

Leyes Fundamentales de Mecánica

Irodov



И. Е. Иродов

**Основные законы
механики**

Издательство «Высшая школа»

I. E. Irodov

**Leyes
fundamentales
de mecánica**

Editorial «Mir»

Traducido del ruso por Marcos Navarrete Alegría
Impreso en la URSS. 1981

На испанском языке

© Издательство «Высшая школа». 1978
© Traducido al español. Editorial Mir. 1981

Indice

Prólogo a la segunda edición	7
Sistema de designaciones	8
Introducción	10
Parte I	13
Mecánica clásica	13
Capítulo 1. Fundamentos de cinemática	13
1.1. Cinemática del punto	13
1.2. Cinemática del sólido	20
1.3. Transformación de la velocidad y la aceleración al pasar a otro sistema de referencia	29
Problemas para el capítulo 1	33
Capítulo 2. Ecuaciones fundamentales de dinámica	40
2.1. Sistemas inerciales de referencia	40
2.2. Leyes fundamentales de la mecánica newtoniana	44
2.3. Leyes de fuerzas	49
2.4. Ecuación fundamental de dinámica	52
2.5. Sistemas no inerciales de referencia. Fuerzas de inercia	56
Problemas para el capítulo 2	62
Capítulo 3. Ley de conservación de la energía	73
3.1. Sobre las leyes de conservación	73
3.2. Trabajo y potencia	76
3.3. Campo potencial de fuerzas	80
3.4. Energía mecánica de la partícula en el campo	92
3.5. Ley de conservación de la energía de un sistema	97
Problemas para el capítulo 3	107
Capítulo 4. Ley de conservación de la impulsión	117
4.1. Impulsión. Ley de su conservación	117
4.2. Centro de inercia. Sistema <i>C</i>	123
4.3. Colisión de dos partículas	130
4.4. Movimiento de un cuerpo de masa variable	140
Problemas para el capítulo 4	143

Capítulo 5. Ley de conservación del momento de impulsión	151
§ 5.1. Momento de impulsión de una partícula. Momento de fuerza	151
§ 5.2. Ley de conservación del momento de impulsión	158
§ 5.3. Momento propio de impulsión	164
§ 5.4. Dinámica del sólido	168
Problemas para el capítulo 5	184
Parte II	194
Mecánica relativista	194
Capítulo 6. Cinemática de la teoría especial de la relatividad	194
§ 6.1. Introducción	194
§ 6.2. Postulados de Einstein	199
§ 6.3. Retraso del tiempo y reducción de la longitud	204
§ 6.4. Transformaciones de Lorentz	214
§ 6.5. Corolarios de las transformaciones de Lorentz	217
Problemas para el capítulo 6	224
Capítulo 7. Dinámica relativista	231
§ 7.1. Impulsión relativista	231
§ 7.2. Ecuación fundamental de dinámica relativista	236
§ 7.3. Ley de interacción de la masa y la energía	238
§ 7.4. Relación entre la energía y la impulsión de partícula	243
§ 7.5. Sistema de partículas relativistas	247
Problemas para el capítulo 7	254
Problemas complementarios	261
Apéndices	273
1. Movimiento de un punto en coordenadas polares	273
2. Sobre el problema de Kepler	275
3. Demostración del teorema de Steiner	277
4. Alfabeto griego	278
5. Acerca de los vectores	278
6. Constantes físicas	279
Índice alfabético	280

Prólogo a la segunda edición

El fin de este libro es centrar la atención en las leyes *fundamentales* de mecánica (leyes del movimiento, principios de conservación de la energía, de la impulsión y momento de impulsión), así como mostrar *cómo* se debe emplear estas leyes en la solución de diferentes problemas concretos. Con esto, el autor tendió a liberar el libro de todo lo secundario, para tener la posibilidad de concentrar la atención en aquellos problemas, que presentan para la comprensión las máximas dificultades.

El libro consta de dos partes: 1) mecánica clásica y 2) mecánica relativista. En la primera parte son examinadas las leyes de mecánica en aproximación newtoniana, es decir, a velocidades de movimiento considerablemente menores que la de la luz, en la segunda, a velocidades comparables con ésta.

En cada capítulo primero se expone la teoría de la cuestión correspondiente y luego, en una serie de los más instructivos e interesantes ejemplos y problemas desde el punto de vista físico, se muestra cómo se debe abordar su solución. Los problemas están estrechamente relacionados con el texto fundamental, con frecuencia son su desarrollo y complemento, y por eso el trabajo con ellos no es menos importante que el estudio del texto básico.

En la presente edición se ha hecho una serie de correcciones y precisiones que tienen el fin de subrayar la esencia física de los problemas estudiados. En primer lugar esto se refiere a la segunda ley de Newton y a las leyes de la conservación. Además han sido sustituidos algunos ejemplos y problemas.

El libro es un material didáctico destinado a los estudiantes de los primeros cursos de los centros de enseñanza superior con programas de física ampliado. Puede ser también útil a los estudiantes de los cursos superiores, así como a los profesores de los centros de enseñanza superior.

J. Irodov

Sistema de designaciones

Los vectores se designan por una letra recta negrilla (por ejemplo, \mathbf{r} , \mathbf{F}), esta misma letra con caracteres claros (r , F) significa el módulo del vector. En los problemas complementarios los vectores a veces se designan con caracteres claros y una flechita encima (por ejemplo \vec{v} , \vec{F}).

Los valores medios se señalan con paréntesis $\langle \rangle$, por ejemplo, $\langle \mathbf{v} \rangle$, $\langle N \rangle$.

Los símbolos Δ , d , δ ante las magnitudes significan: Δ — incremento finito de la magnitud, es decir, la diferencia entre sus valores final e inicial, por ejemplo, $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\Delta U = U_2 - U_1$; d — diferencial (incremento infinitesimal), por ejemplo, $d\mathbf{r}$, dU ; δ — valor elemental de la magnitud, por ejemplo, δW — trabajo elemental.

Versores — vectores unitarios:

\mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — versores en coordenadas cartesianas x , y , z

\mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z — versores en coordenadas cilíndricas ρ , φ , z

\mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ — versores en la normal y la tangente a la trayectoria.

Los sistemas de referencia son designados por las letras cursivas K , K' , C .

El sistema C , es un sistema de referencia, ligado con el centro de inercia y que se mueve progresivamente en relación a los sistemas inerciales. En el sistema C todas las magnitudes se marcan con el signo \sim arriba, por ejemplo, \tilde{p} , \tilde{F} .

W — trabajo,

c — velocidad de la luz en el vacío,

E — energía mecánica total, energía total,

E — intensidad del campo eléctrico,

e — carga eléctrica elemental,

F — fuerza,

G — intensidad del campo,

g — aceleración de la caída libre,

I — momento de inercia,

L — momento de impulsión con relación a un punto,

L_z — momento de impulsión con relación al eje,

\tilde{l} — coordenada de arco, brazo del vector,

M — momento de fuerza con relación a un punto,

M_z — momento de fuerza con relación al eje,

m — masa, masa relativista, m_0 — masa en reposo,

N — potencia,

p —impulso,
 q —carga eléctrica,
 r —radio vector,
 s —recorrido, intervalo,
 t —tiempo,
 T —energía cinética,
 U —energía potencial,
 v —velocidad de un punto o de una partícula,
 w —aceleración de un punto o de una partícula,
 β —aceleración angular,
 β —velocidad en unidades de velocidades de la luz,
 γ —constante de la gravitación universal, factor de Lorentz,
 e —energía del fotón,
 κ —coeficiente de la fuerza elástica (seudoclástica),
 μ —masa reducida,
 ρ —radio de curvatura, radio vector de la distancia mínima hasta el eje, densidad,
 φ —ángulo azimutal, potencial,
 ω —velocidad angular,
 Ω —ángulo sólido.

Introducción

Mecánica es la parte de la física, en la cual se estudia la forma más simple de movimiento de la materia, el movimiento mecánico, es decir, el movimiento del cuerpo en el espacio y el tiempo. El hecho de que los fenómenos mecánicos transcurren en el espacio y el tiempo se refleja en cualquier ley mecánica que contenga correlaciones espacio—tiempo, explícitas o implícitas, o sea, distancias e intervalos de tiempo.

La posición de un cuerpo en el espacio puede ser determinada solamente en relación a algunos otros cuerpos. Esto mismo atañe también al movimiento del cuerpo, es decir, a la variación de su posición en el transcurso del tiempo. El cuerpo (o el sistema de cuerpos inmóviles entre sí) que sirve para determinar la posición del que nos interesa, se denomina cuerpo de referencia.

Prácticamente para la descripción del movimiento ligamos con el cuerpo de referencia algún sistema de coordenadas, por ejemplo, el cartesiano. Las coordenadas del cuerpo permiten establecer su posición en el espacio. Luego, como el movimiento tiene lugar no sólo en el espacio sino también en el tiempo, entonces para la descripción del movimiento es, además necesario contar el tiempo. Esto se hace con ayuda de relojes de uno u otro tipo.

El conjunto del cuerpo de referencia, las coordenadas y los relojes sincronizados entre sí, ligados con él, forman el llamado *sistema de referencia*. El concepto de sistema de referencia es fundamental en física. La descripción del movimiento en el espacio y tiempo es posible solamente cuando ha sido escogido un sistema determinado de referencia.

Como otros cualesquiera el espacio y el tiempo son objetos físicos, pero sin embargo, inconmensurablemente más importantes y esenciales. Para estudiar las propieda-

des del espacio y el tiempo, es necesario observar el movimiento de los cuerpos que en ellos se encuentran. Analizando el carácter del movimiento de los cuerpos concebimos también las propiedades del espacio y el tiempo.

La experiencia muestra, que mientras las velocidades de los cuerpos son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz, las escalas lineales y los intervalos de tiempo permanecen *invariables* al pasar de un sistema de referencia a otro, es decir, no dependen de la elección del sistema de referencia. Esto encontró su expresión en la concepción newtoniana del carácter absoluto del espacio y el tiempo. La mecánica, que estudia el movimiento de los cuerpos precisamente en estas condiciones, se denomina *clásica*.

Mas durante el paso a velocidades, comparables con la de la luz, se revela que el carácter del movimiento del cuerpo varía radicalmente. Con esto, las escalas lineales y los intervalos de tiempo ya *dependen* de la elección del sistema de referencia y serán diferentes en distintos sistemas. La mecánica fundamentada en estas nociones, la denominan *relativista*. Naturalmente, que la mecánica relativista es más general y en el caso particular de pequeñas velocidades pasa a la clásica.

Los movimientos reales de los cuerpos son tan complejos que, al estudiarlos, es necesario prescindir de los detalles poco importantes para el movimiento que consideramos (en caso contrario, el problema se complicaría tanto que resolverlo sería prácticamente imposible). Con este fin se emplean conceptos (abstracciones, idealizaciones), cuyo empleo depende del carácter concreto de los problemas que nos interesan, así como del grado de precisión, con el cual queremos obtener el resultado. Entre estos conceptos juegan gran papel las nociones del punto material y del cuerpo rígido.

El punto material, o con brevedad, *partícula* es un cuerpo, las dimensiones del cual se pueden despreciar en las condiciones del problema dado. Evidentemente, que un mismo cuerpo se puede considerar en unos casos como punto material, en otros como cuerpo extendido.

El cuerpo rígido, o con brevedad, *el sólido*, es un sistema de puntos materiales, la distancia entre los cuales no varía en el proceso del movimiento. Un cuerpo real se puede considerar rígido, si su deformación es desprecia-

blemente pequeña en las condiciones del problema que examinamos.

La mecánica se plantea dos problemas fundamentales:

1. El estudio de diferentes movimientos y la generalización de los resultados obtenidos en forma de leyes de movimiento, con ayuda de las cuales puede ser predecido el carácter del movimiento en cada caso concreto.

2. La búsqueda de propiedades generales, propias de cualquier sistema, independientemente de la especie concreta de interacción entre los cuerpos de éste.

La solución del primer problema llevó al establecimiento por Newton y Einstein de las llamadas leyes dinámicas, la solución del segundo problema, al descubrimiento de las leyes de conservación de magnitudes tan fundamentales como la energía, la impulsión y el momento de impulsión.

Las leyes dinámicas y las leyes de conservación de la energía, del impulso y del momento de impulsión son las leyes fundamentales de mecánica. Su estudio constituye el contenido de este libro.

Parte I

Mecánica clásica

Capítulo 1

Fundamentos de cinemática

La cinemática es la parte de la mecánica donde se estudian los procedimientos de descripción de los movimientos independientemente de las causas que los condicionan. En este capítulo serán examinados tres problemas: la cinemática del punto, la cinemática del sólido y la transformación de la velocidad y la aceleración durante el paso de uno a otro sistema de referencia.

§ 1.1. Cinemática del punto

Existen tres procedimientos de descripción del movimiento del punto: vectorial, en coordenadas y el llamado natural. Examinémoslos consecutivamente.

Procedimiento vectorial. En este procedimiento la posición del punto A que nos interesa es dada por el radio vector r , trazado desde cierto punto fijo O del sistema de referencia elegido al punto A . En el caso general durante el movimiento del punto A varía tanto el módulo como el sentido de su radio vector, es decir, el radio vector r depende del tiempo t . El lugar geométrico de los extremos del radio vector r se denomina *trayectoria* del punto A .

Introduzcamos el concepto de *velocidad* del punto. Sea que en el intervalo de tiempo Δt el punto A se trasladó del punto 1 al 2 (fig. 1). En la figura se ve que el vector de translación Δr del punto A es el incremento

del radio vector r durante el tiempo Δt : $\Delta r = r_2 - r_1$. La relación $\Delta r/\Delta t$ se denomina *vector medio de velocidad* $\langle v \rangle$ en el tiempo Δt . El vector $\langle v \rangle$ coincide por su dirección con Δr . Ahora determinemos el vector de velocidad v del punto en el momento de tiempo dado como el límite de la relación $\Delta r/\Delta t$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$, es decir,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}. \quad (1.1)$$

Esto significa, que el vector de velocidad v del punto en el momento de tiempo dado es igual a la derivada del radio vector r según el tiempo y está dirigido por la

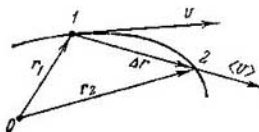


Fig. 1

tangente a la trayectoria en el punto dado por el sentido del movimiento del punto A (como el vector dr). El módulo del vector v es igual*)

$$v = |v| = |dr/dt|$$

El movimiento del punto también se caracteriza por la *aceleración*. El vector de aceleración w determina la velocidad de variación del vector de velocidad del punto con el tiempo:

$$w = dv/dt, \quad (1.2)$$

es decir, es igual a la derivada del vector de velocidad según el tiempo. La dirección del vector w coincide con la del vector dv , es decir, con el incremento del vector v en el tiempo dt . El módulo del vector w se determina análogamente al módulo del vector v .

EJEMPLO. El radio vector de un punto depende del tiempo t conforme a la ley

$$r = at + bt^2/2,$$

donde a y b son vectores constantes. Encontramos la velocidad v y la aceleración w del punto:

$$v = dr/dt = a + bt, \quad w = dv/dt = b = \text{const.}$$

El módulo del vector de velocidad

$$v = \sqrt{v^2} = \sqrt{a^2 + 2abt + b^2t^2}.$$

*) Señalemos, que en el caso general $|dr| \neq dr$, donde r es el módulo del radio vector r y $v \neq dr/dt$. Por ejemplo, si r varía sólo según su dirección (el punto se mueve por un círculo), $r = \text{const}$, $dr = 0$ pero $|dr| \neq 0$.

De ese modo, conociendo la dependencia $r(t)$, se puede encontrar la velocidad v y la aceleración w del punto en cada momento.

Surge también el problema inverso: ¿se puede hallar $v(t)$ y $r(t)$, conociendo la dependencia entre la aceleración $w(t)$ y el tiempo?

Resulta, que para obtener la solución unívoca de este problema la dependencia $w(t)$ es insuficiente. Es necesario conocer además *las condiciones iniciales*, a saber: la velocidad v_0 y el radio vector r_0 del punto en cierto momento inicial $t = 0$. Para convencerse de esto, examinemos el caso más simple cuando en el proceso de movimiento la aceleración del punto $w = \text{const}$.

Primero determinamos la velocidad del punto $v(t)$. Según (1.2), en el intervalo de tiempo dt el incremento elemental de la velocidad $dv = w dt$. Integrando esta expresión según el tiempo de $t = 0$ a t , encontramos el incremento del vector de velocidad en este tiempo:

$$\Delta v = \int_0^t w dt = wt.$$

Pero la magnitud Δv , no es aún la velocidad buscada v . Para encontrar v es necesario conocer la velocidad v_0 , en el momento inicial de tiempo. Entonces $v = v_0 + \Delta v$,

$$v = v_0 + wt.$$

De modo análogo se resuelve también el problema sobre el radio vector $r(t)$ del punto. Según (1.1), el incremento elemental del radio vector $dr = v dt$ en el intervalo de tiempo dt . Integrando esta expresión teniendo en cuenta la dependencia $v(t)$, hallada, determinamos el incremento del radio vector en el lapso de $t = 0$ a t :

$$\Delta r = \int_0^t v(t) dt = v_0 t + wt^2/2.$$

Para determinar el mismo radio vector $r(t)$ es necesario conocer, además la posición del punto r_0 en el momento inicial. Entonces $r = r_0 + \Delta r$, o

$$r = r_0 + v_0 t + wt^2/2.$$

Examinemos, por ejemplo, el movimiento de una piedra, lanzada bajo cierto ángulo al horizonte a la velocidad inicial v_0 . Si se considera que la piedra se mueve con aceleración constante $w = g$, su posición respecto al punto de lanzamiento ($r_0 = 0$) se determina por el radio vector

$$r = v_0 t + gt^2/2,$$

es decir, en el caso dado r es la suma de los dos vectores, como se muestra en la fig. 2.

Así, para la solución total del problema sobre el movimiento del punto, la definición de su velocidad v y su posición r en función del tiempo, es insuficiente conocer la dependencia $w(t)$, sino también es preciso conocer las condiciones iniciales, es decir, la velocidad v_0 y la posición r_0 del punto en el momento de tiempo inicial.

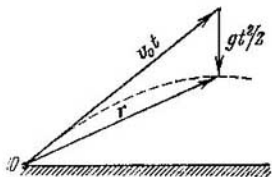


Fig. 2

Procedimiento de coordenadas. Con este procedimiento el cuerpo de referencia elegido se liga rígidamente a un determinado sistema de coordenadas (cartesiano, oblicuo o curvilíneo).

La elección de uno u otro sistema de coordenadas se determina por una serie de consideraciones: el carácter o la simetría del problema, el planteamiento de éste, así como la tendencia a simplificar la propia solución. Aquí limitémonos* con el sistema de coordenadas cartesianas x, y, z .

Tracemos en los ejes x, y, z la proyección del radio vector $r(t)$, que caracteriza la posición del punto que nos interesa respecto al origen de coordenadas O en el momento t :

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Conociendo la dependencia de estas coordenadas del tiempo, o sea, la *ley de movimiento* del punto, se puede

*) En el apéndice 1 se estudia el movimiento de un punto en coordenadas polares.

encontrar la posición de éste en cada instante de tiempo, su velocidad y aceleración. Realmente proyectando (1.1) y (1.2), por ejemplo, en el eje x , obtenemos las fórmulas que determinan las proyecciones de los vectores de velocidad y de aceleración en este eje:

$$v_x = dx/dt, \quad (1.3)$$

donde dx es la proyección del vector de desplazamiento dr en el eje x :

$$v_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2, \quad (1.4)$$

donde dv_x es la proyección del vector de incremento de la velocidad dv en el eje x . Correlaciones análogas se obtienen para las proyecciones y y z de los vectores correspondientes. De estas fórmulas se desprende que las proyecciones de los vectores de velocidad y de aceleración son iguales a la primera y segunda derivada de las coordenadas según el tiempo, respectivamente.

De ese modo, las dependencias $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ determinan, por esencia, por completo el movimiento del punto. Conociéndolas, se puede encontrar no sólo la posición del punto, sino también las proyecciones de la velocidad y la aceleración y, por consiguiente, el módulo y la dirección de los vectores v y w en cualquier momento de tiempo. Por ejemplo, el módulo del vector de velocidad

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

y la dirección del vector v se profija por los cosenos directrices según las fórmulas:

$$\cos \alpha = v_x/v; \quad \cos \beta = v_y/v; \quad \cos \gamma = v_z/v,$$

donde α , β , γ son correspondientemente los ángulos entre el vector v y los ejes x , y , z . El módulo y la dirección del vector de aceleración se determina por fórmulas análogas.

Además, se puede resolver una serie de otros problemas: encontrar la trayectoria del punto, la dependencia entre el recorrido pasado y el tiempo, la dependencia entre la velocidad y la posición del punto, etc.

La solución de los problemas inversos o sea, la determinación de la velocidad y de la ley de movimiento del punto según la aceleración dada se realiza, como en el procedimiento vectorial, mediante la integración (en el caso dado de la proyección de la aceleración conforme al

tiempo), con todo también aquí el problema tiene solución unívoca, si aparte de la aceleración han sido dadas además las condiciones iniciales: las proyecciones de la velocidad y las coordenadas del punto en el momento inicial.

Procedimiento «natural». Este método se emplea cuando la trayectoria del punto se conoce con anticipación.

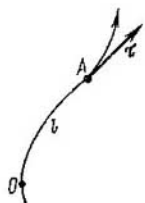


Fig. 3

La posición del punto A determinase por la coordenada de arco l , o sea, por la distancia a lo largo de la trayectoria desde el origen de referencia elegido O (fig. 3). Con ello se establece arbitrariamente la dirección positiva de lectura de la coordenada l (por ejemplo, como se muestra por la flecha en esta figura).

El movimiento del punto se considera determinado, si son conocidas su trayectoria, el origen de referencia O , la dirección positiva de lectura de la coordenada de arco l y la ley de movimiento del punto, es decir, la dependencia $l(t)$.

Velocidad del punto. Introduzcamos el vector unitario τ ligado con el punto que se mueve A y orientado por la tangente a la trayectoria hacia el incremento de la coordenada de arco l (fig. 3). Es evidente, que τ es un vector variable: depende de l . El vector de velocidad v del punto A está orientado por la tangente a la trayectoria, por eso se puede presentar así:

$$\boxed{v = v_{\tau} \tau}, \quad (1.5)$$

donde $v_{\tau} = dl/dt$ es la proyección del vector v en la dirección del vector τ , con esto v_{τ} es una magnitud algebraica. Además, es evidente, que

$$|v_{\tau}| = |v| = v.$$

Aceleración del punto. Diferenciamos (1.5) según el tiempo:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \tau + v_{\tau} \frac{d\tau}{dt}. \quad (1.6)$$

Después transformamos el último término de esta expresión:

$$v_{\tau} \frac{d\tau}{dt} = v_{\tau} \frac{d\tau}{dl} \frac{dl}{dt} = v_{\tau}^2 \frac{d\tau}{dl} = v^2 \frac{d\tau}{dl}. \quad (1.7)$$

Determinamos el incremento del vector τ en el sector dl (fig. 4). Se puede mostrar rigurosamente, que cuando el punto 2 tiende al 1 el sector de la trayectoria entre ellos tiende al arco de una circunferencia con el centro en cierto punto O . El punto O se llama centro de curvatura

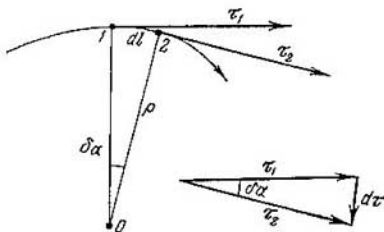


Fig. 4

de la trayectoria en el punto dado, y el radio ρ de la circunferencia correspondiente, radio de curvatura de la trayectoria en este mismo punto.

Como se ve de la fig. 4, el ángulo $\delta\alpha = |dl|/\rho = |d\tau|/l$, de donde

$$|d\tau/dl| = 1/\rho,$$

siendo $d\tau \perp \tau$ para $dl \rightarrow 0$. Introduciendo el vector unitario n de la normal a la trayectoria en el punto 1, orientado hacia el centro de curvatura, escribimos la última igualdad en forma vectorial:

$$d\tau/dl = n/\rho. \quad (1.8)$$

Ahora sustituimos (1.8) en (1.7) y la expresión obtenida, en (1.6). Como resultado encontramos

$$\boxed{w = \frac{dv_{\tau}}{dt} \tau + \frac{v^2}{\rho} n.} \quad (1.9)$$

Aquí el primer sumando se denomina *aceleración tangencial* w_τ y el segundo, *normal* (contrípeta) w_n :

$$w_\tau = (dv_\tau/dt) \tau; \quad w_n = (v^2/\rho) u. \quad (1.10)$$

De ese modo, la aceleración total w del punto puede ser presentada como la suma de las aceleraciones tangencial w_τ y normal w_n .

El módulo de la aceleración total del punto

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{(dv/dt)^2 + (v^2/\rho)^2}.$$

Ejemplo. El punto A se mueve por el arco de una circunferencia de radio ρ (fig. 5). Su velocidad depende de la coordenada de arco l según la ley $v = a\sqrt{l}$, donde a es una constante. Hallar el ángulo α entre

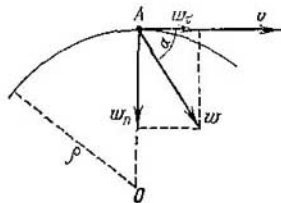


Fig. 5

los vectores de aceleración total y de velocidad del punto como función de la coordenada l .

En la fig. 5 se ve, que el ángulo α se puede determinar por la fórmula $\operatorname{tg} \alpha = w_n/w_\tau$. Determinemos w_n y w_τ :

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{a^2 l}{\rho}; \quad w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{dv_\tau}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{a}{2\sqrt{l}} a \sqrt{l} = \frac{a^2}{2}.$$

de aquí $\operatorname{tg} \alpha = 2l/\rho$.

§ 1.2. Cinemática del sólido

La teoría del movimiento del sólido además de un significado independiente juega también un importante papel y en otro sentido. Como se sabe, con el sólido puede ser ligado un sistema de referencia, que sirve para la descripción espacial temporal de diferentes movimientos. Por esto, el estudio del carácter del movimiento de los sólidos es equivalente, en esencia, al estudio de los movimientos de los sistemas de referencia correspondientes. Los resultados, que obtenemos en este párrafo, serán empleados reiteradamente en el futuro.

Distinguen cinco movimiento del sólido: 1) de avance, (translación) 2) giratorio entorno de un eje fijo, 3) movimiento plano, 4) movimiento alrededor de un punto fijo y 5) movimiento libre. Los dos primeros (el de avance y el

giratorio alrededor de un eje fijo) son los movimientos fundamentales del sólido. Resulta que es posible convertir los demás tipos de movimientos del cuerpo sólido en uno de los fundamentales o en su conjunto (esto será mostrado en el ejemplo del movimiento plano).

En el presente párrafo serán examinados los primeros tres tipos de movimiento y el problema de composición de las velocidades angulares.

Movimiento de translación. Este es el movimiento del sólido, con el cual toda recta, ligada con el cuerpo, permanece paralela a su posición inicial. Por ejemplo, un vagón que se mueve por una vía recta; la cabina de la rueda panorámica, etc.

Con el movimiento de avance todos los puntos del sólido realizan en un mismo intervalo de tiempo idénticas traslaciones. Por eso, las velocidades y las aceleraciones de todos los puntos del cuerpo son iguales en el momento de tiempo dado. Esta circunstancia permite reducir el estudio del movimiento de avance del sólido al estudio del movimiento de un punto aislado del cuerpo es decir, al problema de la cinemática del punto.

De este modo, el movimiento de avance del sólido puede ser descrito íntegramente si se conoce la dependencia del radio vector $r(t)$ de cualquier punto de este cuerpo respecto al tiempo y su posición en el momento inicial.

Rotación alrededor de un eje fijo. Sea que un sólido, que gira alrededor del eje OO' fijo en el sistema de referencia dado, ha realizado una vuelta infinitesimal en el tiempo dt . Definamos el ángulo de giro correspondiente por el vector $d\varphi$, el módulo del cual es igual al ángulo de giro, en tanto que la dirección coincide con el eje OO' , correspondiendo el sentido de rotación a la regla del sacacorchos respecto de la dirección del vector $d\varphi$ (fig. 6).

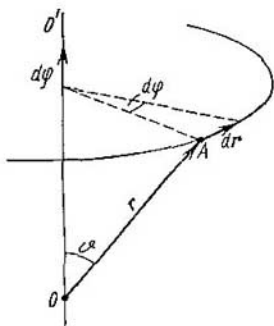


Fig. 6

Ahora encontremos el desplazamiento elemental de cualquier punto A del sólido con tal giro. La posición del punto A la prefijamos con el radio vector r , trazado de cierto punto O sobre el eje de rotación. Entonces el desplazamiento lineal del extremo del radio vector r está ligado con el ángulo de giro $d\varphi$ por la correlación (fig. 6)

$$|dr| = r \operatorname{sen} \vartheta d\varphi,$$

o en forma vectorial

$$dr = [d\varphi, r]. \quad (1.11)$$

Señalemos, que esta igualdad es válida sólo para el giro $d\varphi$ infinitesimal. Con otras palabras, sólo giros infinitesimales se pueden considerar como vectoriales*).

Además, se puede mostrar que el vector $d\varphi$ introducido por nosotros satisface la propiedad fundamental de los vectores, o sea, composición vectorial. En efecto, imaginémosnos que el sólido realiza dos vueltas elementales $d\varphi_1$ y $d\varphi_2$ alrededor de diferentes ejes, que pasan por el punto fijo O . Entonces, el desplazamiento resultante dr de un punto arbitrario A del sólido, el radio vector del cual es igual a r respecto al punto O , se puede presentar así:

$$dr = dr_1 + dr_2 = [d\varphi_1, r] + [d\varphi_2, r] = [d\varphi, r],$$

donde

$$d\varphi = d\varphi_1 + d\varphi_2, \quad (1.12)$$

es decir, las dos vueltas dadas, $d\varphi_1$ y $d\varphi_2$, son equivalentes a una vuelta al ángulo $d\varphi = d\varphi_1 + d\varphi_2$ alrededor del eje que coincide con el vector $d\varphi$ y que pasa por el punto O .

Indiquemos, que al estudiar tales magnitudes como el radio vector r , la velocidad v , la aceleración w , no surgió el problema de la elocción de su dirección: ella se desprendía directamente de la naturaleza de las mismas magnitudes. Semejantes vectores se denominan *polares*. A diferencia de ellos se denominan *axiales* los vectores del tipo

*) Para un giro finito al ángulo $\Delta\varphi$ el desplazamiento lineal del punto A , como se deduce de la fig. 6, es

$$|\Delta r| = r \operatorname{sen} \vartheta \cdot 2 \operatorname{sen} (\Delta\varphi/2).$$

De aquí se ve de inmediato, que el desplazamiento Δr no se puede presentar como el producto vectorial de los vectores $\Delta\varphi$ y r . Esto es posible sólo en el caso del giro infinitesimal $d\varphi$, en los límites del cual el radio vector r se puede considerar invariable.

$d\varphi$, la dirección de los cuales se liga con el sentido de rotación.

Ahora introducimos los vectores de velocidad angular y de aceleración angular. El vector de velocidad angular ω lo determinan como

$$\omega = d\varphi/dt, \quad (1.13)$$

donde dt es el intervalo de tiempo en el cual el cuerpo da una vuelta $d\varphi$. La dirección del vector ω coincide con el vector $d\varphi$ y es un vector axial.

La variación del vector ω con el tiempo se caracteriza por el vector de aceleración angular β , que lo determinan como

$$\beta = d\omega/dt. \quad (1.14)$$

La dirección del vector β coincide con la del vector $d\omega$, o sea, con el incremento del vector ω . El vector β , como ω , es axial.

La representación de la velocidad angular y de la aceleración angular como vectores resulta ser extraordinariamente fructífera, especialmente durante el estudio de movimientos más complejos de un sólido. Esto en muchos casos da la posibilidad de obtener una mayor evidencia, así como simplificar bruscamente tanto el análisis del movimiento, como también los cálculos correspondientes.

Escribamos las expresiones para la velocidad angular y para la aceleración angular en las proyecciones sobre el eje de revolución z , cuya dirección positiva se enlaza con el sentido positivo de la lectura de la coordenada φ , o sea, del ángulo de giro, según la regla del sacacorchos (fig. 7). Entonces las proyecciones ω_z y β_z de los vectores ω y β en el eje z se determinan por las fórmulas:

$$\omega_z = d\varphi/dt, \quad (1.15)$$

$$\beta_z = d\omega_z/dt. \quad (1.16)$$

Aquí, ω_z y β_z son magnitudes algebraicas. Su signo caracteriza la dirección del vector correspondiente. Por ejemplo, si $\omega_z > 0$, el sentido del vector ω coincide con la dirección positiva del eje z ; si $\omega_z < 0$, el sentido del vector ω es inverso.

Para la aceleración angular este razonamiento es análogo.

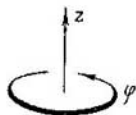


Fig. 7

De ese modo, conociendo la dependencia $\varphi(t)$, o sea, la ley de giro del cuerpo, según las fórmulas (1.15) y (1.16) se puede hallar la velocidad angular y la aceleración angular en cada momento de tiempo. Y viceversa, conociendo la dependencia entre la aceleración angular y el tiempo y las condiciones iniciales, es decir, la velocidad angular ω_0 y el ángulo φ_0 en el momento inicial de tiempo, se puede encontrar $\omega(t)$ y $\varphi(t)$.

Ejemplo. Un sólido gira alrededor de un eje fijo según la ley $\varphi = at - bt^2/2$, donde a y b son ciertas constantes positivas. Determinar el carácter del movimiento de este cuerpo.

Según (1.15) y (1.16),

$$\omega_z = a - bt; \quad \beta_z = -b = \text{const.}$$

De aquí se deduce que el cuerpo, girando uniformemente retardado ($\beta_z < 0$), se detiene en el momento $t_0 = a/b$ y después cambia el sentido de rotación (el signo de ω_z) por el contrario.

Señalemos, que la solución de todos los problemas de la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo es análoga

por su forma a la de los problemas del movimiento rectilíneo de un punto. Es suficiente sustituir las magnitudes lineales x , v_x y w_x por las angulares φ , ω_z y β_z correspondientes y obtendremos todas las regularidades y correlaciones para el cuerpo giratorio.

Relación entre las magnitudes lineales y angulares. Encontramos la velocidad v del punto arbitrario A de un sólido que gira alrededor del eje fijo OO' a la velocidad angular ω . Sea que la posición del punto A en relación con cierto punto O del eje de rotación se caracteriza por el

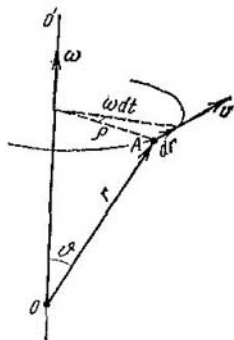


Fig. 8

radio vector r (fig. 8). Hagamos uso de la fórmula (1.11), dividiéndola por el intervalo de tiempo dt correspondiente. Como $dr/dt = v$ y $d\varphi/dt = \omega$, entonces

$$v = [\omega r],$$

(1.17)

es decir, la velocidad v de cualquier punto A del sólido que gira alrededor de cierto eje a la velocidad angular ω , es igual al producto vectorial ω por el radio vector r del punto A respecto al punto arbitrario O del eje de revolución (fig. 8).

El módulo del vector (1.17) $v = \omega r \sin \vartheta$, o

$$v = \omega \rho,$$

donde ρ es el radio del círculo por el cual se mueve el punto A .

Diferenciando (1.17) conforme al tiempo, encontramos la aceleración w del punto A :

$$w = [d\omega/dt, r] + [\omega, dr/dt],$$

o

$$w = [\beta r] + [\omega | \omega r]. \quad (1.18)$$

En el caso dado (el eje de rotación está fijo) $\beta \parallel \omega$, por eso el vector $[\beta r]$ es la aceleración tangencial w_τ . Más el vector $[\omega | \omega r]$ es la aceleración normal w_n . Los módulos de estas aceleraciones son iguales:

$$|w_\tau| = \beta \rho; \quad w_n = \omega^2 \rho.$$

De aquí el módulo de la aceleración total w es

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \rho \sqrt{\beta^2 + \omega^4}.$$

Movimiento plano de un sólido. Este es un movimiento tal con el que cada punto del sólido se mueve en un plano, paralelo a cierta superficie inmóvil (en el sistema de referencia dado). Con esto la figura plana Φ , formada por la sección del cuerpo por este plano fijo P (fig. 9), permanece todo el tiempo en este plano durante el proceso del movimiento, por ejemplo, un cilindro que rueda por esta superficie sin resbalamiento (pero el cono, en un caso semejante, realiza un movimiento más complejo).

No es difícil entender, que la posición del sólido en movimiento plano se determina de modo unívoco por la posición de la figura plana Φ en el plano inmóvil P . Esto

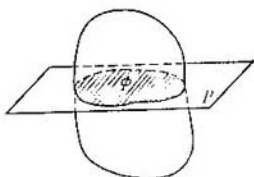


Fig. 9

permite reducir el estudio del movimiento plano del sólido al estudio del movimiento de la figura plana por su superficie.

Sea que la figura plana Φ se mueve por su superficie P , inmóvil en el sistema K de referencia (fig. 10). La posición de la figura Φ en la superficie se puede determinar prefijando el radio vector r_0 del punto arbitrario O' de ésta y el ángulo φ entre el radio vector r' , ligado rígidamente

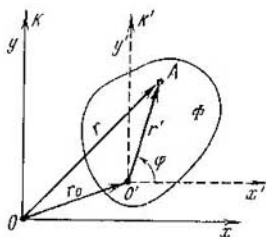


Fig. 10

con la figura, y cierta dirección fijada en el sistema K de referencia. Entonces, el movimiento plano de la figura se describirá por dos ecuaciones:

$$r_0 = r_0(t); \quad \varphi = \varphi(t).$$

Es evidente, que si el radio vector r' del punto A (fig. 10) gira al ángulo $d\varphi$ en el intervalo de tiempo dt , a este mismo ángulo gira también y cualquier

segmento ligado con la figura. Con otras palabras, el giro de la figura al ángulo $d\varphi$ no depende de la elección del punto O' . Esto significa que la velocidad angular ω de la figura tampoco depende de la elección del punto O' y tenemos derecho a denominar ω la velocidad angular del sólido como tal.

Ahora encontremos la velocidad v del punto arbitrario A del cuerpo en movimiento plano. Introduzcamos el sistema de referencia auxiliar K' que está ligado rígidamente con el punto O' del sólido y se desplaza progresivamente en relación con el sistema K (fig. 10). Entonces, el desplazamiento elemental dr del punto A en el sistema K se puede escribir como

$$dr = dr_0 + dr',$$

donde dr_0 es el desplazamiento del sistema K' (del punto O') y dr' , el desplazamiento del punto A en relación con el sistema K' . El desplazamiento dr' es determinado por la rotación del cuerpo alrededor de un eje fijo en el sistema K' que pasa por el punto O' ; según (1.11), $dr' = [d\varphi, r']$. Sustituyendo esta expresión en la anterior y

dividiendo ambos miembros de la igualdad obtenida por dt , obtenemos

$$v = v_0 + [\omega r'], \quad (1.19)$$

es decir, la velocidad de cualquier punto A del sólido en movimiento plano*) está constituida por la velocidad v_0 del punto arbitrario O' de este sólido y de la velocidad $v' = [\omega r']$, acondicionada por la rotación del cuerpo alrededor del eje, que pasa por el punto O' . Subrayemos una vez más, que v' es la velocidad del punto A con relación al sistema K' de referencia que se mueve progresivamente, rígidamente ligado con el punto O' .

Con otras palabras, el movimiento plano de un sólido se puede presentar como el conjunto de los dos tipos fundamentales de movimiento, o sea, de avance (junto con el punto arbitrario O' del cuerpo) y del giratorio (alrededor del eje, que pasa por el punto O').

Ahora mostremos que el movimiento plano se puede reducir a un movimiento puramente giratorio. En realidad, con el movimiento plano la velocidad v_0 del punto arbitrario O' del cuerpo es perpendicular al vector ω , y esto significa, que siempre habrá un punto M tal, ligado rígidamente con el cuerpo**), la velocidad del cual $v = 0$ en el momento dado. De la condición $0 = v_0 + [\omega r'_M]$ se puede encontrar la posición del punto M , es decir, su radio vector r'_M con relación al punto O' (fig. 11). Este vector es perpendicular a los vectores ω y v_0 , su dirección corresponde al producto vectorial $v_0 = -[\omega r'_M]$ y al módulo $r'_M = v_0/\omega$.

El punto M determina, además, la posición del eje correspondiente (que coincide por su dirección con el vector ω). El movimiento de un sólido en un momento determinado de tiempo representa la rotación pura alre-

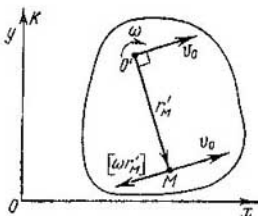


Fig. 11

*) Señalemos que la fórmula (1.19) resulta también justa para cualquier movimiento complejo de un sólido.

**) El punto M puede también estar fuera del cuerpo.

dedor de este eje. Este se denomina *eje de rotación instantáneo*.

La posición del eje instantáneo, hablando en general, cambia con el tiempo. Por ejemplo, en el caso de un cilindro que rueda por un plano el eje instantáneo coincide con la línea de contacto del cilindro con el plano en cada momento.

Composición de las velocidades angulares. Examinemos el movimiento de un sólido que gira simultáneamente alrededor de dos ejes que se cruzan. Transmitamos a cierto sólido la rotación alrededor del eje OA (fig. 12) a la velocidad angular ω' y después, pongamos en rotación dicho eje alrededor del eje OB , fijo en el sistema K de referencia, a la velocidad angular ω_0 . Encontramos el movimiento resultante del cuerpo en el sistema K .

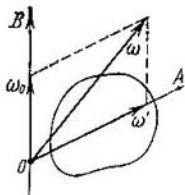


Fig. 12

Introducimos el sistema K' auxiliar de referencia, ligado rígidamente con los ejes OA y OB . Es evidente, que este sistema gira a la

velocidad angular ω_0 , y que el sólido gira con relación a él con la velocidad angular ω' .

El cuerpo realiza en el intervalo de tiempo dt el giro $d\varphi'$ alrededor del eje OA en el sistema K' y simultáneamente el giro $d\varphi_0$ alrededor del eje OB junto con el sistema K' . Según (1.12), el giro sumario es $d\varphi = d\varphi_0 + d\varphi'$. Dividiendo ambos miembros de esta igualdad por dt , obtenemos

$$\omega = \omega_0 + \omega'. \quad (1.20)$$

De ese modo, el movimiento resultante del sólido en el sistema K es la rotación pura a la velocidad angular ω alrededor del eje, que en cada momento coincide con el vector ω y que pasa por el punto O (fig. 12). Este eje se traslada con relación al sistema K , es decir, él gira junto con el eje OA alrededor del eje OB a la velocidad angular ω_0 .

Es fácil entender, que incluso en el caso, cuando las velocidades angulares ω' y ω_0 no varían según el módulo, el sólido en el sistema K tendrá una aceleración angular β dirigida, según (1.14), por el plano (fig. 12). El problema

de la aceleración angular del sólido es examinado más detalladamente en el problema 1.10.

Y la última observación. En vista de que el vector de velocidad angular ω satisface la propiedad fundamental de los vectores, o sea, la suma vectorial ω se puede presentar como la suma vectorial de las componentes en direcciones determinadas, es decir, $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots$, donde todos los vectores se refieren a un mismo sistema de referencia. Durante el análisis del movimiento complejo de un sólido frecuentemente se emplea este cómodo y útil procedimiento.

§ 1.3. Transformación de la velocidad y la aceleración al pasar a otro sistema de referencia

Comenzando el estudio de este problema, recordemos que en los límites de la mecánica clásica la longitud de las escalas y el tiempo se consideran absolutos. Toda escala es igual en diferentes sistemas de referencia, es decir, no depende del movimiento. Esto mismo se refiere al transcurso del tiempo, que también es igual en todos los sistemas.

Planteamiento del problema. Se tienen dos sistemas arbitrarios de referencia K y K' que se mueven de modo determinado uno respecto a otro. Se conocen la velocidad v y la aceleración w de cierto punto A en el sistema K . ¿Cuáles son los valores correspondientes de v' y de w' de este punto en el sistema K' ?

Examinemos de manera consecutiva los tres casos más importantes del movimiento de un sistema con relación a otro.

1. El sistema K' se mueve progresivamente con relación al sistema K . Sea que el origen de referencia del sistema K' en el sistema K se caracteriza por el radio vector r_0 , y su velocidad y aceleración por los vectores v_0 y w_0 . Si la posición del punto A en el sistema K se determina por el radio vector r y en el sistema K' , por el radio vector r' , es evidente que $r = r_0 + r'$ (fig. 13). Sea luego que el punto A realiza en el sistema K , en el intervalo de tiempo dt , el desplazamiento elemental dr . Este desplazamiento se constituye del desplazamiento dr_0 junto con el

sistema K' y del desplazamiento dr' respecto al sistema K' , es decir, $dr = dr_0 + dr'$. Dividiendo esta expresión por dt , obtenemos la fórmula siguiente de transformación de la velocidad:

$$\boxed{v = v_0 + v'}. \quad (1.21)$$

Diferenciando (1.21) conforme al tiempo, encontramos también de inmediato la fórmula de transformación de la aceleración:

$$\boxed{w = w_0 + w'}. \quad (1.22)$$

De aquí se deduce, en particular, que cuando $w_0 = 0$ $w = w'$, es decir, al moverse el sistema K' sin aceleración respecto al sistema K , las aceleraciones del punto A en ambos sistemas de referencia serán iguales.

2. El sistema K' gira a velocidad angular constante ω alrededor del eje fijo en el sistema K .

Tomemos los orígenes de referencia de los sistemas K y K' en el punto arbitrario O del eje de rotación (fig. 14, a). Entonces el radio vector del

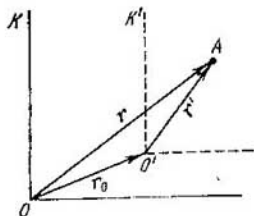


Fig. 13

punto A será el mismo en ambos sistemas de referencia: $r \equiv r'$.

Si el punto A está inmóvil en el sistema K' , esto significa que su desplazamiento dr en el sistema K en el tiempo dt se determina solamente por el giro del radio vector r al ángulo $d\varphi$ (junto con el sistema K') y es igual, según (1.11), al producto vectorial $[d\varphi, r]$.

Mas si el punto A se mueve respecto al sistema K' a la velocidad v' , en el tiempo dt se realiza el desplazamiento complementario $v'dt$ (fig. 14, a) y entonces

$$dr = v'dt + [d\varphi, r]. \quad (1.23)$$

Dividiendo esta expresión por dt , obtenemos la siguiente fórmula de transformación de la velocidad:

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}],} \quad (1.24)$$

donde \mathbf{v} y \mathbf{v}' son las velocidades del punto A en los sistemas K y K' de referencia respectivamente.

Ahora pasemos a las aceleraciones. En correspondencia con (1.24) el incremento $d\mathbf{v}$ del vector \mathbf{v} en el tiempo dt

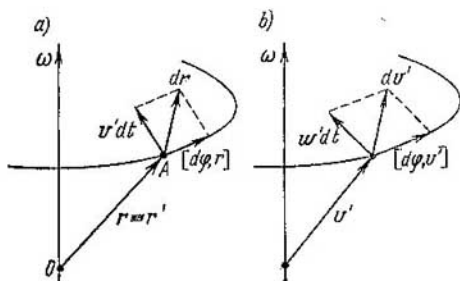


Fig. 14

en el sistema K debe constituirse de la suma de los incrementos de los vectores \mathbf{v}' y $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$, es decir,

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}, d\mathbf{r}]. \quad (1.25)$$

Halleemos $d\mathbf{v}'$. Si el punto A se mueve en el sistema K' a $\mathbf{v}' = \text{const}$, el incremento de este vector en el sistema K se determina sólo por su giro al ángulo $d\varphi$ (junto con el sistema K') y es igual, como en el caso de \mathbf{r} , al producto vectorial $[d\varphi, \mathbf{v}']$. De esto es fácil convencerse haciendo coincidir el origen del vector \mathbf{v}' con el eje de rotación (fig. 14, b). Mas si el punto A tiene una aceleración \mathbf{w}' en el sistema K' , el vector \mathbf{v}' recibe en el tiempo dt un incremento complementario $\mathbf{w}'dt$ y entonces

$$d\mathbf{v}' = \mathbf{w}' dt + [d\varphi, \mathbf{v}']. \quad (1.26)$$

Ahora sustituyamos (1.26) y (1.23) en la igualdad (1.25) y dividamos la expresión obtenida por dt . Como resultado encontramos la siguiente fórmula para la trans-

formación de la aceleración:

$$w = w' + 2 [\omega v'] + [\omega [\omega r]], \quad (1.27)$$

donde w y w' son las aceleraciones del punto A en los sistemas K y K' de referencia. El segundo sumando en el segundo miembro de esta fórmula se llama aceleración de Coriolis (o rotatoria) w_{Cor} y el tercer sumando, de aceleración axipetal*) w_{ax} :

$$w_{\text{Cor}} = 2 [\omega v'], \quad w_{\text{ax}} = [\omega [\omega r]]. \quad (1.28)$$

De ese modo, la aceleración w del punto con relación al sistema K es igual a la suma de tres aceleraciones: a la aceleración w' con respecto al sistema K' , a la aceleración de Coriolis w_{Cor} y a la aceleración axipetal w_{ax} .

La aceleración axipetal se puede representar como $w_{\text{ax}} = -\omega^2 \rho$, donde ρ es el radio vector perpendicular al eje de rotación y que caracteriza la posición del punto A con relación a este eje. Entonces la fórmula (1.27) se puede escribir así:

$$w = w' + 2 [\omega v'] - \omega^2 \rho. \quad (1.29)$$

3. El sistema K' gira a velocidad angular constante ω alrededor del eje, que se desplaza progresivamente a velocidad v_0 y aceleración w_0 respecto al sistema K .

Este caso unifica a los dos anteriores. Introduzcamos el sistema S auxiliar de referencia, ligado rígidamente con el eje de rotación del sistema K' y se desplaza progresivamente en el sistema K . Sean v y v_S las velocidades del punto A en los sistemas S y K de referencia, entonces en correspondencia con (1.21) $v = v_0 + v_S$. Sustituyendo v_S , según (1.24), por la expresión $v_S = v' + [\omega r]$, donde r es el radio vector del punto A con relación a un punto arbitrario en el eje de rotación del sistema K' , obtenemos la siguiente fórmula de transformación de la velocidad:

$$v = v' + v_0 + [\omega r]. \quad (1.30)$$

*) La aceleración axipetal no se debe confundir con la aceleración normal (centrípeta).

De modo análogo, empleando (1.22) y (1.29), encontramos la fórmula de transformación de la aceleración:*)

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}_0 + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] - \omega^2\boldsymbol{\rho}. \quad (1.31)$$

Recordemos, que en las dos últimas fórmulas \mathbf{v} , \mathbf{v}' y \mathbf{w} , \mathbf{w}' son las velocidades y las aceleraciones del punto A en los sistemas K y K' de referencia, respectivamente, \mathbf{v}_0 y \mathbf{w}_0 son la velocidad y la aceleración del eje de rotación del sistema K' en el sistema K , \mathbf{r} es el radio vector del punto A respecto al punto arbitrario en el eje de rotación del sistema K' , $\boldsymbol{\rho}$ es el radio vector perpendicular al eje de rotación y que caracteriza la posición del punto A respecto a este eje.

En conclusión examinemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Un disco gira a la velocidad angular constante ω alrededor de un eje fijado sobre una mesa. Por el disco se mueve el punto A a una velocidad \mathbf{v} constante respecto a la mesa. Encontrar la velocidad \mathbf{v}' y la aceleración \mathbf{w}' del punto A con relación al disco en el momento, cuando el radio vector, que caracteriza su posición en relación con el eje de rotación, es igual a $\boldsymbol{\rho}$.

Según (1.24), la velocidad \mathbf{v}' del punto A es igual a

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\rho}].$$

Por otra parte la aceleración \mathbf{w}' la hallamos con ayuda de (1.29), teniendo en cuenta que en el caso dado $\mathbf{w} = 0$, ya que $\mathbf{v} = \text{const}$. Entonces $\mathbf{w}' = -2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] - \omega^2\boldsymbol{\rho}$. Después de sustituir en esta fórmula la expresión para \mathbf{v}' , obtenemos

$$\mathbf{w}' = 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] - \omega^2\boldsymbol{\rho}.$$

Problemas para el capítulo 1

1.1. El radio vector, que caracteriza la posición de la partícula A con relación al punto fijo O , varía con el tiempo por la ley

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \sin \omega t + \mathbf{b} \cos \omega t,$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores constantes, siendo $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$; ω es una constante positiva. Encontrar la aceleración \mathbf{w} de la partícula y la ecuación de su trayectoria $y(x)$, tomando que los ejes x e y coinciden con la dirección de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} respectivamente y que tienen su origen en el punto O .

*) Advertimos, que en el caso más general, cuando $\omega \neq \text{const}$, el segundo miembro de (1.31) contendrá un sumando más, a saber $[\boldsymbol{\beta}\mathbf{r}]$, donde $\boldsymbol{\beta}$ es la aceleración angular del sistema K' , \mathbf{r} es el radio vector, que caracteriza la posición de aquel punto en el eje de rotación, que se toma por origen de referencia en el sistema K' .

Solución. Diferenciando r dos veces conforme al tiempo, obtenemos

$$w = -\omega^2 (a \operatorname{sen} \omega t + b \operatorname{cos} \omega t) = -\omega^2 r,$$

es decir, el vector w está dirigido todo el tiempo hacia el punto O , y su módulo es proporcional a la distancia de la partícula a este punto.

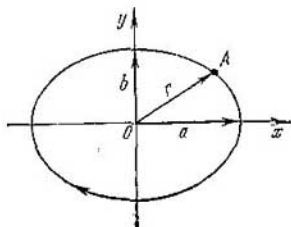


Fig. 15

Ahora hallemos la ecuación de la trayectoria. Proyectando r sobre los ejes x e y , obtenemos

$$x = a \operatorname{sen} \omega t,$$

$$y = b \operatorname{cos} \omega t.$$

Eliminando ωt en estas dos ecuaciones, determinamos

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

Esta es la ecuación de una elipse, a y b son sus semiejes (en la fig. 15; la dirección del movimiento de la partícula A se muestra con una flecha).

1.2. Desplazamiento y recorrido. En el momento $t = 0$ comunicaron la velocidad v_0 a una partícula, después de lo cual su velocidad empezó a variar con el tiempo según la ley

$$v = v_0 (1 - t/\tau),$$

donde τ es una constante positiva. Encontrar en los primeros t segundos de movimiento:

- 1) el vector de desplazamiento Δr de la partícula;
- 2) el recorrido s de ella.

Solución. 1. Según (1.1.), $dr = v dt = v_0 (1 - t/\tau) dt$. Integrando esta ecuación conforme al tiempo desde 0 hasta t , obtenemos

$$\Delta r = v_0 t (1 - t/2\tau).$$

2) El recorrido s de la partícula en el tiempo t , se determina como

$$s = \int_0^t v dt,$$

donde v es el módulo del vector v . En el caso dado

$$v = v_0 |1 - t/\tau| = \begin{cases} v_0 (1 - t/\tau), & \text{para } t \leq \tau, \\ v_0 (t/\tau - 1), & \text{para } t \geq \tau, \end{cases}$$

De aquí se deduce, que cuando $t > \tau$ es necesario dividir en dos partes la integral para el cálculo del recorrido: desde 0 hasta τ y desde τ hasta t . Integrando en ambos casos ($t < \tau$ y $t > \tau$), obtenemos

$$s = \begin{cases} v_0 t (1 - t/2\tau), & \text{para } t \leq \tau, \\ v_0 \tau [1 - (1 - t/\tau)^2]/2 & \text{para } t \geq \tau. \end{cases}$$

En la fig. 16 se muestran los gráficos de las dependencias $v(t)$ y $s(t)$. Aquí mismo se muestran con líneas de trazos los gráficos de las dependencias de t de las proyecciones v_x y Δx de los vectores \mathbf{v} y $\Delta \mathbf{r}$ en el eje x , dirigido a lo largo del vector \mathbf{v}_0 .

1.3. Un tranvía se mueve de forma rectilínea desde la parada A hasta la siguiente parada B con una aceleración, que varía según la ley $w = a - bx$, donde a y b son constantes positivas, x es su distancia hasta la parada A. Encontrar la distancia entre estas paradas y la velocidad máxima del tranvía.

Solución. Primero hallamos la dependencia entre la velocidad y x . El incremento de la velocidad $dv = w dt$ en el intervalo de tiempo dt . Reducimos esta expresión al tipo, cómodo para la integración, aprovechando que $dt = dx/v$; entonces

$$v dv = (a - bx) dx.$$

Integrando esta ecuación (el primer miembro desde 0 hasta v , el segundo, desde 0 hasta x), obtenemos

$$v^2/2 = ax - bx^2/2, \quad \text{ó} \quad v = \sqrt{(2a - bx)x}.$$

De aquí se deduce, que la distancia entre las paradas, es decir, el valor de x_0 con el cual $v = 0$, es $x_0 = 2a/b$. Hallamos la velocidad máxima de la condición $dv/dx = 0$ ó, sucintamente, de la condición del máximo de la expresión subradical. De aquí el valor x_m , correspondiente a $v_{\text{máx}}$ es $x_m = a/b$, y $v_{\text{máx}} = a/\sqrt{b}$.

1.4. Una partícula se mueve en el plano x, y desde el punto $x = y = 0$ a la velocidad $\mathbf{v} = a\mathbf{i} - bx\mathbf{j}$, donde a y b son ciertas constantes, \mathbf{i} y \mathbf{j} los versores de los ejes x e y . Encontrar la ecuación de su trayectoria $y(x)$.

Solución. Escribamos el incremento de las coordenadas y y x de la partícula en el intervalo de tiempo dt : $dy = v_y dt$, $dx = v_x dt$, donde $v_y = -bx$, $v_x = a$. Tomando su razón, obtenemos

$$dy = (b/a)x dx.$$

Integramos esta expresión:

$$y = \int_0^x (b/a)x dx = (b/2a)x^2,$$

es decir, la trayectoria del punto es una parábola.

1.5. La ley del movimiento del punto A de la llanta de una rueda, que rueda uniformemente por un camino horizontal (el eje x), tiene el aspecto

$$x = a(\omega t - \text{sen } \omega t); \quad y = a(1 - \cos \omega t),$$

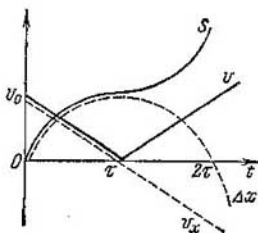


Fig. 16

donde a y ω son constantes positivas. Encontrar la velocidad v del punto A , el recorrido s entre dos contactos consecutivos con el camino, así como el módulo y la dirección de la aceleración w del punto A .

Solución. La velocidad v del punto A y el recorrido s se determinan por las fórmulas:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = a\omega \sqrt{2(1 - \cos \omega t)} = 2a\omega \operatorname{sen}(\omega t/2);$$

$$s = \int_0^{t_1} v(t) dt = 4a [1 - \cos(\omega t_1/2)],$$

donde t_1 es el intervalo de tiempo entre dos contactos consecutivos. De la ecuación $y(t)$ determinamos que $y(t_1) = 0$ cuando $\omega t_1 = 2\pi$. Por eso $s = 8a$.

La aceleración del punto A

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = a\omega^2.$$

Demostremos, que el vector w , de módulo constante, está dirigido todo el tiempo al centro de la rueda, o sea, al punto C . Efectivamente en el sistema de referencia K' , ligado con el punto C y que se desplaza de modo progresivo y uniforme respecto al camino, el punto A se mueve uniformemente por una circunferencia alrededor del punto C . Por esto su aceleración en el sistema K' se dirige hacia el centro de la rueda. Como el sistema K' se mueve uniformemente, el vector w será también igual en relación al camino.

1.6. Un punto se mueve de manera decelerada por una circunferencia de radio r , de modo que sus aceleraciones tangencial y normal tienen igual módulo en cada momento. En el momento inicial fue comunicada al punto la velocidad v_0 . Encontrar la velocidad v y el módulo de la aceleración total w del punto en dependencia del recorrido s .

Solución. Según el planteamiento, $dv/dt = -v^2/r$. Presentando dt como ds/v , transformamos la ecuación inicial al tipo

$$dv/v = -ds/r.$$

La integración de esta expresión, teniendo en cuenta la velocidad inicial, conduce al siguiente resultado:

$$v = v_0 e^{-s/r}.$$

En el caso dado $|w_\tau| = w_n$, por eso la aceleración total $w = \sqrt{2}w_n = \sqrt{2}v^2/r$, o

$$w = \sqrt{2}v_0^2/r e^{2s/r}.$$

1.7. Un punto se mueve por una trayectoria plana en forma que su aceleración tangencial $w_\tau = a$, y la aceleración normal $w_n = bt^3$, donde a y b son constantes positivas, t es el tiempo. El punto empieza a moverse en el momento $t = 0$. Encontrar el radio ρ de curvatura de la trayectoria del punto y su aceleración total w en función del recorrido s .

Solución. El incremento elemental de la velocidad del punto $dv = w_T dt$. Integrando esta expresión, obtenemos $v = at$. El recorrido $s = at^2/2$.

Según (1.10), el radio de curvatura de la trayectoria se puede presentar como $\rho = v^2/w_n = a^2/bt^2$, o

$$\rho = a^2/2bs.$$

La aceleración total

$$w = \sqrt{w_T^2 + w_n^2} = a \sqrt{1 + (4bs^2/a^3)^2}.$$

1.8. Una partícula se mueve uniformemente por la trayectoria parabólica $y = ax^2$ a velocidad v , donde a es una constante positiva. Hallar la aceleración w de la partícula en el punto $x = 0$.

Solución. Diferenciamos dos veces la ecuación de la trayectoria conforme al tiempo:

$$\frac{dy}{dt} = 2ax \frac{dx}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2a \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + x \frac{d^2x}{dt^2} \right].$$

Como la partícula se mueve uniformemente, entonces esto significa que su aceleración es puramente normal en todos los puntos de la trayectoria y en el punto $x = 0$ coincide con la derivada d^2y/dt^2 en este punto. Teniendo en cuenta que $|dx/dt| = v$, en el punto $x = 0$ obtenemos

$$w = (d^2y/dt^2)_{x=0} = 2av^2.$$

Advirtamos, que en el procedimiento citado de solución se omitió el cálculo del radio de curvatura de la trayectoria en el punto $x = 0$, que generalmente es necesario conocer para la determinación de la aceleración normal ($w_n = v^2/\rho$).

1.9. Rotación de un sólido.

Un sólido empieza a girar alrededor de un eje fijo con aceleración angular $\beta = \beta_0 \cos \varphi$, donde β_0 es un vector constante. φ es el ángulo de giro del sólido desde su posición inicial. Hallar la velocidad angular ω_z del cuerpo en dependencia del ángulo φ .

Solución. Tomemos la dirección positiva del eje z a lo largo del vector β_0 . Según (1.13), $d\omega_z = \beta_z dt$. Presentando dt según la fórmula (1.15) como $d\varphi/\omega_z$, transformamos la ecuación anterior al tipo

$$\omega_z d\omega_z = \beta_0 \cos \varphi d\varphi.$$

La integración de esta ecuación, tomando en cuenta la condición inicial ($\omega_z = 0$ cuando $\varphi = 0$), da $\omega_z^2/2 = \beta_0 \sin \varphi$. De aquí

$$\omega_z = \sqrt{2\beta_0 \sin \varphi}.$$

En la fig. 17 se muestra el gráfico de la dependencia $\omega_z(\varphi)$. De él se ve, que con el crecimiento del ángulo φ el vector ω primero crece,

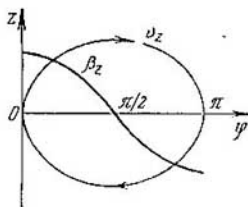


Fig. 17

coincidiendo su dirección con el vector β_0 ($\omega_z > 0$), alcanza el máximo cuando $\varphi = \pi/2$ y después empieza a disminuir, convirtiéndose en cero cuando $\varphi = \pi$. Del mismo modo, después de esto, el sólido empieza a girar en dirección contraria ($\omega_z < 0$). Como resultado, el sólido realizará oscilaciones alrededor de la posición $\varphi = \pi/2$ con una amplitud igual a $\pi/2$.

1.10. Un cono circular recto con radio de la base r y altura h , rueda sin resbalamiento por la superficie de una mesa, como se muestra en la fig. 18. El vértice del cono se fija articularmente en el punto O al nivel del punto C , o sea, del centro de la base del cono. El punto C se mueve a velocidad constante v . Encuentrar:

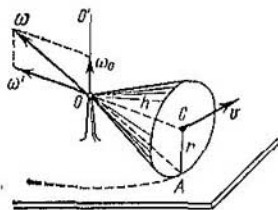


Fig. 18

- 1) la velocidad angular ω y
- 2) la aceleración angular β del cono respecto a la mesa.

Solución. 1. Según (1.20), $\omega = \omega_0 + \omega'$, donde ω_0 y ω' son las velocidades angulares de rotación alrededor de los ejes OO' y OC , respectivamente. Con ayuda de la fig. 18

se encuentran fácilmente los módulos de los vectores ω_0 y ω' :

$$\omega_0 = v/h; \quad \omega' = v/r.$$

Su razón $\omega_0/\omega' = r/h$. De aquí se deduce que el vector ω coincide en cada momento de tiempo con la generatriz del cono que pasa por el punto de contacto A .

El módulo del vector ω es

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega'^2} = (v/r) \sqrt{1 + (r/h)^2}.$$

2. La aceleración angular β del cono, según (1.14), es la derivada del vector ω según el tiempo. Ya que $\omega_0 = \text{const}$, entonces

$$\beta = d\omega/dt = d\omega'/dt.$$

El vector ω' , permaneciendo invariable por su módulo, gira alrededor del eje OO' a la velocidad angular ω_0 . Su incremento en el intervalo de tiempo dt es igual por módulo a $|d\omega'| = \omega' \cdot \omega_0 dt$, o en forma vectorial $d\omega' = [\omega_0 \omega'] dt$. De este modo,

$$\beta = [\omega_0 \omega'].$$

El módulo de este vector $\beta = v^2/rh$.

1.11. Transformaciones de la velocidad y la aceleración. Una barra dispuesta horizontalmente gira a velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical, fijado en una mesa y que pasa por uno de sus extremos. Por la barra se mueve un pequeño casquillo. Su velocidad respecto a la barra varía por la ley $v' = ar$, donde a es una constante, r es el radio vector, que caracteriza la distancia desde el eje de rotación hasta el casquillo. Encontrar:

1) la velocidad v y la aceleración w del casquillo con relación a la mesa en dependencia de r ;

2) el ángulo entre los vectores v y w en el proceso de movimiento.

Solución. 1. Según (1.24),

$$v = ar + [\omega r].$$

El módulo de este vector $v = r \sqrt{a^2 + \omega^2}$.

Por la fórmula (1.29) determinamos la aceleración w , donde $w' = dv'/dt = a^2r$ en el caso dado. Entonces

$$w = (a^2 - \omega^2)r + 2a[\omega r].$$

El módulo de este vector $w = (a^2 + \omega^2)r$.

2. Para determinar el ángulo α entre los vectores v y w hacemos uso de su producto escalar, del cual se deduce que $\cos \alpha = \frac{vw}{vw}$. Después de las transformaciones correspondientes, obtenemos

$$\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + (\omega/a)^2}.$$

De aquí se ve, que en el caso dado el ángulo α permanece constante durante el movimiento.

Capítulo 2

Ecuaciones fundamentales de dinámica

§ 2.1. Sistemas inerciales de referencia

Principio de inercia. En cinemática, donde sólo se trata la descripción de los movimientos y no se toca el problema de las causas que los provocan, no hay ninguna diferencia de principio entre diferentes sistemas de referencia, y en este sentido todos ellos son equivalentes. Totalmente de otro modo se plantea el problema en dinámica, al estudiar las leyes del movimiento. Aquí se descubre una diferencia esencial entre diferentes sistemas de referencia y las ventajas de una clase de sistemas en comparación con otras.

En principio se puede tomar cualquiera de la multitud innumerable de sistemas de referencia. Sin embargo, las leyes de mecánica tienen en diferentes sistemas de referencia, hablando en general, diferente forma y puede resultar que en un sistema arbitrario de referencia incluso fenómenos muy sencillos se hacen muy complejos. Es natural que surja el problema de la búsqueda de un sistema de referencia tal, en el cual las leyes de mecánica sean lo más simples posibles. Evidentemente, este sería el sistema de referencia más cómodo para la descripción de los fenómenos mecánicos.

Con este fin examinemos la aceleración de un punto material con relación a cierto sistema arbitrario de referencia. ¿Cuál es la causa de esta aceleración? La experiencia muestra, que esta causa puede ser tanto la acción de algunos cuerpos determinados sobre el punto dado, como también las propiedades del mismo sistema de referencia (en realidad, en caso general, la aceleración será diferente respecto a los distintos sistemas de referencia).

Se puede, sin embargo, *suponer* que existe un sistema de referencia tal, en el cual la aceleración del punto mate-

rial se determina por completo sólo por su interacción con otros cuerpos. Un punto material libre, no sujeto a la acción de ningún otro cuerpo se mueve rectilínea y uniformemente o, como dicen, por inercia con relación a este sistema de referencia. Tal sistema de referencia denomínase *inercial*.

La afirmación de que los sistemas inerciales de referencia existen constituye el contenido de la primera ley de mecánica clásica, es decir, *del principio de inercia de Galileo—Newton*.

La existencia de sistemas inerciales de referencia se confirma por la experiencia. Que la Tierra es un sistema tal de referencia, fue establecido por los experimentos iniciales. Los siguientes experimentos más exactos (el experimento de Foucault y todos sus análogos) mostraron que este sistema de referencia no es del todo inercial*), a saber: fueron descubiertas aceleraciones, la existencia de las cuales no se puede explicar por la acción de algunos cuerpos determinados. Al mismo tiempo, las observaciones de las aceleraciones de los planetas mostraron el carácter inercial del sistema heliocéntrico de referencia, ligado con el centro del Sol y con las estrellas «inmóviles». El carácter inercial del sistema heliocéntrico de referencia se confirma en la actualidad por todo un conjunto de experimentos.

Cualquier otro sistema de referencia que se mueva de modo uniforme y rectilíneo con relación a un sistema heliocéntrico es también inercial. En realidad, si la aceleración de un cuerpo en el sistema heliocéntrico de referencia es nula, ella es también igual a cero en cualquier otro de estos sistemas de referencia.

De ese modo, existe no uno sino una cantidad infinita de sistemas inerciales de referencia, que se mueven uno respecto a otro de forma rectilínea y uniforme. Los sistemas de referencia que se mueven con aceleración respecto a los sistemas inerciales, se denominan *no inerciales*.

Sobre las propiedades de simetría del tiempo y el espacio. Una particularidad importante de los sistemas inerciales de referencia es que el tiempo y el espacio poseen *propiedades determinadas de simetría* en relación a ellos. A saber: la experiencia confirma que

*) Advertimos que el sistema de referencia, ligado con la Tierra, se puede, en muchos casos, considerar prácticamente inercial.

en estos sistemas de referencia el tiempo *es homogéneo*, en tanto que el espacio *es homogéneo e isótropo*.

La *homogeneidad del tiempo* consiste en que el transcurso de los fenómenos físicos observados (en iguales condiciones) durante diferentes intervalos de tiempo es el mismo. Con otras palabras, diferentes momentos de tiempo son equivalentes uno a otro por sus propiedades físicas.

La *homogeneidad e isotropía del espacio* consiste en que las propiedades del espacio son iguales en diferentes puntos (homogeneidad) y en cada punto idénticas en todas las direcciones (isotropía).

Señalamos, que el espacio no es homogéneo o isótropo en relación a los sistemas no inerciales de referencia. Esto significa, que si un cuerpo no interacciona con ningún otro, no obstante sus diferentes posiciones en el espacio y sus distintas orientaciones no son equivalentes desde un punto de vista mecánico. En caso general, esto mismo se refiere también al tiempo que será no homogéneo, es decir, sus diferentes momentos no son equivalentes. Es evidente, que estas propiedades del espacio y el tiempo causarían grandes complicaciones en la descripción de los fenómenos mecánicos. Así, por ejemplo, un cuerpo no sujeto a la acción de otros cuerpos, no podría estar en reposo: si su velocidad en cierto momento de tiempo fuera igual a cero, ya en el siguiente lapso el cuerpo empezaría a moverse en dirección determinada.

