

ONDAS

J. BRESSAN

ONDAS

por

Oscar J. Bressan y Enrique Gaviola
Instituto de Física Balseiro
Centro Atómico Bariloche
Comisión Nacional de Energía Atómica
Bariloche, Río Negro
ARGENTINA

Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico
Departamento de Asuntos Científicos
Secretaría General de la
Organización de los Estados Americanos
Washington, D.C.-1975

© Copyright 1975 by
The General Secretariat of the
Organization of American States
Washington, D.C.

Derechos Reservados, 1975
Secretaría General de la
Organización de los Estados Americanos
Washington, D.C.

Esta monografía ha sido preparada para su publicación en el
Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General
de la Organización de los Estados Americanos.

Editora: Eva V. Chesneau

Asesor Técnico: Dr. Igor Saavedra
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile
Santiago, Chile

A los lectores

El programa de monografías científicas es una faceta de la vasta labor de la Organización de los Estados Americanos, a cargo del Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General de dicha Organización, a cuyo financiamiento contribuye en forma importante el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico.

Concebido por los Jefes de Estado Americanos en su Reunión celebrada en Punta del Este, Uruguay, en 1967, y cristalizado en las deliberaciones y mandatos de la Quinta Reunión del Consejo Interamericano Cultural, llevada a cabo en Maracay, Venezuela, en 1968, el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico es la expresión de las aspiraciones preconizadas por los Jefes de Estado Americanos en el sentido de poner la ciencia y la tecnología al servicio de los pueblos latinoamericanos.

Demostrando gran visión, dichos dignatarios reconocieron que la ciencia y la tecnología están transformando la estructura económica y social de muchas naciones y que, en esta hora, por ser instrumento indispensable de progreso en América Latina, necesitan un impulso sin precedentes.

El Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico es un complemento de los esfuerzos nacionales de los países latinoamericanos y se orienta hacia la adopción de medidas que permitan el fomento de la investigación, la enseñanza y la difusión de la ciencia y la tecnología; la formación y perfeccionamiento de personal científico; el intercambio de informaciones, y la transferencia y adaptación a los países latinoamericanos del conocimiento y las tecnologías generadas en otras regiones.

En el cumplimiento de estas premisas fundamentales, el programa de monografías representa una contribución directa a la enseñanza de las ciencias en niveles educativos que abarcan importantísimos sectores de la población y, al mismo tiempo, propugna la difusión del saber científico.

La colección de monografías científicas consta de cuatro series, en español y portugués, sobre temas de física, química, biología y matemática. Desde sus comienzos, estas obras se destinaron a profesores y alumnos de ciencias de enseñanza secundaria y de los primeros años de la universitaria; de éstos se tiene ya testimonio de su buena acogida.

Este prefacio brinda al Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos la ocasión de agradecer a los doctores Oscar J. Bressan y Enrique Gaviola, autores de esta monografía, y a quienes tengan el interés y buena voluntad de contribuir a su divulgación.

ÍNDICE

	Página
A los Lectores	iii
CAPÍTULO PRIMERO. INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO SEGUNDO. ONDAS EN UNA DIMENSIÓN	5
Ecuación de Movimiento	5
Movimientos Periódicos	7
Movimiento Circular Uniforme y su Proyección	7
Amplitud, Longitud de Onda, Ciclo, Frecuencia, Frecuencia Angular, Velocidad de Onda y Número de Onda	10
Composición de Movimientos Ondulatorios Paralelos y de Igual Sentido	14
- Diferentes Amplitudes	16
- Diferentes Fases	17
- Diferentes Amplitudes y Fases	18
- Diferentes Frecuencias	19
- Diferentes Frecuencias y Velocidades	20
Composición de Movimientos Ondulatorios Paralelos y de Sentido Contrario	20
- Movimientos Opuestos Iguales	21
- Diferentes Amplitudes	21
Composición de Movimientos Normales Entre Sí y del Mismo Sentido	23
- Diferentes Amplitudes	24
- Diferentes Amplitudes y Fases	25
- Distintas Frecuencias y Fases	26
- Distintas Velocidades	27
Movimiento Oscilatorio Amortiguado	27
CAPÍTULO TERCERO. ONDAS EN DOS Y TRES DIMENSIONES. .	31
Generalidades	31
Ondas en Membranas	31
- Simetría Plana	31
- Excitación Senoidal	34
- Simetría Cilíndrica	36
Ondas de Volumen	38
- Ondas Planas Tridimensionales	38
- Ondas Esféricas	41
- Ondas de Superficie	44
CAPÍTULO CUARTO. EFECTO DOPPLER. ONDAS DE CHOQUE. .	45
Medida de Velocidades y Frecuencias. Efecto Doppler en Sonido	45

- Fuente en Movimiento y Receptor en Reposo.....	45
- Fuente en Reposo y Receptor en Movimiento.....	48
- Fuente y Receptor en Movimiento.....	48
- Pared Reflectora en Movimiento.....	48
- Medio en Movimiento.....	49
Efecto Doppler en la Luz.....	49
- Efecto Cerenkov.....	50

CAPÍTULO QUINTO. CONDICIONES DE BORDE 51

Reflexión.....	51
- Reflexión de Una Onda Unidimensional.....	52
Refracción.....	55
Difracción.....	59
Dispersión.....	62

CAPÍTULO SEXTO. ENERGÍA Y MOMENTUM DE LAS ONDAS... 63

Movimiento Oscilatorio.....	63
- Fuerza que Produce Un Movimiento Armónico.....	65
Energía en Movimiento Ondulatorio de Cuerpos Elásticos.....	66
- Energía de Una Cadena Lineal.....	68
Fonones.....	70
Ondas Electromagnéticas.....	72
Fotones.....	74

VI

CAPÍTULO SÉPTIMO. APLICACIONES..... 77

Péndulo Libre de Torsión.....	77
Movimiento Oscilatorio Forzado.....	78
Circuito <i>RLC</i> Serie.....	79

Bibliografía..... 81

INTRODUCCIÓN

Los siguientes fenómenos parecen estar desvinculados entre sí:

- Las ondas que provoca en el agua una piedra al ser arrojada en un lago en calma.
- El sonido que emite una cuerda tensa al vibrar en el aire.
- La luz de las estrellas.
- La transmisión a distancias remotas de programas de radio (o de televisión).
- Los colores del arco iris.
- La imagen formada por una lente.
- La polarización de la luz.
- La holografía.

Sin embargo, todos ellos pueden ser descritos en conjunto por una teoría física coherente: la teoría de las ondas. Ésta permite, además, prever efectos nuevos.

De todos los fenómenos citados, el más fácil de observar, debido a la lentitud del movimiento, es el de las ondas de superficie que provoca una piedra arrojada en el agua. En este caso puede observarse la formación de ondas circulares que, al desplazarse, provocan un movimiento de vaivén en cualquier cosa que esté flotando en el agua (una hoja, por ejemplo). Este movimiento de vaivén es de sube y baja, casi sin desplazamiento horizontal, lo que permite deducir que el agua se mueve subiendo y bajando, en tanto que la onda avanza horizontalmente alejándose del lugar donde cayó la piedra. Es decir, la onda lleva la perturbación sin un movimiento de materia en su mismo sentido.

En el caso de la cuerda tensa, entre dos soportes rígidos, si ésta es suficientemente larga y se la golpea perpendicular a ella misma, puede mostrarse que cada punto está animado de un rápido movimiento de vaivén, normal a la cuerda, y que la perturbación u onda se desplaza longitudinalmente con más rapidez que en la superficie del agua. Nuevamente el desplazamiento de la onda, que lleva la perturbación, no implica un desplazamiento de materia en la misma dirección.

Si en vez de una cuerda tenemos una barra larga de metal, ocurre lo mismo, pero el desplazamiento transversal de materia es tan pequeño y la velocidad de la onda tan grande que no puede observarse a simple vista. En este caso, puede también provocarse una perturbación longitudinal, golpeando la barra en un extremo. En ambos casos la materia de la barra experimenta movimientos de vaivén, transversales o longitudinales, alrededor de la posición inicial, en tanto que la onda avanza longitudinalmente con gran velocidad.

Un ejemplo intuitivo, aunque no riguroso, consiste en formar una larga fila india de muchachos y pedirles que cuando vean que el muchacho

que está inmediatamente adelante comienza a moverse dé un paso a la derecha y luego otro a la izquierda volviendo a su posición original. De tal modo, al moverse el primero de la fila se irán moviendo todos sucesivamente hasta que, después de un tiempo, se mueva el último. En tal caso una "onda" o "perturbación" se habrá desplazado o transmitido del primero hasta el último a una cierta velocidad, mientras todos los muchachos quedan finalmente en su lugar inicial. En este caso el movimiento de cada uno fue en dirección transversal respecto a la dirección de la onda. También hubiera sido un movimiento transversal si cada muchacho hubiera saltado hacia arriba y vuelto a caer en el mismo lugar, en el momento en que hubiera visto que el de adelante hacía lo mismo. En ambos casos se dice que se trata de una onda transversal, aunque se observe que la onda se propaga longitudinalmente. Lo que es transversal es el movimiento de cada muchacho en particular. Si, en cambio, cada uno hubiera dado un paso hacia adelante y seguidamente hubiera retrocedido un paso (también después de hacerlo el inmediato anterior), entonces su movimiento sería longitudinal y al movimiento conjunto se le llama onda longitudinal. Los movimientos pueden sumarse y obtener así ondas transversales mezcladas con otras longitudinales, o producir varias perturbaciones diferentes en la misma fila. Si la perturbación u onda tarda sesenta segundos en llegar del primero al último, y el primer muchacho genera una onda nueva cada diez segundos, en la fila habrán simultáneamente seis ondas en progreso. Esto se llama un tren de ondas.

2 Estos ejemplos parecen sugerir que es indispensable un medio material (agua, metal, aire o muchachos) para hacer posible el movimiento de una onda. Esto no es siempre cierto. Las ondas luminosas se desplazan en el vacío. Esto es posible porque los campos eléctricos y magnéticos que constituyen la luz se pueden engendrar en el vacío. La historia de la física muestra que costó bastante tiempo y esfuerzo mental el llegar a esta conclusión. La búsqueda de un "éter" que sirviera de medio material de propagación de la luz en el vacío consumió muchos años de trabajo de eminentes científicos del siglo pasado y principios del actual. En el caso de las ondas electromagnéticas (radio, luz, rayos X, etc.), lo que oscila no es un punto material, sino la intensidad en los campos eléctrico y magnético.

Resumiendo, encontramos dos cosas bien diferenciadas y comunes a todos estos fenómenos: un medio perturbado que oscila en forma de vaivén y que en promedio no se desplaza (puede ser un medio material o un campo eléctrico o magnético en el vacío) y una onda que se desplaza en una dirección, con velocidad definida, y en general con aceleración nula (a menos que haya bordes o discontinuidades en el medio perturbado).

Para explicar en detalle la propagación espacial de una onda conviene recordar que en un medio material las partículas no están aisladas, sino que hay fuerzas que actúan entre unas partículas y otras. En el vacío, puede haber influencia entre elementos de volumen vecinos (por ejemplo, si hay un campo eléctrico). En el caso material, si se desplaza un grupo de partículas, éstas arrastran a sus vecinas en la misma dirección, pero con un retardo. Las partículas vecinas, a su vez, actúan frenando el movimiento de las partículas precedentes y acelerando las partículas vecinas del lado opuesto. El resultado es la propagación de una onda.

Dentro de un formalismo similar al de las ondas, usando la misma terminología, es posible estudiar otro tipo de fenómenos llamados periódicos:

- La oscilación de un péndulo.
- El movimiento de vaivén de un resorte.
- La rotación de un péndulo de torsión.
- Las ondas de la mecánica cuántica.

Es de destacar que el formalismo puede llegar a ser tan general que un fenómeno tan diferente como

- el latir del corazón

puede asimismo ser incluido en la lista.

La física se ocupa de diversas clases de fenómenos ondulatorios:

- i) ondas elásticas en medios materiales;
- ii) ondas electromagnéticas en el vacío y en ciertos medios materiales (dieléctricos);
- iii) funciones de ondas cuánticas de Schrödinger.

Aquí nos ocuparemos especialmente de las ondas elásticas en medios materiales y un poco de las ondas electromagnéticas y, de pasada, citaremos las ondas cuánticas. De las ondas elásticas en medios materiales se ocupan la mecánica de fluidos, la elasticidad y la acústica. De las ondas electromagnéticas se ocupan las teorías del electromagnetismo y de la óptica. De las funciones de ondas cuánticas trata la mecánica cuántica. Y todo puede estudiarse aplicando o no la teoría de la relatividad. Se obtiene mejor acuerdo con los resultados experimentales en el primer caso, mediante un álgebra generalmente más compleja.

ONDAS EN UNA DIMENSIÓN

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Interesa describir mediante una ecuación matemática el movimiento de un medio perturbado en el cual se propaga o desplaza una onda. Para fijar ideas, supongamos que se requiere describir el movimiento de un elemento de la barra metálica descrita en el capítulo anterior, que supondremos delgada y larga.

Para ello se recurre a un sistema de coordenadas. Sea éste un sistema cartesiano ortogonal x , y y z y el tiempo t . Supóngase que la barra tiene su origen en $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, y que se extiende a lo largo del semieje positivo z .

Si en cierto momento $t = 0$, se golpea con moderación el origen de la barra con un martillo en la dirección del eje x , se provoca en la barra una onda (como lo hacía la piedra en el agua), que se desplaza en el sentido de los valores crecientes de z .

La perturbación es transversal respecto al movimiento de la onda: mientras ésta avanza, el elemento de metal golpeado se mueve con un movimiento de vaivén más o menos complicado, pero sólo en la dirección del eje x , permaneciendo sus coordenadas y y z constantes.

Dadas las condiciones iniciales (golpe en el sentido del eje x), las vibraciones de todos los elementos de la barra serán sólo posibles en la dirección del eje x . Esto no es rigurosamente cierto, pero sí bastante aproximado. La coordenada x de cualquier punto o elemento diferencial de la barra en $z = 0$ satisface la ecuación:

$$X = f(t) \quad \text{para} \quad z = 0 \quad [1]$$

donde $f(t)$ puede ser casi cualquier función. Esta función, que describe al movimiento, variará al variar la intensidad del golpe, la forma de la sección de la barra, el material que la constituye, el tratamiento térmico del material, etc.

El movimiento de un elemento de metal en un z_1 cualquiera es igual al que ocurrió en $z = 0$ y $t = 0$, si bien en un instante posterior t_1 . (En ciertos casos la onda puede irse amortiguando y deformando a medida que avanza, pero esto no se tendrá por ahora en cuenta.)

El instante t_1 está relacionado con la velocidad v de propagación de la onda y con la coordenada z_1 de la partícula por la fórmula:

$$v = \frac{z_1}{t_1} = \frac{dz}{dt} = \text{constante} \quad [2]$$

La coordenada x del elemento de metal en un punto z_1 cualquiera experimentará un movimiento:

$$X(z_1) = f(\tau - t_1) \quad [3]$$

lo que muestra que se moverá igual que para $z = 0$, aunque en un tiempo t_1 posterior.

Teniendo en cuenta la definición de la velocidad de propagación de la onda, se puede dar la ecuación general del movimiento para cualquier punto z de la barra y en cualquier tiempo t , como:

$$X(z, t) = f(\tau - \frac{z}{v}) \quad [4]$$

La ecuación anterior describe así el movimiento de cada punto de la barra (para cualquier z) y tiene en cuenta el desplazamiento de la onda con una velocidad v .

Si la excitación (golpe inicial) hubiera tenido el sentido del eje y , se tendría, análogamente:

$$Y(z, t) = g(\tau - \frac{z}{v}) \quad [5]$$

6 donde, al igual que f , g es casi cualquier función que depende del golpe, del material, etc. También puede excitarse la onda en ambos ejes simultáneamente, golpeando la barra en una dirección cualquiera del plano x - y que no coincida ni con x ni con y . En este caso se tienen dos ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} X(z, t) &= f(\tau - \frac{z}{v}) \\ Y(z, t) &= g(\tau - \frac{z}{v}) \end{aligned} \quad [6]$$

Asimismo puede excitarse la barra longitudinalmente en $z = 0$ con un golpe en la dirección del eje x , con lo cual:

$$Z(z, t) = h(\tau - \frac{z}{v}) \quad [7]$$

donde nuevamente h es casi cualquier función. Por último, podría producirse una excitación según un cierto ángulo con el eje z , en cuyo caso la ecuación de movimiento correspondiente sería la suma de las ecuaciones [4], [5] y [7].

Ecuaciones de este mismo tipo sirven para describir aproximadamente el movimiento de los muchachos de la fila mencionada y, exactamente, ondas sonoras planas en medios materiales y los campos eléctricos y magnéticos de una onda luminosa plana. En cambio, para describir el movimiento de ondas acuáticas superficiales, hay que tener en cuenta el amortiguamiento. Lo mismo ocurre con ondas cilíndricas y esféricas, que estudiaremos luego.

Antes de seguir con la física del problema, veremos un tipo particular de excitación que, por aparecer con mucha frecuencia, merece un tratamiento detallado, y que da origen al llamado movimiento armónico, el más simple de los movimientos periódicos.

MOVIMIENTOS PERIÓDICOS

La sucesión periódica del día y de la noche impuso un ciclo diario a la mayor parte de la vida en el planeta y en particular al hombre. Otro fenómeno que ya llamó la atención del hombre primitivo es la reiteración cíclica del clima de la Tierra. Su importancia es grande, tanto en la vida vegetal como en la vida animal. Con el comienzo de la agricultura, resultó necesario tener muy en cuenta este ciclo.

La constatación experimental de la existencia de un ciclo similar, el del movimiento aparente y periódico del Sol en la eclíptica, dio origen a una ciencia, la astronomía, cuya primera contribución importante fue la creación del calendario.

Galileo observó en el movimiento de un péndulo la misma característica: un período definido y constante.

Podemos caracterizar los fenómenos periódicos por medio de dos definiciones:

Definición 1. Se llaman fenómenos periódicos a los que, después de un cierto intervalo de tiempo, se repiten exactamente en posición, velocidad y dirección.

Definición 2. Al mínimo intervalo de tiempo que transcurre hasta que se repiten las condiciones anteriores, se le llama período.

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME Y SU PROYECCIÓN

Veamos con detalle un fenómeno periódico, que es el movimiento circular uniforme y su proyección.

Sea una rueda rígida de radio R , que puede girar libremente alrededor de un eje que pasa por el centro O (Fig. 1). Se dice que cada punto de la rueda, excepto el centro, posee un movimiento circular uniforme si recorre arcos iguales en tiempos iguales. Esta condición puede expresarse en forma diferencial por:

$$\frac{ds}{dt} = \omega \quad [8]$$

donde ω es una constante llamada velocidad angular.

Cualquier punto de la rueda está animado de un movimiento periódico ya que, después de recorrer un arco igual a $2\pi r$, donde $r = 1, 2, 3, \dots$, vuelve a asumir exactamente los mismos valores iniciales, o sea la misma posición, la misma velocidad y la misma dirección que tenía al principio. Satisface así la definición 1 del movimiento periódico.

El período, que se representa por T , es el tiempo que tarda un punto cualquiera en recorrer un arco igual a 2π . Al integrar la ecuación [8] entre 0 y 2π , el período resulta:

$$2\pi = T\omega \quad \therefore \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [9]$$

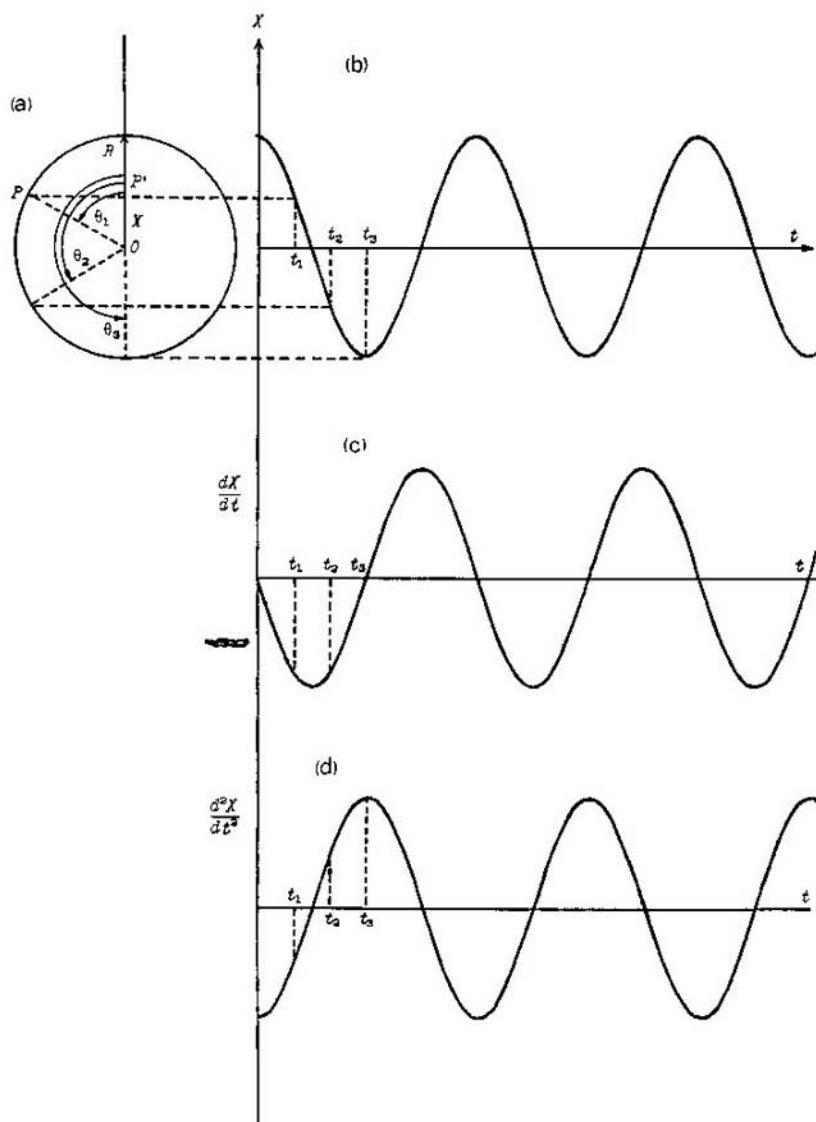


Fig. 1. Movimiento circular uniforme y su proyección: (a) Rueda de radio R que gira alrededor del punto O . $\overline{OP'}$ es la proyección sobre la recta \overline{OX} del radio \overline{OP} (ecuación [10]). (b) La proyección $\overline{OP'} = X$ en función de t . (c) Velocidad del punto proyectado. (d) Aceleración del punto proyectado. Obsérvese en particular la proyección, velocidad y aceleración en los tres ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 .

Cuanto mayor sea la velocidad angular, menor será el período. Nótese que T es el menor tiempo que tardan en repetirse las condiciones iniciales.

Supongamos una rueda en el plano. A todo punto P de la rueda corresponde otro punto P^1 , proyección del primero sobre el diámetro. Para describir el movimiento del punto P^1 sobre el diámetro, es necesario adoptar un origen de un sistema de coordenadas, y para ello lo más simple es tomar como origen la proyección del centro de la rueda, que llamaremos O . También debemos elegir el origen de la coordenada temporal (el origen de los tiempos). Si se elige arbitrariamente como tiempo cero ($t = 0$) el instante en que el ángulo θ es igual a cero (véase la Fig. 1), o sea $t = 0$ para $\theta = 0$, por trigonometría elemental resulta que el movimiento del punto P^1 se representa por la ecuación:

$$\overline{OP^1} = X = \overline{OP} \cdot \cos \theta \quad [10]$$

donde \overline{OP} es la distancia del punto P al centro O de la rueda.

Integrando la ecuación [8] entre O y θ , tendremos que:

$$\theta = \omega t$$

y reemplazando este valor de θ en la ecuación [10] se obtiene:

$$X = \overline{OP} \cdot \cos \omega t$$

Si el origen de la coordenada temporal se hubiera tomado en un tiempo t_0 anterior, con lo cual para $\theta = 0$ sería $t = t_0$, la integración de la ecuación [8] hubiera dado:

$$\theta = \omega(t - t_0) = \omega t - \varphi \quad [11]$$

donde:

$$\varphi = \omega t_0 \quad [12]$$

Definición 3. Al ángulo φ , que es función de la elección del origen del tiempo, se le llama *fase*.

La ecuación del movimiento del punto proyectado (P^1) es:

$$X = \overline{OP} \cos(\omega t - \varphi) \quad [13]$$

El movimiento representado por la ecuación [13] se llama movimiento armónico, senoidal, sinusoidal u oscilatorio armónico. La causa de tantos nombres es lo común de esta clase de movimiento en la física.

La velocidad del punto proyectado se calcula derivando la ecuación [13]

$$v = \frac{dX}{dt} = -\overline{OP} \omega \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) \quad [14]$$

La aceleración es:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2X}{dt^2} = -\overline{OP} \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad [15]$$

Vemos que la trayectoria (ecuación [13]), la velocidad (ecuación [14]) y la aceleración (ecuación [15]) del punto proyectado se expresan matemáticamente por las funciones trigonométricas seno y coseno. Esto se representa gráficamente en la figura 1. Obsérvese que:

- Si a la fase φ (ecuación [12]) se le resta $\pi/2$, lo que es seno pasa a ser coseno con un cambio de signo, y lo que es coseno pasa a ser seno con el mismo signo, lo que indica que es equivalente considerar el movimiento como senoidal o como cosenoidal. Para pasar de uno a otro basta un cambio de fase, o sea de t_0 .

- Cuando la ordenada es cero, el módulo de la velocidad del punto es máximo y la aceleración es nula.

- Cuando la ordenada del punto es máxima (el mayor X posible), la velocidad es nula y la aceleración toma el mayor valor negativo posible. Análogamente, cuando la ordenada es mínima (el menor X posible) la velocidad vuelve a ser nula y la aceleración es máxima positiva.

