir de modelo un orificio en una pantalla opaca.

Ahora vamos a ocuparnos de los problemas relativos a la dispersión por un sistema de partículas, como, por ejemplo, del sistema formado por las moléculas de un gas, por un conjunto de partículas

de polvo o de humo, por un sistema de cristaliticos de escarcha sobre un vidrio o por el sistema de orificios de una gasa. En todos estos casos y en otros semejantes, la figura se complica porque las ondas que parten de los distintos dispersores pueden, en general, interferir entre sí. Ahora la figura de dispersión dependerá no sólo de las propiedades de una partícula dispersora, sino también del carácter que tenga su colocación mutua. Cobra importancia la proximidad de unos dispersores a otros y el orden o desorden de su colocación mutua. En dependencia de estas circunstancias, la interferencia de las ondas dispersadas por distintas partículas puede expresarse en grado sumo o estar totalmente ausente. También son posibles todos los casos intermedios.

Nos detendremos en los casos extremos y, para empezar, consideraremos la dispersión por un sistema de partículas situadas desordenadamente, basándonos en el ejemplo de la dispersión de los rayos X por una gran concentración desordenada de átomos o moléculas.

En presencia de un gran número de centros dispersores iguales (por ejemplo, átomos, moléculas o de partes mayores iguales), la dispersión resultante se determina, como ya dijimos, por la dispersión de un centro (región) y por el carácter de la disposición mutua de los centros dispersores. Las figuras de dispersión correspondientes a los casos de colocación ordenada y desordenada de los centros dispersores son totalmente distintas.

Si los centros dispersores se hallan en completo desorden, como, por ejemplo, unas moléculas de un gas con respecto a otras, las ondas dispersadas por distintos centros pueden considerarse no coherentes. Esto se explica, porque, cuando los centros dispersores están dispuestos en desorden, se encuentran con igual probabilidad cualesquiera relaciones de fase entre las ondas provenientes de los distintos centros. Puede afirmarse con toda seguridad que al punto de observación llegarán cantidades iguales de ondas (de distintos centros) de amplitudes positivas o negativas. No es difícil comprender lo que ocurre en estas condiciones. Llamemos A_1 , A_2 , A_3 , etc., a las amplitudes de las ondas de distintos centros. La amplitud total en el punto de observación será:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots,$$

y la intensidad, que es proporcional al cuadrado de la amplitud, será una suma de la forma

$$I \sim A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots + 2A_1A_2 + 2A_1A_3 + \dots + 2A_2A_3 + \dots$$

Pero entre los dobles productos se encontrarán con igual frecuencia sumandos negativos y positivos. Por esto la suma con gran precisión será igual a la suma de los cuadrados de las amplitudes que se

componen. En otras palabras, la intensidad total será igual a la suma de las intensidades emitidas por los distintos centros. Si los centros son idénticos, la intensidad total, dispersada por los centros en desorden, se escribirá así:

$$I = NA^2,$$

donde N es el número de centros dispersores y A es la amplitud de la dispersión de un centro.

Así, pues, resulta que la dispersión por una multitud de partículas en desorden tiene el mismo carácter que la dispersión por una partícula. Pero N veces más intensa.

Estudiando la dispersión de los rayos X por un gas obtenemos datos acerca de la dispersión por una molécula. El esquema del análisis de la dispersión de los rayos X por los gases se representa en la fig. 157. El rayo X se monocromatiza reflejándose en un cristal y luego entra en la cámara que contiene el gas. La dispersión se registra en una película fotográfica. El grado de ennegrecimiento de la

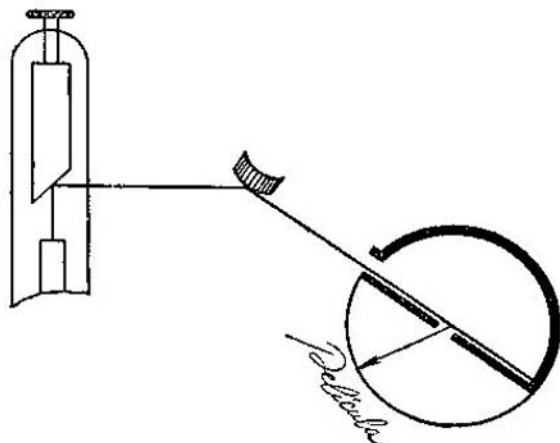


FIG. 157.

película da idea de la intensidad. La intensidad, en función del ángulo de dispersión, se representa por unas curvas suaves que decrecen rápidamente, cuando los gases son monoatómicos, y por unas curvas descendentes con máximos poco expresados, cuando los gases son poliatómicos. Por estas curvas y aplicando las fórmulas teóricas se puede juzgar acerca del carácter de la distribución de la densidad electrónica en la molécula.

Se puede poner un número considerable de ejemplos de sistemas que dispersan las ondas electromagnéticas de un modo semejante a como un gas dispersa los rayos X.