Principio de relatividad de Galileo. Para los sistemas inerciales de referencia es justo el principio de relatividad, según el cual todos los sistemas inerciales son equivalentes uno a otro por sus propiedades mecánicas. Esto significa, que con ningún experimento mecánico, realizado «dentro» del sistema inercial dado, se puede establecer si este sistema de referencia está en reposo o se mueve. Las propiedades del espacio y el tiempo son iguales en todos los sistemas inerciales de referencia, como son también iguales todas las leyes de mecánica.

Esta afirmación constituye el contenido del *principio de relatividad de Galileo*, o sea, de uno de los principios más importantes de la mecánica clásica. Este principio es una generalización de la experiencia y se confirma por toda la diversidad de las aplicaciones de la mecánica clásica al movimiento de los cuerpos, la velocidad de los cuales es considerablemente menor que la de la luz.

Todo lo dicho certifica con suficiente evidencia el carácter exclusivo de las propiedades de los sistemas inerciales de referencia, a causa de las cuales justamente estos sistemas deben, como regla, emplearse en el estudio de los fenómenos mecánicos.

Transformaciones de Galileo. Hallamos las fórmulas de transformación de las coordenadas durante el paso de un

sistema inercial de referencia a otro. Sea que el sistema inercial K' se mueve a la velocidad V en relación a otro sistema inercial K . Elegimos los ejes de coordenadas x', y', z' del sistema K' en paralelo a los ejes x, y, z correspondientes del sistema K , pero de forma que los ejes x' y x coincidan entre sí y estén dirigidos a lo largo del vector V (fig. 19). Tomando como origen de referencia el momento de tiempo cuando los orígenes de coordenadas O'

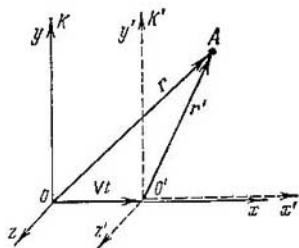


Fig. 19

y O coincidan, escribimos la correlación entre los radios vectores r' y r de un mismo punto A en los sistemas K' y K :

$$r' = r - Vt \quad (2.1)$$

y, además,

$$t' = t. \quad (2.2)$$

Aquí se sobreentiende que la longitud de los segmentos y la marcha del tiempo no dependen del estado del movimien-

to y, por consiguiente, son iguales en ambos sistemas de referencia. La suposición sobre el carácter absoluto del espacio y el tiempo se encuentra en la propia base de las nociones de la mecánica clásica, de las nociones fundamentales en el vasto material experimental que se refiere al estudio de los movimientos a velocidades, considerablemente menores que la de la luz.

Las correlaciones (2.1) y (2.2) son las llamadas *transformaciones de Galileo*. En las coordenadas estas transformaciones tienen la forma:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (2.3)$$

Después de diferenciar (2.1) conforme al tiempo, encontramos la ley clásica de transformación de la velocidad del punto durante el paso de un sistema inercial de referencia a otro:

$$v' = v - V. \quad (2.4)$$

Diferenciando esta expresión según el tiempo, teniendo en cuenta que $V = \text{const}$, obtenemos $w' = w$, es decir, la aceleración del punto es igual en todos los sistemas inerciales de referencia.

§ 2.2. Leyes fundamentales de la mecánica newtoniana

Estudiando en la práctica diferentes movimientos advertimos que en los sistemas inerciales de referencia toda aceleración del cuerpo se provoca por la acción de otros cuerpos sobre él. Con esto el grado de influencia (acción) de cada uno de los cuerpos circundantes sobre el estado del movimiento del cuerpo A que nos interesa es un problema, al que en cada caso concreto puede responder sólo el experimento.

La influencia del otro cuerpo (o cuerpos) que provoca la aceleración del cuerpo A se denomina *fuerza*. Así, la causa de la aceleración de un cuerpo es la fuerza que sobre él actúa.

Una de las características más importantes de la fuerza es su procedencia material. Hablando de la fuerza, de modo no ostensible siempre suponemos que en ausencia de cuerpos extraños la fuerza que actúa sobre el cuerpo que nos interesa es igual a cero. Mas si se descubre que la fuerza actúa, buscamos su *origen* en forma de uno u otro cuerpo concreto o de otros cuerpos.

Todas las fuerzas de las que trata la mecánica, las dividen generalmente en las fuerzas que surgen por el contacto directo de los cuerpos (fuerzas de presión, de rozamiento) y las fuerzas que surgen por intermedio de las creadas por *los campos* de los cuerpos en interacción (las fuerzas de gravitación, electromagnéticas). Señalamos, sin embargo, que esta división de las fuerzas tiene carácter convencional: en esencia, incluso con el contacto directo, las fuerzas de interacción también se determinan por la presencia de unos u otros campos, creados por las moléculas o los átomos de los cuerpos. De este modo, todas las fuerzas de interacción entre los cuerpos se condicionan al fin de cuentas, por los campos. El problema sobre la naturaleza de las fuerzas de interacción sale de los límites de la mecánica y se considera en otras partes de la física.

Masa. La experiencia muestra que todos los cuerpos «ejercen resistencia» a todos los intentos de cambiar su velocidad, tanto su módulo como su dirección. Esta propiedad, que expresa el grado de resistencia del cuerpo a variar su velocidad, se denomina *inertancia*. En diferentes cuerpos la inertancia se manifiesta en grado diverso. Como medida de inertancia se utiliza la magnitud llamada *masa*. El cuerpo con mayor masa es más inerte, y viceversa.

Introduzcamos el concepto de masa m , determinando la razón de las masas de dos cuerpos diferentes por la relación inversa de las aceleraciones, comunicadas a ellos por fuerzas iguales:

$$m_1/m_2 = w_2/w_1. \quad (2.5)$$

Indiquemos, que esta definición no exige la medición preliminar de las mismas fuerzas. Es suficiente disponer solamente del criterio de *igualdad* de las fuerzas. Por ejemplo, si sobre dos cuerpos diferentes, que están en un plano horizontal liso, se actúa sucesivamente con un mismo resorte, orientándolo de forma horizontal y estirándolo hasta una misma longitud, entonces se puede afirmar que la acción del resorte sobre cada cuerpo es la misma en ambos casos, con otras palabras, las fuerzas son también iguales.

De este modo, la comparación de las masas de dos cuerpos, sobre los cuales actúa una misma fuerza, se reduce a la comparación de las aceleraciones de éstos. Tomando cierto cuerpo como patrón de masa, nosotros tenemos la posibilidad de comparar la masa de cualquier cuerpo con este patrón.

Como muestra la experiencia, en los límites de la mecánica newtoniana una masa determinada posee las dos importantes propiedades siguientes:

1) la masa es una magnitud *aditiva*, es decir, la masa de un cuerpo compuesto es igual a la suma de las masas de sus partes;

2) la masa del cuerpo como tal es una magnitud *constante*, que no varía durante su movimiento.

Fuerza. Volvamos al experimento de la comparación de las aceleraciones de dos cuerpos diferentes bajo la acción de un resorte *igualmente* estirado. El hecho de que en ambos casos el resorte fuera igualmente estirado, nos

permitió enunciar la afirmación sobre la igualdad de la acción del resorte o de la fuerza por parte de este último.

Por otro lado, la fuerza es la causa de la aceleración del cuerpo. Mas las aceleraciones de diferentes cuerpos bajo la acción de un resorte igualmente estirado son distintas. Así pues nuestro problema consiste en determinar la fuerza de tal modo que, a pesar de la diferencia de las aceleraciones de los cuerpos en el experimento considerado, la fuerza sea una misma.

Para esto ante todo se debe aclarar: ¿qué es *igual* en los experimentos dados? La respuesta es evidente: el producto mw . Es por lo tanto natural tomar esta magnitud como la definición de la fuerza. Además, teniendo en cuenta que la aceleración es un vector, vamos a considerar también que la fuerza es un vector, cuya dirección coincide con el vector de aceleración w .

Así, en la mecánica newtoniana *la fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa m se determina como el producto mw* . Como justificación de esta definición de fuerza, además de las condiciones de sencillez y comodidad, sirve, como es lógico, sólo la comprobación posterior de los corolarios que de dicha definición se desprenden.

Segunda ley de Newton. Estudiando en la práctica la interacción de diferentes puntos materiales con los cuerpos circundantes, advertimos que mw depende de magnitudes que caracterizan tanto el estado del mismo punto material, como también el estado de los cuerpos circundantes.

Este es un hecho físico muy esencial que se encuentra en la base de una de las generalizaciones más fundamentales de la mecánica newtoniana, o sea, de *la segunda ley de Newton*:

el producto de la masa de un punto material por su aceleración es la función de la posición de este punto respecto a los cuerpos circundantes y a veces, también es función de su velocidad. Esta función se designa por F y se llama fuerza.

Precisamente en esto consiste el contenido real de la segunda ley de Newton, que generalmente se formula con brevedad de la siguiente forma:

el producto de la masa de un punto material por su aceleración es igual a la fuerza que actúa sobre él, es decir,

$$mw = F.$$

(2.6)

Esta ecuación la denominan *ecuación del movimiento de un punto material*.

De inmediato subrayamos, que la segunda ley de Newton y la ecuación (2.6) reciben contenido concreto sólo después de ser establecido el tipo de la función F , o sea, su dependencia de las magnitudes que la determinan o, como dicen, *la ley de la fuerza*. El establecimiento del tipo de la ley de fuerza es en cada caso concreto uno de los problemas fundamentales de la mecánica física.

La determinación de la fuerza como mw , lo que es la base de la ecuación (2.6), posee la cualidad excepcional de que las leyes de las fuerzas resultan muy simples. Bien es verdad que al paso al estudio de los movimientos a velocidades relativistas mostró que sería necesario modificar estas leyes, haciéndolas depender de modo complejo de la velocidad del punto material. La teoría resultaría ser voluminosa y complicada.

Existe, sin embargo, una salida sencilla de esta dificultad si se da otra definición de la fuerza, a saber: *fuerza es la derivada del impulso p del punto material según el tiempo*, es decir, $dp/dt = F$ y si la ecuación (2.6) se escribe como $dp/dt = F$.

En la mecánica newtoniana esta definición de la fuerza es idéntica a mw , ya que $p = mv$, $m = \text{const}$ y $dp/dt = mw$. Mas, como nosotros veremos, el impulso en la mecánica relativista, depende de la velocidad del punto material de un modo más complejo. Pero lo importante es otra cosa. Con esta definición de la fuerza (como dp/dt) resulta que en la región relativista las leyes de las fuerzas también son las mismas. Es decir, al pasar a la mecánica relativista no es preciso cambiar la expresión simple de la fuerza dada con ayuda del medio físico. Ulteriormente tendremos en cuenta esta circunstancia.

Acerca de la composición de fuerzas. Sobre todo punto material en las condiciones concretas dadas actúa, hablando en rigor, nada más que *una* fuerza F , el módulo y la dirección de la cual se determinan por la disposición de este punto en relación a todos los cuerpos circundantes y, a veces, también por su velocidad. Y no obstante, frecuentemente resulta cómodo presentar esta fuerza F como el resultado sumario de la acción de cuerpos aislados o de las fuerzas F_1, F_2, \dots . La experiencia muestra que si los cuerpos, fuentes de las fuerzas, no ejercen influencia uno sobre el otro y por eso no cambian su estado por la presencia de otros cuerpos, entonces la fuerza

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_i + \dots,$$

donde F_i es la fuerza con la cual actuaría el cuerpo i -ésimo sobre el punto material dado *en ausencia* de otros cuerpos.

Si esto es así, se dice que las fuerzas F_1, F_2, \dots se someten al *principio de superposición*. Esta afirmación se debe considerar como la generalización de factores experimentales.

Tercera ley de Newton. En todos los casos cuando en la práctica participan sólo dos cuerpos A y B y el cuerpo A comunica aceleración al cuerpo B , se advierte que el cuerpo B también comunica aceleración al cuerpo A . De aquí concluimos que las acciones de los cuerpos uno sobre otro tienen carácter de *interacción*.

Newton postuló la propiedad general siguiente de todas las fuerzas de interacción, o sea, la *tercera ley de Newton*:
las fuerzas con las que dos puntos materiales actúan uno sobre el otro, son siempre de igual módulo y están dirigidas en direcciones contrarias a lo largo de la recta que une estos puntos, es decir,

$$\boxed{F_{12} = -F_{21}} \quad (2.7)$$

Esto significa, que las fuerzas de interacción surgen siempre *a pares*. Ambas fuerzas están aplicadas a *diferentes* puntos materiales y, además, son de *una* misma naturaleza.

La ley (2.7) se propaga a los sistemas de un número arbitrario de puntos materiales. Nosotros partimos del concepto de que también en este caso la interacción se reduce a las fuerzas que interaccionan a pares entre los puntos materiales.

En la tercera ley de Newton se supone que ambas fuerzas son de igual módulo *en cualquier* momento de tiempo, *independientemente del movimiento* del punto. Esta afirmación corresponde a la idea newtoniana sobre la propagación instantánea de las interacciones, o sea, a la hipótesis que lleva el nombre de *principio de largo alcance* de la mecánica clásica. Según este principio, la interacción entre los cuerpos se propaga en el espacio a velocidad infinitamente grande. Con otras palabras, si se varía la posición (el estado) de un cuerpo, entonces inmediatamente se puede descubrir aunque sea una muy débil variación en los cuerpos que con él interaccionan, cualquiera que sea la distancia entre ellos.

Ahora sabemos que en realidad esto no es así, que existe una velocidad máxima *finita* de propagación de las

interacciones, igual a la velocidad de la luz en el vacío. Por eso la tercera ley de Newton (y también la segunda) tienen determinados límites de aplicación. Sin embargo, a velocidades de los cuerpos considerablemente menores a la de la luz, con las cuales choca la mecánica clásica, ambas leyes se cumplen con muy gran exactitud. Por lo menos esto lo certifican los cálculos de las trayectorias de los planetas y de los satélites artificiales, que se realizan con exactitud «astronómica» precisamente con ayuda de las leyes de Newton.

Las leyes de Newton son las leyes fundamentales de mecánica clásica. Ellas permiten, aunque sea en principio, resolver cualquier problema mecánico; además, de ellas pueden ser deducidas todas las demás leyes de la mecánica clásica.

En correspondencia con el principio de relatividad de Galileo las leyes de mecánica son iguales en todos los sistemas inerciales de referencia. Esto significa, en particular, que la ecuación (2.6) tendrá la misma forma en cualquier sistema inercial de referencia. Realmente, la masa m de un punto material no depende como tal de la velocidad, es decir, es idéntica en todos los sistemas de referencia. Además, para los sistemas inerciales de referencia también es igual la aceleración w del punto. La fuerza F tampoco depende de la elección del sistema de referencia, ya que ella se determina por la disposición mutua y por la velocidad del punto material en relación a los cuerpos circundantes y, según la mecánica no relativista, estas magnitudes son iguales en los diferentes sistemas inerciales de referencia.

De este modo, las tres magnitudes m , w , y F , que entran en la ecuación (2.6), no varían durante el paso de un sistema inercial de referencia a otro y, por consiguiente, no cambia y la misma ecuación (2.6). Con otras palabras, la ecuación $mw = F$ es invariante respecto a las transformaciones de Galileo.

§ 2.3. Leyes de fuerzas

Para reducir el hallazgo de la ley de movimiento de una partícula a un problema puramente matemático es necesario ante todo, en correspondencia con la ecuación (2.6), conocer las leyes de las fuerzas que actúan sobre

la partícula, es decir, la dependencia de la fuerza de las magnitudes que la determinan. Cada una de estas leyes se obtiene, al fin y al cabo, partiendo de la elaboración de los resultados prácticos y, en esencia, siempre se apoya en la ecuación (2.6) como en la determinación de la fuerza.

Las fuerzas más fundamentales, que se encuentran en la base de todos los fenómenos mecánicos, son las de gravedad y las eléctricas. Citemos las leyes de estas fuerzas en el aspecto más simple, cuando las masas en interacción (las cargas) descansan o se mueven a poca velocidad (no relativista).

La fuerza de atracción de la gravedad actúa entre dos puntos materiales. En concordancia con la *ley de gravitación universal* esta fuerza es proporcional al producto de las masas de los puntos m_1 y m_2 , inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos r y está dirigida por la recta que une estos puntos:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.8)$$

donde γ es la constante de gravitación.

Las masas que figuran en esta ley se denominan de *gravitación* a diferencia de la masa *inerte* que entra en la segunda ley de Newton. Sin embargo, en la práctica se ha establecido que las masas de gravitación e inerte de cualquier cuerpo son estrictamente proporcionales entre sí. Por eso se pueden considerar iguales (es decir, elegir un mismo patrón para la medición de ambas masas) y hablar simplemente de la masa que interviene como medida de inercia del cuerpo o como medida de acción de la gravedad.

La fuerza de Coulomb que actúa entre dos cargas puntuales q_1 y q_2 ,

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (2.9)$$

donde r es la distancia entre las dos cargas, k es un coeficiente de proporcionalidad que depende del sistema de unidades elegido. A diferencia de la fuerza de gravitación, la de Coulomb puede ser tanto de atracción, como de repulsión.

Señalemos, que la ley de Coulomb deja de cumplirse exactamente si las cargas se mueven. Resulta que la

interacción eléctrica de las cargas que se mueven depende de modo complejo de su movimiento. Una de las partes de esta interacción, condicionada por el movimiento, se denomina fuerza *magnética* (de aquí y la otra denominación de esta interacción dada, *electromagnética*). A velocidades bajas (no relativistas) la fuerza magnética constituye una parte pequeña despreciable de la interacción eléctrica y ella se describe con un alto grado de exactitud por la ley (2.9).

A pesar de que las interacciones de gravitación y eléctrica se encuentran en la base de toda la diversidad innumerable de los fenómenos mecánicos, el análisis de los fenómenos, en particular de los macroscópicos, resultaría muy complejo si partiéramos en todos los casos de estas interacciones fundamentales. Por eso es cómodo introducir otras leyes de fuerzas aproximadas (que en principio pueden ser obtenidas de las fuerzas fundamentales). Esto es indispensable para simplificar la parte matemática del problema hasta tal punto que sea posible resolverlo prácticamente.

Con este fin se introducen, por ejemplo, las siguientes fuerzas.

La fuerza de gravedad homogénea

$$\mathbf{F} = mg, \quad (2.10)$$

donde m es la masa del cuerpo, g es la aceleración de la fuerza de gravedad*).

La fuerza elástica es una fuerza proporcional al desplazamiento del punto material de la posición de equilibrio y está orientada hacia esta posición:

$$\mathbf{F} = -\kappa \mathbf{r}, \quad (2.11)$$

donde \mathbf{r} es el radio vector que caracteriza el desplazamiento de la partícula de la posición de equilibrio; κ es un coeficiente positivo que depende de las propiedades «elásticas» de una u otra fuerza concreta. Ejemplo de tal

*) Indiquemos, que a diferencia de la fuerza de gravedad el peso P es la fuerza, con la cual el cuerpo actúa sobre un apoyo o una suspensión, *fija* en relación al cuerpo dado. Por ejemplo, si el cuerpo con el apoyo (suspensión) están inmóviles respecto a la Tierra, el peso P coincide con la fuerza de gravedad. En caso contrario el peso $P = m(g - w)$, donde w es la aceleración del cuerpo (con el apoyo) en relación a la Tierra.

fuerza es la fuerza de la deformación elástica durante el estirado (compresión) de un resorte o de una barra; en correspondencia con la *ley de Hook* esta fuerza se determina como $F = \alpha \Delta l$, donde Δl es el valor de la deformación elástica.

La fuerza de rozamiento de deslizamiento, es la que surge durante el deslizamiento del cuerpo dado por la superficie de otro,

$$F = kR_n \quad (2.12)$$

donde k es el coeficiente de rozamiento de deslizamiento que depende de la naturaleza y del estado de las superficies en contacto (en particular de su rugosidad); R_n es la fuerza de la presión normal que aprieta las superficies en rozamiento una contra otra. La fuerza F está dirigida en sentido contrario a la dirección del movimiento del cuerpo dado en relación al otro.

La fuerza de resistencia actúa en el cuerpo durante su movimiento de translación en un gas o un líquido. Esta fuerza depende de la velocidad del cuerpo v respecto al medio, estando dirigida en sentido inverso al vector v :

$$F = -k_v v, \quad (2.13)$$

donde k es un coeficiente positivo, característico para el cuerpo y el medio dados. Este coeficiente depende, hablando en general, de la velocidad v , pero sin embargo, a velocidades pequeñas se puede considerar en muchos casos prácticamente constante.

§ 2.4. Ecuación fundamental de dinámica

La ecuación fundamental de dinámica de un punto material es ni más ni menos, que la expresión matemática de la segunda ley de Newton:

$$m \frac{dv}{dt} = F. \quad (2.14)$$

En esencia, (2.14) es la ecuación diferencial del movimiento de un punto en forma vectorial. Su solución es el problema fundamental de dinámica del punto material, siendo posibles dos planteamientos opuestos del problema.

1. Encontrar la fuerza F que actúa sobre el punto, si se conocen la masa m del punto y la dependencia de su radio vector del tiempo $r(t)$.

2. Encontrar la ley de movimiento del punto, es decir, la dependencia de su radio vector del tiempo $r(t)$, si se conocen la masa m del punto, la fuerza F (o la fuerza F_i) que actúa sobre él y las condiciones iniciales, o sea, la velocidad v_0 y la posición r_0 del punto en el momento de tiempo inicial.

En el primer caso el problema se reduce a la diferenciación de $r(t)$ conforme al tiempo, en tanto que en el segundo, a la integración de la ecuación (2.14). La parte matemática de este problema fue con bastante detalle examinada en la cinemática del punto.

La solución de la ecuación (2.14) la realizan en dependencia del carácter y del planteamiento del problema concreto en forma vectorial, o en coordenadas, o bien en las proyecciones sobre la tangente y la normal a la trayectoria en el punto dado. Aclaremos como se escribe la ecuación (2.14) en los dos últimos casos.

En las proyecciones sobre los ejes de las coordenadas cartesianas. Proyectando ambas partes de la ecuación (2.14) sobre los ejes x , y , z , obtenemos tres ecuaciones diferenciales del tipo

$$\boxed{m \frac{dv_x}{dt} = F_x, \quad m \frac{dv_y}{dt} = F_y, \quad m \frac{dv_z}{dt} = F_z,} \quad (2.15)$$

donde F_x , F_y , F_z son las proyecciones del vector F sobre los ejes x , y , z . Es necesario recordar que estas proyecciones son magnitudes algebraicas: en dependencia de la orientación del vector F pueden ser tanto positivas como y negativas. El signo de la proyección de la fuerza resultante F determina también el signo de la proyección del vector de la aceleración.

Observemos en un ejemplo concreto, en que consiste el enfoque estándar de la solución de los problemas con ayuda de las ecuaciones (2.15).

Ejemplo. Una pequeña barreta de masa m se desliza hacia abajo por un plano inclinado, que forma un ángulo α con el horizonte. El coeficiente de rozamiento es igual a k . Encontrar la aceleración de la barreta con relación a la superficie (este sistema de referencia se supone inercial).

Ante todo se deben representar todas las fuerzas que actúan sobre la barreta. Estas son la fuerza de gravedad mg , la fuerza normal de reacción R del plano y la fuerza de rozamiento F_{roz} (fig. 20), dirigida en sentido contrario al movimiento de la barreta.

Después ligamos el sistema de coordenadas x, y, z con el sistema de referencia «plano inclinado». Hablando en general, el sistema de coordenadas se puede orientar de modo arbitrario, sin embargo, en muchos casos (y en particular en éste) la elección de la dirección de los ejes es dictada por el carácter del movimiento.

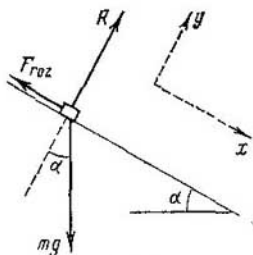


Fig. 20

della masa m de la barreta por la proyección de su aceleración w_x y a la derecha, las proyecciones de todas las fuerzas sobre el eje x :

$$mw_x = mg_x + R_x + f_{rozx}$$

En el caso dado $g_x = g \sin \alpha$, $R_x = 0$ y $F_{rozx} = -F_{roz}$, por eso

$$mw_x = mg \sin \alpha - F_{roz}$$

Como la barreta se mueve solamente a lo largo del eje x , esto significa, según la segunda ley de Newton, que la suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre cualquier dirección perpendicular al eje x es igual a cero. Tomando en calidad de esta dirección al eje y (fig. 20), obtenemos

$$R = mg \cos \alpha \text{ y } F_{roz} = kR = kmg \cos \alpha.$$

Como resultado

$$mw_x = mg \sin \alpha - kmg \cos \alpha.$$

Si el segundo miembro de esta ecuación resulta ser positivo, $w_x > 0$, lo que significa que el vector w está dirigido hacia abajo por el plano inclinado y viceversa.

En las proyecciones sobre la tangente y la normal a la trayectoria en el punto dado. Proyectando ambos miembros de (2.14) sobre los versores móviles τ y n (fig. 21) y empleando las expresiones antes obtenidas (1.10) para

Por ejemplo, en el caso dado se conoce con anticipación la dirección del movimiento de la barreta, por eso es más racional disponer los ejes de coordenadas de forma que uno de ellos coincida con la dirección del movimiento. Entonces el problema se reduce a resolver sólo una ecuación (2.15). Así pues, elegimos el eje x como se muestra en la fig. 20, mostrando obligatoriamente en este caso su dirección positiva (con una flecha).

Sólo entonces comenzamos la composición de las ecuaciones (2.15): a la izquierda, el producto

las aceleraciones normal y tangencial, escribimos:

$$\boxed{m \frac{dv_{\tau}}{dt} = F_{\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n,} \quad (2.16)$$

donde F_{τ} y F_n son las proyecciones del vector F sobre los versores τ y n . En la fig. 21. ambas proyecciones son positivas. Los vectores F_{τ} y F_n se denominan componentes tangencial y normal de la fuerza F .

Recordemos que elegimos la dirección del versor τ por el sentido del incremento de la coordenada de arco l ,

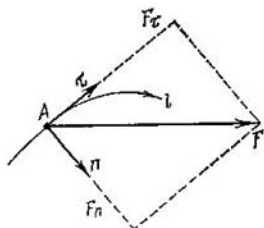


Fig. 21

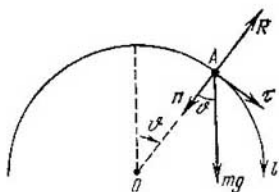


Fig. 22

mientras que la dirección del versor n , hacia el centro de curvatura de la trayectoria en el punto dado.

Si se conoce con anticipación la trayectoria del punto material, es cómodo emplear las ecuaciones (2.16).

Ejemplo. Un pequeño cuerpo A se desliza del vértice de una esfera lisa de radio r . Hallar la velocidad del cuerpo en el momento de la separación de la superficie de la esfera, si su velocidad inicial es despreciable por su pequeñez.

Representemos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo A (la fuerza de gravedad mg y la fuerza normal de la reacción R) y escribamos las ecuaciones (2.16) en las proyecciones sobre los versores τ y n (fig. 22),

$$m \frac{dv}{dt} = mg \operatorname{sen} \vartheta,$$

$$mv^2/r = mg \cos \vartheta - R;$$

aquí el índice τ no tiene importancia, por eso lo omitimos.

Transformamos la primera ecuación a un tipo cómodo para la integración. Haciendo uso de que $dt = dl/v = r d\vartheta/v$, donde dl es el camino elemental del cuerpo A en el intervalo de tiempo dt ,

escribimos la primera ecuación como

$$v dv = gr \operatorname{sen} \vartheta d\vartheta.$$

Integrando el primer miembro de esta expresión desde 0 hasta v , el segundo de 0 a ϑ , obtenemos

$$v^2 = 2gr (1 - \cos \vartheta).$$

Luego, en el momento de separación $R = 0$, por eso la segunda ecuación inicial adquiere el aspecto

$$v^2 = gr \cos \vartheta,$$

donde v y ϑ corresponden al punto de separación. Excluyendo $\cos \vartheta$ de las dos últimas igualdades, obtenemos $v = \sqrt{2gr/3}$.

§ 2.5. Sistemas no inerciales de referencia. Fuerzas de inercia

Ecuación fundamental de dinámica en un sistema no inercial. Antes fue señalado que la ecuación fundamental de dinámica es justa solamente en los sistemas inerciales de referencia. Entre tanto, hay muchos casos, cuando es necesario obtener la solución del problema que nos interesa en sistemas *no inerciales* (por ejemplo, el movimiento de un péndulo simple en un vagón que se mueve con aceleración, el movimiento de un satélite en relación a la superficie de la Tierra y otros). Por esto surge el problema: ¿cómo se debe cambiar la ecuación fundamental de dinámica, para que ella también resulte justa para los sistemas no inerciales de referencia?

Con este fin tomamos dos sistemas de referencia: el sistema *inercial* K y el *no inercial* K' . Sean conocidas la masa m de la partícula, la fuerza F , que actúa sobre ella desde los cuerpos circundantes, así como el carácter del movimiento del sistema K' en relación al K .

Examinemos un caso suficientemente general, cuando el sistema K' gira a la velocidad angular constante ω alrededor de un eje en movimiento progresivo con aceleración w_0 respecto al sistema K . Hagamos uso de la fórmula de transformación de la aceleración (1.31). De ella se deduce que la aceleración de la partícula en el sistema K'

$$w' = w - w_0 + \omega^2 \rho + 2[v' \omega], \quad (2.17)$$

donde v' es la velocidad de la partícula en relación al sistema K' , ρ es un radio vector perpendicular al eje

de rotación y que caracteriza la posición de la partícula respecto a este eje.

Multiplicando ambos miembros de (2.17) por la masa m de la partícula y tomando en consideración que en el sistema inercial de referencia $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$, obtenemos

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{F} - m\mathbf{w}_0 + m\omega^2\rho + 2m[\mathbf{v}'\omega]. \quad (2.18)$$

Esta es la ecuación fundamental de dinámica en un sistema no inercial de referencia que gira a velocidad angular constante ω alrededor de un eje en movimiento progresivo con la aceleración \mathbf{w}_0 . De ella se desprende, que incluso para $\mathbf{F} = 0$ la partícula se moverá en este sistema con una aceleración, que en el caso general es diferente de cero, pero, además, de tal forma como si sobre ella actuaran ciertas fuerzas, correspondientes a los últimos tres términos de la ecuación (2.18). Estas fuerzas donominanse *fuerzas de inercia*.

La ecuación (2.18) muestra que la introducción de las fuerzas de inercia permite también conservar la forma de la ecuación fundamental de dinámica para los sistemas no inerciales: en el primer miembro, el producto de la masa de la partícula por su aceleración (pero ya en relación al sistema no inercial de referencia), en segundo, las fuerzas. Sin embargo, excepto la fuerza \mathbf{F} , condicionada por la acción de los cuerpos circundantes (fuerzas de interacción), es necesario tener además en cuenta las fuerzas de inercia, es decir, los demás sumandos en el segundo miembro de la ecuación (2.18).

Fuerzas de inercia. Reescribamos la ecuación (2.18) en la forma siguiente:

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{in} + \mathbf{F}_{cen} + \mathbf{F}_{Cor}, \quad (2.19)$$

donde

$$\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{w}_0 \quad (2.20)$$

es la fuerza de inercia, condicionada por el movimiento progresivo del sistema no inercial de referencia;

$$\mathbf{F}_{cen} = m\omega^2\rho \quad (2.21)$$

es la fuerza centrífuga de inercia;

$$\mathbf{F}_{\text{Cor}} = 2m [\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}] \quad (2.22)$$

es la fuerza de Coriolis de inercia. Las dos últimas fuerzas son condicionadas por el movimiento giratorio del sistema de referencia.

De ese modo, vemos que las fuerzas de inercia dependen de las propiedades del sistema no inercial de referencia (w_0 , ω), así como de la distancia ρ y la velocidad v' de la partícula en este sistema.

Si, por ejemplo, un sistema no inercial de referencia está en movimiento progresivo (respecto a un sistema inercial de referencia), entonces sobre la partícula libre en este sistema actúa sólo la fuerza (2.20), cuya dirección es inversa a la de la aceleración w_0 en el sistema dado de referencia. Recordemos, como durante el frenado brusco de un vagón la fuerza de inercia nos lanza hacia adelante, es decir, en sentido contrario al de w_0 .

Otro caso: el sistema de referencia gira a la velocidad angular ω alrededor de un eje innóvil, en tanto que el cuerpo A está en reposo en este sistema (por ejemplo, Ud. está sentado en la rueda horizontal en rotación de la atracción «la rueda de la risa»). Sobre el cuerpo A , además de la fuerza de interacción con los cuerpos circundantes, actúa la fuerza centrífuga de inercia (2.21), dirigida del eje de rotación a lo largo del radio vector ρ . Esta fuerza compensa la fuerza de interacción mientras el cuerpo A está en reposo en relación al círculo ($v' = 0$). Pero tan sólo el cuerpo se pone en movimiento, es decir, surge la velocidad v' , empieza a actuar la fuerza de Coriolis (2.22), la dirección de la cual se determina por el producto vectorial $[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]$. Indiquemos que la fuerza de Coriolis surge como complemento de la fuerza centrífuga de inercia, que actúa independientemente de si el cuerpo se encuentra en reposo o se mueve en el sistema giratorio de referencia.

Antes fue señalado que el sistema de referencia ligado con la superficie de la tierra se puede, en muchos casos, considerar prácticamente inercial. Sin embargo, existe una serie de fenómenos, cuya comprensión en este sistema de referencia es imposible sin tener en cuenta que éste es no inercial.

Se sabe, por ejemplo, que la aceleración de la caída libre de un cuerpo respecto a la superficie de la Tierra tiene el mayor valor en los polos. La disminución de esta aceleración a medida de la aproximación al ecuador se explica no sólo por la falta de esfericidad de la Tierra, sino que también por la acción creciente de la fuerza centrífuga de inercia. Indiquemos, además, fenómenos tales como la inclinación hacia el este de los cuerpos en caída libre, el derrumbio de las orillas derechas de los ríos en el hemisferio boreal y de las orillas izquierdas, en el austral, la rotación de la superficie de oscilación del péndulo de Foucault y otros. Semajantes fenómenos se vinculan con el movimiento de los cuerpos respecto a la superficie de la Tierra y pueden ser explicados por la acción de las fuerzas de Coriolis.

Ejemplo. Un tren de masa m se mueve por un meridiano de la latitud φ a la velocidad v' . Encontrar la presión lateral con la cual el tren actúa sobre los rieles.

En el sistema de referencia ligado con la Tierra (que gira a la velocidad angular ω), la componente de la aceleración del tren,

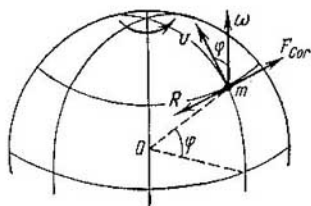


Fig. 23

perpendicular al plano del meridiano, es nula. Por eso y la suma de las proyecciones de las fuerzas, que actúan sobre el tren en esta dirección, también es igual a cero. Esto significa, que la fuerza de Coriolis F_{Cor} (fig. 23) debe equilibrarse con la fuerza R de la presión lateral del riel que actúa sobre el tren por el lado derecho en sentido del movimiento, es decir, $F_{Cor} = -R$. Según la tercera ley de Newton, el tren actuará sobre este riel en dirección horizontal con la fuerza $R' = -R$. Por consiguiente, $R = F_{Cor} = 2m [v'\omega]$. El módulo del vector R' es igual a $R' = 2mv'\omega \sin \varphi$.

El sencillo ejemplo siguiente muestra como surgen las fuerzas de inercia durante el paso de un sistema inercial de referencia a otro no inercial.

Ejemplo. En la superficie de una mesa se encuentra un disco horizontal D que gira libremente alrededor de un eje vertical a la velocidad angular ω . Sobre el disco está suspendida una bola de masa m , como se muestra en la fig. 24, *a*. Examinemos el comportamiento de esta bola en el sistema K de referencia, ligado con la

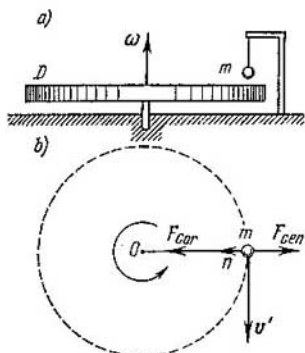


Fig. 24

mesa (se supone que es inercial), y en el sistema K' ligado con el disco que gira.

En el sistema inercial K sobre la bola actúan dos fuerzas: la de gravedad y la de tensión del hilo. Estas fuerzas se compensan una a otra y la bola se encuentra en reposo en el sistema K .

En el sistema K' no inercial la bola se mueve uniformemente por una circunferencia con aceleración normal $\omega^2 \rho$, donde ρ es la distancia desde la bola hasta el eje de rotación. Es fácil convencerse de que esta aceleración acondicionase por la acción de las fuerzas de inercia. En efecto, en el sistema K' además de las dos fuerzas indicadas más arriba, que se compensan mutuamente,

actúan también la fuerza centrífuga de inercia y la fuerza de Coriolis (fig. 24, *b*). Tomando las proyecciones de estas fuerzas en la normal n a la trayectoria en el punto donde se encuentra la bola, escribimos:

$$m\omega_n' = F_{Cor} - F_{cen} = 2mv'\omega - m\omega^2\rho = m\omega^2\rho,$$

donde se tiene en cuenta que, en el caso dado, $v' = \omega\rho$. De aquí se ve que $\omega_n' = \omega^2\rho$.

Particularidades de las fuerzas de inercia. Resumiendo, enumeremos las particularidades más importantes de estas fuerzas, que las diferencian de las fuerzas de interacción:

1. Las fuerzas de inercia están condicionadas no por la interacción de los cuerpos, sino por las propiedades de los mismos sistemas no inerciales de referencia. Por esto la tercera ley de Newton no se extiende a las fuerzas de inercia.

2. Estas fuerzas existen solamente en los sistemas no inerciales de referencia. Para evitar incomprensiones es necesario recordar esto con firmeza. En general, en los sistemas inerciales de referencia no existen las fuerzas de

inercia y el concepto de *fuerza* se emplea en estos sistemas de referencia sólo en el sentido newtoniano, como medida de interacción de los cuerpos.

3. Todas las fuerzas de inercia, como las fuerzas de gravedad, son proporcionales a la masa del cuerpo. Por esta razón en un campo homogéneo de fuerzas de inercia, tanto como en un campo de fuerzas de gravedad, todos los cuerpos se mueven con igual aceleración independientemente de su masa. Este es un hecho muy esencial que puede llevar a graves consecuencias.

Principio de equivalencia. El hecho de que las fuerzas de inercia, como las de gravedad, son proporcionales a las masas de los cuerpos, lleva a la siguiente importante conclusión. Imaginémonos que nos encontramos en cierto laboratorio cerrado y no tenemos la posibilidad de observar el mundo exterior. Admitamos, además, que no sabemos donde se encuentra el laboratorio: digamos en el espacio cósmico o en la Tierra. Notando, que todos los cuerpos, independientemente de su masa caen en el laboratorio con igual aceleración, no podemos basándonos sólo en este hecho, establecer qué ha provocado esta aceleración: el campo gravitatorio, el movimiento de traslación acelerado del mismo laboratorio o, finalmente, estas dos causas. Ningún experimento sobre la caída libre de los cuerpos en este laboratorio no puede mostrar la diferencia entre el campo homogéneo gravitatorio y el campo homogéneo de las fuerzas de inercia.

Einstein enunció la suposición de que, en general, no es posible diferenciar con ningún experimento físico el campo homogéneo gravitatorio del campo homogéneo de las fuerzas de inercia. Esta suposición se ha establecido como postulado y constituye el contenido del llamado *principio de equivalencia* de las fuerzas de gravedad y de las fuerzas de inercia: *todos los fenómenos físicos en un campo homogéneo gravitatorio transcurren de modo absolutamente igual que en el campo homogéneo correspondiente de las fuerzas de inercia.*

La profunda analogía entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de gravedad sirvió a Einstein de punto de partida para la confección de la *teoría general de la relatividad* o de la teoría relativista de gravitación.

En conclusión es necesario señalar que cualquier problema de mecánica se puede resolver en los sistemas inercial y no inercial de referencia. La elección de uno u otro sistema de referencia se dicta, generalmente, o por el planteamiento del problema, o bien por la tendencia a obtener la solución por el camino más simple posible. Con esto, con frecuencia es más conveniente usar precisamente los sistemas no inerciales de referencia (véanse los problemas 2.9 a 2.11).

Problemas para el capítulo 2

2.1. Una barreta de masa m_1 se encuentra sobre una tabla de masa m_2 , que está en un plano horizontal liso (fig. 25). El coeficiente de rozamiento entre las superficies de la barreta y la tabla es igual a k . Aplicamos a la tabla la fuerza horizontal F , que depende del tiempo t según la ley $F = at$ (a es una constante). Encontrar:

1) el momento de tiempo t_0 en que la tabla empieza a deslizarse de debajo de la barreta;

2) la aceleración de la barreta w_1 y de la tabla w_2 en el proceso de movimiento.

Solución. 1. Escribimos la ecuación fundamental de dinámica para la barreta y la tabla, tomando la dirección positiva del eje x como se muestra en el dibujo:

$$m_1 w_1 = F_{roz}, \quad m_2 w_2 = F - F_{roz}. \quad (1)$$

A medida que aumenta la fuerza F crecerá también la fuerza de rozamiento F_{roz} (al principio es la fuerza de rozamiento en reposo).

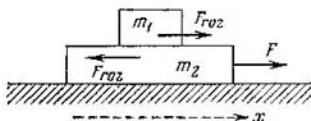


Fig. 25

Pero la fuerza de rozamiento F_{roz} tiene el límite $F_{roz \max} = km_1 g$. Mientras no se alcanza este límite, ambos cuerpos se moverán como un todo con aceleraciones iguales. Más cuando la fuerza F_{roz} alcanza el límite, la tabla empieza a deslizarse de debajo de la barreta es decir,

$$w_2 \geq w_1.$$

Sustituyendo aquí w_1 y w_2 de (1) tomando en consideración que $F_{roz} = km_1 g$, obtenemos

$$(at - km_1 g)/m_2 \geq kg,$$

donde el signo « \geq » corresponde al momento $t = t_0$. De aquí

$$t_0 = (m_1 + m_2) kg/a.$$

2. Si $t \leq t_0$, entonces

$$w_1 = w_2 = at/(m_1 + m_2);$$

mas si $t \geq t_0$, entonces

$$w_1 = kg = \text{const}, \quad w_2 = (at - km_1 g)/m_2.$$

En la fig. 26 se muestran los gráficos de las dependencias $w_1(t)$ y $w_2(t)$.

2.2. El plano inclinado en la instalación (fig. 27) constituye el ángulo $\alpha = 30^\circ$ con el horizonte. La relación de las masas de los cuerpos $\eta = m_1/m_2 = 2/3$. El coeficiente de rozamiento entre el

plano y el cuerpo $m_2 k = 0,10$. Las masas de la polea y del hilo se menosprecian por su pequeñez. Encontrar el módulo y la dirección de la aceleración del cuerpo m_1 si el sistema se puso en movimiento desde el estado de reposo.

Solución. Aquí surge de inmediato la cuestión ligada con la dirección de la fuerza de roce que actúa sobre el cuerpo m_2 . Sin la respuesta a esta cuestión no se puede escribir la ecuación fundamental de dinámica para el cuerpo m_2 en las proyecciones y el problema resulta indeterminado.

Vamos a razonar así: el cuerpo m_2 en ausencia de las fuerzas de rozamiento empezaría a deslizarse por el plano inclinado, supongamos, hacia arriba. Evidentemente, que la inclusión de la fuerza

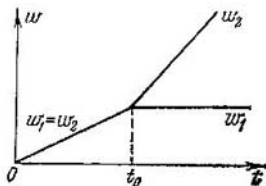


Fig. 26

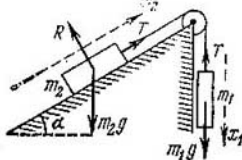


Fig. 27

de rozamiento no puede variar la dirección del movimiento, sólo disminuye la aceleración. De ese modo, la dirección de la fuerza de rozamiento que actúa sobre el cuerpo m_2 , será determinada, si se encuentra la dirección de la aceleración de este cuerpo en ausencia del rozamiento ($k = 0$). Por esto empezaremos.

Escribamos en las proyecciones, la ecuación fundamental de dinámica para ambos cuerpos, tomando la dirección positiva de los ejes x_1 y x_2 , como se muestra en la fig. 27:

$$m_1 w_x = m_1 g - T, \quad m_2 w_x = T - m_2 g \text{ son } \alpha,$$

donde T es la fuerza de tensión del hilo. Sumando término por término los primeros y segundos miembros de estas ecuaciones, obtenemos

$$w_x = \frac{\eta - \text{sen } \alpha}{\eta + 1} g.$$

Poniendo en esta expresión $\eta = 2/3$ y $\alpha = 30^\circ$ obtenemos $w_x > 0$, es decir, el cuerpo m_2 empieza a moverse hacia arriba por el plano inclinado. Por consiguiente, la fuerza de rozamiento que actúa sobre este cuerpo, estará dirigida en sentido contrario. Teniendo en cuenta esta circunstancia escribimos de nuevo las ecuaciones del movimiento:

$$m_1 w_x' = m_1 g - T', \quad m_2 w_x' = T' - m_2 g \text{ sen } \alpha - k m_2 g \text{ cos } \alpha.$$

De aquí

$$w_x' = \frac{\eta - \text{sen } \alpha - k \text{ cos } \alpha}{\eta + 1} g \approx 0,05g.$$

2.3. A través de una polea (fig. 28) pasa un hilo no estirable, en los extremos del cual penden los pesos con masas m_1 y m_2 , siendo $m_1 > m_2$. Empezamos a elevar la polea con una aceleración w_0 con relación a la Tierra. Encontrar la aceleración w_1 del peso m_1 con relación a la Tierra suponiendo que el hilo se desliza sin rozamiento por la polea.

Solución. Elegimos la dirección positiva del eje x como se muestra en la fig. 28 y escribimos la ecuación fundamental de dinámica para ambos pesos en la proyección sobre este eje:

$$m_1 w_{1x} = T - m_1 g, \quad (1)$$

$$m_2 w_{2x} = T - m_2 g. \quad (2)$$

Estas dos ecuaciones contienen tres incógnitas: w_{1x} , w_{2x} y T . Para confeccionar la tercera ecuación hacemos uso del enlace cinemático entre las aceleraciones:

$$w_1 = w_0 + w', \quad w_2 = w_0 - w',$$

donde w' es la aceleración del peso de masa m_1 respecto a la polea. Sumando término por término los miembros primero y segundo de estas igualdades, obtenemos

$$w_1 + w_2 = 2w_0,$$

o en las proyecciones sobre el eje x

$$w_{1x} + w_{2x} = 2w_0. \quad (3)$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (1), (2) y (3), encontramos

$$w_{1x} = [2m_2 w_0 + (m_2 - m_1)g] / (m_1 + m_2).$$

De aquí se desprende que con w_0 dada, el signo de w_{1x} depende de la correlación de las masas m_1 y m_2 .

2.4. Una pequeña golilla se mueve por un plano inclinado, cuyo coeficiente de rozamiento $k = \text{tg } \alpha$, donde α es el ángulo de inclinación del plano al horizonte. Hallar la dependencia de la velocidad v de la golilla del ángulo φ entre el vector \mathbf{v} y el eje x (fig. 29), si en el momento inicial $v = v_0$ y $\varphi = \pi/2$.

Solución. La aceleración de la golilla a lo largo del plano se determina por las componentes de la fuerza de gravedad sobre este plano $F_x = mg \text{ sen } \alpha$ y por la fuerza de rozamiento $F_{\text{roz}} = kmg \text{ cos } \alpha$. En nuestro caso $k = \text{tg } \alpha$, por eso

$$F_{\text{roz}} = F_x = mg \text{ sen } \alpha.$$

Encontremos la proyección de la aceleración en la dirección de la tangente a la trayectoria y en el eje x :

$$m w_x = F_x \text{ cos } \varphi - F_{\text{roz}} = mg \text{ sen } \alpha (\text{cos } \varphi - 1),$$

$$m w_x = F_x - F_{\text{roz}} \text{ cos } \varphi = mg \text{ sen } \alpha (1 - \text{cos } \varphi).$$

De aquí se ve que $w_x = -w_x$, lo que significa que la velocidad v y su proyección v_x se diferencian sólo por cierta constante C que

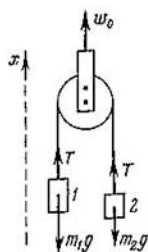


Fig. 28

no depende del tiempo, es decir,

$$v = -v_x + C,$$

donde $v_x = v \cos \varphi$. Encontramos la constante C de la condición inicial $v = v_0$, de donde $C = v_0$. Como resultado obtenemos

$$v = v_0(1 + \cos \varphi).$$

Con el incremento del tiempo $\varphi \rightarrow 0$ y $v \rightarrow v_0/2$.

2.5. Una cuerda fina elástica homogénea delgada de masa m y longitud l_0 (en estado no tensado) tiene un coeficiente de elasticidad κ . Encolados los extremos, ponemos la cuerda sobre un plano

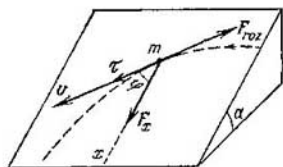


Fig. 29

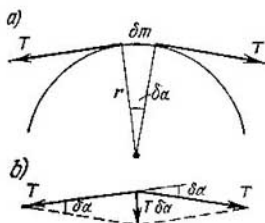


Fig. 30

horizontal liso, le damos la forma de una circunferencia y la hacemos girar hasta la velocidad angular ω alrededor del eje vertical que pasa por su centro. Encontrar la fuerza de tensión de la cuerda en este estado.

Solución. Destacamos mentalmente un elemento pequeño de la cuerda de masa δm , como se muestra en la fig. 30, a. Este elemento se mueve por la circunferencia bajo la acción de una fuerza que representa en sí la suma geométrica de dos vectores, el módulo de cada uno de los cuales es igual a la fuerza buscada de tensión T (fig. 30, b). Por eso, según la segunda ley de Newton

$$\delta m \omega^2 r = T \cdot \delta \alpha. \quad (1)$$

Tomando en cuenta, que $\delta m = (m/2\pi) \delta \alpha$ y $r = l/2\pi$, siendo l la longitud de la cuerda en estado giratorio. Entonces (1) adquiere el aspecto

$$m \omega^2 l / 4\pi^2 = T. \quad (2)$$

Por otro lado, según la ley de Hooke

$$T = \kappa (l - l_0). \quad (3)$$

Excluyendo l de (2) y (3), obtenemos

$$T = \frac{\kappa l_0}{4\pi^2 \kappa / m \omega^2 - 1}.$$

Señalamos, que en el caso de una cuerda no estirable ($\kappa = \infty$) $T = m \omega^2 l_0 / 4\pi^2$.

2.6. Integración de las ecuaciones de movimiento. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de la fuerza F . En el momento $t = 0$ se conocen su radio vector $r(0)$ y su velocidad $v(0)$, o sea, las condiciones iniciales. Hallar la posición de la partícula en dependencia del tiempo t , si:

- 1) $F = F_0 \text{ sen } \omega t$, $r(0) = 0$, $v(0) = 0$;
- 2) $F = -kv$, $r(0) = 0$, $v(0) = v_0$;
- 3) $F = -\kappa r$, $r(0) = r_0$, $v(0) = v_0$, siendo $v_0 \parallel r_0$.

Aquí F_0 es un vector constante; ω , k , κ son constantes positivas.

Solución. 1. Según la ecuación fundamental de dinámica, la aceleración en el caso dado

$$dv/dt = (F_0/m) \text{ sen } \omega t.$$

De aquí hallamos el incremento elemental del vector de velocidad dv en el tiempo dt y después, el incremento de este vector en el tiempo desde 0 hasta t :

$$v(t) - v(0) = (F_0/m) \int_0^t \text{sen } \omega t \, dt.$$

Teniendo en cuenta que $v(0) = 0$, después de la integración obtenemos

$$v(t) = (F_0/m\omega) (1 - \cos \omega t).$$

Ahora determinamos dr , o sea, el desplazamiento elemental o el incremento del radio vector r de la partícula en el tiempo dt : $dr =$

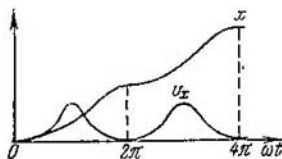


Fig. 31

$= v(t) dt$. Mas el incremento del radio vector en el tiempo desde 0 hasta t :

$$r(t) - r(0) = (F_0/m\omega) \int_0^t (1 - \cos \omega t) dt.$$

Integrando esta expresión y teniendo en cuenta que $r(0) = 0$, encontramos

$$r(t) = (F_0/m\omega^2) (\omega t - \text{sen } \omega t).$$

En la fig. 31 se muestran los gráficos de las dependencias $v_x(t)$ y $x(t)$, o sea, las proyecciones de los vectores v y r sobre el

eje x , elegido en dirección del movimiento de la partícula, es decir, en dirección del vector F_0 .

2. Aquí la aceleración

$$dv/dt = -(k/m)v.$$

Para la integración de esta ecuación pasamos a la forma escalar, o sea, al módulo del vector v :

$$dv/v = -(k/m) dt.$$

La integración de esta ecuación (teniendo en cuenta las condiciones iniciales) nos da: $\ln(v/v_0) = -(k/m)t$. Después de la potenciación retornamos a la forma vectorial:

$$v = v_0 e^{-kt/m}.$$

Una vez más integramos la última ecuación (y también teniendo en cuenta las condiciones iniciales):

$$r = \int_0^t v dt = (mv_0/k)(1 - e^{-kt/m}).$$

En la fig. 32 se muestran los gráficos de la velocidad y del recorrido s en dependencia del tiempo t (en nuestro caso $s = r$).

3. En el caso dado el movimiento transcurrirá a lo largo de la recta que coincide con el radio vector r . Tomemos en esta dirección el eje x y escribamos de inmediato la ecuación fundamental de dinámica en la proyección sobre este eje, en la forma siguiente:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1)$$

donde \ddot{x} es la segunda derivada de la coordenada conforme al tiempo (la proyección del vector de aceleración), $\omega^2 = \kappa/m$. La ecuación escrita denomínase *ecuación de las oscilaciones armónicas*.

En matemática se demuestra que la solución general de esta ecuación tiene el aspecto

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (2)$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Las limitaciones que se imponen a estas constantes se determinan generalmente, de las condiciones iniciales. Por ejemplo, en nuestro caso en el momento $t = 0$

$$x(0) = x_0 \text{ y } v_x(0) = v_{0x}, \quad (3)$$

donde x_0 y v_{0x} son las proyecciones de los vectores r_0 y v_0 sobre el eje x . Después de la sustitución de (2) en (3) obtenemos: $A = x_0$, $B = v_{0x}/\omega$. Lo demás es evidente.

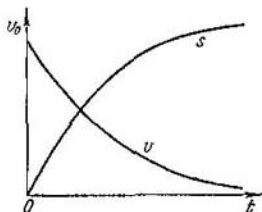


Fig. 32

2.7. Una partícula de masa m se mueve en cierto plano bajo la acción de la fuerza F constante de módulo, la dirección de la cual gira en este plano a la velocidad angular constante ω . En el momento $t = 0$ la velocidad de la partícula es nula. Encontrar el módulo de la velocidad de la partícula como función del tiempo t , así como el camino recorrido por la partícula entre dos paradas sucesivas.

Solución. Liguemos el sistema de coordenadas x, y (fig. 33) con el plano dado, tomando el eje x en la dirección que tenía el vector de la fuerza en el momento $t = 0$. Entonces la ecuación fundamental de dinámica en las proyecciones sobre los ejes x o y tendrá el aspecto

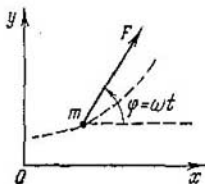


Fig. 33

$$m \, dv_x/dt = F \cos \omega t,$$

$$m \, dv_y/dt = F \sin \omega t.$$

Integrando estas ecuaciones conforme al tiempo teniendo en cuenta la condición inicial $v(0) = 0$, obtenemos:

$$v_x = (F/m\omega) \sin \omega t,$$

$$v_y = (F/m\omega) (1 - \cos \omega t).$$

El módulo del vector de velocidad de la partícula

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = (2F/m\omega) |\sin(\omega t/2)|.$$

De aquí se deduce, que la velocidad v se reduce a cero después del intervalo de tiempo Δt , que puede ser hallado de la igualdad $\omega \Delta t/2 = \pi$. Por eso el camino buscado

$$s = \int_0^{\Delta t} v \, dt = 8F/m\omega^2.$$

2.8. Un automóvil se mueve con aceleración tangencial constante w_τ por un plano horizontal, describiendo una circunferencia de radio R . El coeficiente de rozamiento entre las ruedas del auto y el plano es igual a k . ¿Qué camino s recorre el auto sin deslizamiento a velocidad inicial nula?

Solución. A medida que aumenta la velocidad crecerá tanto la aceleración normal, como la total del auto. El movimiento transcurrirá sin deslizamiento mientras la aceleración total necesaria se asegura por la fuerza de rozamiento. El valor máximo posible de esta fuerza $F_{\text{máx}} = kmg$, donde m es la masa del auto. Por eso el valor máximo de la aceleración total (según la ecuación fundamental $mW = F$)

$$w_{\text{máx}} = kg. \quad (1)$$

De otro lado,

$$w_{\text{máx}} = \sqrt{w_\tau^2 + (v^2/R)^2}, \quad (2)$$

donde v es la velocidad del auto en el momento cuando su aceleración llega a ser la máxima posible. Esta velocidad y el camino bus-

cado se relacionan por la fórmula

$$v^2 = 2w_\tau s. \quad (3)$$

Expresando v de (1) y (2) y sustituyéndola en (3), obtenemos

$$s = (R/2) \sqrt{(kg'w_\tau)^2 - 1}.$$

Es fácil ver, que la solución tiene sentido con la expresión subradical positiva, es decir, cuando $w_\tau < kg$.

2.9. Sistemas no inerciales de referencia. Un satélite se mueve en un plano ecuatorial de la Tierra de oeste a este por una órbita circular de radio r . Despreciando la aceleración determinada por el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, encontrar la aceleración w' del satélite en el sistema de referencia ligado con la Tierra.

Solución. Sea K un sistema inercial de referencia según el planteamiento en el cual reposa el eje de rotación de la Tierra y K'

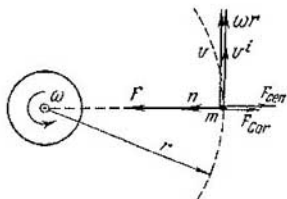


Fig. 34

un sistema no inercial de referencia, ligado con la Tierra y que gira a velocidad angular ω con relación al sistema K .

A nosotros nos interesa la aceleración w' del satélite en el sistema K' . Para esto, ante todo, representamos todas las fuerzas que actúan sobre el satélite en este sistema de referencia: la fuerza de gravedad F , la fuerza de Coriolis F_{Cor} y la fuerza centrífuga de inercia F_{cen} (fig. 34, vista desde el polo Norte de la Tierra).

Ahora, hagamos uso de la ecuación (2.18), considerando $w_0 = 0$ (según el planteamiento). El satélite en el sistema K' se mueve por una circunferencia, por eso proyectamos de inmediato la ecuación (2.18) sobre la normal n a la trayectoria:

$$mw' = F - 2mv'\omega - m\omega^2r, \quad (1)$$

donde $F = \gamma mM/r^2$, siendo m y M las masas del satélite y de la Tierra. Queda por determinar la velocidad v' del satélite en el sistema K' . Para esto hacemos uso del enlace cinemático (1.24) en forma escalar

$$v' = v - \omega r, \quad (2)$$

donde v es la velocidad del satélite en el sistema K (fig. 34), y de la ecuación del movimiento del satélite en el sistema K , para la determinación de v :

$$mv^2/r = \gamma mM/r^2. \quad (3)$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (1), (2) y (3), obtenemos

$$\omega' = (1 - \omega r \sqrt{r/\gamma M})^2 \gamma M / r^2.$$

En particular, $\omega' = 0$ cuando $r = \sqrt[3]{\gamma M / \omega^2} = 4,2 \cdot 10^3$ km. Este satélite lo denominan *estacionario*: está inmóvil con relación a la superficie de la Tierra.

2.10. Un pequeño manguito de masa m se desliza libremente por una barra horizontal lisa, que gira a velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical fijo que pasa por uno de sus extremos. Encontrar la componente horizontal de la fuerza que actúa sobre el manguito por el lado de la barra en el momento, cuando él se encuentra a la distancia r del eje. El manguito en el

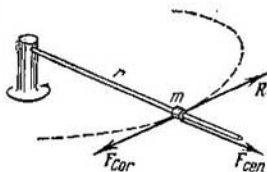


Fig. 35

momento inicial se encontraba directamente junto al eje y tenía velocidad despreciable por su pequeñez.

Solución. Examinemos el movimiento del manguito en el sistema giratorio de referencia, ligado rigidamente con la barra. En este sistema de referencia el manguito se mueve de modo rectilíneo, lo que significa que la fuerza buscada se equilibra por la fuerza de Coriolis (fig. 35):

$$R = -F_{Cor} = 2m[\omega v']. \quad (1)$$

De ese modo, el problema se reduce a encontrar la velocidad v' del manguito respecto a la barra. Según (2.19),

$$dv'/dt = F_{cen}/m = \omega^2 r.$$

Transformamos esta ecuación teniendo en cuenta que $dt = dr/v'$.

Entonces, obtenemos

$$v' dv' = \omega^2 r dr.$$

Integrando la última ecuación tomando en consideración las condiciones iniciales ($v' = 0$, $r = 0$), encontramos $v' = \omega r$ o en forma vectorial

$$\mathbf{v}' = \omega \mathbf{r}. \quad (2)$$

La sustitución de (2) en (1) nos da

$$R = 2m\omega[\omega r].$$

2.11. Estabilidad de movimiento. Un anillo de alambre de radio r gira a velocidad angular constante ω alrededor del eje vertical OO' que pasa por su diámetro. En el anillo se encuentra un pequeño manguito A que puede deslizarse libremente (sin rozamiento) por él. Hallar el ángulo ϑ (fig. 36) correspondiente a la posición estable del manguito.

Solución. Examinemos el comportamiento del manguito en el sistema de referencia, ligado con el anillo giratorio. Su movimiento

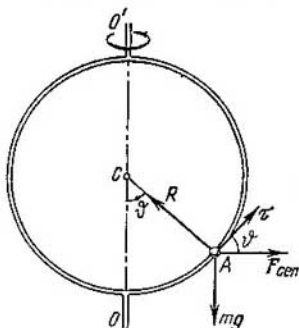


Fig. 36

a lo largo del anillo se determinará por la proyección F_{τ} de la fuerza resultante en la dirección del versor τ en el punto A . De la fig. 36 se deduce que

$$F_{\tau} = F_{cen} \cos \vartheta - mg \sin \vartheta,$$

donde a la derecha se escriben las proyecciones de las fuerzas centrífuga y de gravedad. Teniendo en cuenta que $F_{cen} = m\omega^2 r \sin \vartheta$ escribimos la expresión anterior así:

$$F_{\tau} \sim \sin \vartheta (\cos \vartheta - g/\omega^2 r). \quad (1)$$

De la condición de equilibrio ($F_{\tau} = 0$) encontramos dos valores del ángulo ϑ_0 , con los cuales él es posible: $\sin \vartheta_0 = 0$ y $\cos \vartheta_0 = g/\omega^2 r$. La primera condición puede ser realizada con cualesquiera valores de ω , la segunda, sólo cuando $g/\omega^2 r < 1$. De ese modo, con pequeñas ω existe sólo una posición de equilibrio en el punto inferior ($\vartheta_0 = 0$); con grandes ω ($\omega > \sqrt{g/r}$) es posible otra posición de equilibrio, determinada por la segunda condición.

Para la estabilidad de un determinado estado de equilibrio es necesario que la fuerza F_{τ} , al sacar el manguito del estado de equilibrio (hacia cualquier lado), esté dirigida a la inversa, hacia la posición de equilibrio, es decir, el signo de F_{τ} debe ser contrario al signo de la desviación $\Delta\vartheta$ respecto del ángulo de equilibrio ϑ_0 .

Con una desviación pequeña $d\vartheta$ respecto del ángulo ϑ_0 , la fuerza δF_τ que surge puede ser determinada como la diferencial de la expresión (1):

$$\delta F_\tau \sim [\cos \vartheta_0 (\cos \vartheta_0 - g/\omega^2 r) - \sin^2 \vartheta_0] d\vartheta.$$

En la posición inferior de equilibrio ($\vartheta_0 = 0$)

$$\delta F_\tau \sim (1 - g/\omega^2 r) d\vartheta. \quad (2)$$

Esta posición de equilibrio será estable, cuando la expresión entre paréntesis sea negativa, es decir, $\omega < \sqrt{g/r}$.

En la otra posición de equilibrio ($\cos \vartheta_0 = g/\omega^2 r$)

$$\delta F_\tau \sim -\sin^2 \vartheta_0 d\vartheta.$$

De aquí se ve, que esta posición de equilibrio (si ella existe) es siempre estable.

Así, mientras existe sólo la posición inferior de equilibrio (cuando $\omega < \sqrt{g/r}$), ella es siempre estable. Más con el surgimiento de la otra posición de equilibrio (cuando $\omega > \sqrt{g/r}$) la posición inferior, según (2), se hace inestable y el manguito pasa inmediatamente de la posición inferior a la superior, que es siempre estable.

Capítulo 3

Ley de conservación de la energía

§ 3.1. Sobre las leyes de conservación

Cualquier cuerpo (o conjunto de cuerpos) es, en esencia, un sistema de puntos materiales o de partículas. Si el sistema varía en el transcurso del tiempo, dicen que cambia su *estado*. El estado de un sistema se caracteriza por la prefijación simultánea de las posiciones (las coordenadas) y de las velocidades de todas sus partículas.

Conociendo las leyes de las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema y el estado del sistema en cierto momento inicial de tiempo se puede, como muestra la experiencia, con ayuda de las ecuaciones del movimiento predecir su comportamiento ulterior, es decir, determinar el estado del sistema en cualquier momento de tiempo. Así, por ejemplo, se resuelve el problema del movimiento de los planetas del Sistema solar.

Sin embargo, frecuentemente, el examen detallado del comportamiento de un sistema con ayuda de las ecuaciones del movimiento es tan difícil (por ejemplo, debido a la complejidad del mismo sistema), que llevar la solución hasta el final resulta ser prácticamente imposible. Y en aquellos casos, cuando las leyes de las fuerzas que actúan son en general desconocidas, tal enfoque resulta en principio irrealizable. Además, existe una serie de problemas, en los cuales el examen detallado del movimiento de las partículas aisladas no tiene simplemente sentido (por ejemplo, un gas).

Ante esta situación surge, como es natural, la pregunta: ¿no hay algunos principios generales que son corolarios de las leyes de Newton, que permitan abordar de otro modo la solución del problema y que ayuden en cierto grado a evitar semejantes dificultades?

Resulta que estos principios existen. Estas son las llamadas *leyes de conservación*.

Como ya fue dicho, durante el movimiento de un sistema su estado varía con el tiempo. Existen, sin embargo, tales magnitudes, las funciones de estado, que poseen la muy importante y notable propiedad de no variar con el tiempo. Entre estas magnitudes *la energía, la impulsión* (con impulso) *y el momento de impulsión* juegan el papel más importante. Estas tres magnitudes tienen una importante propiedad general de aditividad: su valor para los sistemas, compuestos de partes cuya interacción es despreciable por su pequeñez, es igual a la suma de los valores para cada una de las partes por separado (por lo demás, para el impulso y el momento de impulsión la propiedad de aditividad también se cumple en presencia de la interacción). Precisamente la propiedad de aditividad da a estas tres magnitudes un papel extraordinariamente importante.

Las leyes de conservación de la energía, del impulso y del momento de impulsión tienen, como se aclaró posteriormente, un origen muy profundo, ligado con las propiedades fundamentales del tiempo y el espacio, o sea, con la homogeneidad y la isotropía. A saber: la ley de conservación de la energía se liga con la homogeneidad del tiempo, mientras que las leyes de conservación del impulso y del momento de impulsión, con la homogeneidad y la isotropía del espacio, respectivamente. Lo dicho se debe comprender en el sentido de que las leyes de conservación enumeradas se pueden obtener de la segunda ley de Newton, si a ella se adjuntan las correspondientes propiedades de simetría del tiempo y del espacio. Sin embargo, nosotros no vamos a examinar esta cuestión con mayor detalle.

Las leyes de conservación de la energía, del impulso y del momento de impulsión pertenecen a los principios más fundamentales de física, el valor de los cuales es difícil sobreestimar. El papel de estas leyes creció extraordinariamente después de que se aclaró que ellas salen lejos de los límites de la mecánica y son las leyes fundamentales de la naturaleza. En todo caso, hasta ahora no se ha descubierto ningún fenómeno donde estas leyes se violaran. Ellas también «actúan» correctamente en el dominio de las partículas elementales, en la rama de los objetos cósmicos, en la física del átomo y en la del sólido y son unas de aquellas pocas leyes más generales que forman la base de la física moderna,

Al descubrir la posibilidad de un enfoque diferente al estudio de diversos fenómenos mecánicos, las leyes de conservación se han convertido en un instrumento muy potente y efectivo de investigación, el cual se emplea de modo constante en la física. Este importantísimo papel de las leyes de conservación, como instrumento de investigación, determinase por una serie de causas.

1. Las leyes de conservación no dependen ni de la trayectoria de las partículas, ni del carácter de las fuerzas que actúan. Por eso, ellas permiten obtener una serie de conclusiones muy generales y esenciales sobre las propiedades de diferentes procesos mecánicos, no profundizando en su examen detallado con ayuda de las ecuaciones del movimiento. Si, por ejemplo, se aclara que cierto proceso contradice las leyes de conservación, de inmediato se puede afirmar: este proceso es imposible y no tiene sentido intentar realizarlo.

2. El hecho de que las leyes de conservación no dependen del carácter de las fuerzas que actúan, permite emplearlas incluso cuando las fuerzas son en general desconocidas. En estos casos las leyes de conservación son un instrumento único e insustituible de investigación. Un ejemplo, es la física de las partículas elementales.

3. Incluso en aquellos casos, cuando las fuerzas se conocen con exactitud, las leyes de conservación pueden prestar considerable ayuda en la solución de muchos problemas del movimiento de las partículas. Aunque todos estos problemas pueden ser resueltos con ayuda de las ecuaciones del movimiento (en este caso no obtenemos ninguna información complementaria de las leyes de conservación), la utilización de las leyes de conservación permite obtener con mucha frecuencia la solución por vía más simple y elegante, liberándonos de cálculos voluminosos y fatigosos. Por esto, al resolver nuevos problemas generalmente se acostumbra a atenerse al orden siguiente: ante todo se emplean las leyes de conservación una tras otra y, sólo habiéndose convencido que esto es insuficiente, pasan después a la solución con ayuda de las ecuaciones del movimiento.

Nosotros empezamos el estudio de las leyes de conservación por la ley de conservación de la energía, introduciendo el concepto de energía mediante la noción de trabajo,

§ 3.2. Trabajo y potencia

Trabajo. Sea que una partícula se desplace por cierta trayectoria 1—2 (fig. 37) bajo la acción de la fuerza F . En el caso general, la fuerza F puede variar en el proceso del movimiento de la partícula tanto por su módulo como por su dirección. Examinemos el desplazamiento elemental dr , en los límites del cual la fuerza F se puede considerar constante.

La acción de la fuerza F para el desplazamiento dr se caracteriza por una magnitud igual al producto escalar Fdr , denominado *trabajo elemental* de la fuerza F para el desplazamiento dr . El se puede representar, además en otro aspecto:

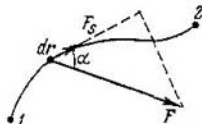


Fig. 37

donde α es el ángulo entre los vectores F y dr , $ds = |dr|$, el camino elemental, F_s , la proyección del vector F sobre el vector dr (fig. 37).

Así, el trabajo elemental de la fuerza F para el desplazamiento dr

$$\delta W = Fdr = F_s ds. \quad (3.1)$$

La magnitud δW es algebraica: en dependencia del ángulo entre los vectores F y dr (o del signo de la proyección F_s del vector F sobre el vector dr) ella puede ser tanto positiva como negativa y, en particular, igual a cero (si $F \perp dr$, es decir, $F_s = 0$).

Sumando (integrando) la expresión (3.1) por todos los sectores elementales del camino desde el punto 1 hasta el punto 2, hallamos el trabajo de la fuerza F en el camino dado:

$$W = \int_1^2 F dr = \int_1^2 F_s ds. \quad (3.2)$$

A la expresión (3.2) se le puede dar evidente sentido geométrico. Representemos el gráfico F_s como la función de la posición de la partícula en la trayectoria. Sea, por

ejemplo, que este gráfico tiene el aspecto mostrado en la fig. 38. En esta figura se ve, que el trabajo elemental δW es numéricamente igual al área de la banda sombreada, y el trabajo W en el camino desde el punto 1 hasta el punto 2, al área de la figura, limitada por la curva, con las ordenadas 1 y 2 y el eje s . Con ello, el área de la figura sobre el eje s se toma con signo más (corresponde al trabajo positivo), en tanto que el área de la figura bajo el eje s , con signo menos (corresponde al trabajo negativo).