AMPLITUD, LONGITUD DE ONDA, CICLO, FRECUENCIA, FRECUENCIA ANGULAR, VELOCIDAD DE ONDA Y NÚMERO DE ONDA

Volvamos ahora al movimiento de un medio perturbado por una onda, y supongamos que la perturbación es provocada por una excitación senoidal, en vez de un golpe, que se aplica en el origen y en el sentido del eje x . Esto significa que se mueve el origen mediante la aplicación de una fuerza externa, haciéndole describir un movimiento armónico. El movimiento en el origen estará descrito entonces por la ecuación [1], pero la función $f(t)$ está definida por la ecuación [13]:

$$X(z=0, t) = A \cos(\omega t - \varphi) \quad [16]$$

Los parámetros que se usan en la ecuación que describe el movimiento tienen nombres particulares

Para $\omega t - \varphi = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$, es:

$$X(z=0) = A$$

Para $\omega t - \varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$, es:

$$X(z=0) = -A$$

donde A y $-A$ son respectivamente el máximo y el mínimo desplazamiento del medio perturbado respecto de su posición de equilibrio (o posición de reposo). Puede decirse también que A es el módulo del desplazamiento máximo que produce la perturbación. Por tal motivo,

Definición 4. Se llama *amplitud* del movimiento al módulo o desplazamiento máximo que sufre el medio perturbado respecto de la posición de equilibrio, que en el caso de la ecuación [16] es igual a A .

La amplitud tiene la misma dimensión que figura a la izquierda en la ecuación de movimiento. Así, en la ecuación [16], A tendría dimensión de espacio, porque ésta es la dimensión de X , pero si fuera la ecuación de una onda eléctrica, tendría dimensión de campo eléctrico, etc.

Aplicando la ecuación [4] en un punto cualquiera $z \neq 0$ y recordando que la excitación es senoidal, el movimiento del punto está expresado por:

$$X(z, t) = A \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - \varphi\right] \quad [17]$$

Observando esta ecuación [17], se ve que, para el caso de ondas, un cambio de fase es equivalente a un cambio en el origen del tiempo o un cambio en el origen de la coordenada z , por lo que la definición 3, que es correcta para el caso del movimiento circular uniforme, debe ser reexpresada para ondas:

Definición 3'. El ángulo φ es función del origen del tiempo y del origen de la coordenada espacial a lo largo de la cual se propaga la onda, y se llama *fase*.

El movimiento de todo el medio perturbado es periódico, por serlo la función coseno. Interesa ahora conocer el período, que según la definición 2 es el tiempo menor durante el cual se repiten exactamente la posición, la velocidad y el sentido. Si se observa la onda en un punto dado, el menor tiempo adicional necesario para que los valores se repitan (período T) es el requerido para que el argumento del coseno (o seno) aumente en 2π . Si partimos de un tiempo t_0 , el incremento T será tal que:

$$\omega\left(t_0 + T - \frac{z}{v}\right) - \varphi = \omega\left(t_0 - \frac{z}{v}\right) - \varphi + 2\pi$$

de donde se deduce:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [18]$$

Este tiempo se ha tomado para z constante, o sea para un punto dado; para cualquier otro punto el valor es el mismo. Este período es el mismo que se obtuvo para el movimiento circular uniforme (ecuación [9]).

En forma similar:

Definición 5. Se llama *longitud de onda* a la menor distancia, a partir de un instante dado, en la cual vuelven a repetirse la elongación, la velocidad y el sentido.

Esto ocurre cuando el incremento del espacio de z_0 a $z_0 + \lambda$ hace que el argumento del coseno (o seno) aumente en 2π .

$$\omega\left(t - \frac{z_0 + \lambda}{v}\right) - \varphi = \omega\left(t - \frac{z_0}{v}\right) - \varphi + 2\pi$$

de donde resulta:

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} \quad [19]$$

Esta distancia se ha tomado referida a un instante dado, pero para cualquier otro instante, su valor es el mismo.

Nótese la total simetría tiempo-espacio en la definición de período-longitud de onda, la que se ha destacado usando en su descripción la misma redacción.

Definición 6. Se llama *ciclo* al movimiento realizado durante un período.

Definición 7. El número de ciclos que se suceden en la unidad de tiempo se llama *frecuencia*. Ésta equivale al número de períodos por unidad de tiempo.

Es costumbre entre los físicos designar la frecuencia por la letra griega nu (ν) y en cambio los ingenieros la representan en general por la letra f .

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad [20]$$

De la ecuación [20] resulta que la frecuencia es proporcional a ω , que en el caso del movimiento circular uniforme es la velocidad angular, pero que ahora la podemos definir, para el caso de ondas, como:

Definición 8. Se llama *frecuencia angular* o *circular*, o *pulsación*, al producto de la frecuencia por 2π .

Definición 9. A la velocidad v , descrita por la ecuación [2], se la llama *velocidad de propagación de la onda* o *velocidad de onda*.

Esta velocidad depende del medio en que la onda se propague, del fenómeno físico que constituye la onda (sonido, luz, etc.), del tipo de onda (transversal o longitudinal) y de la frecuencia. Así, una onda sonora tiene más velocidad en el vidrio que en el agua, menos velocidad en el aire, y en el vacío no se propaga. Una onda de luz, al contrario, tiene máxima velocidad en el vacío y disminuye progresivamente en el aire, en el agua y en el vidrio. En un sólido, donde existen ondas transversales y longitudinales, las velocidades de propagación son distintas. La velocidad en medios materiales depende de la frecuencia. En el vidrio es menor la velocidad de la luz de color azul que la del rojo.

La velocidad de las ondas sonoras en sólidos, líquidos o gases es función de los parámetros elásticos de cada medio, y la pasamos a definir. En el caso de un sólido isotrópico, si se estira una barra, fijando un extremo y aplicando fuerzas en el otro, se puede medir un alargamiento que dentro de ciertos límites (límites de la ley de Hooke) es directamente proporcional a la fuerza aplicada y a la longitud de la barra e inversamente proporcional a la sección:

$$\frac{\text{Fuerza aplicada}}{\text{Sección}} = E \frac{\text{Alargamiento}}{\text{Longitud barra}}$$

o, en forma diferencial:

$$\frac{dF}{S} = E \frac{dl}{l} \quad [21]$$

donde E es una constante que varía de material a material, y se llama módulo de Young. Tiene dimensiones de fuerza por cm^{-2} .

Simultáneamente, al alargar la barra, su diámetro varía. Esta variación es negativa en todos los sólidos (a mayor estiramiento, menor diámetro) y se expresa por la relación (para el caso de la barra):

$$\frac{\text{Variación del diámetro}}{\text{diámetro}} = \frac{\Delta d}{d} = -\sigma \frac{\Delta l}{l} \quad [22]$$

donde σ es el parámetro adimensional de Poisson, que en la práctica está comprendido entre 0 y $\frac{1}{2}$.

De los parámetros E y σ , puede deducirse la velocidad de las ondas longitudinales en un sólido, v_l , que se expresa por:

$$v_l = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}} \quad [23]$$

y la velocidad de las ondas transversales, v_t :

$$v_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}} \quad [24]$$

donde ρ es la densidad del sólido. Es inmediato que $v_l > v_t$, ya que:

$$\frac{v_l}{v_t} = \sqrt{\frac{2(1-\sigma)}{(1-2\sigma)}} > 1$$

para $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$. E y σ pueden medirse estática o dinámicamente. Se comprueba que, en este caso, ambos dependen de la frecuencia, con lo cual también v_l y v_t dependen de la frecuencia.

El módulo de Young de los gases podría medirse mediante un cilindro lleno de gas y provisto de un émbolo que pudiera moverse libremente en función de una fuerza aplicada. En este caso, siempre y cuando no haya intercambio de energía por transferencia de calor del medio ambiente al gas, se tiene:

$$\frac{dF}{S} = dP$$

donde F es la presión. Siendo:

$$\rho = \text{masa/volumen} = \text{masa}/(S \cdot l)$$

$$d\rho = -\frac{\text{masa}}{\text{sección} \cdot l^2} dl = -\rho \frac{dl}{l}$$

se llega a:

$$E = l \frac{dF}{dl} = -\rho \cdot \frac{dP}{d\rho}$$

En un gas sólo son posibles ondas longitudinales y el parámetro de Poisson es nulo. Por lo tanto, reemplazando en la ecuación [23]:

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad [25]$$

que es la velocidad de onda en los gases, considerando que el proceso es adiabático.

En líquidos muy poco viscosos no hay ondas transversales y ofrecen un comportamiento similar al de los gases. En líquidos muy viscosos

(vidrio, brea) son posibles ondas longitudinales y transversales, y coexisten ambos tipos de velocidades. En consecuencia, también desde el punto de vista de las ondas sonoras o elásticas, los líquidos son estados de transición entre gases y sólidos.

Otro parámetro de las ondas, muchas veces útil, es el número de onda, que se define así:

Definición 10. Se llama *número de onda* (k) al cociente entre la frecuencia angular y la velocidad de propagación de la onda:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad [26]$$

y que puede entenderse como 2π veces el número de longitudes de onda contenidas por unidad de longitud. Usando el parámetro k , la ecuación [17] puede escribirse:

$$X(z, t) = A \cos(\omega t - kz - \varphi) \quad [27]$$

que es una forma usada con frecuencia.

Un dato importante en el estudio de las ondas, es el sentido de éstas. Si tenemos en frente una barra horizontal muy larga y la sometemos a una excitación senoidal en el centro, y suponemos que no hay reflexión de onda en los extremos de la barra, la onda avanzará de izquierda a derecha en la mitad derecha y de derecha a izquierda en la otra mitad. Si se observa una sola partícula, no es posible darse cuenta del sentido del movimiento de la onda, ya que oscilará en igual forma, independientemente de que la onda avance hacia la izquierda o hacia la derecha; pero si miramos un entorno de la misma, las cosas cambian, pues se observa un desplazamiento, que se mantiene constante, en una sola dirección: la dirección de la onda. Así, por ejemplo, si la onda avanza en el sentido de z creciente el movimiento se describe por la ecuación [27], lo que indica que el desplazamiento se mantiene constante si kz crece igual que ωt , es decir, si $z = \omega t/k$.

Si en cambio la onda avanza hacia valores decrecientes de z , la ecuación es:

$$X(z, t) = A \cdot \cos(\omega t + kz - \varphi) \quad [28]$$

Para mantener ahora constante el argumento del coseno es necesario que z decrezca al aumentar el tiempo. El sentido de una onda, pues, está indicado por el signo del segundo término del argumento del coseno (ecuaciones [27] y [28]).

En la Tabla I se resumen los diferentes parámetros definidos, con sus nombres y dimensiones, y se dan las relaciones posibles entre ellos.

COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS ONDULATORIOS PARALELOS Y DE IGUAL SENTIDO

En todos los ejemplos citados, las ondas tienen la importante propiedad de ser sumables. Esto quiere decir que si un medio es perturbado simultáneamente por dos o más ondas distintas, el movimiento resultante

Tabla I. Parámetros de la Ecuación de Onda: Sus Dimensiones y Relaciones Posibles

Nombre	Abreviatura	Dimensión	Variable Independiente									
			A	φ	\mathcal{T}	λ	$\nu(f)$	w	v	k		
Amplitud	A =	La misma que figure a la izquierda de la ecuación	A	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Fase	φ =	Ángulo	-	φ	-	-	-	-	-	-	-	-
Período	\mathcal{T} =	Tiempo	-	-	\mathcal{T}	$\frac{\lambda}{v}$	$\frac{1}{\nu}$	$\frac{1}{\nu}$	$\frac{2\pi}{w}$	$\frac{\lambda}{v}$	$\frac{2\pi}{k}$	$\frac{2\pi}{(k \cdot v)}$
Longitud de onda	λ =	Espacio	-	-	$v\mathcal{T}$	λ	$\frac{v}{\lambda}$	$\frac{v}{\lambda}$	$\frac{v}{2\pi w}$	$\frac{v}{\lambda}$	$\frac{v}{k}$	$\frac{2\pi}{k}$
Frecuencia	ν =	Tiempo ⁻¹	-	-	$\frac{1}{\mathcal{T}}$	$\frac{v}{\lambda}$	ν	ν	$\frac{w}{2\pi}$	$\frac{v}{\lambda}$	$k \cdot v$	$\frac{k v}{2\pi}$
Pulsación	w =	Tiempo ⁻¹	-	-	$\frac{2\pi}{\mathcal{T}}$	$2\pi \frac{v}{\lambda}$	$2\pi \nu$	$2\pi \nu$	w	$k \cdot v$	$k v$	$k v$
Velocidad de onda	v =	Espacio x Tiempo ⁻¹	-	-	$\frac{\lambda}{\mathcal{T}}$	$\lambda \nu$	$\lambda \nu$	$\lambda \nu$	$\frac{w}{k}$	v	$k \cdot v$	$\frac{w}{k}$
Número de onda	k =	Espacio ⁻¹	-	-	$\frac{2\pi}{(\mathcal{T} \cdot v)}$	$\frac{2\pi}{\lambda}$	$2\pi \frac{\nu}{v}$	$2\pi \frac{\nu}{v}$	$\frac{w}{v}$	$\frac{w}{v}$	$k \cdot v$	k

Variable Dependiente

será igual a la suma de los movimientos individuales. Usamos la palabra movimiento por simplicidad, pero debemos recordar que en el caso de la luz no hay movimiento material alguno, sino variaciones de la intensidad de los campos eléctrico y magnético.

Esta propiedad de los movimientos ondulatorios se llama *principio de superposición*, y explica los efectos más importantes, a veces curiosos y casi paradójicos, que ocurren con las ondas. El movimiento que resulta de la suma de ondas se llama indistintamente "composición de ondas", "composición de movimientos ondulatorios" o "composición de oscilaciones".

Trataremos primero la composición de movimientos ondulatorios paralelos y del mismo signo. Se llaman paralelos, porque todos los movimientos del medio ocurren a lo largo del mismo eje que, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que es el eje x . Y del mismo sentido, porque sólo se suman ahora ondas cuya velocidad tiene el mismo signo.

En general, si tenemos varios movimientos ondulatorios X_1, X_2, X_3, \dots cada uno de los cuales se distingue con un subíndice 1, 2, 3, \dots , n , que tienen respectivamente amplitudes: A_1, A_2, A_3, \dots , frecuencias: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$, velocidades de onda: v_1, v_2, v_3, \dots , y fases: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, el movimiento total resultante es:

16

$$\begin{aligned} X(x, t) &= X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \\ &= \sum_{i=1}^n A_i \cos[\omega_i(t - \frac{x}{v_i}) - \varphi_i] \end{aligned} \quad [29]$$

y ésta es la composición más general posible, que expresa, en forma de ecuación, el principio de superposición.

Estudiemos casos particulares en los que, por simplicidad, sólo haya que sumar dos movimientos ondulatorios, que es el caso que se presenta en la práctica con mayor frecuencia y que nos permitirá sacar conclusiones interesantes.

Diferentes Amplitudes

Supónganse dos movimientos X_1 y X_2 , cuyos parámetros son iguales, excepto la amplitud. La suma de sus movimientos es:

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= X_1 + X_2 = A_1 \cos[\omega(t - \frac{x}{v}) - \varphi] + \\ &+ A_2 \cos[\omega(t - \frac{x}{v}) - \varphi] = \\ &= (A_1 + A_2) \cos[\omega(t - \frac{x}{v}) - \varphi] \end{aligned} \quad [30]$$

Vemos que la composición sólo modifica la amplitud, pues la nueva amplitud es la suma de las amplitudes individuales, y la frecuencia, la velocidad de onda y la fase del movimiento suman siguen siendo las de cada movimiento por separado.

De la estructura de la misma ecuación [30] se infiere que la suma de tres o más movimientos ondulatorios, donde sólo la amplitud varíe, tendrá meramente como consecuencia una suma de amplitudes. Esto significa que el movimiento total es reforzado con la contribución de cada uno en particular.

Diferentes Fases

Sean ahora dos movimientos X_1 y X_2 , donde $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $A_1 = A_2 = A$, $v_1 = v_2 = v$, si bien $\varphi_1 \neq \varphi_2$. El movimiento suma o resultante será:

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= X_1 + X_2 = A \left[\cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \varphi_1 \right] + \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \varphi_2 \right] \right] = \\ &= A \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \cos \varphi_1 + \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \sin \varphi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \cos \varphi_2 + \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \sin \varphi_2 \right\} = \\ &= A \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] [\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2] + \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] [\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2] \right\} = \\ &= A \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \cdot 2 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] 2 \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right\} = \\ &= 2A \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \cdot \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right] \end{aligned}$$

Como φ_1 y φ_2 son constantes, se puede definir una nueva constante B :

$$B = 2A \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \quad [31]$$

con lo cual:

$$X_{1,2} = B \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right] \quad [32]$$

Vemos que el movimiento suma es un movimiento armónico de cada una de las partículas del medio, con igual frecuencia que cada uno de los movimientos individuales, si bien con distinta fase (la media aritmética de las fases) y distinta amplitud (ecuación [31]). En el caso particular en que $\varphi_1 = \varphi_2$, se tiene el movimiento resultante con amplitud doble e igual fase que cada uno de los movimientos individuales. Es un caso particular de suma de movimientos de distinta amplitud (ecuación [30]).

Cuando $\omega_2 - \varphi_1 = \pi$ se tiene que:

$$B = 2A \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 2A \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

o sea que la amplitud es nula; ninguna partícula se moverá, no existirá onda en todo el medio. Parece una paradoja que sumando dos ondas distintas de cero, el resultado sea idénticamente nulo. Para cualquier caso intermedio $0 \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \pi$, se tiene también una amplitud intermedia $2A \geq B \geq 0$.

Este fenómeno se llama interferencia y es costumbre designarla como "destructiva" cuando $B < A$ y "constructiva" cuando $B > A$.

Diferentes Amplitudes y Fases

Sean dos movimientos X_1 y X_2 , donde $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $A_1 \neq A_2$, $v_1 = v_2 = v$ y $\varphi_1 \neq \varphi_2$. La ecuación del movimiento suma será:

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= X_1 + X_2 = A_1 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - \varphi_1\right] + A_2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - \varphi_2\right] = \\ &= A_1\left[\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] \cos \varphi_1 + \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] \sin \varphi_1\right] + \\ &\quad + A_2\left[\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] \cos \varphi_2 + \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] \sin \varphi_2\right] = \\ &= (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] + \\ &\quad + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] \end{aligned}$$

18

Definimos nuevas constantes B y Ψ por medio del siguiente sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 &= B \cos \Psi \\ A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 &= B \sin \Psi \end{aligned}$$

que puede resolverse fácilmente, elevando al cuadrado y sumando para obtener B y dividiendo una por la otra para hallar Ψ , y se obtiene:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2} \\ \Psi &= \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \end{aligned}$$

con lo cual la ecuación del movimiento suma se expresa:

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= B \cos \Psi \cos \omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + B \sin \Psi \sin \omega\left(t - \frac{z}{v}\right) = \\ &= B \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - \Psi\right] \end{aligned} \quad [33]$$

Resulta de nuevo un caso de interferencia, ya que la ecuación [33] describe un movimiento armónico con una nueva amplitud y una nueva fase. Nunca se encontrará ahora interferencia destructiva total (si $A_1 \neq A_2$, B nunca será nulo). Como ejercicio, pueden volver a encontrarse las fórmulas [32] y [30], si $A_1 = A_2$ o si $\varphi_1 = \varphi_2$.

Diferentes Frecuencias

Sean ahora $A_1 = A_2 = A$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $v_1 = v_2 = v$, pero $\omega_1 \neq \omega_2$. La suma es:

$$X_{1,2} = X_1 + X_2 = A \cos\left[\omega_1\left(t - \frac{z}{v}\right) - \varphi\right] + A \cos\left[\omega_2\left(t - \frac{z}{v}\right) - \varphi\right]$$

Siguiendo un proceso similar al de la deducción de la ecuación [32] se llega a:

$$X_{1,2} = 2A \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\left(t - \frac{z}{v}\right) - \varphi\right] \quad [34]$$

Este resultado puede interpretarse como la oscilación de una partícula con una frecuencia $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ y con una amplitud que en cada punto varía armónicamente con el tiempo, con una frecuencia $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$. Si las frecuencias son iguales, se vuelve a obtener la ecuación [30] con $A_1 = A_2$, pero si son cercanamente iguales, o sea $\omega_1 \approx \omega_2$, entonces $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1$ y $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ es pequeña, con lo cual la amplitud varía lentamente con respecto al tiempo, como se esquematiza en la figura 2. Este efecto se llama batido, y se aplica frecuentemente en electrónica, por ejemplo en la detección superheterodina.

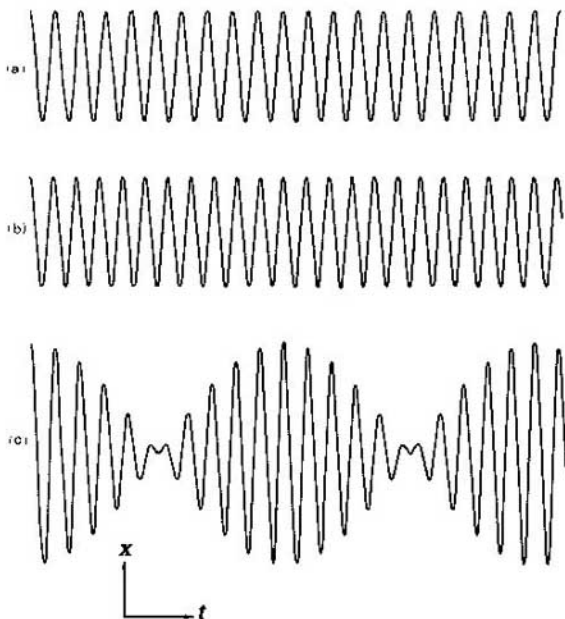


Fig. 2. Batido: Composición de dos movimientos oscilatorios de frecuencias levemente diferentes. (a) Movimiento de frecuencia ω . (b) Movimiento de frecuencia ω' , mayor en un diez por ciento que ω . (c) Suma de los dos movimientos anteriores.

Diferentes Frecuencias y Velocidades

No tiene sentido práctico suponer que sólo la velocidad varía y que la frecuencia permanece constante. Esto se debe a que si suponemos ondas en medios homogéneos, la velocidad varía (y no siempre) sólo si varía la frecuencia. Por eso se considera ahora el caso en que varíen simultáneamente la frecuencia y la velocidad de la onda.

Entonces, si $\omega_1 \neq \omega_2$, $v_1 \neq v_2$, manteniendo $A_1 = A_2 = A$ y $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Si se hace el cambio de parámetro: $k_1 = \frac{\omega_1}{v_1}$, $k_2 = \frac{\omega_2}{v_2}$ se tendrá:

$$X_{1,2} = A \cos(\omega_1 t - k_1 z - \varphi) + A \cos(\omega_2 t - k_2 z - \varphi)$$

Para llegar a una forma más compacta, es conveniente hacer el siguiente cambio de parámetros:

$$\begin{aligned} \omega_s &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} & \omega_a &= \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \\ k_s &= \frac{k_1 + k_2}{2} & k_a &= \frac{k_1 - k_2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= X_1 + X_2 = A \cos(\omega_s t + \omega_a t - \varphi - k_s z - k_a z) + \\ &+ A \cos(\omega_s t - \omega_a t - \varphi - k_s z + k_a z) = \\ &= 2A \cos(\omega_s t - k_s z - \varphi) \cdot \cos(\omega_a t - k_a z) \end{aligned} \quad [35]$$

y el resultado es similar al de la ecuación [34], y ocurre un batido cuando las frecuencias son cercanamente iguales.

Cuando dos rayos de luz de diferente frecuencia (color) se propagan en un vidrio, sus velocidades son distintas (véase dispersión). Si los rayos son paralelos y de igual sentido, el campo eléctrico (y el magnético) resultante total está dado por la ecuación [35].

No vale la pena calcular el caso general en el que varían la amplitud, la fase y la frecuencia simultáneamente, porque el resultado es simplemente una mezcla de interferencia y de batido. Por otra parte, su cálculo matemático es relativamente sencillo, sin aportar técnica alguna nueva.

Es fácil sumar tres o más movimientos ondulatorios cuando sólo varía la amplitud (ecuación [30]); también es sencillo hacerlo cuando varían la fase, o la amplitud y la fase simultáneamente, ya que vuelven a obtenerse ecuaciones del mismo tipo que las [32] y [33]. En cambio, la suma de tres o más ondas de diferente frecuencia, o de diferente frecuencia y velocidad, da como resultado ecuaciones de distinta forma que las [34] y [35], apareciendo nuevos factores que complican el cálculo.

COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS ONDULATORIOS PARALELOS Y DE SENTIDO CONTRARIO

Consideremos la suma de dos movimientos ondulatorios paralelos, pero de sentido contrario.

Movimientos Opuestos Iguales

Comencemos por el caso más sencillo, o sea $A_1 = A_2 = A$; $u_1 = u_2 = u$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$; y $v_1 = -v_2 = v$:

$$X_{1,2} = X_1 + X_2 = A \left\{ \cos \left[u \left(t - \frac{z}{v} \right) - \varphi \right] + \cos \left[u \left(t + \frac{z}{v} \right) - \varphi \right] \right\}$$

Del mismo modo como se dedujo la ecuación [32], se llega a:

$$X_{1,2} = 2A \cos \frac{u}{v} z \cdot \cos(ut - \varphi) \quad [36]$$

Aquí se obtiene otro resultado curioso. Se ha separado el movimiento en el producto de un coseno que depende del espacio y no del tiempo, y de un coseno que depende del tiempo y no del espacio. Esto puede escribirse así:

$$X_{1,2} = B(z) \cdot \cos(ut - \varphi)$$

donde

$$B(z) = 2A \cos \frac{u}{v} z$$

Todas las partículas se mueven armónicamente, pero cada una con una amplitud propia B que depende de su coordenada z . El módulo de esta amplitud B varía desde $2A$ en aquellas partículas donde:

$$z = n \pi \frac{v}{u} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

hasta cero en las partículas cuya coordenada z vale:

$$z = m \frac{\pi v}{u} \quad m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

El movimiento suma se esquematiza en las figuras 3 y 4. Cuando ocurre este tipo de movimiento, no es posible apreciar ni un avance ni un retroceso de la onda. Es decir, no existe sentido de propagación de la onda, porque las oscilaciones son estacionarias. Por ello las ondas de este tipo se llaman "ondas estacionarias". Estas ondas se producen, por ejemplo, en el caso de reflexión total de una onda en un espejo plano normal.