Es bien conocida la dispersión de un rayo de luz en una habitación donde hay polvo. A través de una rendija de las cortinas que cierran la ventana entra en la habitación un rayo de luz claro y rectilíneo que se ve desde todas partes. El sistema de partículas de polvo se comporta, con respecto a la onda luminosa, de un modo semejante en muchos aspectos a como lo hace un sistema de moléculas con respecto a un rayo X. Las partículas de polvo se encuentran a grandes distancias unas de otras y están distribuidas caóticamente. No existe interferencia de ondas dispersadas por distintas partículas, y la figura de dispersión es la misma que la debida a una partícula. Pero su intensidad aumenta proporcionalmente al número de partículas de polvo que se hallan en el campo del rayo luminoso primario. Cada partícula de polvo se comporta como un dipolo eléctrico elemental (la dimensión de una partícula de polvo es menor que la longitud de la onda luminosa). Por esta razón las leyes de la dispersión de la luz por partículas de polvo, es decir, su dependencia de la longitud de onda de la luz y el carácter de la distribución angular, serán las mismas que para el dipolo eléctrico elemental (o sea, serán válidas la fórmula de la intensidad, dada en la pág. 343, y la distribución de la intensidad, representada en la fig. 133).

Las leyes que consideramos tampoco son difíciles de demostrar comparando las figuras de difracción producidas por un orificio y por un sistema de orificios desordenadamente dispuestos. La experiencia demuestra que, por el carácter de la distribución de la intensidad dispersada, estas dos figuras de difracción serán absolutamente idénticas. Es natural que la intensidad de la dispersión por la pantalla con N orificios será N veces mayor que la producida por la pantalla opaca con un solo orificio.

Como la dispersión por muchos centros en desorden coincide por su carácter con la dispersión por un solo centro, está clara la procedencia de los halos irisados que aparecen alrededor de los faros cuando se miran a través de un cristal cubierto de escarcha. Esta figura no es nada más que la difracción de la luz en las partículas de hielo. Como estas partículas se encuentran en completo desorden, se comportan como partículas «redondas».

§ 139. Comportamiento de un medio homogéneo continuo

Este es el caso extremo opuesto (con respecto al que acabamos de estudiar) del fenómeno de la dispersión. Al hablar de un medio heterogéneo tenemos en cuenta un sistema de dispersores distribuidos en el espacio de forma completamente uniforme y continua.

Un medio homogéneo continuo con respecto a las ondas luminosas es, por ejemplo, un vidrio transparente. La longitud de la onda luminosa es considerablemente mayor que las distancias interatómicas, por lo tanto, podemos dividir el trozo de vidrio en volúmenes elementales de dimensiones considerablemente menores que la longitud de la onda de luz, pero que al mismo tiempo contengan un gran número de moléculas. El medio puede considerarse homogéneo si el número de moléculas es prácticamente igual en todos estos volúmenes.

La dispersión de las ondas electromagnéticas no solo depende de la homogeneidad con respecto al número de radiadores por unidad de volumen, sino también de la homogeneidad de su distribución según las orientaciones. Al fin de cuentas la capacidad dispersora del volumen del cuerpo se define por su momento de dipolo, que se compone de los momentos dipolares de las moléculas que constituyen dicho volumen. Puede decirse por esto que la capacidad dispersora del volumen del cuerpo viene determinada por el valor de la constante dieléctrica, ϵ , teniendo en cuenta la relación $\epsilon = n^2$, de su factor de refracción. Por consiguiente, un medio homogéneo con respecto a la dispersión de las ondas electromagnéticas deberá ser también homogéneo con relación al índice de refracción para la longitud de onda dada.

Las observaciones del comportamiento de las ondas electromagnéticas en medios homogéneos continuos demuestran que en ellos no existe dispersión: cuando un rayo de luz pasa a través de un cuerpo transparente, la luz no se ve cuando se mira de lado (al contrario de lo que ocurre con un rayo de luz que pasa por una habitación en que hay polvo).

Cada volumen elemental del cuerpo homogéneo es origen de una onda elemental. Pero al mismo tiempo no se produce una onda dispersada. Esto sólo se puede explicar del modo siguiente: las ondas elementales dispersadas por el medio homogéneo en cualquier dirección que forma ángulo con el rayo primario se destruyen totalmente en virtud de la interferencia. Este teorema puede demostrarse con suficiente rigurosidad; pero no nos defendremos a hacerlo, ya que la singularidad de esta explicación es bastante evidente.

Sin embargo el fenómeno de la dispersión en el medio homogéneo se manifiesta considerablemente. El hecho es que las ondas dispersadas se destruyen entre sí en todas las direcciones menos en una, aquella en que se propaga la onda primaria. La dispersión hacia adelante no se superpone simplemente a la onda primaria, sino que varía su velocidad. El fenómeno de la refracción de las ondas electromagnéticas, que ya hemos estudiado, puede interpretarse, pues, como una consecuencia natural de la dispersión.

Una onda electromagnética que se propaga en un medio es la suma de la onda primaria más las ondas dispersadas. La teoría demuestra que la superposición de estas ondas se reduce a retardar la onda primaria.

§ 140. *Dispersión en un medio no homogéneo*

Una sustancia distribuida uniformemente, en el sentido que acabamos de considerar, no dispersa las ondas electromagnéticas. Aunque todas las partes de esta sustancia crean ondas elementales, a los lados es imposible descubrir radiación secundaria: cualquiera que sea el punto del espacio que se tome como punto de observación, se puede demostrar rigurosamente que, interfiriendo entre sí, las ondas dispersadas por la sustancia homogénea se destruyen unas a otras. Cada onda elemental siempre se iguala con otra que esté en fase contraria a la de ella. Como resultado de esto, la acción de todas las ondas elementales se destruye.