Examinemos algunos ejemplos de cálculo del trabajo.

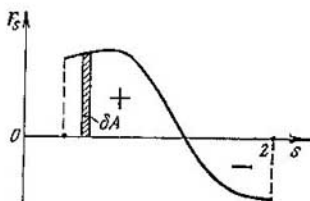


Fig. 38

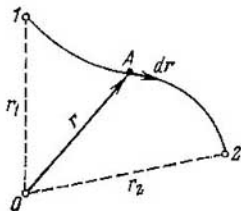


Fig. 39

Trabajo de la fuerza elástica $F = -\kappa r$, donde r es el radio vector de la partícula A en relación al punto O (fig. 39). Trasladamos a la partícula A , sobre la cual actúa esta fuerza, por un camino arbitrario desde el punto 1 al punto 2. Primero determinamos el trabajo elemental de la fuerza F para el desplazamiento elemental dr :

$$\delta W = F dr = -\kappa r dr.$$

El producto escalar $r dr = r (dr)_r$, donde $(dr)_r$, es la proyección de dr sobre el vector r . Esta proyección es igual a dr , o sea, al incremento del módulo del vector r . Por eso, $r dr = r dr$ y

$$\delta W = -\kappa r dr = -d(\kappa r^2/2).$$

Ahora calculemos el trabajo de la fuerza dada sobre todo el camino, es decir, integramos la última expresión desde el punto 1 hasta el punto 2:

$$W = - \int_1^2 d(\kappa r^2/2) = \kappa r_1^2/2 - \kappa r_2^2/2. \quad (3.3)$$

Trabajo de la fuerza de gravedad (o de Coulomb). Sea que la masa puntual (carga) se encuentra en el origen del vector r (fig. 39). Encontremos el trabajo de la fuerza de gravedad (de Coulomb) durante el desplazamiento de la partícula A desde el punto 1 hasta el punto 2 por un camino arbitrario. La fuerza que actúa sobre la partícula A puede ser representada como:

$$F = (\alpha/r^3) r,$$

$$\text{donde } \alpha = \begin{cases} -\gamma m_1 m_2, & \text{interacción de gravitación,} \\ kq_1 q_2, & \text{interacción de Coulomb.} \end{cases}$$

Primero calculamos el trabajo elemental de esta fuerza para el desplazamiento dr :

$$\delta W = F dr = (\alpha/r^3) r dr.$$

Como y en el caso anterior, el producto escalar $r dr = r dr$, por eso

$$\delta W = \alpha dr/r^3 = -d(\alpha/r).$$

Mas el trabajo de esta fuerza por todo el camino desde el punto 1 hasta el punto 2

$$W = - \int_1^2 d(\alpha/r) = \alpha/r_1 - \alpha/r_2. \quad (3.4)$$

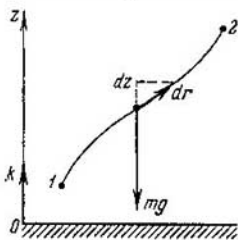


Fig. 40

Trabajo de la fuerza homogénea de gravedad $F = mg$. Escribimos esta fuerza como $F = -mgk$, donde k es el versor del eje vertical z , cuya dirección positiva se ha elegido hacia arriba (fig. 40).

El trabajo elemental de la fuerza de gravedad para el desplazamiento dr

$$\delta W = F dr = -mgk dr.$$

El producto escalar $k dr = (dr)_k$, donde $(dr)_k$ es la proyección de dr sobre el versor k , igual a dz , o sea, al incremento de la coordenada z . Por eso $k dr = dz$ y

$$\delta W = -mg dz = -d(mgz).$$

Mas el trabajo de la fuerza dada por todo el camino desde el punto 1 hasta el punto 2

$$W = - \int_1^2 d(mgz) = mg(z_1 - z_2). \quad (3.5)$$

Las fuerzas examinadas son interesantes a causa de que su trabajo, como se desprende de las fórmulas (3.3) o (3.5), no depende de la forma del camino entre los puntos 1 y 2, sino que sólo depende de la posición de éstos. Esta particularidad tan importante de las fuerzas dadas es inherente, sin embargo, no a todas las fuerzas. Por ejemplo, la fuerza de rozamiento no posee esta propiedad: el trabajo de esta fuerza depende no sólo de la posición de los puntos inicial y final, sino que también de la forma del camino entre ellos.

Hasta aquí se ha tratado el trabajo de una fuerza. Mas si en el proceso de movimiento actúan sobre la partícula varias fuerzas, la resultante de las cuales $F = F_1 + F_2 + \dots$, es fácil mostrar que el trabajo de la fuerza resultante F para cierto desplazamiento es igual a la suma algebraica de los trabajos, realizados por cada una de las fuerzas por separado por este mismo desplazamiento. Efectivamente,

$$W = \int (F_1 + F_2 + \dots) dr = \int F_1 dr + \int F_2 dr + \dots = W_1 + W_2 + \dots \quad (3.6)$$

Potencia. Para la caracterización de la velocidad, a la cual se realiza el trabajo, se introduce una magnitud denominada *potencia*. Potencia, por definición, es el trabajo realizado por una fuerza en la unidad de tiempo. Si en el intervalo de tiempo dt la fuerza F realiza el trabajo Fdr , entonces la potencia, desarrollada por esta fuerza en el momento de tiempo dado es $N = Fdr/dt$. Teniendo en cuenta que $dr/dt = v$, obtenemos

$$\boxed{N = Fv.} \quad (3.7)$$

De este modo, la potencia, desarrollada por la fuerza F , es igual al producto escalar del vector de fuerza por el

vector de velocidad, a la cual se mueve el punto de aplicación de la fuerza dada. Como el trabajo, la potencia es una magnitud algebraica.

Conociendo la potencia de la fuerza F se puede determinar el trabajo que realiza esta fuerza en el espacio de tiempo t . En efecto, representando la expresión bajo la integral en (3.2) como $Fdr = Fvdt = Ndt$, obtenemos

$$W = \int_0^t Ndt.$$

En calidad de ejemplo vean el problema 3.1.

En conclusión ponemos la atención en una circunstancia muy esencial. Cuando se habla de trabajo (o de potencia) es necesario indicar claramente o imaginarse en cada caso concreto, el trabajo *de qué fuerza precisamente* (o fuerzas) se tiene en cuenta. En caso contrario, como regla, son inevitables las equivocaciones.

§ 3.3. Campo potencial de fuerzas

La parte del espacio en cada punto del cual actúa una fuerza sobre la partícula que allí se encuentra, que varía con regularidad de punto a punto, denomínase campo de fuerzas, por ejemplo de la fuerza de gravedad de la Tierra o el campo de las fuerzas de resistencia en un flujo de líquido (de gas). Si la fuerza en cada punto del campo no depende del tiempo, este campo se llama *estacionario*. Evidentemente, que el campo de fuerzas, estacionario en un sistema de referencia, en otro, puede resultar ser no estacionario. La fuerza en un campo de fuerzas estacionario depende sólo de la posición de la partícula.

El trabajo que realizan las fuerzas de un campo durante el desplazamiento de una partícula desde el punto 1 al punto 2, depende, hablando en general, del camino. Sin embargo, entre los campos de fuerzas estacionarios hay tales en los cuales este trabajo no depende del camino entre los puntos 1 y 2. Esta clase de campos, teniendo una serie de propiedades muy importantes, ocupa un lugar especial en física. Pasamos al estudio de estas propiedades.

Definición: el campo de fuerzas estacionario en el cual el trabajo de la fuerza del campo por el camino entre dos puntos cualesquiera no depende de la forma del camino, sino que depende solamente de la posición de estos puntos, se denomina *potencial* y las mismas fuerzas, *conservativas*.

Si no se cumple esta condición, el campo de fuerzas no es potencial, y las fuerzas del campo denominanse no conservativas. A las últimas pertenece, por ejemplo, la fuerza de rozamiento (en caso general el trabajo de esta fuerza depende del camino).

En el problema 3.2 se cita un ejemplo de dos campos de fuerzas estacionarios, uno de los cuales es potencial y el otro no.

Mostremos que en un campo

potencial el trabajo de las fuerzas del campo por cualquier trayectoria cerrada es igual a cero. En realidad, cualquier trayectoria cerrada (fig. 41) se puede dividir arbitrariamente en dos partes: $1a2$ y $2b1$. Como el campo es potencial, según el planteamiento, $A_{12}^{(a)} = A_{12}^{(b)}$. Por otro lado, es evidente que $A_{12}^{(b)} = -A_{21}^{(b)}$. Por eso

$$A_{12}^{(a)} + A_{21}^{(b)} = A_{12}^{(a)} - A_{12}^{(b)} = 0,$$

lo que se exigía demostrar.

Al contrario, si el trabajo de las fuerzas del campo en cualquier trayectoria cerrada es igual a cero, el trabajo de estas fuerzas por la trayectoria entre dos puntos arbitrarios 1 y 2 no depende de la forma de ésta, es decir, el campo es potencial. Para la demostración tomemos dos trayectorias arbitrarias: $1a2$ y $1b2$ (fig. 41). De ellos componemos la trayectoria cerrada $1a2b1$. Según el planteamiento, el trabajo en esta trayectoria cerrada es igual a cero, es decir, $A_{12}^{(a)} + A_{21}^{(b)} = 0$. De aquí $A_{12}^{(a)} = -A_{21}^{(b)}$. Pero $A_{21}^{(b)} = -A_{12}^{(b)}$, por eso

$$A_{12}^{(a)} = A_{12}^{(b)}.$$

De ese modo, la igualdad a cero del trabajo de las fuerzas del campo por cualquier trayectoria cerrada es condición necesaria y suficiente de la independencia del trabajo de

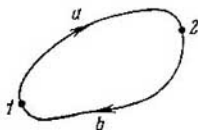


Fig. 41

la forma de la trayectoria y puede considerarse como el rasgo distintivo de cualquier campo de fuerzas.

Campo de fuerzas centrales. Cualquier campo de fuerzas se provoca por la acción de determinadas fuerzas. La fuerza que en un campo tal actúa sobre la partícula A , está condicionada por la interacción de esta partícula con los cuerpos dados. Las fuerzas que dependen solamente de la distancia entre las partículas en interacción y dirigidas por la recta que une estas partículas, denominase *centrales*.

Las fuerzas de gravedad, de Coulomb y elásticas son ejemplos de estas últimas.

La fuerza central, que actúa sobre la partícula A desde la partícula B , se puede presentar en aspecto general:

$$F = f(r) e_r, \quad (3.8)$$

donde $f(r)$ es una función, que con el carácter

dado de la interacción, depende sólo de r , o sea, de la distancia entre las partículas; e_r es un vector unitario que fija la dirección del radio vector de la partícula A con relación a la partícula B (fig. 42).

Demostremos que *cualquier campo estacionario de fuerzas centrales es potencial*.

Para esto hallemos primero el trabajo de las fuerzas centrales en el caso, cuando el campo de fuerza es provocado por la presencia de una partícula B inmóvil. El trabajo elemental de la fuerza (3.8) para el desplazamiento dr es $\delta W = F dr = f(r) e_r dr$. Como $e_r dr = dr$, o sea, la proyección del vector dr sobre el vector e_r , o sobre el radio vector r correspondiente (fig. 42), $\delta W = f(r) dr$. Mas el trabajo de esta fuerza por un camino arbitrario desde el punto 1 hasta el punto 2

$$W_{12} = \int_1^2 f(r) dr.$$

La expresión obtenida depende, evidentemente sólo del tipo de la función $f(r)$, es decir, del carácter de la

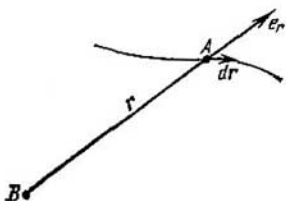


Fig. 42

interacción y de los valores de r_1 y r_2 , o sea, de las distancias inicial y final entre las partículas A y B . No depende de ningún modo de la forma del camino. Y esto significa que el campo de fuerzas dado es potencial.

Generalicemos el resultado obtenido en el campo de fuerzas estacionario, provocado por la presencia de un conjunto de partículas inmóviles que actúan sobre la partícula A con las fuerzas F_1, F_2, \dots , cada una de las cuales es central. En este caso, el trabajo de la fuerza resultante al desplazar la partícula A desde un punto a otro es igual a la suma algebraica de los trabajos de las fuerzas aisladas. Y como el trabajo de cada una de estas fuerzas no depende de la forma del camino, el trabajo de la fuerza resultante tampoco depende de ella.

De ese modo, en realidad, cualquier campo estacionario de fuerzas centrales es potencial.

Energía potencial de la partícula en el campo. La circunstancia de que el trabajo de las fuerzas del campo potencial depende solamente de las posiciones inicial y final de la partícula, da la posibilidad de introducir el concepto extraordinariamente importante de energía potencial.

Imaginemos que desplazamos una partícula por un campo potencial de fuerzas de diferentes puntos P_i a un punto fijado O . Como el trabajo de las fuerzas del campo no depende de la forma del camino, entonces queda sólo su dependencia de la posición del punto P (para el punto fijado O). Esto significa, que el trabajo será cierta función del radio vector r del punto P .

Designando esta función por $U(r)$, escribamos

$$W_{PO} = \int_P^O \mathbf{F} d\mathbf{r} = U(r). \quad (3.9)$$

La función $U(r)$ se denomina *energía potencial* de la partícula en el campo dado.

Ahora determinemos el trabajo de las fuerzas del campo durante el desplazamiento de una partícula desde el punto 1 al punto 2 (fig. 43). Ya que el trabajo no depende del camino, elegimos la trayectoria que pasa por el punto O . Entonces el trabajo en el camino $1O2$ puede ser presentado como

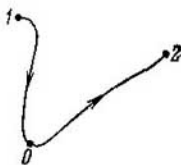
$$W_{12} = W_{1O} + W_{O2} = W_{1O} - W_{2O},$$

o teniendo en cuenta (3.9)

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \, dr = U_1 - U_2. \quad (3.10)$$

La expresión a la derecha es el *decremento* *) de la energía potencial, es decir, la diferencia de los valores de la energía potencial de la partícula en los puntos inicial y final del camino.

De ese modo, *el trabajo de las fuerzas del campo en el camino 1 — 2 es igual al decremento de la energía potencial de la partícula en el campo dado.*



Fir. 43

Es evidente, que a la partícula situada en el punto O del campo, siempre se le puede aducir cualquier valor elegido de antemano de la energía potencial. Esto corresponde a la circunstancia de que mediante mediciones del trabajo puede ser determinada solamente la diferencia de las energías potenciales en dos puntos del campo, pero no su valor

absoluto. Sin embargo, en cuanto es fijada la energía potencial en algún punto, sus valores en todos los demás puntos del campo se determinan de modo unívoco por la fórmula (3.10).

La fórmula (3.10) da la posibilidad de encontrar la expresión $U(r)$ para cualquier campo potencial de fuerzas.

*) La variación de alguna magnitud X se puede caracterizar o por su *incremento*, o por el *decremento*. Incremento de la magnitud X denominan la diferencia de los valores final (X_2) e inicial (X_1) de esta magnitud:

$$\text{incremento } \Delta X = X_2 - X_1.$$

Decremento de la magnitud X denominan la diferencia de sus valores inicial (X_1) y final (X_2):

$$\text{decremento } X_1 - X_2 = -\Delta X,$$

es decir, el decremento de la magnitud X es igual a su incremento, tomado con signo contrario.

El incremento y decremento son magnitudes *algebraicas*: si $X_2 > X_1$, entonces el incremento es positivo y el decremento negativo y a la inversa.

Para esto es suficiente calcular el trabajo realizado por las fuerzas del campo en cualquier camino entre dos puntos, y presentarlo como el decremento de cierta función, que es precisamente la energía potencial $U(r)$.

De este modo se hizo durante el cálculo del trabajo en los campos de las fuerzas elásticas y de gravedad (de Coulomb) y también en el campo homogéneo de gravedad [véanse las fórmulas (3.3) — (3.5)]. Inmediatamente de estas fórmulas se ve que la energía potencial de una partícula en los campos de fuerzas dados tiene el siguiente aspecto:

1) en un campo de fuerzas elásticas

$$U(r) = \kappa r^2/2; \quad (3.11)$$

2) en un campo de una masa puntual (una carga)

$$U(r) = \alpha/r; \quad (3.12)$$

donde $\alpha = \begin{cases} -\gamma m_1 m_2, & \text{interacción de gravitación,} \\ kq_1 q_2, & \text{interacción de Coulomb;} \end{cases}$

3) en un campo homogéneo de fuerzas de gravedad

$$U(z) = mgz. \quad (3.13)$$

Una vez más subrayamos que la energía potencial U es una función que se determina con exactitud salvo la adición de cierta constante arbitraria. Sin embargo, esta circunstancia no tiene en absoluto importancia, ya que en todas las fórmulas entra solamente la diferencia de los valores U en dos posiciones de la partícula. Por eso, la constante arbitraria, igual para todos los puntos del campo, se elimina. En relación con esto, generalmente se omite, lo que se hizo en las tres expresiones anteriores.

Otra importante circunstancia más. La energía potencial se debe referir no a la partícula, sino al sistema de partículas que interactúan con los campos que provocan el campo de fuerzas. Para el carácter dado de interacción la energía potencial de interacción de la partícula con los cuerpos dados depende sólo de la posición de ésta respecto a estos cuerpos.

Energía potencial y fuerza del campo. La interacción de una partícula con los cuerpos circundantes se puede describir por dos procedimientos: con ayuda de las fuerzas o mediante la energía potencial. Ambos procedimientos

se emplean en la mecánica clásica con igual amplitud. Sin embargo, el primer procedimiento es algo más general, ya que también es aplicable a las fuerzas para las cuales no es posible introducir la energía potencial (por ejemplo, las fuerzas de rozamiento). En lo que se refiere al segundo procedimiento, éste es sólo aplicable para las fuerzas conservativas.

Nuestro problema consiste en establecer la relación entre la energía potencial y la fuerza del campo, con más precisión, determinar el campo de fuerzas $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ según la energía potencial dada $U(\mathbf{r})$ como función de la posición de la partícula en el campo.

Nosotros ya sabemos que durante el desplazamiento de una partícula desde un punto del campo potencial a otro, el trabajo que realizan las fuerzas del campo puede ser representado como el decremento de la energía potencial de la partícula, es decir, $W_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U$. Esto se refiere también al desplazamiento elemental $d\mathbf{r}$: $\delta W = -dU$, o bien

$$\mathbf{F} d\mathbf{r} = -dU. \quad (3.14)$$

Teniendo en cuenta [véase la fórmula (3.1)] que $\mathbf{F} d\mathbf{r} = F_s ds$, donde $ds = |d\mathbf{r}|$ es el camino elemental, F_s es la proyección del vector \mathbf{F} sobre el desplazamiento $d\mathbf{r}$, escribimos la ecuación (3.14) en la forma

$$F_s ds = -dU,$$

donde $-dU$ es el decremento de la energía potencial en la dirección de desplazamiento $d\mathbf{r}$. De aquí

$$F_s = -\partial U / \partial s, \quad (3.15)$$

es decir, la proyección de la fuerza del campo, del vector \mathbf{F} , en el punto dado sobre la dirección de desplazamiento $d\mathbf{r}$ es igual a la derivada de la energía potencial U por la dirección dada con el signo contrario. El símbolo $\partial/\partial s$, la derivada *parcial*, subraya que la derivada se toma en *determinada dirección*.

Podemos tomar el desplazamiento $d\mathbf{r}$ en cualquier dirección y, en particular a lo largo de los ejes de coordenadas x, y, z . Si el desplazamiento $d\mathbf{r}$, por ejemplo, es paralelo al eje x , puede ser representado así: $d\mathbf{r} = i dx$, donde i es el versor del eje x , dx es el incremento de la coordenada x . Entonces el trabajo de la fuerza \mathbf{F} por el

desplazamiento dr , paralelo al eje x , será

$$Fdr = Fidx = F_x dx,$$

donde F_x es la proyección del vector F sobre el versor i (y no sobre el desplazamiento dr , como en el caso de F_s).

Sustituyendo la última expresión en la ecuación (3.14), obtenemos

$$F_x = -\partial U/\partial x,$$

donde el símbolo de la derivada parcial significa, que $U(x, y, z)$ durante la diferenciación debe considerarse como función sólo del argumento x , permaneciendo constantes los demás argumentos. Es evidente, que las ecuaciones para las proyecciones F_y y F_z serán análogas a la ecuación para F_x .

Así, tomando las derivadas parciales de la función U conforme a x , y y z con signos contrarios, hallamos las proyecciones F_x , F_y y F_z del vector F sobre los versores i , j y k . De aquí se encuentra también fácilmente el mismo vector: $F = F_x i + F_y j + F_z k$, o

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k\right).$$

A la magnitud que está entre paréntesis denomínase *gradiente de la función escalar U* y se designa por $\text{grad } U$ o ∇U . Nosotros vamos a emplear la segunda designación más cómoda, donde ∇ («nabla») es un vector simbólico o operador

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Por eso, formalmente ∇U se puede considerar como el producto del vector simbólico ∇ por el escalar U .

De ese modo, la relación entre la fuerza del campo y la energía potencial, como función de las coordenadas, se puede presentar en el aspecto compacto siguiente:

$$\boxed{F = -\nabla U,} \quad (3.16)$$

es decir, la fuerza del campo F es igual con signo menos al gradiente de la energía potencial de la partícula en el punto dado del campo. Esto se puede expresar con mayor sim-

pleza: la fuerza del campo F es igual al *antigradiente* de la energía potencial. La última fórmula da la posibilidad, conociendo la función $U(r)$, de restablecer el campo de fuerzas $F(r)$.

Ejemplo. La energía potencial de una partícula en cierto campo tiene el aspecto:

a) $U(x, y) = -\alpha xy$, donde α es una constante;

b) $U(r) = ar$, donde a es un vector constante, r es el radio vector de un punto del campo.

Encontremos el campo de fuerzas correspondiente a cada caso:

$$a) F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j\right) = \alpha(yi + xj);$$

b) primero representemos la función U como $U = a_x r + a_y y + a_z z$; entonces,

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k\right) = -(a_x i + a_y j + a_z k) = -a.$$

El sentido del gradiente será más evidente y claro, si se introduce el concepto de *superficie equipotencial*, es decir, de la superficie en todos

los puntos de la cual la energía potencial U tiene el mismo valor. Es evidente, que a cada valor de U corresponde su superficie equipotencial.

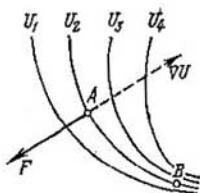


Fig. 44

De la fórmula (3.15) se deduce que la proyección del vector F sobre cualquier dirección, tangente a la superficie equipotencial en el punto dado, es igual a cero. Esto significa que el vector

F es normal a la superficie equipotencial en el punto dado. Luego, tomamos el desplazamiento ds en dirección a la disminución de U , entonces $\partial U < 0$, y, según (3.15), $F_s > 0$, es decir, el vector F se dirige hacia la disminución de U . Y como la dirección de F es contraria a la del vector ∇U , llegamos a la deducción de que el gradiente U es un vector dirigido por la normal a la superficie equipotencial en dirección al aumento de la energía potencial U .

La fig. 44, que se refiere a un caso bidimensional, aclara lo dicho. En ella se representa un sistema de equipotenciales ($U_1 < U_2 < U_3 < U_4$), así como el gradiente de

la energía potencial ∇U y el vector correspondiente de la fuerza \mathbf{F} en el punto A del campo. Es útil reflexionar, cuáles serán los vectores de estas dos magnitudes, por ejemplo, en el punto B del campo dado.

En conclusión indiquemos que se puede hablar del gradiente no sólo de la función U , sino también de cualquier otra función escalar de las coordenadas. El concepto de gradiente se usa ampliamente en las más diferentes partes de la física.

Concepto de campo. La experiencia muestra que en el caso de interacciones de gravitación y electrostáticas la fuerza \mathbf{F} , que actúa sobre la partícula A del lado de los cuerpos circundantes (del sistema B), es proporcional a la masa (o a la carga) de la partícula A . Con otras palabras, la fuerza \mathbf{F} puede ser presentada como el producto de dos magnitudes:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{G}, \quad (3.17)$$

donde m es la masa (o la carga) de la partícula A , \mathbf{G} es cierto vector que depende tanto de la posición de la partícula A , como de las propiedades de los cuerpos circundantes, es decir, del sistema B .

Esto abre la posibilidad de otra interpretación física de la interacción ligada con el concepto de campo. A saber: en este caso se dice, que el sistema B crea en el espacio circundante *un campo*, caracterizado por el vector $\mathbf{G}(\mathbf{r})$. O de otro modo, se considera que en cada punto del espacio el sistema B , o sea, la fuente del campo, crea tales condiciones (el vector \mathbf{G}), con las cuales la partícula, ubicada en estos puntos, experimenta la acción de la fuerza (3.17). Con ello, consideran que el campo (el vector \mathbf{G}) existe independientemente de la presencia de la partícula A .*).

El vector \mathbf{G} se denomina *intensidad del campo*.

Una de las propiedades más importantes de los campos consiste en que el campo formado por varias fuentes, es igual a la suma de los campos creados por cada una

*) Mientras permanecemos en los límites del ámbito de estática, el concepto de campo puede considerarse puramente convencional (formal), introducido solamente para la comodidad de descripción de los fenómenos. Sin embargo, al pasar a campos variables se aclara que el concepto de campo tiene un sentido físico profundo: *el campo es una realidad física.*

de ellas. Con mayor exactitud, digamos que la intensidad G del campo resultante en un punto arbitrario

$$G = \sum G_i \quad (3.18)$$

donde G_i es la intensidad del campo de la i -ésima fuente en un mismo punto. Esta fórmula expresa el llamado *principio de superposición* de los campos.

Ahora retornemos a la energía potencial de una partícula. Según (3.17), la fórmula (3.14) se puede escribir así: $mGdr = -dU$. Dividiendo ambos miembros por m y designando $U/m = \varphi$, obtenemos

$$Gdr = -d\varphi, \quad (3.19)$$

o

$$\int_1^2 G dr = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.20)$$

La función $\varphi(r)$ denomínase *potencial del campo* en el punto con radio vector r .

La fórmula (3.20) ofrece la posibilidad de encontrar el potencial de cualquier campo de gravitación o electrostático. Para esto es suficiente calcular la integral $\int Gdr$ conforme a la trayectoria arbitraria entre los puntos 1 y 2 y después representar la expresión obtenida como el decremento de cierta función, que es precisamente el potencial $\varphi(r)$. Así, los potenciales del campo de gravitación de la masa puntual m y del campo de Coulomb de la carga puntual q se determinan, según (3.12), por las fórmulas

$$\varphi_{gr} = -\gamma m/r, \quad \varphi_C = kq/r. \quad (3.21)$$

Señalemos, que el potencial φ , como la energía potencial, puede ser determinado solamente con exactitud salvo la adición de cierta constante arbitraria, que tampoco tiene en absoluto importancia. Por eso generalmente la omiten.

Así, el campo puede describirse o en forma vectorial $G(r)$, o bien escalar $\varphi(r)$. Ambos procedimientos son adecuados. Más prácticamente resulta que el segundo procedimiento de descripción del campo (con ayuda del potencial φ) en la mayoría de los casos es mucho más cómodo por la siguiente causa.

1) Conocido $\varphi(\mathbf{r})$, se puede calcular inmediatamente la energía potencial U y el trabajo de las fuerzas del campo W :

$$U = m\varphi, \quad W_{12} = m(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.22)$$

2. En lugar de las tres componentes de la función vectorial $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ es más sencillo fijar la función escalar $\varphi(\mathbf{r})$.

3. Cuando el campo se crea por muchas fuentes, es más fácil calcular el potencial φ que el vector \mathbf{G} : los potenciales son escalares, se pueden con facilidad sumar, no prestando atención a la dirección de las fuerzas. En realidad, según (3.18) y (3.19), $\mathbf{G}d\mathbf{r} = \sum (\mathbf{G}_i d\mathbf{r}) = -\sum d\varphi_i = -d\sum\varphi_i = -d\varphi$, es decir,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum \varphi_i(\mathbf{r}), \quad (3.23)$$

donde φ_i es el potencial creado por la i -ésima partícula en el punto dado del campo.

4. Y finalmente, conociendo la función $\varphi(\mathbf{r})$, se puede restablecer fácilmente el campo $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ como el antigradiente del potencial φ .

$$\mathbf{G} = -\nabla\varphi. \quad (3.24)$$

Esta fórmula se deduce directamente de (3.16).

En conclusión examinemos un ejemplo sobre la determinación del potencial de un campo de fuerzas centrífugas de inercia.

Ejemplo. Encontramos la intensidad \mathbf{G} y el potencial φ_{cen} de un campo de fuerzas centrífugas de inercia de un sistema de referencia, que gira alrededor de un eje fijo a la velocidad angular constante ω .

La intensidad $\mathbf{G} = F_{\text{cen}}/m = \omega^2\rho$, donde ρ es el radio vector del punto del campo respecto al eje de rotación.

Ahora, según (3.20), hallamos la integral de \mathbf{G} conforme al camino desde el punto 1 hasta el punto 2:

$$\int_1^2 \mathbf{G} d\mathbf{r} = \omega^2 \int_1^2 \rho d\mathbf{r} = \omega^2 \int_1^2 \rho d\rho = \omega^2 (\rho_2^2 - \rho_1^2)/2.$$

Vemos que esta integral no depende de la forma de la trayectoria entre los puntos 1 y 2, sino que es sólo función de la posición de los puntos dados. Esto significa que el campo de fuerzas considerado es potencial.

De la comparación del resultado obtenido con (3.20) se deduce, que

$$\varphi_{cen} = -\omega^2 \rho^2 / 2. \quad (3.25)$$

En la fig. 45 se muestra el gráfico de la dependencia entre φ_{cen} y la distancia ρ hasta el eje de rotación. En ésta también se muestra

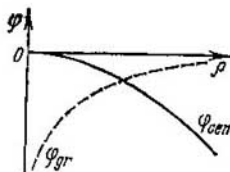


Fig. 45

para comparar el gráfico del potencial $\varphi_{gr}(\rho)$ del campo de gravitación de la masa puntual que se encuentra en el punto $\rho = 0$.

§ 3.4. Energía mecánica de la partícula en el campo

Energía cinética. Sea que una partícula de masa m se mueve bajo la acción de cierta fuerza \mathbf{F} (en caso general la fuerza \mathbf{F} puede ser la resultante de varias fuerzas). Encontramos el trabajo elemental que realiza esta fuerza por el desplazamiento elemental $d\mathbf{r}$. Teniendo en cuenta que $\mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt$ y $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$, escribimos

$$\delta W = \mathbf{F} d\mathbf{r} = m \mathbf{v} d\mathbf{v}.$$

El producto escalar $\mathbf{v} d\mathbf{v} = v (d\mathbf{v})_{\mathbf{v}}$, donde $(d\mathbf{v})_{\mathbf{v}}$ es la proyección del vector $d\mathbf{v}$ sobre la dirección del vector \mathbf{v} . Esta proyección es igual a dv , o sea, al incremento del módulo del vector de velocidad. Por eso, $\mathbf{v} d\mathbf{v} = v dv$ y el trabajo elemental

$$\delta W = m v dv = d(mv^2/2).$$

De aquí se ve que el trabajo de la fuerza resultante \mathbf{F} incrementa a cierta magnitud (que está entre paréntesis), denominada *energía cinética*:

$$\boxed{T = mv^2/2.} \quad (3.26)$$

De ese modo, el incremento de la energía cinética de la partícula con un desplazamiento elemental, es igual a

$$dT = \delta W, \quad (3.27)$$

y con el desplazamiento final del punto 1 al 2

$$\boxed{T_2 - T_1 = W_{12},} \quad (3.28)$$

es decir, *el incremento de la energía cinética de una partícula por cierto desplazamiento es igual a la suma algebraica de los trabajos de todas las fuerzas, que actúan sobre la partícula durante este mismo desplazamiento.* Si $W_{12} > 0$, entonces $T_2 > T_1$, o sea, la energía cinética de la partícula aumenta; mas si $W_{12} < 0$, la energía cinética disminuye.

La ecuación (3.27) se puede presentar, además en otra forma, dividiendo ambos miembros por el intervalo de tiempo dt correspondiente:

$$\boxed{dT/dt = Fv = N.} \quad (3.29)$$

Esto significa, que la derivada de la energía cinética de una partícula conforme al tiempo es igual a la potencia N de la fuerza resultante F , que actúa sobre la partícula.

Las ecuaciones (3.28) y (3.29) son justas en los sistemas inerciales y no inerciales de referencia. En los últimos, además de las fuerzas que actúan sobre la partícula considerada desde ciertos cuerpos (las fuerzas de interacción), es necesario tener en cuenta también las fuerzas de inercia. Por eso, en estas ecuaciones se debe entender por trabajo (potencia) la suma algebraica de los trabajos (de las potencias) tanto de las fuerzas de interacción, asimismo como de las fuerzas de inercia.

Energía mecánica total de una partícula. Según (3.27), el incremento de la energía cinética de una partícula es igual al trabajo elemental de la fuerza resultante F de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. ¿Qué fuerzas son éstas? Si la partícula se encuentra en el campo potencial que nos interesa, sobre ella actúa la fuerza conservativa F_c desde este campo potencial. Además, sobre la partícula pueden actuar también otras fuerzas que tienen otro origen. Denominémoslas *fuerzas extrañas* F_{ex} .

De ese modo, la resultante \vec{F} de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, puede ser presentada como $\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{ex}$. El trabajo de todas estas fuerzas incrementa la energía cinética de la partícula:

$$dT = \delta W_c + \delta W_{ex}.$$

Según (3.14), el trabajo de las fuerzas del campo es igual al decremento de la energía potencial de la partícula, es decir, $\delta W_c = -dU$. Sustituyendo esta expresión en la anterior y pasando el miembro dU a la izquierda, obtenemos

$$dT + dU = d(T + U) = \delta W_{ex}.$$

De aquí se desprende que el trabajo de las fuerzas extrañas incrementa la magnitud $T + U$. Esta magnitud, o sea, la suma de la energía cinética y potencial, la denominan *energía mecánica total de la partícula en el campo*:

$$\boxed{E = T + U.} \quad (3.30)$$

Señalemos, que la energía mecánica total E , como la potencial, se determina con exactitud salvo la adición de una constante arbitraria de poca importancia.

Así, el incremento de la energía mecánica total de la partícula por un desplazamiento elemental, es igual a

$$dE = \delta W_{ex} \quad (3.31)$$

y por el desplazamiento final desde el punto 1 hasta el 2

$$\boxed{E_2 - E_1 = W_{ex},} \quad (3.32)$$

es decir, *el incremento de la energía mecánica total de una partícula por cierto recorrido es igual a la suma algebraica de los trabajos de todas las fuerzas extrañas que actúan sobre la partícula por este mismo recorrido*. Si $W_{ex} > 0$, la energía mecánica total de la partícula aumenta, si $W_{ex} < 0$, disminuye.

Ejemplo. Desde un precipicio de altura h lanzamos a la superficie de un lago un cuerpo de masa m a una velocidad v_0 .

Determinar el trabajo que realizaron las fuerzas de resistencia provocadas por el aire, si el cuerpo cayó sobre la superficie del agua a una velocidad v .

Si el movimiento del cuerpo se considera en el campo de gravedad de la Tierra, la fuerza de resistencia del aire será extraña y, según la ecuación (3.32), el trabajo buscado $W_{\text{res}} = E_2 - E_1 = mv^2/2 - (mv_0^2/2 + mgh)$, o bien

$$W_{\text{res}} = m(v^2 - v_0^2)/2 - mgh.$$

La magnitud obtenida puede resultar no sólo negativa, sino también positiva (esto depende, por ejemplo, del carácter del viento en el proceso de la caída del cuerpo).

La ecuación (3.31) se puede presentar, además en otra forma, si se divide sus dos miembros por el intervalo de tiempo dt correspondiente. Entonces

$$\boxed{dE/dt = F_{\text{ex}}v.} \quad (3.33)$$

Esto significa, que la derivada de la energía mecánica total de la partícula conforme al tiempo es igual a la potencia resultante de todas las fuerzas extrañas que actúan sobre ella.

Así, establecimos que la energía mecánica total de la partícula sólo puede variar bajo la acción de fuerzas extrañas. De aquí se deriva directamente la *ley de conservación* de la energía mecánica total de la partícula en un campo externo:

Si no hay fuerzas extrañas o éstas son tales que la suma algebraica de sus potencias es igual a cero en el intervalo de tiempo que nos interesa, entonces la energía mecánica total de la partícula permanece constante durante dicho tiempo. Con otras palabras,

$$E = T + U = \text{const.},$$

o bien

$$\boxed{mv^2/2 + U(r) = \text{const.}} \quad (3.34)$$

La ley de conservación dada ya en esta simplísima forma permite obtener con bastante facilidad la respuesta a una serie de importantes problemas sin utilización de las ecuaciones de movimiento, que, como sabemos, con frecuencia van unidas a cálculos voluminosos y fatigosos. Precisamente ésta circunstancia transforma las leyes de conservación en un instrumento muy eficaz de investigación:

Ilustremos las posibilidades y ventajas, que da el empleo de la ley de conservación (3.34), con el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sea que una partícula se mueve en el campo potencial homogéneo $U(x)$ mostrado en la fig. 46. Si las fuerzas extrañas están ausentes, la energía mecánica total de la partícula en el campo dado, es decir, E , no varía en el proceso de movimiento, y nosotros podemos resolver simplemente, por ejemplo, los problemas tales como:

1) Determinar, sin resolver la ecuación fundamental de dinámica, $v(x)$, la velocidad de la partícula en dependencia de sus coordenadas. Para esto es suficiente conocer, según la ecuación (3.34),

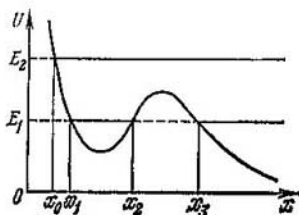


Fig 46

el aspecto concreto de la curva de potencial $U(x)$ y el valor de la energía total E (el segundo miembro de la ecuación dada).

2. Establecer la zona de variación de la coordenada x de la partícula, en la cual ella puede encontrarse con el valor prefijado de la energía total E . Es evidente, que en la zona, donde $U > E$, la partícula no puede penetrar, ya que la energía potencial U de ésta no puede superar su energía total. De inmediato, de aquí se deduce que cuando $E = E_1$ (fig. 46) la partícula puede moverse en la zona entre las coordenadas x_1 y x_3 (realiza oscilaciones) o a la derecha de la coordenada x_3 . Mas la partícula no puede pasar de la primera a la segunda zona (o a la inversa): a esto se opone la barrera de potencial que divide estas dos zonas. Indiquemos, que cuando la partícula se mueve en una zona limitada del campo, dicen, que ella está bloqueada en un pozo de potencial (en nuestro caso, entre x_1 y x_3).

De otro modo se comporta la partícula cuando $E = E_2$ (fig. 46): para ella es accesible toda la zona a la derecha de x_0 . Si la partícula en el momento inicial se encontraba en el punto x_0 , a continuación se moverá a la derecha. Es útil observar individualmente cómo variará con ello la energía cinética de la partícula en dependencia de su posición x .

§ 3.5. Ley de conservación de la energía de un sistema

Hasta aquí nos limitamos al estudio del comportamiento de *una* partícula desde el punto de vista energético. Ahora pasamos al *sistema de partículas*. Este puede ser cualquier cuerpo, gas, cualquier mecanismo, el Sistema Solar, etc.

En caso general las partículas del sistema pueden interaccionar tanto entre sí, como y con los cuerpos que no entran en el sistema dado. El sistema de partículas, sobre el cual no actúan ningunos cuerpos extraños (o su influencia es despreciable por su pequeñez), se denomina *cerrado* (o aislado). El concepto de sistema cerrado es la generalización natural de la noción de punto material aislado y juega un importante papel en física.

Energía potencial del sistema. Examinemos un sistema cerrado, entre cuyas partículas actúan sólo fuerzas centrales, es decir, fuerzas que dependen, con el carácter dado de la interacción, sólo de la distancia entre ellas y que están dirigidas por la recta, que une las partículas.

Demostremos, que en cualquier sistema de referencia el trabajo de todas estas fuerzas durante el paso del sistema de partículas de una a otra posición, puede ser presentado como el decremento de cierta función que depende, con el carácter de interacción dado, sólo de la configuración del mismo sistema o de la disposición relativa de sus partículas. Esta función denominase energía potencial *propia* del sistema (a diferencia de la energía potencial que caracteriza la interacción del sistema dado con otros cuerpos).

Primero tomemos un sistema de dos partículas. Calculemos el trabajo elemental de las fuerzas, con las cuales estas partículas interaccionan entre sí. Sea que la posición de las partículas en cierto momento de tiempo se determina en un sistema arbitrario de referencia por los radios vectores r_1 y r_2 . Si las partículas realizaron en el tiempo dt los desplazamientos dr_1 y dr_2 respectivamente, entonces el trabajo de las fuerzas de interacción F_{12} y F_{21} es igual a

$$\delta W_{1,2} = F_{12}dr_1 + F_{21}dr_2.$$

Ahora tomamos en cuenta que, según la tercera ley de Newton, $F_{21} = -F_{12}$, por eso la expresión anterior se puede escribir así:

$$\delta W_{1,2} = F_{12} (dr_1 - dr_2).$$

Introduzcamos el vector $r_{12} = r_1 - r_2$ que caracteriza la posición de la primera partícula con relación a la segunda. Entonces $dr_{12} = dr_1 - dr_2$ y después de la sustitución en la expresión para el trabajo obtenemos

$$\delta W_{1,2} = F_{12} dr_{12}.$$

La fuerza F_{12} es central, por eso el trabajo de ella es igual al decremento de la energía potencial de interacción del par dado de partículas, es decir,

$$\delta W_{1,2} = -dU_{12}.$$

Como la función U_{12} depende solamente de la distancia r_{12} entre las partículas, es evidente que el trabajo $\delta W_{1,2}$ no depende de la elección del sistema de referencia.

Ahora recurrimos a un sistema de tres partículas (el resultado obtenido en este caso se generaliza también fácilmente para un sistema de un número arbitrario de partículas). El trabajo elemental, que realizan todas las fuerzas de interacción con el desplazamiento elemental de todas las partículas, puede ser presentado como la suma de los trabajos elementales de los tres pares de interacciones, es decir, $\delta W = \delta W_{1,2} + \delta W_{1,3} + \delta W_{2,3}$. Pero para cada par de interacciones, como fue mostrado, $\delta W_{i,k} = -dU_{ik}$, por eso

$$\delta W = -d(U_{12} + U_{13} + U_{23}) = -dU,$$

donde la función U es la *energía potencial propia* del sistema dado de partículas:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23}.$$

Como cada sumando de este total depende de la distancia entre las partículas correspondientes, entonces evidentemente, la energía potencial propia U del sistema dado depende de la disposición relativa de las partículas (en un mismo momento), o con otras palabras, de la configuración del sistema.

Está claro, que semejantes razonamientos son justos para los sistemas de cualquier número de partículas. Por

éso se puede afirmar que a cada configuración de un sistema arbitrario de partículas le es inherente su energía potencial propia U , y que el trabajo de todas las fuerzas centrales internas, al variar esta configuración es igual al decremento de la energía potencial propia del sistema, es decir,

$$\delta W = -dU, \quad (3.35)$$

y con el desplazamiento final de todas las partículas del sistema

$$W = U_1 - U_2, \quad (3.36)$$

donde U_1 y U_2 son los valores de la energía potencial del sistema en los estados inicial y final.

La energía potencial propia del sistema U es una magnitud *no aditiva*, es decir, en caso general no es igual a la suma de las energías potenciales propias de sus partes. Además, es necesario tomar en cuenta la energía potencial de interacción U_{int} de las partes aisladas del sistema:

$$U = \sum U_n + U_{\text{int}}, \quad (3.37)$$

donde U_n es la energía potencial propia de la n -ésima parte del sistema.

También se debe tener en cuenta, que la energía potencial propia del sistema, como y la energía potencial de interacción de cada par de partículas, se determina con exactitud salvo la adición de una constante arbitraria que, además, aquí no tiene por completo importancia.

En conclusión citaremos algunas fórmulas útiles para el cálculo de la energía potencial propia del sistema. Ante todo mostremos que esta energía puede ser representada como

$$U = \frac{1}{2} \sum U_i, \quad (3.38)$$

donde U_i es la energía potencial de interacción de la i -ésima partícula con todas las demás del sistema. Aquí se toma la suma según todas las partículas del sistema.

Primero cerciorémonos de la justeza de esta fórmula para el sistema de tres partículas. Anteriormente fue demostrado que la energía potencial propia del sistema dado $U = U_{12} + U_{13} + U_{23}$. Transformemos esta suma del siguiente modo. Presentemos cada sumando U_{1h} en

forma simétrica: $U_{ik} = (U_{ik} + U_{ki})/2$, pues es evidente que $U_{ik} = U_{ki}$. Entonces

$$U = 1/2 (U_{12} + U_{21} + U_{13} + U_{31} + U_{23} + U_{32}).$$

Agrupamos los miembros con el primer índice igual:

$U = 1/2 [(U_{12} + U_{13}) + (U_{21} + U_{23}) + (U_{31} + U_{32})]$.
Cada suma entre paréntesis representa la energía potencial U_i de interacción de la i -ésima partícula con las dos restantes. Por eso la última expresión se puede escribir así:

$$U = 1/2 (U_1 + U_2 + U_3) = 1/2 \sum_{i=1}^3 U_i,$$

lo que corresponde completamente a la fórmula (3.38).

La generalización del resultado obtenido para un sistema arbitrario es evidente, pues está claro, que razonamientos semejantes no dependen en absoluto del número de partículas que constituyen el sistema.

Para un sistema, en el que la interacción entre las partículas tiene carácter de gravitación o de Coulomb, la fórmula (3.38) se puede transformar a otro tipo, haciendo uso del concepto de potencial. Sustituyamos en (3.38) la energía potencial de la i -ésima partícula por la expresión $U_i = m_i \varphi_i$, donde m_i es la masa (la carga) de la i -ésima partícula y φ_i , el potencial creado por todas las partículas restantes del sistema en el punto en que se encuentra la i -ésima partícula. Entonces

$$U = 1/2 \sum m_i \varphi_i. \quad (3.39)$$

Si las masas (las cargas) en el sistema están distribuidas de modo continuo, entonces la suma se reduce a la integración:

$$U = 1/2 \int \varphi dm = 1/2 \int \varphi \rho dV, \quad (3.40)$$

donde ρ es la densidad volumétrica de la masa (de la carga), dV es el volumen elemental. Aquí la integración se realiza por todo el volumen ocupado por las masas (las cargas).

En calidad de ejemplo del empleo de la última fórmula puede servir el problema 3.11, en el cual se realiza el cálculo de la energía potencial propia de interacción de gravitación de las masas, distribuidas por una esfera y por el volumen de un globo.

Energía cinética de un sistema. Examinemos en cierto sistema de referencia a un sistema arbitrario de partículas. Supongamos que la i -ésima partícula del sistema tiene en un momento dado una energía cinética T_i . El incremento de la energía cinética de cada partícula es igual, según (3.26), al trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre esta partícula: $dT_i = \delta W_i$. Encontramos el trabajo elemental que realizan todas las fuerzas, que actúan sobre todas las partículas del sistema:

$$\delta W = \sum \delta W_i = \sum dT_i = d \sum T_i = dT,$$

donde $T = \sum T_i$ es la energía cinética sumaria del sistema. Indiquemos, que la energía cinética del sistema es una magnitud *aditiva*: es igual a la suma de las energías cinéticas de las partes aisladas del sistema independientemente de si ellas interaccionen entre sí o no.

Así, *el incremento de la energía cinética de un sistema es igual al trabajo que realizan todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas del sistema.* Con el desplazamiento elemental de todas las partículas

$$dT = \delta W, \quad (3.41)$$

y con el desplazamiento final

$$\boxed{T_2 - T_1 = W.} \quad (3.42)$$

La ecuación (3.41) se puede presentar también en otra forma, dividiendo sus dos miembros por el intervalo de tiempo dt correspondiente. Teniendo con ello en cuenta que $\delta W_i = \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i dt$, obtenemos

$$\boxed{dT/dt = \sum \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i,} \quad (3.43)$$

es decir, *la derivada de la energía cinética del sistema conforme al tiempo es igual a la potencia sumaria de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas del sistema.*

Las ecuaciones (3.41) — (3.43) son justas tanto en los sistemas inerciales de referencia, como en los no inerciales. Solamente se debe recordar que en los sistemas no inerciales además del trabajo de las fuerzas de interacción es necesario tener asimismo en cuenta el trabajo de las fuerzas de inercia.

Clasificación de las fuerzas. Sabemos, que las partículas del sistema considerado pueden interaccionar tanto entre sí, como también con los cuerpos que no entran en el sistema dado. En correspondencia con esto, las fuerzas de interacción entre las partículas las denominan *internas*, mientras que las fuerzas, determinadas por la acción de otros cuerpos que no entran en el sistema dado, *externas*. En un sistema no inercial de referencia a las últimas pertenecen y las fuerzas de inercia.

Además, todas las fuerzas se dividen en *potenciales* y *no potenciales*. Las fuerzas que con el carácter de interacción dado dependen sólo de la configuración del sistema mecánico se denominan potenciales. El trabajo de estas fuerzas, como fue demostrado, es igual al decremento de la energía potencial del sistema.

A las fuerzas no potenciales se refieren las llamadas fuerzas *disipativas*, es decir, las fuerzas de rozamiento y de resistencia. Una particularidad importante de dichas fuerzas es que el trabajo sumario de las fuerzas disipativas internas del sistema considerado es negativo además en cualquier sistema de referencia. Demostremos esto.

Cualquier fuerza disipativa puede ser presentada como

$$\mathbf{F} = -k(v) \mathbf{v}, \quad (3.44)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad del cuerpo dado con relación a otro cuerpo (o medio), con el cual interacciona; $k(v)$, es un coeficiente positivo, que en caso general depende de la velocidad v . La fuerza \mathbf{F} está siempre dirigida en sentido contrario al vector \mathbf{v} . El trabajo de esta fuerza puede ser, en dependencia del sistema de referencia elegido, tanto positivo, como negativo. *Mas el trabajo sumario de todas las fuerzas disipativas internas es siempre una magnitud negativa.*

Pasando a la demostración de esto, señalamos ante todo, que las fuerzas disipativas internas en el sistema dado se encontrarán a pares. Con ello, en cada par, según la tercera ley de Newton, dichas fuerzas serán de igual módulo y estarán dirigidas en dirección contraria. Definamos el trabajo elemental de un par arbitrario de fuerzas disipativas de interacción entre los puntos 1 y 2 en el sistema de referencia, donde las velocidades de estos

cuerpos en un momento dado son iguales a v_1 y v_2 :

$$\delta W^{\text{dis}} = F_{12} v_1 dt + F_{21} v_2 dt.$$

Ahora tengamos en cuenta que $F_{21} = -F_{12}$, $v_1 - v_2 = v$, o sea, la velocidad del cuerpo 1 con relación al cuerpo 2 y también, que $F_{12} = -k(v)v$. Entonces la expresión para el trabajo se transforma del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \delta W^{\text{dis}} &= F_{12} (v_1 - v_2) dt = -k(v) v v dt = \\ &= -k(v) v^2 dt. \end{aligned}$$

De aquí se ve, que el trabajo de un par arbitrario de fuerzas disipativas internas es siempre negativo, y esto significa que el trabajo sumario de todos los pares de fuerzas disipativas internas también es siempre negativo. De ese modo, en realidad,

$$\boxed{W_{\text{int}}^{\text{dis}} < 0.} \quad (3.45)$$

Ley de conservación de la energía. Anteriormente fue demostrado que el incremento de la energía interna de un sistema es igual al trabajo realizado por *todas* las fuerzas que actúan sobre *todas* las partículas del sistema. Dividiendo estas fuerzas en las externas e internas, en tanto que las internas, a su vez, en las potenciales y disipativas, escribimos la afirmación anterior así:

$$dT = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}}^{\text{pot}} + \delta W_{\text{int}}^{\text{dis}}.$$

Tomemos en consideración que el trabajo de las fuerzas potenciales internas es igual al decremento de la energía potencial propia del sistema, es decir, $\delta W_{\text{int}}^{\text{pot}} = -dU$. Entonces, la expresión anterior toma el aspecto

$$dT + dU = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}}^{\text{dis}}. \quad (3.46)$$

Introduzcamos el concepto de *energía mecánica total del sistema* o, brevemente, *de energía mecánica* como la suma de la energía cinética y potencial del sistema:

$$\boxed{E = T + U.} \quad (3.47)$$

Es evidente que la energía E depende de las velocidades de las partículas del sistema, del carácter de la interac-

ción entre ellas y de la configuración del sistema. Además, la energía E , como también la energía potencial U , se determina con una exactitud salvo la adición de una constante arbitraria de poca importancia y es una magnitud *no aditiva*, es decir, la energía E del sistema en caso general no es igual a la suma de las energías de sus partes aisladas. En correspondencia con (3.37)

$$E = \sum E_n + U_{in}, \quad (3.48)$$

donde E_n es la energía mecánica de la n -ésima parte del sistema, U_{in} es la energía potencial de interacción de sus partes aisladas.

Retornemos a la fórmula (3.46). Escribámosla tomando en cuenta (3.37) como

$$dE = \delta W_{ext} + \delta W_{int}^{dis}. \quad (3.49)$$

Esta expresión es justa para la variación infinitesimal de la configuración del sistema. Mas para la variación finita

$$\boxed{E_2 - E_1 = W_{ext} + W_{in}^{dis}}, \quad (3.50)$$

es decir, *el incremento de la energía mecánica del sistema es igual a la suma algebraica de los trabajos de todas las fuerzas externas y de todas las fuerzas disipativas internas.*

La ecuación (3.49) se puede representar, además, en otra forma, dividiendo sus dos miembros por el intervalo de tiempo dt correspondiente. Entonces

$$\boxed{dE/dt = N_{ext} + N_{int}^{dis}}, \quad (3.51)$$

es decir, *la derivada de la energía mecánica del sistema conforme al tiempo es igual a la suma algebraica de las potencias de todas las fuerzas externas y de todas las fuerzas disipativas internas.*

Las ecuaciones (3.49) — (3.51) son justas tanto en los sistemas inerciales de referencia, como en los no inerciales. Sólo se debe tomar en consideración, que en el sistema no inercial de referencia es necesario tener en cuenta el trabajo (la potencia) de las fuerzas de inercia que juegan el papel de fuerzas externas, es decir, por W_{ext} se debe en-

tender la suma algebraica de los trabajos de las fuerzas externas de interacción $W_{\text{ext}}^{\text{in}}$ y el trabajo de las fuerzas de inercia W_1 . Para subrayar esta circunstancia, escribamos la ecuación (3.50) como

$$E_2 - E_1 = W_1 + W_{\text{ext}}^{\text{in}} + W_{\text{int}}^{\text{dis}} \quad (3.52)$$

Así pues, llegamos a un importante resultado: la energía mecánica del sistema puede variar bajo la acción tanto de las fuerzas externas, como de las fuerzas disipativas internas (hablando más exactamente, bajo la acción de la suma algebraica de los trabajos de todas estas fuerzas). De aquí se deriva directamente otra importante deducción, o sea, *la ley de conservación de la energía mecánica*:

en un sistema inercial de referencia la energía mecánica de un sistema cerrado de partículas, en el cual no hay fuerzas disipativas, se conserva en el proceso de movimiento, es decir,

$$E = T + U = \text{const}, \quad (3.53)$$

Este sistema lo denominan *conservativo**. Indiquemos, que durante el movimiento de un sistema conservativo cerrado se conserva precisamente la energía mecánica total, mientras que en caso general las energías cinética y potencial varían. Sin embargo, estas variaciones siempre tienen lugar de tal modo que el incremento de una de ellas es exactamente igual al decremento de la otra, es decir, $\Delta T = -\Delta U$. Claro está, que esta situación es justa sólo en los sistemas inerciales de referencia.

Luego, de la ecuación (3.50) se deduce que si el sistema cerrado no es conservativo, es decir, en él hay fuerzas disipativas, la energía mecánica de este sistema, según (3.45), decrece:

$$E_2 - E_1 = W_{\text{int}}^{\text{dis}} < 0. \quad (3.54)$$

*) Con aproximación suficientemente buena se puede considerar que el Sistema Solar es un sistema conservativo cerrado.

Se puede decir: la disminución de la energía mecánica acondicionase porque ella se consume en el trabajo contra las fuerzas disipativas que actúan en el sistema. Sin embargo, esta explicación es formal, ya que no revela la naturaleza física de las fuerzas disipativas.

La comprensión más profunda de este problema llevó a la deducción fundamental sobre la existencia en la naturaleza de la ley universal de conservación de la energía:

La energía no se crea y no se elimina jamás, sólo puede pasar de una a otra forma o intercambiarse entre partes aisladas de la materia. Con ello, se tuvo que ampliar el concepto de energía con la introducción de sus nuevas formas (además de la mecánica): la energía del campo electromagnético, la energía química, la nuclear y otras.

De ese modo, la ley universal de conservación de la energía abarca también aquellos fenómenos físicos a los cuales no se extienden las leyes de Newton. Por esta razón ella no puede ser deducida de estas leyes, sino que debe considerarse como una ley independiente, que representa de por sí una de las generalizaciones más amplias de los hechos experimentales.

Volviendo a la ecuación (3.54) se puede decir: siempre con la disminución de la energía mecánica de un sistema cerrado surge una cantidad equivalente de energía de otros tipos, no ligados con el movimiento *visible*. En este sentido se pueden considerar las ecuaciones (3.49)—(3.51) como la formulación más general de la ley de conservación de la energía, en la cual se indica *la causa* de la variación de la energía mecánica en un sistema no cerrado.

En particular, la energía mecánica puede conservarse también en los sistemas no cerrados, pero esto solamente tiene lugar en aquellos casos, cuando, según la ecuación (3.50), la disminución de esta energía a cuenta del trabajo contra las fuerzas disipativas se compensa con la afluencia de energía a cuenta del trabajo de las fuerzas externas.

En conclusión señalemos, que durante la solución de la mayoría de los problemas se emplea la ley de conservación de la energía junto con la ley de conservación o de la impulsión, o bien del momento de impulsión, o bien con una y otra simultáneamente. Como se hace esto será mostrado en los dos capítulos siguientes,

Problemas para el capítulo 3

3.1. De la superficie de la Tierra se lanza una piedra de masa m bajo un ángulo α al horizonte a una velocidad inicial v_0 . Despreciando la resistencia del aire, encontrar la potencia de la fuerza de gravedad al cabo de t segundos después del comienzo del movimiento, así como el trabajo de esta fuerza durante los primeros t segundos de movimiento.

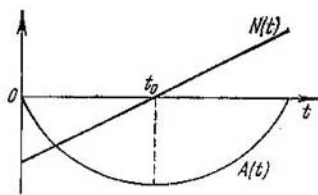


Fig. 47

Solución. La velocidad de la piedra al cabo de t segundos después del comienzo del movimiento $v = v_0 + gt$. La potencia desarrollada por la fuerza de gravedad mg en este momento,

$$N = mgv = m(gv_0 + g^2t).$$

En nuestro caso $gv_0 = gv_0 \cos(\pi/2 + \alpha) = -gv_0 \sin \alpha$, por eso

$$N = mg(gt - v_0 \sin \alpha).$$

De aquí se ve, que cuando $t < t_0 = v_0 \sin \alpha/g$ la potencia $N < 0$, y cuando $t > t_0$ $N > 0$.

El trabajo realizado por la fuerza de gravedad durante los primeros t segundos,

$$W = \int_0^t N dt = mg(gt^2/2 - v_0 \sin \alpha t).$$

En la fig. 47 se muestran los gráficos de las dependencias $N(t)$ y $W(t)$.

3.2. Tenemos dos campos de fuerzas estacionarios:

1. $F = ayi$;
2. $F = axi + byj$,

donde i, j son versores de los ejes x e y ; a y b son constantes. ¿Serán potenciales estos campos de fuerzas?

Solución. Determinamos el trabajo de las fuerzas de cada campo por el camino desde cierto punto 1 (x_1, y_1) hasta cierto punto 2 (x_2, y_2):

$$1) \delta W = F dr = ayi dx = ay dx; \quad W = \int_{x_1}^{x_2} y dx;$$

$$2) \delta W = F dr = (axi + byj) dr = \\ = ax dx + by dy; \quad W = a \int_{x_1}^{x_2} x dx + b \int_{y_1}^{y_2} y dy.$$

En el primer caso la integral depende del tipo de la función $y(x)$, es decir, de la forma del camino, por eso el primer campo de fuerzas no es potencial. En el segundo caso ambas integrales no dependen de la forma del camino: dependen solamente de las coordenadas de los puntos inicial y final de la trayectoria, por consiguiente, el segundo campo de fuerzas es potencial.

3.3. La fuerza que actúa sobre una partícula en cierto campo potencial es dada por la ecuación

$$F = a (yi + xj),$$

donde a es una constante, i y j son los versores de los ejes x e y , respectivamente. Hallar la energía potencial $U(x, y)$ de la partícula en este campo.

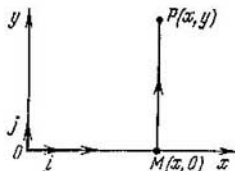


Fig. 48

Solución. Calculamos el trabajo de la fuerza F por el camino desde el punto O (fig. 48) hasta el punto arbitrario $P(x, y)$. Aprovechando que este trabajo no debe depender de la forma del camino, elegimos en calidad de trayectoria OMP que se compone de dos segmentos rectilíneos. Entonces

$$W_{OP} = \int_O^M F dr + \int_M^P F dr.$$

La primera integral es igual a cero, ya que en todos los puntos del camino OM $y = 0$ y $F \perp dr$. Mas en el camino MP $x = \text{const}$, $F dr = F_j dy = F_y dy = ax dy$ y por eso

$$W_{OP} = 0 + ax \int_M^P dy = axy.$$

Este trabajo, según (3.10), debe ser igual al decremento de la energía potencial, es decir, $W_{OP} = U_O - U_P$. Haciendo $U_O = 0$, obtenemos $U_P = -W_{OP}$, o bien

$$U(x, y) = -axy.$$

Otro procedimiento para hallar $U(x, y)$ es la aplicación de la diferencial total de esta función:

$$dU = (\partial U / \partial x) dx + (\partial U / \partial y) dy,$$

Tomando en consideración que $\partial U/\partial x = -F_x = -ay$ y $\partial U/\partial y = -F_y = -ax$, obtenemos

$$dU = -a(ydx + xdy) = d(-axy).$$

De aquí $U(x, y) = -axy$.

3.4. Sobre un hilo elástico imponderable, el coeficiente de rigidez del cual es κ suspendemos una bola de masa m . Después levantamos la bola de modo que el hilo esté en estado no deformado y la bajamos sin velocidad inicial. Encontrar el alargamiento máximo del hilo x_m en el proceso del movimiento de la bola.

Solución. Examinemos algunos procedimientos de solución fundamentados en consideraciones energéticas.

1. Partimos de la ecuación (3.28): el incremento de la energía cinética de la bola es igual a la suma algebraica de los trabajos de todas las fuerzas, que actúan sobre ella. En nuestro caso es la fuerza de gravedad mg y la de elasticidad creada por el hilo $F_{el} = \kappa x$ (fig. 49, a). En las posiciones inicial y final de la bola su energía cinética es

igual a cero (es evidente, que con el alargamiento máximo del hilo la bola se detiene), por eso, según (3.28), la suma de los trabajos $W_{gr} + W_{el} = 0$ o bien

$$mgx_m + \int_0^{x_m} (-\kappa x) dx = mgx_m - \kappa x_m^2/2 = 0.$$

De aquí $x_m = 2mg/\kappa$.

2. Se puede considerar la bola en el campo de gravedad de la Tierra. Con tal enfoque se debe hablar de la energía mecánica total de la bola en el campo de gravedad de la Tierra. El incremento de esta energía, según (3.32), es igual al trabajo de las fuerzas extrañas. En el caso dado se debe considerar por fuerza extraña la fuerza de elasticidad, mientras que el incremento de la energía mecánica total de la bola es igual al incremento sólo de su energía potencial en el campo de gravedad de la Tierra. Por esta razón,

$$-mgx_m = \int_0^{x_m} (-\kappa x) dx = -\kappa x_m^2/2.$$

De aquí se obtiene el mismo resultado para x_m .

Señalemos, que se podría haber procedido a la inversa, es decir, considerar la bola en el campo de la fuerza elástica, entonces el papel de fuerza extraña lo habría jugado la fuerza de gravedad. Es útil convencerse de que en este caso el resultado será el mismo.

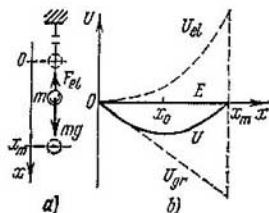


Fig. 49

3. Y finalmente, se puede considerar la bola en un campo formado por la acción conjunta de la fuerza de gravedad y de la fuerza elástica. Entonces las fuerzas extrañas están ausentes y la energía mecánica total de la bola en este campo permanece constante en el proceso de movimiento, es decir, $\Delta E = \Delta T + \Delta U = 0$. Con el paso de la bola de la posición inicial a la final (inferior) $\Delta T = 0$ y, por consiguiente, $\Delta U = \Delta U_{gr} + \Delta U_{el} = 0$, o bien

$$-mgx_m + \kappa x_m^2/2 = 0.$$

El resultado de nuevo es el mismo.

En la fig. 49, b se muestran los gráficos de las dependencias $U_{gr}(x)$ y $U_{el}(x)$, el origen de referencia de los cuales se ha tomado en el punto $x = 0$ (lo que, desde luego, no es obligatorio). En esta misma figura se muestra también el gráfico de la dependencia de la energía potencial sumaria $U(x) = U_{gr} + U_{el}$. Con la elección mostrada del origen de referencia de la energía potencial, la energía mecánica total de la bola $E = 0$.

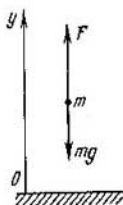


Fig. 50

3.5. Desde la superficie de la Tierra asciende un cuerpo de masa m , sin velocidad inicial bajo la acción de dos fuerzas (fig. 50): de la fuerza F , que varía con la altura de elevación y por la ley $F = -2mg(1 - ay)$, donde a es una constante positiva y de la fuerza de gravedad mg . Determinar el trabajo de la fuerza F en la primera mitad del camino de ascenso y el correspondiente incremento de la energía potencial del cuerpo en el campo de gravedad de la Tierra. El campo de gravedad se considera homogéneo.

Solución. Primero hallemos todo el camino de ascenso. La velocidad del cuerpo al principio y al final del camino es igual a cero, por esto es también igual a cero el incremento de la energía cinética del cuerpo. De otro lado, según (3.28), ΔT es igual a la suma algebraica de los trabajos W de todas las fuerzas en este camino, es decir, de los trabajos de la fuerza F y de la fuerza de gravedad. Y ya que $\Delta T = 0$, esto significa que $W = 0$. Tomando en cuenta, que la dirección positiva del eje y se ha tomado hacia arriba, escribimos

$$\begin{aligned} W &= \int_0^h (F + mg) dr = \int_0^h (F_y - mg) dy = \\ &= mg \int_0^h (1 - 2ay) dy = mgh(1 - ah) = 0. \end{aligned}$$

De aquí $h = 1/a$.

El trabajo de la fuerza F en la primera mitad del camino de ascenso

$$W_F = \int_0^{h/2} F_y dy = 2mg \int_0^{h/2} (1 - ay) dy = 3mgh/4a.$$

El incremento de la energía potencial correspondiente

$$\Delta U = mgh/2 = mg/2a.$$

3.6. Por una rampa de altura h , el perfil de la cual depende solamente de la coordenada x (fig. 51, a), se desliza sin rozamiento una golilla. Abajo la golilla tiene una velocidad v_1 , cuya dirección constituye un ángulo α_1 con el eje x (en la fig. 51, b, donde se

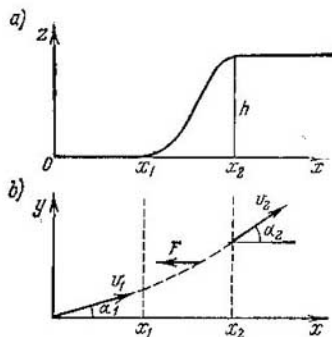


Fig. 51

muestra la vista desde arriba). Hallar la dirección del movimiento de la golilla después de que ésta suba a la rampa, es decir, encontrar el ángulo α_2 .

Solución. Ante todo señalamos, que resolver este problema con ayuda de la ecuación fundamental de dinámica es imposible, ya que no se ha dado la ley de la fuerza F que actúa sobre la golilla en la zona $x_1 < x < x_2$. De esta fuerza sólo se sabe que es perpendicular al eje y .

Hagamos uso de la ley de conservación de la energía: $mv_2^2 = mv_1^2 + 2mgh$, de donde

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh. \quad (1)$$

Esta expresión la escribimos de nuevo así:

$$v_{2x}^2 + v_{2y}^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + 2gh.$$

A causa de que la fuerza del campo es perpendicular al eje y , ella no varía v_y o sea, la proyección de la velocidad; de aquí $v_{2y} = v_{1y}$. Por eso la expresión anterior se simplifica: $v_{2x}^2 = v_{1x}^2 + 2gh$, o bien

$$v_2 \cos \alpha_2 = \sqrt{v_1^2 \cos^2 \alpha_1 + 2gh}, \quad (2)$$

donde v_2 se determina por la ecuación (1). Como resultado

$$\cos \alpha_2 = \sqrt{(v_1^2 \cos^2 \alpha_1 + 2gh) / (v_1^2 + 2gh)}.$$

Indiquemos, que la solución aducida es justa si la expresión subradical en (2) no es negativa, es decir, cuando $v_1 \cos \alpha_1 > \sqrt{2gh}$. En caso contrario la golilla no salva la rampa, es decir, tiene lugar su «reflexión» de la barrera de potencial.

3.7. Una espiral plana de alambre liso rígido, dispuesta en una superficie horizontal, se hace girar a velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical fijo O (fig. 52). Por la espiral se desliza

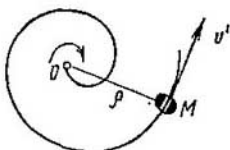


Fig. 52

sin rozamiento un pequeño casquillo M . Encontrar su velocidad v' con relación a la espiral; como función de la distancia ρ del eje de rotación O , si el casquillo empieza a moverse desde este eje a la velocidad v_0 .

Solución. Lo más racional es resolver este problema en un sistema de referencia ligado con la espiral. Nosotros sabemos, que el incremento de la energía cinética del casquillo debe ser igual a la

suma algebraica de los trabajos de todas las fuerzas que actúan sobre el casquillo. Es fácil ver que de todas las fuerzas sólo la fuerza centrífuga de inercia realizará trabajo (todas las demás fuerzas, la de gravedad, la de reacción de la espiral y la de Coriolis son perpendiculares a la velocidad v' del casquillo y por eso no realizan trabajo).

Según la ecuación (3.28),

$$m(v'^2 - v_0^2)/2 = \int m\omega^2 \rho dr,$$

donde m es la masa del casquillo, dr es su desplazamiento elemental con relación a la espiral. Como $\rho dr = \rho (dr)_\rho = \rho d\rho$, entonces la integral resulta igual a $m\omega^2 \rho^2/2$. De aquí la velocidad buscada

$$v' = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 \rho^2}.$$

3.8. Determinar el potencial y la intensidad del campo de gravitación, creado por una bola homogénea de masa M y radio R , en dependencia de la distancia r hasta su centro.

Solución. Ante todo demostremos que el potencial, creado por una capa fina esférica homogénea de la sustancia, fuera de la capa es tal, como si toda la masa estuviera reconcentrada en su centro, en tanto que el potencial dentro de la capa es igual en todos los puntos.

Supongamos que la capa fina esférica tiene una masa m y radio a . Primero encontramos el potencial $d\varphi$ en el punto P ($r > a$), que crea la banda elemental dS de la capa dada (fig. 53, a). Si la masa de esta banda es dm y sus puntos se encuentran a la distancia x del punto P , entonces $d\varphi = -\gamma dm/x$. Teniendo en cuenta que $dm = (m/2) \sin \vartheta d\vartheta$, obtenemos

$$d\varphi = -(\gamma m/2x) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (1)$$

Luego, del teorema del coseno (para $\triangle OAP$) se deduce que $x^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta$. Tomando la diferencial de esta expresión, encontramos

$$x dx = ar \operatorname{sen} \vartheta d\vartheta. \quad (2)$$

Con ayuda de (2) transformemos (1) al tipo $d\varphi = -(\gamma m/2ar) dx$ e integremos esta ecuación conforme a toda la capa. Entonces

$$\varphi_{\text{fuera}} = -(\gamma m/2ar) \int_{r-a}^{r+a} dx = -\gamma m/r. \quad (3)$$

De ese modo, en realidad, el potencial en el punto P fuera de la capa fina esférica homogénea delgada es tal, como si la masa de esta capa estuviera concentrada en su centro.