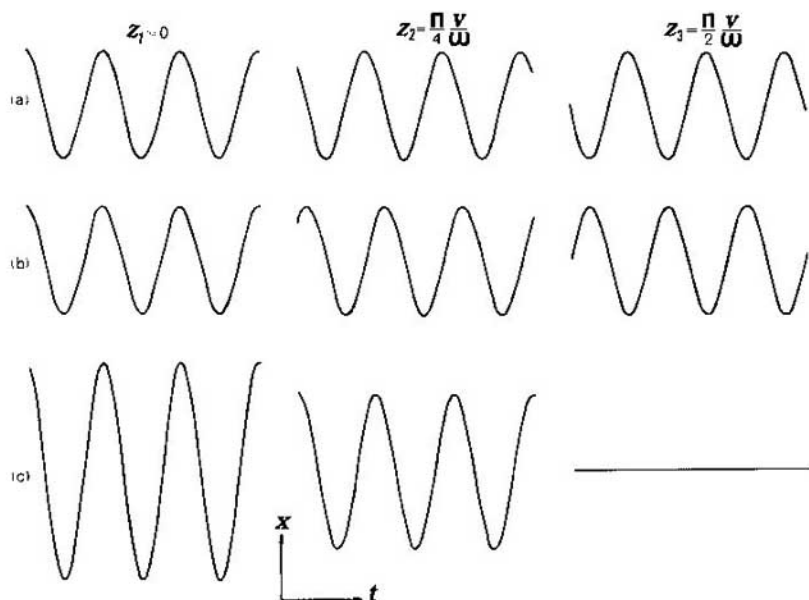
Diferentes Amplitudes

Si las ondas (1 y 2) paralelas y opuestas no tienen igual amplitud (por ejemplo, sea $A_2 > A_1$), se puede descomponer la onda de amplitud mayor en dos ondas: una de amplitud igual a la opuesta (A_1) y otra de amplitud igual a la diferencia ($A_2 - A_1$). El resultado es una onda estacionaria superpuesta a la onda diferencia:

$$X_{1,2} = 2A_1 \cos \frac{u}{v} z \cdot \cos(ut - \varphi) + (A_2 - A_1) \cos \left[u \left(t - \frac{z}{v} \right) - \varphi \right] \quad [37]$$

Se ha supuesto que la onda (2) se propaga en el sentido creciente de z . Este caso se produce cuando se tiene reflexión parcial de ondas planas en un espejo normal.

No se estudian otros casos, tales como la suma de ondas de diferente frecuencia, porque son pocas sus aplicaciones prácticas, ya que sólo se aplican a casos muy especiales (por ejemplo, reflexión en una superficie



22

Fig. 3. Ondas estacionarias: Composición de dos movimientos oscilatorios iguales y opuestos para tres valores diferentes de la ordenada z . (a) Movimiento con velocidad v . (b) Movimiento con velocidad $-v$. (c) Composición de los dos movimientos anteriores.

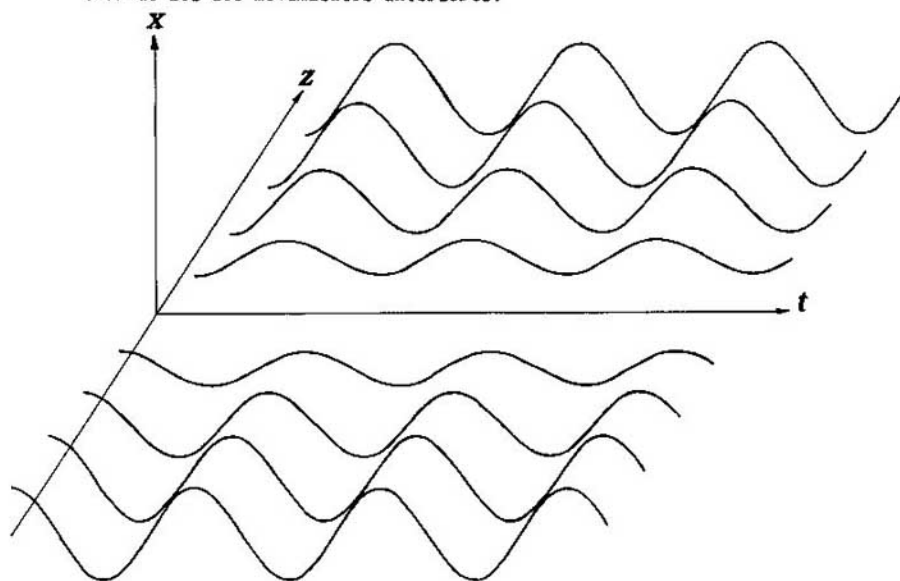


Fig. 4. Ondas estacionarias: Gráfico x, z, t de la ecuación [36]. Compárese con la figura 3.

en movimiento con cambio de frecuencia por el efecto Doppler), y por otra parte no ofrece mayores dificultades de cálculo.

COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS ONDULATORIOS NORMALES ENTRE SÍ Y DEL MISMO SENTIDO

Consideramos ahora dos movimientos ondulatorios normales entre sí, es decir que un movimiento tiene una dirección dada (por ejemplo, la del eje x) y el otro, una dirección normal (sea la del eje y), y que en ambos la onda se desplaza a lo largo del eje z .

El principio de superposición sigue siendo válido, aunque los movimientos son normales entre sí. Por ello el movimiento resultante será la suma vectorial de:

$$X = A_x \cos[\omega_x(t - \frac{z}{v_x}) - \varphi_x]$$

$$Y = A_y \cos[\omega_y(t - \frac{z}{v_y}) - \varphi_y]$$

La elección de los ejes es arbitraria y no quita generalidad. Hemos usado x e y como subíndices para indicar que las amplitudes, frecuencias, velocidades de onda y fase pueden ser diferentes y características de cada dirección de movimiento.

El movimiento de cada partícula no es ya en general lineal, pero está contenido en el plano x, y (z constante). Véanse las figuras 5 y 6. Estudiemos algunos casos:

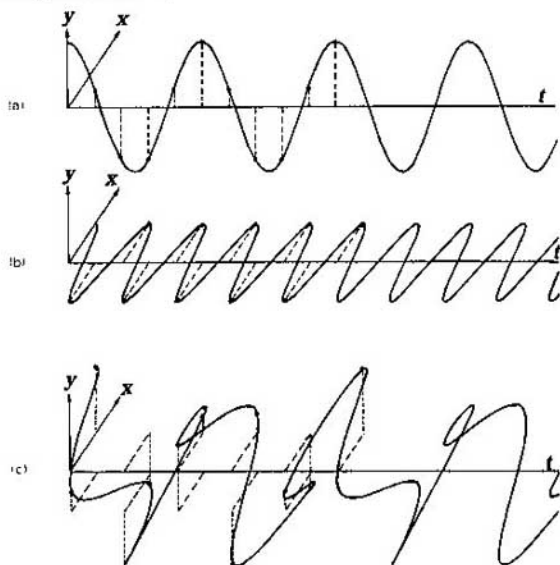


Fig. 5. Composición de movimientos ondulatorios normales entre sí. (a) Movimiento en el eje y en función de t con frecuencia ω . (b) Movimiento en el eje x en función de t con frecuencia $\omega' = 2,5$. (c) Composición en el espacio x, y, t . Para mayor claridad, se señalan las componentes x e y en diez instantes sucesivos.

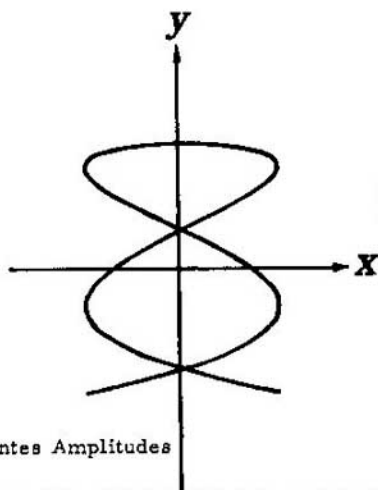


Fig. 6. Proyección de la composición de movimiento de la figura 5(c) sobre el plano $x-y$.

Diferentes Amplitudes

Sea $A_x \neq A_y$, pero $\omega_x = \omega_y = \omega$, $v_x = v_y = v$, $\varphi_x = \varphi_y = \varphi$

$$X = A_x \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - \varphi\right]$$

$$Y = A_y \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - \varphi\right]$$

24

Para discutir el movimiento resultante, se transformará a coordenadas polares ρ , θ (Fig. 7). Para este caso:

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - \varphi\right] \quad [38a]$$

$$\theta = \arctg \frac{Y}{X} = \arctg \frac{A_y}{A_x} = \text{constante} \quad [38b]$$

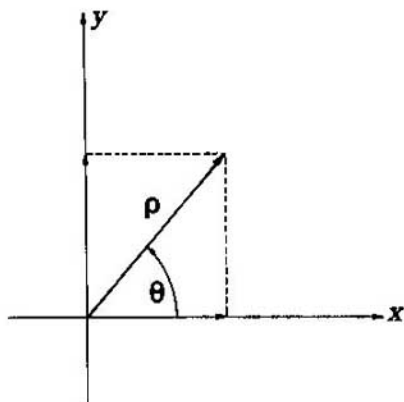


Fig. 7. Coordenadas cartesianas y polares en el plano.

lo que significa que el movimiento ocurre a θ constante, con un ρ que describe un movimiento armónico de igual frecuencia, velocidad de onda y fase, pero con una amplitud igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados

de las amplitudes. El movimiento sigue siendo lineal en este caso, pero forma un ángulo θ con el eje x .

Cuando el movimiento se puede describir por las ecuaciones [38a y b] se llama *linealmente polarizado*. Nótese que cuando sólo se tiene movimiento en el sentido del eje x (o del eje y) es un caso particular de las ecuaciones [38a y b] con θ igual a 0 (o $\frac{\pi}{2}$, respectivamente).

Diferentes Amplitudes y Fases

Sean $A_x \neq A_y$, $\omega_x = \omega_y = \omega$, $\nu_x = \nu_y = \nu$ y $\varphi_x \neq \varphi_y$

$$\begin{aligned} X &= A_x \cos[\omega(t - \frac{z}{\nu}) - \varphi_x] \\ Y &= A_y \cos[\omega(t - \frac{z}{\nu}) - \varphi_y] \end{aligned} \quad [39]$$

Si z es constante, el sistema [39] es la ecuación paramétrica de una elipse que no está referida, en general, a sus ejes principales. Puede llevarse a sus ejes principales mediante una rotación de coordenadas. En coordenadas polares se tiene:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= X^2 + Y^2 = A_x^2 \cos^2[\omega(t - \frac{z}{\nu}) - \varphi_x] + A_y^2 \cos^2[\omega(t - \frac{z}{\nu}) - \varphi_y] \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{Y}{X} = \frac{A_y \cos[\omega(t - \frac{z}{\nu}) - \varphi_y]}{A_x \cos[\omega(t - \frac{z}{\nu}) - \varphi_x]} \end{aligned} \quad [40]$$

Los ejes principales corresponden a las direcciones de θ , en las que ρ es extremo:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 0$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos:

$$\theta \text{ (para } \rho \text{ extremo)} = \frac{\varphi_y + \varphi_x}{2} \pm \frac{\pi}{4}$$

Para el caso particular en que $\frac{\varphi_y - \varphi_x}{2} = \frac{\pi}{4}$, el sistema [39] ya está en ejes principales, con lo que se obtiene:

$$\frac{X^2}{A_x^2} + \frac{Y^2}{A_y^2} = 1 \quad [41]$$

Esto significa que la partícula sometida simultáneamente a dos movimientos ondulatorios normales entre sí describe como trayectoria una elipse, cuyos ejes principales son x e y . La onda que hace describir trayectorias elípticas a las partículas se llama *onda elípticamente polarizada*.

Son interesantes dos casos particulares. Por una parte, si $\varphi_x = \varphi_y$, se vuelve a tener una onda linealmente polarizada. Por la otra, si $A_x = A_y$ y $\frac{\varphi_y - \varphi_x}{2} = \pm \frac{\pi}{4}$ la trayectoria es una circunferencia, como resulta claro de [41]. En este caso se habla de *onda circularmente polarizada*. En todos los movimientos elípticamente polarizados, y en el circularmente polari-

zado como caso particular, la partícula puede recorrer la trayectoria en el sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario. Esto depende del signo de $\frac{(\varphi_y - \varphi_x)}{2}$.

Hasta ahora se estudió el movimiento con z constante. Si se lo mira en cambio a t constante (una fotografía) se vería que las partículas forman una hélice circular o elíptica, de paso igual a la longitud de onda, bien sea la onda circular o elípticamente polarizada.

Es fácil verificar que la composición de dos ondas circularmente polarizadas, de igual amplitud, frecuencia y velocidad, pero que en una de ellas la partícula recorre la trayectoria en un sentido (el de las agujas del reloj, vg.) y en la otra en sentido contrario, da como resultado una onda linealmente polarizada.

Si las ondas fueran de diferentes sentidos, por ejemplo el movimiento en el eje x avanza y en el y retrocede, se tendría:

$$X = A_x \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - \varphi_x\right]$$

$$Y = A_y \cos\left[\omega\left(t + \frac{z}{v}\right) - \varphi_y\right]$$

Se puede definir como fase:

$$\psi_x = \frac{\omega}{v}z + \varphi_x$$

$$\psi_y = \frac{\omega}{v}z + \varphi_y$$

y entonces se tiene que la fase varía con z de 0 a 2π , con lo cual las partículas, donde:

$$\frac{\omega}{v}z + \varphi_x = -\frac{\omega}{v}z + \varphi_y \pm n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

tienen un movimiento linealmente polarizado, y para cualquier otro caso, lo tienen elípticamente polarizado. Si $A_x = A_y$, la onda es estacionaria.

Distintas Frecuencias y Fases

Sean ahora $A_x = A_y = A$, $\omega_1 \neq \omega_2$, $v_1 = v_2 = v$ y $\varphi_x \neq \varphi_y$

$$X = A \cos\left[\omega_x\left(t - \frac{z}{v}\right) - \varphi_x\right]$$

$$Y = A \cos\left[\omega_y\left(t - \frac{z}{v}\right) - \varphi_y\right] \quad [42]$$

Se puede pasar a coordenadas polares y estudiar el movimiento, pero el problema es complicado si la relación entre ω_x y ω_y no es simple. Así, si $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ es un número irracional, después de cumplido cualquier número de ciclos, la partícula no vuelve a las condiciones iniciales y su trayectoria es una especie de roseta no cerrada.

Si, en cambio, $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ es racional, la partícula cierra una trayectoria al cabo de un número entero de períodos (T_x ó T_y). Este tiempo es igual al

mínimo común múltiplo de los períodos T_x y T_y , y podría llamarse período de la composición de ondas.

Si $\frac{\omega_x}{\omega_y} = 1/1$ tenemos una trayectoria cerrada para $T_x = T_y$

$\frac{\omega_x}{\omega_y} = 1/2$ tenemos una trayectoria cerrada para $T_x = 2T_y$

$\frac{\omega_x}{\omega_y} = 2/3$ tenemos una trayectoria cerrada para $2T_x = 3T_y$

En la figura 8 se han representado las trayectorias de una partícula para diferentes relaciones de $\frac{\omega_x}{\omega_y}$. Las curvas resultantes se llaman figuras de Lissajous.

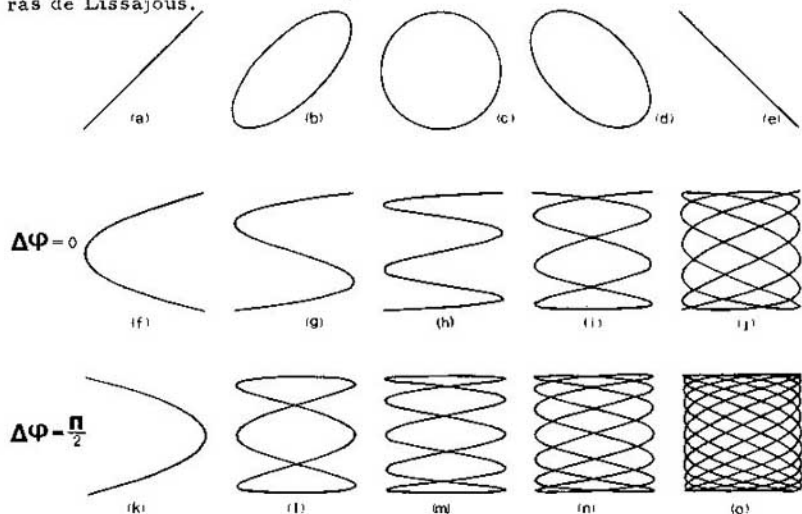


Fig. 8. Figuras de Lissajous para distintas relaciones de ω_x/ω_y . De (a) a (e) $\omega_x/\omega_y = 1$ y $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ valen, respectivamente, 0, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$ y π . De (f) a (j) $\omega_x/\omega_y = 2, 3, 5, 7/2$ y $11/5$, respectivamente. De (k) a (o) son las mismas relaciones ω_x/ω_y , pero desfasando la componente x en $\pi/2$.

Distintas Velocidades

En la práctica hay sólidos en los que la velocidad de la luz depende de una dirección privilegiada. Esta propiedad da origen al fenómeno llamado birrefringencia. Su explicación es complicada; una fotografía de este movimiento es similar a la figura 9, pero la onda es progresiva, no estacionaria.

MOVIMIENTO OSCILATORIO AMORTIGUADO

Un tipo diferente de movimiento, que aparece a menudo en problemas de física, es el movimiento oscilatorio amortiguado que, en su forma más general, se describe por medio de la ecuación:

$$X(x, t) = A e^{-b(t-\frac{t_0}{\omega})} \cdot \cos[\omega(t-\frac{t_0}{\omega}) - \varphi] \quad [43]$$

la que se distingue del expresado en la ecuación [17] por la presencia de un coeficiente exponencial, que depende del parámetro b real (véase la Fig. 9).

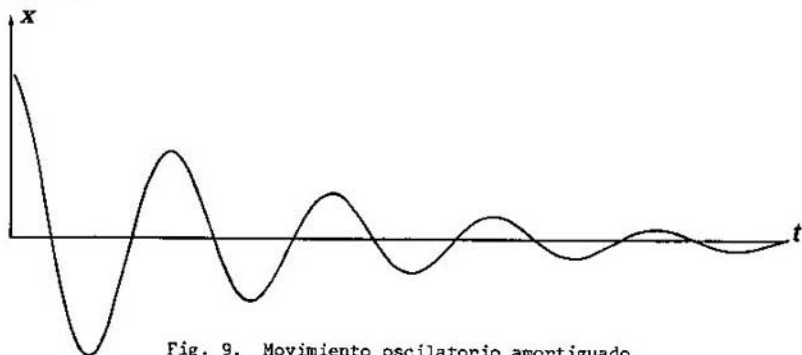


Fig. 9. Movimiento oscilatorio amortiguado. Gráfico de x en función de t .

La ecuación [43] puede interpretarse como un movimiento senoidal con una amplitud B , función de z y de t , donde:

$$B(z, t) = A e^{-b(t-\frac{z}{v})} \quad [44]$$

la cual decrece monótonamente (o crece si b es negativo). En el caso en que $b > 0$, B decrece con el tiempo hasta tender a cero a medida que t tiende a infinito. Si b fuera negativo, tendríamos el efecto contrario: la amplitud B tendería a infinito a medida que t tienda a infinito. Por eso, B suele llamarse amplitud instantánea. El parámetro A de las ecuaciones [43] y [44] se puede llamar amplitud inicial, por ser igual a B , cuando $z = 0$ y $t = 0$.

El decrecimiento de la amplitud instantánea con el tiempo, amortigua el movimiento. El coeficiente b está relacionado con ese amortiguamiento de la onda, y se puede determinar si se conoce la amplitud instantánea en dos tiempos diferentes t_1 y t_2 para un z dado, ya que se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (A y b):

$$B_1(t_1, z) = A e^{-b(t_1 - \frac{z}{v})} = A e^{-bt_1} \cdot I^{+b\frac{z}{v}}$$

$$B_2(t_2, z) = A e^{-b(t_2 - \frac{z}{v})} = A e^{-bt_2} \cdot I^{+b\frac{z}{v}}$$

Dividiéndolas y tomando logaritmos se tiene:

$$b = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{B_1(t_1, z)}{B_2(t_2, z)}$$

Podemos seguir llamando período a $T = \frac{2\pi}{\omega}$, aunque no es en rigor un período porque el movimiento no es periódico. En el caso en que $t_2 - t_1$ de la relación anterior sea igual a $\frac{T}{2}$, o sea un semiperíodo, el coeficiente b resulta:

$$b = \frac{2}{T} \ln \frac{B_1(t_1, z)}{B_2(t_1 + \frac{T}{2}, z)}$$

Debe notarse que el cociente:

$$\ln \frac{R_1(t_1, z)}{B_2\left(t_1 + \frac{T}{2}, z\right)} = \frac{1}{2} bT \quad [45]$$

es constante. A este cociente se le llama decremento logarítmico. Esta relación es independiente de t_1 , pero, por razones prácticas, cuando se le debe determinar, es preferible elegir t_1 de modo que:

$$\omega\left(t_1 - \frac{z}{v}\right) - \varphi = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

porque en tal caso las amplitudes son mayores y pueden medirse con menos error.

Adviértase que la ecuación [43] es una ecuación de onda, ya que pertenece al tipo general de función descrita por la ecuación [4]. La ecuación [17] es el caso particular de la ecuación [43], con $b = 0$.

Podemos volver a aplicar el principio de superposición para componer ondas oscilatorias amortiguadas. No hace falta repetir las deducciones, ya que se vuelven a obtener las mismas fórmulas de composición, con la sola diferencia del factor $e^{-b(t-\frac{z}{v})}$, que por ser un factor común, multiplica a las soluciones. Así, por ejemplo, cuando se tiene la suma de dos ondas paralelas y de igual sentido, pero con diferentes amplitud y fase, e iguales frecuencia, amortiguamiento y velocidad de onda, se obtiene:

$$X_{1,2} = e^{-b(t-\frac{z}{v})} \cdot C \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - \varphi\right]$$

donde nuevamente

$$C = \sqrt{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

Si los amortiguamientos son diferentes, $b_1 \neq b_2$, esto equivale a tener una amplitud $B_1 \neq B_2$ (ecuación [44]) que sustituye a A_1 y A_2 . En el mismo caso anterior, se tiene que el resultado de la composición es:

$$X_{1,2} = C \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) - \varphi\right]$$

$$C = \sqrt{(B_1 \cos \varphi_1 + B_2 \cos \varphi_2)^2 + (B_1 \sin \varphi_1 + B_2 \sin \varphi_2)^2}$$

donde

$$B_1 = A_1 e^{-b_1(t-\frac{z}{v})}$$

$$B_2 = A_2 e^{-b_2(t-\frac{z}{v})}$$

y

$$\varphi = \arctg \frac{B_1 \sin \varphi_1 + B_2 \sin \varphi_2}{B_1 \cos \varphi_1 + B_2 \cos \varphi_2}$$

En los medios donde las fuerzas de roce son proporcionales a la velocidad de las partículas, se tienen ondas amortiguadas (ecuación [43]). Pero también se encuentran estas ondas amortiguadas cuando se resuelve el problema de ondas de superficie, que severá más adelante, sin que ocurra disipación de energía.

3

ONDAS EN DOS Y EN TRES DIMENSIONES

GENERALIDADES

Para la deducción de la ecuación general de una onda, ecuación [4], se supuso una barra larga y fina. Así, se consideraban únicamente ondas unidimensionales. Este proceder idealiza los fenómenos reales, haciendo más simple su estudio. En el caso real hay que tener en cuenta que la barra tiene una sección finita. La onda ya no será unidimensional sino tridimensional, complicada por reflexiones en los bordes. Oportunamente señalamos que las ecuaciones [4], [5] y [6] no sirven tampoco para describir el movimiento de las ondas en el agua. En este caso se trata de ondas de superficie, que son un tipo especial de ondas en tres dimensiones. Otro caso no tenido en cuenta es el de ondas sobre el parche de un tambor, u ondas en membranas.

Pasamos a considerar sólo algunos casos particulares de ondas en membranas y de ondas de volumen, pero no el caso general, por las complicaciones matemáticas a que tal cuestión lleva.

31

ONDAS EN MEMBRANAS

Simetría Plana

Nuestro medio es ahora una fina membrana plana y elástica bidimensional tensa. Elegimos las coordenadas en forma tal que este plano satisfaga, en reposo, la ecuación $z = 0$. Para evitar el efecto de reflexiones en los bordes supondremos al plano muy extenso en el sentido de los ejes x e y .