Figurémonos ahora que, en cualquier parte limitada, la sustancia tiene mayor densidad que en el medio circundante, es decir, que tiene un número excesivo de dipolos por unidad de volumen. En este caso se destruirán todas las ondas elementales menos las creadas por este exceso de densidad. El cálculo de la radiación dispersada consistirá, como siempre, en componer las amplitudes de las ondas elementales. Está claro que al hacer la suma hay que tener presente la diferencia de fases con que las ondas elementales llegan al punto de observación.

Si la parte dispersora tuviera menor densidad, en vez de mayor, ¿cambiarían las cosas? Podemos razonar del modo siguiente: si a esta parte dispersora se le añade sustancia de manera que el medio se haga homogéneo, la dispersión desaparece. Está claro que añadiendo y restando a una suma cualquiera una misma cantidad, la suma no varía. Por lo tanto, la dispersión en la parte con menor densidad será igual a la dispersión que produce la cantidad de sustancia que hace falta para que el medio se llene de forma homogénea.

Así, pues, sólo tiene importancia lo siguiente: la parte dispersora debe tener una densidad de distribución de la sustancia diferente de la del medio circundante. En la dispersión influye indistintamente una alteración de la densidad en el sentido de su aumento que en el sentido de su disminución. Así, por ejemplo, la dispersión por un vidrio poroso y la dispersión de un vidrio con inclusiones, de las mismas dimensiones que los poros, distribuidas desordenadamente, son completamente idénticas.

Para las ondas radioeléctricas, debido a su gran longitud, la dispersión se producirá solamente en aquellos casos en que las

heterogeneidades de la densidad se observan en una escala relativamente grande. Por ejemplo, para que se produzca la dispersión de las ondas kilométricas es necesario que en su trayectoria se encuentren desviaciones de la densidad media que tengan por lo menos cien metros. Si las inclusiones o las caídas de la densidad son menores, las ondas no las «notan».

La dispersión de las ondas luminosas se observa únicamente cuando existen alteraciones en la distribución de la sustancia dispersora del orden de décimas de micra como mínimo. Por lo tanto, las ondas luminosas son insensibles a las heterogeneidades en la distribución de los electrones en la molécula ni al paso de una molécula a la adyacente, ya que en estos casos las distancias son mucho menores que décimas de micra. Otra cosa es la que ocurre con los rayos X: como su longitud es del mismo orden que las dimensiones del átomo, para ellos un átomo aislado desempeña el papel de «inclusión en el vacío».

La dispersión de las ondas luminosas en las heterogeneidades es muy frecuente. La existencia de heterogeneidades en la sustancia dispersora puede conocerse por el aspecto del medio. El medio se enturbia. Las condiciones necesarias para que se produzca la dispersión de la luz se dan en los vidrios opalescentes, en el aire polvoriento, etc. En todos estos casos existen en el medio alteraciones desordenadas de la densidad de la sustancia, con la particularidad de que las dimensiones de las zonas de alteración se aproximan a la longitud de la onda luminosa.

Como dijimos antes, si una partícula o heterogeneidad dispersa como un dipolo (para esto deberá ser por lo menos 10—20 veces menor que la longitud de onda), la intensidad de la dispersión, de acuerdo con la fórmula del dipolo (véase la pág. 385), deberá ser proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia, es decir, inversamente proporcional a la cuarta potencia de la longitud de onda. En el caso de la luz, esto conduce a una conclusión interesante: cuando la luz blanca es dispersada por un medio con heterogeneidades, éste debe adquirir un colorido celeste, porque los rayos celestes (los más cortos) se dispersan con mayor intensidad. Al contrario, cuando la luz blanca pasa por un medio dispersor, toma una coloración rojiza, ya que la parte azul del espectro se empobrece debido a que su dispersión es más intensa.

Para las ondas luminosas son heterogéneos no sólo los medios turbios. Un gas o un líquido homogéneos son ópticamente heterogéneos a causa de las fluctuaciones de densidad que existen en ellos. En efecto, hagamos el cálculo siguiente. Puede considerarse que las ondas luminosas dispersadas por las regiones cuya dimensión lineal es del orden de $0,02 \mu\text{m}$ (20 veces menores que la longitud de onda λ) se hallan en la misma fase. En un volumen de gas de este tipo

($8 \cdot 10^{-18}$ cm³), en condiciones normales, hay, en promedio, 215 moléculas. La fluctuación relativa del número de partículas, según las leyes de la física estadística, es $1/\sqrt{N}$, o sea, igual aproximadamente al 4%. Esta es una heterogeneidad perfectamente apreciable que hace posible la dispersión de la luz en el aire.

A esta dispersión se debe el color celeste del cielo. Si la atmósfera no dispersara la luz del Sol, el cielo parecería negro. El color del cielo se mantiene por la dispersión de una parte relativamente pequeña de la energía: la dispersión por unidad de volumen es del orden de la diezmilésima parte de la energía de la onda primaria.