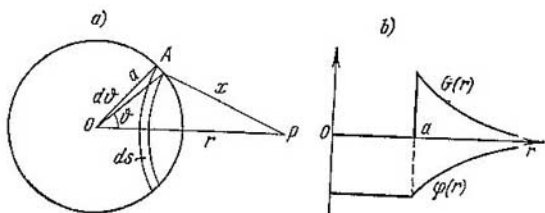


Fig. 53

Mas si el punto P se encuentra dentro de la capa ($r < a$), entonces los cálculos anteriores quedan en vigor hasta la integración. Ahora los límites de integración conforme a x serán desde $a - r$ hasta $a + r$. Como resultado

$$\varphi_{\text{dentro}} = -\gamma m/a, \quad (4)$$

es decir, el potencial dentro de la capa no depende de la posición del punto P y, por consiguiente, será igual en todos los puntos dentro de la capa.

La intensidad del campo en el punto P , según (3.24), es igual a

$$G_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{cases} -\gamma m/r^2 & \text{fuera de la capa} \\ 0 & \text{dentro de la capa.} \end{cases}$$

En la fig. 53, b se muestran los gráficos de las dependencias $\varphi(r)$ y $G(r)$ para la capa fina esférica delgada.

Ahora generalicemos los resultados obtenidos en la bola homogénea de masa M y radio R . Si el punto P se encuentra fuera de la bola ($r > R$), de la fórmula (3) se deduce de inmediato

$$\varphi_{\text{fuera}} = -\gamma M/r. \quad (5)$$

Mas si el punto P se encuentra dentro de la bola ($r < R$), el potencial φ en este punto se puede presentar como la suma:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

donde φ_1 es el potencial de la bola de radio r ; φ_2 es el potencial de la capa de radio desde r hasta R . Según (5),

$$\varphi_1 = -\gamma \frac{M (r/R)^3}{r} = -\gamma \frac{M}{R^3} r^2.$$

Mas el potencial φ_2 , creado por la capa, es igual en todos los puntos dentro de esta capa. Lo más simple es calcular φ_2 para el punto que se encuentra en el centro de la capa:

$$\varphi_2 = -\gamma \int_r^R \frac{dM}{r} = -\frac{3}{2} \frac{\gamma M}{R^3} (R^2 - r^2),$$

donde $dM = (3M/R^3) r^2 dr$ es la masa de la capa fina entre los radios r y $r + dr$. Como resultado

$$\varphi_{\text{dentro}} = \varphi_1 + \varphi_2 = -(\gamma M/2R) (3 - r^2/R^2). \quad (6)$$

La intensidad del campo en el punto P , como se deduce de (5) y (6),

$$G_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{cases} -\gamma M/r^2 & \text{cuando } r > R, \\ -\gamma M r/R^3 & \text{cuando } r < R. \end{cases}$$

En la fig. 54 se muestran los gráficos de las dependencias $\varphi(r)$ y $G(r)$ para la bola homogénea de radio R .

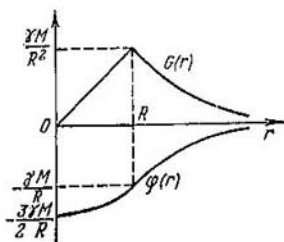


Fig. 54

3.9. Demostrar que la energía cinética T_2 que es necesario comunicar a un cuerpo para su alejamiento [tras el límite de la atracción de la Tierra, es dos veces mayor que la energía cinética T_1 necesaria para poner a este cuerpo en la órbita circular de un satélite artificial de la Tierra (próximo a su superficie). La resistencia del aire y la rotación de la Tierra se menosprecian.

Solución. Encontramos la velocidad v_1 del cuerpo que se mueve por la órbita circular. Según la ecuación fundamental de dinámica,

$$mv_1^2/R = mg,$$

donde m es la masa del cuerpo, R es el radio de la órbita, aproximadamente igual al radio de la Tierra. De donde

$$v_1 = \sqrt{gR} = 7,9 \text{ km/s.}$$

Esta es la denominada *primera velocidad cósmica*.

Para que el cuerpo pueda vencer el campo de gravitación de la Tierra es necesario comunicarle la segunda velocidad cósmica v_2 . Ésta se puede hallar de la ley de conservación de la energía: la energía cinética junto a la superficie de la Tierra debe ser igual a la altura de la barrera de potencial que el cuerpo debe vencer. La altura de esta barrera es igual al incremento de la energía potencial del cuerpo entre los puntos $r = R$ y $r = \infty$. De ese modo,

$$mv_2^2/2 = \gamma mM/R,$$

donde M es la masa de la Tierra. De aquí

$$v_2 = \sqrt{2\gamma M/R} = \sqrt{2gR} = 11 \text{ km/s.}$$

Por consiguiente, $v_2 = \sqrt{2}v_1$ y $T_2 = 2T_1$.

3.10. En los vértices de los ángulos de un triángulo equilátero con lado r_0 se ubican tres partículas cargadas iguales, cada una de masa m y con carga $-q$. Luego, las liberaron simultáneamente, después de lo cual ellas empezaron a difundirse simétricamente bajo la acción de las fuerzas de Coulomb de repulsión. Encontrar:

1) la velocidad de cada partícula en dependencia de la distancia r entre ellas;

2) el trabajo W_1 que realizaron las fuerzas de Coulomb, que actúan sobre cada partícula durante la difusión de éstas a una distancia muy grande una de otra.

Solución 1. El sistema dado es cerrado, por eso para él el incremento de la energía cinética es igual al decremento de la potencial, es decir,

$$3mv^2/2 = 3kq^2/r_0 - 3kq^2/r.$$

De aquí

$$v = \sqrt{2kq^2(r - r_0)/mr r_0}.$$

Vemos, que cuando $r \rightarrow \infty$ la velocidad de cada partícula tiende a un valor límite

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{2kq^2/mr_0}.$$

2. El trabajo de todas las fuerzas de interacción cuando la variación de la configuración de este sistema es igual al decremento de la energía potencial del sistema:

$$W = U_1 - U_2 = 3kq^2/r_0,$$

donde se tuvo en cuenta que en la posición final $U_2 = 0$.

De aquí el trabajo buscado

$$W_1 = W/3 = kq^2/r_0. \quad (1)$$

Observación. Aquí se debe prestar atención a un error que se encuentra frecuentemente, que surge durante la solución de problemas semejantes. A saber: con frecuencia razonan así: la energía potencial de cada partícula en el momento inicial es igual a $2kq^2/r_0$ y en el final a cero. Como se ve, el resultado obtenido se diferencia el doble del (1). ¿Por qué?

El error aquí consiste en que el campo, en el cual se traslada cada partícula, no es estacionario y, por consiguiente, tampoco es

potencial (en efecto, las otras dos partículas se desplazan también una con relación a la otra), por eso el trabajo en este campo no puede ser presentado como el decremento de la energía potencial de la partícula.

3.11. Haciendo uso de los resultados del problema 3.8, encontrar la energía potencial propia de la interacción de gravitación de las masas distribuidas uniformemente:

- 1) en la superficie de una esfera;
- 2) en el volumen de una bola.

Las masas de la esfera y de la bola son iguales a M , sus radios a R .

Solución. Teniendo en cuenta que el potencial en cada punto de la esfera $\varphi = -\gamma M/R$, según la fórmula (3.40), obtenemos

$$U = (\varphi/2) \int dm = -\gamma M^2/2R.$$

2. En este caso el potencial en el interior de la bola (véase el problema 3.8) depende solamente de r :

$$\varphi = -(3\gamma M/2R) (1 - r^2/3R^2).$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (3.40) e integrando, obtenemos

$$U = \frac{1}{2} \int_{r=0}^{R} \varphi dm = -\frac{3}{5} \frac{\gamma M^2}{R},$$

donde dm es la masa de la capa esférica elemental, situada entre los radios r y $r + dr$; $dm = (3M/R^3) r^2 dr$.

Capítulo 4

Ley de conservación de la impulsión

§ 4.1. Impulsión. Ley de su conservación

Impulsión * de la partícula. La experiencia y el análisis correspondiente de los fenómenos mecánicos muestran, que para la caracterización del movimiento mecánico de los cuerpos es necesario, además de la energía cinética $T = mv^2/2$, introducir una magnitud más, o sea, la *impulsión* $p = mv$. Estas dos magnitudes son las medidas fundamentales del movimiento mecánico de los cuerpos: la primera es escalar, la segunda, vectorial. Ambas juegan el papel central en toda la estructura de la mecánica.

Pasemos al estudio más detallado de la impulsión. Ante todo escribimos la ecuación fundamental de la dinámica newtoniana (2.6) en otra forma, o sea, mediante la impulsión:

$$\boxed{dp/dt = F,} \quad (4.1)$$

es decir, *la derivada de la impulsión de un punto material conforme al tiempo es igual a la fuerza que actúa sobre él.* En particular, si $F \equiv 0$, entonces $p = \text{const.}$

¶ Indiquemos, que la fuerza F en un sistema no inercial de referencia contiene no sólo las fuerzas de interacción de la partícula dada con otros cuerpos, sino que también las fuerzas de inercia.

La ecuación (4.1) permite encontrar el incremento de la impulsión de la partícula en cualquier intervalo de tiempo, si se conoce la dependencia de la fuerza F y el tiempo. En realidad, de (4.1) se deduce que el incremento

*) Otra denominación de esta magnitud es *cantidad de movimiento*.

elemental de la impulsión de la partícula en el lapso dt es $dp = F dt$. Integrando esta expresión según el tiempo, encontramos el incremento de la impulsión de la partícula en el intervalo finito de tiempo t :

$$p_2 - p_1 = \int_0^t F dt. \quad (4.2)$$

La magnitud en el segundo miembro, la denominan *impulsión de una fuerza*. De ese modo, el incremento de la impulsión de una partícula en cualquier intervalo de tiempo es igual a la impulsión de una fuerza en este mismo tiempo. Si la fuerza $F = \text{const}$, entonces el vector F se puede sacar de la integral y $p_2 - p_1 = Ft$.

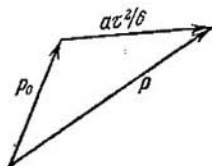


Fig. 55

Ejemplo. Sobre una partícula, que en el momento inicial $t = 0$ tenía una impulsión p_0 , actúa una fuerza $F = at(1 - t/\tau)$ durante el

intervalo de tiempo τ , donde a es un vector constante. Determinar la impulsión p de la partícula después de terminar la acción de esta fuerza.

Según (4.2), obtenemos $p = p_0 + \int_0^{\tau} F dt = p_0 + a\tau^2/6$ (fig. 55).

Impulsión de un sistema. Examinemos un sistema arbitrario de partículas. Introduzcamos el concepto de *impulsión del sistema* como la suma vectorial de las impulsiones de sus partes por separado:

$$p = \sum p_i, \quad (4.3)$$

donde p_i es la impulsión de la i -ésima partícula. Señalemos, que la impulsión del sistema es una magnitud aditiva, es decir, la impulsión del sistema es igual a la suma de las impulsiones de sus partes por separado independientemente de que ellas interaccionen entre sí o no.

Hallemos la magnitud física que determina la variación de la impulsión del sistema. Para esto diferenciamos (4.3) conforme al tiempo:

$$dp/dt = \sum dp_i/dt.$$

Según (4.1),

$$dp_i/dt = \sum_h F_{ih} + F_i,$$

donde F_{ih} son las fuerzas que actúan sobre la i -ésima partícula desde otras partículas del sistema (fuerzas internas), F_i es la fuerza que actúa sobre esta misma partícula desde otros cuerpos que no entran en el sistema considerado (fuerzas externas). Sustituyendo la última expresión en la anterior, obtenemos

$$dp/dt = \sum_i \sum_h F_{ih} + \sum_i F_i.$$

La suma doble en el segundo miembro es la suma de todas las fuerzas internas. En correspondencia con la tercera ley de Newton las fuerzas de interacción entre las partículas del sistema son iguales a pares según su módulo y contrarias por su dirección. Por eso la fuerza resultante en cada par de interacción es igual a cero, lo que significa que es también igual a cero la suma vectorial de todas las fuerzas internas. Como resultado la última ecuación toma el siguiente aspecto:

$$\boxed{dp/dt = F}, \quad (4.4)$$

donde F es la resultante de todas las fuerzas *externas*, $F = \sum_i F_i$.

La ecuación (4.4) significa: *la derivada de la impulsión conforme al tiempo es igual a la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema.*

Como en el caso de una partícula, de la ecuación (4.4) se deduce que el incremento de la impulsión del sistema en el intervalo finito de tiempo t es

$$\boxed{p_2 - p_1 = \int_0^t F dt}, \quad (4.5)$$

es decir, el incremento de la impulsión del sistema es igual a la impulsión resultante de todas las fuerzas externas en el intervalo de tiempo correspondiente. Y aquí, claro está, F es la resultante de todas las fuerzas *externas*.

Las ecuaciones (4.4) y (4.5) son válidas tanto en los sistemas inerciales de referencia, como y en los no inerciales. Sólo debe tenerse en cuenta que en el sistema no inercial de referencia es necesario tomar también en consideración la acción de *las fuerzas de inercia*, que juegan el papel de fuerzas externas, es decir, por F se debe entender en estas ecuaciones la suma $F_{in} + F_1$, donde F_{in} es la resultante de todas las fuerzas externas de interacción y F_1 , la resultante de todas las fuerzas de inercia.

Ley de conservación de la impulsión. Hemos llegado a una importante conclusión: según la ecuación (4.4), *la impulsión de un sistema puede variar sólo bajo la acción de las fuerzas externas*. Las fuerzas internas no pueden variar la impulsión del sistema. De aquí se deriva directamente otra importante deducción, o sea, la ley de conservación de la impulsión: *la impulsión de un sistema cerrado de partículas en un sistema inercial de referencia permanece constante*, es decir, no varía con el tiempo:

$$p = \sum p_i(t) = \text{const.} \quad (4.6)$$

Con ello, pueden variar con el tiempo las impulsiones de partículas aisladas o de partes del sistema cerrado, lo que se subraya en la última expresión. Sin embargo, estas variaciones siempre transcurren de modo que el incremento de la impulsión de una parte del sistema es igual al decremento de la impulsión de la parte restante del sistema. Con otras palabras, las partes aisladas de un sistema cerrado sólo pueden intercambiar impulsiones. Habiendo descubierto en cierto sistema un incremento de la impulsión, podemos afirmar que éste incremento tuvo lugar a cuenta del decremento de la impulsión en los cuerpos circundantes.

En este sentido las ecuaciones (4.4) y (4.5) se deben considerar como la formulación más general de la ley de conservación de la impulsión, enunciación en la cual se indica *la causa* de la variación de la impulsión en un sistema cerrado, o sea, la acción de otros cuerpos (fuerzas externas). Sin duda, lo dicho es justo sólo para los sistemas inerciales de referencia.

A condición de que la resultante de todas las fuerzas externas sea igual a cero, la impulsión se puede también

conservar en un sistema no cerrado. Esto se deduce directamente de las ecuaciones (4.4) y (4.5). En estos casos la conservación de la impulsión, desde un punto de vista práctico, tiene especial interés, ya que da la posibilidad de obtener por vía suficientemente simple una serie de conocimientos del comportamiento del sistema, no profundizando el examen detallado del proceso.

Y otra cosa más. En un sistema no cerrado se puede conservar no la misma impulsión p , sino su proyección p_x en cierta dirección x . Esto sucede cuando la proyección de la fuerza externa resultante F en la dirección x es igual a cero, es decir, el vector F es perpendicular a ella. Efectivamente, proyectando la ecuación (4.4), obtenemos

$$dp_x/dt = F_x, \quad (4.7)$$

de donde se deduce que si $F_x \equiv 0$, entonces $p_x = \text{const.}$ Por ejemplo, durante el movimiento de un sistema en un campo homogéneo de fuerzas de gravedad se conserva la proyección de su impulsión en cualquier dirección horizontal, suceda lo que suceda en el sistema.

Veamos unos ejemplos de variación y conservación de la impulsión.

Ejemplo 1. Un cañón de masa m se desliza por un plano inclinado liso que forma un ángulo α con el horizonte. En el momento cuando la velocidad del cañón era igual a v , ejecutaron un disparo. Como resultado, el cañón se detuvo, y el proyectil lanzado en dirección horizontal «se llevó» el impulso p . Sea la duración del disparo igual a t . ¿Cuál es el valor medio de la fuerza de reacción R por el plano inclinado en el tiempo t ?

Aquí el sistema cañón—proyectil no es cerrado. Este sistema recibe en el tiempo t un incremento de la impulsión igual a $p - mv$. La variación de la impulsión del sistema se determina por la acción de dos fuerzas externas: de la fuerza de la reacción R (perpendicular al plano inclinado) y de la fuerza de gravedad mg . Por eso se puede escribir:

$$p - mv = \langle R \rangle t + mgt,$$

donde $\langle R \rangle$ es el valor medio del vector R en el tiempo t . Es muy útil representar esta correlación de modo gráfico (fig. 56). Del dibujo se ve de inmediato que el valor buscado de $\langle R \rangle$ se determina por la fórmula $\langle R \rangle t = p \sin \alpha + mgt \cos \alpha$.

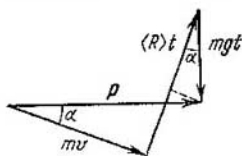


Fig. 56

Ejemplo 2. Un hombre de masa m_1 se encuentra sobre una balsa estrecha de masa m_2 , que está en la superficie de un lago. El hombre realizó el desplazamiento $\Delta r'$ con relación a la balsa y después se detuvo. La resistencia del agua es despreciable por su pequeñez. Encontramos el desplazamiento Δr_2 correspondiente de la balsa con relación a la orilla.

En el caso dado, la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema hombre — balsa es igual a cero y, por esto, no variará la impulsión de este sistema, permaneciendo, en el proceso de movimiento, igual a cero:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0,$$

donde \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 son las velocidades del hombre y de la balsa en referencia con la orilla. Pero la velocidad del hombre respecto a ésta se puede representar como $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'$, donde \mathbf{v}' es la velocidad del hombre con relación a la balsa. Eliminando \mathbf{v}_1 de estas dos ecuaciones, obtenemos

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}'.$$

Multiplicando ambas partes por dt , encontramos la dependencia entre los desplazamientos elementales de la balsa dr_2 y del hombre dr' respecto a la balsa. Evidentemente, esta misma ligazón habrá para los desplazamientos finitos:

$$\Delta r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \Delta r'.$$

De aquí se deduce, que el desplazamiento de la balsa Δr_2 no depende del carácter del movimiento del hombre, es decir, no depende de la ley $\mathbf{v}'(t)$.

Una vez más subrayamos: la ley de conservación de la impulsión se cumple solamente en los sistemas inerciales. Esto, sin embargo, no exceptúa los casos, cuando la impulsión del sistema se conservaría también en los sistemas no inerciales de referencia. Para esto es suficiente que la ecuación (4.4), que es así mismo válida en los sistemas no inerciales de referencia, la fuerza externa \mathbf{F} (ella comprende, además, las fuerzas de inercia) sea igual a cero. Evidentemente, que esta situación se puede llevar a efecto sólo a condiciones especiales. Los casos semejantes son bastante raros y tienen carácter particular.

Ahora demostramos, que si la impulsión del sistema se conserva sólo en el sistema inercial de referencia K , ella se conserva también en cualquier otro sistema K' inercial. Sea que en el sistema K

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = \text{const.}$$

Si el sistema K se mueve respecto al sistema K' a una velocidad \mathbf{V} , la velocidad de la i -ésima partícula en el sistema K se puede

presentar como $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V}$, donde \mathbf{v}'_i es la velocidad de esta partícula en el sistema K' . Entonces la expresión para la impulsión del sistema se puede transformar al siguiente tipo: $\sum m_i \mathbf{v}'_i + \sum m_i \mathbf{V} = \text{const.}$ La segunda suma en esta ecuación no depende del tiempo. Esto significa, que también la primera suma, es decir, la impulsión del sistema en el sistema K' de referencia tampoco depende del tiempo, o sea,

$$\sum m_i \mathbf{v}'_i = \text{const}'.$$

El resultado obtenido corresponde completamente al principio de la relatividad de Galileo, según el cual las leyes de mecánica son iguales en todos los sistemas inerciales de referencia.

Los razonamientos que nos llevaron a la ley de conservación de la impulsión se apoyaban por completo en la justeza de las leyes de Newton. En particular se supuso que los puntos materiales de un sistema cerrado interactúan entre sí a pares y esta interacción se somete a la tercera ley de Newton. ¿Y qué ocurrirá en el caso de sistemas que no se someten a las leyes de Newton, por ejemplo, en los sistemas con radiación electromagnética?

La práctica da respuesta a esta pregunta, que de modo convincente muestra que la ley de conservación de la impulsión resulta ser justa también para estos sistemas. Sin embargo, en estos casos es necesario considerar en el balance general de la impulsión no sólo las impulsiones de las partículas, sino que además la impulsión que posee, como se aclara en electrodinámica, el mismo campo de radiación.

De ese modo, la experiencia muestra que *la ley de conservación de la impulsión, de forma adecuada generalizada, es la ley fundamental de la Naturaleza, que no conoce excepción alguna.* Pero en esta amplia concepción ella ya no es resultado de las leyes de Newton y debe considerarse como un principio general independiente, que es generalización de factores experimentales.

§ 4.2. Centro de inercia. Sistema C

Centro de inercia. En cualquier sistema de partículas hay un punto notable C , llamado *centro de inercia* o *centro de masas*, que posee una serie de importantes e interesantes propiedades. Su posición con relación al origen O del sistema dado de referencia se caracteriza por el radio

vector r_c , determinado por la fórmula siguiente:

$$r_c = \frac{1}{m} \sum m_i r_i, \quad (4.8)$$

donde m_i y r_i son la masa y el radio vector de la partícula i -ésima, m es la masa de todo el sistema (fig. 57).

Se debe señalar, que el centro de inercia de un sistema coincide con su centro de gravedad. Es verdad que esta afirmación es justa sólo en aquellos casos, cuando el campo de las fuerzas de gravedad se puede considerar homogéneo en los límites del sistema dado.

Determinemos la velocidad del centro de inercia en el sistema de referencia dado. Diferenciando (4.8) conforme al tiempo, obtenemos

$$V_c = \frac{1}{m} \sum m_i v_i = \frac{1}{m} \sum p_i. \quad (4.9)$$

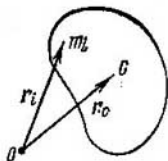


Fig. 57

Si la velocidad del centro de inercia es igual a cero, decimos que el sistema como un todo está en reposo. Esto es una generalización completamente natural del concepto de reposo de una partícula aislada. Mas la velocidad

V_c adquiere el sentido de velocidad del movimiento del sistema como un todo.

De la fórmula (4.9), teniendo en cuenta (4.3), se deduce que

$$p = mV_c, \quad (4.10)$$

es decir, *la impulsión del sistema es igual al producto de la masa de éste por la velocidad de su centro de inercia.*

Ecuación del movimiento del centro de inercia. El concepto de centro de inercia permite dar otra forma a la ecuación (4.4), que frecuentemente resulta ser más cómoda. Para esto es suficiente sustituir (4.10) en (4.4) y tener en cuenta que la masa del sistema como tal es una magnitud constante. Entonces obtenemos

$$\boxed{m \frac{dV_c}{dt} = F}, \quad (4.11)$$

donde F es la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Esta es *la ecuación del movi-*

miento del centro de inercia de un sistema, una de las ecuaciones más importantes de mecánica. Según esta ecuación, durante el movimiento de cualquier sistema de partículas su centro de inercia se mueve como si toda la masa del sistema estuviera concentrada en este punto y sobre él fueran aplicadas todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Con ello, la aceleración del centro de inercia no depende en absoluto de los puntos de aplicación de las fuerzas externas.

Seguidamente, de la ecuación (4.11) se deduce que si $F \equiv 0$, entonces $dV_C/dt \equiv 0$, es decir, $V_C = \text{const.}$ Tal es, en particular, el caso de un sistema cerrado (en un sistema inercial de referencia). Además, si $V_C = \text{const.}$ según (4.10), también la impulsión del sistema $p = \text{const.}$

De ese modo, *si el centro de inercia de un sistema se mueve de manera uniforme y rectilínea, esto significa que su impulsión se conserva en el proceso de movimiento. Sin duda es así mismo justa la afirmación contraria.*

La ecuación (4.11) por su forma coincide con la ecuación fundamental de dinámica de un punto material y es su generalización natural en un sistema de partículas: la aceleración de un sistema como un todo es proporcional a la resultante de todas las fuerzas externas e inversamente proporcional a la masa sumaria del sistema. Recordemos, que en un sistema no inercial de referencia la resultante de todas las fuerzas externas comprende tanto las fuerzas de interacción con los cuerpos circundantes, como también las fuerzas de inercia.

Examinemos tres ejemplos del movimiento del centro de inercia de un sistema.

Ejemplo 1. Mostremos como se puede resolver de otra forma el problema con el hombre en la balsa (véase el ejemplo 2 en la p. 122), haciendo uso del concepto de centro de inercia.

Como la resistencia del agua es despreciable por su pequeñez, la resultante de todas las fuerzas externas, que actúan sobre el sistema hombre—balsa, es igual a cero. Esto significa, que la posición del centro de inercia del sistema dado cambiará en el proceso de movimiento del hombre (y la balsa), es decir,

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = \text{const.}$$

donde r_1 y r_2 son los radios vectores que caracterizan las posiciones de los centros de inercia del hombre y de la balsa con relación a cierto punto de la orilla. De esta igualdad encontramos la ligazón entre los incrementos de los vectores r_1 y r_2 :

$$m_1 \Delta r_1 + m_2 \Delta r_2 = 0.$$

Teniendo en cuenta que los incrementos Δr_1 y Δr_2 son los desplazamientos del hombre y de la balsa respecto a la orilla, siendo $\Delta r_1 = \Delta r_2 + \Delta r'$, encontramos el desplazamiento de la balsa:

$$\Delta r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \Delta r'.$$

Ejemplo 2. Un hombre salta de un trampolín al agua. En caso general, el movimiento del saltador tiene un carácter muy complejo. Sin embargo, si la resistencia del aire es despreciable por su pequeñez, se puede afirmar de inmediato que el centro de inercia del saltador se mueve por una parábola, como un punto material sobre el cual actúa una fuerza constante mg , donde m es la masa del hombre.

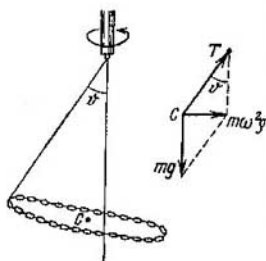


Fig. 58

Ejemplo 3. Una cadena cerrada, enlazada mediante un hilo con el extremo del eje de una máquina centrífuga, gira uniformemente alrededor de un eje vertical a la velocidad angular ω (fig. 58). En este caso el hilo forma un ángulo ϕ con la vertical. ¿Cómo se comporta el centro de inercia de la cadena?

Ante todo es evidente, que durante la rotación uniforme el centro de inercia de la cadena no se mueve en dirección vertical. Esto significa, que la componente vertical de la fuerza T de tensión del hilo compensa la fuerza de gravedad (fig. 58, a la derecha). En lo que se refiere a la componente horizontal de la fuerza de tensión, ésta es constante por su módulo y todo el tiempo dirigida hacia el eje de rotación. De aquí se deduce, que el centro de inercia de la cadena, o sea, del punto C , se mueve por una circunferencia horizontal, cuyo radio ρ se encuentra fácilmente con ayuda de la fórmula (4.11), escribiéndola como

$$m\omega^2\rho = mgtg\phi,$$

donde m es la masa de la cadena. Con ello, el punto C se encuentra todo el tiempo entre el eje de rotación y el hilo, como se muestra en la fig. 58.

Sistema C. En aquellos frecuentes casos, cuando nos interesa solamente el movimiento relativo de las partículas dentro del sistema, y no el movimiento de éste como un todo, lo más ventajoso es servirse de un sistema de referencia, en el cual el centro de inercia está en reposo. Esto permite simplificar considerablemente tanto el análisis del fenómeno, como los cálculos.

El sistema de referencia ligado rígidamente con el centro de inercia del sistema dado de partículas y que se desplaza progresivamente en relación al sistema inercial, lo denominan *sistema del centro de inercia* o, con brevedad, *sistema C*. La particularidad característica del sistema *C* es que la impulsión total del sistema de partículas en él es igual a cero, lo que se deduce directamente de la fórmula (4.10). Con otras palabras, cualquier sistema de partículas como un todo reposa en su sistema *C*.

Para el sistema cerrado de partículas su sistema *C* es inercial, para el abierto, en caso general, no inercial.

Hallemos la relación entre los valores de la energía mecánica del sistema en los sistemas *K* y *C* de referencia. Empezamos por la energía cinética *T* del sistema. La velocidad de la partícula *i*-ésima en el sistema *K* se puede representar como $v_i = \tilde{v}_i + V_C$, donde \tilde{v}_i es la velocidad de esta partícula en el sistema *C*, y V_C es la velocidad del sistema *C* respecto al sistema *K* de referencia. Entonces se puede escribir:

$$\begin{aligned} T &= \sum m_i \tilde{v}_i^2 / 2 = \sum m_i (\tilde{v}_i + V_C)^2 / 2 = \\ &= \sum m_i \tilde{v}_i^2 / 2 + V_C \sum m_i \tilde{v}_i + \sum m_i V_C^2 / 2. \end{aligned}$$

Como $\sum m_i \tilde{v}_i = 0$, en el sistema *C* la expresión anterior toma el aspecto

$$\boxed{T = \tilde{T} + \frac{mV_C^2}{2} = \tilde{T} + \frac{p^2}{2m}}, \quad (4.12)$$

donde $\tilde{T} = \sum m_i \tilde{v}_i^2 / 2$ es la energía cinética sumaria de las partículas en el sistema *C*, *m* es la masa de todo el sistema, *p* es su impulsión total en el sistema *K* de referencia.

De ese modo, la energía cinética de un sistema de partículas consta de la energía cinética sumaria \tilde{T} en el sistema *C* y de la energía cinética, ligada con el movimiento del sistema de partículas como un todo. Esta es una importante deducción que será empleada reiteradamente en el futuro (en particular, durante el estudio de la dinámica del sólido).

De la fórmula (4.12) se desprende que la energía cinética de un sistema de partículas en el sistema *C* es la mí-

nima: ésta es otra particularidad del sistema C . En efecto, $V_{C1} = 0$ en el sistema C y por eso, en (4.12) queda sólo \tilde{T} .

Ahora pasemos a la energía mecánica total E . Como la energía potencial propia U del sistema depende solamente de la configuración de éste, el valor de U es igual en todos los sistemas de referencia. Agregando U en los miembros primero y segundo de la igualdad (4.12), obtenemos la fórmula de transformación de la energía mecánica total durante el paso del sistema K al C :

$$E = \tilde{E} + \frac{mV_C^2}{2} = \tilde{E} + \frac{p^2}{2m}. \quad (4.13)$$

La energía $\tilde{E} = \tilde{T} + U$ denomínase *energía mecánica interna* del sistema.

Ejemplo. En un plano horizontal liso se encuentran dos pequeñas golillas, cada una de masa m , que se unen entre sí por medio de un resorte imponderable. A una de las golillas se comunicó una velocidad inicial v_0 , como se muestra en la fig. 59. ¿Cuál es la energía mecánica interna \tilde{E} de este sistema en el proceso de movimiento?

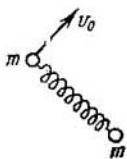


Fig. 59

Como el plano es liso, el sistema se comporta en el proceso del movimiento como si fuera cerrado. Por eso su energía mecánica total E y la impulsión sumaria p se conservan, quedándose iguales a los valores que ellas tenían en el momento inicial, es decir, $E = mv_0^2/2$, $p = mv_0$. Sustituyendo estos valores en la fórmula (4.13), obtenemos

$$\tilde{E} = E - p^2/(2 \cdot 2m) = mv_0^2/4.$$

Es fácil comprender, que la energía interna \tilde{E} está ligada con la rotación y la oscilación del sistema dado, siendo \tilde{E} en el momento inicial igual sólo a la energía del movimiento giratorio.

Si el sistema de partículas es *cerrado* y en él tienen lugar procesos relacionados con la variación de la energía mecánica total, entonces de (4.13) se deduce que $\Delta E = \Delta \tilde{E}$, es decir, el incremento de la energía mecánica total con relación a un sistema inercial arbitrario de referencia es igual al incremento de la energía mecánica *interna*. Con ello no varía la energía cinética condicionada por el movimiento del sistema de partículas como un todo, ya que para un sistema cerrado $p = \text{const.}$

En particular, si el sistema cerrado es *conservativo*, su energía mecánica total se conserva en todos los sistemas inerciales de referencia. Esta deducción se encuentra en correspondencia total con el principio de relatividad de Galileo.

Sistema de dos partículas. Sea que las masas de las partículas sean iguales a m_1 y m_2 y sus velocidades en el sistema K de referencia v_1 y v_2 , respectivamente. Encontremos las expresiones que determinan sus impulsiones y la energía cinética sumaria en el sistema C .

La impulsión de la primera partícula en el sistema C

$$\tilde{p}_1 = m_1 \tilde{v}_1 = m_1 (v_1 - V_C),$$

donde V_C es la velocidad del centro de inercia (del sistema C) en el sistema K de referencia. Después de la sustitución de la expresión (4.9) en esta fórmula obtenemos para V_C

$$\tilde{p}_1 = \mu (v_1 - v_2),$$

donde μ es la llamada *masa reducida* del sistema,

$$\boxed{\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)}. \quad (4.14)$$

Análogamente, la impulsión de la segunda partícula en el sistema C

$$\tilde{p}_2 = \mu (v_2 - v_1).$$

De ese modo, las impulsiones de ambas partículas en el sistema C son iguales según el módulo y están dirigidas en sentido contrario, siendo el módulo de la impulsión de cada partícula

$$\boxed{\tilde{p} = \mu v_{rel}}, \quad (4.15)$$

donde $v_{rel} = |v_1 - v_2|$ es la velocidad de una partícula con relación a la otra.

Ahora recurramos a la energía cinética. La energía cinética sumaria de ambas partículas en el sistema C

$$\tilde{T} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 = \tilde{p}^2 / 2m_1 + \tilde{p}^2 / 2m_2.$$

Como, según (4.14), $1/m_1 + 1/m_2 = 1/\mu$, entonces

$$\boxed{\tilde{T} = \tilde{p}^2/2\mu = \mu v_{\text{rel}}^2/2.} \quad (4.16)$$

Si las partículas interactúan una con la otra, la energía mecánica total de ambas partículas en el sistema

$$\tilde{E} = \tilde{T} + U, \quad (4.17)$$

donde U es la energía potencial de interacción de las partículas dadas.

Las fórmulas obtenidas juegan un gran papel en el estudio de la colisión de las partículas.

§ 4.3. Colisión de dos partículas

En este párrafo estudiaremos casos diferentes de colisión de dos partículas, usando en calidad de instrumento de investigación sólo las leyes de conservación de la impulsión y de la energía. Con ello vemos que las leyes de conservación permiten hacer una serie de conclusiones muy generales y esenciales sobre las propiedades del proceso dado fuera de toda dependencia de la ley concreta de interacción de las partículas.

Al mismo tiempo demostramos que ventajas ofrece el sistema C , cuyo empleo, como se verá, simplifica considerablemente el análisis del proceso y muchos cálculos.

Aunque nosotros vamos a hablar de la colisión de partículas, es necesario estipular inmediatamente, que los razonamientos y deducciones siguientes se refieren, además, en igual grado a la colisión de *todos los cuerpos*. Sólo es necesario tener en cuenta que en lugar de la velocidad de una partícula se debe tomar la velocidad del centro de inercia de cada cuerpo, y en lugar de la energía cinética de la partícula, aquella parte de la energía cinética de cada cuerpo que caracteriza su movimiento como un todo.

En el futuro vamos a considerar que:

- 1) el sistema inicial K de referencia es inercial,
- 2) el sistema de dos partículas es cerrado,
- 3) las impulsiones (y las velocidades) de las partículas antes y después de la colisión corresponden a distan-

cias bastante grandes entre ellas; con ello, se puede simplemente despreciar la energía potencial de interacción.

Además, vamos a señalar con una raya las magnitudes que atañen al sistema después de la colisión, en tanto que las magnitudes en el sistema C , con el signo \sim (tilde) arriba.

Ahora pasamos a la esencia del problema. Se distinguen tres tipos de colisión de las partículas: absolutamente no elástica, absolutamente elástica y el caso intermedio, o sea, no elástica.

Colisión absolutamente no elástica, como resultado de la cual ambas partículas se adhieren y luego se mueven como un todo. Sea que dos partículas, cuyas masas son m_1 y m_2 , tienen las velocidades v_1 y v_2 antes de la colisión (en el sistema K). Después de la colisión se forma una partícula de masa $m_1 + m_2$, lo que se deduce directamente de la aditividad de la masa en la mecánica newtoniana. La velocidad v' de la partícula formada se puede hallar de inmediato de la ley de conservación de la impulsión

$$(m_1 + m_2) v' = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Es evidente, que la velocidad v' es igual a la velocidad del centro de inercia del sistema.

Este proceso tiene el aspecto más simple en el sistema C : estas partículas, antes de la colisión, se movían al encuentro una de otra con impulsiones iguales \tilde{p} , y después de la colisión la partícula que se formó resulta inmóvil. Con ello, la energía cinética sumaria \tilde{T} de las partículas pasa por completo a la energía interna Q de la partícula que se ha formado, es decir, $\tilde{T} = Q$. De aquí, teniendo en cuenta a la fórmula (4.16), encontramos

$$Q = \frac{\mu v_{rel}^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2.$$

De ese modo, la magnitud Q para el par de partículas dado depende solamente de su velocidad relativa.

Colisión absolutamente elástica, como resultado de la cual la energía interna de las partículas no varía y, por eso, no varía la energía cinética del sistema. Examinemos dos casos particulares: colisiones elásticas frontal y no frontal.

1. *La colisión frontal* es aquella con la que cual ambas partículas antes y después de la colisión se mueven por una misma recta. Sea que las velocidades de las partículas en el sistema K de referencia antes de la colisión sean iguales a v_1 y v_2 (las partículas se mueven o al encuentro una a la otra, o bien una alcanza a la otra). ¿Cuál será la velocidad de movimiento de las partículas después de la colisión?

Primero examinemos este proceso en el sistema C , donde ambas partículas tienen, antes y después de la

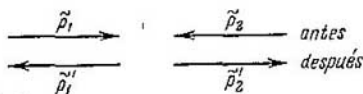


Fig. 60

colisión, impulsiones iguales según el módulo y que están dirigidas en sentido contrario (fig. 60). Además, como la energía cinética sumaria de las partículas antes y después de la colisión es igual, como también su masa reducida, entonces, según (4.16), la impulsión de cada partícula varía, como resultado de la colisión, solamente la dirección por la contraria, sin que varía con ello el módulo, es decir, $\tilde{p}_i = -\tilde{p}_i$, donde $i = 1, 2$. Lo último se refiere así mismo a la velocidad de cada partícula en el sistema C :

$$\tilde{v}_i = -\tilde{v}_i.$$

Ahora encontremos la velocidad de cada partícula en el sistema K de referencia después de la colisión. Para esto usamos la fórmula de transformación de la velocidad durante el paso del sistema C al K , así como la igualdad anterior. Entonces

$$v'_i = V_C + \tilde{v}'_i = V_C - \tilde{v}_i = V_C - (v_i - V_C) = 2V_C - v_i,$$

donde V_C es la velocidad del centro de inercia (del sistema C) en el sistema K de referencia; esta velocidad se determina por la fórmula (4.9). Así, la velocidad de la i -ésima partícula en el sistema K después de la colisión es

$$v'_i = 2V_C - v_i, \quad (4.18)$$

donde $i = 1, 2$. Esta igualdad en las proyecciones sobre un eje arbitrario x tiene el aspecto

$$v'_{ix} = 2V_{Cx} - v_{ix}. \quad (4.19)$$

En particular, si las masas de las partículas son iguales, es fácil convencerse que como resultado de la colisión las partículas simplemente intercambian sus velocidades, es decir, $v'_1 = v_2$ y $v'_2 = v_1$.

2. *Colisión no frontal.* Limitémonos al caso, cuando una de las partículas está *en reposo* antes de la colisión.

Sea que en el sistema K de referencia una partícula de masa m_1 con una impulsión \vec{p}_1 ha experimentado una colisión elástica no frontal con una partícula de masa m_2 en reposo. ¿Cuales son las posibles impulsiones de estas partículas después de la colisión?

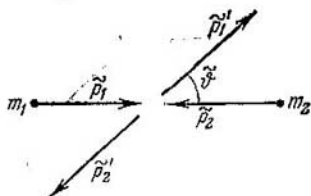


Fig. 61

También examinemos primero este proceso en el sistema C . Aquí, como en el caso anterior, ambas partículas tienen impulsiones de igual módulo y están dirigidas en sentido contrario en todo momento de tiempo antes y después de la colisión. Además, el módulo de la impulsión de cada partícula no varía como resultado de la colisión, es decir,

$$\tilde{p}' = \tilde{p}.$$

Sin embargo, la dirección de la separación de las partículas será ahora otra. Ella constituirá cierto ángulo $\tilde{\theta}$ (fig. 61) con la dirección inicial de movimiento, que depende de la ley de interacción de las partículas y de su disposición mutua en el proceso de la colisión.

Ahora hallamos la impulsión de cada partícula en el sistema K de referencia después de la colisión. Con ayuda de las fórmulas de transformación de la velocidad durante el paso del sistema C al K , obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{p}'_1 &= m_1 \vec{v}'_1 = m_1 (\vec{V}_C + \tilde{\vec{v}}'_1) = m_1 \vec{V}_C + \tilde{\vec{p}}'_1, \\ \vec{p}'_2 &= m_2 \vec{v}'_2 = m_2 (\vec{V}_C + \tilde{\vec{v}}'_2) = m_2 \vec{V}_C + \tilde{\vec{p}}'_2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde V_C es la velocidad del sistema C con relación al sistema K de referencia.

Sumando por separado los miembros primero y segundo de estas igualdades, tomando en cuenta que $\tilde{p}'_1 = -\tilde{p}'_2$, obtenemos

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{V}_C = \mathbf{p}_1,$$

como tenía que ser en correspondencia con la ley de conservación de la impulsión.

Ahora confeccionemos el llamado *diagrama vectorial de impulsiones*. Primero representamos el vector \mathbf{p}_1 por

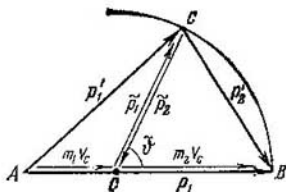


Fig. 62

el segmento AB (fig. 62), luego los vectores \mathbf{p}'_1 y \mathbf{p}'_2 , cada uno de los cuales representa, según (4.20), la suma de dos vectores.

Indiquemos, que esta construcción es justa independientemente del ángulo $\tilde{\varphi}$. De aquí se deduce, que el punto C (fig. 62) sólo puede encontrarse en la circunferencia

de radio \tilde{p} con centro en el punto O , que divide el segmento AB en dos partes en la relación $AO : OB = m_1 : m_2$. Además, en el caso considerado (la partícula de masa m_2 está en reposo antes de la colisión) esta circunferencia pasa por el punto B , o sea, por el extremo del vector \mathbf{p}_1 , ya que el segmento $OB = \tilde{p}$. En realidad,

$$OB = m_2 V_C = m_2 \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2},$$

donde v_1 es la velocidad de la partícula que vuela al encuentro. Y ya que en nuestro caso $v_1 = v_{rel}$, entonces, según (4.14) y (4.15),

$$OB = \mu v_{rel} = \tilde{p}.$$

De ese modo, para la construcción del diagrama vectorial de las impulsiones, correspondiente a la colisión elástica de dos partículas (una de las cuales inicialmente estaba en reposo), es necesario;

- 1) primero representar el segmento AB , igual a la impulsión p_1 de la partícula que vuela al encuentro;
- 2) luego, por el punto B , o sea, por el extremo del vector p_1 , trazar una circunferencia de radio

$$\tilde{p} = \mu v_{\text{rel}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1,$$

el centro de la cual, el punto O , divide el segmento AB en dos partes en la relación $AO : OB = m_1 : m_2$.

Esta circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de todas las posibles posiciones del vértice C del

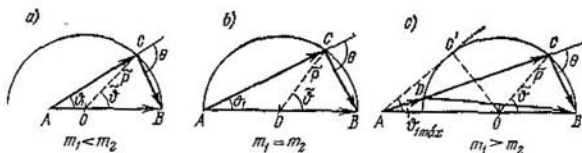


Fig. 63

triángulo de las impulsiones ABC , cuyos lados AC y CB representan las impulsiones posibles de las partículas después de la colisión (en el sistema K de referencia).

En dependencia de la correlación de las masas de las partículas el punto A , o sea, el origen del vector p_1 , puede encontrarse dentro de la circunferencia dada, en ella o fuera de ella (fig. 63). Con ello, el ángulo $\tilde{\vartheta}$ en los tres casos puede tomar todos los valores desde 0 hasta π . Los valores posibles del ángulo de dispersión ϑ_1 de la partícula que vuela al encuentro y del ángulo de divergencia de las partículas θ serán:

- | | | |
|----------------|--|--------------------|
| a) $m_1 < m_2$ | $0 < \vartheta_1 \leq \pi$ | $\theta > \pi/2$ |
| b) $m_1 = m_2$ | $0 < \vartheta_1 \leq \pi/2$ | $\theta = \pi/2$ |
| c) $m_1 > m_2$ | $0 < \vartheta_1 \leq \vartheta_{1 \text{ máx}}$ | $\theta < \pi/2$. |

Aquí $\vartheta_{1 \text{ máx}}$ es el ángulo límite. Se determina por la fórmula

$$\text{sen } \vartheta_{1 \text{ máx}} = m_2/m_1, \quad (4.21)$$

que se desprende directamente de la fig. 63, c: $\text{sen } \vartheta_1 \text{ máx} = OC'/AO = OB/AO = m_2/m_1$.

Además, se descubre otro hecho interesante. En el último caso ($m_1 > m_2$) bajo un mismo ángulo ϑ_1 es posible la dispersión de la partícula m_1 , tanto con la impulsión AC , como con la impulsión AD (fig. 63, c), es decir, en este caso la solución no es unívoca. Con la partícula m_2 el caso es análogo.

Y finalmente, de este mismo diagrama vectorial de las impulsiones se puede encontrar la relación entre los ángulos ϑ_1 y $\tilde{\vartheta}$. Ella se determina por la fórmula

$$\text{tg } \vartheta_1 = \frac{\text{sen } \tilde{\vartheta}}{\cos \tilde{\vartheta} + m_1/m_2}. \quad (4.22)$$

Con esto se agota la información que es posible obtener sobre el proceso dado, partiendo sólo de las leyes de conservación de la impulsión y la energía.

De ese modo, vemos que las leyes de conservación de la impulsión y la energía ya de por sí permiten realmente hacer una serie de importantes deducciones acerca de las propiedades del proceso considerado. Con ello esto es sobre todo esencial el hecho de que estas propiedades tienen carácter general, es decir, no dependen por completo de la naturaleza de la interacción de las partículas.

Se debe, sin embargo, prestar atención a una circunstancia de principio. El diagrama vectorial de las impulsiones, en la base del cual están las leyes de conservación de la impulsión y la energía, dándonos un cuadro completo de todos los posibles casos de divergencia de las partículas después de la colisión, resultado que de por sí es muy importante, no indica en absoluto cuál de estos posibles casos se realiza concretamente. Para responder a esta pregunta es necesario recurrir al estudio más detallado del proceso de colisión con ayuda de las ecuaciones del movimiento. En tal caso se aclara, por ejemplo, que el ángulo de dispersión ϑ_1 de la partícula que vuela al encuentro depende del carácter de la interacción de las partículas que chocan y del llamado *parámetro de impacto* *, mientras que la no uniformidad

*) *Parámetro de impacto*, ésta es la distancia entre la recta, a lo largo de la cual se orienta la impulsión de la partícula que vuela al encuentro y la partícula, con la cual tiene lugar «la colisión»,

de la solución en el caso $m_1 > m_2$ se explica porque un mismo ángulo de dispersión θ_1 puede realizarse con dos valores del parámetro de impacto, no dependiendo de la ley de interacción de las partículas.

La circunstancia indicada es un rasgo muy característico y de principio de las leyes de conservación en general. Las leyes de conservación no dan nunca y no pueden dar un resultado unívoco al problema de lo *qué* ocurre. Pero si, partiendo de algunas otras consideraciones se puede indicar, *qué* debe *precisamente* ocurrir, entonces las leyes de conservación dan respuesta a la pregunta, *cómo* debe transcurrir esto.

Colisión no elástica. Esta es una colisión tal, como resultado de la cual la energía interna de las partículas que divergen (o de una de ellas) varía y, por consiguiente, varía también la energía cinética sumaria del sistema. El incremento correspondiente de la energía cinética del sistema se suele designar por Q . En dependencia del signo de Q la colisión no elástica se denomina *exoenergética* ($Q > 0$) o *endoenergética* ($Q < 0$). En el primer caso la energía cinética del sistema aumenta, en el segundo, disminuye. Con la colisión elástica, naturalmente, $Q = 0$.

Nuestro problema consiste en encontrar las posibles impulsiones de las partículas después de la colisión no elástica.

Este problema se resuelve con la mayor sencillez en el sistema C . Según el planteamiento, el incremento de la energía cinética sumaria del sistema en el proceso dado

$$\tilde{T}' - \tilde{T} = Q. \quad (4.23)$$

Como en el caso dado $\tilde{T}' \neq \tilde{T}$, esto significa, según (4.16), que las impulsiones de las partículas después de la colisión varían según su módulo. La impulsión de cada partícula después de la colisión \tilde{p}' se encuentra fácilmente, cambiando \tilde{T}' en (4.23) por su expresión $\tilde{T}' = \tilde{p}'^2/2\mu$. Como resultado, obtenemos

$$\tilde{p}' = \sqrt{2\mu(\tilde{T} + Q)}. \quad (4.24)$$

Ahora examinemos este mismo problema en el sistema K de referencia, donde una partícula de masa m_1

con una impulsión p_1 experimenta un choque con una partícula de masa m_2 en reposo. Para determinar los casos posibles de divergencia de las partículas después de la colisión, aquí también es útil hacer uso del diagrama vectorial de las impulsiones. Su construcción es análoga a cómo fue hecha para la colisión elástica. La impulsión de la partícula que vuela al encuentro $p_1 = AB$ (fig. 64) se divide por el punto O en dos partes, proporcionales a las masas de las partículas ($AO : OB = m_1 : m_2$). Después, desde el punto O trazamos una circunferencia de radio \tilde{p}' , determinada por la fórmula (4.24). Esta circunferencia es el lugar geométrico

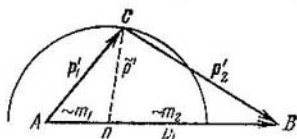


Fig. 64

de todas las posibles posiciones del vértice C del triángulo de las impulsiones ABC , cuyos lados AC y CB son iguales a las impulsiones de las partículas correspondientes después de la colisión.

Señalemos, que ahora, a diferencia de la colisión elástica, el punto B , o sea, el extremo del vector p_1 , no está en la circunferencia, a saber: cuando $Q > 0$ este punto se encuentra dentro de la circunferencia, en tanto que cuando $Q < 0$, fuera de ella. La fig. 64 corresponde al último caso, o sea, a la colisión endoenergética.

Umbral. Existen muchas colisiones no elásticas, en las cuales la energía interna de las partículas es capaz de variar solamente en una magnitud completamente determinada, que depende de las propiedades de las mismas partículas (tales, por ejemplo, son las colisiones no elásticas de los átomos y de las moléculas). A pesar de esto, las colisiones exoenergéticas ($Q > 0$) pueden transcurrir con energía cinética cuan se quiera pequeña de la partícula que vuela al encuentro. Por el contrario, los procesos endoenergéticos ($Q < 0$) tienen en estos

casos *umbral*. Denominan umbral a la energía cinética mínima de la partícula que vuela al encuentro, empezando por la cual el proceso dado se hace posible desde un punto de vista energético.

Así pues, sea necesario realizar una colisión endoenergética tal, en la que la energía interna de las partículas sea capaz de recibir un incremento no menor que cierto valor $|Q|$. ¿Con qué condición este proceso resulta posible?

Este problema también se resuelve del modo más sencillo en el sistema C , donde es evidente que la energía cinética sumaria de las partículas antes de la colisión \tilde{T} debe ser, en todo caso, no menor que $|Q|$, es decir, $\tilde{T} \geq |Q|$. De aquí se deduce que existe un valor mínimo $\tilde{T}_{\min} = |Q|$, con el cual la energía cinética del sistema va íntegramente a aumentar la energía interna de las partículas, y que después de la colisión las partículas *se detendrán* en el sistema C .

Examinemos este mismo problema en el sistema K de referencia, donde la partícula de masa m_1 vuela al encuentro de la partícula *en reposo* m_2 . Como en el sistema C para \tilde{T}_{\min} las partículas después de la colisión se paran, esto significa, que en el sistema K , para la energía cinética de umbral correspondiente $T_{1 \text{ umb}}$, ambas partículas, después de la colisión, se moverán como *un todo* con la impulsión sumaria, igual a la impulsión p_1 de la partícula que vuela al encuentro y la energía cinética $p_1^2/2(m_1 + m_2)$. Por eso

$$T_{1 \text{ umb}} = |Q| + p_1^2/2(m_1 + m_2).$$

Pero $T_{1 \text{ umb}} = p_1^2/2m_1$, entonces, eliminando p_1^2 de estas dos ecuaciones, obtenemos

$$T_{1 \text{ umb}} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} |Q|. \quad (4.25)$$

Esta es la energía cinética de umbral de la partícula que vuela al encuentro, empezando por la cual el proceso endoenergético dado se hace posible desde un punto de vista energético.

Indiquemos, que la fórmula (4.25) juega un gran papel sobre todo en la física atómica y nuclear. Con su ayuda determinan tanto el umbral de diferentes procesos

endoenergéticos, como el valor de la energía $|Q|$ correspondiente a ellos.

En conclusión examinemos un ejemplo que, en esencia, es un modelo de colisión endoenergética (véanse también los problemas 4.5 y 4.8).

Ejemplo. En un plano horizontal liso se encuentran una pequeña bolilla de masa m y una rampa lisa de masa M y altura h (fig. 65).

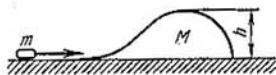


Fig. 65

¿Qué velocidad mínima es necesario comunicar a la bolilla para que pueda salvar la rampa?

Evidentemente, que la velocidad de la bolilla debe ser por lo menos tal, que ella pueda ascender a la cúspide de la rampa y luego moverse junto con ésta como un todo.

Con esto, parte de la energía cinética del sistema va a incrementar la energía potencial $\Delta U = mgh$. Vamos a considerar este proceso como endoenergético, donde $|Q| = \Delta U$. Entonces, según la fórmula (4.25),

$$mv_{\text{umb}}^2/2 = mgh(m+M)/M,$$

de donde

$$v_{\text{umb}} = \sqrt{2(1+m/M)gh}.$$

§ 4.4. Movimiento de un cuerpo de masa variable

Hay muchos casos, cuando la masa de un cuerpo varía en el proceso de movimiento a cuenta del continuo desprendimiento o añadidura de la sustancia (un cohete, un avión de retropropulsión, una plataforma que se carga en marcha, etc.).

Nuestro problema: encontrar la ecuación del movimiento de este cuerpo.

Examinemos la solución de este problema para un punto material, denominándolo para mayor brevedad cuerpo. Sea que en cierto momento de tiempo t la masa del cuerpo que se mueve A sea igual a m , en tanto que la masa que se aporta (o desprende) tiene una velocidad u con respecto al cuerpo dado.

Introducimos el sistema K inercial de referencia auxiliar, la velocidad del cual es la misma que la del cuerpo A en el momento dado t . Esto significa que el cuerpo A en el momento t está en reposo en el sistema K .

Sea después, que en el intervalo de tiempo desde t hasta $t + dt$ el cuerpo A adquiere en el sistema K una impulsión $m dv$. El cuerpo A recibe esta impulsión, en primer lugar, a consecuencia del aporte (desprendimiento) de la masa δm , que aporta (desprende) la impulsión $\delta m \cdot u$ y, en segundo lugar, a consecuencia de la acción de la fuerza F que actúa desde los cuerpos circundantes o desde el campo de fuerzas. De ese modo, se puede escribir que

$$m dv = F dt \pm \delta m \cdot u,$$

donde el signo más corresponde a la aportación de la masa, y el signo menos, al desprendimiento. Estos dos casos se pueden reunir, presentando $\pm \delta m$ como el incremento dm de la masa del cuerpo A (en realidad en el caso de aportación de la masa $dm = + \delta m$, y en el caso de desprendimiento $dm = - \delta m$). Entonces la ecuación anterior toma el aspecto

$$m dv = F dt + dm \cdot u.$$

Dividiendo esta expresión por dt , obtenemos

$$\boxed{m \frac{dv}{dt} = F + \frac{dm}{dt} u,} \quad (4.26)$$

donde u es la velocidad de la sustancia aportada (desprendida) con relación al cuerpo considerado.

Esta ecuación es la *ecuación básica de la dinámica del punto material con masa variable*. La denominan *ecuación de Mescherski*.

Siendo obtenida en un sistema inercial de referencia, esta ecuación, a cuenta del principio de relatividad, es también justa en cualquier otro sistema inercial. Indiquemos, que si el sistema de referencia no es inercial, entonces por la fuerza F se debe entender la resultante de las fuerzas de interacción del cuerpo dado con los cuerpos circundantes, como así mismo las fuerzas de inercia.

El último término de la ecuación (4.26) se llama *fuerza reactiva*: $R = (dm/dt) u$. Esta fuerza surge como resultado de la acción de la masa aportada (o desprendida) sobre el cuerpo dado. Si la masa se asocia, $dm/dt > 0$ y la dirección del vector R coincide con el vector u ;

mas si la masa se desprende, $dm/dt < 0$ y el vector \mathbf{R} es contrario al vector \mathbf{u} .

La ecuación de Mescherski coincide por su forma con la ecuación fundamental de dinámica del punto material de masa constante: a la izquierda, el producto de la masa del cuerpo por la aceleración, a la derecha, las fuerzas que sobre él actúan, incluyendo la fuerza reactiva. Sin embargo, en el caso de la masa variable no se puede introducir la masa m bajo el signo de diferenciación y presentar el primer miembro de la ecuación como la derivada del impulso conforme al tiempo, ya que $m dv/dt \neq d(mv)/dt$.

Prestemos atención a dos casos particulares.

1. Si $\mathbf{u} = 0$, es decir, la masa se aporta o se desprende sin velocidad con relación al cuerpo, entonces $\mathbf{R} = 0$ y la ecuación (4.26) adquiere el aspecto

$$m(t) \frac{dv}{dt} = F, \quad (4.27)$$

donde $m(t)$ es la masa del cuerpo en el momento de tiempo dado. Esta ecuación determina, por ejemplo, el movimiento de una plataforma, de la cual se derrama libremente la arena (véase el problema 4.10, punto 1-ro).

2. Si $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$, es decir, la masa que se aporta está inmóvil en el sistema de referencia elegido o la masa que se desprende se hace inmóvil en este sistema, la ecuación (4.26) toma otra forma

$$m(dv/dt) + (dm/dt)v = F,$$

o bien

$$d(mv)/dt = F. \quad (4.28)$$

Con otras palabras, en este caso particular, y sólo en él, la acción de la fuerza F determina la variación de la *impulsión* del cuerpo de masa variable. El caso dado se realiza, por ejemplo, durante el movimiento de una plataforma que se carga con una sustancia a granel desde una tolva inmóvil (véase el problema 4.10, punto 2-o).

Examinemos un ejemplo de empleo de la ecuación de Mescherski.

Ejemplo. Un cohete se mueve en un sistema K inercial de referencia en ausencia del campo de fuerzas externo, pero de modo que el flujo de gas sale con velocidad constante \mathbf{u} respecto al cohe-

tâ. Encontrar la dependencia entre la velocidad del cohete y su masa m , si ella en el momento de partida era igual a m_0 .

En el caso dado $F = 0$ y de la ecuación (4.26) se deduce

$$dv = u dm/m.$$

Integrando esta expresión teniendo en cuenta las condiciones iniciales, obtenemos

$$v = -u \ln (m_0/m), \quad (1)$$

donde el signo menos muestra, que el vector v (la velocidad del cohete) está dirigido en dirección contraria al vector u . De aquí se ve, que en el caso dado la velocidad del cohete ($u = \text{const}$) no depende del tiempo de combustión del combustible: v se determina solamente por la relación entre la masa inicial m_0 del cohete y la masa que queda m .

Señalemos, que si toda la masa del combustible fuera lanzada simultáneamente a la velocidad u con relación al cohete, entonces la velocidad de este último resultaría ser otra. En realidad, si al principio el cohete estaba en reposo en el sistema inercial de referencia elegido, y después del lanzamiento simultáneo de todo el combustible adquirió la velocidad v , de la ley de conservación de la impulsión para el sistema cohete-combustible se deduce

$$0 = mv + (m_0 - m)(u + v),$$

donde $u + v$ es la velocidad del combustible con relación al sistema de referencia dado. De aquí

$$v = -u (1 - m/m_0). \quad (2)$$

En este caso la velocidad v del cohete resulta ser menor que en el anterior (para valores iguales de la relación m_0/m). Es fácil convencerse de esto, comparando en ambos casos el carácter de la dependencia v de m_0/m . En el primer caso, con el aumento de m_0/m (cuando la sustancia se desprende continuamente) la velocidad v del cohete, según (1), crece ilimitadamente, mas en el segundo según (2), tiende al límite, igual a $-u$.

Problemas para el capítulo 4

4.1. Una partícula se mueve con impulsión $p(t)$ bajo la acción de la fuerza $F(t)$. Sean a y b vectores constantes y $a \perp b$. Suponiendo, que:

1) $p(t) = a + t(1 - \alpha t)b$, donde α es una constante positiva, hallar el vector F en aquel momento de tiempo, cuando $F \perp p$;

2) $F(t) = a + 2tb$ y $p(0) = p_0$, donde p_0 es un vector dirigido en sentido contrario al vector a , encontrar el vector p en el momento t_0 , cuando él está girado 90° en relación al vector p_0 .

Solución. 1. La fuerza $F = dp/dt = (1 - 2\alpha t)b$, es decir, el vector F es siempre perpendicular al vector a . Por consiguiente, el vector F será perpendicular al vector p en aquellos momentos, cuando el coeficiente de b en la expresión para $p(t)$ se anula. De aquí $t_1 = 0$ y $t_2 = 1/\alpha$; los valores correspondientes del vector F son iguales a

$$F_1 = b, \quad F_2 = -b.$$

2. El incremento del vector p en el intervalo de tiempo dt es $dp = Fdt$. Integrando esta ecuación, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, encontramos

$$p - p_0 = \int_0^t F dt = at + bt^2,$$

donde, por planteamiento, p_0 es inverso al vector a . En el momento t_0 , cuando $at_0 = p_0$ el vector p resulta perpendicular al vector p_0 . En este momento $p = (p_0/a)^{2b}$.

4.2. Por una polea (fig: 66) se hace pasar un cordón, en un extremo del cual hay una escalera con un hombre A y en el otro, un contrapeso que equilibra de masa M . El hombre, la masa del cual es m , realizó un desplazamiento $\Delta r'$ hacia arriba con relación a la escalera y después se detuvo. Despreciando las masas de la polea y del cordón, así como el rozamiento en el eje de la polea, encontrar el desplazamiento del centro de inercia de este sistema.

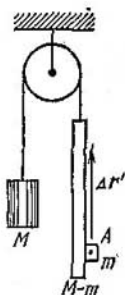


Fig. 66

Solución. Al principio todos los cuerpos del sistema estaban en reposo, por eso el incremento de las impulsiones de los cuerpos durante el movimiento es igual a las mismas impulsiones. Las fuerzas de tensión del cordón son iguales a la izquierda y a la derecha y, por lo tanto, las impulsiones de la carga (p_1) y de la escalera con el hombre (p_2) van a ser iguales en cada momento de tiempo, es decir, $p_1 = p_2$, o bien

$$Mv_1 = mv + (M - m)v_2,$$

donde v_1 , v y v_2 son las velocidades del contrapeso, del hombre y de la escalera. Teniendo en cuenta que $[v_2 = -v_1$ y $v = v_2 + v'$, donde v' es la velocidad del hombre con relación a la escalera, obtenemos

$$v_1 = (m/2M)v'. \quad (1)$$

De otro lado, la impulsión de todo el sistema

$$p = p_1 + p_2 = 2p_1 \text{ ó } 2Mv_C = 2Mv_1,$$

donde v_C es la velocidad del centro de inercia del sistema. De aquí, teniendo en cuenta (1), obtenemos

$$v_C = v_1 = (m/2M)v'.$$

Y finalmente, el desplazamiento buscado

$$\Delta r_C = \int v_C dt = (m/2M) \int v' dt = (m/2M) \Delta r'.$$

El otro procedimiento de solución se basa en la propiedad del centro de inercia. En el sistema de referencia, ligado con el eje de

la polea, la posición del centro de inercia del sistema dado se determina por el radio vector

$$r_C = [Mr_1 + (M - m)r_2 + mr_3]/2M,$$

donde r_1 , r_2 y r_3 son los radios vectores de los centros de inercia del contrapeso M , de la escalera y del hombro con relación a cierto punto O del sistema de referencia dado. De aquí, el desplazamiento del centro de inercia Δr_C es igual a

$$\Delta r_C = [M \Delta r_1 + (M - m) \Delta r_2 + m \Delta r_3]/2M,$$

donde Δr_1 , Δr_2 y Δr_3 son los desplazamientos del contrapeso M , de la escalera y del hombro con relación al sistema de referencia dado. Teniendo en cuenta, que $\Delta r_1 = -\Delta r_2$ y $\Delta r_3 = \Delta r_2 + \Delta r'$, como resultado obtenemos

$$\Delta r_C = (m/2M) \Delta r'.$$

4.3. Un sistema se compone de dos bolas de masas m_1 y m_2 , unidas entre sí por un resorte imponderable. Comunicamos a las bolas las velocidades v_1 y v_2 , como se muestra en la fig. 67, después de lo cual el sistema

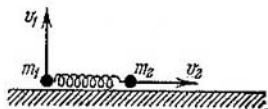


Fig. 67

empieza a moverse en el campo homogéneo de las fuerzas de gravedad de la Tierra. Despreciando la resistencia del aire y considerando que el resorte en el momento inicial no se deforma, hallar:

1) la velocidad $V_C(t)$ del centro de inercia de este sistema en dependencia del tiempo;

2) la energía mecánica interna del sistema en el proceso de movimiento.

Solución. 1. El incremento del vector de velocidad del centro de inercia es, según (4.11), $dV_C = gdt$. Integrando esta ecuación, obtenemos $V_C(t) - V_C(0) = gt$, donde $V_C(0)$ es la velocidad inicial del centro de inercia. De aquí

$$V_C(t) = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2) + gt$$

2. La energía mecánica interna del sistema es su energía \tilde{E} en el sistema C . En el caso dado el sistema C se mueve con la aceleración g , por eso en este sistema de referencia sobre cada bola actúan dos fuerzas externas: la fuerza de gravedad $m_i g$ y la fuerza de inercia, igual a $-m_i g$. Evidentemente, que el trabajo sumario de estas fuerzas externas es igual a cero (en el sistema C), y por consiguiente, no variará la energía \tilde{E} . Para encontrarla, es suficiente examinar el momento inicial de tiempo, cuando el resorte aún no se ha deformado y la energía \tilde{E} es sólo igual a la energía \tilde{T}_0 en el sistema C . Haciendo uso de la fórmula (4.16), obtenemos

$$\tilde{E} = \tilde{T}_0 = \frac{\mu}{2} (v_1 - v_2)^2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1^2 + v_2^2).$$

4.4. Una bola con una energía cinética T experimenta una colisión frontal con una pesa elástica, que en principio estaba en

reposito (fig. 68), se deslaza en dirección contraria con una energía cinética T' . Las masas de las tres bolas son iguales. Encontrar la energía de las oscilaciones de la pesa después de la colisión.

Solución. Sean p y p' las impulsiones de la bola que vuela al encuentro antes y después de la colisión y p_C y T_C , la impulsión y la energía cinética de la pesa como un todo después de la colisión.

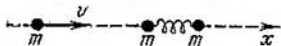


Fig. 68

ción, E , la energía de las oscilaciones. Según las leyes de conservación de la impulsión y de la energía,

$$p = -p' + p_C, \quad T = T' + T_C + E.$$

De estas dos ecuaciones, teniendo en cuenta que $T = p^2/2m$, obtenemos

$$E = (T - 3T' - 2\sqrt{TT'})/2.$$

4.5. La partícula 1 de masa m_1 choca con la partícula 2 de masa m_2 que está en reposo en el sistema K . La carga de cada partícula es igual a $+q$. Encontrar la distancia mínima a la que ellas se aproximan con la colisión frontal, si la energía cinética de la partícula 1 lejos de la partícula 2 es igual a T_1 .

Solución. Estudiemos este proceso tanto en el sistema K , como en el C .

1. Ambas partículas en el sistema K , en el momento de la mayor aproximación se moverán como un todo a la velocidad v que se puede determinar sobre la base de la ley de conservación de la impulsión:

$$p_1 = (m_1 + m_2)v,$$

donde p_1 es el impulso de la partícula que va al encuentro, $p_1 = \sqrt{2m_1T_1}$.

De otro lado, de la ley de conservación de la energía se deduce

$$T_1 = (m_1 + m_2)v^2/2 + \Delta U,$$

donde el incremento de la energía potencial del sistema $\Delta U = kq^2/r_{\text{mín}}$.

Eliminando v de estas dos ecuaciones, encontramos

$$r_{\text{mín}} = (kq^2/T_1)(1 + m_1/m_2).$$

2. La solución en el sistema C es más simple: aquí la energía cinética sumaria va por completo a incrementar la energía potencial del sistema en el momento de la mayor aproximación:

$$\tilde{T} = \Delta U,$$

donde, según (4.18), $\tilde{T} = \mu v_1^2/2 = T_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, $\Delta U = kq^2/r_{\text{mín}}$. De aquí se halla con facilidad $r_{\text{mín}}$.

4.6. Una partícula de masa m_1 con una impulsión p_1 experimenta una colisión elástica con una partícula de masa m_2 en reposo.

Encontrar el impulso p'_1 de la primera partícula después de la colisión, como resultado de la cual ella se dispersó bajo un ángulo ϑ respecto a la la dirección inicial de movimiento.

Solución. De la ley de conservación de la impulsión (fig. 69), encontramos

$$p_2'^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1' \cos \vartheta, \quad (1)$$

donde p_2' es la impulsión de la segunda partícula después de la colisión.

De otro lado, de la ley de conservación de la energía se deduce que $T_1 = T_1' + T_2'$, donde T_1' y T_2' son las energías cinéticas de la primera y de la segunda partícula después de la colisión. Transformemos esta igualdad con ayuda de la correlación $T = p^2/2m$ al tipo

$$p_1'^2 = (p_1^2 - p_1'^2) m_2/m_1. \quad (2)$$

Eliminando $p_2'^2$ de (1) y (2), obtenemos

$$p_1' = p_1 \frac{\cos \vartheta \mp \sqrt{\cos^2 \vartheta + (m_2^2/m_1^2 - 1)}}{1 + m_2/m_1}.$$

Si $m_1 < m_2$, entonces solamente el signo más ante la raíz tiene sentido físico. Esto se deduce de que con esta condición la raíz será mayor que $\cos \vartheta$, y como p_1' es el módulo, entonces, naturalmente no puede ser negativo.

Mas si $m_1 > m_2$, entonces sentido físico tienen los dos signos ante la raíz, en este caso el resultado no es unívoco: la impulsión de la partícula dispersada bajo el ángulo ϑ puede tener uno de los dos valores (esto depende de la posición relativa de las partículas en el momento de la colisión). Al último caso corresponde el diagrama vectorial mostrado en la fig. 63, c.

4.7. ¿Qué parte η de su energía cinética pierde una partícula de masa m_1 durante la dispersión elástica bajo un ángulo límite sobre una partícula de masa m_2 en reposo, donde $m_1 > m_2$?

Solución. Sean T_1 , p_1 y T_1' , p_1' los valores de la energía cinética y de la impulsión de la partícula que vuela al encuentro antes y después de la dispersión, entonces

$$\eta = (T_1 - T_1')/T_1 = 1 - T_1'/T_1 = 1 - (p_1'/p_1)^2, \quad (1)$$

es decir, el problema se reduce a encontrar p_1'/p_1 .