Este medio se excita en una forma muy particular: moviendo simultáneamente todas las partículas que están sobre una recta del plano, en los dos sentidos del eje z . Esta recta puede ser cualquiera, pero para fijar ideas supongamos que es la recta $x = 0$, o sea el eje y . Se comienza a mover las partículas en el instante $t = 0$. Este movimiento, igual para toda partícula que está en $x = 0$, independientemente de su coordenada y , será una función cualquiera de t , que podemos expresar como

$$z(x = 0, y, t) = f(t) \quad [46]$$

donde z indica apartamiento del punto $z = 0$, o sea del equilibrio (véase la figura 10). Debido a las propiedades elásticas de este medio, las partículas vecinas comenzarán a moverse, y al igual que en el caso unidimensional, la perturbación se desplazará hacia las x crecientes y las x decrecientes, haciendo subir y bajar a las partículas. Nuevamente definimos la velocidad de propagación de la onda como el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrerlo: Si la perturbación que estaba en $x = 0$ en $t = 0$ llegó a $x = x_1$ en $t = t_1$,

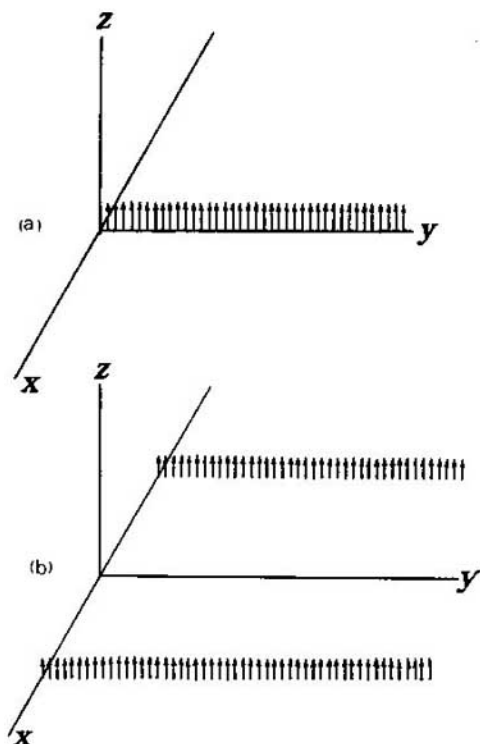


Fig. 10. Excitación de un plano elástico (xy) mediante una perturbación de simetría plana. (a) Corresponde a $t = 0$ y (b) a un tiempo posterior. La recta de excitación yace en el plano xy y su ecuación es $x = 0$.

$$v = \frac{x_1 - 0}{t_1 - 0} = \frac{x_1}{t_1} \quad [47]$$

Si se suponen despreciables el amortiguamiento y la deformación que en algunos casos (no siempre) puede sufrir la onda, el movimiento de un elemento del medio elástico en un punto x cualquiera, y para cualquier y , es proporcional a la excitación en el origen, y se presenta un tiempo t después. Este tiempo está relacionado con la velocidad de propagación por la ecuación [47], y la ecuación del movimiento resulta:

$$Z(x, y, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad [48]$$

Hay otras maneras de excitar simultáneamente a todos los puntos que yacen en $x = 0$. Puede moverse simultáneamente todas las partículas que están en la recta $x = 0$ en la dirección del eje y , o en la dirección del eje x . El movimiento de las partículas permanecerá en el plano x, y , siendo en el primer caso normal al desplazamiento de la perturbación, cuya ecuación es:

$$Y(x, y, t) = g\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad [49]$$

En el segundo caso, excitación en el sentido del eje x , el movimiento de las partículas ocurre en la misma dirección que el desplazamiento de la onda

$$X(x, y, t) = h(t - \frac{x}{v}) \quad [50]$$

Por las razones dadas, se llaman ondas transversales a las que satisfacen las ecuaciones [48] o [49], y longitudinales a las que satisfacen la ecuación [50]. Adviértase que todas estas ecuaciones describen el movimiento alrededor del punto de equilibrio en función de las coordenadas de la partícula. Así, para una partícula cuyas coordenadas en reposo (o equilibrio) son x_0, y_0, z_0 , sus coordenadas en un tiempo t , con la perturbación de una onda longitudinal, serán:

$$x = x_0 + X(x_0, y_0, t); \quad y = y_0; \quad z = z_0$$

Las excitaciones, al igual que en el caso lineal, podrían superponerse, teniendo como resultado un movimiento de superposición de las ecuaciones [48], [49] y [50].

Las partículas que están sobre cualquier recta pueden ser inicialmente excitadas, en cuyo caso la onda se desplazará normalmente a la recta elegida. Si, por ejemplo, se excitan simultáneamente en un tiempo $t = 0$, los puntos que están sobre la recta

$$Ax + By + C = 0$$

33

la perturbación llegará a un punto (x_0, y_0) después de un intervalo de tiempo t_0 posterior que satisfaga:

$$t_0 = \frac{d}{v}$$

donde d es la distancia entre el punto x_0, y_0 y la recta. Si se pasa la ecuación de la recta a su forma normal

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

la distancia estará dada por:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = |A'x_0 + B'y_0 + C'| = \cos \alpha \cdot x_0 + \text{sen } \alpha \cdot y_0 + P$$

El argumento de las funciones de las ecuaciones [48], [49] y [50] en vez de ser $t - \frac{x}{v}$ será ahora:

$$t - \frac{1}{v} \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad [51]$$

que, cuando $A = 1, B = 0$ y $C = 0$, vuelve a ser $t - \frac{x}{v}$.

Respecto de ondas en membranas y, también, de ondas tridimensionales, es útil el concepto de frente de ondas, que se define así:

Definición 11. Se llama *frente de ondas* al lugar geométrico de los puntos con igual perturbación.

En el caso de ondas en membranas, el frente de onda es una recta paralela a la recta de excitación. En este caso, la ecuación del frente de ondas sería:

$$Ax + By + \gamma = 0$$

donde γ es arbitrario.

Excitación Senoidal

Si la excitación es armónica, se tendrá que las funciones f, g y h de las ecuaciones [50], [49] y [48] son senos o cosenos. En el caso general, donde la excitación ocurre sobre la recta $Ax + By + C = 0$, se tendrán como ecuaciones de movimiento:

$$Z(x, y, t) = A_z \cos \left[\omega \left(t - \frac{1}{v} \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) - \varphi \right]$$

$$X(x, y, t) = A_x \cos \left[\omega \left(t - \frac{1}{v} \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) - \varphi \right]$$

$$Y(x, y, t) = A_y \cos \left[\omega \left(t - \frac{1}{v} \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) - \varphi \right]$$

Podemos simplificar su escritura poniendo $k = \frac{\omega}{v}$ y si se define el vector

$$\vec{k} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j}$$

tal que sus componentes sean:

$$k_x = \frac{\omega}{v} \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} ; \quad k_y = \frac{\omega}{v} \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad [52]$$

cuyo módulo es:

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{v} \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\omega}{v}$$

y además tomamos como nueva fase

$$\Psi = \varphi + \frac{\omega}{v} \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

tendremos:

$$\omega \left(t - \frac{1}{v} \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) - \varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \Psi$$

donde

$$\vec{x}_x = x, \quad \vec{x}_y = y \quad \text{y} \quad \vec{k} \cdot \vec{x} = k_x x + k_y y$$

Las ecuaciones de movimiento pueden escribirse finalmente:

$$\begin{aligned} X(x, y, t) &= A_x \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \Psi) \\ Y(x, y, t) &= A_y \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \Psi) \\ Z(x, y, t) &= A_z \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \Psi) \end{aligned} \quad [53]$$

Pueden hacerse aquí los mismos tipos de composición de movimiento hechos con ondas unidimensionales, ya que el principio de superposición subsiste aquí también.

En el sistema [53] se combina el movimiento debido a ondas transversales con el de las longitudinales. Se los puede separar, teniendo en cuenta que si la excitación se hizo según la recta

$$Ax + By + C = 0$$

la velocidad, por ser normal a la recta, tendrá por ecuación vectorial

$$\vec{v} = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} |v| \vec{i} + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} |v| \vec{j} + 0 \vec{k} \quad [54]$$

y el movimiento longitudinal es el paralelo a \vec{v} , en tanto que el normal es el que ocurre en el plano normal a \vec{v} . Y así puede descomponerse el movimiento (véase la figura 11)

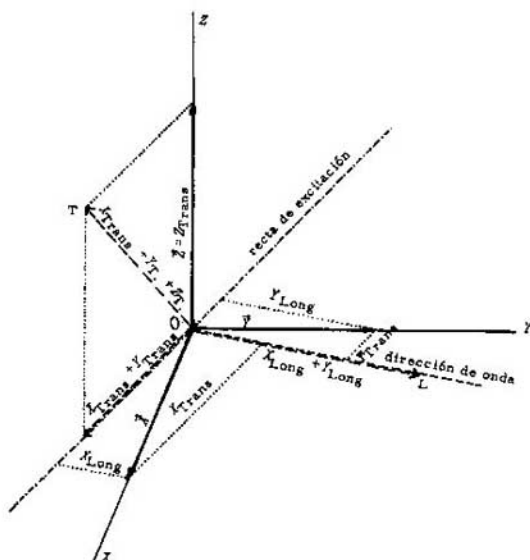


Fig. 11. Excitación de un plano mediante una perturbación armónica según una recta, con componentes longitudinales y transversales mezclados. \vec{OL} es la amplitud de la onda longitudinal. \vec{OT} es la de la transversal.

$$\begin{aligned}
 X_{\text{Long}} &= \vec{X} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} X(x, y, t) \\
 Y_{\text{Long}} &= \vec{Y} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} Y(x, y, t) \\
 Z_{\text{Long}} &= \vec{Z} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = 0
 \end{aligned}
 \tag{55}$$

Como según la figura $X_L^2 + X_T^2 = X^2$, se tendrá inmediatamente:

$$\begin{aligned}
 X_{\text{Trans}} &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} X(x, y, t) \\
 Y_{\text{Trans}} &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} Y(x, y, t) \\
 Z_{\text{Trans}} &= Z(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

Simetría Cilíndrica

Si se golpea una membrana en un punto se producen ondas circulares cuyo centro es el punto golpeado. La amplitud de estas ondas disminuye a medida que avanzan, aunque no haya roce: la disminución de la amplitud es intrínseca a las ondas circulares a medida que se alejan del centro de excitación. Si quedaran dudas, puede hacerse un experimento consistente en invertir el avance de las ondas de modo que converjan hacia el centro, lo que es relativamente fácil si se golpea la membrana con un gran aro circular. Las ondas generadas por el choque, al avanzar hacia el centro aumentan de amplitud.

Se puede pues resumir este resultado empírico diciendo que en ondas de simetría cilíndrica la amplitud en un punto es intrínsecamente una función de la distancia del punto a la fuente emisora, a diferencia de lo que ocurre con ondas planas. La razón de la variación de la amplitud al variar r , distancia entre la partícula y la fuente, está en la conservación de la energía. De la energía nos ocuparemos más adelante, si bien entre tanto aceptaremos como postulado lo siguiente: la energía de una partícula, en movimiento ondulatorio, es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento.

Excitemos el origen ($r = 0$) de un medio isotrópico y homogéneo a fin de producir un movimiento armónico y preguntémosnos cuál es la amplitud de éste a una distancia r . La energía de tal partícula es:

$$E(r) = C \cdot A^2(r) \tag{57}$$

donde C es una constante de proporcionalidad.

Todas las partículas que están a la misma distancia r del origen tienen el mismo movimiento y, por ende, la misma energía. La energía es sólo función de r , y es distinta la de dos partículas con diferentes r .

La suma de la energía (energía total) de todas las partículas comprendidas en un anillo entre r y $r + dr$ es igual al número de estas partículas por la energía de cada una. El número de partículas (N) es igual al área del anillo (S) por la densidad superficial (σ) de partículas que hay por unidad de área. Por considerar homogéneo el medio, σ es constante.

$N(\text{entre } r \text{ y } r + dr) = \sigma \cdot S = \sigma[\pi(r + dr)^2 - \pi r^2] = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$ donde se han despreciado infinitésimos de orden superior a dr .

$$\begin{aligned} E(\text{entre } r \text{ y } r + dr) &= E(r) \cdot N(\text{entre } r \text{ y } r + dr) = \\ &= C \cdot A^2(r) \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr \end{aligned}$$

Para un r_0 genérico, que se puede tomar como referencia:

$$E(\text{entre } r_0 \text{ y } r_0 + dr) = CA^2(r_0) \sigma \cdot 2\pi r_0 \cdot dr$$

Por las características de la excitación, la energía fluye, desde el origen hacia afuera, en forma radial. Y la cantidad de energía que pasa por cualquier anillo de igual anchura dr es constante e independiente de r , por conservación del flujo. Esto implica que:

$$E(\text{entre } r \text{ y } r + dr) = E(\text{entre } r_0 \text{ y } r_0 + dr)$$

Por lo cual:

$$A^2(r) \cdot r = A^2(r_0) \cdot r_0$$

Esta igualdad debe cumplirse cualesquiera que sean r y r_0 . Si, en particular, elegimos $r_0 = 1$, y llamamos $A(r_0 = 1) = A_0$,

$$A(r) = \frac{A_0}{\sqrt{r}} \quad [58]$$

con lo cual queda determinada la dependencia funcional de la amplitud con respecto a la coordenada r .

Para hallar la ecuación de movimiento, es práctico el uso de coordenadas cilíndricas (por eso se dice que el problema tiene simetría cilíndrica). Son posibles movimientos ondulatorios de las partículas en cada uno de los tres ejes de coordenadas: \bar{R} , $\bar{\Psi}$ y \bar{Z} . Así, si la excitación consiste en un movimiento armónico en el origen normal a la superficie, el movimiento de las partículas se expresa por:

$$Z(r, t) = \frac{A_0}{\sqrt{r}} \cos\left\{\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) - \varphi\right\} \quad [59a]$$

Si la excitación es un vaivén de rotación, como ocurre en las paletas de un lavarropas, la ecuación es:

$$\Psi(r, t) = \frac{A_0}{\sqrt{r}} \cos\left\{\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) - \varphi\right\} \quad [59b]$$

y finalmente, si la excitación consiste en el alejamiento y acercamiento de las partículas al origen, en la dirección de r (expansión y compresión) mientras permanece el movimiento en el plano, se tendrá:

$$\bar{R}(r, t) = \frac{A_0}{\sqrt{r}} \cos\left(u\left(t - \frac{r}{v}\right) - \varphi\right) \quad [59c]$$

(Véase la figura 12). En este caso la onda es longitudinal y transversal en los dos casos anteriores. Los movimientos son sólo función de r y de t debido a la simetría cilíndrica. Obviamente, la amplitud, la frecuencia, la velocidad y la fase no tienen porqué ser iguales en las ecuaciones [59 a, b y c]. Y pueden aparecer movimientos armónicos, que sean combinación de dos o más de los descritos, manteniendo la simetría cilíndrica. En cambio, si se suman dos o más movimientos de distinto origen, las complicaciones llegan a ser considerables.

ONDAS DE VOLUMEN

Ondas Planas Tridimensionales

Si el medio es un volumen elástico tridimensional, las ondas pueden desplazarse en tres dimensiones. Hágase la abstracción matemática de que el medio es homogéneo, isomorfo e infinito en todas direcciones.

Excítese en una forma muy particular haciendo que se muevan simultáneamente todas las partículas que se hallan sobre un mismo plano. Si este plano es el x, y , cuya ecuación es $z = 0$, esta excitación, debido a las características elásticas del material, genera una onda que se desplaza con una velocidad v desde 0 a z crecientes, y a una velocidad $-v$ de 0 a z decrecientes. Ambas velocidades son constantes.

Mediante el método deductivo que se aplicó en el caso de membranas, tendremos como ecuaciones de movimiento espacial:

$$X(x, y, z, t) = f_1\left(t - \frac{z}{v}\right); \quad Y(x, y, z, t) = f_2\left(t - \frac{z}{v}\right)$$

$$Z(x, y, z, t) = f_3\left(t - \frac{z}{v}\right)$$

donde X e Y corresponden a excitaciones transversales (paralelas a los ejes x e y respectivamente) y Z corresponde a excitaciones longitudinales. Como siempre, las ecuaciones de movimiento [60] indican el apartamiento del equilibrio o reposo y no la posición de la partícula.

Si en vez de excitar el plano $z = 0$, se excita el plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad [61]$$

las ecuaciones de movimiento (mezclados ya los movimientos transversal y longitudinal) serán:

$$\begin{aligned} X &= g_1\left(t - \frac{1}{v} \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right) \\ Y &= g_2\left(t - \frac{1}{v} \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right) \\ Z &= g_3\left(t - \frac{1}{v} \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right) \end{aligned} \quad [62]$$

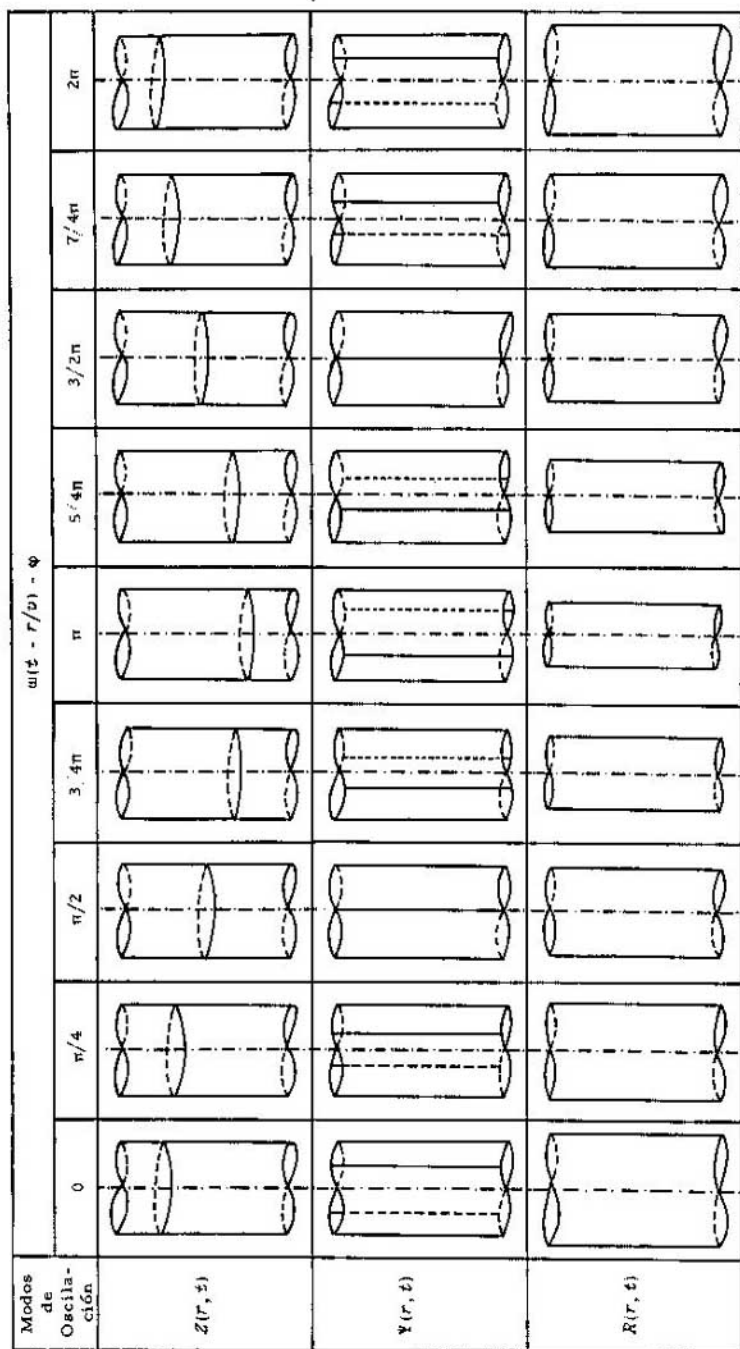


Fig. 12. Modos de oscilación armónica en un problema de simetría cilíndrica, según sea la excitación. La figura representa tres secuencias de excitación en las coordenadas cilíndricas Z , Y y R , respectivamente, correspondientes a un argumento que varía entre 0 y 2π en pasos de $\pi/4$.

El frente de ondas es un plano paralelo al plano de excitación, cuya ecuación es:

$$Ax + By + Cz + \gamma = 0 \quad [63]$$

donde γ es un número cualquiera.

En el caso de que se excite senoidalmente el plano [61], definiendo el número de onda k como vector de onda

$$\vec{k} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k}$$

y la posición x, y, z como el vector

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

resultan como ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned} X(x, y, z, t) &= A_x \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \Psi) \\ Y(x, y, z, t) &= A_y \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{y} - \Psi) \\ Z(x, y, z, t) &= A_z \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{z} - \Psi) \end{aligned} \quad [64]$$

donde

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\omega}{v} \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ k_y &= \frac{\omega}{v} \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ k_z &= \frac{\omega}{v} \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \Psi &= \Psi + \frac{\omega}{v} \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

La velocidad de la onda puede también expresarse vectorialmente:

$$\vec{v} = \frac{|\omega|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} [A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}] \quad [65]$$

Cada una de las componentes del movimiento puede descomponerse en una parte longitudinal, paralela a \vec{v} , y una parte transversal, normal a \vec{v} , en forma similar a la del caso de membranas:

$$\begin{aligned} X_L &= \vec{i} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} X(x, y, z, t) \\ Y_L &= \vec{j} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} Y(x, y, z, t) \\ Z_L &= \vec{k} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} Z(x, y, z, t) \end{aligned} \quad [66]$$

$$\begin{aligned}
 X_r &= \frac{\sqrt{B^2 + C^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} X(x, y, z, t) \\
 Y_r &= \frac{\sqrt{A^2 + C^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} Y(x, y, z, t) \\
 Z_r &= \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} Z(x, y, z, t)
 \end{aligned}
 \tag{67}$$

Ondas Esféricas

Es fácil generar ondas esféricas en un espacio tridimensional: basta encender un fósforo en un lugar oscuro. La intensidad de la luz disminuye a medida que nos alejamos del fósforo (centro emisor). Si, por el contrario, se enciende una lámpara consistente en un globo hueco de pared interna luminosa, la intensidad aumenta al acercarse la onda al centro. La amplitud en un punto es una función de la distancia del punto a la fuente emisora.

Todos los razonamientos hechos en el caso de las ondas en membranas de simetría cilíndrica son similares, con pocas variantes a los que hay que hacer en el caso de ondas esféricas. Por ello sólo señalaremos las diferencias y los nuevos resultados para no repetir lo dicho sobre membranas.

Excitemos un punto del medio tridimensional con un movimiento armónico. Si se elige dicho punto como origen de coordenadas y se llama ρ a la distancia de una partícula dada al origen, la ecuación de la energía de dicha partícula es igual a la ecuación [57], reemplazando r por ρ .

El número de partículas (N) entre ρ y $\rho + d\rho$ es ahora igual al volumen (V) de la capa esférica comprendida entre ρ y $\rho + d\rho$ por la densidad volumétrica (τ) de partículas que hay por unidad de volumen.

$$N(\text{entre } \rho \text{ y } \rho + d\rho) = \tau \cdot V = \tau \left(\frac{4}{3} \pi (\rho + d\rho)^3 - \frac{4}{3} \pi \rho^3 \right) = 4\pi \rho^2 d\rho$$

donde se han despreciado infinitésimos de orden superior a $d\rho$. Sigue siendo válida la conservación del flujo de energía, y esto lleva a que la amplitud tenga la siguiente dependencia funcional:

$$A(\rho) = A(\rho_0) \cdot \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{A_0}{\rho} \tag{68}$$

donde ρ_0 se tomó arbitrariamente igual a 1 y $A_0 = A(\rho_0)$.

Por razones de simplicidad conviene elegir coordenadas esféricas ρ , θ y φ (Fig. 13). Se pueden distinguir por separado los movimientos según la excitación (véase la Fig. 14). Si la excitación es un alejamiento y acercamiento radial (expansión y compresión como en el típico caso del sonido), se tendrá la siguiente ecuación de movimiento longitudinal:

$$P(\rho, t) = \frac{A_0}{\rho} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) - \varphi\right] \quad [69a]$$

donde θ y φ no varían.

Si la excitación hace que las partículas se muevan alrededor de su posición de equilibrio, variando sólo Ψ , que es un vaivén de rotación alrededor del eje polar, se tendrá:

$$\Psi(\rho, t) = \frac{A_0}{\rho} \cos\left[\omega\left(t - \frac{\rho}{v}\right) - \varphi\right] \quad [69b]$$

y el movimiento será transversal, y ρ y θ permanecen constantes.

La última forma posible de excitación es lograr que el movimiento de todas las partículas sólo cambie su coordenada θ . Esto se logra alejando y acercando las partículas a los polos de la esfera (véase la Fig. 14), sin desplazamiento radial ni de la coordenada φ :

$$\theta(\rho, t) = \frac{A_0}{\rho} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) - \varphi\right] \quad [69c]$$

También éste es un movimiento transversal.

Las amplitudes, frecuencias, velocidades y fases no tienen porqué ser iguales entre una y otra ecuación de movimiento. Pueden aparecer combinaciones de dos o más movimientos distintos, conservando la simetría esférica. El frente de ondas es una esfera de cualquier radio con centro en el origen.

42

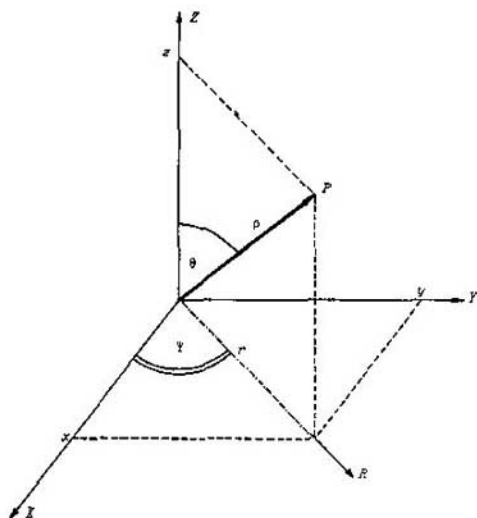


Fig. 13. Coordenadas en el espacio. Al punto P le corresponden las coordenadas x, y, z en el sistema cartesiano, las coordenadas r, Ψ, z en el sistema cilíndrico y las coordenadas ρ, θ, Ψ en el sistema esférico.