La dispersión por las fluctuaciones de densidad se llama molecular, porque depende de la estructura molecular de la sustancia (y no de las impurezas que contiene). El análisis de la dispersión molecular en los líquidos ofrece interés como procedimiento para determinar ciertas peculiaridades de la estructura molecular. Un medio no homogéneo en el cual las regiones que discrepan de la densidad media se hallan a distancias suficientemente grandes unas de otras y distribuidas caóticamente, no difiere, por el carácter de la dispersión que produce, de un sistema de centros dispersores desordenados (§ 138). No obstante, en la mayoría de las veces, en los medios continuos (como los líquidos y los sólidos amorfos con respecto a los rayos X, los vidrios opalescentes o los sistemas coloidales con relación a los rayos luminosos y la atmósfera con respecto de las ondas radioeléctricas) la interferencia de las ondas dispersadas por regiones contiguas de densidad más baja o más alta, influye en la forma de la figura de dispersión. Este tipo de interferencia ocasiona una dispersión que difiere considerablemente de la figura ideal de dispersión por un solo dipolo eléctrico.

Hemos estudiado la dispersión de las ondas electromagnéticas por un sistema de partículas dispuestas caóticamente, la dispersión en un medio continuo homogéneo y, finalmente, la dispersión en un medio heterogéneo como caso intermedio. Nos queda por considerar un caso importante: la dispersión de las ondas electromagnéticas en sistemas de centros dispuestos ordenadamente. Haremos esto basándonos en los ejemplos de la red de difracción para las ondas luminosas, de los emisores dirigidos para las ondas radioeléctricas y de los cristales para los rayos X.

§ 141. Red de difracción

Una red de difracción puede hacerse de una lámina de vidrio recubierta con una capa de aluminio delgada. Con unas máquinas especiales provistas de una cuchilla blanda, hecha de marfil, se trazan rayas situadas a iguales distancias unas de otras. En esta

«red», las heterogeneidades (rayas) están dispuestas regularmente y esto ocasiona una serie de peculiaridades en la dispersión de la luz.

Vamos a hablar todo el tiempo de red de difracción óptica, pero los razonamientos y los datos que se exponen a continuación se refieren a cualquier tipo de heterogeneidades y centros de dispersión regularmente dispuestos y a ondas electromagnéticas cualesquiera, desde las más cortas hasta las kilométricas. Nos limitaremos a estudiar la difracción de rayos paralelos, para lo cual haremos uso del procedimiento mencionado en el § 137.

Si todos los centros dispersores son idénticos (en la red de difracción óptica se cumple esto), el cálculo de las figuras de difracción debe hacerse del modo siguiente.

Consideremos la amplitud de la onda que forma un ángulo φ con la incidente. La amplitud total se compone de las amplitudes de las ondas dispersadas por los distintos centros. Si las ondas procedentes de estos centros llegaran al punto de observación en una misma fase, la amplitud total sería igual al producto del número de centros N por la amplitud de un centro aislado f . Pero la onda de cada uno de los centros está desfasada de la onda del centro contiguo (pudiendo considerarse que este desfasaje tiene la misma magnitud para todas las ondas). Las ondas de centros distintos diferirán y la intensidad resultante no será igual a Nf^2 , sino a Lf^2 , donde L es una magnitud que será mayor que N en la dirección en que las ondas se refuerzan unas a otras, y menor que N , donde las ondas llegan en su mayoría en fases opuestas y se debilitan entre sí.

Las direcciones en que las ondas de todos los centros se reforzarán unas a otras se hallan inmediatamente partiendo de la fig. 158.

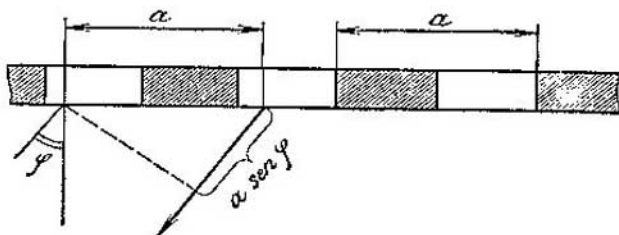


FIG. 158.

La diferencia de marchas de las ondas que salen de dos puntos correspondientes (centros contiguos) será igual a $a \sin \varphi$. Las ondas se reforzarán mutuamente si esta diferencia de marchas es igual a un número entero de longitudes de onda: $a \sin \varphi = n \lambda$ (condición de máximo). Estas direcciones, como vemos, serán varias. Si sobre la red incide una onda no monocromática, aquella la descompondrá

en un espectro. Pero en este caso el espectro no será único, sino que habrá varios. El número n que figura en la ecuación que hemos escrito se llama, por esta razón, *orden del espectro*.

El número n puede ser igual a cero (rayo no desviado) y negativo. Los espectros primero y menos primero, segundo y menos segundo y así sucesivamente, serán idénticos, cuando, desde el punto de vista geométrico, el experimento sea simple (una onda plana bajo ángulo recto).