Hacemos uso del diagrama vectorial de impulsiones correspondiente al ángulo límite ϑ_{lim} (fig. 70). Del triángulo rectángulo ACO , se deduce, que

$$p_1'^2 = (p_1 - \tilde{p})^2 - \tilde{p}^2 = p_1^2 - 2p_1\tilde{p},$$

de donde

$$(p_1'/p_1)^2 = 1 - 2\tilde{p}/p_1 = 1 - 2m_2/(m_1 + m_2). \quad (2)$$

Después de la sustitución de (2) en (1) obtenemos

$$\eta = 2m_2/(m_1 + m_2).$$

4.8. Un átomo de masa m_1 experimentó un impacto no elástico con una molécula de masa m_2 en reposo. Después del impacto ambas partículas se dispersaron bajo un ángulo θ una de otra con energías cinéticas T'_1 y T'_2 respectivamente, resultando la molécula

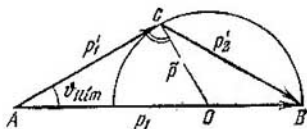


Fig. 70

excitada; su energía interna aumentó en una magnitud determinada Q . Encontrar Q , así como la energía cinética de umbral del átomo, con la cual es posible el paso de la molécula al estado de excitación dado.

Solución. De las leyes de conservación de la energía y de la impulsión en este proceso se deduce

$$T_1 = T'_1 + T'_2 + Q,$$

$$p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2' \cos \theta,$$

donde con rayas se señalan las magnitudes después del impacto (la segunda correlación se deduce de inmediato del triángulo de impulsiones según el teorema del coseno). Haciendo uso de la fórmula $p^2 = 2mT$, eliminamos T_1 de estas ecuaciones. Como resultado obtenemos

$$Q = (m_2/m_1 - 1) T'_2 + 2 \sqrt{(m_2/m_1) T'_1 T'_2} \cos \theta$$

y

$$T_{1 \text{ umb}} = |Q| (m_1 + m_2)/m_2.$$

4.9. Una partícula con una impulsión p_0 (en el sistema K) se desintegró en el vuelo en dos partículas de masas m_1 y m_2 . Con ello se liberó la energía Q , o sea, la energía de desintegración (se transformó en energía cinética). Construir el diagrama vectorial para este proceso y encontrar con su ayuda las impulsiones posibles p_1 y p_2 de las partículas que surgen.

Solución. Este proceso se examina más simplemente en el sistema C : aquí la partícula que se desintegra está en reposo, y las partículas de desintegración se separan en sentidos opuestos con impulsiones de igual módulo $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{p}$. La energía de desintegración Q se convierte por completo en la energía cinética sumaria \tilde{T} de las partículas que surgen.

$$\tilde{p} = \sqrt{2\mu\tilde{T}} = \sqrt{2\mu Q},$$

donde μ es la masa reducida de las partículas que surgen.

Ahora halleemos las impulsiones de estas partículas en el sistema K . Haciendo uso de la fórmula de transformación de las velocidades durante el paso del sistema C al K , escribimos:

$$\begin{aligned} p_1 &= m_1 v_1 = m_1 (V_C + \tilde{v}_1) = m_1 V_C + \tilde{p}_1, \\ p_2 &= m_2 v_2 = m_2 (V_C + v_2) = m_2 V_C + p_2, \end{aligned}$$

al mismo tiempo, según la ley de conservación de la impulsión $p_1 + p_2 = p_0$.

Con ayuda de estas fórmulas construimos el diagrama vectorial de impulsiones (fig. 71). Primero trazamos el segmento AB , igual a la impulsión p_0 . Después, con el radio \tilde{p} trazamos una circunferencia con centro en el punto O , que divide el segmento AB en dos

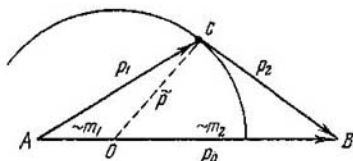


Fig. 71

partes en la relación $m_1 : m_2$. Esta circunferencia es precisamente el lugar geométrico de los puntos de todas las posiciones posibles del vértice C del triángulo de impulsiones ABC .

4.10. Una plataforma empieza a moverse en el momento $t = 0$ bajo la acción de la fuerza de tracción constante F . Despreciando el roce en los ejes, determinar la dependencia entre la velocidad de la plataforma y el tiempo, si:

1) ella está cargada de arena que se vierte a velocidad constante μ , kg/s, a través de un orificio en el fondo, y en el momento $t = 0$ la masa de la plataforma con la arena es igual a m_0 ;

2) en el momento $t = 0$ empieza a verterse arena desde una tolva fija sobre una plataforma la masa de la cual es m_0 , de modo que la velocidad de carga es constante e igual a μ kg/s.

Solución. 1. En este caso la fuerza reactiva es igual a cero y la ecuación de Mescherski (4.26) tiene el aspecto

$$(m_0 - \mu t) \frac{dv}{dt} = F,$$

de donde

$$dv = F dt / (m_0 - \mu t).$$

Integrando esta ecuación teniendo en cuenta las condiciones iniciales, obtenemos

$$v = (F/\mu) \ln [m_0 / (m_0 - \mu t)].$$

2. En el caso dado la componente horizontal de la fuerza reactiva (y sólo esta componente nos interesa) $R = \mu (-v)$, donde v es la velocidad de la plataforma. Por eso la ecuación de Mescherski

se reduce a la forma (4.28), o bien

$$d(mv) = Fdt$$

Integrando esta ecuación, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, obtenemos

$$mv = Ft,$$

donde $m = m_0 + \mu t$. De aquí

$$v = Ft/(m_0 + \mu t).$$

Las expresiones obtenidas en ambos casos son justas, naturalmente, sólo en el proceso de descarga (o carga) de la plataforma.

4.11. Una nave cósmica de masa m_0 se mueve a velocidad constante v_0 en ausencia del campo externo de fuerzas. Para la variación de la dirección del movimiento fue conectado un motor retro-pulsor, que empezó a lanzar un chorro de gas a velocidad constante u con respecto a la nave, siendo el vector u todo el tiempo perpendicular al movimiento de la nave. Al final del trabajo del motor la masa de la nave se hizo igual a m . Encontrar el ángulo en que varió la dirección del movimiento de la nave en el tiempo de trabajo del motor.

Solución. Encontramos el incremento del vector de velocidad de la nave en el intervalo de tiempo dt . Multiplicando ambos miembros de la ecuación de Mescherski (4.26) por dt y teniendo en cuenta que $F = 0$, obtenemos

$$dv = u dm/m.$$

Aquí $dm < 0$. Como el vector u es todo el tiempo perpendicular al vector v (velocidad de la nave), el módulo del vector v no varía y permanece igual al valor inicial: $|v| = |v_0| = v_0$. De aquí se deduce, que el ángulo de giro $d\alpha$ del vector v en el tiempo dt es igual a

$$d\alpha = |dv|/v_0 = (u/v_0) |dm/m|.$$

Integrando esta ecuación, encontramos

$$\alpha = (u/v_0) \ln(m_0/m).$$

Capítulo 5

Ley de conservación del momento de impulsión

§ 5.1. Momento de impulsión de una partícula. Momento de fuerza

El análisis del comportamiento de los sistemas muestra que, además de la energía y la impulsión, existe otra magnitud mecánica con la cual también está ligada la ley de conservación, es decir, el denominado *momento de impulsión* *. ¿Qué magnitud es ésta y cuáles son sus propiedades?

Primero tomemos una partícula. Sea r el radio vector que caracteriza su posición con relación a cierto punto O del sistema de referencia elegido y p , su impulsión en este sistema. Momento de impulso de la partícula A respecto al punto O (fig. 72) se denomina el vector L , igual al producto vectorial de los vectores r y p :

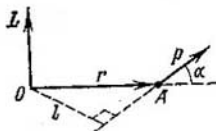


Fig. 72

$$\boxed{L = [rp]}. \quad (5.1)$$

De esta definición se deduce que L es un vector axial. Su dirección se elige de tal modo que la rotación alrededor del punto O en la dirección del vector p y el vector L correspondan a un sistema dextrógiro. El módulo del vector L es igual a

$$L = rp \sin \alpha = lp, \quad (5.2)$$

donde α es el ángulo entre r y p , $l = r \sin \alpha$, el brazo del vector p con relación al punto O (fig. 72).

*) También emplean las denominaciones *momento de cantidad de movimiento*, *momento de rotación*, *momento angular*, o simplemente *momento*.

Ecuación de los momentos. Aclaremos qué magnitud mecánica es responsable de la variación del vector L en el sistema de referencia dado. Para esto diferenciamos (5.1) conforme al tiempo:

$$dL/dt = [dr/dt, p] + [r, dp/dt].$$

Como el punto O es fijo, el vector dr/dt es igual a la velocidad v de la partícula, es decir, su dirección coincide con el vector p , por eso

$$[dr/dt, p] = 0.$$

Luego, según la segunda ley de Newton, $dp/dt = F$, donde F es la resultante de todas las fuerzas aplicadas a la partícula. Por consiguiente,

$$dL/dt = [rF].$$

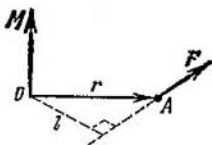


Fig. 73

A la magnitud en el segundo miembro de esta ecuación, denominámla *momento de fuerza F* con relación al punto O (fig. 73). Designándolo por M , escribimos

$$\boxed{M = [rF].} \quad (5.3)$$

El vector M , como también L , es axial. El módulo de este vector, análogamente a (5.2), es igual a

$$M = lF, \quad (5.4)$$

donde l es el brazo del vector F con relación al punto O (fig. 73).

Así, la derivada conforme al tiempo del momento de impulsión L de la partícula respecto a cierto punto O del sistema de referencia elegido es igual al momento M de la fuerza resultante F respecto a este mismo punto O :

$$\boxed{dL/dt = M.} \quad (5.5)$$

Esta ecuación denomínase *ecuación de los momentos*. Señalemos, que si el sistema de referencia no es inercial, el momento de fuerza M incluye en sí tanto el momento de las fuerzas de interacción, así como el momento de las fuerzas de inercia (con relación a ese mismo punto O).

De la ecuación de los momentos (5.5), en particular, se deduce que si $M \equiv 0$, entonces $L = \text{const}$. Con otras palabras, si el momento de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula con relación a cierto punto O del sistema de referencia elegido, es igual a cero en el transcurso del intervalo de tiempo que nos interesa, entonces el momento de impulsión de la partícula con relación a este punto permanece constante en el transcurso de dicho tiempo.

Ejemplo 1. Cierta planeta A se mueve en el campo de atracción del Sol C (fig. 74). ¿Con relación a qué punto del sistema heliocéntrico de referencia se conservará con el tiempo el momento de impulsión del planeta dado?

Para responder a esta pregunta ante todo es necesario establecer que fuerzas actúan sobre el planeta A . En el caso dado esta es

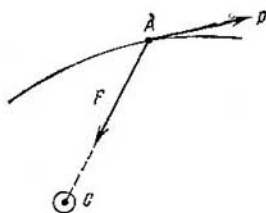


Fig. 74

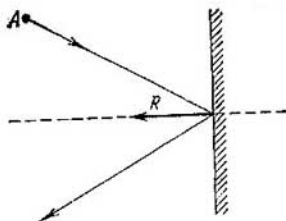


Fig. 75

sólo la fuerza de atracción F del Sol. Como durante el movimiento del planeta la dirección de esta fuerza pasa siempre por el centro del Sol, este último es aquel punto, con relación al cual el momento de fuerza es todo el tiempo igual a cero y el momento de impulsión del planeta se conserva constante. Mas, con esto, la impulsión p del planeta variará.

Ejemplo 2. Una golilla A , moviéndose por un plano horizontal liso, bota elásticamente de una pared vertical lisa (fig. 75, vista desde arriba) Encontrar el punto con relación al cual el momento de impulsión de la golilla quedará constante en este proceso.

Sobre la golilla actúan la fuerza de gravedad, la fuerza de reacción del plano horizontal, la fuerza de reacción R de la pared en el momento del choque con ella. Las primeras dos fuerzas se equilibran entre sí, nos queda la fuerza R . Su momento es igual a cero con relación a cualquier punto que se encuentre en la línea de acción del vector R , lo que significa que el momento de impulsión de la golilla permanecerá constante respecto de cualquiera de estos puntos en el proceso dado.

Ejemplo 3. Sobre un plano horizontal liso se encuentran un cilindro vertical inmóvil y la golilla A , unida con el cilindro mediante un hilo AB (fig. 76, vista desde arriba). Comunicamos a la golilla la velocidad inicial v , como se muestra en este dibujo. ¿Existirá aquí un punto, con relación al cual el momento de impulsión de la golilla permanecerá constante en el proceso de movimiento?

En el caso dado la única fuerza no compensada, que actúa sobre la golilla A , es la fuerza de tensión F del hilo. Es fácil ver que

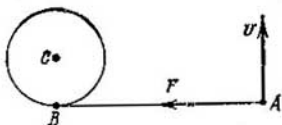


Fig. 76

un punto, con relación al cual el momento de fuerza F sería, en el proceso de movimiento, todo el tiempo igual a cero aquí *no existe*. Y por consiguiente, no existe tampoco un punto respecto al cual el momento de impulsión de la golilla permanezca constante.

Este ejemplo muestra que no siempre existe un punto, con relación al cual el momento de impulsión de una partícula permanezca constante.

La ecuación de los momentos (5.5) permite resolver dos problemas:

1) encontrar el momento de fuerza M con relación al punto O que nos interesa en cualquier momento de tiempo t , si se conoce la dependencia, entre el momento de impulsión de la partícula y el tiempo $L(t)$ respecto a este mismo punto;

2) determinar el incremento del momento de impulsión de la partícula con relación al punto O en cualquier intervalo de tiempo, si se conoce la dependencia entre el momento de fuerza, que actúa sobre esta partícula, y el tiempo $M(t)$ (respecto al mismo punto O).

La solución del primer problema se reduce a encontrar la derivada del momento de impulsión conforme al tiempo, es decir, dL/dt , que es igual, según (5.5), al momento de fuerza buscado M .

La solución del segundo problema se reduce a la integración de la ecuación (5.5). Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por dt , obtenemos $dL = Mdt$, es decir, la expresión que determina el incremento elemental del vector L . Integrando esta ecuación conforme

al tiempo, encontramos el incremento del vector L en el intervalo de tiempo final t :

$$L_2 - L_1 = \int_0^t M dt. \quad (5.6)$$

A la magnitud en el segundo miembro de esta ecuación, se denomina *impulsión del momento de fuerza*. De ese modo, el incremento del momento de impulsión de una partícula en cualquier intervalo de tiempo es igual a la impulsión del momento de fuerza en este mismo tiempo.

Veamos dos ejemplos.

Ejemplo 1. El momento de impulsión de una partícula con relación a cierto punto varía con el tiempo t por la ley $L(t) = a + bt^2$, donde a y b son ciertos vectores constantes, siendo al mismo tiempo $a \perp b$. Hallar el momento de fuerza M que actúa sobre la partícula, cuando el ángulo entre los vectores M y L resulta ser igual a 45° .

Según (5.5), $M = dL/dt = 2bt$, es decir, la dirección del vector M coincide todo el tiempo con el vector b . Tracemos los vectores M y L en cierto momento t (fig. 77). De este dibujo se ve que el ángulo $\alpha = 45^\circ$ en el momento t_0 , cuando $a = bt_0^2$. De aquí,

$$t_0 = \sqrt{a/b} \quad \text{y} \quad M = 2\sqrt{a/b} \cdot b.$$

Ejemplo 2. Lanzamos una piedra A de masa m bajo un ángulo al horizonte a velocidad inicial v_0 . Despreciando la resistencia del aire, encontrar la dependencia entre el momento de impulsión de la piedra y el tiempo $L(t)$ con relación al punto de lanzamiento O (fig. 78).

El momento de impulsión de la piedra recibe en el intervalo de tiempo dt un incremento $dL = Mdt = [r, mg] dt$ con relación al punto O . Como $r = v_0 t + gt^2/2$ (véase la pág. 16), entonces $dL = [v_0, mg] t dt$. Integrando esta expresión teniendo en cuenta que $L(0) = 0$ en el momento $t = 0$, obtenemos $L(t) = [v_0, mg] t^2/2$. De aquí se ve que la dirección del vector L permanece invariable en el proceso de movimiento (el vector L se dirige por el plano, fig. 78).

Momento de impulsión y momento de fuerza con relación al eje. Tomemos en el sistema de referencia que nos interesa el eje inmóvil arbitrario z . Sea que el momento de impulsión de la partícula A con relación a cierto punto

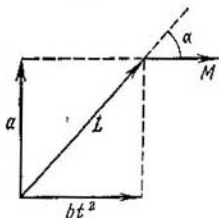


Fig. 77

O en el eje z es igual a L , en tanto que el momento de fuerza que actúa sobre la partícula sea M .

Momento de impulsión con relación al eje z se denomina la proyección sobre este eje del vector L , determinado respecto al punto arbitrario O del eje dado (fig. 79). De forma análoga introducen también el concepto de momento de fuerza respecto al eje. Se designan L_z y M_z correspondientemente. Luego vemos que L_z y M_z no dependen de la elección del punto O en el eje z .

Aclaremos las propiedades de estas magnitudes. Projectando (5.5) sobre el eje z , obtenemos

$$dL_z/dt = M_z, \quad (5.7)$$

es decir, la derivada del momento de impulsión de la partícula conforme al tiempo en relación con el eje z

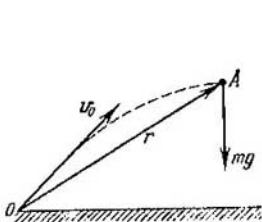


Fig. 78

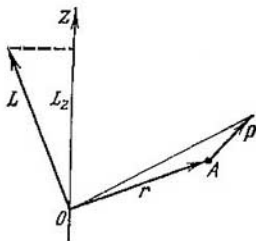


Fig. 79

es igual al momento de fuerza con relación a este mismo eje. En particular, si $M_z \equiv 0$, entonces $L_z = \text{const.}$ Con otras palabras, si el momento de fuerza respecto a cierto eje inmóvil z es igual a cero, entonces el momento de impulsión de la partícula tocante a este eje permanece constante. Con ello, el mismo vector L puede variar.

Ejemplo. Un pequeño cuerpo de masa m , colgado de un hilo, se mueve uniformemente por una circunferencia horizontal (fig. 80) bajo la acción de la fuerza de gravedad mg y de la fuerza de tensión T del hilo. El momento de impulsión del cuerpo (el vector L) con relación al punto O se encuentra en un mismo plano con el eje z y con el hilo, y el vector L , durante el movimiento del cuerpo bajo la acción del momento M de la fuerza de gravedad, se mueve todo el tiempo, es decir, varía. Con esto, la proyección L_z queda constante, ya que el vector M es perpendicular al eje z y $M_z = 0$.

Ahora hallemos las expresiones análogas para L_z y M_z . Es fácil ver, que este problema se reduce a encontrar las proyecciones sobre el eje z de los productos vectoriales $[rp]$ y $[rF]$.

Hacemos uso del sistema cilíndrico de coordenadas ρ , φ , z , ligando con la partícula A (fig. 81) los versores e_ρ , e_φ , e_z , dirigidos hacia el aumento de las coordenadas

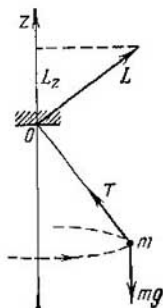


Fig. 80

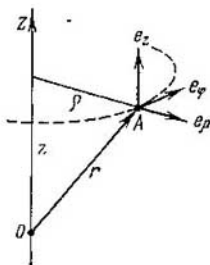


Fig. 81

correspondientes. En este sistema de coordenadas el radio vector r y la impulsión p de la partícula se escriben así:

$$r = \rho e_\rho + z e_z, \quad p = p_\rho e_\rho + p_\varphi e_\varphi + p_z e_z,$$

donde p_ρ , p_φ , p_z son las proyecciones del vector p sobre los versores correspondientes. Del álgebra vectorial se sabe que el producto vectorial $[rp]$ se puede presentar por el determinante

$$L = [rp] = \begin{vmatrix} e_\rho & e_\varphi & e_z \\ \rho & 0 & z \\ p_\rho & p_\varphi & p_z \end{vmatrix}.$$

De aquí se ve inmediatamente que el momento de impulsión de la partícula con relación al eje z

$$L_z = \rho p_\varphi, \quad (5.8)$$

donde ρ es la distancia de la partícula hasta el eje z . Transformemos esta expresión a un tipo más cómodo

para usos prácticos. Teniendo en cuenta que $p_{\varphi} = m\dot{v}_{\varphi} \hat{=} = m\rho\omega_z$, obtenemos

$$L_z = m\rho^2\omega_z, \quad (5.9)$$

donde ω_z es la proyección de la velocidad angular ω , a la cual se mueve el radio vector de la partícula.

Análogamente a (5.8) se escribe el momento de fuerza con relación al eje z :

$$M_z = \rho F_{\varphi}, \quad (5.10)$$

donde F_{φ} es la proyección del vector de la fuerza F sobre el versor e_{φ} .

Prestemos atención a que las proyecciones L_z y M_z no dependen en realidad de la elección del punto O en el eje z , con relación al cual se determinan los vectores L y M . Además, vemos que L_z y M_z son magnitudes algebraicas, sus signos corresponden a los de las proyecciones p_{φ} y F_{φ} .

§ 5.2. Ley de conservación del momento de impulsión

Elegimos un sistema de partículas arbitrario. Introduzcamos el concepto de momento de impulsión del sistema dado como la suma vectorial de los momentos de las impulsiones de sus partes aisladas:

$$L = \sum L_i, \quad (5.11)$$

donde todos los vectores son determinados con relación a un mismo punto O del sistema de referencia dado. Indiquemos, que el momento de impulsión de un sistema es una magnitud *aditiva*: el momento de impulsión de un sistema es igual a la suma de los momentos de impulsión de sus partes por separado, independientemente de que ellas interaccionen entre sí o no.

Aclaremos qué magnitud determina la variación de la impulsión del sistema. Para esto diferenciamos (5.11) conforme al tiempo: $dL/dt = \sum dL_i/dt$. En el párrafo anterior se mostró, que la derivada dL_i/dt es igual al momento de todas las fuerzas que actúan sobre la i -ésima partícula. Representemos estos momentos como la suma de los momentos de las fuerzas internas

y externas, es decir, $\dot{M}_i + \dot{M}_t$. Entonces

$$dL/dt = \sum \dot{M}_i + \sum \dot{M}_t.$$

Aquí, la primera suma es el momento sumario de todas las fuerzas internas con relación al punto O , la segunda, el momento sumario de todas las fuerzas externas con relación a este mismo punto O .

Demostremos que *el momento sumario de todas las fuerzas internas con relación a cualquier punto es igual a cero*. Efectivamente, las fuerzas internas son las fuerzas de interacción entre las partículas del sistema dado. Según la tercera ley de Newton, estas fuerzas son iguales a pares según su módulo, están dirigidas en sentido contrario y se encuentran sobre una recta, es decir, tienen igual brazo. Por eso, los momentos de fuerzas de cada par de interacción son de módulos iguales y tienen direcciones contrarias, es decir, se equilibran entre sí y, por consiguiente, el momento sumario de todas las fuerzas internas es siempre igual a cero.

Como resultado, la última ecuación adquiere el aspecto

$$\boxed{dL/dt = M}, \quad (5.12)$$

donde M es el momento sumario de todas las fuerzas externas, $M = \sum \dot{M}_t$.

La ecuación (5.12) afirma: *la derivada del momento de impulsión del sistema conforme al tiempo es igual al momento sumario de todas las fuerzas externas*. Naturalmente, ambos momentos L y M , aquí están determinados con relación a un mismo punto O del sistema de referencia dado.

Como en el caso de una sola partícula, de la ecuación (5.12) se deduce que el incremento del momento de impulsión del sistema en el intervalo finito de tiempo t

$$\boxed{L_2 - L_1 = \int_0^t M dt}, \quad (5.13)$$

es decir, el incremento del momento de impulsión del sistema es igual a la impulsión del momento sumario de todas las fuerzas externas en el intervalo de tiempo

correspondiente. Y aquí, desde luego, ambos momentos L y M están determinados con relación a un mismo punto O del sistema de referencia elegido.

Las ecuaciones (5.12) y (5.13) son justas tanto en los sistemas de referencia inerciales, así como en los no inerciales. No obstante, en el sistema de referencia no inercial se debe tener en cuenta y la acción de las fuerzas de inercia, que juegan el papel de fuerzas externas, es decir, en estas ecuaciones por M se debe comprender la suma $M_{in} + M_1$, donde M_{in} es el momento sumario de las fuerzas externas de interacción, M_1 , el momento sumario de las fuerzas de inercia (con relación a un mismo punto O del sistema de referencia).

Así, llegamos a una importante deducción: según la ecuación (5.12), *el momento de impulsión del sistema puede variar sólo bajo la acción del momento sumario de todas las fuerzas externas*. De aquí se deriva directamente otra importante deducción, o sea, la ley de conservación del momento de impulsión:

el momento de impulsión de un sistema cerrado de partículas permanece constante en un sistema inercial de referencia, es decir, no varía con el tiempo, siendo esto justo para el momento de impulsión, tomado con relación a cualquier punto del sistema inercial de referencia.

De ese modo, el momento de impulsión de un sistema cerrado de partículas en un sistema inercial de referencia

$$L = \sum_i L_i(t) = \text{const.} \quad (5.14)$$

Con esto, pueden variar con el tiempo los momentos de impulsión de las partes separadas o de las partículas del sistema cerrado, lo que se ha subrayado en la última expresión. Sin embargo, estas variaciones siempre tienen lugar de manera que el incremento del momento de impulsión de una parte del sistema es igual al decremento del momento de impulsión de su otra parte (desde luego, con relación a un mismo punto del sistema de referencia).

En este sentido las ecuaciones (5.12) y (5.13) se pueden considerar como una formulación más general de la ley de conservación del momento de impulsión, en

la cual se indica también *la causa* de la variación del momento de impulsión del sistema que nos interesa, o sea, la acción de otros cuerpos (mediante el momento de las fuerzas externas de interacción). Lo dicho, naturalmente, es justo solamente respecto a los sistemas inerciales de referencia.

Una vez más subrayamos: la ley de conservación del momento de impulsión tiene lugar sólo en lo que se refiere a los sistemas inerciales de referencia. Sin embargo, esto no excluye los casos, cuando el momento de impulsión del sistema asimismo se conserva en los sistemas no inerciales de referencia. Para esto es suficiente que, según la ecuación (5.12), que es justa en los sistemas no inerciales de referencia, el momento sumario de todas las fuerzas externas (incluyendo las de inercia) sea igual a cero. Estas situaciones se realizan bastante raramente y los casos correspondientes tienen carácter muy singular.

La ley de conservación del momento de impulsión juega un papel importante como las leyes de conservación de la energía y de la impulsión. Ya de por sí, dicha ley permite hacer, en muchos casos, una serie de conclusiones esenciales sobre las propiedades de unos u otros procesos, no profundizando absolutamente en su estudio detallado. Ilustremos lo dicho con este ejemplo.

Ejemplo. Dos bolas iguales son colocadas sobre una barra horizontal lisa, por la cual pueden deslizarse (fig. 82). Las bolas

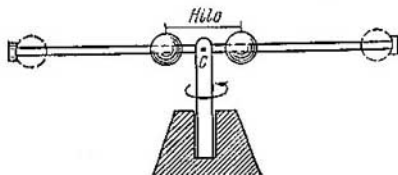


Fig. 82

se aproximan y se unen con un hilo. Después, se pone toda la instalación en rotación alrededor de un eje vertical, dejándola que gire por su cuenta y queman el hilo. Las bolas, naturalmente, se desplazan a los extremos de la barra. Con ello disminuye brusca-
mente la velocidad angular de la instalación.

El efecto observado es resultado directo de la ley de conservación del momento de impulsión, ya que en esencia la instalación dada se comporta como un sistema cerrado (las fuerzas externas compensan unas a otras, las fuerzas de rozamiento en el eje son pequeñas). Para la valoración cuantitativa de la variación de la velocidad angular vamos a considerar, que la masa de toda la instalación se concentra prácticamente en las bolas, cuyas dimensiones son despreciables por su pequeñez. Entonces, de la igualdad de los momentos de impulsión de las bolas con relación al punto C en los estados inicial y final del sistema $2m [r_1 v_1 = 2m [r_2 v_2]$ se deduce

$$r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2.$$

De aquí se ve, que con el aumento de la distancia r de las bolas del eje de rotación la velocidad angular de la instalación disminuye (como $1/r^2$). Y a la inversa, si la distancia entre las bolas disminuyera (bajo la acción de ciertas fuerzas internas), la velocidad angular de la instalación aumentaría. Este efecto tiene carácter general y lo usua ampliamente, por ejemplo, los deportistas de patinaje artístico y los gimnastas.

Prestemos atención al hecho de que el resultado final no depende completamente del carácter de las fuerzas internas (aquí, éstas son las fuerzas de rozamiento entre las bolas y la barra).

Interés especial presentan los casos, cuando el momento de impulsión L se conserva para los sistemas no cerrados en los cuales, como se sabe, la impulsión p varía con el tiempo. Si con relación a cierto punto O del sistema de referencia elegido el momento sumario de las fuerzas externas $M \equiv 0$ en el transcurso de intervalo de tiempo que nos interesa, entonces, según (5.12), el momento de impulsión respecto al punto O se conserva para este tiempo. Este punto en los sistemas no cerrados puede, hablando en general, no existir, lo que se debe aclarar ante todo para cada caso concreto.

Ejemplo 1. El sistema Tierra—Luna, que se mueve en el campo de gravitación del Sol, no es cerrado. Su impulsión varía todo el tiempo bajo la acción de las fuerzas de atracción. Aquí, sin embargo, existe un punto con relación al cual el momento de las fuerzas de atracción, que actúan sobre el sistema dado, es siempre igual a cero, es decir, es el centro del Sol. Por eso de inmediato se puede afirmar que el momento de impulsión del sistema Tierra—Luna respecto al centro del Sol permanece constante.

Ejemplo 2. En el plano horizontal liso se encuentra la barra OB que puede girar libremente alrededor de un eje vertical fijo que pasa por su extremo O (fig. 83). En el extremo B de la barra penetra, acunándose, la golilla A , que se desliza por el plano.

Seguidamente todo el sistema comienza a girar como un todo alrededor del punto O .

Evidentemente, que el sistema golilla—barra no es cerrado: además de las fuerzas, que se equilibran entre sí en dirección vertical, actuará en el proceso del golpe una fuerza horizontal que parte del eje, y después que la barra empieza a girar, surge una fuerza más desde el eje, debido a la cual el centro de inercia del sistema se moverá por un círculo. Pero ambas fuerzas pasan por el punto O y, por consiguiente, el momento de estas fuerzas externas es todo el tiempo igual a cero con relación al punto O . De aquí la deducción: el momento de impulsión del sistema dado permanecerá constante respecto al punto O .

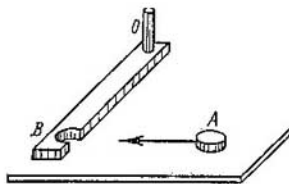


Fig. 83

En un caso más limitado se puede conservar en los sistemas no cerrados no el mismo momento de impulsión L , sino su proyección sobre cierto eje fijo z . Esto sucede cuando la proyección del momento sumario M de todas las fuerzas externas sobre este eje z es igual a cero. En realidad, proyectando la ecuación (5.12) sobre el eje z , obtenemos

$$dL_z/dt = M_z. \quad (5.15)$$

Aquí L_z y M_z son el momento de impulsión y el momento sumario de las fuerzas externas con relación al eje z :

$$L_z = \sum L_{iz}, \quad M_z = \sum M_{iz}, \quad (5.16)$$

donde L_{iz} y M_{iz} son el momento de impulsión y el momento de las fuerzas externas con relación al eje z para la i —ésima partícula del sistema.

De la ecuación (5.15) se deduce que si la proyección $M_z = 0$ con relación a cierto eje fijo en el sistema de referencia dado, entonces el momento de impulsión del sistema respecto a este eje se conserva:

$$L_z = \sum L_{iz}(t) = \text{const.} \quad (5.17)$$

Con ello, puede variar el mismo vector L , determinado con relación a un punto arbitrario O de este eje. Por ejemplo, si el sistema se mueve en un campo de gravedad homogéneo, entonces el momento sumario de todas las

fuerzas de gravedad con relación a cualquier punto fijo O es perpendicular a la vertical, lo que significa que $M_z \equiv 0$ y $L_z = \text{const}$ con relación a cualquier eje vertical, lo que no se puede decir del vector L .

Los razonamientos que conducen a la ley de conservación del momento de impulsión, se basan por completo en la justeza de las leyes de Newton. ¿Y qué sucede en los sistemas que no se someten a estas leyes, por ejemplo, en los sistemas con radiación electromagnética, en los átomos, los núcleos, etc.?

Teniendo en cuenta el enorme papel que juega la ley de conservación del momento de impulsión en mecánica, en física amplían el concepto de momento de impulsión a los sistemas no mecánicos (que no se someten a las leyes de Newton) y postulan la ley de conservación del momento de impulsión para todos los procesos físicos.

Esta ley ampliada de conservación del momento de impulsión ya no es resultado de las leyes de Newton, sino que es un principio general independiente, que aparece como la generalización de hechos experimentales. A la par con las leyes de conservación de la energía y de la impulsión, la ley de conservación del momento de impulsión es una de las leyes fundamentales más importantes de la naturaleza.

§ 5.3. Momento propio de impulsión

En el párrafo anterior fue establecido que el momento de impulsión L del sistema varía solamente bajo la acción del momento sumario M de todas las fuerzas externas; precisamente este vector M determina el comportamiento del vector L . Ahora examinemos algunas de las más esenciales propiedades de estas magnitudes y aquellas importantes deducciones que de ellas se derivan.

Momento sumario de las fuerzas externas. Como el momento de cada fuerza, el momento sumario de fuerzas depende, hablando en general, de la elección del punto con relación al cual lo determinan. Sea M el momento sumario de fuerzas respecto al punto O y M' , respecto al punto O' , el radio vector del cual es r_0 (fig. 84). Encontramos la relación entre M y M' .

Los radios vectores r_i y r'_i del punto de aplicación de la fuerza F_i se ligan por la correlación $r_i = r'_i + r_0$

(fig. 84). Por eso, la expresión para M se puede escribir en este aspecto:

$$M = \sum [r_i F_i] = \sum [r'_i F_i] + \sum [r_0 F_i],$$

o bien

$$M = M' + [r_0 F], \quad (5.18)$$

donde $F = \sum F_i$ es la resultante de todas las fuerzas externas.

De la fórmula (5.18) se ve que si $F = 0$, el momento sumario de las fuerzas externas no depende de la elección del punto, con relación al cual lo determinan. Este, en particular, es el caso cuando al sistema se aplica un par de fuerzas.

En este sentido, el sistema C posee una interesante e importante particularidad (recordemos que este sistema de referencia se liga rígidamente con el centro de inercia del sistema de partículas y se desplaza uniformemente respecto a los sistemas inerciales). Como en el caso general el sistema C es no inercial, la resultante de todas las

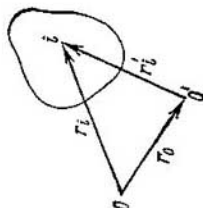


Fig. 84

fuerzas externas de interacción F_{in} , las fuerzas de inercia F_i . De otro lado, en el sistema C el sistema de partículas está en reposo, lo que significa que, según (4.14), $F = F_{in} + F_i = 0$. Teniendo en cuenta (5.18), llegamos a la importante deducción siguiente: en el sistema C el momento sumario de todas las fuerzas externas, incluyendo las de inercia, no depende de la elección del punto O .

Y otra importante deducción: en el sistema C el momento sumario de las fuerzas de inercia con relación al centro de inercia es siempre igual a cero:

$$M_C^{iner} = 0. \quad (5.19)$$

En efecto, la fuerza de inercia que actúa sobre cada partícula del sistema $F_i = -m_i w_0$, donde w_0 es la aceleración del sistema C . Por eso, el momento sumario de todas

estas fuerzas con relación al centro de inercia C

$$M_C^{\text{iner}} = \sum [\mathbf{r}_i, -m_i \mathbf{w}_0] = -[(\sum m_i \mathbf{r}_i), \mathbf{w}_0].$$

Según (4.8), $\sum m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_C$, y como en nuestro caso $\mathbf{r}_C = 0$, entonces $M_C^{\text{iner}} = 0$.

Momento propio de impulsión. Como el momento de fuerzas, el de impulsión del sistema depende, hablando en general, de la elección del punto O , con relación al cual lo determinan. Con el traslado de este punto a la distancia \mathbf{r}_0 (fig. 84) los nuevos radios vectores de las partículas \mathbf{r}'_i se ligan con los antiguos \mathbf{r}_i por la fórmula $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_0$. Por esto, el momento de impulsión del sistema con relación al punto O se puede representar así:

$$\mathbf{L} = \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i] = \sum [\mathbf{r}'_i \mathbf{p}_i] + \sum [\mathbf{r}_0 \mathbf{p}_i],$$

o bien

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + [\mathbf{r}_0 \mathbf{p}], \quad (5.20)$$

donde \mathbf{L}' es el momento de impulsión del sistema con relación al punto O' , en tanto que $\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i$ es la impulsión total del sistema.

De la fórmula (5.20) se desprende que si la impulsión total del sistema $\mathbf{p} = 0$, entonces su momento de impulsión no depende de la elección del punto O . Y por esto precisamente se distingue el sistema C , en el cual el sistema de partículas como un todo está en reposo. De aquí llegamos a la tercera importante deducción: *el momento de impulsión de un sistema de partículas en el sistema C no depende de la elección del punto con relación al cual lo determinan.* Este momento lo vamos a denominar *momento propio de impulsión* del sistema y lo designaremos por $\tilde{\mathbf{L}}$.

Ligazón entre \mathbf{L} y $\tilde{\mathbf{L}}$. Sea \mathbf{L} el momento de impulsión de un sistema de partículas con relación al punto O del sistema de referencia K . Como el momento propio de impulsión $\tilde{\mathbf{L}}$ en el sistema C no depende de la elección del punto O' , tomemos el punto O' coincidente con el punto O del sistema K en el momento dado. Entonces los radios vectores de cada partícula en ambos sistemas de referencia serán iguales en este momento ($\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$).

Por otro lado, las velocidades de las partículas se ligan por la fórmula

$$\mathbf{v}_i = \tilde{\mathbf{v}}_i + \mathbf{V}_C, \quad (5.21)$$

donde \mathbf{V}_C es la velocidad del sistema C con relación al sistema K . Por eso se puede escribir:

$$\mathbf{L} = \sum m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i] = \sum m_i [\mathbf{r}_i \tilde{\mathbf{v}}_i] + \sum m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{V}_C]. \quad (5.22)$$

La primera suma en el segundo miembro de esta igualdad es el momento propio de impulsión $\tilde{\mathbf{L}}$. A la segunda suma, en correspondencia con la fórmula (4.8), la presentamos como $m [\mathbf{r}_C \mathbf{V}_C]$, o bien $[\mathbf{r}_C \mathbf{p}]$, donde m es la masa de todo el sistema, \mathbf{r}_C es el radio vector de su centro de inercia en el sistema K , \mathbf{p} es la impulsión sumaria del sistema. Como resultado

$$\boxed{\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}} + [\mathbf{r}_C \mathbf{p}]} \quad (5.23)$$

es decir, *el momento de impulsión \mathbf{L} de un sistema de partículas se constituye de su momento propio de impulsión $\tilde{\mathbf{L}}$ y del momento $[\mathbf{r}_C \mathbf{p}]$, determinado por el movimiento del sistema de partículas como un todo.*

Tomemos, por ejemplo, una bola homogénea que rueda por un plano inclinado. Su momento de impulsión con relación a cierto punto de este plano se constituye del momento de impulsión, ligado con el movimiento del centro de inercia de la bola, y del momento propio de impulsión, condicionado por la rotación de la bola alrededor de su propio eje.

De la fórmula (5.23), en particular, se deduce que si el centro de inercia del sistema está en reposo (la impulsión del sistema $\mathbf{p} = 0$), su momento de impulsión \mathbf{L} es el momento propio de impulsión. Nosotros ya conocemos este caso. En otro caso extremo, cuando $\tilde{\mathbf{L}} = 0$, el momento de impulsión del sistema con relación a algún punto se determina solamente por el momento ligado con el movimiento del sistema como un todo, es decir, por el segundo sumando de (5.23). Así, por ejemplo, se comporta el momento de impulsión de cualquier sólido en el movimiento de translación.

Ecuación de los momentos en el sistema C . En el párrafo anterior fue señalado que la ecuación (5.12) es justa en cualquier sistema de referencia. Esto significa que

ella es asimismo justa en el sistema C . Por eso, se puede inmediatamente escribir: $d\tilde{L}/dt = \tilde{M}$, donde \tilde{M} es el momento sumario de las fuerzas externas en el sistema C .

Como en el caso general el sistema C no es inercial, en \tilde{M} , además de los momentos de las fuerzas externas de interacción, entra el momento de las fuerzas de inercia. De otro lado, al principio de este párrafo (véase la pág. 165) fue demostrado que el momento de las fuerzas \tilde{M} en el sistema C no depende de la elección del punto, con relación al cual lo determinan. Generalmente, en calidad de éste se toma el punto C , o sea, el centro de inercia del sistema. El carácter racional de la elección de este punto precisamente consiste en que con relación a dicho punto el momento sumario de las fuerzas de inercia es igual a cero, por lo que se debe tener en cuenta *solamente* el momento sumario de las fuerzas externas de interacción M_C . Así,

$$\boxed{d\tilde{L}/dt = M_C}, \quad (5.24)$$

es decir, la derivada de' momento propio de impulsión del sistema conforme a tiempo es igual al momento sumario de todas las fuerzas externas de interacción con relación al centro de inercia del sistema dado.

En particular, si $M_C \equiv 0$, entonces $\tilde{L} = \text{const}$, es decir, el momento propio de impulsión del sistema se conserva.

La ecuación (5.24), en las proyecciones sobre el eje z , que pasa por el centro de inercia del sistema, tiene el aspecto

$$d\tilde{L}_z/dt = M_{Cz}, \quad (5.25)$$

donde M_{Cz} es el momento sumario de las fuerzas externas de interacción respecto al eje z fijo en el sistema C , que pasa por el centro de inercia. También aquí si $M_{Cz} \equiv 0$, $\tilde{L}_z = \text{const}$.

§ 5.4. Dinámica del sólido

El movimiento del sólido en caso general, se determina por dos ecuaciones vectoriales. Una de ellas es la ecuación del movimiento del centro de inercia (4.11),

la otra, la ecuación de los momentos en el sistema C (5.24):

$$m d\mathbf{V}_C/dt = \mathbf{F}; \quad d\tilde{\mathbf{L}}/dt = \mathbf{M}_C. \quad (5.26)$$

Conociendo las leyes de las fuerzas externas que actúan, los puntos de su aplicación y las condiciones iniciales, se puede encontrar con ayuda de estas ecuaciones tanto la velocidad, como la posición de cada punto del sólido en cualquier momento de tiempo, es decir, resolver por completo el problema del movimiento del sólido. Sin embargo, a pesar de la aparente simplicidad de las ecuaciones (5.26), su solución en el caso general es un problema muy difícil. Y ante todo, esto se determina por la circunstancia de que la ligazón entre el momento propio de impulsión $\tilde{\mathbf{L}}$ y las velocidades de puntos por separado del sólido en el sistema C resulta ser compleja, a excepción de algunos casos particulares. Nosotros no vamos a estudiar este problema en aspecto general (se resuelve en la teoría general) y en el futuro nos limitaremos sólo a casos particulares aislados.

Pero antes citaremos algunas consideraciones, que surgen directamente del tipo de las mismas ecuaciones (5.26). Si trasladamos las fuerzas a lo largo de la dirección de su acción, entonces es evidente que no variarán ni su resultante \mathbf{F} , ni su momento sumario \mathbf{M}_C . Con ello tampoco varían las ecuaciones (5.26) y, por consiguiente, no varía el movimiento del sólido. Por eso se puede trasladar el punto de aplicación de las fuerzas externas a lo largo del sentido de acción de las fuerzas, método que se emplea constantemente.

Fuerza resultante. En aquellos casos, cuando el momento sumario de todas las fuerzas externas resulta ser perpendicular a la fuerza resultante, es decir, $\mathbf{M} \perp \mathbf{F}$, todas las fuerzas externas pueden ser reducidas a una fuerza \mathbf{F} que actúa a lo largo de una recta determinada. En efecto, si el momento sumario $\mathbf{M} \perp \mathbf{F}$ con relación a cierto punto O , entonces siempre se puede encontrar un vector tal $\mathbf{r}_0 \perp \mathbf{M}$ (fig. 85), que para \mathbf{M} y \mathbf{F} prefijadas

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_0 \mathbf{F}].$$

En este caso, la elección de \mathbf{r}_0 no es unívoca: la adición a él de cualquier vector \mathbf{r} , paralelo a \mathbf{F} , no varía la última igualdad. Y esto significa que la igualdad dada determina no el punto «de aplicación» de la fuerza

F , sino su línea de acción. Conociendo los módulos M y F de los vectores correspondientes, se puede encontrar el brazo l de las fuerzas F (fig. 85): $l = M/F$.

De ese modo, si $M \perp F$, se puede reemplazar el sistema de fuerzas que actúa sobre los puntos aislados del sólido, por una fuerza resultante, o sea, por la fuerza que es igual a la resultante F y que crea el momento igual al momento sumario M de todas las fuerzas externas.

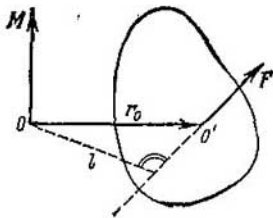


Fig. 85

Este, en particular, es el caso del campo de fuerzas homogéneo, por ejemplo, del campo de gravedad, en el cual la fuerza que actúa sobre cada partícula tiene el aspecto $F_i = m_i g$. En este caso el momento

sumario de las fuerzas de gravedad con relación a cualquier punto O es igual a

$$M = \sum [r_i, m_i g] = l (\sum m_i r_i) g.$$

La suma entre paréntesis, según (4.8), es igual a $m r_c$, donde m es la masa del cuerpo, r_c es el radio vector de su centro de inercia con relación al punto O . Por eso

$$M = [m r_c, g] = [r_c m g].$$

Esto significa que la resultante $m g$ de las fuerzas de gravedad pasa por el centro de inercia del cuerpo. Generalmente dicen, que la resultante de las fuerzas de gravedad está aplicada al centro de inercia del cuerpo o a su centro de gravedad. Evidentemente, que el momento de esta fuerza con relación al centro de inercia del sólido es igual a cero.

Ahora pasamos al estudio de cuatro casos particulares del movimiento del sólido: 1) rotación alrededor de un eje inmóvil, 2) movimiento plano, 3) rotación alrededor de ejes libres, 4) casos especiales del movimiento del cuerpo con un punto fijo (giroscopos).

1. Rotación alrededor de un eje inmóvil. Primero encontramos la expresión para el momento de impulsión del sólido con relación al eje de rotación OO' (fig. 86),

Haciendo uso de la fórmula (5.9), escribimos

$$L_z = \sum L_{iz} = \left(\sum m_i \rho_i^2 \right) \omega_z,$$

donde m_i y ρ_i son la masa y la distancia del eje de rotación de la i -ésima partícula del sólido, ω_z es su velocidad angular. Designando la magnitud entre paréntesis por I , obtenemos

$$\boxed{L_z = I \omega_z}, \quad (5.27)$$

donde I es el denominado *momento de inercia* del sólido con relación al eje OO' :

$$I = \sum m_i \rho_i^2. \quad (5.28)$$

El momento de inercia del sólido depende, como es fácil de ver, de la distribución de las masas con relación al eje que nos interesa y es una magnitud aditiva.

El cálculo del momento de inercia del sólido se efectúa por la fórmula

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV,$$

donde dm y dV son la masa y el volumen del cuerpo, que se encuentra a la distancia r del eje z que nos interesa; ρ es la densidad del cuerpo en el punto dado.

En la tabla siguiente se citan (aquí m es la masa del sólido) los momentos de inercia de algunos sólidos homogéneos con relación al eje z_C que pasa por el centro de inercia del cuerpo:

Sólido	Eje z_C	Momento de inercia I_C
Barra delgada de longitud l	Perpendicular a la barra	$ml^2/12$
Cilindro enterizo de radio R	Coincide con el eje del cilindro	$mR^2/2$
Disco delgado de radio R	Coincide con el diámetro del disco	$mR^2/4$
Bola de radio R	Pasa por el centro de la bola	$2mR^2/5$

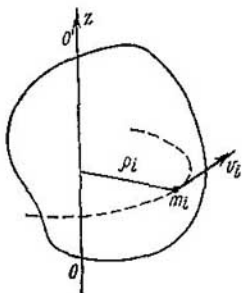


Fig. 86

El cálculo del momento de inercia de un sólido de forma arbitraria con relación a uno u otro eje es, hablando en general, un problema bastante laborioso en lo que se refiere a la matemática. Sin embargo, en ciertos casos la determinación del momento de inercia se simplifica considerablemente, si se hace uso del *teorema de Steiner*: el momento de inercia I con relación a un eje arbitrario z es igual al momento de inercia I_C respecto al eje z_C , paralelo al eje dado y que pasa por el centro de inercia C del cuerpo, más el producto de la masa m del cuerpo por el cuadrado de la distancia a entre los ejes:

$$I = I_C + ma^2. \quad (5.29)$$

En el apéndice 3 se aduce la demostración de este teorema.

De ese modo, si se conoce el momento de inercia I_C , la definición del momento de inercia I es elemental. Por ejemplo, el momento de inercia de una barra delgada (de masa m y de longitud l) con relación al eje, perpendicular a la barra y que pasa por su extremo, es igual a

$$I = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

Ecuación fundamental de dinámica de la rotación de un sólido (el eje de rotación es inmóvil). Esta ecuación se obtiene fácilmente como corolario de (5.15), si se diferencia (5.27) conforme al tiempo, entonces

$$I\beta_z = M_z, \quad (5.30)$$

donde M_z es el momento sumario de todas las fuerzas con relación al eje de rotación. De esta ecuación, en particular, se desprende que el momento de inercia I determina las propiedades inerciales del sólido durante la rotación: para un mismo valor de momento de fuerzas M_z , el cuerpo con mayor momento de inercia adquiere menor aceleración angular β_z .

Recordemos, que los momentos de fuerzas con relación al eje son magnitudes algebraicas: sus signos dependen tanto de la elección de la dirección positiva del eje z (que coincide con el eje de rotación), como asimismo de la

dirección «de rotación» del momento de fuerzas correspondiente. Por ejemplo, eligiendo la dirección positiva del eje z como se muestra en la fig. 87, de este modo prefijamos también la dirección positiva de referencia del ángulo φ (estas dos direcciones se ligan por la regla del sacacorchos). Luego, si cierto momento M_{iz} «gira» en la dirección positiva del ángulo φ , este momento se considera positivo, y a la inversa. A su vez, el signo del momento sumario M_z determina el signo de β_z , o sea, de la proyección del vector de la aceleración angular sobre el eje z .



Fig. 87

La integración de la ecuación (5.30) teniendo en cuenta las condiciones iniciales, es decir, los valores de ω_{0z} y φ_0 en el momento inicial de tiempo, permite resolver por completo el problema de la rotación del sólido alrededor de un eje fijo, es decir, encontrar la dependencia entre la velocidad angular $\omega_z(t)$ y el ángulo de giro $\varphi(t)$ del tiempo.

Indiquemos, que la ecuación (5.30) es justa en cualquier sistema de referencia ligado rígidamente con su eje de rotación. Sin embargo, si el sistema de referencia es no inercial, es necesario recordar que el momento de fuerzas M_z consta no sólo de los momentos de fuerzas de interacción con otros cuerpos, sino que, además, de los momentos de las fuerzas de inercia.

Energía cinética de un sólido que gira (el eje de rotación es fijo). Teniendo en cuenta, que la velocidad de la i -ésima partícula del cuerpo sólido que gira $v_i = \rho_i \omega$, escribamos

$$T = \sum m_i v_i^2 / 2 = (\sum m_i \rho_i^2) \omega^2 / 2,$$

o, con mayor brevedad,

$$T = I \omega^2 / 2, \quad (5.31)$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo con relación al eje de rotación, ω , la velocidad angular.

Ejemplo. El disco 1 (fig. 88) gira alrededor de un eje vertical liso a una velocidad angular ω_1 . Sobre él cae el disco 2, que gira a la velocidad angular ω_2 . Ambos discos a causa del rozamiento entre ellos, empiezan a girar como un todo después de cierto tiempo.

po. Hallar el incremento de la energía cinética de rotación de este sistema, si los momentos de inercia de los discos con relación al eje de rotación son iguales a I_1 y I_2 , respectivamente.

Primero encontramos la velocidad angular de rotación estacionaria. De la ley de conservación del momento de impulsión del sistema con relación al eje z se deduce que

$$I_1\omega_{1z} + I_2\omega_{2z} = (I_1 + I_2)\omega_z,$$

de donde

$$\omega_z = (I_1\omega_{1z} + I_2\omega_{2z})/(I_1 + I_2). \quad (1)$$

Señalemos, que ω_{1z} , ω_{2z} y ω_z son magnitudes algebraicas. Si resulta que $\omega_z > 0$, esto significa que el vector ω correspondiente coincide con la dirección positiva del eje z , y a la inversa.

El incremento de la energía cinética de rotación de este sistema

$$\Delta T = (I_1 + I_2)\omega_z^2/2 - (I_1\omega_{1z}^2/2 + I_2\omega_{2z}^2/2).$$

Sustituyendo ω_z por su expresión (1), obtenemos

$$\Delta T = -\frac{I_1 I_2}{2(I_1 + I_2)}(\omega_{1z} - \omega_{2z})^2. \quad (2)$$

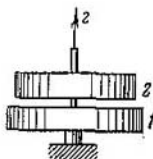


Fig. 88

El signo menos muestra que la energía cinética del sistema disminuye.

Prestemos atención a que los resultados obtenidos en (1) y (2) son muy parecidos tanto por su forma, como por su sentido en el caso de una colisión absolutamente no elástica (véase la pág. 131).

Trabajo de las fuerzas externas durante la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo. En correspondencia con la ley de variación de la energía mecánica de un sistema, el trabajo elemental de todas las fuerzas externas que actúan sobre un sólido, es igual al incremento sólo de la energía cinética de éste, ya que con esto su energía potencial propia no varía. De este modo $\delta W = dT$. Haciendo uso de (5.31), escribamos $\delta W = d(I\omega^2/2)$. Como el eje z coincide con el eje de rotación, entonces $\omega^2 = \omega_z^2$ y

$$\delta W = I\omega_z d\omega_z.$$

Pero según (5.30), $I d\omega_z = M_z dt$. Sustituyendo esta expresión en la última ecuación para δW , y teniendo en cuenta que $\omega_z dt = d\varphi$, obtenemos

$$\delta W = M_z d\varphi. \quad (5.32)$$

El trabajo δW es una magnitud algebraica: si M_z y $d\varphi$ tienen signos iguales, entonces $\delta W > 0$; más si sus signos son contrarios, $\delta W < 0$.

El trabajo de las fuerzas externas durante el giro del sólido al ángulo finito φ , es igual a

$$W = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi. \quad (5.33)$$

En el caso, si $M_z = \text{const}$, la última expresión se simplifica: $W = M_z \varphi$.

De ese modo, el trabajo de las fuerzas externas durante la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo se determina por la acción del momento M_z de estas fuerzas respecto al eje dado. Si las fuerzas son tales, que su momento $M_z \equiv 0$, entonces ellas no realizan trabajo.

2. Movimiento plano de un sólido (véase la pág. 25). Durante el movimiento plano el centro de inercia C de un sólido se mueve por un plano determinado, inmóvil en el sistema de referencia dado K , y el vector de su velocidad angular ω permanece siempre perpendicular a este plano. Lo último significa que el sólido en el sistema C realiza movimiento giratorio puro alrededor de un eje fijo en este sistema, que pasa por el centro de inercia del sólido. Mas el movimiento giratorio del sólido se determina por la ecuación (5.30), que, como fue señalado, es justa en cualquier sistema de referencia.

De ese modo, tenemos las siguientes dos ecuaciones que describen el movimiento plano del sólido:

$$m w_C = F, \quad I_C \beta_z = M_{Cz}, \quad (5.34)$$

donde m es la masa del cuerpo, F es la resultante de todas las fuerzas externas, I_C y M_{Cz} son el momento de inercia y el momento sumario de todas las fuerzas externas, ambos con relación al eje que pasa por el centro de inercia del cuerpo.

En tal caso, se debe recordar que el momento M_{Cz} consta sólo de las fuerzas de interacción externas, a pesar de que el sistema C , en caso general, es no inercial. Esto está relacionado con que el momento sumario de las fuerzas externas es igual a cero tanto con relación al centro de inercia, como respecto a cualquier eje, que pase por este punto. Por eso, simplemente se puede no tener en cuenta (véase la pág. 168).

También señalemos, que la aceleración angular es β_z y, por consiguiente, ω_z y φ son iguales en ambos sistemas de referencia, ya que el sistema C se mueve *progresivamente* con relación al sistema K inercial de referencia.

Integrando las ecuaciones (5.34) teniendo en cuenta las condiciones iniciales, se puede encontrar las dependencias $r_C(t)$ y $\varphi(t)$ que determinan la posición del sólido en cualquier momento de tiempo t .

Al resolver el problema del movimiento de un sólido *no libre* es necesario emplear otra condición complementaria que determina las limitaciones del movimiento por los enlaces existentes. Ella da la ligazón cinética entre las aceleraciones lineal y angular.

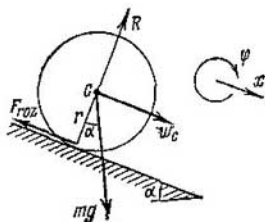


Fig. 89

Ejemplo. Un cilindro homogéneo de masa m y radio r se desliza sin resbalamiento por un plano inclinado que constituye un ángulo α con el horizonte (fig. 89). Encontrar las ecuaciones del movimiento del cilindro.

El enfoque estándar a la solución de semejantes problemas consiste en lo siguiente. Ante todo hay que determinar las

fuerzas que actúan sobre el cuerpo dado, y los puntos de sus aplicaciones (en el caso dado, la fuerza de gravedad mg , la componente normal de la fuerza de reacción del plano inclinado R y la fuerza de rozamiento en reposo F_r). Después se elige la dirección positiva del eje x y el ángulo de giro φ (en general, lo mejor es tomar estas direcciones coordinadas de una vez, para que los signos de las aceleraciones w_{Cx} y β_z sean iguales), por ejemplo, como se muestra en la fig. 89 a la derecha. Y sólo después de esto escribimos las mismas ecuaciones de movimiento (5.34) en las proyecciones en las direcciones positivas x y φ elegidas de este modo:

$$mw_{Cx} = mg \operatorname{sen} \alpha - F_r; \quad I_C \beta_z = r F_r.$$

Además, la condición de ausencia de rozamiento determina, el enlace cinético entre las aceleraciones:

$$w_{Cx} = r \beta_z.$$

La solución conjunta de estas tres ecuaciones da la posibilidad de encontrar las aceleraciones w_C y β , así como la fuerza F_r .

Energía cinética en el movimiento plano de un sólido. Sea que un cuerpo realiza un movimiento plano en cierto

sistema K inercial de referencia. Para determinar su energía cinética T en este sistema, hacemos uso de la fórmula (4.12). En el caso dado, la magnitud T que entra en esta fórmula es la energía cinética de rotación del cuerpo en el sistema C alrededor del eje que pasa por el centro de inercia del cuerpo. Según (5.31), $\tilde{T} = I_C \omega^2 / 2$, por eso se puede escribir de inmediato

$$T = \frac{I_C \omega^2}{2} + \frac{mV_C^2}{2}, \quad (5.35)$$

donde I_C es el momento de inercia del cuerpo con relación al eje de rotación que pasa por su centro de inercia, ω es la velocidad angular del cuerpo, m es su masa, V_C es la velocidad del centro de inercia del cuerpo en el sistema K de referencia.

De ese modo, la energía cinética del sólido en movimiento plano se constituye de la energía de rotación en el sistema C y de la energía, ligada con el movimiento del centro de inercia.

3. Ejes libres. Ejes principales de inercia. Si el sólido se pone en rotación y después se deja libre, entonces, hablando en general, la dirección

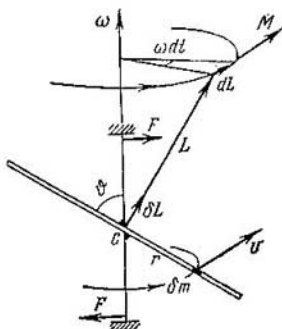


Fig. 90

del eje de rotación en el espacio cambiará. Para que el eje arbitrario de rotación del cuerpo conserve su dirección invariable es necesario aplicarle determinadas fuerzas.

Estudiemos este problema más detalladamente en el siguiente ejemplo. Sea que la mitad C de una barra homogénea está fijada rígidamente con el eje de rotación de forma que el ángulo entre la barra y el eje sea igual a ϑ (fig. 90). Hallemos el momento M de las fuerzas externas que deben ser aplicadas al eje de rotación, para que con el giro de la barra a la velocidad angular ω no cambie su dirección. Según (5.12), este momento $M = dL/dt$.

De ese modo, para determinar M , primero es necesario encontrar el momento de impulsión de la barra L , y, a continuación, su derivada conforme al tiempo.

Lo más fácil es determinar el momento de impulsión con relación al punto C . Separemos mentalmente un elemento de la barra de masa δm , que se encuentra a la distancia r del punto C . Su momento de impulsión respecto a este punto es $\delta L = [r, \delta m v]$, donde v es la velocidad del elemento. Se ve fácilmente, que el vector δL , está dirigido perpendicularmente a la barra (fig. 90), no dependiendo su dirección de la elección del elemento δm . Por eso, la dirección del momento sumario de impulsión L de la barra coincide con la del vector δL .

Indiquemos, que en el caso dado, la dirección del vector L no coincide con la del vector ω .

Durante la rotación de la barra, el vector L también girará a la velocidad angular ω . El vector L recibe, en el intervalo de tiempo dt , el incremento dL , el módulo del cual, como se ve en la fig. 90, es igual a

$$|dL| = L \operatorname{sen} (\pi/2 - \vartheta) \omega dt,$$

o, bien en la forma vectorial $dL = [\omega L] dt$. Dividiendo ambos miembros de la última expresión por dt , obtenemos

$$M = [\omega L].$$

De ese modo, en realidad, para la retención del eje de rotación en una dirección invariable es necesario, en el caso dado, aplicar el momento M de ciertas fuerzas externas F (ellas se muestran en la fig. 90). Sin embargo, es fácil ver que si $\vartheta = \pi/2$, entonces la dirección del vector L coincide con la del vector ω , y que, en este caso, $M = 0$, es decir, la dirección del eje de rotación permanecerá constante sin influencia externa.

El eje de rotación, cuya dirección queda invariable en el espacio sin la acción sobre él de cualesquiera fuerzas del exterior se denomina *eje libre* del cuerpo.

En la teoría general se demuestra que para cualquier sólido existen tres ejes perpendiculares entre sí que pasan por el centro de inercia del cuerpo que pueden servir de ejes libres. Estos se denominan *ejes principales de inercia* del sólido.

La definición de los ejes principales de inercia para un cuerpo de forma arbitraria es un problema complejo

desde el punto de vista matemático. Sin embargo, él se simplifica mucho para los cuerpos que poseen una u otra simetría, ya que la posición del centro de inercia y la dirección de los ejes principales de inercia poseen en este caso la misma simetría.

Por ejemplo, para un paralelepípedo rectangular homogéneo los ejes principales de inercia pasan por los centros de las aristas opuestas. Si el cuerpo tiene eje de simetría (por ejemplo, un cilindro homogéneo), uno de sus ejes principales de inercia es el eje de simetría y en calidad de los restantes ejes pueden servir dos ejes cualesquiera perpendiculares entre sí, que se encuentren en el plano perpendicular al eje de simetría y que pase por el centro de inercia del cuerpo. De ese modo, en un cuerpo con simetría axial está fijado sólo uno de los ejes principales de inercia. En un cuerpo con simetría central (por ejemplo, una esfera homogénea) los ejes principales de inercia son tres ejes cualesquiera perpendiculares entre sí que pasan por el centro del cuerpo, no estando fijado ninguno de los ejes principales de inercia con relación al cuerpo.

Una importante particularidad de los ejes principales de inercia del cuerpo es la circunstancia de que durante la rotación de éste alrededor de cualquiera de ellos, la dirección del momento de impulsión L del cuerpo coincide con la de la velocidad angular ω de éste y se determina por la fórmula

$$L = I\omega, \quad (5.36)$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo con relación al eje principal de inercia dado. Al mismo tiempo, L no depende de la elección del punto, respecto al cual lo determinan (aquí se supone, que el eje de rotación está inmóvil).

Es posible convencerse lo más fácilmente de la justeza de (5.36) en el caso de un cuerpo homogéneo con simetría axial. En realidad, según (5.27), el momento de impulsión del sólido respecto al eje de revolución $L_z = I\omega_z$ (recordemos, que L_z es la proyección del vector L , determinado con relación a cualquier punto en este eje). Pero si el cuerpo es simétrico en relación con el eje de rotación, entonces de las consideraciones de simetría se deduce de inmediato que la dirección del vector L coincide con la del vector ω y, es decir, que $L = I\omega$.

Una vez más subrayemos, que en caso general (el eje de rotación no coincide con ninguno de los ejes principales de inercia, aunque pasa por el centro de inercia del cuerpo) la dirección del vector L no coincide con el vector ω y la ligazón entre estos vectores tiene un carácter complejo. Esta circunferencia es la causa del comportamiento complejo del sólido que gira.

4. **Giroscopios.** Se llama giroscopio un cuerpo simétrico macizo que gira a gran velocidad angular alrededor

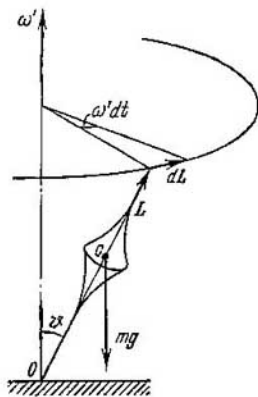


Fig. 91

de su eje de simetría. Examinemos el comportamiento del giroscopio en el ejemplo de un trompo. La experiencia muestra, que si el eje de rotación de un trompo está inclinado respecto a la vertical, entonces el trompo no se cae, realizando el denominado movimiento de *precesión* (*precesión*), es decir, su eje describe un cono alrededor de la vertical a cierta velocidad angular ω' , resultando: cuanto mayor es la velocidad angular ω de rotación del trompo, tanto menor es la velocidad angular de precesión ω' .

Tal comportamiento del trompo del giroscopio se explica fácilmente con ayuda de la ecuación de los momentos (5.12), si sólo se toma que $\omega \gg \omega'$ (por cierto, que esta condición explica qué se tiene en cuenta por la *mayor* velocidad angular del giroscopio). En efecto, el momento de impulsión L del trompo que posee precesión con relación al punto de apoyo O (fig. 91) se puede representar como la suma del momento de impulsión L_{ω} , acondicionado por la rotación del trompo alrededor de su eje, y de cierto momento suplementario de impulsión L' , provocado por la precesión del trompo alrededor del eje vertical, es decir,

$$L = L_{\omega} + L'.$$

En vista de que el eje del trompo coincide con uno de los ejes principales de inercia, entonces, según (5.36), $L_\omega = I\omega$, donde I es el momento de inercia del trompo respecto a este eje. Además, es evidente, que cuanto menor es la velocidad angular de precesión, tanto menor es el momento L' correspondiente. Cuando $\omega \gg \omega'$, en todos los casos que prácticamente son interesantes, $L_\omega \gg L'$, por eso el momento resultante de impulsión L coincide igualmente con L_ω tanto por su magnitud, como por su dirección, es decir, se puede considerar, que

$$L = I\omega.$$

Más conociendo el comportamiento del vector L , con ello encontramos asimismo el carácter del movimiento del eje del trompo-giroscopio.

Pero la ecuación de los momentos (5.12) controla el comportamiento del vector L . Según ella, el momento de impulsión L respecto al punto O (fig. 91) recibe en el tiempo dt el incremento

$$dL = M dt, \quad (5.37)$$

cuya dirección coincide con la del vector M , o sea, con el momento de las fuerzas externas con relación a este mismo punto O (en el caso dado, este es el momento de la fuerza de gravedad mg). De la fig. 91 se ve, que $dL \perp L$. Como resultado el vector L (y por consiguiente, el eje del trompo) girará junto con el vector M alrededor de la vertical, describiendo un cono circular con ángulo de semiapertura ϑ . El trompo-giroscopio tendrá precesión alrededor del eje vertical a cierta velocidad angular ω' .

Encontramos la relación entre los vectores M , L y ω' . Según el dibujo, el módulo del incremento del vector L en el tiempo dt es $|dL| = L \operatorname{sen} \vartheta \cdot \omega' dt$ o en forma vectorial $dL = [\omega' L] dt$. Después de la sustitución de esta expresión en (5.37), obtenemos

$$[\omega' L] = M. \quad (5.38)$$

De esta ecuación se ve, que el momento de fuerza M determina la *velocidad* angular de precesión ω' (y no la *aceleración*!). Por eso, la eliminación instantánea del momento M conduce a la desaparición instantánea y de la precesión. En esta relación se puede decir, que la precesión no posee inercia.

Señalemos, que el momento de las fuerzas M , que actúan sobre el giroscopio, puede ser de cualquier naturaleza. Para el mantenimiento de la precesión regular (de la velocidad angular constante ω') sólo tiene importancia que el vector M , no variando su módulo, gire junto con el eje del giroscopio.

Ejemplo. Encontrar la velocidad angular de precesión de un trompo inclinado de masa m , que gira a gran velocidad angular ω alrededor de su eje de simetría, con relación al cual el momento de inercia del trompo es igual a I . El centro de inercia del trompo se encuentra a la distancia l del punto de apoyo.

Según (5.38), $\omega'I\omega \sin \vartheta = mgl \sin \vartheta$, donde ϑ es el ángulo entre la vortical y el eje del trompo (fig. 91). De donde

$$\omega' = mgl/I\omega.$$

Es interesante, que la magnitud ω' no depende del ángulo de inclinación ϑ del eje del trompo. Además, el resultado obtenido muestra que ω' es inversamente proporcional a ω , es decir, en realidad, cuanto mayor es la velocidad angular del trompo, tanto menor es la velocidad angular de su precesión.

Momento giroscópico. Ahora estudiemos el efecto que se produce con la rotación forzada del eje del giroscopio.

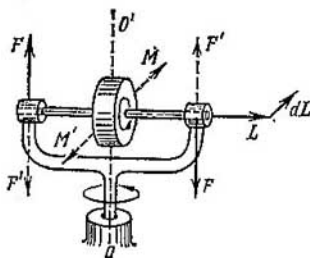


Fig.

Sea que, por ejemplo, el eje de un giroscopio está fijado a un soporte en U , que vamos a girar alrededor del eje OO' , como se muestra en la fig. 92. Si el momento de impulsión del giroscopio L está dirigido a la derecha, entonces con este giro el vector L recibe en el tiempo dt un incremento dL , o sea, el vector, será dirigido fuera del plano del dibujo. Según (5.37), esto significa que sobre el giroscopio actúa el momento de fuerzas M , cuya direc-

ción coincide con el vector dL . El momento M está condicionado por el surgimiento del par de fuerzas F que actúan sobre el eje del giroscopio desde el soporte. Mas el eje del giroscopio, en correspondencia con la tercera ley de Newton, actuará sobre el soporte con las fuerzas F' (fig. 92). Estas fuerzas se denominan *giroscópicas*; ellas crean el *momento giroscópico* $M' = -M$. Indiquemos, que en el caso dado el giroscopio no posee la propiedad de oponerse a la variación de la dirección de su eje de rotación.

Efecto giroscópico denominan la aparición de las fuerzas giroscópicas. Somejante efecto giroscópico, ligado con el surgimiento de la presión giroscópica en los rodamientos, se observa, por ejemplo, en los rotores de las turbinas durante las vueltas y el balanceo de los barcos, en los virajes de los aviones a hélice, etc.