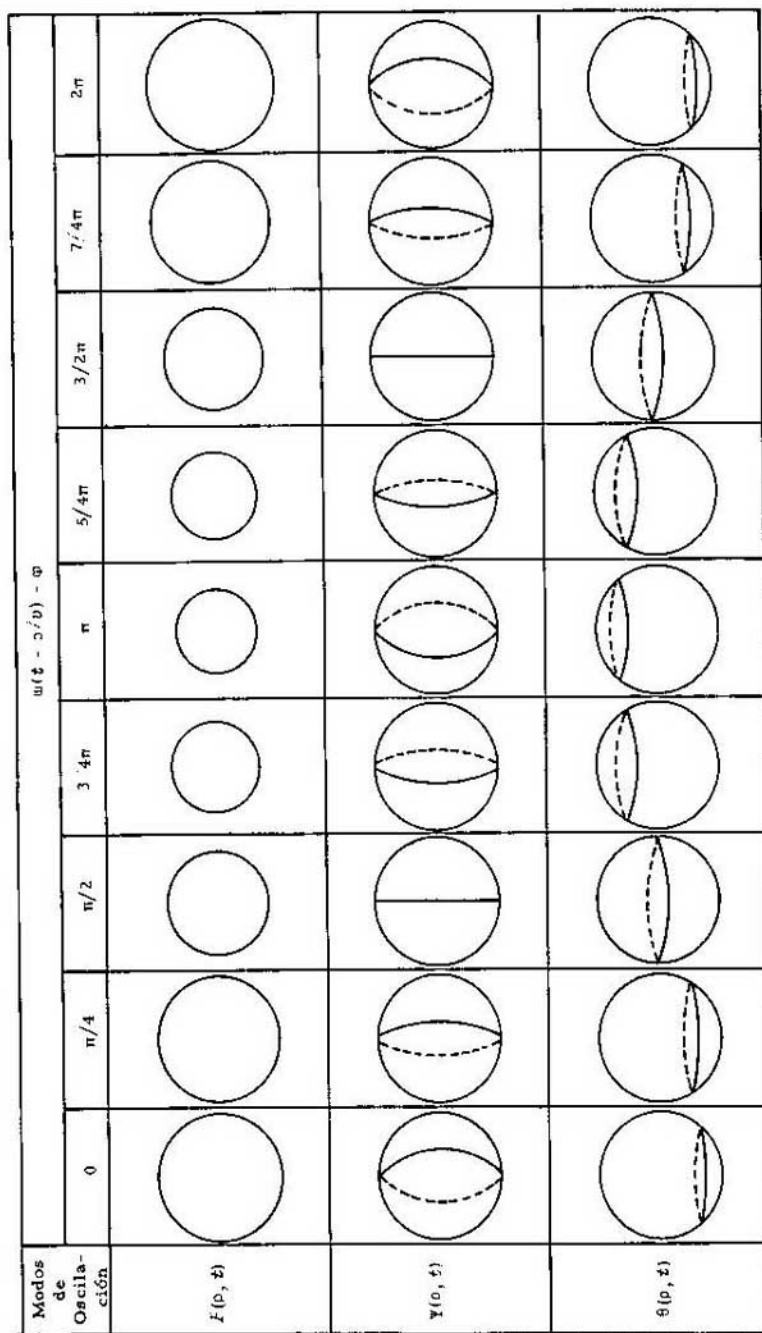


Fig. 14. Modos de oscilación armónica en un problema de simetría esférica, según sea la excitación. La figura representa tres secuencias de excitación en las coordenadas esféricas ρ , γ y θ , respectivamente, correspondientes a un argumento entre 0 y 2π que varía en pasos de $\pi/4$.

Ondas de Superficie

Hay un tipo particular de ondas que se producen cuando se tienen dos medios diferentes, con una superficie neta de discontinuidad, tales como gas-líquido, gas-sólido, líquido-líquido no miscibles, líquido-sólido, etc. Son las ondas de superficie u ondas de Rayleigh, y consisten en la propagación de una perturbación en la superficie de discontinuidad, con poca penetración en uno y otro medio. El ejemplo más familiar es el de las ondas de superficie en el agua, aunque debiera decirse en la interfase agua-aire.

Sólo se considerará el caso en que la superficie de discontinuidad es un plano y en que se pueda prescindir de uno de los dos medios, lo que equivale a suponer que se tiene un solo medio, un plano de discontinuidad y el vacío. Se elige un sistema cartesiano, tal que el plano $z = 0$ sea la superficie de discontinuidad, y el único medio está en $z \geq 0$. Consideremos la propagación de una onda plana en la dirección del eje x .

El cálculo detallado da como resultado que en el medio se transmita una onda que se amortigua a medida que z crece, y cuya ecuación de movimiento es la composición de los siguientes movimientos:

$$\begin{aligned} X &= (A_1 e^{-\alpha z} + A_2 e^{-\beta z}) \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) - \varphi\right] \\ Z &= (A_3 e^{-\alpha z} + A_4 e^{-\beta z}) \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) - \varphi\right] \end{aligned} \quad [70]$$

44

donde A_1 , A_2 , A_3 y A_4 están relacionadas entre sí. Se puede elegir en forma independiente uno solo de estos parámetros y los demás dependerán del valor del parámetro elegido, de la frecuencia y de las propiedades elásticas del medio. α y β dependen también de la frecuencia y de las propiedades elásticas del medio, al igual que la velocidad v , que es en general mucho menor que la velocidad de las ondas de volumen en el medio.

Las ecuaciones [70] nos dicen que hay un movimiento transversal a la dirección de la velocidad de la onda (en la dirección z) y simultáneamente uno longitudinal, que es el movimiento en la dirección x , y que la composición resultante decrece exponencialmente con z , es decir que perturba cada vez menos a las partículas que distan más de la superficie.

EFECTO DOPPLER. ONDAS DE CHOQUE

MEDIDA DE VELOCIDADES Y FRECUENCIAS. EFECTO DOPPLER EN SONIDO

Un micrófono transforma una onda elástica o sonora en una pulsación eléctrica. Ésta puede ser revelada o registrada por medio de instrumentos electrónicos, tales como un osciloscopio, un frecuencímetro, un voltímetro, etc., y mediante ellos se pueden medir su intensidad, frecuencia y período. Dos micrófonos colocados uno cerca de una fuente o foco sonoro (puede ser un instrumento musical, un altoparlante, etc.) y el otro a una cierta distancia, permiten medir la velocidad de propagación. Dada la velocidad y el período, se deduce la longitud de onda. La experiencia muestra que si la fuente sonora o si el receptor están en movimiento, la frecuencia se altera y por ende el período y la longitud de onda. Esta alteración se llama efecto Doppler. Se pueden distinguir varios casos según que la fuente emisora esté en movimiento, que lo esté el receptor, o el medio material (aire, líquido o sólido) en el que se propagan las ondas elásticas o sonoras, y también puede darse el caso de la reflexión en un espejo en movimiento. Con estos cuatro elementos pueden hacerse dieciséis combinaciones distintas. Consideramos seguidamente ciertos casos elementales.

45

Fuente en Movimiento y Receptor en Reposo

Supóngase un medio tridimensional infinito y una fuente generadora de ondas sonoras casi puntual. Si la fuente emisora está en reposo, los frentes de ondas constituirán un sistema de esferas concéntricas en cuyo centro está la fuente. La velocidad del sonido (v), la longitud de onda (λ_0), el período (T_0) y la frecuencia (ν_0) obedecen las relaciones dadas en la Tabla I.

Si la fuente está en movimiento con la velocidad $u < v$, los frentes de onda que corresponden a máximos sucesivos forman un sistema de circunferencias excéntricas (Fig. 15). La longitud de onda es la distancia entre dos frentes sucesivos. En la dirección del movimiento la longitud de onda es:

$$\lambda_1 = T_0(v - u)$$

En la dirección opuesta es:

$$\lambda_1 = T_0(v + u)$$

y, en general, en una dirección cualquiera que forme un ángulo α con la dirección de movimiento de la fuente:

$$\lambda_1 = T_0(v + u \cos \alpha) \quad [71]$$

de lo cual resulta que el período y la frecuencia están expresados por:

$$T_1 = \frac{\lambda_1}{v} = T_0 \left(1 + \frac{u}{v} \cos \alpha\right)$$

$$v_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_0 \left(1 + \frac{u}{v} \cos \alpha\right)} = \frac{v_0}{1 + \frac{u}{v} \cos \alpha} \quad [72]$$

La frecuencia es máxima cuando $\alpha = 0$; es igual a la del caso en reposo si $\alpha = \pi/2$, y es mínima si $\alpha = \pi$. Al pasar la fuente delante del receptor se observan los tres casos en sucesión. Naturalmente, α es una función del tiempo.

Si la velocidad de la fuente se acerca a la velocidad del sonido, la frecuencia se hace muy alta en valores bajos de α . Además, se acumula energía del sonido delante de la fuente formando una *barrera de sonido* (Fig. 16) que ofrece gran resistencia al movimiento.

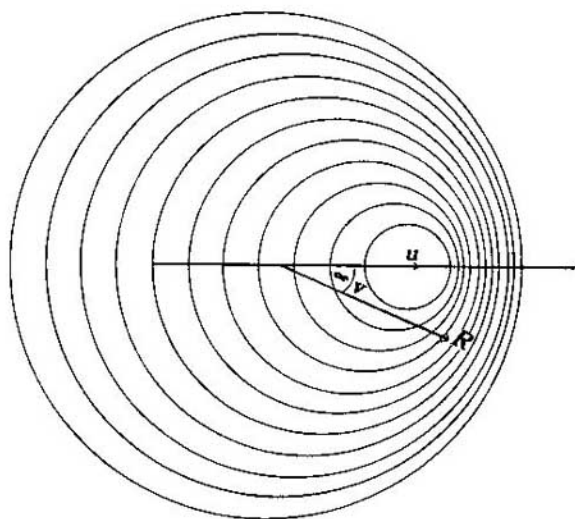


Fig. 15. Efecto Doppler: Frentes de onda correspondientes a una fuente en movimiento con una velocidad inferior a la del sonido.

Si la barrera del sonido es superada y $u > v$, la mayor parte de la energía sonora se encuentra ahora en un manto de forma cónica cuyo vértice coincide con la misma fuente emisora. El vértice se propaga a velocidad \bar{u} , y las secciones normales se propagan transversalmente con la velocidad \bar{v} (Fig. 17). Este manto se llama una *onda de choque*. En efecto, al chocar el manto contra un cuerpo condensado se produce una descarga violenta de energía elástica en forma de explosión más o menos moderada. Es lo que se experimenta si un avión supersónico pasa sobre nuestras cabezas.

En el movimiento infrasónico ($u < v$) la energía del sonido se disipa de acuerdo con la ley de la inversa del cuadrado de la distancia (altura del

avión sobre nosotros); en cambio, en el movimiento supersónico, la disipación es más lenta, de acuerdo con la inversa de la primera potencia de la distancia.

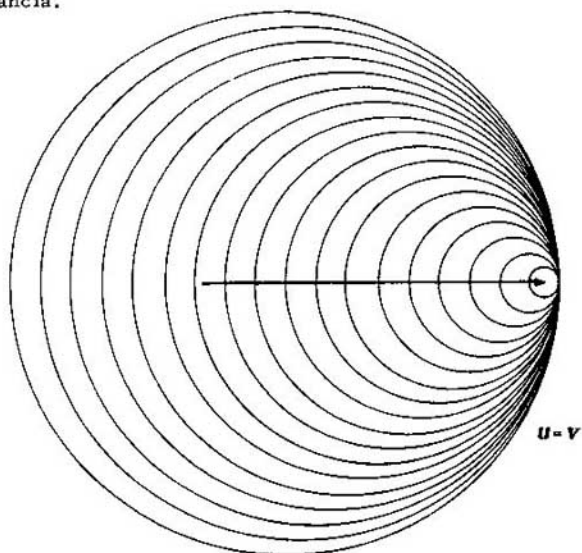


Fig. 16. Barrera de sonido. Frente de onda si la velocidad de la fuente es igual a la velocidad del sonido.

47

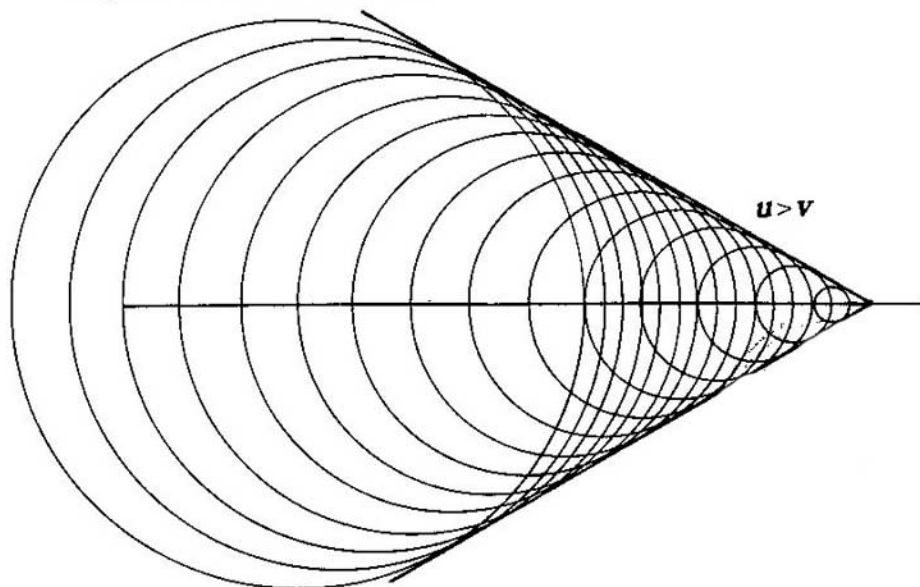


Fig. 17. Ondas de choque. Frente de onda si la velocidad de la fuente mayor que la velocidad del sonido.

Fuente en Reposo y Receptor en Movimiento

Si el receptor se aleja con la velocidad de u , la velocidad aparente del sonido para él será la velocidad relativa $v - u$, y la frecuencia:

$$v_2 = \frac{v - u}{\lambda_0}$$

Si la dirección del movimiento del receptor forma un ángulo β con la normal a las ondas, resulta:

$$v_2 = \frac{v - u \cos \beta}{\lambda_0} = v_0 \left(1 - \frac{u}{v} \cos \beta \right) \quad [73]$$

La ecuación [73] es válida cualquiera que sea β , la que puede incluso ser una función del tiempo. En particular, si $\beta = \pi$, el receptor se acerca a la fuente con movimiento rectilíneo y uniforme, en vez de alejarse.

Sea un receptor que se mueve según una trayectoria rectilínea y uniforme y que avanza directamente hacia la fuente con una velocidad u menor que la velocidad del sonido. Mientras se va acercando, la frecuencia que oye el receptor es mayor que la propia de la fuente. Cuando el receptor pasa a la fuente, β cambia bruscamente de π a 0 y la frecuencia que oye a continuación es menor que la frecuencia de la fuente. Si la fuente fuera un altoparlante que transmite voz humana, escucharía una voz más aguda que la real cuando se acerca y más grave que la real cuando se aleja.

48

Si la velocidad del receptor es igual que la del sonido, también recibe un sonido más agudo cuando se acerca, y no oye nada más ($v_2 = 0$) cuando se aleja.

Por último, si la velocidad del receptor es mayor que la del sonido, recibe un sonido todavía más agudo cuando se acerca, y cuando se aleja vuelve a escuchar, en orden inverso, lo mismo que escuchó hasta el instante en que cruzó la fuente, como si fuera retrocediendo en el tiempo. Jamás llegará a él el sonido que la fuente emita después del encuentro del receptor con la fuente.

Fuente y Receptor en Movimiento

En este caso vale la combinación de las dos fórmulas anteriores, y se obtiene:

$$v_3 = v_0 \frac{1 - \left(\frac{u'}{v}\right) \cdot \cos \beta}{1 + \left(\frac{u}{v}\right) \cdot \cos \alpha} \quad [74]$$

donde u' es la velocidad del receptor y u la de la fuente. En esta fórmula están comprendidos los dos casos anteriores, ya que son los casos particulares en que u' es cero o u es cero, respectivamente.

Pared Reflectora en Movimiento

Supóngase tener un medio reflector de sonido, que llamaremos espejo, que se mueve con velocidad \vec{u} formando un ángulo γ con la velocidad \vec{v} del sonido. El sonido parte de la fuente emisora, llega al espejo, se refleja y avanza hacia el receptor. Se descarta la posibilidad de que el sonido llegue directamente desde la fuente al receptor.

Este caso se enfoca de dos maneras: 1. el sonido parte de la fuente emisora y llega hasta el espejo que se mueve; el caso equivale al de la fuente quieta y el receptor (que en este caso es el espejo) en movimiento, con lo cual la frecuencia que recibe el espejo es:

$$v_e = v_0 \left(1 - \frac{v}{v} \cos \lambda\right)$$

y 2. el sonido reflejado por el espejo en movimiento llega al receptor; el caso es equivalente al de la fuente emisora en movimiento (que ahora es el espejo) y el receptor quieto, con lo cual:

$$v_r = \frac{v_e}{1 + \frac{v}{v} \cos \gamma} = v_0 \frac{1 - \frac{v}{v} \cos \gamma}{1 + \frac{v}{v} \cos \gamma} \quad [75]$$

Vemos que el resultado final es el mismo que si la fuente y el receptor se movieran simultáneamente con igual y contraria velocidad y formando igual ángulo γ .

Medio en Movimiento

Una onda elástica, como es la sonora, necesariamente tiene que propagarse en un medio material, que puede ser un gas, un líquido o un sólido. Si el medio está en movimiento, su velocidad se suma vectorialmente a la velocidad de la onda. El cálculo es complejo si el medio se mueve en forma complicada. Si, en cambio, tiene una velocidad constante, se hace un cambio de coordenadas mediante el cual el medio resulta quieto y se mueven el emisor y el receptor con igual velocidad v , eventualmente, formando un ángulo con la velocidad del sonido. Es decir, se vuelve al caso general de fuente emisora en movimiento y receptor en movimiento.

EFEECTO DOPPLER EN LA LUZ

Numerosas mediciones han mostrado que la velocidad de la luz en el vacío, que es $c = 2,997925 \cdot 10^{10}$ cm/s no depende de la velocidad relativa entre la fuente y el receptor. Esto parece contradictorio. No se puede explicar dentro de los límites de la mecánica clásica de Newton. Para explicarlo fue necesaria la teoría especial de la relatividad de Einstein (1905), que muestra que las medidas de tiempos y de espacios son relativas al estado de movimiento de sistemas inerciales de observación.

Aunque la velocidad de la luz (en el vacío) es siempre constante, la frecuencia de la radiación electromagnética depende, en cambio, de la velocidad relativa de la fuente con respecto al receptor. El cálculo relativista conduce a la fórmula:

$$v = v_0 \left(\frac{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [76]$$

donde v es la velocidad relativa, α el ángulo entre la velocidad relativa y la normal al frente de onda y c es la velocidad de la luz. v_0 es la frecuencia propia de la fuente y v es la frecuencia medida por un observador que se mueve con velocidad v con respecto a la fuente.

Si la función anterior se desarrolla en serie, se ve que se parece mucho al promedio de las funciones encontradas a propósito del sonido.

Acusan efecto Doppler las estrellas, los bordes del Sol, la luz emitida por partículas en rápido movimiento (haces iónicos o rayos canales) y la radiación emitida por átomos y moléculas en movimiento Browniano. Las temperaturas elevadas de los gases y de los plasmas se miden por medio del ancho Doppler de las líneas espectrales emitidas.

Efecto Cerenkov

La velocidad de la luz en un medio refringente es $\frac{c}{n}$, donde n es el índice de refracción. En el agua, por ejemplo, $n = 1,333$, y la velocidad de la luz en el agua es $\frac{c}{1,333} = 2,25 \cdot 10^{10}$ cm/s. En un reactor atómico refrigerado por agua, los electrones rápidos provenientes del núcleo del reactor emiten luz al penetrar en el agua. La velocidad de estos electrones al salir del núcleo se aproxima (99%) a la velocidad de la luz en el vacío. Es, pues, mayor que la velocidad de la luz en el agua. En consecuencia se forman ondas de choque del campo eléctrico en el agua, las cuales tienen forma cónica, y su vértice son los respectivos electrones, como en el caso del avión supersónico. Los electrones son frenados, y en consecuencia emiten radiación electromagnética. Este efecto se llama Cerenkov en honor de uno de sus descubridores. La luz Cerenkov tiene un espectro continuo y posiblemente una longitud de coherencia muy pequeña.

CONDICIONES DE BORDE

Hemos considerado hasta ahora ondas en medios prácticamente infinitos a fin de evitar los contornos, o condiciones de borde. Los contornos imponen un comportamiento especial a la onda. Al incidir un haz de luz sobre un espejo, el haz se refleja, cambiando su dirección. Si penetra en el agua, el haz se "quiebra" (refracta), y también cambia su dirección (entre otras cosas). Si pasa por una ranura fina ocurren fenómenos complejos (difracción) que tienen por consecuencia que la sombra proyectada por el rayo no corresponda a la forma de la ranura. Si pasa por un prisma de vidrio o por las gotitas de agua de un regador, un haz de luz blanca se abre en un abanico de colores. Esto se debe a un fenómeno llamado dispersión, y aunque en rigor no es un efecto de borde, se incluirá también aquí

¿Qué es una condición de borde o de contorno? Es un cambio de medio, tal como una interfase gas-sólido, gas-líquido, dos líquidos no miscibles, etc. que provoca una discontinuidad en la propagación de la onda. A menos que el medio sea infinito, tarde o temprano aparece un borde. La luz proveniente de las estrellas, que se propaga en el espacio interestelar, una buena aproximación del vacío absoluto, es quizá el único caso en el que el contorno puede despreciarse.

REFLEXIÓN

A todos es familiar la reflexión de un rayo luminoso en un espejo y cualquiera puede verificar, con sólo la ayuda de un goniómetro, que el ángulo θ_i que forma el rayo incidente con la normal al espejo, es igual al ángulo de reflexión θ_r que forma el rayo reflejado con la normal. Gracias a esta propiedad nos vemos en un espejo plano casi tal cual nos ven los demás, sólo que se truecan la derecha y la izquierda. Si en vez de ser plano el espejo es cóncavo o convexo, se sigue verificando que

$$\theta_i = \theta_r \quad [77]$$

para cada punto, y calculando rayo por rayo se encuentra que la imagen se agranda o achica, según sea el caso.

La reflexión ocurre también con las ondas sonoras, y ejemplos de ello son el eco en las montañas, la reverberación en las salas de teatro, etc. Si se tiene una superficie plana suficientemente amplia, y reflectora de sonido, el ángulo de incidencia es igual aquí también al de reflexión. Esto ocurre cualquiera que sea el medio donde se transmite el sonido: gas, líquido o sólido, e inclusive en ondas superficiales de interfase, tales como las ondas superficiales del mar en calma al llegar a un acantilado. La explicación física es sencilla, si se tiene en cuenta que la velocidad de la onda incidente se puede expresar por (véase la Fig. 18):

$$\vec{v}_i = v_{ix} \vec{i} - v_{iy} \vec{j}$$

con lo cual:

$$\theta_i = \arctg \frac{-v_{ix}}{v_{iy}}$$

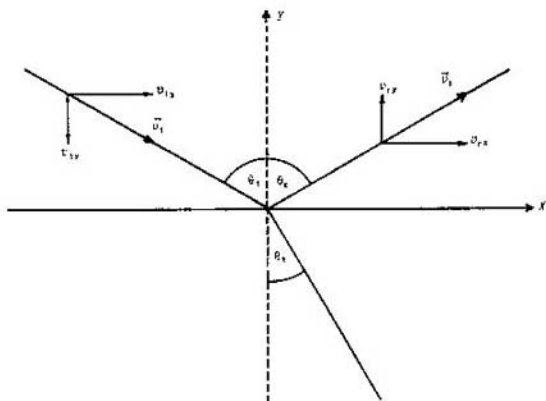


Fig. 18. Reflexión y refracción en la interfase entre dos medios con distintos índices de refracción.

La velocidad de la onda reflejada es:

$$\vec{v}_r = v_{rx} \vec{i} + v_{ry} \vec{j}$$

La velocidad de una onda depende del medio. La onda incidente y la reflejada se encuentran en el mismo medio y por lo tanto el valor absoluto de ambas velocidades debe ser igual:

$$|\vec{v}_i| = |\vec{v}_r|$$

Además, la pared reflectora no puede cambiar la componente del momento de la onda paralela a la misma, lo que impone que la componente de la velocidad de la onda paralela a la pared se conserve:

$$v_{ix} = v_{rx}$$

Entonces debe ser:

$$|v_{iy}| = |v_{ry}|$$

y, en efecto, se obtiene:

$$v_{ry} = -v_{iy}$$

con lo cual:

$$\theta_r = \arctg \frac{v_{rx}}{v_{ry}} = \arctg \frac{v_{ix}}{v_{iy}} = -\theta_i$$

Reflexión de Una Onda Unidimensional

Como ejemplo de reflexión, estudiemos dos casos posibles cuando se tiene una onda prácticamente unidimensional que se propaga: a) en una fina barra metálica y b) en un gas encerrado en un tubo delgado.

a) Considérese una barra metálica delgada uno de cuyos extremos está rígidamente empotrado en una pared y el otro extremo libre. Si se perturba el equilibrio de la barra aproximadamente en su centro con un suave golpe transversal, se generan dos ondas transversales: una que avanza hacia el extremo rígido y la otra hacia el libre. Supóngase que la energía se conserva en todo instante.

La onda no puede perturbar el extremo rígido, ya que éste no puede moverse, con lo cual el desplazamiento en este extremo es siempre nulo. Sin embargo, puede observarse una reflexión de la onda, la que, al llegar al extremo rígido, recorre el mismo camino en sentido inverso. Lo que ocurre es que debe necesariamente originarse una onda reflejada, a fin de que la composición de la onda original en el extremo rígido -- X_0 (ext. ríg.)-- con la de la onda reflejada -- X_r (ext. ríg.)-- dé como resultado una onda que es nula en dicho extremo en cualquier tiempo:

$$X_0 \text{ (ext. ríg.)} + X_r \text{ (ext. ríg.)} = 0 \quad [78]$$

lo que implica que hay una reflexión con inversión de signo de la amplitud, instante por instante. Si la perturbación es senoidal, esta inversión de la amplitud instantánea es equivalente a un cambio de π en la fase, y se tendrán ondas estacionarias. Obsérvese que la onda no se demora en la reflexión y que el cambio de fase no significa un cambio en el origen del tiempo. En la figura 19 se ilustra una secuencia de una reflexión en el extremo rígido, la que se construye teniendo en cuenta la ecuación [78].

Mientras tanto, al extremo libre también le llega una onda, y este extremo se mueve a consecuencia de la perturbación. Y también aquí observamos una reflexión de la onda. Observando cuidadosamente el extremo libre, se verá que un pequeño entorno del extremo se mueve paralelo a la posición de equilibrio. O sea que la derivada de la perturbación en el extremo con respecto a la coordenada es siempre nula. Lo que implica que la suma de la derivada de la onda original -- X_0' (ext. libre)-- más la derivada de la onda reflejada -- X_r' (ext. libre)-- es nula en todo instante:

$$X_0' \text{ (ext. libre)} + X_r' \text{ (ext. libre)} = 0 \quad [79]$$

En la figura 19 se ilustra además una secuencia de reflexión de una onda en un extremo libre. Obsérvense las relaciones entre derivadas de la onda original sola y la reflejada sola. Nótese asimismo que la amplitud de la onda reflejada tiene el mismo signo, instante por instante, que la onda original, con lo cual la composición entre la onda original y la reflejada en el extremo libre provoca una perturbación doble de la que ocurriría si sólo estuviera la onda original. Si la perturbación es senoidal no hay cambio de fase, sólo cambia el sentido de la velocidad y se vuelven a obtener ondas estacionarias.