El cálculo de la distribución de la intensidad de la onda dispersada es algo extenso. Nos detendremos solamente en el importante problema acerca de la anchura del máximo de difracción. Nos interesa conocer la rapidez con que decae la intensidad del máximo de difracción que se produce cuando los ángulos φ satisfacen la ecuación $a \sin \varphi = n\lambda$; ¿se pasa directamente de un máximo al siguiente, o existe entre ellos una caída suficientemente ancha? Consideraremos el caso prácticamente importante de una red constituida por un gran número de centros dispersores (rendijas). Dividamos mentalmente la red en dos partes y comparemos las fases de los pares de rayos procedentes del primer centro y del centro $(N/2+1)$ -ésimo, del segundo centro y del centro $(N/2+2)$ -ésimo, etc. Cuando el reforzamiento de las ondas es máximo, la diferencia de marcha entre pares de estos rayos es igual a $(N/2) n \lambda$. Si se varía ligeramente la trayectoria de los rayos inclinándolos de manera que la diferencia de marcha aumente en $\frac{1}{2}$ longitud de onda, el reforzamiento máximo de las ondas que se componen es sustituido por su total anulación. La primera onda extinguirá a la $(N/2+1)$ -ésima, la segunda a la $(N/2+2)$ -ésima y así sucesivamente. Si nos alejamos más aún de la posición del máximo, la intensidad, como demuestra el cálculo exacto, permanece prácticamente igual a cero hasta que el ángulo de desviación φ no se aproxima a la posición del máximo siguiente.

El ángulo con el cual aparece el máximo de difracción de orden n -ésimo viene dado por la fórmula

$$\sin \varphi = \frac{n\lambda}{a}.$$

Si llamamos $\Delta\varphi$ a la semianchura angular del máximo, para el ángulo $(\varphi + \Delta\varphi)$ puede escribirse la condición

$$\frac{N}{2} a \sin (\varphi + \Delta\varphi) = \frac{N}{2} n\lambda + \frac{\lambda}{2}.$$

De donde

$$\sin (\varphi + \Delta\varphi) = \frac{n\lambda}{a} + \frac{\lambda}{Na},$$

por lo tanto,

$$\operatorname{sen}(\varphi + \Delta\varphi) - \operatorname{sen}\varphi = \frac{\lambda}{Na}.$$

La distancia entre dos máximos vecinos se determina por la expresión

$$\operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{\lambda}{a}.$$

Como puede verse, la semianchura de la línea es, aproximadamente, N veces menor que la distancia entre los máximos. Cuando los valores de N son grandes, es decir, cuando las redes constan de un gran número de centros de dispersión, las líneas de difracción son extraordinariamente estrechas y el espectro que se obtiene con la red es muy detallado. Figurémonos, por ejemplo, que sobre la red incide una luz en cuya composición entran dos ondas próximas entre sí, λ y $\lambda + \delta\lambda$. Supongamos para simplificar que se trata de dispersiones con ángulos menores de 20° y $\operatorname{sen}\varphi \approx \varphi$. En este caso puede decirse lo siguiente: en el orden n -ésimo estas dos líneas estarán desplazadas en el ángulo $\delta\varphi$, que, como se deduce de la condición $\operatorname{sen}\varphi \approx \varphi = \frac{n\lambda}{a}$, será igual a $\delta\varphi = \frac{n}{a} \delta\lambda$. La anchura del máximo, para cada onda, se halla partiendo de la ecuación

$$\operatorname{sen}(\varphi + \delta\varphi) - \operatorname{sen}\varphi \approx \delta\varphi = \frac{\lambda}{Na}.$$

Está claro que estas dos líneas se verán separadas (o resueltas, como se dice en óptica), si

$$\frac{n}{a} \delta\lambda \geq \frac{\lambda}{Na}.$$

La expresión $\lambda/\delta\lambda = nN$ caracteriza el *poder separador o de resolución* de la red.

Ejemplo. En una buena red de difracción, la distancia entre los trazos $a \sim 10^{-3}$ mm, y el número de estos $N = 100\,000$. En este caso su poder separador para el espectro de segundo orden será $\lambda/\delta\lambda = nN = 200\,000$. Esto significa que, por ejemplo, para $\lambda = 6000$ Å, podrán distinguirse dos rayas entre cuyas longitudes de onda exista una diferencia de 0,03 Å.

Detengámonos ahora en la intensidad del rayo difractado. Las ondas que se dirigen a un punto del máximo actúan en una misma fase. Si f es la amplitud de la onda que dispersa un centro, la amplitud total que va en la dirección del máximo será Nf , y la intensidad, N^2f^2 . La altura del máximo de difracción es proporcional al cuadrado del número de centros de dispersión. Y como la anchura del máximo es inversamente proporcional a N , su área

(la intensidad integral del máximo) será proporcional a la primera potencia de N . Si comparamos entre sí distintos máximos, veremos que la relación entre sus alturas (o, lo que es lo mismo, entre sus áreas) depende del valor que en estas direcciones tiene la amplitud f de la dispersión por un centro.

De este modo, el período de la red predetermina los puntos donde se encuentran los máximos, y la forma (en el sentido amplio de la palabra) de la rendija o del centro de dispersión determina la intensidad de dichos máximos.