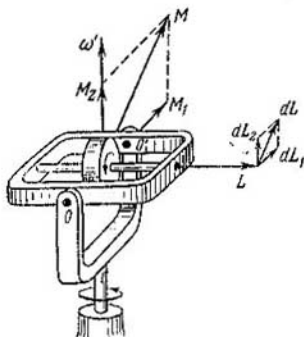


Fig. 93

Observemos la acción del momento giroscópico en el ejemplo de un giroscopio, cuyo eje puede girar libremente junto con el bastidor (fig. 93) alrededor del eje vertical OO' de un soporte en U . Si al soporte se le comunica una rotación forzada alrededor del eje vertical, como se muestra en el dibujo por el vector ω' , entonces el momento de impulsión L del giroscopio recibe en el tiempo dt un incremento dL_1 , que es un vector dirigido fuera del dibujo. Este incremento está condicionado por el momento M_1 del par de fuerzas que actúan sobre el eje del giroscopio desde el bastidor. Las fuerzas giroscópicas, que actúan desde el eje del giroscopio sobre el bastidor provocan el giro del último alrededor del eje horizontal OO' . Con esto, el vector L recibe un incremento complementario dL_2 , que a su vez se provoca por el momento M_2 del par de fuerzas, que actúan sobre el eje del giroscopio desde el bastidor. Como resultado, el eje del giroscopio girará de modo que la dirección del vector L tenderá a coincidir con la del vector ω' .

De esta forma, el momento de impulsión del giroscopio L recibe en el tiempo dt un incremento $dL = dL_1 + dL_2 = (M_1 + M_2) dt$.

Con ello, sobre el bastidor actúa el momento giroscópico

$$M' = -(M_1 + M_2).$$

La componente de este momento $M'_1 = -M_1$ provoca el giro del bastidor alrededor del eje horizontal OO' , la otra componente, $M'_2 = -M_2$, se opone al giro de todo el sistema alrededor del eje vertical (a diferencia del caso anterior).

El efecto giroscópico es la base de una diversidad de usos de los giroscopios: brújula giroscópica, amortiguador giroscópico del balanceo de los buques, estabilizador giroscópico y otros.

Problemas para el capítulo 5

5.1. Encontrar la mayor y la menor distancias entre el planeta A y el Sol C , si en cierto momento de tiempo el primero se encuentra a la distancia r_0 y tenía la velocidad v_0 ; al mismo tiempo el ángulo entre el radio vector r_0 y el vector v_0 es igual a φ (fig. 94).

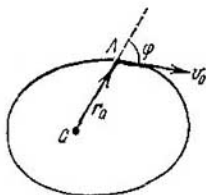


Fig. 94

Solución. Hagamos uso de las leyes de conservación del momento de impulsión y de la energía. El punto, respecto al cual se conserva la impulsión del planeta, es el centro del Sol. Por eso

$$r_0 m v_0 \sin \varphi = r m v,$$

donde m es la masa del planeta. En esta igualdad se ha escrito a la izquierda el momento de impulsión del planeta en el momento dado de tiempo, y a la derecha, su momento de impulsión a la distancia mayor (y menor) r , cuando $r \perp v$.

De la ley de conservación de la energía se deduce

$$m v_0^2 / 2 - \gamma m M / r_0 = m v^2 / 2 - \gamma m M / r,$$

donde M es la masa del Sol, γ es la constante de la gravitación.

Eliminando v de estas dos expresiones, obtenemos

$$r = \frac{r_0}{2 - \alpha} (1 \pm \sqrt{1 - \alpha(2 - \alpha) \sin^2 \varphi}).$$

donde $\alpha = r_0 v_0^2 / \gamma M$. El signo más ante la raíz corresponde a r_{\max} , el signo menos a r_{\min} .

5.2. La partícula 1 de masa m_1 vuela al encuentro de la partícula 2 de masa m_2 , teniendo lejos de la partícula 2 la energía cinética T_0 y el parámetro de impacto l , o sea, el brazo del vector de la impulsión respecto a la partícula 2 (fig. 95). La carga de cada partícula es igual a $+q$. Encontrar la menor distancia a la cual se aproximan las partículas, si:

1) $m_1 \ll m_2$;

2) m_1 es comparable con m_2 .

Solución. 1. La condición $m_1 \ll m_2$ significa que la partícula 2 en el proceso de interacción va quedar prácticamente en reposo. El vector de la fuerza que actúa sobre la partícula 1, pasa todo el tiempo por el punto en el que se encuentra la partícula 2. Por eso,

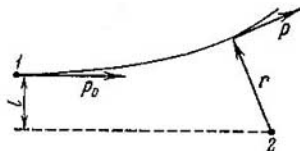


Fig. 95

el momento de impulsión de la partícula 1 se conserva respecto a la partícula 2 en reposo. De aquí

$$lp_0 = r_{\min} p,$$

donde a la izquierda está el momento de impulsión de la partícula 1 lejos de la partícula 2, a la derecha, el momento de la mayor apro-

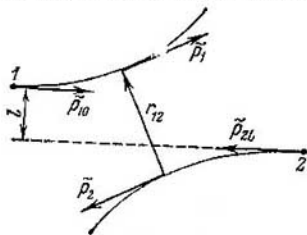


Fig. 6

ximación, cuando $r \perp p$ (fig. 95). Luego, de la ley de conservación de la energía se deduce

$$T_0 = T + kq^2/r_{\min}.$$

donde T es la energía cinética de la partícula 1 en el momento de la mayor aproximación. Resolviendo estas dos ecuaciones (teniendo en cuenta la ligazón p_0 y T_0), obtenemos

$$r_{\min} = \frac{kq^2}{2T_0} (1 + \sqrt{1 + (2IT_0/kq^2)^2}). \quad (1)$$

2. En el caso dado ya no se puede considerar que la partícula 2 reposa en el proceso de interacción. Aquí es más racional realizar la solución en el sistema C , donde el cuadro «del impacto» se semeja a lo mostrado en la fig. 96. Se supone que el sistema de dos parti-

culas es cerrado, por eso su momento de impulsión propio se conserva:

$$l\tilde{p}_{10} = r_{\min}\tilde{p}_1, \quad (2)$$

donde se ha tomado en consideración, que en el momento de la mayor aproximación $r_{12} \perp \tilde{p}_1$ (ver fig. 95). Además, sobre la base de la ley de conservación de la energía

$$\tilde{T}_0 = \tilde{T} + kq^2/r_{\min}, \quad (3)$$

donde \tilde{T}_0 y \tilde{T} son las energías cinéticas sumarias de las partículas en el sistema C , cuando las partículas se encuentran lejos una de otra y en el momento de la mayor aproximación. De las ecuaciones (2) y (3) obtenemos la misma expresión (1), sólo que en ella en lugar de T_0 estará \tilde{T}_0 . Al mismo tiempo, en el caso dado (la partícula 2 inicialmente está en reposo), según (4.16),

$$\tilde{T}_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_0.$$

Señalemos, que $\tilde{T}_0 \approx T_0$ cuando $m_1 \ll m_2$ y la expresión para r_{\min} coincidirá por completo con (1).

5.3. De un hilo inelástico liviano de longitud l suspendemos en el punto O una pequeña bola. Después, apartamos la bola a un lado de modo que el hilo se incline a un ángulo ϑ de la vertical y le comunicamos la velocidad inicial v_0 perpendicularmente al plano vertical, en el cual se encuentra el hilo. ¿Con qué valor de v_0 el ángulo máximo de inclinación del hilo respecto a la vertical resulta ser igual a $\pi/2$.

Solución. Sobre la bola actúan dos fuerzas en el proceso del movimiento: la fuerza de gravedad y la fuerza de tensión del hilo. Es fácil ver, que el momento de estas fuerzas $M_z = 0$ respecto al eje vertical z que pasa por el punto O . Por consiguiente, el momento de impulsión de la bola $L_z = \text{const}$ con relación al eje dado, o bien

$$l \sin \vartheta \cdot mv_0 = l \cdot mv, \quad (1)$$

donde m es la masa de la bola, v es su velocidad en la posición, con la que el hilo constituye un ángulo $\pi/2$ con la vertical.

La bola se mueve en el campo de gravitación de la Tierra bajo la acción de una fuerza extraña, o sea, de la fuerza de tensión del hilo. Esta fuerza es siempre perpendicular al vector de la velocidad de la bola y por eso no realiza trabajo. De aquí se deduce, que según la ecuación (3.32) la energía mecánica de la bola se conserva en el campo de gravitación de la Tierra:

$$mv_0^2/2 = mv^2/2 + mgl \cos \vartheta, \quad (2)$$

conde el segundo miembro de la igualdad corresponde a la posición horizontal del hilo.

Resolviendo conjuntamente (1) y (2), obtenemos

$$v_0 = \sqrt{2gl/\cos \vartheta}.$$

5.4. En un anillo rígido de alambre de radio r_0 , que puede girar libremente alrededor del eje vertical AB (fig. 97), se encuentran dos pequeños casquillos iguales. Ellos fueron unidos con un hilo y establecidos en la posición $m - m$. Seguidamente, comunicamos a toda la instalación la velocidad angular ω_0 y, dejándola que gire por sí sola, quemamos el hilo en el punto A . Considerando, que la masa de la instalación se encuentra prácticamente en los casquillos, encontrar su velocidad angular en el momento, cuando los casquillos deslizan (sin rozamiento) a la posición límite inferior $m' - m'$.

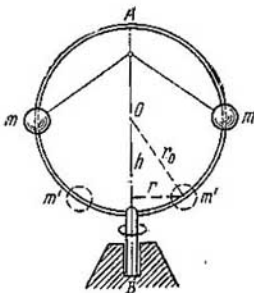


Fig. 97

Solución. Supongamos que en la posición inferior, la distancia entre los casquillos y el eje de rotación sea r y la velocidad angular de la instalación ω . Entonces de las leyes de conservación de la energía y del momento de impulsión, con relación al eje de rotación se deduce, que

$$r^2\omega^2 - r_0^2\omega_0^2 = 2gh; \quad r^2\omega = r_0^2\omega_0,$$

donde h es la diferencia de alturas entre las posiciones superior e inferior de los casquillos. Además (fig. 97),

$$r_0^2 = r^2 + h^2.$$

Resolviendo conjuntamente estas tres ecuaciones, obtenemos

$$\omega = (1 - \sqrt{1 + (4g/r_0\omega_0^2)^2})\omega_0/2.$$

5.5. Una barra lisa gira libremente en un plano horizontal a la velocidad angular ω_0 alrededor del eje vertical fijo O (fig. 98),

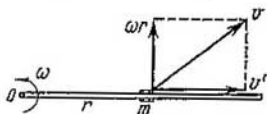


Fig. 98

respecto al cual su momento de inercia es igual a I . Junto al eje de rotación de la barra se encuentra un pequeño casquillo de masa m , unido con este eje por un hilo. Después de quemar el hilo el casquillo empieza a deslizarse a lo largo de la barra. Encontrar la velocidad v' del casquillo respecto a la barra en dependencia de su distancia r hasta el eje de rotación.

Solución. En el proceso de movimiento en el sistema dado se conserva la energía cinética y el momento de impulsión con relación al eje de rotación. De aquí se deduce, que

$$I\omega_0^2 = I\omega^2 + mv^2; \quad I\omega_0 = (I + mr^2)\omega,$$

donde $v^2 = v'^2 + \omega^2 r^2$ (fig. 98). De estas ecuaciones obtenemos

$$v' = \omega_0 r / \sqrt{1 + mr^2/I}.$$

5.6. Un proyectil *A* que vuela horizontalmente chocó, atascándose, con una barra homogénea vertical de masa *m* y de longitud l_0 , cuyo extremo superior está fijado en la charnela *O* (fig. 99). El proyectil tenía la impulsión *p* y penetró en la barra a la distancia *l* del punto *O*. Despreciando su masa, encontrar:

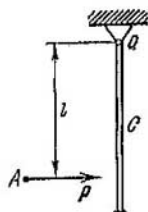


Fig. 99

1) el incremento de la impulsión del sistema proyectil—barra en el tiempo de movimiento del proyectil en la barra;

2) la velocidad angular que adquiere la barra, teniendo en cuenta el momento propio de impulsión del proyectil, igual a *L* cuya dirección coincide con la del vector *p* (el proyectil gira alrededor de la dirección del movimiento).

Solución. 1. El sistema proyectil—barra no es cerrado; además de las fuerzas que se equilibran entre sí, en el proceso del movimiento del proyectil en la barra surge la componente horizontal de la fuerza de reacción en el punto *O*. Su acción es la que provoca el incremento de la impulsión del sistema:

$$\Delta p = mv_C - p,$$

donde v_C es la velocidad del centro de inercia de la barra después del atascamiento del proyectil.

Como en este proceso todas las fuerzas externas pasan por el punto *O*, el momento de impulsión del sistema permanecerá constante, durante el tiempo de movimiento del proyectil en la barra, con relación a cualquier eje que pase por dicho punto. Tomando el eje perpendicular al plano del dibujo, escribimos

$$lp = I\omega,$$

donde *I* es el momento de inercia de la barra respecto al eje elegido, ω es la velocidad angular de la barra inmediatamente después de la parada del proyectil en ella.

De estas dos ecuaciones, teniendo en cuenta que $v_C = \omega r$, *r* es la distancia desde el punto *O* hasta el centro de inercia de la barra, obtenemos

$$\Delta p = (3l/2l_0 - 1)p.$$

De aquí se ve, que el signo del incremento Δp depende de la razón l/l_0 . En particular, $\Delta p = 0$, cuando $l/l_0 = 2/3$, es decir, el impulso del sistema no varía en el tiempo de movimiento del proyectil

en la barra. Esto significa, que en el caso dado la componente horizontal de la fuerza de reacción en el punto O no existe.

2. En este caso el momento de impulsión del sistema con relación al punto O también permanecerá constante durante el tiempo de movimiento del proyectil de la barra, por eso, según (5.23),

$$\tilde{L} + [lp] = L.$$

Aquí, a la izquierda, se ha escrito el momento de impulsión del proyectil con relación al punto O y, a la derecha, el momento de impulsión de la barra (con el proyectil) de inmediato después de su parada en ésta (véase la fig. 100, donde los tres vectores se disponen en el plano horizontal).

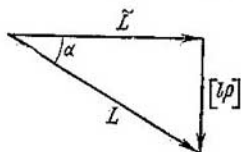


Fig. 100

Calculemos el vector \tilde{L} cuando la barra (con el proyectil) adquiere la velocidad angular ω . Tomemos un pequeño elemento de la barra de masa dm , que se encuentra a la distancia r del punto O . Su momento de impulsión respecto al punto O es igual a

$$dL = [r, dm v] = dm \cdot r^2 \omega = (m \omega / l_0) r^2 dr,$$

donde v es la velocidad del elemento dado. Integrando esta expresión conforme a todos los elementos, obtenemos

$$L = m l_0^2 \omega / 3.$$

De ese modo,

$$\tilde{L} + [lp] = m l_0^2 \omega / 3.$$

De esta fórmula según la fig. 100 obtenemos

$$\omega = 3 \sqrt{\tilde{L}^2 + l^2 m^2} / m l_0^2.$$

Con ayuda del mismo dibujo se puede también encontrar la dirección del vector ω (el ángulo α).

5.7. Un cilindro macizo homogéneo de masa m_0 y radio R , puede girar sin rozamiento alrededor de un eje vertical fijo O (fig. 101). Sobre el cilindro está arrollado densamente en una fila un cordón inelástico delgado de longitud l y de masa m . Hallar la aceleración angular del cilindro en dependencia de la longitud x de

la parte del cordón que cuelga. Considerar que no hay deslizamiento y el centro de gravedad de la parte del cordón enrollado se encuentra en el eje del cilindro.

Solución. Hacemos uso de la ecuación de los momentos (5.15) respecto al eje O . Para esto encontramos el momento de impulsión del sistema con relación al eje dado L_z y el momento de fuerzas M_z correspondiente. El momento de impulsión

$$L_z = I \omega_z + R m v = (m_0 / 2 + m) R^2 \omega_z,$$

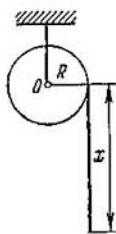


Fig. 101

donde se ha tenido en cuenta que el momento de inercia del cilindro $I = m_0 R^2/2$ y $v = \omega_z R$ (ausencia de deslizamiento del cordón). El momento de las fuerzas externas de gravedad con relación al eje O

$$M_z = Rmgx/l.$$

Diferenciando L_z conforme al tiempo y sustituyendo dL_z/dt y M_z en la ecuación de los momentos, obtenemos

$$\beta_z = 2mgx/lR(m_0 + 2m).$$

5.8. En un plano horizontal liso se encuentra un disco homogéneo de radio r_0 . Sobre él bajamos cuidadosamente otro disco igual, comunicándole previamente la velocidad angular ω_0 . ¿Al cabo de cuánto tiempo ambos discos girarán a una misma velocidad angular, si el coeficiente de rozamiento entre ellos es igual a k ?

Solución. Primero encontramos la velocidad angular de rotación estacionaria ω . De la ley de conservación de la impulsión se deduce que $I\omega_0 = 2I\omega$, donde I es el momento de inercia de cada disco respecto al eje de rotación común. De aquí

$$\omega = \omega_0/2.$$

Ahora examinemos el comportamiento de uno de los discos, por ejemplo, del inferior. Su velocidad angular varía bajo la acción del momento M de las fuerzas de rozamiento. Calculemos M . Para ello, en la superficie superior del disco separamos un anillo elemental de radios r , $r + dr$. El momento de las fuerzas de rozamiento que actúan sobre el anillo dado, es igual a

$$dM = rk (mg/\pi r_0^2) 2\pi r dr = (2kmgr/r_0^2) r^2 dr,$$

donde m es la masa de cada disco. Integrando conforme a r , desde 0 hasta r_0 , obtenemos

$$M = (2/3) kmgr_0.$$

Según la ecuación (5.30), el incremento de la gravedad angular del disco inferior en la magnitud $d\omega$ tiene lugar en el tiempo

$$dt = (I/M) d\omega = (3r_0/4kg) d\omega.$$

Integrando esta ecuación conforme a ω desde 0 hasta $\omega_0/2$, hallamos que el tiempo buscado

$$t = 3r_0\omega_0/8kg.$$

5.9. Un cilindro homogéneo se encuentra sobre una tabla horizontal (fig. 102). El coeficiente de rozamiento entre ellos es igual a k . Comunicamos a la tabla aceleración constante w en dirección horizontal perpendicularmente al eje del cilindro. Encontrar:

1) la aceleración del eje del cilindro en ausencia de deslizamiento;

2) el valor límite w_{lim} , con el cual no hay deslizamiento.

Solución. 1. Eligiendo las direcciones positivas x y φ como se muestra en la fig. 102, escribimos la ecuación de movimiento del eje del cilindro y la ecuación de los momentos en el sistema C respecto a este eje:

$$mw_C = F_{r1}; \quad I\beta = rF_r,$$

donde m e I son la masa y el momento de inercia del cilindro con relación a su eje. Además, la condición de ausencia de deslizamiento del cilindro da la ligazón cinemática de las aceleraciones:

$$w - w_C = \beta r.$$

De estas tres ecuaciones determinamos que $w_C = w/3$.

2. De las ecuaciones anteriores encontramos el valor de la fuerza de rozamiento F_r que garantiza la rodadura del cilindro sin deslizamiento: $F_r = mw/3$. El valor máximo posible de esta fuerza es igual a km_g . De donde

$$w_{lim} = 3kg.$$

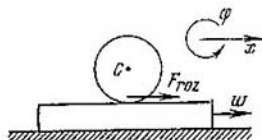


Fig. 102.

Solución. Ante todo señalemos, que la velocidad angular de la bola no variará después de la separación. Por eso, el problema se reduce a encontrar su valor en el momento de la separación.

Escribamos la ecuación del movimiento del centro de la esfera en el momento de la separación:

$$\frac{1}{2}mv^2/(R+r) = mg \cos \vartheta,$$

donde v es la velocidad del centro de la bola en el momento de la separación, ϑ es el ángulo correspondiente (fig. 103). De la ley de conservación de la energía se puede encontrar la velocidad v ,

$$mgh = mv^2/2 + I\omega^2/2,$$

donde I es el momento de inercia de la bola con relación al eje que pasa por su centro. Además,

$$v = \omega r; \quad h = (R+r)(1 - \cos \vartheta).$$

De estas cuatro ecuaciones obtenemos

$$\omega = \sqrt{10g(R+r)/17r^2}.$$

5.11. Una barra homogénea fina de masa m y de longitud l gira a una velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical, que pasa por su punto de suspensión O (fig. 104). Al mismo tiempo, la barra describe una superficie cónica con cierto ángulo de semiapertura ϑ . Encontrar el ángulo ϑ así como el módulo y la dirección de la fuerza de reacción R en el punto O .

Solución. Examinemos el sistema de referencia que gira alrededor del eje vertical junto con la barra. En este sistema de referencia sobre la barra actúan, además de la fuerza de gravedad mg

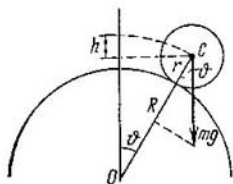


Fig. 103

y de la fuerza de rotación R , la fuerza centrífuga de inercia F_{cen} . Como la barra está en reposo en el sistema de referencia dado, es decir, se encuentra en estado de equilibrio, esto significa que el momento resultante de todas las fuerzas con rotación respecto a cualquier punto y la resultante de todas las fuerzas son iguales a cero.

El momento respecto al punto O sólo se crea por la fuerza de gravedad y las fuerzas centrífugas de inercia. De la igualdad de los momentos de estas fuerzas se deduce

$$(mgl/2) \operatorname{sen} \vartheta = M_{cen}. \quad (1)$$

Calculemos M_{cen} . El momento elemental de la fuerza de inercia, que actúa sobre el elemento de la barra dx , situado a la distancia x del punto O , es igual a

$dM_{cen} = (m\omega^2/l) \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta x^2 dx$. Integrando por toda la longitud de la barra, obtenemos

$$M_{cen} = (m\omega^2 l^2/3) \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta. \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que

$$\cos \vartheta = 3g/2\omega^2 l. \quad (3)$$

Ahora hallamos el módulo y la dirección del vector R . En el sistema de referencia, donde la barra gira a velocidad angular

ω , su centro de inercia, el punto C , se mueve por una circunferencia horizontal. Por eso, de la ley de movimiento del centro de inercia, o sea, de la fórmula (4.11), se deduce de inmediato que la componente vertical del vector R es $R_{||} = mg$ y la componente horizontal R_{\perp} se determina por la ecuación $m\omega_n = R_{\perp}$, donde ω_n es la aceleración normal del centro de inercia C . De aquí

$$R_{\perp} = (m\omega^2 l/2) \operatorname{sen} \vartheta. \quad (4)$$

El módulo del vector R es

$$R = \sqrt{(mg)^2 + R_{\perp}^2} = (m\omega^2 l/2) \sqrt{1 + 7g^2/(4\omega^4 l^2)},$$

y su dirección, es decir, el ángulo ϑ' , entre R y la vertical, se determina por la fórmula $\cos \vartheta' = mg/R$. Es interesante que el ángulo $\vartheta' \neq \vartheta$, es decir, la dirección del vector R no coincide con la de la barra. De esto es fácil convencerse, expresando $\cos \vartheta'$, por $\cos \vartheta$

$$\cos \vartheta' = 4 \cos \vartheta / \sqrt{9 + 7 \cos^2 \vartheta}.$$

De aquí se ve que $\cos \vartheta' > \cos \vartheta$, es decir, $\vartheta' < \vartheta$, lo que se muestra en la fig. 104.

Indiquemos, que la resultante de las fuerzas de inercia F_{cen} no pasa por el punto C , sino más abajo. En realidad, $F_{cen} = R_{\perp}$ y se determina por la fórmula (4), en tanto que el momento resultante M_{cen} , por la fórmula (2). De estas fórmulas se deduce, que el

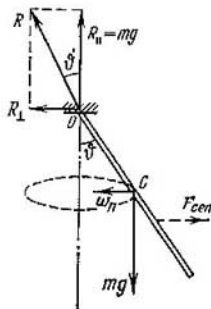


Fig. 104

brazo del vector F_{cen} con relación al punto O es igual a $(2l/3) \cos \vartheta$ (fig. 104).

5.12. Un trompo de masa m , cuyo eje constituye un ángulo φ con la vertical, girá con precesión alrededor del eje vertical que pasa por el punto de apoyo O . El momento de impulsión del trompo es igual a L , la distancia desde su centro de inercia hasta el punto O es l . Encontrar el módulo y la dirección del vector F , o sea, de la componente horizontal de la fuerza de reacción en el punto O .

Solución. Según (5.38), la velocidad angular de precesión

$$\omega' = mgl/L.$$

El centro de inercia del trompo se mueve por un círculo, por consiguiente, el vector F está dirigido como se muestra en la fig. 105 (este vector gira con precesión junto con el eje del trompo).

De la ecuación de movimiento del centro de inercia tenemos

$$m\omega'^2 l \sin \vartheta = F.$$

Como resultado

$$F = (m^3 g^2 l^3 / L^2) \sin \vartheta.$$

Señalemos, que si el punto de apoyo del trompo se encontrara en un plano absolutamente liso, éste giraría con precesión a esta misma velocidad angular, pero alrededor del eje vortical que pasa por el centro del trompo, o sea, el punto C en la fig. 105.

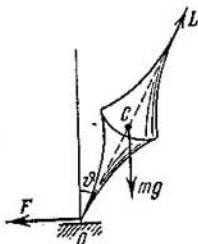


Fig. 105

Parte II

Mecánica relativista

Capítulo 6

Cinemática de la teoría especial de la relatividad

§ 6.1. Introducción

La teoría especial de la relatividad, creada por Einstein en el año 1905, significó la revisión de todas las nociones de la física clásica y, principalmente, de las ideas sobre las propiedades del espacio y el tiempo. Por eso, esta teoría puede ser denominada, por su contenido básico, estudio *físico* del espacio y el tiempo. Físico porque en dicha teoría las propiedades del espacio y del tiempo se consideran en estrechísima relación con las leyes de los fenómenos físicos que en ellos transcurren. El término «especial» subraya la circunstancia de que esta teoría examina los fenómenos sólo en los sistemas inerciales de referencia.

Comencemos esta parte con un breve resumen de la física prerrelativista y nos detendremos en las fuentes de aquellas dificultades, que condujeron al surgimiento de la teoría de la relatividad.

Ideas básicas de la física prerrelativista. Primero recordemos aquellas nociones del espacio y el tiempo ligadas con las leyes de Newton, es decir, que se encuentran en la base de la mecánica clásica.

1. El espacio de tres dimensiones se somete a la geometría euclidiana.

2. A la par con el espacio tridimensional, independientemente de él, existe el tiempo (de modo independiente en el mismo sentido, que las tres dimensiones del espacio

no dependen una de otra). Pero, junto con esto, el tiempo está ligado con el espacio por las leyes de movimiento. En realidad, el tiempo se mide con relojes, que en principio pueden ser cualquier instrumento, en el cual se emplea uno u otro proceso periódico que ofrece la escala de tiempo. Por esto, determinar el tiempo independientemente de cualquier proceso periódico, es decir, sin ligazón con el movimiento, es imposible.

3. Las dimensiones de los sólidos (las escalas) y los intervalos de tiempo entre los acontecimientos dados son iguales en diferentes sistemas de referencia. Esto corresponde a la concepción newtoniana del carácter absoluto del espacio y el tiempo, según la cual se considera que sus propiedades no dependen del sistema de referencia, o sea, el espacio y el tiempo son iguales en todos los sistemas de referencia.

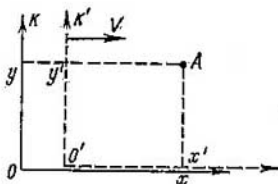


Fig. 106

4. Se reconoce la justeza del principio de inercia de Galileo—Newton, según el cual el cuerpo, no expuesto a la acción de otros cuerpos, se mueve rectilínea y uniformemente. Este principio confirma la existencia de los sistemas inerciales de referencia, en los cuales se cumplen las leyes de Newton (así como el principio de relatividad de Galileo).

5. De estas nociones surgen las transformaciones de Galileo, que expresan la relación espacial — temporal de cualquier acontecimiento en diferentes sistemas inerciales de referencia. Si el sistema K' de referencia se mueve con relación al sistema K a la velocidad V (fig. 106) y el origen de referencia del tiempo corresponde al momento, cuando el origen de coordenadas O' y O coinciden en ambos sistemas, entonces*)

$$x' = x - Vt; \quad y' = y; \quad t' = t. \quad (6.1)$$

*) Aquí y en el futuro nos limitamos sólo a dos coordenadas espaciales x e y . La coordenada z se comporta en todos los sentidos igual que y .

De aquí se deduce que las coordenadas de cualquier acontecimiento son relativas, es decir, tienen diferentes valores en diferentes sistemas de referencia; mas el momento de tiempo en el que tuvo lugar el acontecimiento, es igual en diferentes sistemas. Lo último significa, que el tiempo transcurre de igual modo en distintos sistemas de referencia. Esta circunstancia parecía tan evidente, que incluso no se destacó como un postulado especial.

De (6.1) se desprende directamente la ley clásica de transformación (de composición) de las velocidades:

$$v' = v - V, \quad (6.2)$$

donde v' y v son las velocidades del punto (de la partícula) en los sistemas K' y K de referencia.

6. El principio de relatividad de Galileo se cumple: todos los sistemas inerciales de referencia son equivalentes entre sí en el sentido mecánico, todas las leyes de mecánica en estos sistemas de referencia son iguales o, con otras palabras, son invariantes con relación a las transformaciones de Galileo.

7. El principio de acción a distancia se observa: las interacciones de los cuerpos se propagan instantáneamente, es decir, a velocidad infinitamente grande.

Estas nociones de mecánica clásica correspondían por completo a todo el conjunto de datos experimentales que había en aquel tiempo (señalemos, además, que estos datos se referían al estudio del movimiento de los cuerpos a velocidades considerablemente menores a la velocidad de la luz). Esto se confirmaba por el desarrollo muy exitoso de la misma mecánica. Por esta razón, las ideas de la mecánica clásica sobre las propiedades del espacio y el tiempo se consideraban tan fundamentales, que nadie dudó de su veracidad.

La primera prueba fue experimentada por el principio de relatividad de Galileo que, como se sabe, concernía sólo a la mecánica, parte única de la física que alcanzó entonces suficiente desarrollo. A medida del desarrollo de otras partes de la física, en particular la óptica y la electrodinámica, surgió una pregunta natural: ¿se propaga el principio de relatividad a otros fenómenos? Si no es así, con ayuda de éstos fenómenos (no mecánicos) se pueden en principio distinguir los sistemas inerciales de refe-

rencia y, a su vez, plantear el problema de la existencia de un sistema principal o absoluto de referencia.

Uno de estos fenómenos, que, como se esperaba, transcurre de modo diferente en distintos sistemas de referencia, es la propagación de la luz. Según la teoría ondulatoria que predominaba en aquel tiempo, las ondas luminosas debían propagarse a velocidad determinada en relación a cierto medio hipotético (el «éter luminotransmisor»), sobre la naturaleza del cual, en verdad, no había un criterio único. Pero cualquiera que fuese la naturaleza de este medio él no podría, lógicamente, reposar en todos los sistemas inerciales a la vez. De este modo, se destaca uno de los sistemas inerciales, o sea, el absoluto, aquel que es inmóvil respecto al «éter luminotransmisor». Suponían que en este y sólo en este sistema de referencia la luz se propagaba a igual velocidad c en todas las direcciones. Si cierto sistema inercial de referencia se mueve en relación al éter a la velocidad V , entonces la velocidad de la luz c' en este sistema debe someterse a la ley habitual de composición de las velocidades (6.2), $c' = c - V$.

Resultó posible comprobar experimentalmente esta hipótesis, lo que fue realizado por Michelson (junto con Morley).

Experimento de Michelson.

El fin de este experimento era determinar el movimiento «real» de la Tierra con relación al éter. En el experimento fue usado el movimiento de la Tierra por su órbita a la velocidad de 30 km/s.

La idea del experimento consistía en lo siguiente.

La luz se transmitió desde la fuente S (fig. 107) en dos direcciones perpendiculares entre sí, reflejándose en los espejos A y B , situados a igual distancia l de la fuente S , después de lo cual regresaba al punto S . En este experimento se comparaba el tiempo del recorrido de la luz por ambas trayectorias: SAS y $SB S$.

Supongamos, que la instalación se mueve junto con la Tierra de modo que su velocidad V respecto al éter se dirige a lo largo de SA (en el momento de la realización

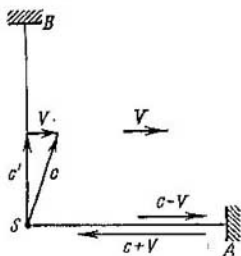


Fig. 107

del experimento). Si la velocidad de la luz se somete a la ley habitual de composición de las velocidades (6.2), entonces la velocidad de la luz en la trayectoria *SA* con relación a la instalación (a la Tierra) es igual a $c - V$ y en la trayectoria de regreso, $c + V$. Entonces el tiempo de recorrido de la trayectoria *SAS* es igual a

$$t_{\parallel} = \frac{l}{c-V} + \frac{l}{c+V} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-(V/c)^2}.$$

Mas en la trayectoria *SBS* la velocidad de la luz respecto a la instalación es igual a $c' = \sqrt{c^2 - V^2}$ (fig. 107), y el tiempo de recorrido de esta trayectoria

$$t_{\perp} = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}.$$

De la comparación de las expresiones para t_{\parallel} y t_{\perp} se ve que la luz debe recorrer ambas trayectorias en diferente tiempo. Midiendo la diferencia de los tiempos $t_{\perp} - t_{\parallel}$ se puede determinar la velocidad de la instalación (de la Tierra) con relación al éter.

A pesar de que la diferencia de tiempo esperada era extraordinariamente pequeña, la instalación tenía suficiente sensibilidad para detectar con fiabilidad esta diferencia (esto se logró con ayuda de un método interferencial muy sensible).

No obstante, el resultado del experimento resultó ser negativo: no fue advertida diferencia de tiempo. Desde luego, pudo resultar casualmente que en el momento de realización del experimento la Tierra estaba en reposo con relación al éter. Pero entonces, por ejemplo, al cabo de medio año, la velocidad de la Tierra respecto al éter alcanzaría 60 km/s. Sin embargo, la repetición del experimento después de medio año no dio como antes el resultado esperado.

Experimentos más exactos de esta misma naturaleza, realizados ulteriormente, también confirmaron el resultado primitivo.

El resultado negativo del experimento de Michelson contradujo lo que se esperaba sobre la base de las transformaciones del Galileo (transformaciones de velocidad). También demostró, que es imposible descubrir el movimiento respecto al éter, que la velocidad de la luz no depende del movimiento de la fuente de luz (ya que la

fueron se mueve de modo distinto respecto al éter en diferentes estaciones del año).

A favor de que la velocidad de la luz no depende de la velocidad de la fuente indican asimismo ciertas observaciones astronómicas (por ejemplo, de las estrellas binarias), así como otros experimentos realizados posteriormente con el fin de comprobar especialmente este hecho.

A principios del siglo XX en la física teórica y experimental se creó una situación peculiar. De un lado, teóricamente fueron pronosticados diferentes efectos que destacan de la multitud de sistemas inerciales el principal (absoluto). De otro lado, los constantes intentos de descubrir estos efectos en la práctica fracasaban invariablemente. La práctica confirmaba permanentemente la justeza del principio de relatividad para todos los fenómenos incluyendo también aquellos, para los cuales la ciencia lo consideraba inadmisibles de antemano.

Fue hecha una serie de intentos para explicar el resultado negativo del experimento de Michelson y los análogos a él en los límites de la mecánica clásica. Sin embargo, todos ellos resultaron ser, a fin de cuentas, no satisfactorios. La solución cardinal de este problema fue sólo hallada en la teoría de la relatividad de Einstein.

§ 6.2. Postulados de Einstein

El análisis profundo de todo el material experimental y teórico existente a principios del siglo XX, llevó a Einstein a revisar los conceptos iniciales de la física clásica, ante todo las nociones de las propiedades del espacio y el tiempo. Como resultado, por él fue creada la teoría especial de la relatividad, que fue la conclusión lógica de toda la física clásica.

Esta teoría deja invariables tales nociones de la mecánica clásica como el carácter euclidiano del espacio y el principio de inercia de Galileo—Newton. Mas en lo que se refiere a la afirmación de la invariabilidad de las dimensiones de los sólidos y de los intervalos de tiempo en diferentes sistemas de referencia, Einstein prestó atención que estas nociones surgieron como resultado del estudio de los movimientos de los sólidos a velocidades pequeñas. Por eso, su extrapolación en la zona de grandes velocidades no se justifica con nada y, por consiguiente, es

ilícita. Sólo la experiencia puede dar respuesta a la pregunta acerca de sus propiedades verdaderas. Esto también se refiere a las transformaciones de Galileo y al principio de acción a distancia.

En la teoría especial de la relatividad Einstein tomó en calidad de concepciones iniciales dos postulados o principios, a favor de los cuales señala todo el material experimental (y en primer lugar el experimento de Michelson):

- 1) principio de relatividad,
- 2) independencia de la velocidad de la luz de la velocidad de la fuente.

El primer postulado es la generalización del principio de relatividad de Galileo sobre cualquier proceso físico: *todos los fenómenos físicos transcurren de igual modo en todos los sistemas inerciales de referencia; todas las leyes de la naturaleza y las ecuaciones que las describen son invariantes, es decir, no varían durante el paso de un sistema inercial de referencia a otro.* Con otras palabras, *todos los sistemas inerciales de referencia son equivalentes (indiscernibles) por sus propiedades físicas; en principio no se puede por medio de experimento destacar uno de ellos como preferible.*

El segundo postulado afirma que *la velocidad de la luz en el vacío no depende del movimiento de la fuente de luz y es igual en todas las direcciones.* Esto significa, que *la velocidad de la luz en el vacío es idéntica en todos los sistemas inerciales de referencia.* De ese modo, la velocidad de la luz ocupa un lugar especial en la naturaleza. A diferencia de todas las demás velocidades, que varían con el paso de un sistema de referencia a otro, la velocidad de la luz en el vacío es una magnitud invariante. Como vemos, la existencia de esta velocidad varía sustancialmente las nociones de espacio y tiempo.

De los postulados de Einstein también se deduce que *la velocidad de la luz en el vacío es límite: ninguna señal, ninguna acción de un cuerpo sobre otro no puede propagarse a velocidad que supere la velocidad de la luz en el vacío.* Precisamente el carácter límite de esta velocidad y explica la igualdad de la velocidad de la luz en todos los sistemas de referencia. En efecto, según el principio de relatividad, las leyes de la naturaleza deben ser iguales en todos los sistemas inerciales de referencia. El

hecho de que la velocidad de cualquier señal no puede superar el valor límite, también es una ley de la naturaleza. Por consiguiente, el valor de la velocidad, o sea, de la velocidad de la luz en el vacío, debe ser igual en todos los sistemas inerciales de referencia.

En particular, la existencia de la velocidad límite supone la limitación automática de la velocidad de las partículas por la magnitud c . En caso contrario estas partículas podrían realizar la transmisión de señales (o la interacción entre los cuerpos) a velocidad superior a la límite. Así pues, según los postulados de Einstein, el valor de todas las velocidades de movimiento de los cuerpos y de propagación de las interacciones posibles en la naturaleza está limitada por la magnitud c . De esta forma mismo se rechaza el principio de acción a distancia de la mecánica clásica.

Todo el contenido de la teoría especial de la relatividad surge de estos dos postulados. En la actualidad ambos postulados de Einstein, como asimismo todos los corolarios que de ellos se deducen, se confirman convincentemente por todo el conjunto de material experimental acumulado.

Sincronización de los relojes. Antes de hacer cualquier deducción de estos postulados, Einstein analizó minuciosamente las nociones sobre los procedimientos de medición del espacio y el tiempo. En primer lugar prestó su atención en que poseen realidad física no el punto del espacio y no el momento de tiempo, cuando algo ocurrió, sino solamente el mismo *acontecimiento*. Para la descripción de un acontecimiento en un sistema de referencia dado es necesario indicar el lugar donde transcurre y el momento de tiempo cuando ocurre.

La posición del punto, en el cual tiene lugar el acontecimiento, puede ser determinado con ayuda de escalas rígidas por los métodos de la geometría euclidiana y expresado en coordenadas cartesianas. En este sentido, la mecánica clásica empleaba métodos completamente reales de comparación de las magnitudes medidas con patrones modelo.

El momento de tiempo correspondiente se puede determinar con ayuda de relojes instalados en aquel punto del sistema de referencia donde tiene lugar el acontecimiento dado. Sin embargo, esta definición deja de ser

satisfactoria cuando es necesario confrontar acontecimientos que ocurren en diferentes lugares o, lo que es lo mismo, comparar el tiempo para acontecimientos que transcurren en lugares alejados de los relojes.

En realidad, para comparar el tiempo (las indicaciones de los relojes) en diferentes puntos del sistema de referencia, ante todo es necesario establecer el procedimiento para determinar el tiempo común para todos los puntos del sistema de referencia. Con otras palabras, es necesario garantizar la marcha *sincrónica* de todos los relojes del sistema de referencia dado.

Es evidente, que sincronizar los relojes, instalados en los diferentes puntos del sistema de referencia, se puede solamente con ayuda de ciertas señales. Las señales más rápidas, aptas para este fin, son las luminosas o las de radio que se propagan a la velocidad conocida c . La elección precisamente de estas señales se determina, además, porque su velocidad no depende de la dirección en el espacio y porque es igual en todos los sistemas inerciales de referencia.

Luego se puede proceder del siguiente modo. Un observador, que se encuentra, por ejemplo, en el origen de coordenadas O del sistema de referencia dado, comunica por radio: «Transmitimos la señal de tiempo exacto. Ahora, según mi reloj, es el tiempo t_0 ». En el momento, cuando esta señal alcanza los relojes que se encuentran a la distancia r del punto O , los establecen de forma que indiquen el tiempo $t = t_0 + r/c$, es decir, teniendo en cuenta el tiempo de retardo de la señal. La repetición de la señal después de intervalos de tiempo determinados da la posibilidad a cada observador de establecer la marcha sincrónica de sus relojes con el del punto O . Como resultado de esta operación se puede afirmar que todos los relojes del sistema de referencia dado indican en cada momento un mismo tiempo común.

Es importante señalar, que el tiempo determinado de ese modo se refiere sólo a aquel sistema de referencia con relación al cual, los relojes sincronizados están en reposo.

Correlaciones entre los acontecimientos. Recurramos al problema de las correlaciones espaciales y temporales entre los acontecimientos dados en diferentes sistemas inerciales de referencia.

Ya en la mecánica clásica las correlaciones espaciales entre diferentes acontecimientos dependen del sistema de referencia a que se refieren. Por ejemplo, dos destellos seguidos de una lámpara en un tren en movimiento tienen lugar en un mismo punto del sistema de referencia ligado con el tren, pero en diferentes puntos del sistema de referencia ligado con la vía. La afirmación de que dos acontecimientos no simultáneos transcurren en un mismo

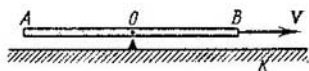


Fig. 108

lugar o a una determinada distancia uno de otro, adquiere sentido sólo cuando se indica a cual sistema de referencia se refiere esta afirmación.

En contraposición a esto, las correlaciones temporales entre los acontecimientos en la mecánica clásica se considera que no dependen del sistema de referencia. Esto significa, que si dos acontecimientos cualesquiera tienen lugar simultáneamente en un sistema de referencia, ellos son también simultáneos en todos los demás sistemas de referencia. En general, el intervalo de tiempo entre dos acontecimientos dados se considera igual en todos los sistemas de referencia.

Es fácil, sin embargo, convencerse de que, en realidad, esto no es así: la *simultaneidad* (y por consiguiente, el transcurso del tiempo) es un concepto relativo que adquiere sentido sólo cuando se indica a qué sistema de referencia este concepto se refiere. Demostremos con ayuda de un simple razonamiento, que dos acontecimientos simultáneos en un sistema de referencia, en otro sistema de referencia resultan ser no simultáneos.

Imaginémonos la barra *AB* que se mueve a velocidad constante *V* con relación al sistema *K* de referencia. En el centro de la barra, en el punto *O*, se encuentra una lámpara, entanto que en los extremos, o sea, en los puntos *A* y *B*, fotocélulas (fig. 108). Supongamos que en cierto momento la lámpara *O* dio un destello de luz de corta duración. Como la velocidad de propagación de la luz en el sistema de referencia ligado con la barra (como y en

todo sistema inercial de referencia) es igual a c en ambas direcciones, los impulsos luminosos alcanzan las fotocélulas A y B equidistantes del punto O en un mismo momento de tiempo (en el sistema de referencia «barra») y las dos fotocélulas funcionan simultáneamente.

De otro modo transcurren los acontecimientos en el sistema K . En este sistema de referencia la velocidad de los impulsos luminosos en ambas direcciones también es igual a c , no obstante, los caminos por ellos recorridos son diferentes. En realidad, mientras los impulsos luminosos van hacia los puntos A y B , estos últimos se desplazan a la derecha, y, por consiguiente, la fotocélula A funciona antes que la B .

De ese modo, los acontecimientos simultáneos en un sistema de referencia no lo son en otro, es decir, la simultaneidad es, a diferencia de las nociones de la mecánica clásica, un concepto relativo. Esto a su vez significa, que el tiempo no transcurre igualmente en diferentes sistemas de referencia.

Si tuviéramos a nuestra disposición señales que se propagan instantáneamente, entonces los acontecimientos, simultáneos en un sistema de referencia, también lo serían en cualquier otro sistema. Esto se deduce directamente del ejemplo que acabamos de examinar. En este caso, el transcurso del tiempo no dependería del sistema de referencia y se podría hablar del carácter absoluto del tiempo que figura en las transformaciones de Galileo. De ese modo, las transformaciones de Galileo, en esencia, parten de la suposición que la sincronización de los relojes se realiza con ayuda de señales que se propagan instantáneamente. No obstante, tales señales no existen en la realidad.

§ 6.3. Retraso del tiempo y reducción de la longitud

En este párrafo estudiaremos tres importantísimas consecuencias que se desprenden de los postulados de Einstein: la igualdad de las dimensiones transversales de los cuerpos en diferentes sistemas de referencia, el retraso de la marcha de los relojes en movimiento y la reducción de las dimensiones longitudinales de los cuerpos en movimiento y, luego (en el § 6,4), generalizaremos los resul-

tados obtenidos en forma de las fórmulas correspondientes de transformación de las coordenadas y el tiempo.

Comenzando la solución de estos problemas, ante todo recordemos que por sistema de referencia se sobrentiende el cuerpo de referencia, con el cual se ligan la red de coordenadas y una serie de relojes fijos iguales, sincronizados entre sí. Seguidamente, se supone que en todos los sistemas inerciales de referencia las redes de coordenadas y los relojes se gradúan de *igual modo*. Evidentemente, que esto se puede realizar solamente con ayuda de patrones de longitud y de tiempo realizados también de igual modo en todos los sistemas de referencia.

Para esto es suficiente emplear cualquier proceso periódico de la naturaleza, que nos dé la escala natural tanto de la longitud, como de tiempo, por ejemplo, una de las ondas monocromáticas emitidas por determinados átomos, inmóviles en el sistema de referencia dado. Entonces, en este sistema de referencia se puede tomar por patrón de largura la longitud de onda y por patrón de tiempo, el período de oscilación correspondiente. Con ayuda de estos patrones se puede construir el patrón de *un metro* como un número determinado de las longitudes de onda dadas y el patrón de *un segundo*, también como un número determinado de períodos de las oscilaciones dadas (señalemos, que en la actualidad así se ha hecho).

La operación análoga se puede hacer en cada sistema inercial de referencia, empleando una misma onda monocromática de los mismos átomos, fijos en cada uno de estos sistemas de referencia. De base para esto sirve el que, según el principio de relatividad, las propiedades físicas de los átomos en reposo no dependen del sistema de referencia en que ellos reposan.

Habiendo realizado los patrones de longitud y de tiempo en cada sistema de referencia, se puede pasar a solucionar un problema tan fundamental como la comparación de estos patrones en los diferentes sistemas o, con otras palabras, a la comparación de las dimensiones de los cuerpos y el transcurso del tiempo en estos sistemas.

Igualdad de las dimensiones transversales de los cuerpos. Empecemos por el problema de la comparación de las dimensiones transversales de los cuerpos en los diferentes sistemas inerciales de referencia. Imaginémos dos sistemas inerciales de referencia K y K' , los ejes y e y'

de los cuales son paralelos entre sí y perpendiculares a la dirección del movimiento de un sistema respecto al otro (fig. 109), desplazándose el origen de referencia O' del sistema K' por la recta que pasa por origen de referencia O del sistema K . Instalemos a lo largo de los ejes y e y' las barras OA y $O'A'$, que son patrones del metro en cada uno de estos sistemas de referencia. Luego imaginémonos, que en el momento de coincidencia de los ejes

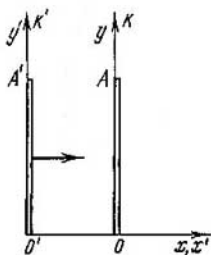


Fig. 109

y' e y el extremo superior de la barra izquierda hace una marca en el eje y del sistema K .

¿Coincidirá esta marca con el punto A , o sea, con el extremo superior de la barra derecha?

El principio de relatividad permite responder de inmediato a esta pregunta: sí, coincide. Si esto no fuera así, entonces desde el punto de vista de ambos sistemas de referencia una de las barras resultaría, por ejemplo, más corta que la otra y, por consiguiente, habría la posibilidad de distinguir de modo experi-

mental uno de los sistemas inerciales de referencia del otro por sus dimensiones transversales más cortas. Sin embargo, esto contradice al principio de relatividad.

De aquí se deduce, que las dimensiones transversales de los cuerpos son iguales en todos los sistemas inerciales de referencia. Esto significa también, que con la elección indicada de los orígenes de referencia de los sistemas K' y K las coordenadas y' e y de cualquier punto o acontecimiento coinciden, es decir,

$$y' = y. \quad (6.3)$$

Esta correlación es una de las transformaciones de coordenadas buscadas.

Retardo del tiempo. Nuestro problema siguiente es la comparación del transcurso del tiempo en diferentes sistemas inerciales de referencia. Como ya se dijo, el tiempo se mide con relojes, entendiéndose por relojes cualquier instrumento, en el cual se emplea uno u otro proceso periódico. Por esta razón, en la teoría de la relatividad

se acostumbra generalmente a hablar de la comparación de la marcha de relojes idénticos en diferentes sistemas inerciales de referencia.

Este problema se puede resolver de la forma más sencilla con ayuda del siguiente experimento mental (es decir, en principio posible). Tomemos el llamado *reloj luminoso*, es decir, una barra con espejos en ambos extremos, entre los cuales «corre» un corto impulso luminoso. El período de estos relojes es igual al intervalo de tiempo entre dos momentos seguidos, cuando el impulso luminoso alcanza algún extremo determinado de la barra.

Luego, imaginémosnos dos sistemas inerciales de referencia K' y K que se mueven uno respecto al otro a la velocidad V . Sea que el reloj luminoso está fijo en el sistema K' y orientado perpendicularmente en la dirección de su movimiento con relación al sistema K (fig. 110). Ahora observemos la «marcha» de este reloj en ambos sistemas de referencia: K' y K .

En el sistema K' el reloj está inmóvil y su periodo

$$\Delta t_0 = 2l/c,$$

donde l es la distancia entre los espejos.

En el sistema K , con relación al cual el reloj se mueve, la distancia entre los espejos también es l , ya que las dimensiones transversales de los cuerpos son iguales en diferentes sistemas de referencia. Sin embargo, el camino del impulso luminoso en este sistema de referencia ya será otro, o sea, en zigzag (fig. 110): mientras el impulso luminoso se propaga desde el espejo inferior al superior, este último se desplaza a cierta distancia hacia la derecha, etc. Por eso, el impulso luminoso, para regresar al espejo inferior, recorre un camino mayor en el sistema K , pero a esta misma velocidad c . Esto significa, que para esto la luz necesita *mayor* tiempo, o sea, más que cuando el

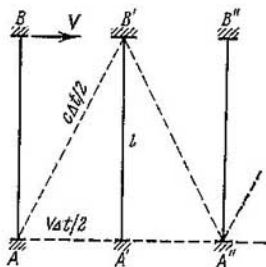


Fig. 110

reloj estaba inmóvil. Por eso, el período del reloj en movimiento, se prolonga, es decir, desde el punto de vista del sistema K de referencia el reloj marchará más lentamente.

El período del reloj en movimiento en el sistema K lo designamos por Δt . Del triángulo rectángulo $AB'A'$ (fig. 110) se deduce que $l^2 + (V\Delta t/2)^2 = (c\Delta t/2)^2$, de donde

$$\Delta t = (2l/c) / \sqrt{1 - (V/c)^2}.$$

Y como $2l/c = \Delta t_0$, entonces

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (6.4)$$

donde $\beta = V/c$, V es la velocidad del reloj en el sistema K .

De aquí se ve, que $\Delta t > \Delta t_0$, es decir, el mismo reloj en diferentes sistemas inerciales de referencia marcha de modo distinto: en aquel sistema de referencia, con relación al cual el reloj se mueve, él marcha más lentamente que en el sistema de referencia donde está en reposo. Con otras palabras, *el reloj en movimiento marcha más lentamente que el que está en reposo*. A este fenómeno lo denominan *retraso del tiempo*.

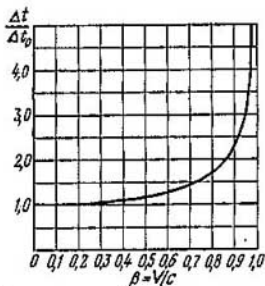


Fig. 111

El tiempo registrado por el reloj que se mueve junto con un cuerpo en el que transcurre algún proceso, se denomina *tiempo propio* de este cuerpo y se designa por Δt_0 . Como se deduce de (6.4), el tiempo propio es el más corto. El tiempo Δt del mismo proceso en otro sistema de referencia depende de la velocidad V de este sistema respecto al cuerpo, en el que transcurre el proceso. Esta dependencia se observa esencialmente a las velocidades V comparables con la de la luz (fig. 111).

De ese modo, a diferencia de la mecánica clásica el transcurso del tiempo depende en realidad del estado de

movimiento. No existe un tiempo mundial único y el concepto «de intervalo de tiempo entre dos acontecimientos dados» resulta ser relativo. La afirmación de que entre dos acontecimientos dados pasaron tantos segundos, adquiere sentido solamente cuando se indica a qué sistema de referencia esta afirmación se refiere.

El tiempo absoluto de la mecánica clásica es en la teoría de la relatividad un concepto aproximado, justo solamente a velocidades relativamente pequeñas (con relación a la velocidad de la luz) de los sistemas de referencia. Esto se deduce inmediatamente de (6.4) y se ve en la fig. 111: cuando $V \ll c$ $\Delta t \approx \Delta t_0$.

Así, llegamos a una deducción fundamental: el tiempo en el sistema de referencia que se mueve con el reloj corre con mayor lentitud (para el observador con relación al cual el reloj se mueve). Esto mismo se refiere a todos los procesos que tienen lugar en sistemas de referencia que se mueven con relación al observador.

Es natural que surja la pregunta: ¿advertirá el observador en el sistema K' , que se mueve con relación al sistema K , que su reloj marcha más lento que el reloj del sistema K ? No, no lo advierte. Esto se deduce en seguida del principio de relatividad. Si el observador K' también advirtiera el retraso del tiempo en su sistema de referencia, esto significaría que para *ambos* observadores, K' y K , el tiempo transcurre con mayor lentitud en uno de los sistemas inerciales de referencia. De esto ellos concluirían que uno de los sistemas inerciales de referencia se diferencia del otro, lo que contradice al principio de relatividad.

De aquí se deduce, que el efecto de retraso del tiempo es mutuo, simétrico con relación a ambos sistemas inerciales de referencia K y K' . Con otras palabras, si desde el punto de vista del sistema K el reloj del sistema K' funciona más lento desde el punto de vista del sistema K' , al revés, funciona más lento el reloj del sistema K (con ello en una misma relación). Esta circunstancia señala que *el fenómeno de retraso del tiempo es puramente cinemático*. El representa de por sí el resultado obligatorio de la invariabilidad de la velocidad de la luz y de ninguna manera puede ser aducido a alguna variación en las propiedades del reloj, condicionada por su movimiento.

La fórmula (6.4) encontró de inmediato confirmación experimental, explicando el comportamiento, a primera vista incomprensible, de los muones al pasar por la atmósfera terrestre. Los muones son partículas inestables que se desintegran espontáneamente en promedio al cabo de $2 \cdot 10^{-6}$ s (este tiempo ha sido medido en condiciones, cuando ellos están inmóviles o se mueven a pequeñas velocidades). Los muones se forman en las capas superiores de la atmósfera, a la altura de 20 a 30 km. Si el tiempo de vida de los muones no dependiera de la velocidad, entonces, moviéndose incluso a la velocidad de la luz, ellos no podrían pasar un camino mayor que $c\Delta t = 3 \cdot 10^8 \times 2 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 600 \text{ m}$. Sin embargo, las observaciones muestran que un número considerable de muones alcanzan, no obstante, la superficie terrestre.

Esto se explica a causa de que el tiempo $2 \cdot 10^{-6}$ s es el tiempo propio de vida Δt_0 de los muones, es decir, el tiempo según el reloj que se mueve junto con los muones. Mas el tiempo en el reloj terrestre debe ser, según (6.4), mucho mayor (la velocidad de estas partículas es cercana a la de la luz) y resulta ser suficiente para que los muones puedan alcanzar la superficie terrestre.

En conclusión, unas palabras sobre la llamada «paradoja de reloj» o «paradoja de los mellizos». Sea que tenemos dos relojes iguales A y B , de los cuales el reloj A está inmóvil en cierto sistema inercial de referencia y el reloj B primero se separa del reloj A y después regresa hacia él. Se supone que en el momento inicial, cuando los relojes se encontraban juntos, ellos indicaban el mismo tiempo.

Desde «el punto de vista» del reloj A se mueve el reloj B , por eso él marcha más lentamente y al retornar está retrasado respecto al reloj A . Desde «el punto de vista» del reloj B , al revés, se mueve el reloj A , por esto, al regresar, se retrasa precisamente él. Esta evidente contradicción es la esencia de «la paradoja».

En realidad en estos razonamientos se ha admitido un error de principio. Este error se refiere a los razonamientos desde «el punto de vista» del reloj B , ya que el sistema de referencia ligado con este reloj es no inercial (al principio se aleja con aceleración y luego se aproxima), y no tenemos derecho a emplear en el caso dado los resultados que sólo se refieren a los sistemas inerciales de referencia. Cálculos detallados, que salen de los límites de la teoría especial de la relatividad, muestran que el reloj que se mueve con aceleración (en nuestro caso el reloj B), marcha con mayor lentitud, por eso cuando regresa se retrasa precisamente él.

Contracción de Lorentz. Sea que la barra AB se mueve con relación al sistema K de referencia a la velocidad cons-

lante V (fig. 112) y que la longitud de la barra en el sistema de referencia K' , ligado con ella, es igual a l_0 . Nuestro problema es determinar la longitud l de la barra dada en el sistema K .

Hagamos el siguiente experimento mental. En el eje x del sistema K hacemos una marca M y junto a ella instalamos un reloj. Según este reloj fijamos el tiempo de paso



Fig. 112

Δt_0 de la barra delante de la marca M . Entonces se puede afirmar que la longitud buscada de la barra en el sistema K

$$l = V\Delta t_0.$$

Para el observador ligado con la barra, el tiempo de vuelo será otro. Efectivamente, para él, el reloj que ha mostrado el tiempo de vuelo Δt_0 , se mueve a la velocidad V , es decir, indica un tiempo «ajeno». Para este observador «su» tiempo de vuelo Δt será, según (6.4), mayor. Él puede hallar este tiempo de la correlación

$$l_0 = V\Delta t.$$

De estas dos ecuaciones, teniendo en cuenta (6.4), obtenemos

$$l/l_0 = \Delta t_0/\Delta t = \sqrt{1 - \beta^2},$$

o bien

$$\boxed{l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (6.5)$$

donde $\beta = V/c$. La longitud l_0 , medida en el sistema de referencia, donde la barra está inmóvil, se denomina *longitud propia*.

De ese modo, la largura de la barra en movimiento resulta ser menor que su longitud propia, es decir, $l < l_0$. Este fenómeno denomínase *contracción de Lorentz*. Señala-

temos, que la contracción dada se refiere sólo a las medidas longitudinales de los cuerpos, (a las medidas en la dirección del movimiento), las medidas transversales, como fue establecido, no varían. En comparación con la forma del cuerpo en el sistema de referencia donde él está en

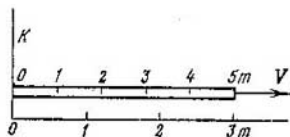


Fig. 113

reposo, su forma en el sistema móvil de referencia se puede caracterizar como aplanada en la dirección del movimiento.

La contracción de la longitud de una barra móvil se aclara en la fig. 113, en la cual se ve, que en el sistema

de referencia, ligado con la barra, su longitud $l_0 = 5\text{m}$, en tanto que en el sistema K , con relación al cual la barra se mueve a la velocidad $V = 4/5 c$, su longitud $l = 3\text{m}$.

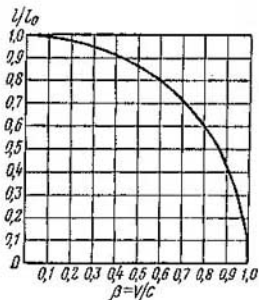


Fig. 114

De la fórmula (6.5) se deduce que el efecto de contracción depende de la velocidad V . Esta dependencia se revela sobre todo esencialmente para las velocidades V , comparables con la de la luz (fig. 114).

Así pues, la longitud de una misma barra resulta

diferente en distintos sistemas inerciales de referencia. Con otras palabras, *la longitud es un concepto relativo que tiene sentido sólo en relación a uno u otro sistema de referencia.* La afirmación de que la longitud de un cuerpo es de tantos metros no tiene sentido mientras no se indique

a cual precisamente sistema de referencia ha sido atribuida esta magnitud.

Mas a velocidades pequeñas ($V \ll c$), como se deduce de (6.5) y se ve en la figura 114, $l \approx l_0$ y la longitud del cuerpo adquiere sentido absoluto práctico.

Es necesario señalar, que la contracción de Lorentz, como también el retardo del tiempo, debe ser mutua. Esto significa, que si nosotros comparamos dos barras que se mueven una respecto a otra y la longitud propia de las cuales es igual, desde «el punto de vista» de cada una de estas barras la longitud de la otra será más corta, además, en correlaciones iguales. Si esto no fuera así, entonces existiría la posibilidad de distinguir experimentalmente los sistemas inerciales de referencia ligados con estas barras, lo que no obstante, contradice al principio de relatividad.

Esto muestra, que la *contracción de Lorentz es también un efecto puramente cinemático*, o sea, en el cuerpo no surgen ningunas tensiones que provoquen su deformación.

Subrayemos, que la contracción de Lorentz de los cuerpos en la dirección de su movimiento, igual que el retardo del tiempo, es un hecho real y objetivo, de ningún modo ligado con posibles ilusiones del observador. Todos los valores de las medidas del cuerpo dado o de los intervalos de tiempo, obtenidos en diferentes sistemas de referencia, son equitativos (todos ellos son «correctos»). La dificultad de comprensión de estas afirmaciones está ligada exclusivamente con nuestros hábitos, fundamentados en la experiencia diaria, de considerar los conceptos de longitud y de intervalos de tiempo conceptos absolutos, cuando en realidad esto no es así. Los conceptos de longitud y de intervalos de tiempo son tan relativos como los conceptos de movimiento y de reposo.

§ 6.4. Transformaciones de Lorentz

Ahora nos espera resolver el problema fundamental de las fórmulas de transformación de las coordenadas y del tiempo (se tiene en cuenta las fórmulas que ligan las coordenadas y los momentos de tiempo de un mismo acontecimiento en diferentes sistemas inerciales de referencia).

¿Transformaciones de Galileo? Recordemos, que estas transformaciones se basan en las hipótesis de que la longitud de los cuerpos no depende del movimiento y el tiempo transcurre igualmente en los diferentes sistemas inerciales de referencia. No obstante en el párrafo anterior descubrimos, que en realidad esto no es así: el transcurso del tiempo y la longitud de los cuerpos dependen del sistema de referencia, o sea, de las deducciones que son corolarios inevitables de los postulados de Einstein. Por eso nos vimos obligados a renunciar de las transformaciones de Galileo o, hablando más exactamente, reconocer que ellas sólo son un caso particular de ciertas transformaciones más generales.

Ante nosotros surge el problema de encontrar tales fórmulas de las transformaciones que, en primer lugar,

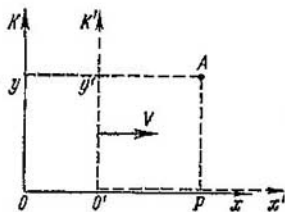


Fig. 115

tomen en consideración el retardo del tiempo y la contracción de Lorentz (es decir, que sean al fin de cuentas corolarios de los postulados de Einstein) y, en segundo lugar, que pasen en el caso límite de pequeñas velocidades a las transformaciones de Galileo. Pasamos a resolver este problema.

Examinemos dos sistemas inerciales de referencia K y K' . Sea que el sistema K' se mueve con relación al sistema K a la velocidad V . Dirijamos los ejes de coordenadas de ambos sistemas de referencia como se muestra en la fig. 115: los ejes x y x' coinciden y están dirigidos paralelamente al vector V , y los ejes y e y' son paralelos entre sí. En diferentes puntos de ambos sistemas de referencia colocamos iguales relojes y sincronizamos por separado el reloj del sistema K y el del sistema K' . Y finalmente, tomamos en ambos sistemas por origen de referencia del tiempo el momento, cuando coinciden los orígenes de coordenadas O y O' ($t = t' = 0$).

Ahora supongamos que en el momento de tiempo t (en el sistema K) en el punto con coordenadas x e y tuvo lugar el acontecimiento A , por ejemplo, se encendió

una lámpara. Nuestro problema es encontrar las coordenadas x' e y' y el momento del tiempo t' de este acontecimiento en el sistema K' .

El problema respecto a la coordenada y' ya fue resuelto al principio de este párrafo, donde fue mostrado [véase la fórmula (6.3)] que $y' = y$. Por eso, pasamos directamente a la determinación de la coordenada x' del acontecimiento. La coordenada x' caracteriza la longitud propia del segmento $O'P$, inmóvil en el sistema K' (fig. 115). Mas la longitud de este segmento en el sistema K , donde la referencia se realiza en el momento t , es igual a $x - Vt$. La relación entre estas longitudes se da por la fórmula (6.5), según la cual $x - Vt = x' \sqrt{1 - \beta^2}$. De donde

$$x' = (x - Vt) / \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (6.6)$$

De otro lado, la coordenada x caracteriza la longitud propia del segmento OP , inmóvil en el sistema K . Pero la longitud de este segmento en el sistema K' , donde la medición se realiza en el momento t' , es igual a $x' + Vt'$. De nuevo teniendo en cuenta (6.5), obtenemos $x' + Vt' = x \sqrt{1 - \beta^2}$, de donde

$$x = (x' + Vt') / \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (6.6')$$

Las fórmulas obtenidas también permiten establecer la relación entre los momentos de tiempo t y t' del acontecimiento A en ambos sistemas de referencia. Para esto es suficiente eliminar de (6.6) y (6.6') x' o x , después de lo cual obtenemos:

$$\begin{aligned} t' &= (t - xV/c^2) / \sqrt{1 - \beta^2}; \\ t &= (t' + x'V/c^2) / \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Las fórmulas (6.3), (6.6), (6.6') y (6.7) las denominan *transformaciones de Lorentz*. Ellas juegan un papel fundamental en la teoría de la relatividad. Por estas fórmulas se realiza la transformación de las coordenadas y el tiempo de cualquier acontecimiento durante el paso de un sistema inercial de referencia a otro.

Así, las transformaciones de Lorentz al pasar del sistema K al K' tienen el aspecto:

$$\boxed{x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y' = y; \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},} \quad (6.8)$$

y durante la transición inversa del sistema K' al K ,

$$\boxed{x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y = y'; \quad t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},} \quad (6.9)$$

donde $\beta = V/c$, V es la velocidad del sistema K' con relación al K .

Se debe prestar en seguida atención a la simetría (forma igual) de las fórmulas (6.8) y (6.9), lo que es resultado de la completa igualdad de derechos de ambos sistemas de referencia (el signo diferente de V en estas fórmulas se determina sólo por la dirección contraria del movimiento de los sistemas K y K' uno respecto al otro).

Las transformaciones de Lorentz se diferencian profundamente de las de Galileo (6.1), no obstante, las últimas pueden ser obtenidas de (6.8) y (6.9), si en ellas se pone de modo formal $c = \infty$ —¿Qué significa esto?

Al final del párrafo anterior fue señalado que las transformaciones de Galileo se basan en la suposición de la sincronización de los relojes con ayuda de señales que se propagan instantáneamente. De esto se desprende, que la magnitud c en las transformaciones de Lorentz juega el papel de la velocidad de aquellas señales que se emplean para la sincronización de los relojes. Si esta velocidad es infinitamente grande, entonces se obtienen las transformaciones de Galileo; mas si ella es igual a la velocidad de la luz, entonces serán las transformaciones de Lorentz. De ese modo, sobre la base de las transformaciones de Lorentz está la suposición de la sincronización de los relojes con ayuda de señales luminosas que tienen velocidad límite.

La particularidad notable de las transformaciones de Lorentz es que cuando $V \ll c$ ellas se convierten*) en las transformaciones de Galileo (6.1). De este modo, en el caso límite $V \ll c$ las leyes de transformaciones en la teoría de la relatividad y de mecánica clásica coinciden.

*) Hablando en rigor, todavía es necesario, que $x/c \ll t$, es decir, que los tiempos de propagación de las señales luminosas a la distancia que figura en los problemas considerados (x/c), sean pequeños en comparación con los intervalos de tiempo que a nosotros nos interesan. Ante esto se puede considerar condicionalmente que prácticamente las señales se propagan instantáneamente.

Esto significa, que la teoría de la relatividad no rechaza las transformaciones de Galileo como incorrectas, sino las incluye en las leyes reales de transformación como un caso especial, justo cuando $V \ll c$. Más adelante veremos que esto refleja la interacción general entre la teoría de la relatividad y la mecánica clásica, o sea, las leyes y las correlaciones de la teoría de la relatividad pasan a las leyes de mecánica clásica en el caso límite de velocidades pequeñas.

A continuación, de las transformaciones de Lorentz se ve que cuando $V > c$ los radicandos devienen negativos y las fórmulas pierden el sentido físico. Esto corresponde al hecho de que el movimiento de los cuerpos a velocidad mayor que la de la luz en el vacío, es imposible. Incluso no se puede hacer uso del sistema de referencia que se mueve a la velocidad $V = c$; con esto los radicandos se anulan y las fórmulas también pierden el sentido físico. Esto significa, por ejemplo, que con el fotón que se mueve a velocidad c no puede, en principio, ser ligado el sistema de referencia. O de otro modo: no existe tal sistema de referencia en el cual el fotón esté inmóvil.

Y finalmente, se debe prestar atención a que en las fórmulas de transformación del tiempo entra la coordenada espacial. Esta importante circunstancia muestra la relación indisoluble entre el espacio y el tiempo. Con otras palabras, no se debe tratar el espacio y el tiempo por separado sino el único *espacio-tiempo*, en el cual transcurren todos los fenómenos físicos.

§ 6.5. Corolarios de las transformaciones de Lorentz

Concepto de simultaneidad. Sea que en el sistema K de referencia transcurren dos acontecimientos cualesquiera: $A_1(x_1, y_1, t_1)$ y $A_2(x_2, y_2, t_2)$. Hallemos el intervalo de tiempo entre estos dos acontecimientos en el sistema K' que se mueve a la velocidad V a lo largo del eje x , como se muestra en la fig. 115. Según la fórmula de transformación del tiempo (6.8), el intervalo de tiempo buscado

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1)V/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6.10)$$

De aquí se deduce, que los acontecimientos simultáneos en el sistema K ($t_2 = t_1$) no son simultáneos en el sistema K' ($t'_2 - t'_1 \neq 0$). Excepción es el caso, cuando ambos acontecimientos tienen lugar en el sistema K simultáneamente en los puntos con valores iguales de la coordenada x (la coordenada y puede ser diferente).

De este modo, *la simultaneidad es un concepto relativo*; lo que es simultáneo en un sistema de referencia, en el caso general no es simultáneo en otro sistema de referencia. Hablando de la simultaneidad de los acontecimientos es necesario indicar el sistema de referencia con relación al cual tiene lugar la simultaneidad. En caso contrario, el concepto de simultaneidad pierde el sentido.