La ecuación [79] puede obtenerse a partir de consideraciones generales sobre conservación de energía-momentum*.

b) Considérese ahora un gas encerrado en un tubo. Una onda sonora en un gas se produce como consecuencia de perturbar el gas mediante una variación de presión. Esta variación provoca una variación de densidad en el medio, la que se propaga como una onda longitudinal de densidad o, lo que es equivalente, de presión. A mayor densidad mayor presión, aunque no necesariamente proporcionales.

Es necesario confinar el gas en un tubo delgado para aceptar en primera aproximación que la onda es unidimensional. Para producir la onda

N. B. El término usado por los autores es "impulso", cuya adopción favorecen los físicos argentinos. No obstante, debido a que en los demás países de América Latina se usa generalmente la palabra "momentum", se optó por ella en este texto.

podemos poner un altavoz en un extremo del tubo a fin de que excite el gas, que bien puede ser aire. Supóngase primero que el otro extremo del tubo está abierto a la atmósfera. La onda producida en el altavoz avanza por el tubo hacia el extremo libre, provocando a su paso variaciones en el aire del tubo. Al llegar la perturbación al extremo abierto se encuentra con la atmósfera, que presenta una presión prácticamente constante, o sea que no puede ser sensiblemente perturbada, en forma similar al extremo rígido de la barra metálica delgada. Y ocurre lo mismo: una reflexión casi total, con perturbación casi nula en el extremo libre. O sea reflexión con inversión de signo de la amplitud instantánea. Si la onda fuese senoidal, habría un cambio de π en la fase y se obtendrían ondas estacionarias en el tubo.

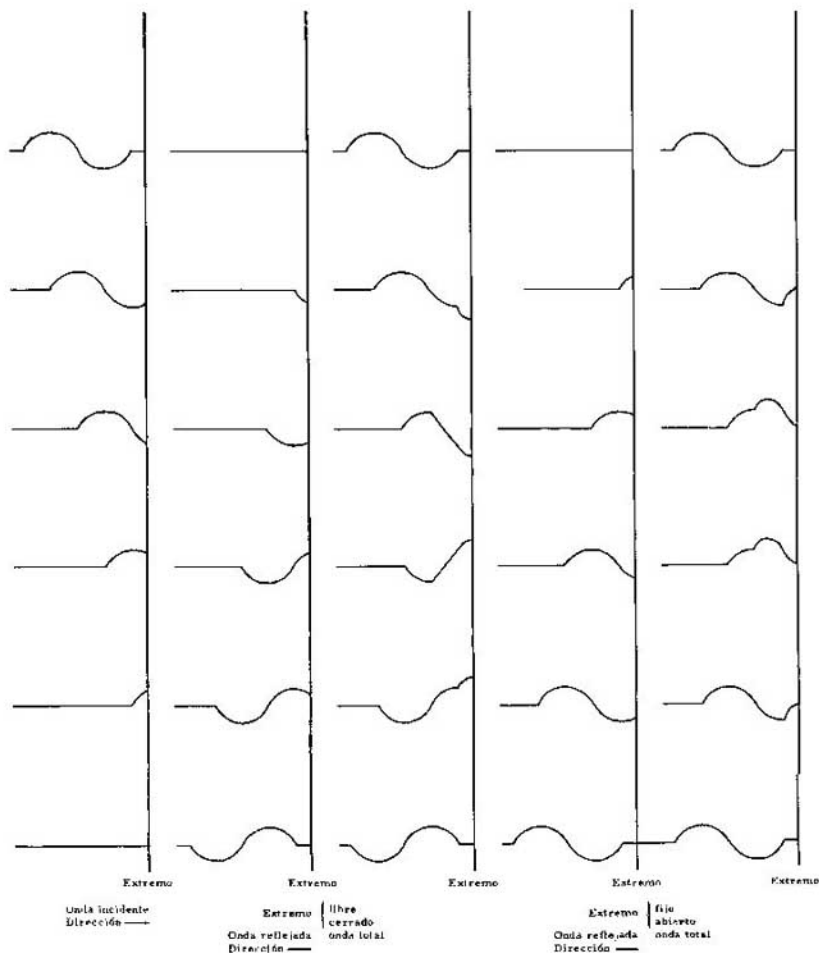


Fig. 19. Reflexiones en los extremos libre y fijo de una barra fina o en un tubo cerrado o abierto lleno de aire.

Si, en cambio, el extremo del tubo es cerrado, las partículas del gas rebotan en el extremo y duplican la presión en este punto, lo que provoca una onda reflejada con amplitud del mismo signo de la onda incidente, en todo similar a la barra metálica con extremo libre. Lo que se puede resumir así:

Fenómeno	Barra Metálica	Gas en un Tubo
Reflexión con cambio de signo de la amplitud instantánea	Extremo rígido	Extremo abierto
Reflexión sin cambio de signo de la amplitud instantánea	Extremo libre	Extremo cerrado

Así presentadas las cosas, pareciera que en los extremos de la barra ocurren las cosas al revés que en los del tubo. Éste no es el caso, ya que los dos fenómenos son similares: reflexión de una onda sonora que se transmite en un sólido o en un gas. Es fácil ver dónde se encuentra la dificultad del razonamiento. Extremo rígido significa para la barra estar conectada a un medio muy grande que aquélla no alcanza a perturbar, de igual modo que el aire confinado en el tubo abierto no puede perturbar la atmósfera. Y al revés para el otro caso.

55

REFRACCIÓN

Consideremos dos medios transparentes distintos. Al hacer incidir un haz luminoso sobre la superficie de separación (plana), una parte se refleja y la otra se transmite al segundo medio. La parte transmitida o refractada puede variar continuamente entre el 100% de la onda incidente (refracción total) hasta ser nula (reflexión total), es decir la parte transmitida puede ser mayor o menor que la parte reflejada, según las circunstancias del caso. La velocidad de la onda en ambos medios es diferente, lo que provoca un cambio de dirección en la propagación del haz, y este fenómeno se llama refracción (véase la Fig. 20). En efecto, mientras el rayo representado por el haz AB ha recorrido el camino $v_1 \Delta t = \overline{BD}$ en el primer medio, el rayo CD ha penetrado en el segundo medio hasta una profundidad $v_2 \Delta t = \overline{AC}$. Los rayos intermedios habrán penetrado a profundidades decrecientes a partir de A y hasta la profundidad cero en E . De la figura resulta:

$$v_1 \Delta t = AD \operatorname{sen} \theta_1$$

$$v_2 \Delta t = AD \operatorname{sen} \theta_2$$

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2}}$$

[82]

y la ecuación [82] es la ley de Snell. Vemos que el cociente de los senos de los ángulos de incidencia y de refracción es igual al cociente de las velocidades de la luz en los dos medios. Un cambio en la velocidad de propagación va seguido, pues, de una quiebra (refracción) en la dirección de propagación.

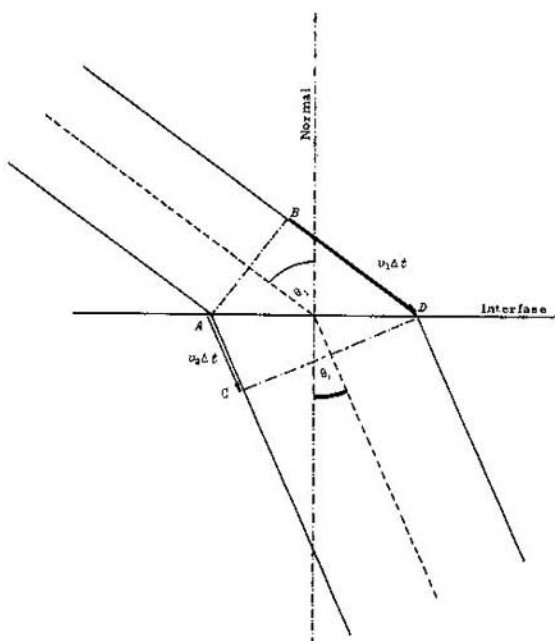


Fig. 20. Refracción: Cambio de dirección de una onda al pasar de un medio a otro con variación de velocidad (Ley de Snell).

La relación de Snell es válida tanto si se trata de ondas elásticas (sonoras) como de ondas luminosas. Sin embargo, en este segundo caso se prefiere definir un parámetro adimensional n_1 , que se llama índice de refracción, mediante la relación:

$$n_1 = \frac{v_1}{c} \quad [83]$$

o sea la relación entre la velocidad de la luz en el medio 1 (que depende de la frecuencia) y la velocidad de la luz en el vacío. Entonces el índice de refracción es una función del medio y de la frecuencia (y también del tipo de onda: luz, sonido longitudinal, sonido transversal, etc.). Con lo cual se llega a:

$$\frac{\text{sen } \theta_2}{\text{sen } \theta_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad [84]$$

Cuando se trata de las ondas sonoras no puede definirse un n , pues no se propagan en el vacío.

Es interesante observar que al pasar una onda luminosa de un medio a otro más denso, por ejemplo del aire al agua, el ángulo que forma un rayo con la normal disminuye $\theta_2 < \theta_1$, porque $v_2 < v_1$. Si en vez de una onda luminosa se trata de una onda sonora, el ángulo aumenta $\theta_2 > \theta_1$, porque la velocidad del sonido es mayor en un medio más denso, $v_2 > v_1$. Esta

es otra de las diferencias notables entre las ondas luminosas y las sonoras o elásticas.

Si v_1 es menor que v_2 , la relación de Snell no tiene sentido si θ_1 es mayor que un cierto θ_c , límite o crítico, tal que:

$$\text{sen } \theta_c = \frac{\text{sen } \theta_c}{v_1/v_2} = 1 \quad [85]$$

ya que el seno es siempre igual o menor que 1. Cuando $\theta_1 = \theta_c$, la refracción ocurre a $\theta_2 = 90^\circ$ lo que significa un rayo refractado rasante, paralelo a la superficie de discontinuidad. Para $\theta_1 > \theta_c$ no hay refracción y el rayo incidente se refleja totalmente, sin pérdida de intensidad. Este fenómeno se llama reflexión total. Calculemos θ_c en el caso de las ondas sonoras y en el de la luz cuando la onda pasa del aire al líquido y, viceversa, pasa de éste a aquél. La velocidad del sonido en el aire (frecuencia 1000 Hz) es de $3,31 \cdot 10^4$ cm/s y la velocidad en el agua es de $1,42 \cdot 10^5$ cm/s.

Sonido:
$$\text{sen } \theta_c = \frac{3,31 \cdot 10^4}{1,42 \cdot 10^5} = 0,233 \quad \theta_c = 13^\circ 30'$$

El índice de refracción del agua respecto de la luz de sodio (frecuencia $5,9 \cdot 10^{14}$ Hz) es 1,333 y el del aire es prácticamente 1.

Luz de sodio:
$$\text{sen } \theta_c = \frac{1}{1,333} = 0,75 \quad \theta_c = 48^\circ 40'$$

57

Así pues, si un frente de onda sonora incide desde el aire en el agua con un ángulo mayor que $13^\circ 30'$, se refleja totalmente, y lo mismo ocurre a un frente luminoso que, desde el agua, incide en el aire con un ángulo mayor que $48^\circ 40'$.

Se indicó la frecuencia del sonido y la de la luz porque la velocidad de propagación del sonido y la de la luz dependen de su respectiva frecuencia.

Sólo se han discutido los ángulos de reflexión y refracción mediante leyes que se conocen con los sendos nombres. Sin embargo este tratamiento es incompleto, ya que no permite conocer las relaciones entre la intensidad del sonido o la de la luz que se refleja y se refracta y el total de energía que llega a la superficie de discontinuidad. Como la intensidad de la luz o la del sonido es proporcional a la energía, siempre debe ocurrir que la intensidad reflejada más la refractada sea igual a la incidente:

$$I_r + I_t = I_i \quad [86]$$

por el principio de conservación de la energía. La relación I_r/I_i , en el caso de la luz, está dada por las leyes de Fresnel, deducidas muchos años antes de conocerse la teoría electromagnética de la luz. Las leyes de Fresnel son funciones de los índices de refracción n_1 y n_2 y también de la polarización de la luz incidente.

Si llamamos plano de incidencia al que contiene el vector normal (Fig. 21) a la superficie de discontinuidad y al rayo luminoso, puede incidir luz linealmente polarizada cuyo vector eléctrico está en este mismo

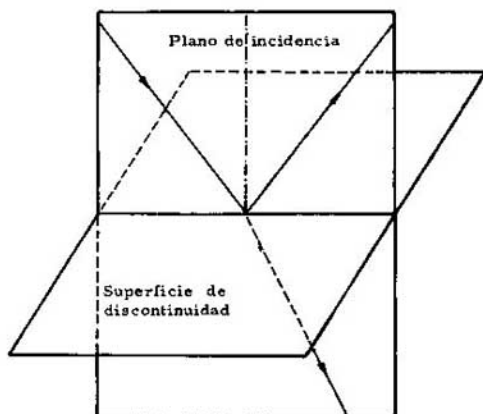


Fig. 21. Definición del plano de incidencia de un rayo de luz.

plano (paralelo) o luz linealmente polarizada cuyo vector eléctrico es ortogonal al plano de incidencia (perpendicular). Siempre el vector eléctrico es transversal al rayo. Las leyes de Fresnel dicen que la intensidad reflejada es diferente en ambos casos. En la figura 22 se ha representado I_r/I_i en función de θ_i , con $n = 1,55$, que es el caso de un vidrio común, con luz incidente desde el vacío ($n = 1$), que es aproximadamente igual que si fuera desde el aire.

58

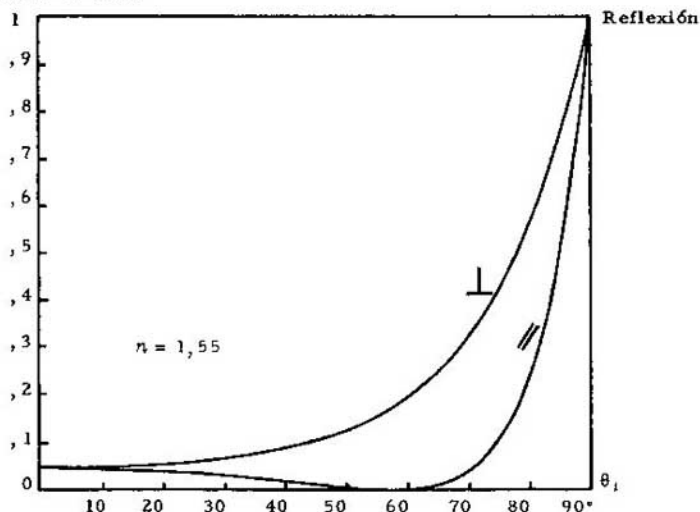


Fig. 22. Relación de intensidades de la luz reflejada polarizada en función del ángulo de incidencia. // indica polarización del vector eléctrico paralelo al plano de incidencia y \perp indica normal al mismo.

Al incidir luz no polarizada procedente de un medio 1 sobre un medio 2 y $n_1 < n_2$, hay un ángulo de incidencia θ_B , llamado ángulo de Brewster, tal que sólo se refleja luz linealmente polarizada cuyo vector eléctrico es perpendicular al plano de incidencia. Este ángulo θ_B satisface:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_3}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_3\right)} = \frac{n_1}{n_2} = \operatorname{tg} \theta_3 \quad [87]$$

o sea que el ángulo de refracción es $\theta_t = \pi/2 - \theta_3$ y la luz reflejada forma un ángulo de $\pi/2$ con el ángulo que forma el rayo refractado.

Cuando $\theta_i = \theta_3$, se transmite el cien por ciento de la luz linealmente polarizada paralela (obviamente, ya que nada de esta luz se refleja), y también se transmite una parte de la perpendicular. O sea que la luz por transparencia es parcialmente polarizada.

En la reflexión de una onda sonora que pasa de un gas a un líquido o a un sólido no ocurre polarización porque una onda sonora en un gas es una onda longitudinal. Sigue siendo válido preguntarse qué porcentaje de sonido se refleja y cuánto se refracta. En el caso del sonido que de líquidos o sólidos pasa a líquidos o sólidos, la cuestión es más complicada, porque ahora también hay ondas longitudinales y además ondas transversales.

DIFRACCIÓN

Es frecuente oír decir que el sonido "dobla las esquinas". Menos común es notar que la luz "dobla las esquinas" también. Ambos fenómenos se llaman difracción y los veremos desde un punto de vista semintuitivo más que riguroso, debido a la complejidad matemática que implica este último tratamiento. El fenómeno requiere un tratamiento similar en el caso de ondas luminosas o de ondas sonoras, pero, para simplificar, sólo se hablará aquí de ondas luminosas.

Si se deja pasar luz paralela por un agujero que se supone rectangular y suficientemente grande (una ventana), la sombra de la ventana tiene la misma forma que el agujero. Pero si se va disminuyendo el rectángulo hasta convertirlo en una fina ranura (décimas de milímetro) se verá que la sombra ya no tiene la forma de la ranura. Y la diferencia entre la ranura y su sombra crece de una manera sorprendente cuando el agujero se acerca a las dimensiones de la longitud de onda. (Este caso es fácil de verificar si se trata de ondas sonoras.) Lo que se observa es que cuando la ranura llega a ser menor que la longitud de onda, en vez de sombra, se obtiene una onda cilíndrica cuyo eje es la misma ranura. Así puede resolverse el problema de una ranura cualquiera subdividiéndola en secciones menores que λ y obtener la intensidad de la luz (monocromática) en cualquier punto como superposición de las ondas cilíndricas generadas en cada sección. En el límite, la ranura puede dividirse en elementos diferenciales y obtener la intensidad como una integral. Esta forma de cálculo es aproximada y sólo aplicable en los casos en que la desviación de los rayos de la trayectoria que recorrerían de acuerdo con la óptica geométrica (sin considerar el fenómeno de la difracción) es pequeña (véase Landau y Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*).

Si la distancia d_1 entre la fuente luminosa (Fig. 23) y la ranura es finita, y también es finita la distancia d_2 entre la ranura y el punto donde se quiere estudiar la intensidad luminosa que llega, entonces sólo importa una parte pequeña del total de la onda y nos encontramos con la difracción de Fresnel.

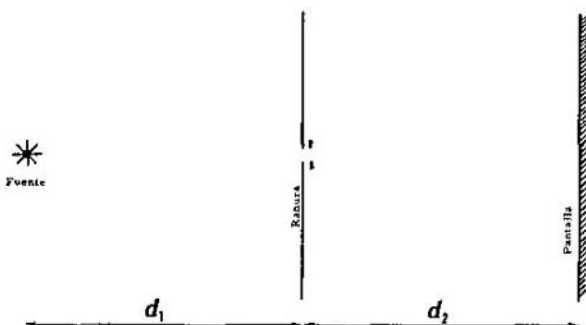


Fig. 23. Difracción de Fresnel.

Si en cambio una onda plana incide sobre la ranura (ello equivale a pensar que d_1 es infinito) la difracción se llama de Fraunhofer.

En el caso de incidencia normal de una onda plana de frecuencia angular ω , sobre una ranura de anchura $2a$ y longitud infinita, la intensidad recibida en un elemento de área limitada entre θ y $\theta + d\theta$, donde θ es el ángulo formado por la normal que pasa por el centro de la ranura y la recta que une el centro de la ranura con el elemento de área (véase la Fig. 24a), es:

$$I(\theta + d\theta) - I(\theta) = \frac{I_0}{\pi a \frac{\omega}{c}} \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\omega}{c} a \theta\right)}{\theta^2} d\theta \quad [88]$$

donde I_0 es el total de intensidad que incide en la ranura.

En el caso tener una serie de ranuras idénticas y equiespaciadas y una onda plana con incidencia normal, cada ranura producirá la misma figura de difracción anterior, pero el conjunto produce además interferencia. Supóngase una serie de ranuras semiinfinitas cuya distancia entre centro y centro de ranuras vecinas sea d (Fig. 24b). Para un ángulo θ_{nA} tal que:

$$s = d \text{ sen } \theta_{nA} = n\lambda \quad [89]$$

donde n es un entero cualquiera, con lo cual s es un número entero de longitudes de onda, el rayo que sale de la ranura 1 se sumará al que sale de la ranura 2 (y así sucesivamente) con interferencia constructiva máxima, y entonces en la dirección θ_{nA} , a la derecha de la ranura, se verá un máximo relativo de intensidad. Para otro ángulo θ_{mI} tal que:

$$s = d \text{ sen } \theta_{mI} = m\lambda/2 \quad [90]$$

donde m es un entero impar, se tendrá un mínimo relativo de intensidad, porque al sumarse el rayo de la ranura 1 al rayo de la ranura 2 con un desfase de media longitud de onda, habrá máxima interferencia destructiva.

Este dispositivo se llama red de difracción y se debe notar que, por ser los ángulos θ_{nA} y θ_{mI} función de la frecuencia (o lo que es equiva-

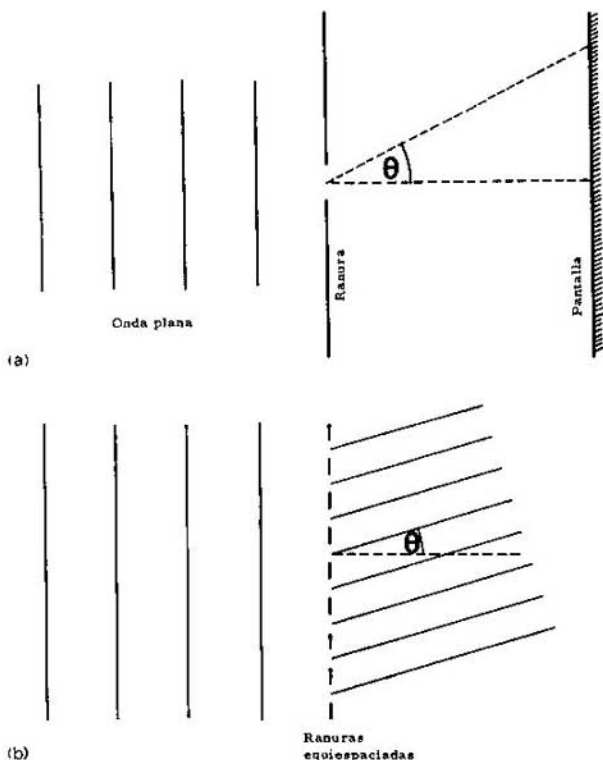


Fig. 24. Difracción de Fraunhofer: (a) Una sola ranura; (b) red de muchas ranuras.

lente, de la longitud de onda), la red tiene entonces la propiedad de separar la luz por frecuencias, y permite, conociendo la constante d (constante de la red) medir la longitud de la onda con bastante precisión. Esta puede llegar a 10^{-4} \AA .

Podría completarse la discusión de la red con la consideración del valor de la intensidad de luz para cada θ_{nA} en función de n (ecuación [89]), que se llama número de orden. Éste es función del número de ranuras, y a medida que este número aumenta, los máximos son más netos y angostos y los mínimos más anchos. Cuando el número de ranuras tiende a infinito sólo se ve luz en la dirección θ_{nA} , y entre un orden y el siguiente sólo hay oscuridad (se dice que el máximo tiende a una delta de Dirac), y la intensidad del orden n vale:

$$I_n = I_0 \frac{2d}{\pi^2 a} \frac{\text{sen}^2\left(\pi \frac{a}{2d}\right)}{n^2} \quad [91]$$

donde I_0 es la intensidad total de luz que pasa por todas las ranuras, a es el ancho de cada ranura y d es la constante de la red.

DISPERSIÓN

Se destacó ya que la velocidad de una onda depende del medio de propagación y también de su frecuencia. Por esto último, cuando se calculó el ángulo crítico o límite de refracción de una onda luminosa y de una onda sonora en la discontinuidad aire-agua, se puntualizó la frecuencia de que se trataba. Esta propiedad de casi todos los medios de requerir una velocidad de onda que es función de su frecuencia produce el fenómeno de dispersión de la luz. Si dos rayos de distinta frecuencia inciden con el mismo ángulo θ_i sobre una superficie de discontinuidad, el ángulo de refracción θ_r difiere de uno a otro rayo, ya que este ángulo es función del ángulo de incidencia y de la velocidad de las ondas en los dos medios (ecuación [82]).

Si se hace incidir ondas de una mezcla de frecuencias, como es el caso de la luz blanca, sobre una superficie plana de vidrio, la refracción dispersa la luz en cada una de las frecuencias, es decir, habrá un θ_r para cada frecuencia. Esto ocurre precisamente en los prismas de vidrio con que se obtiene el espectro de la luz visible, y en las gotas de lluvia que hacen posible el fenómeno del arco iris.

MOVIMIENTO OSCILATORIO

Un movimiento oscilatorio es consecuencia de la perturbación de un estado de equilibrio estable, en cuyo caso entran en acción fuerzas tendientes a anular la perturbación. Es decir, se suscitan fuerzas opuestas a la que causó la elongación de la partícula --elongación es la medida del desplazamiento de la partícula a partir de su posición de equilibrio. La fuerza tiene la misma dirección y sentido contrario de la causante de la elongación. Se la llama fuerza de recuperación.

¿Qué relación cuantitativa media entre la intensidad de la fuerza de recuperación y el valor de la elongación? No se puede contestar en general en el caso de elongaciones grandes. Su valor dependerá de la clase de fuerzas que mantienen el equilibrio. Pero, en general, la ecuación de la fuerza de recuperación puede desarrollarse en una serie de potencias del valor x de la elongación:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \quad [92]$$

donde no aparece un término constante a_0 , porque si apareciera la partícula no estaría en equilibrio. El primer a_1 no nulo debe ser negativo para que el equilibrio sea estable.

Si el coeficiente del término lineal (a_1) no es nulo, el primer término llega a ser el único importante para valores suficientemente pequeños de la amplitud. Los demás pueden despreciarse. A amplitudes pequeñas, si el coeficiente a_1 no es nulo, la fuerza de recuperación es proporcional a la primera potencia de la elongación, y produce, como se verá, oscilaciones armónicas. Si la amplitud crece, se llega a valores en los cuales los términos superiores ya no pueden ser despreciados. La oscilación ya no será armónica.