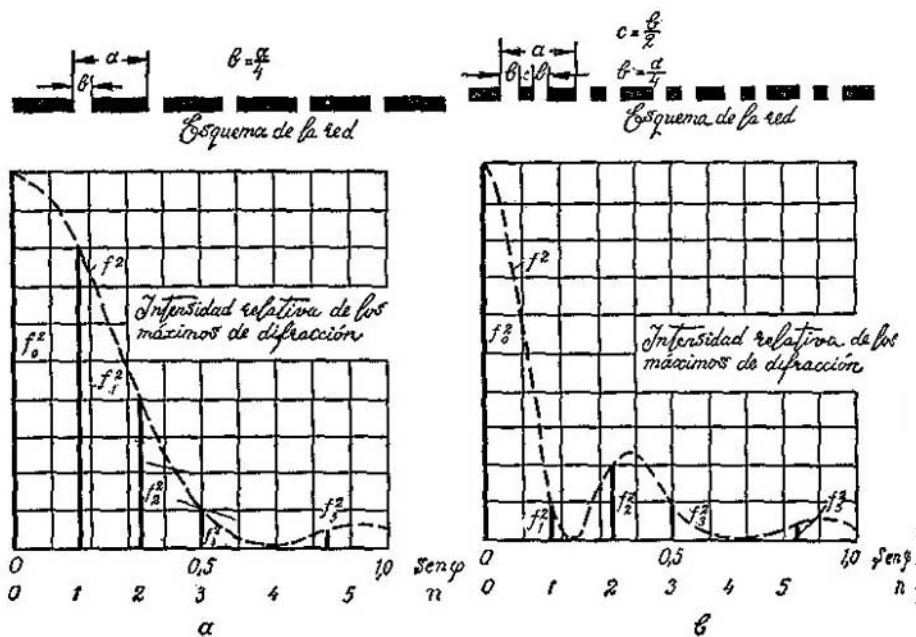


FIG. 159.

Supongamos que el período de la red determina los ángulos φ_1 , φ_2 , φ_3 , etc. Los rayos dispersados salen únicamente formando estos ángulos. Pero, ¿cuál será la intensidad de estos rayos para los órdenes de difracción primero, segundo, etc.? Esto depende de los valores de la amplitud de un centro dispersor correspondiente a estos ángulos. Puede ocurrir que para el ángulo φ_2 la amplitud f esté en el máximo. Entonces el segundo orden de difracción estará representado por una raya intensa. Si bajo el ángulo φ_3 la amplitud f está próxima a cero, la raya de tercer orden estará ausente en el espectro de difracción y así sucesivamente. De ilustración de lo

expuesto puede servir la fig. 159, en la que se representan los espectros de difracción y los factores de dispersión f de un centro (línea punteada), correspondientes a dos estructuras distintas de la red.

En estos principios se basa todo género de análisis de la estructura por medio de los espectros de difracción. La distancia entre las rayas de difracción permite hallar el periodo de la red (si se conoce la longitud de onda), y la intensidad de las rayas de distintos órdenes permiten entender la estructura del centro dispersor.

Ejemplo. Sea una red de difracción de $a=3 \cdot 10^{-3}$ mm y $N=1000$, sobre la cual incide un haz paralelo de luz monocromática de $\lambda=5000$ Å. Los máximos de difracción se verán bajo los ángulos $\sin \varphi_n = \frac{n\lambda}{a} = \frac{n}{6}$, la anchura del máximo de difracción será $2 \frac{\lambda}{Na} = \frac{1}{3000}$. Los resultados obtenidos son correctos cualquiera que sea la forma del centro de dispersión. Para calcular la intensidad relativa de los máximos de difracción hay que considerar una forma correcta de centros de dispersión.

1. Los centros de dispersión son rayas simples de anchura $b=a/4=0,75 \times 10^{-3}$ mm (fig. 159, a). La fórmula de la intensidad cuando la difracción es por una rendija se obtuvo en el § 137. El valor de la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud de la dispersión por una raya: $f_n^2 \sim \frac{\sin^2 u}{u^2}$, $u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi$. La intensidad del n -ésimo máximo de difracción viene determinado por la magnitud f_n^2 en la dirección φ_n , que se determina partiendo de la ecuación $\sin \varphi_n = n/6$. Si se toma f_0^2 como igual a 100, para las demás intensidades obtenemos:

$$f_1^2 = 80; \quad f_2^2 = 40; \quad f_3^2 = 8,9; \quad f_4^2 = 0; \quad f_5^2 = 3,2.$$

2. Los centros de dispersión son rayas dobles de anchura $b=a/4=0,75 \times 10^{-3}$ mm cada una. El periodo a de la red es el mismo que antes (fig. 159, b). Está claro que la situación y la anchura de los máximos de difracción no habrá cambiado. Un cálculo análogo al que se hizo en el § 137, demuestra que para dos rendijas $f^2 = \frac{\sin^2 u}{u^2} 2 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (b+c) \sin \varphi \right] \right\}$. De aquí pueden hallarse fácilmente las intensidades relativas de los máximos de difracción, suponiendo $f_0^2 = 100$:

$$f_1^2 = 12; \quad f_2^2 = 20; \quad f_3^2 = 7,5; \quad f_4^2 = 0; \quad f_5^2 = 2,7.$$

§ 142. Emisores dirigidos de ondas radioeléctricas

Para algunos fines radiotécnicos, y en primer lugar para la radiolocalización, tiene mucha importancia el poder dirigir el haz radioeléctrico en el espacio, concentrando de esta forma la energía del generador en un ángulo sólido tan pequeño como sea posible. Uno de los procedimientos para resolver este problema consiste en utilizar para este fin una red regular de antenas.