De la relatividad del concepto de simultaneidad se deduce que los relojes del sistema K' , puestos a lo largo del eje x' y sincronizados entre sí en este sistema de referencia, indicarán diferente tiempo en el sistema K . En efecto, tomemos para simplificar el momento cuando los orígenes de coordenadas O y O' de ambos sistemas de referencia coinciden y los relojes en estos puntos indican el mismo tiempo: $t = t' = 0$. Entonces, el reloj del sistema K en el punto con coordenada x en este sistema indica en este momento el tiempo $t = 0$, mas el reloj del sistema K' en este punto, muestra otro tiempo t' . En realidad, según la fórmula de transformación del tiempo (6.8),

$$t' = -xV/c^2 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

De aquí se ve, que en el momento $t = 0$ (en el sistema K) el reloj del sistema K' indicará tiempo diferente, que depende de la coordenada x (el denominado *tiempo local*). Esto se muestra en la fig. 116, *a*. Con relación al sistema K' el cuadro será inverso (fig. 116, *b*), como debe ser en correspondencia con la igualdad de derechos de ambos sistemas inerciales de referencia.

Luego, de la fórmula (6.10) se desprende que para los acontecimientos simultáneos en el sistema K el signo de $t'_2 - t'_1$ se determina por el signo de la expresión $-(x_2 - x_1)V$. Por consiguiente, la expresión $t'_2 - t'_1$ en los diferentes sistemas de referencia (con diversos valores de la velocidad V) se diferenciará no sólo por el módulo, sino que también por el signo. Lo último significa que el orden de los acontecimientos A_1 y A_2 puede ser cualquiera (tanto directo como inverso).

Lo dicho, sin embargo, no se refiere a los acontecimientos casuales-consecuentes. El orden de transcurso de estos acontecimientos (causa \rightarrow efecto) será el mismo en todos los sistemas de referencia. De esto es fácil cerciorarse mediante el razonamiento siguiente. Examinemos, por ejemplo, un disparo, o sea, el acontecimiento $A_1(x_1, t_1)$ y el golpe del proyectil en el blanco, es decir, el acontecimiento $A_2(x_2, t_2)$, suponiendo que ambos acontecimientos

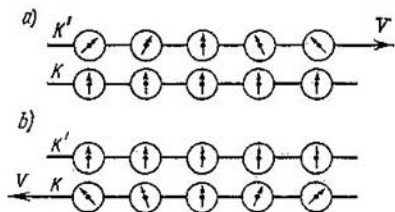


Fig. 116

tienen lugar en el eje x . En el sistema K de referencia $t_2 > t_1$, la velocidad del proyectil es v y sea para la determinación $x_2 > x_1$, siendo evidente que $x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$. Después de la sustitución de esta igualdad en la fórmula (6.10), obtenemos

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1) (1 - vV/c^2) / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

La magnitud que está en el segundo paréntesis de numerador es siempre positiva a causa de que $V < c$ (incluso para $v = c$, cuando la relación casual-consecuente está condicionada por la velocidad máxima posible de transmisión de las señales o de las interacciones). De aquí se deduce, que si $t_2 > t_1$ y $t'_2 > t'_1$, es decir, el orden de transcurso de los acontecimientos casual-consecuentes es igual en todos los sistemas inerciales de referencia.

Contracción de Lorentz. Dispongamos en el sistema K' una barra inmóvil a lo largo del eje x' , es decir, a lo largo de la dirección del movimiento de este sistema de referencia con relación al sistema K . Sea que la longitud de la barra en el sistema K' es igual a $l_0 = x'_2 - x'_1$ (longitud propia).

En el sistema K , respecto al cual la barra se mueve, se determina su longitud como la distancia l entre las coordenadas x_2 y x_1 de sus extremos, tomados en un mismo momento de tiempo ($t_2 = t_1$). Haciendo uso de las transformaciones de Lorentz (6.8) para las coordenadas x' y x , escribimos

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) / \sqrt{1 - \beta^2} = l / \sqrt{1 - \beta^2},$$

de donde

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (6.11)$$

De este modo, la longitud l de la barra en movimiento resulta ser menor que su longitud propia l_0 y en sistemas inerciales diferentes ella será la propia. Este resultado concuerda completamente con el obtenido antes (6.5).

De la definición de la longitud se deduce que la relatividad de la longitud de la barra dada es resultado de la relatividad del concepto de simultaneidad. Esto mismo se refiere a la forma de cualquier cuerpo, o sea, a sus dimensiones en la dirección del movimiento también son distintas en diferentes sistemas de referencia.

Duración de los procesos. Sea que en el punto con la coordenada x' del sistema K' de referencia transcurre cierto proceso, cuya duración en este sistema $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$ (tiempo propio del proceso). Encontramos la duración del proceso dado $\Delta t = t_2 - t_1$, en el sistema K , respecto al cual el sistema K' se mueve.

Con este fin hacemos uso de las transformaciones de Lorentz para el tiempo. Como el proceso transcurre en el punto con la coordenada fijada x' del sistema K' , lo más cómodo es emplear las fórmulas (6.9):

$$t_2 - t_1 = (t'_2 - t'_1) / \sqrt{1 - \beta^2},$$

o bien

$$\Delta t = \Delta t_0 / \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (6.12)$$

De aquí se ve, que la duración de un mismo proceso es distinta en diferentes sistemas inerciales de referencia. Su duración en el sistema K es mayor ($\Delta t > \Delta t_0$) y, por consiguiente, él transcurre con mayor lentitud en este sistema de referencia, que en el sistema K' . Esto concuerda completamente con el resultado que se refiere al funciona-

miento de un mismo reloj en diferentes sistemas inerciales de referencia, o sea, con la fórmula (6.4).

Intervalo. El carácter relativo de los intervalos espaciales y temporales de ningún modo significa que la teoría de la relatividad niega en general la existencia de cualquier magnitud absoluta. En realidad, todo es precisamente al revés. El problema que la teoría de la relatividad se plantea, consiste en hallar tales magnitudes (y leyes), que no dependan de la elección del sistema inercial de referencia.

La primera de estas magnitudes es la velocidad universal de propagación de las interacciones, igual a la velocidad de la luz en el vacío. Otra magnitud invariante, también muy importante, es el denominado *intervalo* s_{12} entre los acontecimientos 1 y 2, el cuadrado del cual se determina como

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \text{inv}, \quad (6.13)$$

donde t_{12} es el intervalo de tiempo entre los acontecimientos, l_{12} es la distancia entre los dos puntos, en los cuales tienen lugar los acontecimientos dados ($l_{12}^2 = x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2$).

Sobre la invariabilidad del intervalo podemos cerciorarnos fácilmente, calculándolo directamente en los sistemas de referencia K' y K . Haciendo uso de las transformaciones de Lorentz (6.8) y teniendo en cuenta que $y'_{12} = y_{12}$ y $z'_{12} = z_{12}$, escribimos:

$$c^2 t_{12}'^2 - x_{12}'^2 = c^2 \frac{(t_{12} - x_{12}V/c^2)^2}{1 - \beta^2} - \frac{(x_{12} - Vt_{12})^2}{1 - \beta^2} = c^2 t_{12}^2 - x_{12}^2.$$

Así pues, realmente, el intervalo es una magnitud invariante. Con otras palabras, la afirmación «dos acontecimientos están separados por cierto intervalo s » tiene carácter absoluto, o sea, es justa en todos los sistemas inerciales de referencia. La invariación del intervalo juega un papel fundamental en la teoría de la relatividad y es un instrumento muy efectivo en el análisis y solución de muchos problemas (véase, por ejemplo, el problema 6.4).

Tipos de intervalos. En dependencia de que componente predomina en el intervalo, espacial o temporal, estos los denominan correspondientemente:

espacio—similar ($l_{12} > ct_{12}$),

tiempo—similar ($ct_{12} > l_{12}$).

Además de estos dos tipos de intervalo, existe el tercero, o sea, el luz—similar ($ct_{12} = l_{12}$).

Si el intervalo entre dos acontecimientos es espacio—similar, entonces siempre es posible encontrar un sistema K' de referencia tal, en el que ambos acontecimientos tienen lugar simultáneamente ($t'_{12} = 0$):

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = -l_{12}'^2.$$

Mas si el intervalo es tiempo—similar, entonces siempre se puede encontrar un sistema K' de referencia tal, en el que ambos acontecimientos tienen lugar en un mismo punto ($l'_{12} = 0$):

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2.$$

En el caso de intervalos tiempo—similar semejantes $l_{12} > ct_{12}$, es decir, los acontecimientos en ningún sistema de referencia pueden ejercer influencia uno sobre otro, incluso si la relación entre los acontecimientos tuviera lugar a la velocidad límite c . De otro modo transcurre el problema en el caso de los intervalos tiempo—similar o luz—similar, para los cuales $l_{12} \leq ct_{12}$. Por consiguiente, los acontecimientos separados por intervalos tiempo—similar o luz—similar, pueden estar ligados casual—consecuentemente.

Transformaciones de la velocidad. Sea que en el plano x, y en el sistema K se mueve una partícula a la velocidad v , las proyecciones de la cual son v_x y v_y . Con ayuda de las transformaciones de Lorentz (6.8) encontremos las proyecciones de la velocidad de esta partícula v'_x y v'_y en el sistema K' , que se mueve con la velocidad V , como se muestra en la fig. 115:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{1}{dt'/dt} = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \\ v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} \frac{1}{dt'/dt} = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - v_x V/c^2}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

donde $\beta = V/c$. De aquí la velocidad de la partícula en el sistema K'

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \frac{\sqrt{(v_x - V)^2 + v_y^2 (1 - \beta^2)}}{1 - v_x V/c^2}. \quad (6.15)$$

Estas fórmulas expresan la llamada *ley relativista de transformación de la velocidad*. A velocidades pequeñas ($V \ll c$ y $v \ll c$) ellas pasan, como es fácil convencerse, a las fórmulas de transformación de la velocidad de la mecánica clásica:

$$v'_x = v_x - V; \quad v'_y = v_y,$$

o en forma vectorial

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}.$$

Prestamos atención a que la última fórmula resulta justa sólo con la aproximación newtoniana; mas en la

zona relativista ella no tiene sentido, ya que aquí no existe la ley de simple composición de las velocidades. De esto podemos cerciorarnos fácilmente por este ejemplo. Sea que el vector de velocidades \mathbf{v} de una partícula en el sistema K sea perpendicular al eje x , es decir, tenga las proyecciones $v_x = 0$ y $v_y = v$. Entonces, según (6.14) la proyección de la velocidad de esta partícula en el sistema K' :

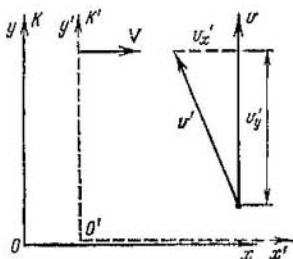


Fig. 117

es, según (6.14) la proyección de la velocidad de esta partícula en el sistema K' :

$$v'_x = -V; \quad v'_y = v_y \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (6.16)$$

Esto significa, que en el caso dado ($v \perp$ al eje x) la proyección v'_y de la velocidad disminuye al pasar al sistema K' y, evidentemente, que $\mathbf{v}' \neq \mathbf{v} - \mathbf{V}$ (fig. 117).

Ahora examinemos el caso, cuando las dos partículas se mueven al encuentro una a otra a velocidades iguales v en el sistema K de referencia. ¿A qué es igual la velocidad v' de una partícula con relación a la otra? La respuesta con la aproximación relativista se obtiene inmediatamente: $2v$. Mas en el caso de grandes velocidades es necesario hacer uso de la primera fórmula (6.14), tomando el eje x a lo largo del movimiento de la partícula. Ligemos el sistema K' de referencia con una de las partículas, por ejemplo, con aquella que se mueve en la dirección positiva

del eje x . Entonces, el problema se reduce a determinar la velocidad de la otra partícula en este sistema de referencia. Sustituyendo en (6.14) $v_x = -v$ y $V = v$, obtenemos

$$v'_x = -2v / [1 + (v/c)^2].$$

El signo menos significa que, en el caso dado, la segunda partícula se mueve en la dirección negativa del eje x' del sistema K' de referencia. Se debe señalar el hecho, que incluso en este caso, cuando ambas partículas se mueven prácticamente a la velocidad máxima posible $v \approx c$, la velocidad v' no puede superar a c (esto se deduce de inmediato de la última fórmula).

Y finalmente, comprobemos directamente que las fórmulas relativistas de transformación de la velocidad corresponden a la afirmación del segundo postulado de Einstein con relación a la invariabilidad de la velocidad de la luz c en todos los sistemas inerciales de referencia. Supongamos que el vector c tenga en el sistema K las proyecciones c_x y c_y , es decir, $c^2 = c_x^2 + c_y^2$. Hacemos uso de la fórmula (6.15), transformando en ella el radicando del siguiente modo:

$$c_x^2 - 2c_x V + V^2 + (c^2 - c_x^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \left(c - \frac{c_x V}{c}\right)^2.$$

Después de esto es fácil obtener que $v' = c$. Con esto, lógicamente, el vector c' en el sistema K' tendrá en el caso general otra dirección.

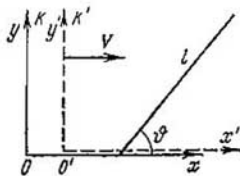


Fig. 118

Problemas para el capítulo 6

6.1. En el sistema K de referencia se encuentra una barra inmóvil de longitud $l = 1,00$ m, orientada bajo un ángulo $\vartheta = 45^\circ$ al eje x (fig. 118). Encontrar su longitud l' y el ángulo ϑ' , correspondiente en el sistema K' , que

se mueve con relación al sistema K con la velocidad $V = c/2$ a lo largo del eje x .

Solución. La longitud de la barra en el sistema K'

$$l' = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 (1 - \beta^2) + (\Delta y)^2}.$$

Teniendo en cuenta que $\Delta x = l \cos \vartheta$ y $\Delta y = l \sin \vartheta$, obtenemos

$$l' = l \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta} = 0,94 \text{ m.}$$

El ángulo ϑ en el sistema K' lo encontramos por medio de la tangente:

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{\Delta y}{\Delta x \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \vartheta' = 49^\circ.$$

Se debe prestar atención a que los resultados obtenidos no dependen de la dirección de la velocidad del sistema K' .

6.2. Una barra se mueve a lo largo de una regla a cierta velocidad constante. Si se fija la posición de ambos extremos de la barra simultáneamente en el sistema de referencia ligado con la regla, entonces la longitud de la barra $l_1 = 4,0$ m. Mas si se señala la posición de ambos extremos simultáneamente en el sistema de referencia ligado con la barra, entonces la diferencia de las lecturas según la regla $l_2 = 9,0$ m. Encontrar:

- 1) la longitud propia de la barra;
- 2) la velocidad de la barra con relación a la regla.

Solución. La longitud propia de la barra l_0 está ligada con l_1 y l_2 por las siguientes fórmulas:

$$l_1 = l_0 \sqrt{1-\beta^2}; \quad l_2 = l_0 \sqrt{1-\beta^2}.$$

donde β es la velocidad de la barra (en unidades de la velocidad de la luz). De estas fórmulas obtenemos:

$$1) \quad l_0 = \sqrt{l_1 l_2} = 6 \text{ m}; \quad 2) \quad \beta = \sqrt{1-l_1/l_2} = 5/3 \approx 0,75,$$

o $v = 0,75 c$.

6.3. «Paradoja» de la barra y el tubo. El tubo AB de 1 m de longitud reposa en el sistema K . Tomamos la barra $A'B'$ de 2 m de longitud y le comunicamos una velocidad tal, que su longitud

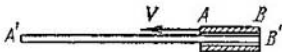


Fig. 119

en el sistema K se haga igual a 1,0 m. Entonces, en cierto momento la barra volando por el tubo se introduce por completo en él. No obstante, desde «el punto de vista» de la barra la contracción de Lorentz es doble para el tubo, por eso es evidente que la barra (2,0 m) no entra por completo en el tubo (0,5 m). ¿Hay aquí contradicción?

Solución. Desde «el punto de vista» del tubo los extremos de la barra que pasa coinciden con los extremos del tubo simultáneamente. Mas desde «el punto de vista» de la barra la coincidencia de los extremos no tendrá lugar simultáneamente: primero coinciden los extremos B y B' (fig. 119) y después, al cabo de un intervalo de tiempo Δt , los extremos A y A' . Este tiempo se puede calcular así:

$$\Delta t = (L_0 - l)/V = 6 \cdot 10^{-9} \text{ s},$$

donde $L_0 = 2,0$ m es la longitud propia de la barra, $l = 0,5$ m es la longitud del tubo que se mueve con relación a la barra, V es su velocidad. Esta última la encontramos con ayuda de la fórmula (6.11): $V = c\sqrt{3}/2$.

6.4. Hallar la distancia que cubre una partícula no estable en el sistema K de referencia desde su surgimiento hasta su desintegración, si su tiempo de vida en este sistema de referencia $\Delta t = 3,0 \cdot 10^{-6}$ s y el tiempo de vida propia $\Delta t_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s.

Solución. Haciendo uso de la fórmula (6.12) encontramos la velocidad de la partícula V y después la distancia buscada:

$$l = \Delta t \cdot V = \Delta t \cdot c \sqrt{1 - (\Delta t_0/\Delta t)^2} = 0,6 \text{ km.}$$

Otro procedimiento de solución se basa en el empleo de la invariación del intervalo:

$$c^2 (\Delta t_0)^2 = c^2 (\Delta t)^2 - l^2,$$

donde a la izquierda se ha escrito el cuadrado del intervalo en el sistema de referencia ligado con la misma partícula y a la derecha,

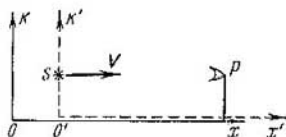


Fig. 120

el cuadrado del intervalo en el sistema K . De aquí se obtiene el mismo resultado para l .

6.5. Efecto Doppler. En el sistema de referencia K se encuentra un receptor P de señales luminosas inmóvil (fig. 120). Hacia él se aproxima la fuente S de señales luminosas a la velocidad V . Las señales en el sistema de referencia ligado con la fuente se emiten con una frecuencia ν_0 . ¿Con qué frecuencia ν captará estas señales el receptor P ?

Solución. El intervalo de tiempo entre dos señales consecutivas (impulsos) en el sistema K' , ligado con la fuente, es igual a $T_0 = 1/\nu_0$. Como este sistema se mueve a la velocidad V , el intervalo de tiempo correspondiente en el sistema K , según (6.12), será mayor:

$$T = T_0 / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = V/c.$$

La distancia entre los impulsos contiguos en el sistema K

$$\lambda = cT - VT = (c - V)T = (c - V) \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1)$$

Por eso, la frecuencia percibida por el receptor

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c \sqrt{1 - \beta^2}}{T_0 (c - V)} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}},$$

o bien

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta}$$

Si la fuente se aproxima (como en nuestro caso), entonces $v > v_0$, mas si se separa, entonces $v < v_0$ (en este caso el signo de β varia por el contrario, fig. 121). La fórmula obtenida para la frecuencia v expresa el así denominado efecto longitudinal Doppler.

Señalemos, que en la física clásica $T = T_0$ en correspondencia con el carácter absoluto del tiempo. Por eso, la fórmula clásica para el efecto Doppler no contiene la raíz $\sqrt{1 - \beta^2}$ (en lugar de ella está la unidad):

$$v = v_0 / (1 - \beta) \approx \approx v_0 (1 + v/c).$$

De paso examinemos un caso más general: la velocidad V de la fuente en el sistema K constituye un ángulo α con la línea del observador (fig. 122). En este caso es suficiente sustituir en la fórmula (1) V por $V \cos \alpha$. Entonces

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \alpha}$$

En particular, cuando $\alpha = \pi/2$ se observa el llamado efecto transversal Doppler:

$$v = v_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

con lo cual la frecuencia observada resulta siempre menor que «la propia» v_0 . La última expresión, por cierto, es simplemente



Fig. 122

resultado del retardo del tiempo en el sistema de referencia móvil; ella se puede obtener directamente de la fórmula (6.12):

$$v = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_0 / \sqrt{1 - \beta^2}} = v_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

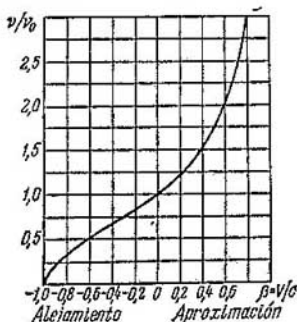


Fig. 121

6.6. Correlaciones entre los acontecimientos. En la fig. 123 se representa un *diagrama espacio-tiempo*. Cada punto de este diagrama (*punto de universo*) caracteriza algún acontecimiento, o sea, su coordenada y el momento de tiempo cuando tuvo lugar. Examinemos tres acontecimientos, correspondientes a los puntos

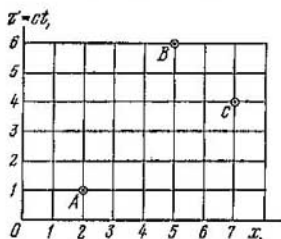


Fig. 123

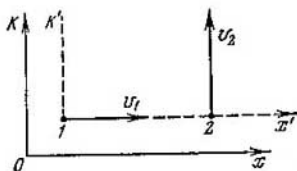


Fig. 124

de universo *A*, *B* y *C*. Cerciorémonos que entre estos acontecimientos tienen lugar las siguientes correlaciones:

Par de acontecimientos	Tipo de intervalo	Propio		Posibilidad de enlace casual-consecutivo
		tiempo $c\Delta t_0, m$	distancia $\Delta x_0, m$	
<i>AB</i>	Tiempo-similar	4	—	<i>A</i> → <i>B</i>
<i>AC</i>	Espacio-similar	—	4	No
<i>BC</i>	Luz-similar	0	0	<i>C</i> → <i>B</i>

Indicación: hacer uso de la invariación del intervalo.

6.7. Dos partículas se mueven en el sistema *K* bajo un ángulo recto entre sí: la primera a velocidad v_1 , la segunda a velocidad v_2 . Encontrar la velocidad de una de las partículas con relación a la otra.

Solución. Tomamos los ejes de coordenadas del sistema *K*, como se muestra en la fig. 124. Ligamos el sistema *K'* con la partícula 1, entonces la velocidad de la partícula 2 en este sistema de referencia será la velocidad buscada. Con ayuda de la fórmula (6.15), haciendo $V = v_1$ y $v_x = 0$, obtenemos

$$v'_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - (v_1 v_2 / c)^2}.$$

Señalamos que según la ley clásica de composición de las velocidades,

$$v'_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

6.8. Transformación de la dirección de la velocidad. Una partícula se mueve en el sistema K a la velocidad v bajo un ángulo ϑ al eje x . Encontrar el ángulo ϑ' correspondiente en el sistema K' que se mueve a la velocidad V , como se muestra en la fig. 125.

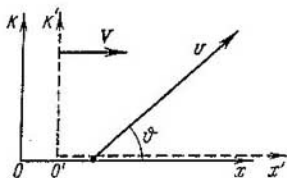


Fig. 125

Solución. Sean v_x y v_y las proyecciones del vector v en el sistema K . Entonces para el ángulo ϑ se puede escribir la siguiente correlación:

$$\operatorname{tg} \vartheta = v_y/v_x.$$

En el sistema K' teniendo en cuenta la fórmula (6.14), obtenemos

$$\operatorname{tg} \vartheta' = v'_y/v'_x = v_y \sqrt{1-\beta^2}/(v_x - V).$$

Después de la sustitución de $v_x = v \cos \vartheta$ y $v_y = v \operatorname{sen} \vartheta$, encontramos

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\operatorname{sen} \vartheta \cdot \sqrt{1-\beta^2}}{\cos \vartheta - V/v}.$$

Como se ve de esta fórmula, la ley de transformación de los ángulos para la velocidad es la misma que para los segmentos (véase el problema 6.1).

6.9. Una barra, paralela al eje x en el sistema K de referencia, se mueve en este sistema a la velocidad v en la dirección positiva del eje y . Encontrar el ángulo ϑ' entre esta barra y el eje x' del sistema K' , que se desplaza a la velocidad V respecto al sistema K en la dirección positiva de su eje x . Los ejes x y x' coinciden, los y y y' son paralelos entre sí.

Solución. Sea que en cierto momento los extremos de la barra coincidan con el eje x en el sistema K . Estos dos acontecimientos, simultáneos en el sistema K , no serán simultáneos en el sistema K' : según (6.10), ellos transcurren al cabo de un intervalo de tiempo

$$\Delta t' = \Delta x V/c^2 \sqrt{1-\beta^2},$$

donde Δx es la longitud propia de la barra. Durante este tiempo el extremo derecho de la barra resulta «estar más arriba» que el izquierdo en $\Delta y' = v'_y \Delta t'$, donde $v'_y = v \sqrt{1-\beta^2}$ [véase la fórmula (6.16)]. De ese modo, la barra dada en el sistema K' girará en sentido antihorario a cierto ángulo ϑ' , que se puede determinar por la

fórmula

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \Delta y' / \Delta x' = \beta v / c \sqrt{1 - \beta^2},$$

donde $\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \beta^2}$ es la proyección de la barra sobre el eje x' en el sistema K' , $\beta = V/c$.

6.10. Transformación relativista de la aceleración. Una partícula se mueve en el sistema K a la velocidad v y la aceleración w . Determinar la aceleración de esta partícula en el sistema K' , que se desplaza a la velocidad V en la dirección positiva del eje x del sistema K . Examinar los casos, cuando la partícula se mueve en el sistema K a lo largo de los ejes siguientes: 1) x , 2) y .

Solución. 1. Escribimos cada proyección de la aceleración de la partícula en el sistema K' del modo siguiente:

$$w'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{dv'_x}{dt} \frac{1}{dt'/dt}.$$

Haciendo uso de la primera fórmula (6.14) y de la última de (6.8), obtenemos después de la diferenciación:

$$w'_x = \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - \beta v_x/c)^3} w_x; \quad w'_y = 0.$$

2. Los cálculos análogos conducen a los resultados siguientes:

$$w'_x = 0; \quad w'_y = (1 - \beta^2) w_y.$$

En estas fórmulas $\beta = V/c$.

Capítulo 7

Dinámica relativista

§ 7.1. Impulsión relativista

Primero recordamos dos de las nociones básicas de la mecánica newtoniana sobre la impulsión:

1) la impulsión de una partícula se determina como $p = mv$, donde se considera que la masa de la partícula no depende de su velocidad;

2) la impulsión de un sistema cerrado de partículas se conserva en el tiempo de cualquier sistema inercial de referencia.

Ahora volvamos a la mecánica relativista. Resulta (esto ya lo veremos en el sencillo ejemplo que ahora examinaremos), que para un sistema cerrado de partículas relativistas no se cumple la ley de conservación de la impulsión newtoniana. Surge la alternativa: rehusar bien la definición newtoniana de impulsión, o bien la ley de conservación de esta magnitud.

Teniendo en cuenta el enorme papel que juegan las leyes de la conservación, en la teoría de la relatividad toman por fundamental precisamente la ley de conservación de la impulsión y ya de aquí encuentran la expresión para la misma impulsión.*)

Ante todo demostramos que los requisitos para que la ley de conservación se cumpla en cualquier sistema inercial de referencia y para tener en cuenta la transformación

*) Surge la pregunta natural: ¿cómo puede ser que la ley de conservación de la impulsión puede tener cierto valor, si la impulsión se determina precisamente de modo que se conserve? Para responder a ella, imaginémos una partícula que en su movimiento choca con otras partículas. Examinada la primera colisión, *determinamos* la impulsión de forma que se cumpla su ley de conservación para la colisión dada. Pero durante las posteriores colisiones la situación varía: ya conoceremos las impulsiones de las partículas que toman parte en estas colisiones y, ahora, la ley de conser-

relativista de la velocidad durante el paso desde un sistema inercial de referencia a otro, conducen a la conclusión de que la masa de la partícula debe depender de su velocidad (a diferencia de la mecánica newtoniana). Para esto examinaremos la colisión absolutamente no elástica de dos partículas, suponiendo que el sistema es cerrado.

Sea que en cierto sistema K inercial de referencia se mueven al encuentro una a otra dos partículas iguales 1 y 2 a igual velocidad v_0 , pero bajo un ángulo α al eje x

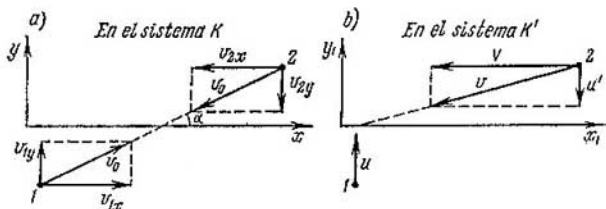


Fig. 126

(fig. 126, a). En este sistema de referencia la impulsión sumaria de ambas partículas, evidentemente, se conserva: antes y después de la colisión es igual a cero (la partícula que se forma, como se deduce de la consideración de simetría, resulta inmóvil).

Ahora aclaremos que ocurrirá en otro sistema inercial de referencia. Para esto, primero tomamos dos sistemas de referencia: el sistema K_1 , que se mueve a la derecha a la velocidad v_{1x} y el K_2 , que se mueve a la izquierda a la velocidad v_{2x} (fig. 126, a). Es evidente, que la partícula 1 en el sistema K_1 y la partícula 2 en el sistema K_2 se mueven sólo a lo largo del eje y a velocidades de igual módulo, las que designaremos por u .

La conservación de la impulsión (si ésta realmente existe) se cumplirá no de acuerdo con la definición, sino a causa de las leyes profundas de la Naturaleza.

La experiencia muestra, que la impulsión así determinada se somete realmente a la ley de conservación. Por lo menos hasta ahora no se ha descubierto ningún fenómeno donde esta ley se viole.

Examinemos la colisión en el sistema K_1 (fig. 126, b), donde la partícula 1 alcanza la velocidad u . Encontramos la componente y de la velocidad de la partícula 2 en este sistema de referencia, designándola por u' . Esta partícula, como fue dicho, se mueve a la velocidad u a lo largo del eje y en el sistema K_2 , y además, junto con este sistema se desplaza a la izquierda a la velocidad V respecto del sistema K_1 . Por eso, según (6.16), la componente y de la velocidad de la partícula 2 en el sistema K_1 es igual a

$$u' = u \sqrt{1 - (v/c)^2}. \quad (7.1)$$

Ahora escribamos las componentes y de las impulsiones de ambas partículas en el sistema K_1 : $m_1 u$ y $m_2 u'$. Según (7.1), $u' < u$, por eso es fácil ver que la ley de conservación de la impulsión en su formulación común (newtoniana) no se cumple. En realidad, en nuestro caso $m_1 = m_2$ (las partículas son iguales) y por consiguiente, la componente y de la impulsión sumaria de las partículas antes de la colisión se diferencia de cero, y después de la colisión es igual a cero (la partícula que se forma se moverá sólo a lo largo del eje x).

Exijamos, sin embargo, que la ley de conservación de la impulsión se cumpla también en el sistema K_1 , es decir, admitamos, que $m_1 u = m_2 u'$. De aquí, teniendo en cuenta (7.1), obtenemos

$$m_2 = m_1 / \sqrt{1 - (V/c)^2}.$$

Cuando $\alpha \rightarrow 0$ (fig. 126) $u \rightarrow 0$ y m_1 es la masa de la partícula en reposo a ella la designan por m_0 y la denominan *masa en reposo*. Mas la velocidad V con esta condición resulta igual a v , o sea, a la velocidad de la partícula 2 respecto a la partícula 1. Por eso la última fórmula se puede escribir así:

$$m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad (7.2)$$

donde m es la masa de la partícula en movimiento (recordemos, que ambas partículas son iguales). La masa m se denomina *relativista*. Esta última, como se ve de (7.2), es mayor que la masa en reposo y depende de la velocidad de la partícula (fig. 127).

De ese modo, llegamos a una importante deducción: *la masa relativista de la partícula depende de su velocidad.*

Con otras palabras, la masa de una misma partícula será diferente en los distintos sistemas inerciales de referencia.

A diferencia de la masa relativista, la masa en reposo m_0 de la partícula es una magnitud invariante, es decir, igual en todos los sistemas de referencia. Por esta causa

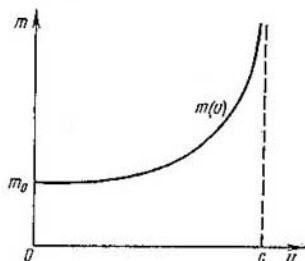


Fig. 127

impulsión de la partícula en cuenta (7.2) esta impulsión

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (7.3)$$

Esta y es la denominada *impulsión relativista* de la partícula. La experiencia confirma, que la impulsión así determinada se somete realmente a la ley de conservación, independientemente de la elección del sistema inercial de referencia.

Señalemos, que cuando $v \ll c$ de (7.3) se deduce la definición newtoniana de la impulsión: $\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}$, donde m_0 no depende de la velocidad v . En la fig. 128 se muestran para comparar los gráficos de las dependencias entre las impulsiones relativista y newtoniana de la partícula y su velocidad. Como se ve, la diferencia entre ambas impulsiones se hace muy considerable en la medida de la aproximación de la velocidad de la partícula a la velocidad de la luz.

Examinamos dos ejemplos del empleo de las fórmulas (7.2) y (7.3)

Ejemplo. 1. Los protones, en los aceleradores gigantes modernos se aceleran hasta velocidades que se diferencian 0,01% de la velocidad de la luz. ¿Cuántas veces la masa relativista de estos protones supera a su masa en reposo?

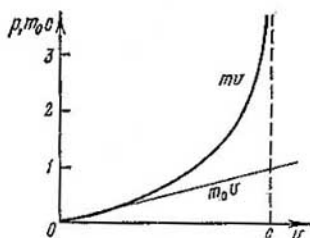


Fig. 128

Según (7.2), $m/m_0 = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, donde $\beta = v/c$. Ya que β se diferencia poco de la unidad, entonces en el caso dado el radicando se debe presentar como

$$1 - \beta^2 = (1 + \beta)(1 - \beta) \approx 2(1 - \beta).$$

Entonces

$$m/m_0 \approx 1/\sqrt{2(1-\beta)} \approx 70.$$

Ejemplo 2. ¿Con qué valores de la velocidad de la partícula su impulsión newtoniana se diferencia de la relativista el 1%, el 10%?

De la condición $\eta = (p - p_{cl})/p = 1 - \sqrt{1 - (v/c)^2}$, obtenemos

$$v/c = \sqrt{\eta(2-\eta)}.$$

De donde

$$\frac{v}{c} = \begin{cases} 0,14 & \text{cuando } \eta=0,01, \\ 0,45 & \text{cuando } \eta=0,10. \end{cases}$$

De ese modo, el empleo de la fórmula clásica para la impulsión garantiza una exactitud no peor que 1% cuando $v/c \leq 0,14$ y no peor que 10% cuando $v/c \leq 0,45$.

§ 7.2. Ecuación fundamental de dinámica relativista

Según el principio de la relatividad de Einstein, todas las leyes de la Naturaleza deben ser invariantes respecto al sistema inercial de referencia. Con otras palabras, las enunciaciones matemáticas de las leyes deben tener un mismo aspecto en todos estos sistemas de referencia. En particular esto se refiere asimismo a las leyes de dinámica.

Sin embargo, como muestra el examen más detallado, ya la ecuación fundamental de dinámica de Newton $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$ no satisface al principio de relatividad de Einstein. Las transformaciones de Lorentz, durante el paso a otro sistema inercial de referencia, le dan una forma completamente diferente.

Para satisfacer los requisitos del principio de relatividad, la ecuación fundamental de dinámica debe tener otro aspecto y sólo cuando $v \ll c$ pasar a la ecuación newtoniana. Este requisito, como muestra la teoría de la relatividad, lo satisface la ecuación

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}, \quad (7.4)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza que actúa sobre la partícula. La ecuación dada coincide completamente *por su aspecto* con la ecuación fundamental de dinámica newtoniana (4.1). No obstante, el sentido físico aquí ya es otro: a la izquierda está la derivada de la impulsión *relativista* conforme al tiempo, determinada por la fórmula (7.3). Sustituyendo (7.3) en (7.4), escribimos la última ecuación así:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = \mathbf{F}.} \quad (7.5)$$

Esta es la *ecuación fundamental de dinámica relativista*.

Es fácil ver, que precisamente la ecuación de dinámica en esta forma lleva a la conservación de la impulsión para la partícula libre y a velocidades pequeñas ($v \ll c$) toma el aspecto de la ecuación fundamental de dinámica newtoniana ($m\mathbf{w} = \mathbf{F}$).

Además, precisamente con este aspecto la ecuación fundamental de dinámica resulta invariante en relación

a las transformaciones de Lorentz y, por consiguiente, satisface el principio de relatividad de Einstein. Sin detenernos en el procedimiento de la demostración de esto, sólo señalemos, que durante el paso de un sistema inercial de referencia a otro, es necesario admitir que la fuerza F se transforma por leyes determinadas. Con otras palabras, la fuerza F en la teoría de la relatividad es una magnitud no invariante, en diferentes sistemas de referencia su valor numérico y su dirección serán diferentes.*)

De la ecuación fundamental de dinámica relativista se deduce una conclusión inesperada: el vector de aceleración de la partícula w , en el caso general, no coincide por su dirección con el vector de la fuerza F . Para demostrar esto, escribamos (7.5) en esta forma:

$$d(mv)/dt = F,$$

donde m es la masa relativista de la partícula. Realizando la diferenciación conforme al tiempo, obtenemos

$$(dm/dt)v + m(dv/dt) = F. \quad (7.6)$$

Esta expresión se presenta gráficamente en la fig. 129. De ese modo, en realidad, el vector de aceleración w , en el caso general, no es colineal al vector de la fuerza F .

La aceleración w coincide por su dirección con el vector F sólo en dos casos:

1) $F \perp v$ (fuerza transversal); con esto, no varía el vector de velocidad según el módulo, es decir, $v = \text{const}$, y la ecuación (7.5) toma el aspecto

$$m_0 w / \sqrt{1 - (v_0/c)^2} = F.$$

*) A diferencia de la mecánica newtoniana, donde las fuerzas son absolutas, en la teoría de la relatividad las proyecciones de la fuerza, perpendiculares a la dirección del vector de la velocidad relativa del sistema de referencia, son diferentes en ambos sistemas. Estas proyecciones tienen el valor máximo en aquel sistema de referencia, donde las partículas están en reposo en el momento dado:

$$F'_x = F_x, \quad F'_y = F_y \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

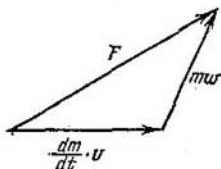


Fig. 129

de donde la aceleración

$$w = (F/m_0) \sqrt{1 - (v/c)^2};$$

2) $F \parallel v$ (fuerza longitudinal). En el caso dado la ecuación (7.5) se puede escribir en forma escalar; realizando en su primer miembro la diferenciación conforme al tiempo, obtenemos

$$\left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{m_0 v^2/c^2}{[1 - (v/c)^2]^{3/2}} \right) \frac{dv}{dt} = F,$$

de donde la aceleración (en forma vectorial) es

$$w = (F/m_0) [1 - (v/c)^2]^{3/2}.$$

Es fácil advertir, que cuando los valores de la fuerza F y de la velocidad v son iguales en ambos casos, la fuerza transversal comunica a la partícula mayor aceleración que la fuerza longitudinal.

La ecuación fundamental de dinámica relativista permite encontrar la ley de la fuerza F que actúa sobre la partícula, si se conoce la dependencia entre la impulsión relativista $p(t)$ y el tiempo, y de otro lado, hallar la ecuación del movimiento de la partícula $r(t)$, si se conocen la fuerza que actúa y las condiciones iniciales, o sea, la velocidad v_0 y la posición r_0 de la partícula en el momento de tiempo inicial.

En calidad de ejemplos del empleo de la ecuación (7.5) pueden servir los problemas 7.1—7.3.

§ 7.3. Ley de interacción de la masa

Energía cinética de la partícula relativista. Determinemos esta magnitud del mismo modo que en la mecánica clásica, es decir, como la magnitud, el incremento de la cual es igual al trabajo de la fuerza que actúa sobre la partícula. Primero hallemos el incremento de la energía cinética dT de la partícula bajo la acción de la fuerza F en el camino elemental $dr = v dt$:

$$dT = Fv dt.$$

Según la ecuación fundamental de dinámica relativista (7.4), $Fdt = d(mv) = dm \cdot v + m dv$, donde m es la masa relativista. Por eso

$$dT = v (dm \cdot v + m dv) = v^2 dm + m v dv,$$

donde se ha tomado en consideración que $v dv = v dv$ (ver pág. 92). Esta ecuación se puede simplificar empleando la fórmula (7.2) de la dependencia entre la masa y la

velocidad. Elevamos esta fórmula al cuadrado y la reducimos al tipo

$$m^2c^2 = m^2v^2 + m_0^2c^2.$$

Encontramos la diferencial de esta expresión, teniendo en cuenta que m_0 y c son magnitudes constantes:

$$2mc^2dm = 2mv^2dm + 2m^2v dv.$$

Si ahora se divide esta igualdad por $2m$, entonces su segundo miembro coincide con la expresión para dT . De aquí se deduce que

$$dT = c^2 dm. \quad (7.7)$$

De este modo, el incremento de la energía cinética de la partícula es proporcional al incremento de su masa relativa. La energía cinética de la partícula en reposo es igual a cero y su masa, a la masa en reposo m_0 . Por eso integrando (7.7) obtenemos

$$T = (m - m_0) c^2, \quad (7.8)$$

o bien

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right), \quad (7.9)$$

donde $\beta = v/c$. Esta es la expresión para la *energía cinética relativista* de la partícula. Como vemos, se diferencia grandemente de la clásica $m_0 v^2/2$. Cerciorémonos, sin embargo, que la expresión (7.9) a velocidades pequeñas ($\beta \ll 1$) pasa a la clásica. Para esto hacemos uso de la fórmula del binomio de Newton, según la cual

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \dots$$

Cuando $\beta \ll 1$ podemos limitarnos a los dos primeros miembros de esta serie y entonces

$$T = m_0 c^2 \beta^2/2 = m_0 v^2/2.$$

De ese modo, a grandes velocidades la energía cinética de la partícula se determina por la fórmula relativista (7.9), diferente de $m_0 v^2/2$. Señalemos que (7.9) no se puede presentar en el aspecto $mv^2/2$, donde m es la masa relativista.

En la figura 130 se muestran, para comparar, los gráficos de las dependencias entre β y las energías cinéticas relativista T_{rel} y clásica T_{cl} . Su diferencia se manifiesta especialmente fuerte en la zona de velocidades comparables con la velocidad de la luz.

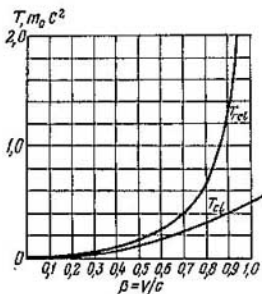


Fig. 130

Ejemplo 1. Una partícula de masa en reposo m_0 se mueve a la velocidad, con la cual su energía cinética relativista T supera n veces la energía cinética calculada por la fórmula clásica. Encontrar T .

Para simplificar introducimos la designación $\tau = T/m_0c^2$. Entonces, la condición dada $T = n \cdot m_0v^2/2$ se puede escribir así:

$$\tau = n\beta^2/2,$$

donde $\beta = v/c$. Teniendo en cuenta que β se ha ligado con T por la fórmula (7.9), de ella encontramos

$$\beta^2 = 1 - 1/(1 + \tau)^2.$$

Eliminando β^2 de estas dos ecuaciones, obtenemos

$$2\tau^2 + (4 - n)\tau - 2(n - 1) = 0.$$

La raíz de esta ecuación

$$\tau = [n - 4 + \sqrt{n(n+8)}]/4.$$

El signo menos ante la raíz no tiene sentido físico (τ no puede ser negativa), por eso se ha omitido.

Citamos cuatro valores de τ , calculados por la última fórmula para los siguientes valores de n :

$$\begin{array}{l} n = T/T_{cl}: 1,01 \quad 1,1 \quad 1,5 \quad 2,0 \\ \tau = T/m_0c^2: 0,0067 \quad 0,065 \quad 0,32 \quad 0,62 \end{array}$$

De aquí se ve que, por ejemplo, cuando $T/m_0c^2 \leq 0,0067$ el empleo de la fórmula clásica para la energía cinética garantiza una exactitud no peor que 1%.

Ejemplo 2. ¿Qué trabajo es necesario realizar para aumentar la velocidad de una partícula de masa en reposo m_0 desde 0,6 hasta 0,8 c ? Comparar el resultado obtenido con el valor calculado por la fórmula clásica.

En correspondencia con la fórmula (7.9) el trabajo buscado es igual

$$W = T_2 - T_1 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \right) = 0,42 m_0c^2.$$

Mas el trabajo correspondiente según la fórmula clásica

$$W = m_0 (v_2^2 - v_1^2)/2 = 0,14m_0c^2.$$

Como se ve, la diferencia entre los dos resultados es muy considerable.

Ley de interacción de la masa y la energía. De la fórmula (7.7) se deduce que el incremento de la energía cinética de una partícula va acompañado del incremento proporcional de su masa relativista. Junto con esto, sabemos que durante el transcurso de diferentes procesos en la Naturaleza unos tipos de energía pueden transformarse en otros. Por ejemplo, la energía cinética de las partículas que chocan puede transformarse en energía interna de la partícula que se forma. Por eso, es natural esperar que la masa del cuerpo crecerá no sólo al comunicarle energía cinética, sino que asimismo, con cualquier aumento de la reserva general de la energía del cuerpo, independientemente de a cuenta de qué tipo concreto de energía tiene lugar este aumento.

De aquí Einstein llegó a la siguiente deducción fundamental: la energía total del cuerpo (o del sistema de cuerpos), independientemente de qué tipo de energía ella se componga (cinética, eléctrica, química y etc.), se liga con la masa de este cuerpo por la correlación

$$\boxed{E = mc^2.} \quad (7.10)$$

Esta fórmula expresa una de las leyes más fundamentales de la Naturaleza, o sea, la ley de la intercomunicación (de proporcionalidad) de la masa m y de la energía total E del cuerpo. Para evitar incompresiones prestemos atención a que en la energía total E no se incluye la energía potencial del cuerpo en el campo externo, si tal actúa sobre el cuerpo.

La correlación (7.10) se puede también escribir en otra forma, si se tiene en cuenta la fórmula (7.8). Entonces la energía total del cuerpo

$$E = m_0c^2 + T,$$

donde m_0 es la masa en reposo del cuerpo, T es su energía cinética. De aquí se deduce directamente, que el cuerpo en reposo ($T = 0$) también posee energía

$$E_0 = m_0c^2. \quad (7.11)$$

Esta energía la denominan *energía de reposo* o *energía propia*.

Vemos, que la masa del cuerpo que en la mecánica no relativista actuaba como medida de inercia (en la segunda ley de Newton) o como medida de acción de gravitación (en la ley de la gravitación universal), ahora actúa en una nueva función, o sea, como la medida del *contenido de energía* del cuerpo. Incluso el cuerpo en reposo posee, según la teoría de la relatividad, reserva de energía, es decir, la energía de reposo.

La variación de la energía total del cuerpo (del sistema) va acompañada por la variación equivalente de su masa $\Delta m = \Delta E/c^2$ e inversa. Durante los procesos macroscópicos comunes la variación de la masa del cuerpo es extraordinariamente pequeña, inaccesible para la medición. Esto se puede ilustrar en los siguientes ejemplos.

Ejemplos. A. Para lanzar un satélite de masa $m = 100$ kg a la órbita alrededor de la Tierra, le comunicamos la velocidad $v = 8$ km/s. Esto significa, que su energía aumenta en $\Delta E = mv^2/2$ (aquí se ha tomado en consideración que $v \ll c$). El aumento correspondiente de la masa del satélite

$$\Delta m = \Delta E/c^2 = mv^2/2c^2 = 3,5 \cdot 10^{-8} \text{ kg.}$$

B. Para calentar un litro de agua desde 0 hasta 100° C le comunican la energía $\Delta E = mc_p \Delta t$, donde $c_p = 4,2$ J/(g·K) es la capacidad calorífica del agua, Δt es la diferencia de temperaturas. El aumento correspondiente de la masa del agua

$$\Delta m = \Delta E/c^2 = 0,47 \cdot 10^{-10} \text{ kg.}$$

C. Un resorte con coeficiente de rigidez $\kappa = 10^3$ N/cm se comprime en $\Delta l = 1$ cm. Con esto el resorte adquiere la energía $\Delta E = \kappa (\Delta l)^2/2$. El incremento equivalente de su masa

$$\Delta m = \Delta E/c^2 = 0,5 \cdot 10^{-16} \text{ kg.}$$

Es fácil ver, que en los tres casos la variación de la masa se encuentra lejos de los límites de la exactitud del experimento.

Sin embargo, ya en los fenómenos astronómicos ligados, por ejemplo, con el estudio de las estrellas, la variación de la masa es una magnitud muy importante. De esto es posible cerciorarse en el ejemplo de la radiación del Sol.

Ejemplo. En las observaciones astronómicas se ha establecido que la cantidad de energía que trae a la Tierra la radiación solar por 1 s sobre un área de 1 m², perpendicular a los rayos del Sol constituye alrededor de $1,4 \cdot 10^3$ J/(s·m²). Esto da la posibilidad de

calcular la energía sumaria radiada por el Sol por 1 s:

$$\Delta E = 1,4 \cdot 10^3 \cdot 4\pi R^2 = 4 \cdot 10^{26} \text{ J/s,}$$

donde R es la distancia de la Tierra al Sol. Por consiguiente, el Sol cada segundo pierde una masa

$$|\Delta m = \Delta E/c^2 = 4,4 \cdot 10^9 \text{ kg/s}|$$

Es una magnitud grandiosa desde el punto de vista de las escalas terrestres, sin embargo, en comparación con la masa del Sol esta pérdida es menospreciablemente pequeña: $\Delta m/m = 2 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$.

De otro modo por completo diferente sucede en la física nuclear. Precisamente aquí resultó posible por primera vez comprobar experimentalmente la ley de interacción de la masa y la energía. Esto está condicionado porque los procesos nucleares y los procesos de transformación de las partículas elementales van acompañados de variaciones muy grandes de la energía, comparables con la energía en reposo de las mismas partículas. Pero a este problema retornaremos en el § 7.5.

§ 7.4. Relación entre la energía y la impulsión de partícula

Claro está, que tanto la energía E , como la impulsión p de la partícula tienen diferentes valores en distintos sistemas de referencia. Resulta, sin embargo, que existe una magnitud, o sea, cierta combinación de E y p que es invariante, es decir, que tiene un mismo valor en distintos sistemas de referencia. Esta magnitud es $E^2 - p^2c^2$. Cerciorémonos, que esto es así.

Haciendo uso de las fórmulas $E = mc^2$ y $p = mv$, escribimos

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 - m^2v^2c^2 = \frac{m_0^2c^4}{1 - (v/c)^2} [1 - (v/c)^2].$$

o después de la simplificación

$$\boxed{E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4.} \quad (7.12)$$

El hecho de que la velocidad v en el segundo miembro se simplificó, significa la independencia de la magnitud $E^2 - p^2c^2$ de la velocidad de la partícula y, por consiguiente, del sistema de referencia. Con otras palabras, la magnitud $E^2 - p^2c^2$ es realmente invariante y tiene

un mismo valor $m_0^2 c^4$ en todos los sistemas inerciales de referencia:

$$E^2 - p^2 c^2 = \text{inv.} \quad (7.13)$$

Esta deducción es extraordinariamente importante: ella permite, como se verá de lo siguiente, simplificar bruscamente en muchos casos el análisis y la solución de diferentes problemas.

Citamos dos correlaciones útiles más, con las cuales se choca frecuentemente. Primera:

$$p = mv = Ev/c^2 \quad (7.14)$$

y segunda que es la relación entre la impulsión y la energía cinética T de la partícula; ella se obtiene fácilmente, sustituyendo $E = m_0 c^2 + T$, en (7.12), entonces

$$pc = \sqrt{T(T + 2m_0 c^2)}. \quad (7.15)$$

La última correlación pasa a la clásica cuando $T \ll m_0 c^2$: $p = \sqrt{2m_0 T}$, y cuando $T \gg m_0 c^2$ adquiere la forma $p = T/c$.

Ejemplo. Considerando que la energía en reposo del electrón es igual a 0,51 MeV, calcular:

1) la impulsión*) del electrón con la energía cinética igual a su energía en reposo;

2) la energía cinética del electrón con una impulsión de 0,51 MeV/c, donde c es la velocidad de la luz.

1. Según (7.15), cuando $T = m_0 c^2$ obtenemos $p = \sqrt{3} m_0 c = 0,9 \text{ MeV}/c$.

2. Este problema también se puede resolver con ayuda de (7.15). Pero se puede operar con mayor sencillez haciendo uso de (7.12):

$$T = E - m_0 c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 = 0,21 \text{ MeV.}$$

De paso examinemos el problema muy interesante de la posibilidad de la existencia de partículas con *masa en*

*) Indiquemos, que en la actualidad las impulsiones de las partículas relativistas se expresan en unidades «energía/c», c es la velocidad de la luz. Por ejemplo, si la energía se expresa en MeV ($1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$), entonces la impulsión en MeV/c. El empleo de esta unidad de la impulsión simplifica notablemente muchos cálculos.

reposo nula ($m_0 = 0$). De las fórmulas

$$E = m_0 c^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad \text{y} \quad p = m_0 v / \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

se deduce, que la partícula con masa en reposo $m_0 = 0$ puede tener energía e impulsión en el caso y sólo en el caso, si ella se mueve a la velocidad de la luz c . Con ello las dos últimas fórmulas adquieren el aspecto 0/0. No obstante, esto no significa la indeterminación de la energía y la impulsión de esta partícula. Se trata de que estas dos magnitudes no dependen de la velocidad. Al mismo tiempo, el enlace entre la impulsión y la energía E se da por la fórmula (7.14), donde $v = c$, es decir,

$$p = E/c. \quad (7.16)$$

De ese modo, según la teoría de la relatividad, la existencia de partículas con masa en reposo nula es posible, con ello, estas partículas pueden moverse sólo a la velocidad c . Este movimiento no es resultado de la aceleración anterior, sino el estado general único, en el cual estas partículas pueden existir. La detención de semejante partícula es equivalente a su absorción (desaparición). Como ahora se sabe, estas partículas son el fotón y el neutrino.

Transformaciones de Lorentz para la impulsión y la energía. Sea que una partícula se mueva a la velocidad $v = dl/dt$ en el sistema K de referencia. De la fórmula (6.13) se deduce que el intervalo elemental

$$ds = \sqrt{c^2 (dt)^2 - (dl)^2} = c dt \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Teniendo en cuenta esta expresión, representamos las proyecciones de la impulsión y la energía de la partícula en el siguiente aspecto:

$$p_x = \frac{\tau m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{dx}{dt} = m_0 c \frac{dx}{ds}; \quad p_y = m_0 c \frac{dy}{ds};$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{dt}{dt} = m_0 c^3 \frac{dt}{ds} = m_0 c \frac{c^2 dt}{ds}.$$

De la invariación del intervalo ds se deduce de inmediato que con el paso a otro sistema inercial de referencia p_x y p_y se transforman de modo semejante a dx y dy , es decir, como x e y , y la energía E , lo mismo que $c^2 dt$, es decir, como el tiempo t . De ese modo, se puede hacer tal comparación:

$$p_x \sim x, \quad p_y \sim y, \quad E/c^2 \sim t.$$

Haciendo esta sustitución en las transformaciones de Lorentz (6.8), obtenemos inmediatamente las transformaciones buscadas para

la impulsión y la energía:

$$p'_x = \frac{p_x - EV/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad E' = \frac{E - p_x V}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad (7.17)$$

donde V es la velocidad del sistema K' con relación al sistema K .

Estas fórmulas expresan la ley de transformación de las proyecciones de la impulsión y la energía de la partícula durante el paso del sistema K al K' .

Anotación de las fórmulas en forma más compacta.

En la actualidad se acostumbra a escribir todas las fórmulas de mecánica relativista en forma más compacta con ayuda de las designaciones abreviadas siguientes:

1) las magnitudes mc^2 y pc se designan simplemente por m y p y se expresan correspondientemente en unidades energéticas (por ejemplo, en MeV);

2) todas las velocidades se expresan en unidades de velocidad de la luz y se designan por β :

$$\beta = v/c; \quad (7.18)$$

3) el factor $1/\sqrt{1 - \beta^2}$ que se encuentra frecuentemente designado por γ , se denomina *factor de Lorentz*:

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}. \quad (7.19)$$

Estas designaciones simplifican bruscamente tanto la forma de las mismas fórmulas, como asimismo todas las transformaciones y cálculos. Con estas designaciones citamos las fórmulas básicas de dinámica relativista:

impulsión relativista (7.3)

$$p = \frac{m_0 \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0 \beta; \quad (7.20)$$

energías cinética (7.9) y total (7.10):

$$T = m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) = m_0 (\gamma - 1). \quad (7.21)$$

$$E = m = m_0 + T = \gamma m_0; \quad (7.22)$$

ligazón entre la energía y la impulsión (7.12)–(7.15):

$$E^2 - p^2 = m_0^2 = \text{inv}, \quad (7.23)$$

$$p = E\beta, \quad (7.24)$$

$$p = \sqrt{T(T + 2m_0)}; \quad (7.25)$$

transformaciones de Lorentz para la impulsión y la energía (7.17):

$$\left. \begin{aligned} p'_x &= \frac{p_x - \beta E}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma (p_x - \beta E), \\ p'_y &= p_y, \\ E' &= \frac{E - \beta p_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma (E - \beta p_x). \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

§ 7.5. Sistema de partículas relativistas

Sobre la energía y la impulsión del sistema. Hasta ahora nos hemos limitado al estudio del comportamiento de una partícula. A diferencia de la dinámica de una partícula, la estructura de la dinámica de un sistema de partículas en la teoría de la relatividad es un problema mucho más complejo. No obstante, también en este caso se puede establecer una serie de importantes leyes generales.

Si nos interesa el movimiento del sistema como un todo, entonces prescindiendo de los procesos internos en éste y despreciando su extensión espacial, se puede considerar el sistema como un punto material, o sea, como una partícula. Ya que esto es así, el sistema de partículas relativistas como un todo se puede caracterizar por la energía total E , la impulsión: p y la masa en reposo M_0 y afirmar que las expresiones antes obtenidas son asimismo justas para el sistema de partículas como un todo.

Resta aclarar, que se debe comprender por energía total E , impulsión p y masa en reposo M_0 del sistema como un todo. En el caso general, si el sistema se compone de partículas relativistas que interactúan, su energía total

$$E = \sum m_i c^2 + E_{\text{int}}, \quad (7.27)$$

donde $m_i c^2$ es la energía total de la i -ésima partícula (recordemos, que en esta magnitud no se incluye la energía de interacción con otras partículas); E_{int} es la energía sumaria de interacción de todas las partículas del sistema.

En la mecánica clásica E_{int} es la energía potencial de interacción de las partículas del sistema, o sea, la magnitud que depende, con el carácter dado de las interacciones, sólo de la configuración del sistema. En lo que se

refiere a la dinámica relativista, resulta que *no existe* el concepto de energía potencial de interacción de las partículas. Esto está condicionado por la circunstancia de que el mismo concepto de energía potencial está ligado estrechamente con la idea acerca de la acción a distancia (transmisión instantánea de las interacciones). La energía potencial, siendo función de la configuración del sistema, se determina en cada momento de tiempo por la disposición relativa de las partículas del sistema en este momento. La variación de la configuración del sistema debe provocar también la variación *instantánea* de la energía potencial. Ya que en la realidad esto no es así (las interacciones se transmiten a velocidad finita), el concepto de energía potencial de interacción no puede ser introducido para un sistema de partículas relativistas.

En caso general, no es posible escribir la expresión para la energía de interacción E_{int} y, por consiguiente, para la energía total E del sistema de partículas en interacción. Esto mismo se refiere a la impulsión del sistema, ya que en la dinámica relativista ésta no es una magnitud independiente de la energía E . Es asimismo muy complicado el caso de la masa en reposo M_0 del sistema, de la cual en el caso general se puede sólo decir que: ésta es la masa en el sistema de referencia, donde el sistema mecánico dado está en reposo como un todo (es decir, en el sistema C).

A causa de las dificultades indicadas, la estructura de la dinámica de un sistema de partículas relativistas se limita a algunos casos relativamente simples, en dos de los cuales nos vamos a detener. Este es el sistema de partículas relativistas que no interaccionan y el importante caso, en relación a la práctica, de la colisión de dos partículas.

Sistema de partículas que no interaccionan. En este caso la energía total E y la impulsión p poseen propiedades aditivas y para el sistema ellas se pueden presentar como

$$E = \sum m_i c^2, \quad p = \sum p_i, \quad (7.28)$$

donde m_i y p_i es la masa relativista y la impulsión de la i -ésima partícula del sistema. Como en el caso dado no hay interacciones, entonces las velocidades de todas las partículas son constantes, y, por consiguiente, la energía

total y la impulsión de todo el sistema son constantes en el tiempo.

Introduzcamos el concepto de energía en reposo E_0 del sistema de partículas como su energía total en el sistema C , donde la impulsión sumaria $\tilde{\mathbf{p}} = \sum \tilde{\mathbf{p}}_i = 0$, y el sistema como un todo está en reposo. De ese modo,

$$E_0 = \sum \tilde{E}_i, \quad (7.29)$$

donde \tilde{E}_i es la energía total de la i -ésima partícula en el sistema C . Esto significa, que en la energía en reposo entra, además de la energía en reposo de cada partícula, su energía cinética \tilde{T}_i en el sistema C :

$$\tilde{E}_i = m_{0i}c^2 + \tilde{T}_i.$$

Mas esto se refiere también, evidentemente, a la masa en reposo del sistema:

$$M_0 = E_0/c^2. \quad (7.30)$$

De aquí, en particular, se desprende que la masa en reposo del sistema no es igual a la suma de las masas en reposo de las partículas separadas, y precisamente:

$$M_0 > \sum m_{0i}.$$

La introducción de la energía y la masa en reposo del sistema, E_0 y M_0 , permite examinar el sistema de partículas relativistas que no interaccionan como una partícula con energía total $E = \sum m_i c^2$, con impulsión $\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i$ y con masa en reposo $M_0 = E_0/c^2$ y afirmar, que las expresiones (7.12) y (7.14) son asimismo justas para los sistemas de partículas:

$$E^2 - p^2 c^2 = M_0^2 c^4 = \text{inv}, \quad (7.31)$$

$$\mathbf{p} = E\mathbf{V}/c^2, \quad (7.32)$$

donde \mathbf{V} es la velocidad del sistema de partículas como un todo, es decir, la velocidad del sistema C . Esta velocidad, según (7.32), se puede representar en tal aspecto:

$$\mathbf{V} = (\sum \mathbf{p}_i) / (\sum m_i), \quad (7.33)$$

donde m_i es la masa relativista de la i -ésima partícula del sistema. Señalamos, que por su forma (7.33) coincide con

la expresión no relativista (4.9) correspondiente para la velocidad del centro de inercia del sistema.

Colisión de dos partículas. Examinemos el proceso de colisión que tiene lugar en dos etapas: primero la formación de cierta partícula integrante A^* y luego, su desintegración en el caso general en otras partículas:



En el proceso de aproximación de las partículas A_1 y A_2 la interacción entre ellas puede hacerse no pequeña, y

las fórmulas (7.28) pierden su utilidad. No obstante, en cuanto las partículas que surgieron se separan a mayor distancia una de otra, estas fórmulas de nuevo son aplicables.

En el caso dado se puede demostrar que la suma de las energías totales de las dos partículas iniciales (cuando ellas se encuentran tan lejos una de otra que su interacción es

despreciable por su pequeñez) es igual a la energía total de la partícula combinada. Esto mismo también se refiere a la segunda etapa del proceso, o sea, a la desintegración. Con otras palabras, se puede demostrar que para este proceso resulta justa la ley de conservación de la energía total en el aspecto:

$$E_1 + E_2 = E^* = E_3 + E_4 + \dots \quad (7.34)$$

Cerciorémonos, en el siguiente simple ejemplo que esto es precisamente así.

Imaginémonos que la colisión de dos partículas iguales 1 y 2, como resultado de la cual se forma cierta partícula combinada. Sea que las partículas se muevan en el sistema K al encuentro una de otra antes de la colisión, a velocidades iguales v , como se muestra en la fig. 131. Ahora examinemos este proceso en el sistema K' , que se mueve a la izquierda a la velocidad V respecto al sistema K . Como la velocidad de cada partícula en el sistema K

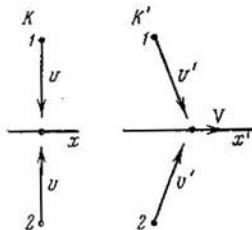


Fig. 131

es perpendicular al vector V , entonces, según (6.14), ambas partículas tienen en el sistema K' la componente x de velocidad, igual a V . Tendrá esta misma velocidad en el sistema K' la partícula que se forma, cuya masa relativista designaremos por M . De la ley de conservación de la impulsión antes y después de la colisión obtenemos (para la componentes x de la impulsión) $2m(v')V = MV$, donde v' es la velocidad de cada partícula inicial en el sistema K' . De aquí

$$2 m(v') = M,$$

es decir, la suma de las masas relativistas de las partículas iniciales es igual a la masa relativista de la partícula que se forma. En el sistema K el proceso es análogo. En realidad, con valores muy pequeños de la velocidad V , la velocidad v' es prácticamente igual a v , y la masa M , a la masa en reposo M_0 de la partícula que se forma, así que en el sistema K

$$2 m(v) = M_0.$$

De aquí, se ve, que la masa en reposo de la partícula que se forma es mayor que la suma de las masas en reposo de las partículas iniciales. La energía cinética de las partículas iniciales sufrió una transformación, como resultado de la cual la masa en reposo de la partícula que se forma superó la suma de las masas en reposo de las partículas iniciales.

Así pues, hemos demostrado que a causa de la conservación de la impulsión del sistema, la suma de las masas relativistas de las partículas iniciales es igual a la masa relativista de la partícula que se forma. Esto mismo, evidentemente, se refiere también a la energía total. Por eso se puede afirmar, que la conservación de la energía total en la forma (7.34) realmente tiene lugar para las etapas consideradas de este proceso.

La aplicación de la ley de conservación de la energía en los procesos nucleares permitió, como ya se dijo al final del § 7.3, comprobar experimentalmente la justeza de una de las leyes fundamentales de la teoría de la relatividad, o sea, de la ley de interacción de la masa y la energía. Examinemos ejemplos.

Ejemplo 1. Rendimiento energético de las reacciones nucleares. Tomemos la reacción nuclear tipo



donde a la izquierda están los núcleos iniciales, a la derecha, los núcleos, producto de la reacción. Apliquemos a esta reacción la ley de conservación de la energía total:

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4.$$

Teniendo en cuenta, que la energía total de cada partícula puede ser representada como $E = m_0c^2 + T$, donde m_0 es la masa en reposo del núcleo correspondiente, T es su energía cinética, escribimos la igualdad anterior así:

$$(m_1 + m_2)c^2 + T_{12} = (m_3 + m_4)c^2 + T_{34},$$

donde T_{12} y T_{34} son las energías cinéticas sumarias de los núcleos antes y después de la reacción. De aquí

$$T_{34} - T_{12} = (m_1 + m_2)c^2 - (m_3 + m_4)c^2.$$

El primer miembro de esta igualdad es el incremento de la energía cinética sumaria de los núcleos del sistema dado, o sea, aquello que denominan *rendimiento energético de la reacción nuclear*, designado por la letra Q . Así, que

$$Q = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)]c^2.$$

Esta magnitud puede tener cualquier signo en dependencia del carácter de una u otra reacción nuclear. De ese modo, el rendimiento energético de la reacción nuclear se determina por la diferencia de las masas en reposo sumarias de los núcleos antes y después de la reacción. Todas las magnitudes que entran en estas correlaciones, pueden ser medidas experimentalmente con exactitud suficientemente alta y, de este modo, es posible comprobar la misma igualdad.

Examinemos una reacción nuclear concreta:



Las mediciones de la masa en reposo de estos núcleos (en unidades atómicas de masa uam) son iguales a 7,0160, 1,0078 y 4,0024 uam, respectivamente. De aquí no es difícil calcular que la suma de las masas en reposo de los núcleos disminuyó como resultado de la reacción 0,019 uam. Teniendo en cuenta, que la masa de 1 uam corresponde a la energía de 931,4 MeV, encontramos que $Q = 0,019 \times 931,4 \text{ MeV} = 17,7 \text{ MeV}$. Este resultado coincide con gran exactitud con el experimento dado.

Ejemplo 2. Desintegración de una partícula. Sea que la partícula A_1 en reposo se desintegra espontáneamente en las partículas A_2 y A_3 : $A_1 \rightarrow A_2 + A_3$. Según la ley de conservación de la energía total,

$$E_1 = E_2 + E_3.$$

Como la energía total de cada partícula $E = m_0c^2 + T$, entonces la igualdad anterior toma el aspecto

$$m_1c^2 = (m_2 + m_3)c^2 + T_{23},$$

donde T_{23} es la energía cinética sumaria de las partículas que se forman. Esta energía la denominan *energía de desintegración* Q . De ese modo

$$Q = [m_1 - (m_2 + m_3)] c^2.$$

En vista de que Q es una magnitud en esencia positiva, la desintegración espontánea de la partícula es posible sólo con la condición de que

$$m_1 > m_2 + m_3,$$

es decir, si la masa en reposo de la partícula inicial es mayor que la suma de las masas en reposo de las partículas que surgen. En caso contrario es imposible la desintegración espontánea. La experiencia confirma, por completo esta deducción.

Examinemos, por ejemplo, la desintegración del mesón π . Experimentalmente se ha establecido que los mesones π cargados se desintegran en el mesón μ y el neutrino ν : $\pi \rightarrow \mu + \nu$. Según datos en las tablas, las masas en reposo de estas partículas (en unidades de masa en reposo del electrón) son iguales a 273,2, 206,8 y 0 conformemente. De aquí sigue, que como resultado de la desintegración disminuye la masa en reposo en 66,4 de masa electrónica. Como a la masa en reposo del electrón corresponde la energía de 0,51 MeV, entonces la energía de la desintegración dada $Q = 66,4 \cdot 0,51 \text{ MeV} = 34 \text{ MeV}$, lo que se encuentra en correspondencia exacta con los resultados experimentales.

El hecho de que como resultado de la colisión de las partículas y de la siguiente desintegración de la partícula combinada la energía total del sistema (por lo tanto, de su impulso) no varía, conduce a otra importante conclusión: la magnitud $E^2 - p^2 c^2$ para el sistema será invariante no sólo en relación a los diferentes sistemas inerciales de referencia, sino que también para las etapas del proceso de colisión antes indicadas.

Sea que, por ejemplo, dos partículas relativistas hayan experimentado una colisión, como resultado de la cual se formó una nueva partícula con masa en reposo M_0 . Si en el sistema K de referencia las energías totales de las partículas antes de la colisión son iguales a E_1 y E_2 , y sus impulsiones p_1 y p_2 correspondientemente, entonces nosotros de inmediato podemos escribir que durante el paso del sistema K (antes de la colisión) al sistema C (después de la colisión) se cumplirá la siguiente igualdad:

$$\underbrace{(E_1 + E_2)^2 - (p_1 + p_2)^2 c^2}_{\text{sistema } K} + \underbrace{M_0^2 c^4}_{\text{sistema } C} \quad (7.35)$$

donde se ha tenido en cuenta, que la partícula que se forma está en reposo en el sistema C .

La invariación de la magnitud $E^2 - p^2c^2$ nos da un instrumento insustituible en el estudio de los diferentes procesos de desintegración y de colisión de las partículas relativistas, con ayuda del cual se simplifica extraordinariamente tanto el análisis de los mismos procesos, como también los cálculos correspondientes.

Ejemplo. En el sistema K de referencia una partícula con masa en reposo m_0 y energía cinética T choca con otra partícula en reposo, de la misma masa en reposo. Encontremos la masa en reposo M_0 y la velocidad V de la partícula combinada, que se forma como resultado de la colisión.

Haciendo uso de la invariación de la magnitud $E^2 - p^2c^2$, escribimos

$$E^2 - p^2c^2 = M_0^2c^4,$$

donde el primer miembro de la igualdad se refiere al sistema K (antes de la colisión) y el segundo, al sistema C (después de la colisión). En el caso dado $E = T + 2m_0c^2$; además, según (7.15), $p^2c^2 = T(T + 2m_0c^2)$, por eso

$$(T + 2m_0c^2)^2 - T(T + 2m_0c^2) = M_0^2c^4.$$

De donde

$$M_0 = \sqrt{2m_0(T + 2m_0c^2)}/c.$$

La velocidad de la partícula que se forma es la velocidad del sistema C . Según (7.32),

$$V = pc^2/E = c \sqrt{T(T + 2m_0c^2)}/(T + 2m_0c^2) = c/\sqrt{1 + 2m_0c^2/T}.$$

Problemas para el capítulo 7

¡Atención! En los problemas 7.4—7.11, han sido empleadas las designaciones abreviadas, citadas al final del § 7.4 (por ejemplo, p y m_0 , son las anotaciones abreviadas de las magnitudes pc y m_0c^2).

7.1. Movimiento bajo la acción de una fuerza longitudinal. Una partícula de masa en reposo m_0 empezó a moverse bajo la acción de la fuerza constante F . Encontrar la dependencia entre la velocidad de la partícula y el tiempo.