Un sistema físico efectúa oscilaciones "libres" si al transmitírsele una cierta energía ésta puede repartirse en dos formas transformables la una en la otra. Éstas pueden ser energía cinética y energía potencial o energía eléctrica y energía magnética. La oscilación es no amortiguada si ninguna parte de la energía "se pierde". Perdersé significa aquí transformarse en formas de energía no utilizables en la oscilación (calor, por ejemplo). Si hay pérdida de energía, lo que por lo general ocurre, la oscilación es amortiguada. Si se quiere evitar el amortiguamiento, hay que suministrar continuamente, o a breves intervalos, energía adicional. Para esto sirve la cuerda de un reloj o la pila eléctrica que alimenta la oscilación de un volante, de un diapasón o de un cuarzo piezoeléctrico.

Péndulo. Supongamos un péndulo, es decir, un cuerpo de masa m , colgando de un hilo inicialmente en reposo. Para hacer más simple el problema, imaginemos que el hilo es inextensible y de masa nula, aunque en la

práctica ninguna de estas dos cosas puede ocurrir. Podemos transferirle energía por medio de un golpe aplicado horizontalmente (véase la figura 25). Esta energía se transforma inicialmente en la energía cinética del cuerpo:

$$T_p = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (l \cdot \dot{\theta})^2; \quad v = l \cdot \dot{\theta}$$

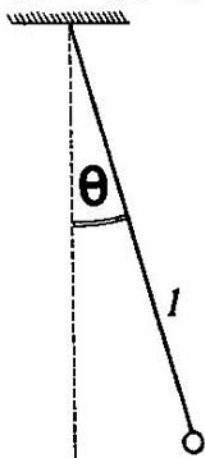


Fig. 25. Péndulo simple.

donde v es la velocidad tangencial, l la longitud del hilo, θ la elongación angular y $\dot{\theta} = dt/dt$.

64

Al alejarse la masa m de su posición de equilibrio, la inextensibilidad del hilo la obliga a subir venciendo la fuerza de la gravedad, o peso del cuerpo. Con ello se reduce progresivamente la energía cinética hasta anularse. Se dice que la energía se ha transformado en energía potencial del sistema masa del péndulo-tierra:

$$V_p = mgh = mgl \cos \theta$$

Al retornar el péndulo hacia su punto de partida la energía potencial se va transformando en energía cinética. Si el movimiento no es amortiguado, la suma de la energía cinética y de la potencial del sistema es constante en todo momento:

$$\begin{aligned} E_p &= T_p + V_p = \frac{1}{2} m v^2 + mgh = \\ &= \frac{1}{2} m (l \cdot \dot{\theta})^2 + mgl \cos \theta \end{aligned} \quad [93]$$

prescindiendo de términos de orden superior. En efecto, si se quiere ser exacto, hay que tener en cuenta que la Tierra oscila impulsada por el péndulo en movimiento. El momentum se conserva, luego la relación entre la velocidad de la masa del péndulo y la de la Tierra es inversa a la relación de las masas:

$$m_p \cdot v_p = m_T \cdot v_T \quad \therefore \quad \frac{v_p}{v_T} = \frac{m_T}{m_p}$$

La energía cinética de la Tierra se expresa:

$$T_T = \frac{1}{2} m_T \cdot v_T^2 = \frac{1}{2} m_T \frac{m_p^2 \cdot v_p^2}{m_T^2} = T_p \cdot \frac{m_p}{m_T}$$

o sea que también las energías cinéticas respectivas están en relación inversa a las masas, por lo cual T_1 puede despreciarse.

El movimiento del péndulo es oscilatorio y no armónico. La fuerza de recuperación no es proporcional a θ , ya que vale:

$$F(\theta) = -\frac{dV_p}{d\theta} = -mgL \operatorname{sen} \theta \quad [94]$$

pero esta expresión tiene el siguiente desarrollo en serie de potencias de θ :

$$F(\theta) = -mgL \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right) \quad [95]$$

y para valores cuya amplitud θ_0 es tal que:

$$mgL \frac{\theta_0^3}{3!} \ll mgL \theta_0$$

el movimiento puede considerarse armónico. Más adelante se calculará el movimiento del péndulo a partir del valor de la fuerza.

Oscilaciones de tipo electromagnético. Se producen mediante un condensador eléctrico de capacidad C que almacena energía eléctrica $\frac{1}{2}CV_0^2$ --donde V_0 es la tensión eléctrica máxima-- conectado a una autoinducción de inductancia L , en la que una corriente I produce una energía magnética $\frac{1}{2}LI^2$, con un máximo $\frac{1}{2}LI_0^2$. La energía total se expresa por:

$$E_T = \frac{1}{2}C \cdot (V(t))^2 + \frac{1}{2}L \cdot (I(t))^2 = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 \quad [96]$$

y es constante salvo por las mermas por calor de Joule en el conductor, por pérdida dieléctrica en el condensador, por pérdidas de líneas magnéticas en la inductancia y por irradiación electromagnética. Este sistema oscila, transfiriéndose energía eléctrica de la capacidad a la inductancia, que la acumula en forma de energía magnética, hasta que la diferencia de potencial en el condensador es nula y por ende también es nula su energía. En ese instante comienza el proceso inverso y la energía magnética de la inductancia que había llegado a valer $\frac{1}{2}LI_0^2$ se va transformando en energía eléctrica hasta cargar totalmente el condensador y así sucesivamente, con una frecuencia:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

Las mermas que ocurren en el circuito pueden ser compensadas con un sistema alimentador.

Fuerza que Produce Un Movimiento Armónico

Demostremos en detalle que una fuerza:

$$F = -\alpha x$$

aplicada a una partícula de masa m produce una oscilación armónica.

La ecuación de movimiento:

$$F = m\ddot{x} = -\alpha x \quad [97]$$

es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden cuya solución es:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi)$$

Aparecidos constantes de integración arbitrarias A y φ , cuyos valores serán fijados al indicar las condiciones iniciales. La energía cinética de la partícula es:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - \varphi) \quad [98]$$

La energía potencial es igual al trabajo realizado por la fuerza:

$$\begin{aligned} dV &= -F \cdot dx = \alpha \cdot x \cdot dx \\ V &= \frac{1}{2} \alpha \cdot x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad [99]$$

La energía total es, pues:

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 (\sin^2(\omega t - \varphi) + \cos^2(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \quad [100]$$

y no es función del tiempo. Vemos que la energía --excepto una constante aditiva arbitraria-- es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia angular.

66

También se puede partir del movimiento armónico y calcular cuál debe ser la fuerza que lo produce. Partiendo de:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi)$$

se pretende encontrar una fuerza $F = m\ddot{x}$ que lo produzca. El cálculo es en este caso inmediato:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \varphi) = -\omega^2 \cdot x \\ \therefore F &= -m\omega^2 x \end{aligned}$$

Esta expresión es igual a la obtenida anteriormente si se pone $\alpha = m\omega^2$.

ENERGÍA EN MOVIMIENTO ONDULATORIO DE CUERPOS ELÁSTICOS

En los cuerpos elásticos los puntos masa o las partículas son moléculas, iones o átomos, y las fuerzas elásticas entre ellos se deben a campos electromagnéticos de atracción y de repulsión. La energía cinética total de un cuerpo elástico es la suma de las energías cinéticas parciales de cada molécula, ion o átomo, pero la energía potencial ya no corresponde a una partícula y a un sistema exterior que la sostiene, ni siquiera a un grupo de partículas, sino a todo el sistema material en vibración. No hay ahora un cuerpo exterior que sirva de apoyo a las fuerzas potenciales, por lo cual se dice que los potenciales --o las fuerzas-- son internos.

Como todo problema de muchos cuerpos, sólo se puede resolver de una manera, a menos que se haga un modelo simplificado del mecanismo de interacción entre partículas. Sin embargo, se verá que se pueden sacar conclusiones sobre la energía total, sin conocer la energía potencial.

La energía total no puede ser la suma de la energía de cada partícula aislada simplemente porque las partículas no están aisladas. Su expresión formal es:

$$E = T + V = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 + V \quad [101]$$

donde V representa la energía potencial de interacción de las partículas entre sí. E debe ser constante (suponemos que no se disipa energía). Esto implica que cuando T sea máxima V debe ser mínima. Como la energía potencial puede elegirse con un cero arbitrario, podemos establecer, sin llegar a una restricción, que:

$$V = 0 \text{ cuando } T \text{ es máxima } \therefore E = T_{\max}$$

Particularmente para un sistema tridimensional de N partículas de masa m que se mueve según una onda plana transversal en tres dimensiones, donde la ecuación de movimiento de cada partícula i que está en el plano z_1 es:

$$X(z = z_1, t) = A \cos(\omega t - k z_1 - \varphi)$$

su velocidad será:

$$v_1 = \dot{X}(z = z_1, t) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t - k z_1 - \varphi)$$

y la energía cinética total:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N v_i^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sum_{i=1}^N \operatorname{sen}^2(\omega t - k z_1 - \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 f(\omega t, k z, \varphi, N) \end{aligned} \quad [102]$$

donde:

$$f(\omega t, k z, \varphi, N) = \sum_{i=1}^N \operatorname{sen}^2(\omega t - k z_1 - \varphi)$$

y

$$E = T_{\max} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 g(\omega, k z, N) \quad [103]$$

siendo $g(\omega, k z, N)$ el máximo de $f(\omega t, k z, \varphi, N)$ con respecto a t .

y nuevamente vemos que la energía total en este caso es proporcional a la masa de cada partícula y al cuadrado de la amplitud. No puede decirse nada sobre la frecuencia angular ω , ya que si bien por un lado figura elevada al cuadrado, por otro lado es uno de los argumentos de la función g . E no puede depender de la elección del origen del tiempo ni del origen de las coordenadas espaciales. Por lo tanto no puede depender de la fase.

Las ondas en fluidos, aire o líquidos, se producen por un aumento local de la presión (energía potencial) que provoca un incremento de la velocidad de las partículas (energía cinética), y viceversa, dando origen a una onda de presión-velocidad medias que se propaga en el medio. Para el caso de excitación por una onda plana, se puede demostrar que el resultado es similar al expresado en la ecuación [103], pero como no existe una separación regular entre átomos, se debe tomar un valor medio de $g(\omega, k z, N)$ que tiende a una constante por unidad de volumen, con lo cual se obtiene que la energía media por unidad de volumen es prácticamente igual a la energía cinética por unidad de volumen:

$$\vec{E} = \rho_0 \cdot v^2 = \frac{1}{2} \rho_0 \cdot A^2 \cdot \omega^2$$

donde ρ_0 es la densidad media.

Energía de Una Cadena Lineal

Consideremos, como ejemplo, la llamada "cadena lineal", que es uno de los modelos más simples que uno pueda imaginarse para explicar el comportamiento de una cuerda elástica.

La cadena lineal está compuesta por una sucesión de partículas iguales, de masa m , separadas por resortes también iguales de masa mucho menor, a fin de que la masa de los resortes pueda ser despreciable por comparación con la masa de las partículas. A los fines prácticos esto equivale a suponer que los resortes tienen masa nula.

La cadena en reposo yace sobre una línea recta, que llamaremos el eje z , y las partículas equidistan entre sí una distancia a , que se la llama "espaciado entre partículas".

La cadena se excita separando una o más partículas de su posición de reposo, lo que se logra de distintas formas: i) desplazándolas en el sentido del eje z , acercando o alejando una partícula de la inmediata (siempre manteniéndolas en el mismo eje) con lo cual se tendrán movimientos longitudinales, ii) desviándolas transversalmente, por ejemplo en el sentido del eje x , con lo cual se tendrán movimientos transversales, y finalmente iii) combinando ambas excitaciones, con lo cual el movimiento resultante será también una combinación de movimientos longitudinales y transversales.

A fin de abreviar se considerarán sólo movimientos longitudinales.

La energía de la cadena lineal se puede dividir en la energía potencial de sus resortes, cuando éstos están comprimidos o expandidos, y la energía cinética de las partículas, cuando éstas están en movimiento.

Si llamamos u_j a la separación de la partícula j de su posición de reposo, la energía potencial total de la cadena se expresa por:

$$V = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} k (u_j - u_{j+1})^2 \quad [104]$$

donde k representa la constante del resorte.

La energía cinética por su parte será:

$$T = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m v_j^2 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m \left(\frac{du_j}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^N \left(\frac{du_j}{dt} \right)^2$$

donde N es el número total de resortes y N es el número total de partículas.

Estos números sólo pueden diferir en una unidad según que los extremos de la cadena sean partículas o sean resortes.

Cuanto más larga es la cadena, menos importan los extremos. Un buen modelo de una cadena lineal es un alambre muy fino de metal puro, donde las partículas son los átomos y los resortes las fuerzas de origen electromagnético que los unen.

La ecuación del movimiento de la partícula j es:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_j &= -\frac{dV}{du_j} = -k(u_j - u_{j+1}) + k(u_{j-1} - u_j) = \\ &= k \cdot u_{j-1} - 2ku_j + ku_{j+1} \end{aligned}$$

o sea que el movimiento de la partícula u_j depende de las posiciones de las dos primeras vecinas (consecuencia del postulado *a priori*). Con lo cual se obtiene un sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que, en este caso, tiene solución exacta, que es:

$$u_j = A \cos(\omega t - \varphi) \cdot \cos(q \cdot j \cdot a) \quad [105]$$

donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m} (2 - \cos qa)} = \sqrt{\frac{k}{m}} 2 \operatorname{sen} qa;$$

a : es el espacio entre partículas vecinas y tiene dimensión de longitud;

q : es el número de onda y tiene dimensión de inversa de longitud (se escribe q y no k , como se acostumbra escribir el número de onda para no confundirlo con la constante de los resortes);

j : 1, 2, 3, ..., N indica orden de la partícula;

A : es una constante arbitraria, que depende de las condiciones iniciales,

ω : constante arbitraria.

También es solución del problema la ecuación:

$$u_j = A \cos(\omega t + qja - \varphi) \quad [106]$$

con los mismos parámetros ya definidos. Sin embargo hay diferencias entre una y otra solución. Según la ecuación [106] todas las partículas oscilan con frecuencia ω y tienen la misma amplitud A . La longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{q}$$

y la energía total:

$$\begin{aligned} E &= T + V = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^N A^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + qja - \varphi) + \\ &+ \frac{1}{2} k \sum_{j=1}^N A^2 [\cos(\omega t + qja - \varphi) - \cos(\omega t + qja + qa - \varphi)]^2 = \\ &= \frac{1}{2} k A^2 f(\omega, qa) \end{aligned}$$

y el resultado no es función de t porque la energía se conserva, ni tampoco de q , que sólo significa un cambio de origen en el tiempo.

Si la solución es [105], también las partículas oscilan con la misma frecuencia ω y tienen la misma longitud de onda que [106], pero la amplitud de cada una es distinta $A \cdot \cos qja$ y, en particular, puede haber partículas que no se muevan (aquellas para las cuales $qja = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$). La energía se expresa en este caso:

$$\begin{aligned} E &= T + V = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^N A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \varphi) \cos^2 qja + \\ &+ \frac{1}{2} k \sum_{j=1}^N A^2 \cos^2(\omega t - \varphi) (\cos qja - \cos q(j+1)a)^2 = \\ &= \frac{1}{2} k A^2 \mathcal{Q}(\omega, qa) \end{aligned}$$

Vemos que en ambos casos la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, a la constante del resorte y a una función de la frecuencia y del producto qa . En ciertos casos sencillos, donde $q \cdot a$ es una relación simple de 2π , la energía puede expresarse en forma explícita.

Este modelo de la cadena lineal, generalizado a tres dimensiones, sirve de modelo elemental de un sólido real. Un poco más complejo, si bien dentro de la misma idea de reemplazar las interacciones entre átomos por fuerzas proporcionales a distancias relativas (similares a resortes) es el modelo de Debye, que explica ciertas propiedades de los sólidos, tales como calor específico, ciertos tipos de conductividad, etc., con buena aproximación a los casos reales.

70

FONONES

Vamos a revisar las hipótesis hechas hasta ahora. Para determinar la energía de un sistema se supuso, implícitamente, que se puede determinar en un instante dado todo el estado del sistema. Es decir, que se podía conocer simultáneamente la posición y velocidad de cada una de las partículas que lo componen a fin de evaluar con exactitud la energía potencial y la energía cinética, respectivamente. Así, en el caso de la cadena lineal, al poder expresar el apartamiento de la partícula " j " como una función del tiempo, se podía conocer en cualquier momento la posición y velocidad de cada partícula. Esta hipótesis, el conocimiento total de la dinámica de un sistema --o, aunque más no fuera, de una sola partícula-- es característica fundamental de la mecánica clásica.

Si se profundiza el estudio, se advierte que conocer un sistema físico implica observarlo mediante un proceso de medición. Y cuando se habla del "conocimiento total" y se olvida el proceso de medición necesario para obtener tal conocimiento, se está admitiendo que el sistema físico no se ve afectado por dicho proceso de medición.

Esto sólo puede ser cierto dentro de ciertos límites y como una aproximación. La intensidad de la perturbación producida por una medición tiene un límite finito no nulo cuando se penetra en el mundo microscópico,

y no puede ser atenuada por la capacidad del observador, ni por el refinamiento del proceso de medición.

Por ello, el principio intuitivo de causa-efecto debe ser revisado. Sólo se aplica a sistemas no perturbados, lo que implica sistemas no observados. Si se observa un sistema dos veces, la perturbación causada la primera vez puede afectar su comportamiento hasta el punto que sea imposible predecir con exactitud lo que se observa la segunda vez. Sólo se puede hablar en términos de probabilidades para determinar el sistema.

Volviendo a la cadena lineal, se puede intuir que la perturbación producida por una observación, hecha en un corto intervalo de tiempo, cambia la energía total de la cadena. También se puede intuir que la perturbación producida por una observación más intensiva, hecha en un intervalo de tiempo más breve, afectará más a la energía total. No quiere decir esto que la perturbación total del sistema sea menor, sino que la perturbación depende del intervalo de tiempo de observación (Δt) y del cambio de la energía (ΔE). Esto se expresa en forma de principio: El principio de incertidumbre de Heisenberg:

$$\Delta t \cdot \Delta E \sim h \quad [107]$$

La perturbación que se produce en la determinación de la energía al hacer una observación que dura un tiempo Δt , nunca puede ser menor que $h/\Delta t$, donde h es la constante universal de Planck, que vale $6,6262 \cdot 10^{-27}$ erg. s.

Esto implica que si se pudiera observar un sistema con el mayor cuidado durante un tiempo infinito se podría estar seguro del valor de su energía sin error. ¡Lástima que no se disponga de tiempo infinito!

Estas ideas y otras hipótesis básicas fueron dando forma a una nueva mecánica, la mecánica cuántica, que permite el estudio de sistemas microscópicos. Ello no significa que sólo sirva para el mundo microscópico. Toda la física parece hoy en día quedar dentro de la esfera de la mecánica cuántica, pero en la escala macroscópica suele coincidir con la mecánica clásica, aunque no siempre. Los fenómenos magnéticos en metales son un típico caso de física macroscópica que sólo se pueden describir mediante la mecánica cuántica.

Evidentemente, como la supuesta cadena está compuesta de átomos, debe aplicarse la mecánica cuántica. Así se encuentran resultados diferentes. El más importante, es que la energía no toma cualquier valor sino que:

$$E = \sum_{i=1}^N \left(n_i + \frac{1}{2} \right) h \nu_i \quad [108]$$

donde n_i puede tomar cualquier valor entero, entre 0 e ∞ ; h es la constante de Planck, y ν_i es la frecuencia de oscilación. La energía del sistema puede aumentarse o disminuirse en cantidades finitas $h\nu_i$, cuando se incrementa o disminuye n_i en una unidad. Dentro de un formalismo matemático especial puede hablarse de que cada incremento de energía $h\nu_i$ se debe a la creación de una nueva entidad llamada fonón, y disminuir la energía en $h\nu_i$ es destruir un fonón. Finalmente, con ciertos cuidados, los fonones pueden considerarse como "partículas" (con comillas) dentro de nuestra cadena. Y se acostumbra hablar de choque de fonones y par-

tículas, cuando se trata de las interacciones de las vibraciones de una cadena con las partículas que la componen o con otras partículas (electrones, por ejemplo) que pudieran coexistir.

Para el caso tridimensional, la energía cuantificada del modelo se expresa por:

$$E = \sum_{i=1}^{3N} \left(n_i + \frac{1}{2} \right) h \nu_i \quad [109]$$

cundo se tienen $3N$ partículas. Nuevamente, n_i puede tomar cualquier valor entero entre 0 e ∞ . Además nunca se puede obtener una energía menor que:

$$E = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} h \nu_i$$

lo que se llama energía de punto cero. Esta energía subsiste aun si se enfría el metal hasta el cero absoluto de temperatura.

En el modelo de Debye, se parte de la hipótesis de que sólo son posibles en un sólido frecuencias menores que una frecuencia ν_p . Esto concuerda bastante bien con la experiencia.

Este resultado podía preverse, ya que no es lógico pensar que puedan existir frecuencias más altas que aquellas donde la longitud de onda es igual al espaciado entre átomos.

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Hasta aquí se trató de preferencia de ondas en medios materiales u ondas elásticas. Pero no se debe olvidar que también hay ondas en el vacío, que son las ondas electromagnéticas en general, y de las cuales la luz es un caso particular. La propagación de estas ondas en el vacío es posible porque el campo eléctrico y el magnético se propagan también en el vacío.

El campo eléctrico que corresponde a una onda plana que se desplaza en el vacío según el eje x , se describe mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= E_0 \cos(\omega t - kx - \varphi) \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad [110]$$

donde E_x , E_y y E_z son las componentes x , y y z del campo eléctrico, E_0 es la amplitud, y la velocidad de propagación de la onda está dada por:

$$v = \frac{\omega}{k} = c = 2,997925 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$$

que es constante en el vacío.

Debemos recordar que un campo eléctrico variable en el tiempo no es independiente de un campo magnético, y viceversa, ya que ambos están relacionados por las ecuaciones de Maxwell, lo que obliga a su coexistencia.

La presencia del campo eléctrico dado por el conjunto de ecuaciones [110] suscita la aparición de un campo magnético que se describe por el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} H_x &= 0 \\ H_y &= 0 \\ H_z &= H_0 \cos(\omega t - kx - \varphi) \end{aligned} \quad [111]$$

donde $H_0 = E_0$ (véase la Fig. 26).

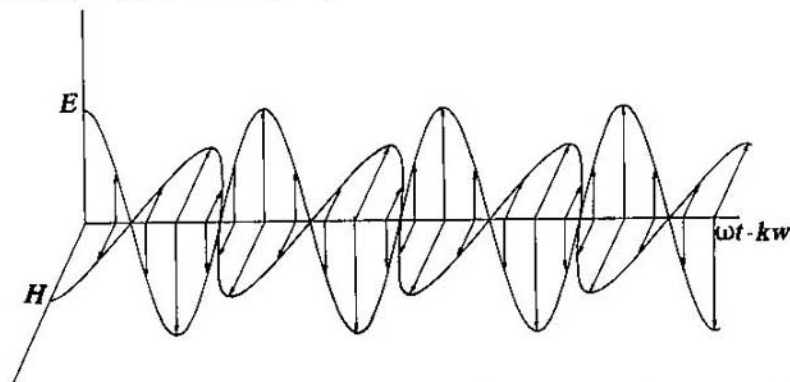


Fig. 26. Ondas electromagnéticas: Campo eléctrico y magnético en función del argumento $\omega t - kx - \varphi$ respecto a una onda plana.

73

Es necesario advertir que se viene usando el sistema de unidades gaussiano. De lo contrario las fórmulas serían diferentes. Es de lamentar que la coexistencia de muchos sistemas de unidades no contribuya a la paz científica.

La densidad energética, esto es, la energía por unidad de volumen de campos electromagnéticos se expresa en el sistema gaussiano:

$$W = \frac{(E^2 + H^2)}{8\pi} \quad [112]$$

con lo cual en el caso de nuestra onda

$$\begin{aligned} W &= \left(\frac{1}{8\pi}\right) [E_0^2 \cos^2(\omega t - kx - \varphi) + H_0^2 \cos^2(\omega t - kx - \varphi)] = \\ &= \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t - kx - \varphi)}{4\pi} = \frac{H_0^2 \cos^2(\omega t - kx - \varphi)}{4\pi} \end{aligned} \quad [113]$$

La onda lleva un impulso en el sentido del eje x , y se puede demostrar que su valor, por unidad de volumen, es:

$$P_x = \frac{W}{c} = \frac{E_0^2}{4\pi c} \cos^2(\omega t - kx - \varphi)$$

$$P_y = 0$$

$$P_z = 0$$

Se ve, pues, que la densidad de energía, y como consecuencia el impulso de una onda electromagnética, no son constantes en el tiempo, sino que fluctúan con una frecuencia ω , aunque no en forma armónica, sino proporcionalmente al cuadrado de un coseno.

FOTONES

A fines del siglo pasado se observó (H. Hertz, 1886) que al incidir luz sobre la superficie de ciertos metales (sodio, potasio, rubidio), de óxidos y de aleaciones, en frío, eléctricamente aislados y en el vacío, se consigue hacer circular una corriente eléctrica. El dispositivo experimental para probarlo se muestra en la figura 27.

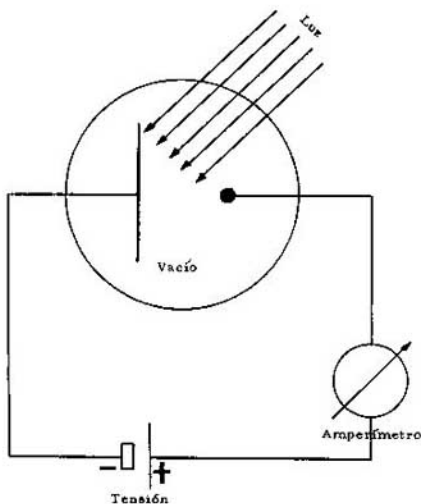


Fig. 27. Efecto fotoeléctrico. Dispositivo experimental.