En el § 141 vimos que, cuando los centros de dispersión están colocados ordenadamente, la energía emitida se concentra en deter-

minadas direcciones. Si los emisores de ondas radieléctricas se colocan en una fila (fig. 160), a distancias a entre cada dos antenas consecutivas, y se consigue que todas las antenas funcionen sincrónicamente, esta red de emisores no diferirá en nada de una red de difracción dispersora. El hecho de que en el caso de las antenas nos encontramos con ondas primarias, no cambia en absoluto los razonamientos que hicimos en el párrafo anterior, lo único que hace falta es que la radiación emitida por las distintas antenas pueda considerarse coherente, lo que puede lograrse si las antenas se alimentan sincrónicamente por el generador de oscilaciones.

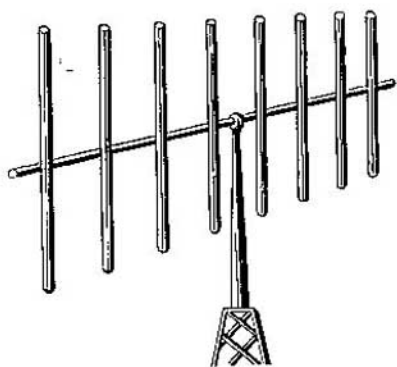


FIG. 160.

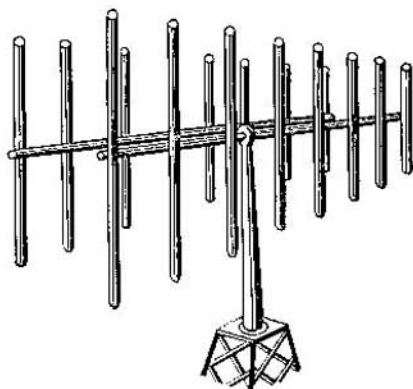


FIG. 161.

Si las antenas se colocan suficientemente próximas unas a otras, de manera que la distancia entre los dipolos vecinos sea menor que la longitud de la onda, el primer orden de difracción, de acuerdo con la ecuación $a \sin \varphi = n \lambda$, será ya imposible. Queda, pues, únicamente el orden nulo. Esto quiere decir que solo existirán dos máximos de radiación, uno de los cuales formará un ángulo de 0° con la dirección normal de la red, y el otro, un ángulo de 180° . Lo dicho en el § 141 acerca de la anchura del máximo también sigue aquí en vigor, es decir, cuanto mayor sea el número de emisores, tanto más estrecho será el ángulo sólido en que la intensidad del rayo alcanza un valor considerable.

Pero en la práctica resulta incómodo el que la radiación tenga igual intensidad en dos direcciones opuestas. Para evitar esto se construye una doble red de dipolos (fig. 161). Cada par de antenas se coloca a una distancia igual a $1/4$ de longitud de onda. Así se consigue que en cada par de dipolos las corrientes están desfasadas en 90° . En estas condiciones, uno de los dos máximos se anula y toda

la energía se transmitirá dentro de un máximo de difracción. En efecto, en esta estructura cada par de dipolos se encontrará en las siguientes relaciones de fase. Para la onda que va «hacia adelante»: si las ondas se emitieran sincrónicamente, entre ellas existiría una diferencia de marcha de $1/4$ de onda; pero las antenas no funcionan sincrónicamente, sino que la onda emitida por el dipolo «delantero» está retrasada en 90° , con lo que se compensa su adelanto en diferencia de marcha. Lo que ocurre con la onda emitida «hacia atrás» es distinto. Los desplazamientos por diferencia de marcha y de fase de variación de la corriente en las antenas, se superponen; por consiguiente, la diferencia de fases resultante será de 180° y la emisión que va hacia atrás, desaparece.

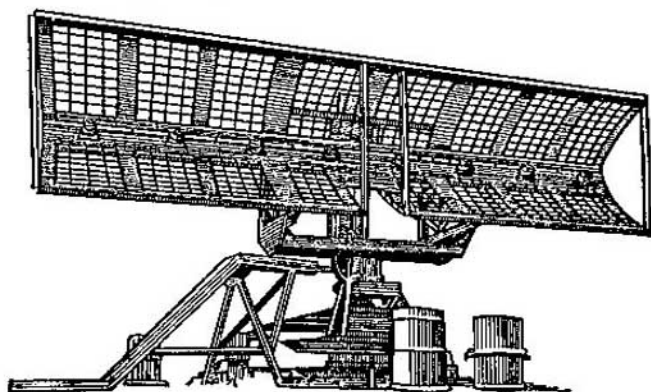


FIG. 162.

Si las antenas están dispuestas en serie lineal, pueden lograrse buenos resultados para la anchura del rayo en el plano perpendicular a las antenas. Pero si queremos que la señal de radio sea estrecha en el espacio, hay que recurrir a sistemas de vibradores más complejos. Esto explica por qué las antenas emisoras de radar (fig. 162) tienen formas tan raras.