Solución. Multiplicamos ambos miembros de la ecuación (7.5) por dt , entonces

$$d(m_0v/\sqrt{1-(v/c)^2}) = Fdt.$$

Integrando esta expresión teniendo en cuenta que en el momento inicial $v = 0$, obtenemos $m_0v/\sqrt{1-(v/c)^2} = Ft$. De aquí

$$v(t) = (Ft/m_0)/\sqrt{1+(Ft/m_0c)^2}.$$

Comparamos la expresión obtenida con la clásica. Según la segunda ley de Newton, $w = F/m_0$ y la velocidad $v_{cl} = Ft/m_0$, por eso la expresión anterior para la velocidad $v(t)$ se puede presentar así:

$$v(t) = v_{cl}/\sqrt{1+(v_{cl}/c)^2}.$$

De aquí se ve, que $v < v_{cl}$, es decir, la velocidad real v de la partícula crece con el tiempo más lentamente que v_{cl} , con ello cuando $t \rightarrow \infty$ la velocidad $v \rightarrow c$ (fig. 132).

Es interesante, que con esto la impulsión de la partícula crecerá linealmente con el tiempo: de la ecuación $dp/dt = F$ se deduce que $p = Ft$. En esto consiste la particularidad característica del

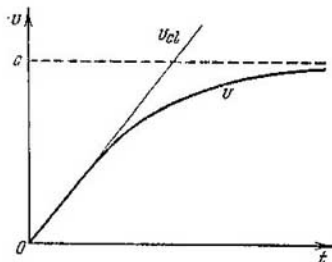


Fig. 132

movimiento relativista: mientras que la velocidad de la partícula tiende a un límite determinado (es decir, prácticamente se establece), la impulsión de ésta continúa creciendo.

7.2. Movimiento bajo la acción de una fuerza transversal. Una partícula relativista de masa en reposo m_0 y carga q se mueve en un campo magnético homogéneo constante, la inducción del cual es B . El movimiento tiene lugar por una circunferencia de radio ρ en el plano perpendicular al vector B . Hallar la impulsión y la frecuencia circular de giro de la partícula por la circunferencia (la velocidad angular).

Solución. En el caso dado la partícula se mueve bajo la acción de la fuerza de Lorentz $F = q[vB]$, donde v es la velocidad de la partícula. Como $F \perp v$, el módulo de la velocidad de la partícula $v = \text{const}$ y la ecuación (7.5) adquiere el aspecto

$$mw = q[vB],$$

donde m es la masa relativista de la partícula. Teniendo en cuenta que w es la aceleración normal, igual por su módulo a v^2/ρ , escribamos la expresión anterior así: $mv^2/\rho = qvB$. De aquí la impulsión de la partícula

$$p = mv = q\rho B. \quad (1)$$

De ese modo, el producto ρB puede servir de medida de la impulsión relativista de la partícula dada.

La frecuencia circular de rotación de la partícula, teniendo en cuenta (1)

$$\omega = v/\rho = p/m\rho = qB/m.$$

De aquí se deduce, que la frecuencia circular ω depende de la velocidad de la partícula: cuanto mayor es la velocidad de la partícula y , por consiguiente, su masa relativista m , tanto menor es la frecuencia ω . No obstante a velocidades pequeñas ($v \ll c$) $m \rightarrow m_0$ y

$$\omega = qE/m_0 = \text{const.},$$

es decir, en esta zona de velocidades la frecuencia ω prácticamente no depende de la velocidad.

7.3. Un protón relativista con una impulsión p_0 entra volando en el momento $t = 0$ en la zona, donde hay un campo eléctrico homogéneo transversal de intensidad E , con ello $p_0 \perp E$. Determinar la dependencia del tiempo del ángulo ϑ , al que el protón va a desviarse de la dirección inicial del movimiento.

Solución. Eligiendo el eje de coordenadas (x , a lo largo del vector p_0 , y , a lo largo del vector E), escribimos la ecuación (7.4) en las proyecciones sobre estos ejes:

$$dp_x/dt = 0 \quad dp_y/dt = eE,$$

donde e es la carga del protón. De estas ecuaciones se deduce, que

$$p_x = p_0, \quad p_y = eEt,$$

o bien

$$m_0 v_x / \sqrt{1 - (v/c)^2} = p_0, \quad m_0 v_y / \sqrt{1 - (v/c)^2} = eEt. \quad (1)$$

Tomando la razón de las dos últimas igualdades, encontramos

$$\text{tg } \vartheta = v_y/v_x = eEt/p_0.$$

Es interesante señalar, que a diferencia del caso no relativista, aquí v_x disminuye con el crecimiento del tiempo. Para convencerse de esto elevamos ambas igualdades (1) al cuadrado y después adicionamos por separado sus miembros primero y segundo:

$$\frac{[m_0^2 (v_x^2 + v_y^2)]}{1 - (v/c)^2} = p_0^2 + (eEt)^2.$$

Señalando, que $v_x^2 + v_y^2 = v^2$, obtenemos

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left[1 + \frac{m_0^2 c^2}{p_0^2 + (eEt)^2}\right]^{-1}.$$

Sustituyendo esta expresión en la primera de (1), encontramos

$$v_x = c / \sqrt{1 + (m_0 c / p_0)^2 + (eEt / p_0)^2},$$

es decir, en realidad v_x disminuye con el crecimiento de t .

7.4. Difusión elástica simétrica. Un protón relativista de una energía cinética T experimentó una colisión elástica con un protón en reposo, como resultado de lo cual ambos protones se separaron volando simétricamente con relación a la dirección inicial de movimiento. Encontrar el ángulo entre las direcciones de los movimientos de los protones después de la colisión.

Solución. Cuando los protones se separan de modo simétrico sus impulsiones y energías deben ser de iguales módulos. Esto se ve de inmediato del triángulo de las impulsiones (fig. 133), que

expresa a la ley de conservación de la impulsión. De este triángulo, según el teorema del coseno, se deduce que

$$p^2 = 2p'^2 + 2p'^2 \cos \theta,$$

de donde

$$\cos \theta = p^2/2p'^2 - 1.$$

Haciendo uso de la fórmula (7.25) y teniendo en cuenta que $T = 2T'$, donde T' es la energía cinética de cada protón después de la colisión, encontramos

$$\frac{p^2}{p'^2} = \frac{T(T+2m_0)}{T'(T'+2m_0)} = 4 \frac{T+2m_0}{T'+4m_0},$$

donde m_0 es la masa en reposo del protón. Después de la sustitución

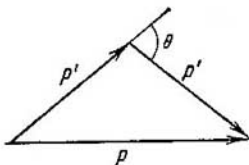


Fig. 133

de esta fórmula en la expresión para el $\cos \theta$, obtenemos

$$\cos \theta = T/(T + 4m_0).$$

Señalemos, que a diferencia del caso no relativista, cuando $\theta = \pi/2$, aquí $\theta < \pi/2$.

7.5. Un fotón de energía ε experimentó dispersión en un electrón libre en reposo. Encontrar la energía ε' del fotón disperso si

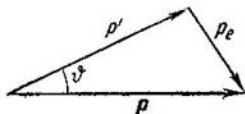


Fig. 134

el ángulo entre las direcciones del movimiento de los fotones disperso y el que choca es igual a θ .

Solución. En el proceso dado hacemos uso de las leyes de conservación de la energía y de la impulsión:

$$T_e = \varepsilon - \varepsilon', \quad p_e = p - p',$$

donde T_e y p_e es la energía cinética y la impulsión del electrón de retroceso, p y p' son las impulsiones de los fotones, incidente y disperso. Del triángulo de impulsiones (fig. 134), según el teorema

del coseno, se deduce que

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \vartheta.$$

Sustituyendo aquí $p = \varepsilon$, $p' = \varepsilon'$ y $p_e = \sqrt{T_e(T_e + 2m_e)} = \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon')(\varepsilon - \varepsilon' + 2m_e)}$, donde m_e es la masa en reposo del electrón, después de transformaciones poco complicadas obtenemos

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + (2\varepsilon/m) \sin^2(\vartheta/2)}.$$

7.6. Dos protones se mueven al encuentro uno de otro con energías cinéticas iguales T (en el sistema K de referencia). Encontrar la energía cinética T' de un protón con relación al otro.

Solución. Hacemos uso de la invariación de la magnitud $E^2 - p^2$, escribiéndola en el sistema K (aquí él es simultáneamente sistema C) y en el sistema de referencia, ligado con uno de los protones:

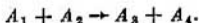
$$[2(T + m_p)]^2 = (T' + 2m_p)^2 - T'(T' + 2m_p),$$

donde m_p es la masa en reposo del protón. De aquí

$$T' = 2T(T + 2m_p)/m_p.$$

Por ejemplo, para los protones ($m_p \approx 1$ GeV) $T' = 5 \cdot 10^3$ GeV cuando $T = 50$ GeV. La posibilidad de obtención de esta ganancia tan grande de energía está en la base del método de haces contrarios.

7.7. Esquema energético de una reacción nuclear. La partícula A_1 de energía cinética T_1 choca con el núcleo en reposo A_2 (en el sistema K). Como resultado de la reacción se forman los núcleos A_3 y A_4 :



Las masas en reposo de las partículas son iguales a m_1 , m_2 , m_3 y m_4 , respectivamente. Representar el esquema energético de la reacción nuclear para dos casos: a) $m_1 + m_2 > m_3 + m_4$ y

b) $m_1 + m_2 < m_3 + m_4$. Hallar para el segundo caso la energía cinética de umbral T_{umb} de la partícula que choca en el sistema K .

Solución. De la ley de conservación de la energía total se deduce que en el sistema C

$$\tilde{T}_{12} + m_1 + m_2 = \tilde{T}_{34} + m_3 + m_4,$$

donde \tilde{T}_{12} y \tilde{T}_{34} son las energías cinéticas sumarias de las partículas antes y después de la reacción. Designando el incremento de la energía cinética $\tilde{T}_{34} - \tilde{T}_{12}$ por Q , escribimos la expresión anterior así:

$$Q = (m_1 + m_2) - (m_3 + m_4),$$

donde Q es liberación energética de la reacción nuclear. En la fig. 135 se muestra el esquema energético de la reacción para ambos casos. En el caso a el efecto será positivo, $Q > 0$: la energía

cinética sumaría aumenta a cuenta de la disminución de las masas en reposo de las partículas del sistema; en el caso b, a la inversa.

En el último caso, como se ve de la fig. 135 a, b, la reacción nuclear es posible sólo cuando $\tilde{T}_{12} \geq |Q|$. Aquí, el signo de igualdad

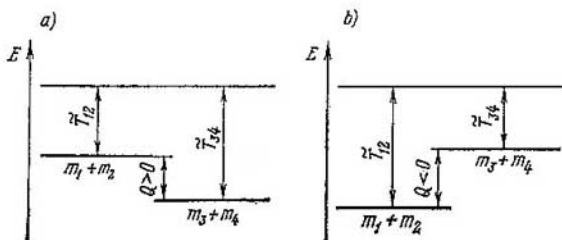


Fig. 135

corresponde al valor de umbral de la energía \tilde{T}_{12} . A velocidades pequeñas, según (4.16),

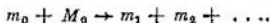
$$T_{12 \text{ umb}} = \frac{\mu v_{\text{rel}}^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1 \text{ umb} = |Q|.$$

De donde

$$T_{1 \text{ umb}} = |Q| (m_1 + m_2)/m_2.$$

7.8. Energía de umbral (energía mínima, necesaria para la realización del proceso dado).

1. Una partícula relativista de masa en reposo m_0 choca con una partícula en reposo de masa en reposo M_0 . Como resultado de la colisión surgen las partículas con masas en reposo m_1, m_2, \dots según el esquema



Encontrar la energía cinética de umbral T_{umb} de la partícula penetrante.

2. Hallar la energía de umbral de un fotón para dar origen al par electrón—positrón en el campo del protón en reposo.

Solución. 1. Ante todo es evidente, que de la energía de umbral puede tratarse sólo en el caso, cuando la suma de las masas en reposo de las partículas que surgen supera la suma de las masas en reposo de las partículas iniciales. Para encontrar T_{umb} , hacemos uso de la invariación de la magnitud $E^2 - p^2$. Escribamos esta magnitud antes de la colisión cuando $T = T_{\text{umb}}$ en el sistema de referencia, donde la partícula M_0 está en reposo, y, después de la colisión, en el sistema C:

$$E^2 - p^2 = \tilde{E}^2,$$

o bien

$$(T_{\text{umb}} + m_0 + M_0)^2 - T_{\text{umb}}(T_{\text{umb}} + 2m_0) = (m_1 + m_2 + \dots)^2.$$

Aquí se ha tenido en cuenta, que en el sistema C la energía cinética de las partículas que surgen es igual a cero en el umbral de la reacción, por eso su energía total es simplemente igual a la suma de las masas en reposo de las partículas por separado. De la última ecuación encontramos

$$T_{\text{umb}} = [(m_1 + m_2 + \dots)^2 - (m_0 + M_0)^2] / 2M_0.$$

2. Escribamos $E^2 - p^2$ antes de la interacción en el sistema de referencia, donde el protón está en reposo y, después de la interacción, en el sistema C . Con el valor de umbral de la energía ϵ del fotón penetrante

$$(\epsilon_{\text{umb}} + M_0)^2 - \epsilon_{\text{umb}}^2 = (M_0 + 2m_0)^2,$$

donde M_0 es la masa en reposo del protón, m_0 es la masa en reposo del electrón (del positrón). De aquí

$$\epsilon_{\text{umb}} = 2m_0(1 + m_0/M_0).$$

Es evidente, que para dar origen al par es necesario, que la energía del fotón sea mayor que $2m_0$.

7.9. Desintegración de una partícula en movimiento. Un mesón π^0 relativista de masa en reposo m_0 se desintegró en vuelo en dos fotones γ de energías ϵ_1 y ϵ_2 (en el sistema K de referencia). Encontrar el ángulo θ entre las direcciones de vuelo de estos fotones γ .

Solución. Partimos de la invariación de la expresión $E^2 - p^2$, escribiéndola antes de la desintegración en el sistema C y, después de la desintegración, en el sistema K :

$$m_0^2 = (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - (p_1 + p_2)^2,$$

donde p_1 y p_2 son los impulsos de los fotones γ . Transformando el primer miembro de esta ecuación, teniendo en cuenta, que $p_1 = \epsilon_1$ y $p_2 = \epsilon_2$; entonces

$$m_0^2 = 2\epsilon_1\epsilon_2 - 2p_1p_2, \text{ ó}$$

$$m_0^2 = 2\epsilon_1\epsilon_2(1 - \cos \theta).$$

De aquí

$$\cos(\theta/2) = m_0 / 2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}.$$

7.10. La impulsión y la energía del sistema de dos partículas que no interactúan son iguales a $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ y $E = E_1 + E_2$. Demostrar en forma explícita, que las transformaciones de Lorentz para la impulsión total \mathbf{p} y la energía E concuerdan con la invariación de la magnitud $E^2 - p^2$ para el sistema dado.

Solución. Haciendo uso de las transformaciones de Lorentz para la impulsión y la energía (7.26), encontramos las proyecciones de la impulsión total y de la energía en otro sistema de referencia (sombreado), que tiene la velocidad β y el factor de Lorentz γ

correspondiente:

$$p'_x = p'_{1x} + p'_{2x} = \gamma (p_{1x} + p_{2x}) - \gamma \beta (E_1 + E_2) = \gamma (p_x - \beta E);$$

$$p'_y = p'_{1y} + p'_{2y} = p_{1y} + p_{2y} = p_y;$$

$$E' = E'_1 + E'_2 = \gamma (E_1 + E_2) - \gamma \beta (p_{1x} + p_{2x}) = \gamma (E - \beta p_x).$$

$$\text{De aquí } E'^2 - p'^2 = E'^2 - (p_x'^2 + p_y'^2) = E^2 - p^2.$$

7.11. Un fotón de energía ε en un sistema de laboratorio de referencia choca con una partícula inmóvil A de masa en reposo m_0 . Encontrar:

- 1) la velocidad del sistema C de estas dos partículas;
- 2) la energía del fotón y de la partícula A en el sistema C .

Solución. 1. Según la fórmula (7.32), la velocidad del sistema C

$$\beta = p/E = \varepsilon/(\varepsilon + m_0).$$

2. De la transformación de Lorentz para la energía (7.26) se deduce, que la energía del fotón en el sistema C

$$\bar{\varepsilon} = \gamma (\varepsilon - \beta p) = \gamma (\varepsilon - \beta \varepsilon) = \varepsilon \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \varepsilon \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

Sustituyendo la expresión de β del punto anterior, obtenemos

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \sqrt{m_0 / (2\varepsilon + m_0)}.$$

La energía de la partícula A en el sistema C

$$\bar{E}_A = m_0 \sqrt{1 - \beta^2} = (\varepsilon + m) \sqrt{m_0 / (2\varepsilon + m_0)}.$$

De la justeza de las fórmulas obtenidas podemos convencernos, haciendo uso de la invariación de la expresión $E^2 - p^2$ al pasar desde el sistema de referencia de laboratorio al C :

$$(\varepsilon + m_0)^2 - \varepsilon^2 = (\bar{\varepsilon} + \bar{E}_A)^2.$$

Problemas complementarios para el capítulo 1

1.12. Dos partículas se mueven con la aceleración g en un campo homogéneo de gravedad. En el momento inicial se encontraban en un mismo punto y tenían las velocidades v_1 y v_2 , dirigidas de modo horizontal en sentidos contrarios. Encontrar la distancia entre las partículas en el momento, cuando los vectores de sus velocidades resultan perpendiculares en sí.

Respuesta. $l = (v_1 + v_2) \sqrt{v_1 v_2 / g}$.

1.13. Un tren de longitud l empieza a moverse por una vía recta con aceleración constante w . Al cabo del intervalo de tiempo t después del principio del movimiento fue conectado el reflector de la locomotora (acontecimiento 1), y después de τ de esto, la lámpara de señales en la cola del tren (acontecimiento 2). Encontrar la distancia entre estos acontecimientos en los sistemas de referencia, ligados con el tren y con la Tierra.

Respuesta. Respectivamente,

$$x_1 - x_2 = l \text{ y } x'_1 - x'_2 = l - \omega\tau (t + \tau/2).$$

1.14. Un punto recorrió la mitad de una circunferencia de radio R en el intervalo de tiempo τ . Determinar la velocidad media $\langle v \rangle$ del punto y el módulo de su vector medio de velocidad $\langle \vec{v} \rangle$ en este tiempo.

Respuesta. $\langle v \rangle = \pi R/\tau$, $|\langle \vec{v} \rangle| = 2R/\tau$.

1.15. Una partícula se mueve en la dirección positiva del eje x de modo que su velocidad varía por la ley $v = \alpha \sqrt{x}$, donde α es una constante positiva. Teniendo en cuenta que en el momento $t = 0$ ella se encontraba en el punto $x = 0$, encontrar:

a) la dependencia entre la velocidad y la aceleración y el tiempo;

b) la velocidad media de la partícula en el tiempo, en el transcurso del cual ella recorre los primeros s metros de recorrido.

Respuesta. a) $v = \alpha^2 t/2$, $w = \alpha^2/2$; b) $\langle v \rangle = \alpha \sqrt{s/2}$.

1.16. Un globo empieza a elevarse de la superficie de la tierra. La velocidad de su ascenso es constante e igual a v_0 . Debido

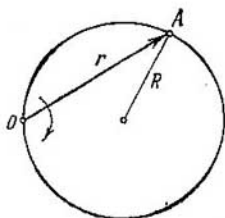


Fig. 136

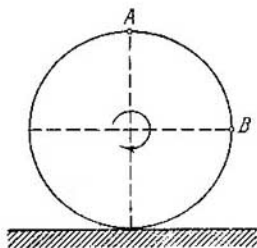


Fig. 137

al viento el globo adquiere la componente horizontal de la velocidad $v_x = ay$, donde a es una constante, y es la altura de ascenso. Encontrar la dependencia entre la altura:

a) y la magnitud de la deriva del globo $x(y)$;

b) y las aceleraciones total, tangencial y normal del globo.

Respuesta. a) $x = (a/2v_0)y^2$; $w = av_0$;

$$w_\tau = a^2 y / \sqrt{1 + (ay/v_0)^2}, \quad w_n = av_0 / \sqrt{1 + (ay/v_0)^2}.$$

1.17. La partícula A se mueve en un círculo de radio R de modo que su radio vector r con relación al punto O (fig. 136) gira a la velocidad angular constante ω . Encontrar el módulo de la velocidad de la partícula, así como el módulo y la dirección del vector de su aceleración total.

Respuesta. $v = 2R\omega$, $w = 4R\omega^2$.

1.18. Un cilindro rueda sin resbalamiento por un plano horizontal. El radio del cilindro es igual a a . Hallar los radios de curvatura de las trayectorias de los puntos A y B (fig. 137).

Respuesta. $R_A = 4a$, $R_B = 2\sqrt{2}a$.

1.19. Dos sólidos giran alrededor de los ejes inmóviles perpendiculares entre sí que se cruzan a velocidades angulares constantes ω_1 , ω_2 . Encontrar la velocidad angular y la aceleración angular de un sólido con relación al otro.

Respuesta. $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$,
 $\beta = \omega_1\omega_2$.

Para el capítulo 2

2.12. Un pequeño cuerpo A empieza a deslizarse desde el vértice de una cuña, la base de la cual es l (fig. 138). El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie de la cuña es k . ¿Con qué valor del ángulo α el tiempo de deslizamiento será el menor?

Respuesta. $\alpha = \frac{1}{2} \arctg(-1/k)$.

2.13. Sobre un pequeño cuerpo de masa m , que está en un plano horizontal liso, en el momento $t = 0$ empieza a actuar una fuerza que depende del tiempo por la ley $F = at$, donde a es una

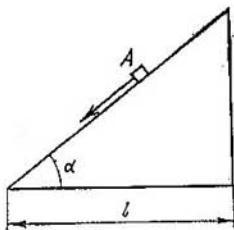


Fig. 138

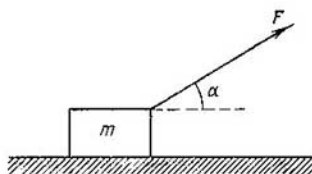


Fig. 139

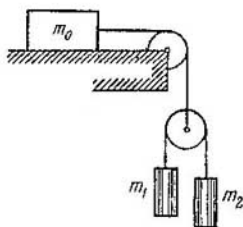


Fig. 140

constante. La dirección de esta fuerza constituye todo el tiempo un ángulo α con el horizonte (fig. 139), encontrar:

a) la velocidad del cuerpo en el momento de la separación del plano;

b) el camino, recorrido por el cuerpo hasta este momento.

Respuesta. a) $v = \frac{mg^2 \cos \alpha}{2a \sin^2 \alpha}$;

b) $s = \frac{m^2 g^3 \cos \alpha}{6a^2 \sin \alpha}$.

2.14. En el sistema (fig. 140) se conocen las masas de los cuerpos m_0 , m_1 , m_2 , no hay rozamiento, las masas de las poleas y del hilo son despreciables por su pequeñez. Encontrar la aceleración del cuerpo m_1 . Investigar los casos posibles.

Respuesta.

$$\vec{w}_1 = \frac{4m_1m_2 + m_0(m_1 - m_2)}{4m_1m_2 + m_0(m_1 + m_2)} \vec{g}.$$

2.15. Una bola, colgada de un hilo, se balancea en el plano vertical de modo que su aceleración en las posiciones límite e inferior son de iguales módulos. Encontrar el ángulo de inclinación del hilo en la posición límite.

Respuesta. $\phi = 53^\circ$.

2.16. Un automóvil se mueve con la aceleración tangencial constante w por una superficie horizontal, describiendo una circunferencia de radio R . El coeficiente de rozamiento de deslizamiento entre las ruedas del auto y la superficie es igual a k . ¿Qué camino recorre el auto sin deslizamiento, si en el momento inicial su velocidad era igual a cero?

Respuesta. $s = 1/2 R \sqrt{(kg/w\tau)^2 - 1}$.

2.17. Una lancha de masa m se mueve en un lago a la velocidad v_0 . En el momento $t = 0$ desconectaron su motor. Considerando que la fuerza de resistencia del agua al movimiento de la lancha es proporcional a su velocidad $\vec{F} = -rv\vec{v}$, encontrar:

a) el tiempo del movimiento de la lancha con el motor desconectado;

b) la velocidad de la lancha en dependencia del camino recorrido con el motor desconectado, así como el camino total hasta la parada.

Respuesta. a) $v = v_0 e^{-tr/m}$, $t \rightarrow \infty$;

b) $v = v_0 - sr/m$, $s_{\text{tot}} = mv_0/r$.

2.18. Una pequeña barreta empieza a deslizarse por un plano inclinado, que constituye un ángulo α con el horizonte. El coeficiente de rozamiento depende del camino recorrido s según la ley $k = as$, donde a es una constante. Encontrar el camino recorrido por la barreta hasta su parada y su velocidad máxima por este camino.

Respuesta. $s_{\text{tot}} = (2/a) \operatorname{tg} \alpha$, $v_{\text{máx}} = \sqrt{(g/a) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha}$.

2.19. A un disco horizontal lo hacen girar a la velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical, que pasa por su centro. Por uno de los diámetros del disco se mueve un pequeño cuerpo de masa m a la velocidad constante v' respecto al disco. Encontrar la fuerza, con la cual el disco actúa sobre este cuerpo en el momento, cuando él se encuentra a la distancia r del eje de rotación.

Respuesta.

$$F = m \sqrt{g^2 + \omega^4 r^2 + (2v'\omega)^2}.$$

Para el capítulo 3

3.12. Una locomotora de masa m empieza a moverse desde la estación de modo que su velocidad varía según la ley $v = a\sqrt{s}$, donde a es una constante, s es el camino recorrido. Encontrar el

trabajo sumario en los primeros t segundos después de empezar el movimiento.

Respuesta. $A = ma^4 t^2 / 8$.

3.13. La energía cinética de una partícula, que se mueve por una circunferencia de radio R , depende del camino recorrido s según la ley $T = as^2$, donde a es una constante. Encontrar la fuerza que actúa sobre la partícula en dependencia de s .

Respuesta. $F = 2as\sqrt{1 + (s/R)^2}$.

3.14. Actuando con la fuerza \vec{F} , que en cada punto está dirigida por la tangente a la trayectoria (fig. 144), subimos lentamente un cuerpo de masa m a un montículo. Encontrar el trabajo de esta fuerza, si h es la altura del montículo, l la longitud de su base y k el coeficiente de rozamiento.

Respuesta. $A = mg(h + kl)$.

3.15. Un sistema consta de dos resortes unidos sucesivamente, cuya rigidez es x_1 y x_2 . Encontrar el menor trabajo que es necesario realizar para estirar este sistema a la longitud Δl .

Respuesta. $A_{\min} = 1/2 k (\Delta l)^2$, donde $k = k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$.

3.16. Una pequeña golilla A desliza sin velocidad inicial de la cúspide de una rampa lisa de altura H que tiene un trampolín

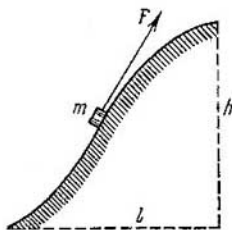


Fig. 144

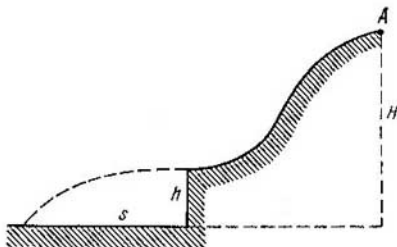


Fig. 142

horizontal (fig. 142). ¿Con qué altura h del trampolín la golilla recorrerá a la mayor distancia s ? ¿A qué es igual ella?

Respuesta. $h = H/2$, $s_{\max} = H$.

3.17. De un hito de longitud l se cuelga una bola de masa m . ¿A qué velocidad mínima es necesario empezar a desplazar el punto de suspensión en la dirección horizontal, para que la bola empiece a moverse por círculo alrededor de este punto? ¿Cuál es con esto

la tensión del hilo en el momento, cuando la bola pasará la posición horizontal?

$$\text{Respuesta. } v_{\min} = \sqrt{5gl}, \quad T = 3mg.$$

3.18. A un cuerpo dirigido verticalmente hacia arriba le comunican en un polo de la Tierra la velocidad v_0 . Conociendo el radio de la Tierra y la aceleración de la caída libre sobre su superficie, encontrar la altura a la cual asciende el cuerpo en ausencia de la resistencia del aire.

Respuesta. $h = R/(2gR/v_0^2 - 1)$, donde R es el radio de la Tierra.

3.19. Un satélite artificial de la Luna se mueve por una órbita circular, el radio de la cual es η veces mayor que el radio de la Luna. Durante su movimiento el satélite experimenta una débil resistencia del polvo cósmico. Considerando, que la fuerza de resistencia, depende de la velocidad del satélite según la ley $F = \alpha v^2$, donde α es una constante, encontrar el tiempo de movimiento del satélite antes de su caída a la superficie de la Luna.

$$\text{Respuesta. } \tau \approx (\sqrt{\eta} - 1) m / \alpha \sqrt{gR},$$

Para el capítulo 4

4.12. Dos carros iguales 1 y 2, sobre cada uno de los cuales se encuentra un hombre, se mueven por inercia sin rozamiento al encuentro uno de otro por rieles paralelos. Cuando los carros se reúnen, de cada uno de ellos salta sobre el otro un hombre, en la dirección perpendicular al movimiento de los carros. Como resultado se detuvo el carro 1 y el 2 continuó moviéndose en la dirección anterior de modo que su velocidad llega a ser \vec{v} . Encontrar las velocidades iniciales \vec{v}_1 y \vec{v}_2 de los carros, si la masa de cada uno (sin el hombre) es M y la masa de cada hombre, m .

$$\text{Respuesta. } \vec{v}_1 = -m\vec{v}/(M-m),$$

$$\vec{v}_2 = M\vec{v}/(M-m).$$

4.13. Dos carros iguales se mueven uno tras otro por inercia (sin rozamiento) a una misma velocidad \vec{v}_0 . En el carro trasero se encuentran un hombre de masa m . En cierto momento, el hombre salta al carro delantero a la velocidad \vec{u} respecto a su carro. Teniendo en cuenta, que la masa de cada carro es igual a M , encontrar las velocidades con las cuales se moverán ambos carros después de esto.

$$\text{Respuesta. } \vec{v}_{\text{tra}} = \vec{v}_0 - \frac{m}{M+m} \vec{u},$$

$$\vec{v}_{\text{del}} = \vec{v}_0 + \frac{mM}{M+m} \vec{u}.$$

4.14. En un plano horizontal liso se encuentran dos barretas de masa m_1 y m_2 , unidas por un resorte imponderable de rigidez κ

(fig. 143). La barra 2 la desplazaron a la izquierda a la pequeña distancia x y la soltaron. Encontrar la velocidad del centro de inercia del sistema después de la separación de la pesa 1 de la pared.

Respuesta. $v_C = x \sqrt{2m_2/(m_1 + m_2)}$.

4.15. Una partícula de masa de 1 g, moviéndose a la velocidad $\vec{v}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, experimentó una colisión absolutamente no elástica

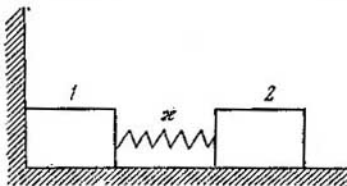


Fig. 143

con otra partícula, la masa de la cual es de 2g y su velocidad $\vec{v}_2 = 4\vec{j} - 6\vec{k}$. Encontrar la velocidad de la partícula que se forma, o sea, el vector \vec{v} y su módulo, si las proyecciones de los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 se dan en el sistema SI.

Respuesta. $\vec{v} = 1\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$, $v \approx 4,6$ m/s.

4.16. La partícula 1 experimentó una colisión absolutamente elástica con la partícula en reposo 2. Encontrar la relación de sus masas, si:

a) la colisión es frontal y las partículas se separan en direcciones contrarias a velocidades iguales;

b) las partículas se separan simétricamente en relación a la dirección inicial del movimiento de la partícula 1 y el ángulo entre sus direcciones de separación es igual a θ .

Respuesta: a) $m_1/m_2 = 1/3$; b) $m_1/m_2 = 1 + 2 \cos \theta$.

4.17. Un sistema cerrado consta de dos protones no relativistas. En cierto momento ellos se encontraban a la distancia l uno de otro, siendo la velocidad de uno de ellos $\vec{v}_1 = 0$, en tanto que la del otro \vec{v}_2 y está dirigida, como se muestra en la fig. 144. Encontrar el ángulo φ entre las direcciones del movimiento de los protones, cuando la distancia entre ellos de nuevo es igual a l .

Respuesta. $\varphi = 90^\circ$.

4.18. Una bola que se mueve de modo progresivo experimentó un choque con otra en reposo de la misma masa. Al chocar el ángulo entre la recta, que pasa por los centros de las bolas y la dirección del movimiento inicial de la bola que choca resultó igual a α . Considerando las bolas lisas, encontrar la parte η de la energía

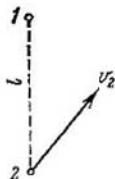


Fig. 144

cinética de la bola que choca, que se convierte en energía potencial en el momento de la mayor deformación.

Respuesta. $\eta = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha$.

4.19. Un proyectil que vuela a la velocidad v , estalla formando tres cascos de metralla iguales de forma que la energía cinética del sistema aumenta η veces. ¿Qué velocidad máxima puede tener uno de los cascos?

Respuesta.

$$v_{\text{máx}} = v(1 + \sqrt{2(\eta - 1)}).$$

Para el capítulo 5

5.13. Una partícula se mueve por una trayectoria cerrada en un campo central de fuerzas, donde su energía potencial $U = kr^2$, donde k es una constante positiva, r es la distancia de la partícula hasta el centro del campo. Encontrar la masa de la partícula, si la menor distancia desde ella al centro del campo es igual a r_1 y la velocidad a la mayor distancia de este punto es v_2 .

Respuesta. $m = 2kr_1^2/v_2^2$.

5.14. En una polea maciza fija de radio R se enrolla un hilo no elástico, de cuyo extremo libre se suspende un pequeño cuerpo de masa m . En el momento $t = 0$ dejaron al sistema libre y él se pone en movimiento. Hallar su momento de impulsión con relación al eje de la polea en dependencia de t .

Respuesta. $L_z = Rmgt$.

5.15. Una bola homogénea de masa m y de radio R empieza a rodar sin rozamiento por un plano inclinado que constituye un ángulo α con el horizonte. Encontrar la dependencia entre el momento de impulsión de la bola y el tiempo con relación al punto de contacto en el momento inicial. ¿Cómo varía el resultado en el caso de un plano inclinado absolutamente liso?

Respuesta. $L = Rmgt \sin \alpha$. No varía.

5.16. Un cubo homogéneo de lado a se encuentra en un plano horizontal con coeficiente de rozamiento k . Al cubo le comunicaron velocidad inicial, después de lo cual él recorrió cierta distancia en el plano y se detuvo. Explicar la desaparición del momento de impulsión del cubo con relación al eje que se encuentra en el plano y es perpendicular a la dirección del movimiento del cubo. Encontrar la distancia entre las fuerzas resultantes de gravedad y de la presión normal desde el plano (superficie) de apoyo.

Respuesta. $\Delta x = ka/2$.

5.17. Una lámina cuadrada homogénea delgada de lado l y masa M puede girar libremente alrededor de un eje vertical fijo que coincide con uno de sus lados. En el centro de la lámina, por la normal a ella, golpea de modo elástico una bola de masa m que vuela a la velocidad \vec{v} . Encontrar la velocidad de la bola después del golpe.

Respuesta. $\vec{v}' = \vec{v}(3m - 4M)/(3m + 4M)$.

5.18. Un hombro de masa m_1 se encuentra en el bordo de un disco horizontal homogéneo de masa m_2 y radio R , que puede girar libremente alrededor de un eje vertical fijo que pasa por su centro.

En cierto momento, el hombre empieza a moverse por el borde del disco, realizando un desplazamiento al ángulo φ' con relación al disco y se detuvo. La velocidad del hombre con relación al disco dependió en el proceso del movimiento del tiempo según la ley $v'(t)$. Despreciando las dimensiones del hombre, encontrar:

a) el ángulo, al cual giró el disco hasta el momento cuando el hombre se detuvo;

b) el momento de fuerza con relación al eje de rotación, con el cual el hombre actuó sobre el disco en el proceso del movimiento.

$$\text{Respuesta. a) } \varphi = \frac{2m_1}{2m_1 + m_2} \varphi'; \quad \text{b) } M_z = -\frac{m_1 m_2 R}{2m_1 + m_2} \frac{dv'}{dt}.$$

5.19. En un plano horizontal liso se encuentran una pequeña golilla y una barra homogénea delgada de longitud l , la masa de la cual es η veces mayor que la de la golilla. A la golilla le comunicaron la velocidad \vec{v} en dirección horizontal perpendicular a la barra, después de lo cual experimentó un choque elástico con el extremo de la barra. Encontrar la velocidad de la golilla y la velocidad angular de la barra después de la colisión. ¿Con qué valor de η la velocidad de la golilla después de la colisión será igual a cero? ¿variará la dirección por la contraria?

Respuesta. $v' = v(4 - \eta)/(4 + \eta)$, $\omega = 12v/l(4 + \eta)$. Respectivamente con $\eta = 4$ y $\eta > 4$.

5.20. En una superficie horizontal rugosa se encuentra una bobina de hilo de masa m . Su momento de inercia con relación a

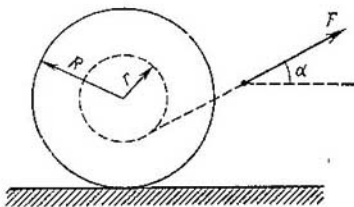


Fig. 145

su eje propio $I = \beta m R^2$, donde β es un coeficiente numérico, R es el radio exterior de la bobina. El radio de la capa de hilo arrollado es igual a r . Empezamos a tirar del hilo de la bobina sin rozamiento con la fuerza constante \vec{F} , dirigida bajo un ángulo α al horizonte (fig. 145). Encontrar:

a) el módulo y la dirección del vector de la aceleración del eje de la bobina;

b) el trabajo de la fuerza F en los primeros t segundos después de empezado el movimiento.

$$\text{Respuesta. a) } W = \frac{F (\cos \alpha - r/R)}{m (1 + \beta)},$$

$$\text{b) } A = \frac{F^2 t^2 (\cos \alpha - r/R)^2}{2m (1 + \beta)}.$$

Para el capítulo 6

6.11. Tenemos un triángulo, la longitud propia de cada lado del cual es igual a a . Encontrar el perímetro de este triángulo en el sistema de referencia, que se mueve con relación a él a la velocidad constante V a lo largo de uno de sus a) bisectrices, b) lados. Investigar los resultados obtenidos cuando $V \ll c$ $V \rightarrow c$, donde c es la velocidad de la luz.

$$\text{Respuesta. a) } P = a (1 + \sqrt{4 - 3\beta^2});$$

$$\text{b) } P = a (\sqrt{1 - \beta^2} + \sqrt{4 - \beta^2}).$$

Aquí $\beta = V/c$.

6.12. Un cono recto en reposo tiene el ángulo de semiapertura $\vartheta = 45^\circ$ y el área de la superficie lateral $S_0 = 4,0 \text{ m}^2$. Encontrar en el sistema de referencia, que se mueve a la velocidad $v = \frac{4}{5}c$ a lo largo del eje cono: a) su ángulo de semiapertura; b) el área de la superficie lateral.

$$\text{Respuesta. a) } \text{tg } \vartheta' = (\text{tg } \vartheta) / \sqrt{1 - \beta^2}, \text{ de aquí } \vartheta' = 59^\circ;$$

$$\text{b) } S = S_0 \sqrt{1 - \beta^2} \cos^2 \vartheta = 3,3 \text{ m}^2. \text{ Aquí } \beta = v/c.$$

6.13. ¿A qué velocidad se movía el reloj en el sistema K de referencia, si en el tiempo $t = 5,0 \text{ s}$ (en el sistema K) se retrasa del reloj de este sistema $\Delta t = 0,10 \text{ s}$?

$$\text{Respuesta. } v = c \sqrt{(2 - \Delta t/t) \Delta t/t} = 0,6 \cdot 10^8 \text{ m/s, } j_2$$

6.14. Una barra vuela a velocidad constante por delante de una marca inmóvil en el sistema K de referencia. El tiempo de vuelo en el sistema K es $t = 20 \text{ ns}$. Mas en el sistema de referencia, ligado con la barra, la marca se mueve a lo largo de él en el intervalo $\Delta t' = 25 \text{ ns}$. Encontrar la longitud propia de la barra.

$$\text{Respuesta. } l_0 = c \Delta t' \sqrt{1 - (\Delta t/\Delta t')^2} = 4,5 \text{ m.}$$

6.15. Un mesón μ que se mueve en el sistema K de referencia a la velocidad $v = 0,990c$, vuela desde el lugar de su generación hasta al punto de desintegración la distancia $l = 3,0 \text{ km}$. Determinar:

a) el tiempo de vida propia de este mesón;

b) la distancia que «desde su punto de vista» el mesón voló en el sistema K .

$$\text{Respuesta. a) } \Delta t_0 = (l/v) \sqrt{1 - (v/c)^2} = 1,4 \text{ } \mu\text{s}; \text{ b) } l' = l \sqrt{1 - (v/c)^2} = 0,42 \text{ km.}$$

6.16. Dos partículas, que se mueven en un sistema de referencia de laboratorio por una recta a igual velocidad $v = \frac{3}{4}c$,

dieron sobre blanco inmóvil con el intervalo de tiempo $\Delta t = 50$ ns. Encontrar la distancia propia entre las partículas antes de dar en el blanco.

Respuesta. $l_0 = v\Delta t / \sqrt{1 - (v/c)^2} = 17$ m.

6.17. Dos barras de longitud propia igual l_0 se mueven al encuentro una de otra paralelamente al eje horizontal común. En el sistema de referencia, ligado con una de las barras, el intervalo de tiempo entre los momentos de coincidencia de los extremos izquierdos y derechos de las barras resultó igual a Δt . ¿Cuál es la velocidad de una barra con relación a la otra?

Respuesta. $v = 2(l_0/\Delta t) / (1 + l_0/c\Delta t)^2$.

6.18. Dos partículas inestables se mueven en el sistema de referencia K por cierta recta en una misma dirección a la velocidad $v = 0,990 c$. En este sistema de referencia $l = 120$ m es la distancia entre ellas. En cierto momento ambas partículas se desintegran simultáneamente en el sistema de referencia, ligado con ellas. ¿Qué espacio de tiempo Δt entre los momentos de desintegración de ambas partículas se observó en el sistema K ? ¿Qué partícula se desintegró más tarde en el sistema K ?

Respuesta. La partícula que iba delante se desintegró más tarde en $\Delta t = l\beta/c(1 - \beta^2) = 20$ μ s, donde $\beta = v/c$.

6.19. Dos partículas se mueven al encuentro una de otra a velocidades $v_1 = 0,50 c$ y $v_2 = 0,75 c$, respecto de un sistema de referencia de laboratorio. Encontrar:

a) la velocidad de aproximación de las partículas en este sistema de referencia;

b) sus velocidades relativas.

Respuesta. a) $v = v_1 + v_2 = 1,25 c$,

b) $v = (v_1 + v_2) / (1 + v_1 v_2 / c^2) = 0,91 c$.

Para el capítulo 7

7.12. La densidad de un cuerpo en reposo es igual a ρ_0 . Encontrar la velocidad del sistema de referencia con relación al cuerpo dado, en el cual su densidad será $\eta = 25\%$ mayor que ρ_0 .

Respuesta. $v = c \sqrt{\eta(2v + \eta) / (1 + \eta)} = 0,6 c$. Aquí se ha empleado la definición de densidad como la razón entre la masa en reposo del cuerpo y su volumen.

7.13. Un protón se mueve con la impulsión $p = 10,0$ GeV/c, donde c es la velocidad de la luz. ¿En cuántos por ciento se diferencia la velocidad de este protón de la velocidad de la luz?

Respuesta. $(c - v)/c = 1 - [1 + (m_0 c/p)^2]^{-1/2} = 0,44\%$.

7.14. Una partícula de masa en reposo m_0 se mueve a lo largo del eje x del sistema K de referencia según la ley $x = \sqrt{a^2 + c^2 t^2}$, donde a es cierta constante, c es la velocidad de la luz, t es el tiempo. Encontrar la fuerza que actúa sobre la partícula en este sistema de referencia.

Respuesta. $F = m_0 c^2 / a$.

7.15. ¿Con qué valor de la velocidad la energía cinética de una partícula es igual a su energía en reposo?

Respuesta. $v = 1/2 c \sqrt{3} = 0,865 c$.

7.16. ¿Cuánta energía es necesario consumir teniendo en cuenta la unidad de masa en reposo, para comunicar a una nave cósmica que inicialmente estaba en reposo la velocidad $v = 0,980 c$?

Respuesta. $\Delta E_1 = [1/\sqrt{1-(v/c)^2} - 1] c^2 = 3,6 \cdot 10^{17} \text{ (J/kg)}$.

7.17. Encontrar la energía en reposo y la velocidad de una partícula, cuya energía cinética $T = 500 \text{ MeV}$ y la impulsión $p = 865 \text{ MeV}/c$, donde c es la velocidad de la luz.

Respuesta. $E_0 = (p^2 c^2 - T^2)/2T = 0,50 \text{ GeV}$, $v = 2pc^2 T / (p^2 c^2 + T^2) = 0,87c$.

7.18. Un haz de partículas relativistas de energía cinética T da sobre un blanco absorbente. La intensidad de la corriente en el haz es I , e y m_0 es la carga y la masa en reposo de cada partícula. Encontrar la fuerza de la presión del haz sobre el blanco y la potencia que en él se desprende.

Respuesta. $F = (I/ec) \sqrt{T(T + 2m_0 c^2)^2}$,
 $N = TI/e$.

7.19. Una partícula inmóvil de masa en reposo m_0 se desintegra en tres partículas con masas en reposos m_1 , m_2 y m_3 . Encontrar la mayor energía total que puede tener, por ejemplo, la partícula m_1 .

Respuesta. $E_{1 \text{ máx}} = [m_0^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2] c^2 / 2m_0$. La partícula tendrá la mayor energía en el caso, cuando la energía del sistema de las otras dos partículas m_2 y m_3 sea la menor, es decir, cuando ellas se muevan como un todo.

Apéndices

1. Movimiento de un punto en coordenadas polares

En las coordenadas polares ρ , φ la posición del punto A en un plano está determinada si se dan su distancia ρ desde el origen de referencia O (fig. 146, a) y el ángulo entre el radio vector del punto y la dirección elegida OO' , el origen de referencia de la coordenada angular φ .

Introducimos los vectores unitarios, o sea, los versores e_ρ y e_φ , ligados con el punto móvil A y dirigidos hacia el incremento de las coordenadas ρ y φ correspondientes, como se muestra en la

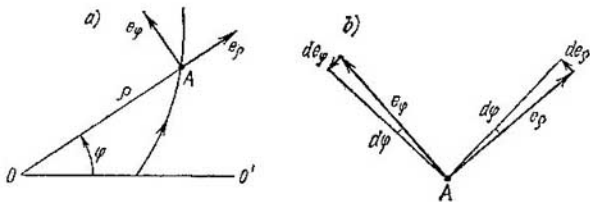


Fig. 146

fig. 146, a. A diferencia de los versores del sistema de coordenadas cartesiano, e_ρ y e_φ son *móviles* (con el movimiento del punto A ellos cambian su dirección). Encontremos de inmediato sus derivadas conforme al tiempo, ellas se necesitan más abajo. Con el movimiento del punto A en el intervalo de tiempo dt ambos versores giran en un mismo sentido a un mismo ángulo $d\varphi$ (fig. 146, b) y reciben el incremento:

$$de_\rho = 1 \cdot d\varphi \cdot e_\varphi; \quad de_\varphi = 1 \cdot d\varphi (-e_\rho).$$

Dividiendo ambas expresiones por dt , obtenemos:

$$\dot{e}_\rho = \dot{\varphi} e_\varphi; \quad \dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi} e_\rho, \quad (1)$$

donde el punto sobre la letra significa diferenciación conforme al tiempo.

Ahora encontramos la velocidad y la aceleración del punto A , escribiendo su radio vector ρ como

$$\rho = \rho e_\rho. \quad (2)$$

Velocidad v del punto. Diferenciamos (2) conforme al tiempo teniendo en cuenta (1):

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (3)$$

es decir, las proyecciones del vector \mathbf{v} sobre los versores \mathbf{e}_ρ y \mathbf{e}_φ son iguales a:

$$v_\rho = \dot{\rho}; \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi}, \quad (4)$$

y el módulo del vector de velocidad $v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2}$.

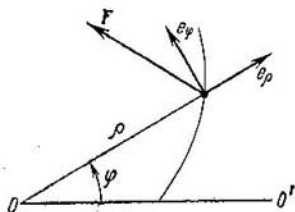


Fig. 147

Aceleración w del punto. Diferenciando una vez más (3) conforme al tiempo, obtenemos

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\mathbf{e}}_\rho + \frac{d}{dt} (\rho \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Teniendo en cuenta (1), después de simples transformaciones encontramos

$$\mathbf{w} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi, \quad (5)$$

es decir, las proyecciones del vector \mathbf{w} sobre los versores \mathbf{e}_ρ y \mathbf{e}_φ son iguales a:

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad (6)$$

$$w_\varphi = 2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}).$$

Ecuación fundamental de dinámica en coordenadas polares. La ecuación fundamental de dinámica $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$ en las proyecciones sobre los versores móviles \mathbf{e}_ρ y \mathbf{e}_φ se puede obtener fácilmente de inmediato, haciendo uso de las fórmulas (6):

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) &= F_\rho, \\ m \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) &= F_\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

donde F_ρ y F_φ son las proyecciones del vector \mathbf{F} sobre los versores \mathbf{e}_ρ y \mathbf{e}_φ (fig. 147). En esta figura $F_\rho < 0$ y $F_\varphi > 0$.

2. Sobre el problema de Kepler

Se llama de Kepler el problema del movimiento de una partícula en un campo central de fuerzas, que decrecen inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro del campo. A esta ley se someten las fuerzas de atracción newtoniana entre las masas puntuales (o los cuerpos que poseen simetría esférica), así como las fuerzas de Coulomb entre las cargas puntuales.

En este campo la energía potencial de la partícula $U = -\alpha/\rho$, donde α es una constante, ρ es la distancia desde el centro del campo. Examinemos el caso, cuando $\alpha > 0$, es decir, la fuerza que

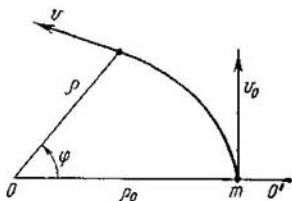


Fig. 148

actúa sobre la partícula de masa m está dirigida hacia el centro del campo (atracción) ¿Qué aspecto tendrá la trayectoria de la partícula en las coordenadas polares $\rho(\varphi)$, si $\rho(0) = \rho_0$ cuando $\varphi = 0$ y su velocidad es perpendicular al radio vector o igual a v_0 (fig. 148)?

Generalmente, para resolver este problema emplean las leyes de conservación de la energía y del momento de impulsión. En las coordenadas polares ρ , φ de estas leyes se deduce:

$$\frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{\rho} = E; \quad m\rho^2 \dot{\varphi} = L,$$

donde E y L es la energía mecánica total y el momento de impulsión de la partícula con relación al punto O , o sea, al centro del campo. Estas dos magnitudes se encuentran fácilmente de las condiciones iniciales.

La solución de estas ecuaciones se efectúa del siguiente modo. Al principio en la primera ecuación pasamos de la diferenciación conforme al tiempo a la diferenciación conforme a φ , esto se puede hacer con ayuda de la segunda ecuación: $dt = (m\rho^2/L) d\varphi$. Después separan las variables ρ , φ , es decir, reducen la expresión obtenida al tipo $d\varphi = f(\rho) d\rho$. Y finalmente, integran esta ecuación teniendo en cuenta las condiciones iniciales. El resultado de la integración nos da el resultado buscado $\rho(\varphi)$.

Aquí no vamos a reproducir detalladamente la marcha bastante voluminosa de la solución de estas ecuaciones (si esto se desea se puede encontrar casi en cualquier curso de física o mecánica teórica). Sólo nos limitamos al análisis de la solución obtenida, que

tiene el aspecto

$$\rho(\varphi) = \rho_0 / [a + (1 - a) \cos \varphi], \quad (1)$$

donde $a = \alpha / m \rho_0 v_0^2$.

De la matemática se sabe que la ecuación (1) determina una curva de segundo orden. En dependencia del valor del parámetro a ésta puede ser una elipse (circunferencia), una parábola o una hipérbola.

1. Vemos inmediatamente, que cuando $a = 1$ ρ no depende de φ , es decir, la trayectoria es una circunferencia. La partícula

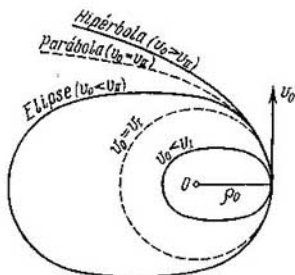


Fig. 149

va a tener esta trayectoria cuando la velocidad v_0 sea igual a

$$v_I = \sqrt{\alpha / m \rho_0}. \quad (2)$$

2. Para todos los valores del parámetro a , con los cuales es finita hasta $\varphi = \pi$, la trayectoria tendrá forma de elipse. Como se deduce de (1) cuando $\varphi = \pi$

$$\rho(\pi) = \rho_0 / (2a - 1).$$

De aquí se ve, que $\rho(\pi)$ va ser finita sólo cuando $2a > 1$, es decir, cuando la velocidad $v_0 < v_{II}$,

$$v_{II} = \sqrt{2\alpha / m \rho_0}. \quad (3)$$

3. Mas si $2a = 1$, es decir, $v_0 = v_{II}$, entonces la elipse degenera en parábola, la partícula no vuelve atrás.

4. Cuando $v_0 > v_{II}$ la trayectoria tendrá forma de hipérbola. Todos estos casos se muestran en la fig. 149. Se debe prestar atención a que el centro del campo para las órbitas elípticas coincide con uno de los focos de la elipse: cuando $v_0 < v_I$, con el foco posterior, cuando $v_0 > v_I$, con el anterior.

Señalemos, que la ecuación (1) describe, por ejemplo, la trayectoria de los planetas del Sistema Solar (con esto $\alpha = \gamma m M$, M es la masa del Sol). Conforme al movimiento de los aparatos cósmicos las velocidades v_I y v_{II} son la primera y la segunda velocidad cósmica respectivamente. Claro está, que sus valores dependen de la masa del cuerpo, que es la fuente del campo.

3. Demostración del teorema de Steiner

Teorema: el momento de inercia I de un sólido con relación al eje arbitrario z es igual al momento de inercia I_C de este sólido respecto al eje z_C , paralelo al dado y que pasa por el centro de inercia

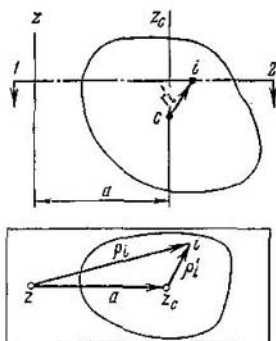


Fig. 150

cia del cuerpo, más el producto de la masa del cuerpo m por el cuadrado de la distancia a entre los ejes:

$$I = I_C + ma^2.$$

Demostración. Tracemos por el i -ésimo elemento del sólido un plano, perpendicular al eje z y en este plano, tres vectores: ρ_i , ρ'_i y a (fig. 150). Los primeros dos vectores caracterizan la posición del i -ésimo elemento del cuerpo con relación a los ejes z y z_C , y el vector a , la posición del eje z_C respecto al eje z . Haciendo uso de la ligazón entre estos vectores ($\rho_i = \rho'_i + a$), transformamos la expresión para el momento de inercia del cuerpo con relación al eje z :

$$I = \sum m_i \rho_i^2 = \sum m_i (\rho'_i + a)^2 = \sum m_i \rho_i'^2 + 2a \sum m_i \rho'_i + \sum m_i a^2.$$

La primera suma en el segundo miembro de esta igualdad es el momento de inercia del cuerpo I_C con relación al eje z_C , en tanto que la última suma es simplemente igual a ma^2 . Queda demostrar que la suma media es igual a cero.

Sea r'_i el radio vector del i -ésimo elemento del cuerpo con relación al centro de inercia, entonces $\sum m_i r'_i = 0$ respecto al último vector. Pero ρ'_i es el vector proyección del vector r'_i sobre el plano, perpendicular al eje z . De aquí se ve, que si el vector suma-

rio es igual a cero, también la suma de sus vectores-proyecciones sobre cualquier plano será igual a cero, es decir, $\sum m_i \rho_i = 0$. De ese modo el teorema queda demostrado.

4. Alfabeto griego

A, α — alfa	I, ι — iota	P, ρ — ro
B, β — beta	K, κ — kappa	Σ , σ — sigma
Γ , γ — gamma	Λ , λ — lambda	T, τ — tau
Δ , δ — delta	M, μ — my	Υ , υ — ypsilon
E, ϵ — epsilon	N, ν — ny	Φ , φ — fi
Z, ζ — zeta	Ξ , ξ — xi	X, χ — ji
H, η — eta	O, \omicron — omicron	Ψ , ψ — psi
$\Theta\theta$ — theta	Π , π — pi	Ω , ω — omega

5. Acerca de los vectores

Producto escalar de vectores:

$$ab = ba = ab \cos \alpha;$$

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Producto vectorial de vectores:

$$[ab] = -[ba]; |[ab]| = ab \sin \alpha;$$

$$[a, b + c] = [ab] + [ac].$$

El producto mixto o vectorial-escalar de tres vectores es un escalar y numéricamente es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre estos vectores:

$$a[bc] = b[ca] = c[ab];$$

$$a[bc] = -b[ac] = -c[ab].$$

Producto vectorial doble:

$$[a[bc]] = b(ac) - c(ab).$$

Producto de vectores en forma coordinado. Si

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3,$$

donde e_1, e_2, e_3 son los versores de coordenadas perpendiculares entre sí y que forman una terna derecha, entonces

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3;$$

$$[ab] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3.$$

Regla de diferenciación de los vectores que dependen de cierta variable escalar t :

$$\frac{d}{dt} (a + b) = \frac{da}{dt} + \frac{db}{dt};$$

$$\frac{d}{dt} (\alpha a) = \frac{d\alpha}{dt} a + \alpha \frac{da}{dt};$$

$$\frac{d}{dt} (ab) = \frac{da}{dt} b + a \frac{db}{dt};$$

$$\frac{d}{dt} [ab] = \left[\frac{da}{dt} b \right] + \left[a \frac{db}{dt} \right].$$

Gradiente de la función escalar φ :

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} i + \frac{\partial\varphi}{\partial y} j + \frac{\partial\varphi}{\partial z} k,$$

donde i, j, k son los versores de coordenados de los ejes x, y, z .

6. Constantes físicas

Velocidad de la luz en el vacío $c =$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ 2,998 \cdot 10^{10} \text{ cm/s} \end{array} \right.$
Constante de gravitación universal $\gamma =$	$\left\{ \begin{array}{l} 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) \\ 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3/(\text{g} \cdot \text{s}^2) \end{array} \right.$
Aceleración estándar de la caída libre $g =$	$\left\{ \begin{array}{l} 9,807 \text{ m/s}^2 \\ 980,7 \text{ cm/s}^2 \end{array} \right.$
Número de Avogadro $N_A =$	$\left\{ \begin{array}{l} 6,025 \cdot 10^{23} \text{ kmol}^{-1} \\ 6,025 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \end{array} \right.$
Carga elemental $e =$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ CGS} \end{array} \right.$
Masa en reposo del electrón $m_e =$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,911 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \\ 0,911 \cdot 10^{-27} \text{ g} \\ 0,511 \cdot \text{MeV} \end{array} \right.$
Carga específica del electrón $\frac{e}{m_e} =$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg} \\ 5,27 \cdot 10^{17} \text{ CGS} \end{array} \right.$
Masa en reposo del protón $m_p =$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ 1,672 \cdot 10^{-24} \text{ g} \end{array} \right.$
Unidad atómica de masa 1 u.a.m. =	$\left\{ \begin{array}{l} 1,660 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ 1,660 \cdot 10^{-24} \text{ g} \\ 931,4 \text{ MeV} \end{array} \right.$

Indice alfabético

- Aceleración 14
— angular 23
— axipetal 32
— de Coriolis 32
— normal 20
— tangencial 20
Acontecimiento 201
Acontecimientos casuales-
consecuentes 219, 222
- Brazo de una fuerza 152
— — — impulsión 151
- Campo 89
— de fuerzas 81
— — — estacionario 81
— — — potencial 81
Centro de inercia (masas) 123
— — — ecuación de su movi-
miento 124
Cinemática del sólido 20
— de un punto 13
Colisión absolutamente elásti-
ca 131
— — no elástica 131
— de dos partículas (relativis-
tas) 250
— endoenergética 137
— exoenergética 137
— frontal 132
— no elástica 137
— — frontal 133
- Condiciones iniciales 15
Coordenada de arco 18
Cuerpo rígido 11
- Diagrama espacio-tiempo 228
— vectorial de impulsiones 134
- Ecuación de Moscherski 141
— — momentos 152
— — — en el sistema C 167
— fundamental de dinámica 52
— — — — en coordenadas car-
tesianas 52
— — — — — las proyecio-
nes sobre la tangente y normal
54
— — — — — relativista 236
Einstein, postulados 199
— principio de relatividad 200
Eje de rotación instantáneo 28
Ejes libres 178
— principales de inercia 178
Energía cinética 92
— — de umbral 139
— — — un sólido 173, 175
— — relativista 239
— de reposo (propia) 242
— — umbral 259
— interna 128
— mecánica total 93, 103
— potencial 83, 97, 98
— total (relativista) 241

- Estado de un sistema 73
- Fuerza 44, 45 .
- central 82
 - centrífuga de inercia 58
 - conservativa 81
 - de Coriolis 58
 - — Coulomb 50
 - — gravedad 50, 51
 - — inercia 57
 - — resistencia 52
 - — rozamiento 52
 - disipativa 102
 - elástica 51
 - externa 102
 - extraña 93
 - interna 102
 - no potencial 102
 - normal 55
 - potencial 102
 - reactiva 141
 - resultante 169
 - tangencial 55
- Galileo, transformaciones de 42'
195
- principio de relatividad 42
- Giroscopio 180
- Gradiente 88
- Homogeneidad del espacio 42
- — tiempo 42
- Hook, ley de 52
- Impulsión 47, 117
- de un sistema 118
 - — una fuerza 118
 - del momento de fuerza 155
 - relativista 234
- Intensidad del campo 89
- Intervalo 221
- Isotropía del espacio 42
- Kepler, problema de 275
- Ley de conservación de la energía 105, 106
- — — — impulsión 120
 - — — — del momento de impulsión 160
 - — — — gravitación universal 59
 - — — — interacción de la masa y la energía 241
 - — — — Newton, primera 41
 - — — — segunda 46
 - — — — tercera 48
 - relativista de transformación de la impulsión 234
 - — — — — — — — velocidad 223
- Leyes de conservación 73
- — fuerzas 49
- Longitud propia 211
- Lorentz, contracción de 211, 219
- factor de 246
 - transformaciones de 214
 - — — para la impulsión y la energía 245
- Masa 49
- en reposo 233
 - reducida 129
 - relativista 233
- Mescherski, ecuación de 141
- Michelson, experimento de 197
- Momento de fuerza 153
- — — con relación al eje 158
 - — — impulsión 151
 - — — con relación al eje 157
 - — — del sistema 158
 - — — propio 166
 - — — inercia 171
 - — — de algunos cuerpos 171

- Movimiento de translación 21
 - — un cuerpo de masa variable 140
 - giratorio 21, 170
 - plano 25, 175

- Par de fuerzas 165
- Parámetro de impacto 136
- Postulados de Einstein 199
- Potencia 79
- Potencial 90
- Precesión de un giroscopio 180
- Principio de equivalencia 61
 - — largo alcance 48
 - — relatividad de Einstein 200
 - — — Galileo 42
 - — superposición 48, 90
- Punto material 11

- Recorrido 34
- Relación entre las magnitudes lineales y angulares 24
- Reloj luminoso 207
- Retardo del tiempo 206

- Simetría del tiempo y el espacio 41
 - Simultaneidad 203, 217
 - Sincronización de los relojes 201
 - Sistema C 8, 126
 - cerrado 97
 - conservativo 105

- Sistema de referencia 11
 - — — inercial 41
 - — — no inercial 41
 - del centro de inercia 127
 - heliocéntrico 41
 - Steiner, teorema de 172, 277
 - Superficie equipotencial 88

- Tiempo propio 208
- Trabajo 76
 - al girar un sólido 175
 - de la fuerza de gravedad 78
 - — — — elástica 77
 - — — — homogénea de gravedad 78
- Transformaciones de Galileo 42, 195
 - — la aceleración 30...33
 - — — velocidad 30...33
 - — — — relativista 223
 - — Lorentz 214
 - para la impulsión y la energía 245

- Umbral 138

- Vector axial 22
 - de translación 13
 - polar 22
- Velocidad angular 23
 - — de precesión 180
 - del centro de inercia 124
 - de un punto 18

A nuestros lectores:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moseú, I-110, GSP, URSS.

MIR publica:

Davidov A.

TEORIA DEL SOLIDO

El libro escrito por A. Davidov, Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas, expone las principales ideas físicas acerca de las excitaciones colectivas elementales: fonones, plasmones, magnones y excitones que surgen en los sólidos y se manifiestan en varios fenómenos cuando actúan recíprocamente con los fotones y entre sí. La exposición de los capítulos principales del libro está basada en la utilización del moderno aparato matemático de la teoría cuántica del cuerpo sólido: funciones de Green, funciones de correlación, método de la matriz de la densidad, etc. Para leer el libro no es necesario conocer previamente estos métodos porque en él se hallan expuestos, solamente se requieren los conocimientos matemáticos y físicos que suponen los cursos ordinarios universitarios. El libro familiariza al lector con los principales métodos utilizados en la teoría del sólido para describir los fenómenos físicos; sin embargo no pretende exponer los métodos experimentales. Los datos de estos últimos se dan solamente para ilustrar la teoría. La mayor atención se presta a la exposición de los fenómenos colectivos en los sólidos que poseen la simetría de transmisión.

La obra sirve de manual de información a los profesores y científicos, y, además, será útil para estudiantes de las facultades físicas.

Ajjezer A., Peletminski S.

MÉTODOS DE FÍSICA ESTADÍSTICA

La monografía que ofrecemos al lector, escrita por A. Ajjezer, miembro de la Academia de Ciencias de Ucrania y S. Peletminski, miembro-correspondiente de la Academia de Ciencias de Ucrania está dedicada a los métodos de la mecánica estadística; en la obra se tratan con un mismo criterio tanto las ecuaciones cinéticas para los sistemas clásicos y cuánticos como las ecuaciones de la física macroscópica, es decir las ecuaciones de la hidrodinámica para los líquidos ordinarios y superfluidos y las ecuaciones de la electrodinámica macroscópica.

La unidad del enfoque, en cuestiones aparentemente tan diferentes, se logra gracias a que los autores ponen como base de la exposición la idea de la descripción reducida de estados de desequilibrio de los sistemas macroscópicos. La descripción resumida surge de un modo natural en el proceso de la evolución de los sistemas físicos que poseen un número grande de grados de libertad y por eso parece igualmente natural y racional utilizar también esta descripción de los sistemas de desequilibrio para obtener ecuaciones cinéticas y ecuaciones de la hidrodinámica. Al atenerse con rigor a la idea de la descripción resumida, los autores estructuran su teoría en base a principios generales tales como el del debilitamiento de las correlaciones y las relaciones ergódicas vinculadas con las particularidades de la estructura de los hamiltonianos y con las propiedades de su simetría. Los autores prestan una atención especial al estudio de los sistemas cuánticos. Una clara exposición de los fundamentos de la mecánica cuántica que incluye la teoría de las mediciones, precede a la exposición de los problemas de la estadística cuántica. Los autores aplican además el método de la descripción resumida para investigar el comportamiento asintótico de magnitudes universales, tales como son las funciones de equilibrio de dos tiempos. Se presta una gran atención al examen de los sistemas con simetría espontáneamente perturbada, sobre todo al de los sistemas con simetría gradiente perturbada.

Koroliuk V., Portenko N., Skorojod A.,
Turbin A.

GUIA DE LA TEORIA DE LAS PROBABILIDADES
Y DE LA ESTADISTICA MATEMATICA

La presente guía abarca los problemas fundamentales de la teoría de las probabilidades, de la teoría de procesos aleatorios y de la estadística matemática (entre dichos problemas figuran definiciones de conceptos, axiomas, formulaciones de ciertos teoremas, fórmulas), como también la descripción de métodos e ideas que se utilizan en los razonamientos probabilísticos teóricos (las funciones características y transformaciones de Laplace, las representaciones espectrales para unos procesos estacionarios y campos homogéneos, el método de ecuaciones diferenciales en la teoría de los procesos de Márkov, la continuidad absoluta de las medidas en la estadística de procesos aleatorios, etc.). Los métodos probabilísticos teóricos están ilustrados con unos ejemplos simples que ayudan al lector a resolver los problemas de carácter práctico individualmente, reduciéndolos a un esquema probabilístico teórico conocido y sirviéndose de los métodos descritos en la guía.

El material de la guía se presenta en tres partes. En la primera parte se dan las definiciones principales: del espacio probabilístico, de la magnitud aleatoria, de la esperanza matemática, de las probabilidades y esperanzas matemáticas condicionales.

En la segunda parte se dan a conocer las nociones principales de la teoría de procesos aleatorios y de campos, como también las cuestiones de dicha teoría, esto es, la teoría L_2 , la investigación de la continuidad absoluta de las medidas correspondientes a los procesos aleatorios, los teoremas límites para ciertos procesos aleatorios.

En la tercera parte se exponen los conceptos principales de la estadística matemática y los métodos por cuyo intermedio se comprueban las hipótesis estadísticas y se construyen las estimaciones de los parámetros de distribuciones probabilísticas.

Movnin M., Israelit A., Rubashkin A.

FUNDAMENTOS DE LA MECANICA TECNICA

El libro contiene cuatro partes: estática, fundamentos de la resistencia de materiales, elementos de cinemática y dinámica, piezas de máquinas y mecanismos.

La asimilación activa de los métodos y procedimientos de la mecánica técnica: crea hábito y experiencia en formular y resolver problemas concretos. Esto determina, particularmente, el importante significado de la mecánica técnica como base para el estudio de disciplinas especializadas. En el texto se incluyen algunos elementos de enseñanza programada, pero conservando la forma tradicional de exposición del material básico de estudio. Al final de cada uno de los temas, lógicamente culminados, de las primeras tres partes del manual se formulan ejercicios destinados a organizar el trabajo individual de los estudiantes. En la parte final de libro se dan las respuestas e indicaciones a las cuestiones y ejercicios, lo que permite comprobar la certeza de las resoluciones y aclarar la causa de los errores.

En la cuarta parte—piezas de máquinas y mecanismos—se brindan ejemplos detalladamente elaborados, referentes al cálculo y construcción de las principales piezas y partes de máquinas. También se citan ejemplos típicos vinculados a las restantes partes del tema, que pueden servir de ayuda a los estudiantes externos.

Todas las resoluciones se efectúan en un principio en forma algebraica, introduciendo luego valores numéricos. Finalmente, se plantean problemas para ser resueltos individualmente. Estos problemas han sido elegidos de tal modo, que el estudiante, al resolverlos, pueda repetir y fortalecer los conceptos teóricos más importantes. En el texto se emplea el Sistema Internacional de Unidades (SI).

Perelman Ya.

FISICA RECREATIVA

En dos libros

¿Puede cogerse con la mano una bala disparada? ¿Por qué es imposible el «movimiento continuo»? ¿Cómo se produce el espejismo? ¿Quién inventó los invernaderos para las naves cósmicas? El libro 1 da contestación a éstas y muchas otras preguntas. El libro 2 no es continuación del primero. El lector encontrará en el varios proyectos de «móviles perpetuos», ilusiones ópticas interesantes y comentarios científicos a episodios de obras de Julio Verne, Wells, Mark Twain, Edgar Poe y otros. Los sencillos experimentos que se describen en este libro ayudan a profundizar en la esencia de procesos físicos que, aunque parecen ordinarios, proporcionan un rico material para reflexionar.

El libro está traducido a varios idiomas. El éxito de «Física recreativa» se debe al extraordinario talento de su autor, que ha sabido descubrir y recoger aquellos hechos y fenómenos de la vida cotidiana que encierran un sentido físico más profundo. Esta obra no es un libro de texto ni pretende servir de material de estudio. Su propósito es ayudar al mayor número de lectores posible a ver y comprender cómo se manifiestan las leyes físicas en aquellos procesos y fenómenos con que topamos a diario, pero que, generalmente, ni pensamos en ellos.