Se comprueban con este dispositivo los siguientes fenómenos:

a) No circula corriente si el dispositivo está en completa oscuridad, ni tampoco si la longitud de onda de la luz incidente es mayor que una cierta magnitud λ_0 , independiente del voltaje aplicado (dentro de ciertos límites).

b) Si se hace incidir luz de una longitud de onda $\lambda < \lambda_0$ sobre el metal, circula más corriente cuanto mayor sea la intensidad de la luz, en forma directamente proporcional.

c) Si $\lambda < \lambda_0$ y la intensidad luminosa no varía, la corriente depende en forma no lineal del voltaje aplicado, y llega a la saturación con un voltaje V_0 , por encima del cual no aumenta la corriente (véase la Fig. 28). El voltaje V_0 depende del metal que se esté estudiando.

d) Si se aplica al electrodo una tensión negativa creciente, a partir de cero, la corriente no cesa del todo hasta que la tensión alcanza un cierto valor. Este valor crece con la frecuencia de la luz incidente.

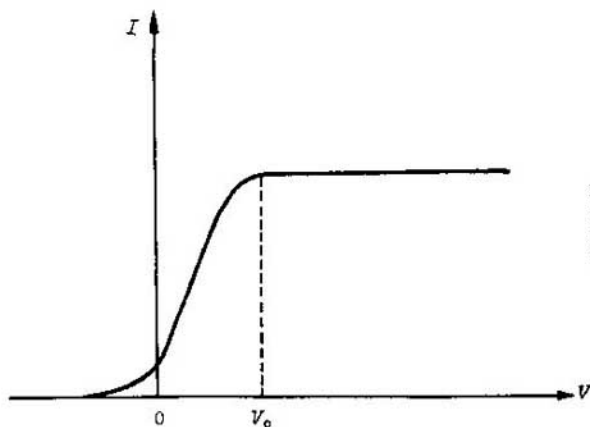


Fig. 28. Corriente de emisión fotoeléctrica en función de la tensión aplicada.

La explicación del fenómeno la dio Einstein (1905), a partir de la hipótesis de que un rayo de luz se comporta como un haz de partículas. Este fenómeno llamado efecto fotoeléctrico, se debe al choque de una partícula de luz, que se llama "fotón", contra un electrón al que extrae del metal. Para ello, el fotón tiene que transferir al electrón suficiente energía para desprenderlo del metal. Si se supone que la energía de cada fotón depende de la frecuencia de la onda luminosa, como supuso Einstein, siguiendo a Planck (1900), según la relación:

$$E_{\text{fotón}} = h\nu \quad [114]$$

donde h es la constante de Planck y ν es la frecuencia. Si llamamos \mathcal{E} a la energía requerida para arrancar un electrón del metal, entonces se puede explicar la parte a) y d) ya que a menos que el fotón tenga una energía mayor que \mathcal{E} no circulará corriente. La energía del electrón arrancado es eV (donde e es la carga del electrón y V la diferencia de potencial aplicado) y está relacionada con $E_{\text{fotón}}$ y \mathcal{E} por medio de:

$$h\nu = eV + \mathcal{E}$$

La parte b) también se explica ahora en forma inmediata. La intensidad de la luz dependerá del número de fotones. Y a mayor intensidad, más fotones desprenderán electrones y circulará más corriente.

Y, finalmente, la parte c) se justifica por el hecho de que algunos electrones que salen pueden regresar al metal si no hay un campo eléctrico que los barra. Es decir, se forma una nube de electrones en la superficie del metal que impide la circulación de la corriente, a menos que se aplique un campo eléctrico. Cuando todos los electrones son barridos, por más que se aumente el campo, es decir, que se aumente el potencial V aplicado, ya no aumenta la corriente (a menos que se produzca un arco).

Mediante el efecto fotoeléctrico se puede medir experimentalmente la razón $\frac{h}{e}$, donde e es la carga del electrón.

Además del efecto fotoeléctrico, hay muchos otros fenómenos, tales como el efecto Compton, la radiación de un cuerpo negro, etc. que corro-

boraron la interpretación dada por Einstein de que la luz está constituida por partículas elementales o fotones. Esto lleva inmediatamente a la conclusión de que la intensidad de la luz toma valores discretos, no continuos, múltiplos de $h\nu$. Y también lleva a la dualidad onda-corpúsculo y a una profunda revisión de los conceptos de la física, dado que ciertos fenómenos se explican considerando la luz como un agregado de fotones, y no puede explicárselos suponiendo que la luz está formada por ondas continuas, en tanto que otros fenómenos, tales como difracción e interferencia de la luz, son explicados considerándola como ondas, y no puede explicárselos suponiendo que la luz está formada por partículas.

La dualidad existente se busca conciliar mediante conceptos de mecánica cuántica, que ya se han discutido, y una de cuyas bases es el principio de incertidumbre (ecuación [107]), o también, lo que es equivalente:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad [115]$$

que indica que la incertidumbre en la determinación del impulso por la incertidumbre en la determinación de la posición de una partícula, de un fotón o de un sistema en su conjunto, tiene como límite la constante " \hbar ".

La física actual acepta como principio la imposibilidad del conocimiento total de un sistema y se conforma con una descripción parcial del mismo.

APLICACIONES

PÉNDULO LIBRE DE TORSIÓN

El péndulo de torsión consiste en un alambre metálico vertical sujeto por su extremo superior y cuyo extremo inferior está rígidamente unido a un cuerpo cualquiera que cuelga por gravedad. Supóngase que este cuerpo es de simetría cilíndrica y que su eje coincide con el eje del alambre. El cuerpo puede girar alrededor del eje, lo que provoca un movimiento de torsión en el alambre.

Si a partir de su posición de equilibrio, se hace girar en un ángulo α el cuerpo suspendido alrededor del eje vertical (y mientras no se supere cierto ángulo límite de proporcionalidad), se origina en el alambre un par de torsión M_t , proporcional al ángulo α :

$$M_t = D \cdot \alpha \quad [116]$$

donde D es una constante que depende del material, de la cuarta potencia del radio del alambre y de la inversa de la longitud del alambre:

$$D = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^4}{l} \quad [117]$$

donde \dagger es el módulo de torsión del alambre.

El par de inercia M_i es el producto del momento de inercia del sistema con respecto al eje de rotación (I) por la aceleración angular ($\ddot{\alpha} = d^2\alpha/dt^2$):

$$M_i = I \cdot \ddot{\alpha} \quad [118]$$

Se debe considerar, además, el par de amortiguamiento M_a debido a que el péndulo es frenado por la viscosidad del aire en que se encuentra:

$$M_a = B \cdot \dot{\alpha} \quad [119]$$

El amortiguamiento es proporcional a la velocidad angular $\dot{\alpha}$ y B es el coeficiente de proporcionalidad. Si en vez de aire, el medio fuese agua o aceite, B sería considerablemente mayor.

La suma de [116], [118] y [119] debe ser igual a cualquier otro par que se aplique al péndulo externamente (par exterior aplicado). En el caso de movimiento libre, o sea pares exteriores nulos, se tendrá:

$$I \cdot \ddot{\alpha} + B \cdot \dot{\alpha} + D\alpha = 0 \quad [120]$$

Ésta es la ecuación diferencial del movimiento. El tipo de movimiento resultante depende del valor del discriminante Δ :

$$\Delta = \frac{B^2}{4I^2} - \frac{D}{I}$$

Si $\Delta > 0$, la solución es:

$$\alpha = A \cdot e^{(-b-\sqrt{\Delta})t} + C \cdot e^{(-b+\sqrt{\Delta})t} \quad [121]$$

donde A y C son las constantes de integración, que dependen de las condiciones iniciales, y:

$$b = B/(2 \cdot I)$$

Este movimiento se representa simplemente por una curva exponencial. El péndulo vuelve lentamente desde su posición inicial a la de reposo. Se lo llama movimiento sobreamortiguado. Si las condiciones iniciales están dadas en la forma usual:

$$\alpha(t=0) = K$$

$$\dot{\alpha}(t=0) = L$$

la solución puede expresarse por:

$$\alpha = e^{-bt} \left[K \cosh \sqrt{\Delta} t + (L + bK) \frac{\sinh \sqrt{\Delta} t}{\sqrt{\Delta}} \right] \quad [122]$$

que es una forma general, válida aun si el discriminante es nulo o negativo. En efecto, si $\Delta = 0$, la ecuación [122] se reduce a:

$$\alpha = e^{-bt} [K + (L + bK) \cdot t] \quad [123]$$

y el movimiento, llamado crítico, es también un retorno exponencial desde una posición α a la de reposo. Ahora bien, la vuelta es menos lenta que en el caso sobreamortiguado, aunque igualmente asintótica. Para pasar de la ecuación [122] a la [123], sólo hay que tener en cuenta que el límite de $\frac{\sinh \sqrt{\Delta} t}{\sqrt{\Delta}}$ es t , cuando $\sqrt{\Delta}$ tiende a cero.

Finalmente, si $\Delta < 0$, la solución es:

$$\alpha = e^{-bt} \left[K \cos \omega t + (L + bK) \frac{\sin \omega t}{\omega} \right] \quad [124]$$

donde $\omega = \sqrt{-\Delta}$, y que también se deduce de la ecuación [122] si se considera que $\sqrt{\Delta}$ es imaginario. Este movimiento es el conocido movimiento oscilatorio amortiguado (ecuación [43]).

Estos tipos de movimiento ocurren en casi todos los instrumentos eléctricos de aguja (voltímetros, amperímetros y galvanómetros), por lo cual interesan desde el punto de vista experimental.

MOVIMIENTO OSCILATORIO FORZADO

Si al péndulo de torsión con $\Delta < 0$ se le aplica un par armónico externo M_0 , de frecuencia angular ω^1 , por ejemplo por medio de un motor y una biela,

$$M_e = K \cos \omega' \cdot t \quad [125]$$

la ecuación del movimiento será:

$$I\ddot{\alpha} + B\dot{\alpha} + D\alpha = K \cos \omega' t \quad [126]$$

cuya solución es:

$$\alpha = A e^{-bt} \cos(\omega t - \varphi) + E \cos(\omega' t - \psi) \quad [127]$$

El primer término de la solución es equivalente a la ecuación [124], con el mismo significado de b y ω , pero escribiendo las condiciones iniciales como un coeficiente y una fase (A y φ). Se lo llama transitorio del movimiento, y al decrecer exponencialmente llega a hacerse despreciable al cabo de un tiempo suficientemente largo. El segundo sumando, que se llama estado estacionario del movimiento, domina al final. Los parámetros E y ψ valen:

$$E = \frac{K}{\omega' \sqrt{B^2 + \left[\omega' I - \frac{D}{\omega'} \right]^2}}$$

$$\psi = \arctg \frac{B}{\frac{D}{\omega'} - \omega' I}$$

En consecuencia, el movimiento es armónico indefinidamente, aun cuando existe un medio amortiguante. En el estado estacionario la amplitud es máxima cuando $\omega' = \frac{D}{\sqrt{I}}$. A ésta se la llama frecuencia de resonancia. En esta frecuencia $\psi = \pi/2$, lo que implica que existe un desfase de $\pi/2$ entre el movimiento del par externo, o movimiento excitante, y el movimiento de péndulo de torsión. Si, en cambio, $\omega' \rightarrow 0$, también $\psi \rightarrow 0$, mientras que si $\omega' \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow \pi$.

Este tipo de movimiento es de suma importancia en física, y su estudio tiene mucho interés. Es relativamente fácil montar el experimento en el laboratorio de enseñanza. Puede hacerse con un péndulo de torsión o con un volante oscilante. Se miden la amplitud y la fase.

CIRCUITO RLC SERIE

En el caso de tener un circuito formado por una resistencia eléctrica R , una inductancia L y una capacidad C conectados en serie a una fuente de tensión, la ecuación diferencial del voltaje es:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = V$$

donde V es el potencial aplicado e i es la intensidad de la corriente. Si se deriva esta ecuación con respecto al tiempo se obtiene:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dV}{dt}$$

y se puede hacer el siguiente paralelo con el caso del péndulo de torsión:

- t equivale a α
- dV/dt equivale a M_s
- L equivale a I
- R equivale a E
- $1/C$ equivale a D

Si V es nulo, se obtienen resultados del mismo tipo para t que para α en el caso del péndulo libre. Si el potencial V es generado por un oscilador electrónico, de onda senoidal:

$$V = V_0 \text{ sen } \omega''t \quad dV/dt = V_0 \omega'' \cos \omega''t$$

se obtienen resultados del mismo tipo para t que para α en oscilaciones forzadas, con $K = V_0 \omega''$. Resultados de este tipo son más fáciles de lograr en los laboratorios de enseñanza que las oscilaciones forzadas mecánicas, ya que para su observación y medición sólo se requieren una capacidad, una resistencia, una inductancia, un oscilador y un osciloscopio.

BIBLIOGRAFÍA

A continuación se da una brevísima lista de los libros que pueden servir de guía, tanto para ampliar, como para profundizar, en el tema de ondas. Esta lista, que por cierto es incompleta, se ha dividido en tres partes: libros de nivel introductorio, que corresponden a las primeras materias de la universidad en las respectivas disciplinas; libros de nivel superior, no recomendables para principiantes, pero sí para quienes deseen profundizar en el tema, y finalmente libros de apoyo matemático.

NIVEL INTRODUCTORIO

Obras sobre física general:

ARONS, A. B. *Development of Concepts of Physics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 972 págs. (1965). Traducción al español: *Evolución de los Conceptos de la Física*, Editorial Trillas, México, D. F., 1008 págs. (1970).

FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B. y SANDS, M. L. *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., Vol. I: 519 págs. (1963); Vol. II: 560 págs. (1964) y Vol. III: 376 págs. (1965).

PHYSICAL SCIENCE STUDY COMMITTEE (PSSC). *Physics*, Heath, Lexington, Mass., 656 págs. (1960).

RESNICK, R. y HALLIDAY, D. *Physics for Students of Science and Engineering*, Wiley, Nueva York, N. Y., 594 págs. (1960). Traducción al español: *Física para Estudiantes de Ciencias e Ingeniería*, Editorial Continental, México, D. F., 1558 págs. (1963).

Obras sobre mecánica y movimientos ondulatorios en la mecánica:

BRUHAT, G. *Cours de Physique Générale: Mécanique*, Masson, París, 724 págs. (1967).

INGARD, U. y KRAUSHAAR, W. L. *Introduction to Mechanics, Matter and Waves*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 672 págs. (1960).

ROEDERER, J. G. *Mecánica Elemental*, Editorial Eudeba, Buenos Aires, 283 págs. (1963).

Obras sobre temas de óptica y ondas luminosas:

BRUHAT, G. *Cours de Physique Générale: Optique*, Masson, París, 1026 págs. (1965).

JENKINS, F. A. y WHITE, H. E. *Fundamentals of Optics*, McGraw, Nueva York, N. Y., 637 págs. (1950).

ROSSI, B. *Optics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 513 págs. (1972).

STRONG, J. *Concepts of Classical Optics*, Freeman, San Francisco, Calif., 692 págs. (1958).

Obras sobre temas de sonido (ondas en medios elásticos):

BRUHAT, G. Cours de Physique Générale: Mécanique, Masson, París, 724 págs. (1967).

MORSE, P.M. e INGARD, K.U. Theoretical Acoustics, McGraw, Nueva York, N.Y., 960 págs. (1968).

ROEDERER, J.G. Mecánica Elemental, Editorial Eudeba, Buenos Aires, 283 págs. (1963).

Obras sobre ondas electromagnéticas:

BRUHAT, G. Cours de Physique Générale: Électricité, Masson, París, 912 págs. (1967).

HARNWELL, G.P. Principles of Electricity and Electromagnetism, McGraw, Nueva York, N.Y., 655 págs. (1949).

SKILLING, H.H. Fundamentals of Electric Waves, Wiley, Nueva York, N.Y., 245 págs. (1948). Traducción al español: Los Fundamentos de las Ondas Eléctricas, Librería del Colegio, Buenos Aires, 296 págs. (1960).

Obras sobre ondas y mecánica cuántica:

BORN, M. The Restless Universe, Dover, Nueva York, N.Y., 315 págs. (1951). Traducción al español: El Inquieto Universo, Editorial Eudeba, Buenos Aires, 340 págs. (1960).

NIVEL SUPERIOR

BORN, M. y WOLF, E. Principles of Optics, Pergamon, Londres, 836 págs. (1970). (Excelente obra de consulta sobre óptica en general. Se recomienda tener una buena base de electromagnetismo antes de abordar.)

GOLDSTEIN, H. Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 399 págs. (1950). Traducción al español: Mecánica Clásica, Editorial Aguilar, Madrid, 456 págs. (1970). (Trata la mecánica racional. Puede consultarse en especial pequeñas oscilaciones y coordenadas normales.)

KITTEL, C. Introduction to Solid State Physics, Wiley, Nueva York, N.Y., 766 págs. (1971). (Trata las vibraciones en cristales, mediante la mecánica cuántica.)

LANDAU, L. y LIFSHITZ, E. Course of Theoretical Physics. (Original en ruso). Tratado en siete tomos sobre física teórica: Mechanics: 165 págs. (1969); The Classical Theory of Fields, 374 págs. (1971); Quantum Mechanics, 616 págs. (1965); Statistical Physics, 484 págs. (1969); Fluid Mechanics, 536 págs. (1959); Theory of Elasticity, 165 págs. (1970); Electrodynamics of Continuous Media, 417 págs. (1960). Pergamon-Addison-Wesley, Nueva York, N.Y. (En todos los tomos se tratan temas relacionados con "ondas". Esta notable obra monumental puede considerarse de consulta obligada para el lector riguroso y muy exigente.)

PANOFSKY, W.K.H. y PHILLIPS, M. Classical Electricity and Magnetism, Addison-Wesley, Reading, Mass., 494 págs. (1962). (Ondas electromagnéticas en general.)

WOOD, A.B. A Textbook of Sound, G. Bell & Sons, Londres, 610 págs. (1955). (Sonido en general.)

LIBROS DE APOYO MATEMÁTICO

REY PASTOR, J., PI CALLEJA, P. y TREJO, C.A. Análisis Matemático, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, Vol. I: 818 págs. (1952); Vol. II: 624 págs. (1957) y Vol. III: 718 págs. (1959). (Para consulta de análisis y matemática en general.)

REY PASTOR, J., SANTALÓ, L.A. y BALANZAT, M. Geometría Analítica, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 536 págs. (1955).

SANTALÓ, L.A. Vectores y Tensores con sus Aplicaciones, Editorial Eudeba, Buenos Aires, 382 págs. (1966).

COLECCIÓN DE MONOGRAFÍAS CIENTÍFICAS

Publicadas

Serie de matemática

- N° 1. La Revolución en las Matemáticas Escolares, por el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas de los Estados Unidos de América.
- N° 2. Espacios Vectoriales y Geometría Analítica, por Luis A. Santaló.
- N° 3. Estructuras Algebraicas I, por Enzo R. Gentile.
- N° 4. Historia de las Ideas Modernas en la Matemática, por José Babini.
- N° 5. Álgebra Lineal, por Orlando Villamayor.
- N° 6. Algebra Linear e Geometría Euclidiana, por Alexandre Augusto Martins Rodrigues.
- N° 7. El Concepto de Número, por César A. Trejo.
- N° 8. Funciones de Variable Compleja, por José I. Nieto.
- N° 9. Introducción a la Topología General, por Juan Horváth.
- N° 10. Funções Reais, por Djairo G. de Figueiredo.
- N° 11. Probabilidad e Inferencia Estadística, por Luis A. Santaló.
- N° 12. Estructuras Algebraicas II (Álgebra Lineal), por Enzo R. Gentile.
- N° 13. La Revolución en las Matemáticas Escolares (Segunda Fase), por Howard F. Fehr, John Camp y Howard Kellogg.
- N° 14. Estructuras Algebraicas III (Grupos Finitos), por Horacio O'Brien.

Serie de física

- N° 1. Concepto Moderno del Núcleo, por D. Allan Bromley.
- N° 2. Panorama de la Astronomía Moderna, por Félix Cernuschi y Sayd Codina.
- N° 3. La Estructura Electrónica de los Sólidos, por Leopoldo M. Falicov.
- N° 4. Física de Partículas, por Igor Saavedra.
- N° 5. Experimento, Razonamiento y Creación en Física, por Félix Cernuschi.
- N° 6. Semiconductores, por George Bemski.
- N° 7. Aceleradores de Partículas, por Fernando Alba Andrade.
- N° 8. Física Cuántica, por Onofre Rojo y H. McIntosh.
- N° 9. La Radiación Cósmica, por Gastón R. Mejía y Carlos Aguirre.
- N° 10. Astrofísica, por Carlos Jaschek y Mercedes C. de Jaschek.
- N° 11. Ondas, por Oscar J. Bressan y Enrique Gaviola.

Serie de química

- N° 1. Cinética Química Elemental, por Harold Behrens Le Bas.
- N° 2. Bioenergética, por Isaias Raw y Walter Colli.
- N° 3. Macromoléculas, por Alejandro Paladini y M. Burachik.
- N° 4. Mecanismos de las Reacciones Orgánicas, por Jorge A. Brioux.
- N° 5. Elementos Encadenados, por Jacobo Gómez-Lara.
- N° 6. Enseñanza de la Química Experimental, por Francisco Giral.
- N° 7. Fotoquímica de Gases, por Ralf-Dieter Penzhorn.

- N° 8. Introducción a la Geoquímica, por Félix González-Bonorino.
 N° 9. Resonancia Magnética Nuclear de Hidrógeno, por Pedro Joseph-Nathan.
 N° 10. Cromatografía Líquida de Alta Presión, por Harold M. McNair y Benjamín Esquivel H.
 N° 11. Actividad Óptica, Dispersión Rotatoria Óptica, y Dicroísmo Circular en Química Orgánica, por Pierre Crabbé.
 N° 12. Espectroscopia Infrarroja, por Jesús Morcillo Rubio.
 N° 13. Polarografía, por Alejandro J. Arvía y Jorge A. Bolzan.

Serie de biología

- N° 1. La Genética y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por José Luis Reissig.
 N° 2. Bases Ecológicas de la Explotación Agropecuaria en la América Latina, por Guillermo Mann F.
 N° 3. La Taxonomía y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por Elías R. de la Sota.
 N° 4. Principios Básicos para la Enseñanza de la Biología, por Oswaldo Frota-Pessoa.
 N° 5. A Vida da Célula, por Renato Basile.
 N° 6. Microorganismos, por J. M. Gutiérrez-Vázquez.
 N° 7. Principios Generales de Microbiología, por Norberto J. Palleroni.
 N° 8. Los Virus, por Enriqueta Pizarro-Suárez y Gamba.
 N° 9. Introducción a la Ecología del Bentos Marino, por Manuel Vegas Vélez.
 N° 10. Biosíntesis de Proteínas y el Código Genético, por Jorge E. Allende.
 N° 11. Fundamentos de Inmunología e Inmunología Química, por Félix Córdoba Alva y Sergio Estrada-Parra.
 N° 12. Bacteriófagos, por Romilio Espejo T.
 N° 13. Biogeografía de América Latina, por Angel L. Cabrera y Abraham Willink.
 N° 14. Relación Huésped-Parásito. Mecanismo de Patogenicidad de los Microorganismos, por Manuel Rodríguez Leiva.

85

En preparación

Serie de matemática

- Estructuras Algebraicas IV (Álgebra Multilineal), por Orlando Villamayor y Artibano Micali.
 Estructuras Algebraicas V (Teoría de Cuerpos), por Darío J. Picco.
 Estructuras Algebraicas VI (Estructura de Álgebras), por Artibano Micali.
 Introducción al Análisis, por Manuel Balanzat.
 Introducción a la Integral de Lebesgue en la Recta, por Juan Antonio Gatica.
 Introdução à Análise Funcional: Espaços de Banach e Cálculo Diferencial, por Leopoldo Nachbin.
 Introducción a los Espacios de Hilbert, por José I. Nieto.
 Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, por Chaim S. Hönig.
 Introducción a la Computación, por Jaime Michelow.
 Teoría General de la Optimización, por Enrique Cansado.
 Teoría de Grafos, por Fausto Toranzos.
 Programación Lineal, por Fernando G. Garagorry.

Serie de física

- El Láser, por Mario Garavaglia.
Cálculo de Errores, Aplicación y Teoría, por Wolfgang Meckbach.
Oceanografía Física, por Luis E. Herrera.
Teoría de Fluidos, por Antonio E. Rodríguez y Roberto E. Caligaris.

Serie de química

- Paramagnetismo Electrónico, por Juan A. McMillan.
Productos Naturales Vegetales, por Venancio Deulofeu y colaboradores.
Introducción a la Estereoquímica, por Juan A. Garbarino.
Fotometría de Llama por Emisión, por Juan Ramírez Muñoz.
Fotometría de Llama por Absorción Atómica, por Juan Ramírez Muñoz.
Cromatografía en Papel y en Capa Delgada, por Xorge A. Domínguez.
Momento Polar, por Pedro Lehman.
Fluorescencia Atómica, por Juan Ramírez Muñoz.
Introdução à Espectrometria de Massa das Substancias Organicas, por Otto R. Gottlieb.
Los Esteroides, por Josef E. Herz.
Termoquímica Moderna, por Jaime Cases.
Cromatografía de Gases, por Harold M. McNair.

Serie de biología

86

- Micología, por Margarita Silva-Hutner, William C. Merz y Luiz R. Travassos.
Procesos Microbianos Aerobios de Importancia Industrial, por Carlos Casas-Campillo.
Microbiología de Suelos, por Luis Longeri Spada.
Ecología Fisiológica, por Ernesto Medina.
Etología: El Estudio del Comportamiento Animal, por Raúl Vaz-Ferreira.
Citogenética Básica y Biología de los Cromosomas, por F. A. Saez y H. Cardoso.
Citogenética Ultraestructural y la Biología Molecular de los Cromosomas, por R. Wettstein y J. Roberto Sotelo.
Análisis de Sistemas en Ecología, por Gilberto C. Gallopín.
Ecología de Poblaciones, por Jorge E. Rabinovich.
Sistemas Ecológicos y el Hombre, por Ariel E. Lugo.
Inventario de Vegetación de Biomas, por Jorge Morello.

Nota: Las personas interesadas en adquirir estas obras deben dirigirse a la Unidad de Ventas y Circulación, Organización de los Estados Americanos, Washington, D. C., 20006 o a las Oficinas de la Secretaría General de la OEA en el país respectivo.