§ 142 a. Holografía

Una onda dispersada por cualquier objeto es portadora de una rica información acerca de las propiedades de aquél. Partiendo del principio de Huygens, puede demostrarse con todo rigor que la distribución de las amplitudes y fases de la onda, en el frente de ésta y en cualquier instante del proceso de su propagación, caracteriza de un modo exhaustivo las propiedades dispersoras del objeto.

Cuando el objeto se fotografía, se pierde parte de la información que transporta la onda. El ennegrecimiento de la placa fotográfica es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda (es decir, de su intensidad) que llega a un punto determinado de dicha placa, pero no depende de la fase de la onda. La placa fotográfica da una

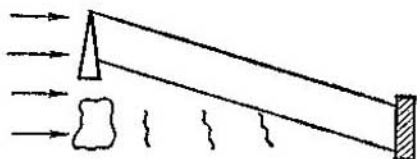


FIG. 162a.

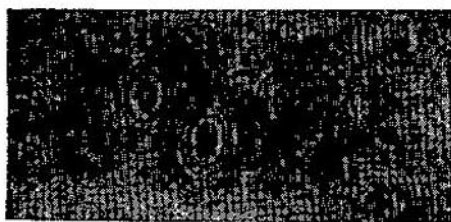


FIG. 162b.

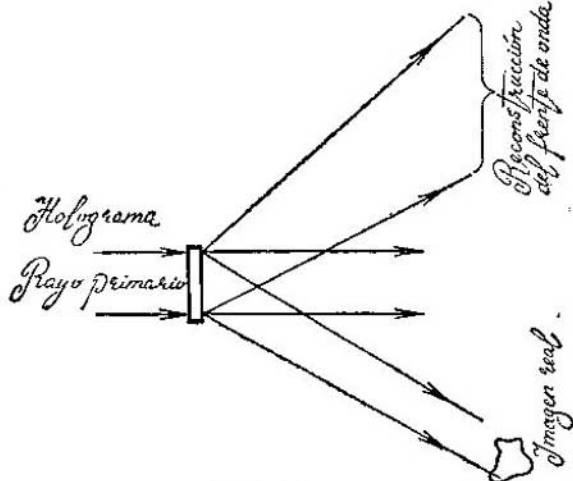


FIG. 162c.

imagen bidimensional de una figura tridimensional. Está claro que una parte considerable de la información acerca del objeto se pierde cuando se fotografía.

En vez del proceso fotográfico, D. Gabor propuso en 1947 el proceso holográfico, cuya realización práctica se hizo posible después de la invención del láser.

La holografía es un proceso de dos etapas. Primero se saca el holograma del objeto, y después, se ilumina este holograma y aparece la imagen tridimensional del objeto, que, en principio, no se distingue de él.

Se llama *holograma* la figura de interferencia, obtenida en una placa fotográfica, como resultado de la interferencia de un rayo primario y un rayo dispersado.

La interferencia de un rayo dispersado con el primario se puede conseguir por procedimientos muy diversos. En el esquema más simple, una parte del frente plano de la onda laseriana la podemos cerrar con un prisma, y la otra parte, con el objeto dispersor (fig. 162a). La coherencia de la radiación del láser permite obtener en la placa fotográfica cierta figura de interferencia que tendrá un aspecto semejante al que se ve en la fig. 162b. Si se quitara el objeto dispersor, la figura de interferencia tendría la forma de rayas paralelas a la arista del prisma, separadas por una distancia que puede expresarse fácilmente (véase la pág. 376) en función del ángulo del prisma. Puede decirse que la dispersión por el objeto «modulaba» esta simple figura de interferencia.

La figura en que las franjas oscuras y brillantes se suceden entre sí nos recuerda la red de difracción. Por esta razón no es difícil estar de acuerdo en que, cuando la luz incide sobre el holograma, aparece el rayo no desviado y, además, los espectros más y menos de primer orden. Puede demostrarse, aunque no nos detengamos en ello, que los órdenes elevados del espectro estarán ausentes y que uno de los espectros representará el frente de onda divergente, reconstruido, de la onda luminosa dispersada por el objeto. La otra onda será convergente y creará la imagen real del objeto, que puede observarse con los mismos medios que el propio objeto (fig. 162c).

En la actualidad se llevan a cabo intensos trabajos de investigación sobre diversas aplicaciones de la holografía. Está claro, por ejemplo, que los hologramas pueden transmitirse con facilidad a distancias cualesquiera y la reconstrucción de la imagen puede hacerse lejos del objeto. En una misma placa, empleando distintas longitudes de onda y diferentes inclinaciones del rayo primario, pueden registrarse imágenes de objetos diversos. La holografía es un procedimiento cuya capacidad para guardar información es muy grande.

La microscopía holográfica está libre de un gran inconveniente que tiene la microscopía ordinaria: la necesidad del enfoque. Una vez obtenido el holograma volumétrico, podemos examinarlo tranquilamente al microscopio y estudiar detalladamente todos los cortes del objeto, aunque la imagen obtenida se refiera a cierto instante determinado. Huelga demostrar la importancia que tiene este procedimiento de investigación cuando se observan objetos vivos.